



*Facultad  
de  
Ciencias*

**El número de puntos enteros en  
algunos conjuntos de  $\mathbb{R}^n$**   
*(The number of integer points in  
some sets of  $\mathbb{R}^n$ )*

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al  
**Grado en Matemáticas**

Autor: Javier Laso Gómez.  
Director: Carlos Beltrán Álvarez.  
Julio - 2023



## Resumen

Este trabajo está dedicado al cálculo de aproximaciones del volumen de conjuntos semi-algebraicos. Estos conjuntos están formados por una unión finita de conjuntos definidos mediante ecuaciones y desigualdades polinómicas. Para ello, se proporcionarán los teoremas y proposiciones necesarios para acotar el volumen de conjuntos semi-algebraicos que estén contenidos en cubos de  $\mathbb{R}^n$  y se explicarán distintos algoritmos con el objetivo de calcular dichas aproximaciones.

**Palabras Clave:** Conjunto semi-algebraico, Aproximación, Volumen , Algoritmo.

## Abstract

This work is devoted to the computation of volume approximations of semialgebraic sets. These sets are formed by a finite union of sets defined by means of equations and polynomial inequalities. For this purpose, the theorems and propositions necessary to bound the volume of semialgebraic sets contained in  $\mathbb{R}^n$  cubes will be proved and different algorithms to compute these approximations will be explained.

**Palabras Clave:** Semialgebraic Sets, Approximation, Volume, Algorithm.



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceptos básicos</b>	<b>2</b>
1.1 Conjuntos semi-algebraicos . . . . .	2
1.2 Algunos conceptos topológicos. . . . .	7
<b>2 Aproximación del volumen de conjuntos semi-algebraicos</b>	<b>8</b>
2.1 Acotación del volumen de E. . . . .	8
2.2 Algoritmo para calcular la aproximación del volumen de E. . . . .	14
2.3 Aproximación del volumen de conjuntos no contenidos en $[0,1]^n$ . . . . .	18
<b>3 Aplicación práctica del algoritmo.</b>	<b>22</b>
3.1 Ejemplos prácticos del Algoritmo I. . . . .	22
3.2 Conclusión del código. . . . .	27
<b>Bibliografía</b>	<b>33</b>



# Introducción

El cálculo de áreas y volúmenes ha estado presente en las matemáticas desde la Antigua Grecia. Arquímedes, en el siglo III A.C., afirmó que el volumen de la esfera es igual a dos tercios del volumen del cilindro circular circunscrito a ella. Esta afirmación se basa en el método de exhaución de Eudoxo el cual, 2000 años más tarde, desembocó en el cálculo integral. En esta misma época se empezaron a plantear problemas cotidianos usando conceptos geométricos como la tangente a una curva, que dieron origen a lo que actualmente conocemos como cálculo infinitesimal. Estos problemas no encontraron métodos de resolución hasta el siglo XVII de la mano de Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz que, al sintetizar y unir sus ideas, dieron los primeros pasos del cálculo diferencial.

El cálculo diferencial junto al cálculo integral tienen mucha importancia en el cálculo de áreas, volúmenes y en el estudio de los conjuntos y sus propiedades. Por un lado, el cálculo integral se encarga del estudio de las integrales, a partir de estas se pueden calcular volúmenes, áreas, resolver ecuaciones diferenciales o analizar comportamientos y propiedades de las funciones. Por el otro lado, el cálculo diferencial es una parte del cálculo infinitesimal y estudia como cambian las funciones continuas usando principalmente la noción de derivada, lo cual permite hacer un análisis de los comportamientos de las funciones.

El avance del conocimiento matemático ha dado lugar a muchos tipos de conjuntos, alguno de ellos de gran complejidad, lo que complica su estudio y en consecuencia el cálculo de su tamaño. Ejemplo de ello son los conjuntos semi-algebraicos, que al estar formados por una unión finita de conjuntos definidos mediante ecuaciones e inecuaciones polinómicas, da lugar a un gran abanico de conjuntos, desde los conjuntos más básicos y de fácil estudio como la esfera, hasta otros tan complejos que resulta imposible calcular su volumen de forma analítica. En este trabajo se va a intentar realizar una aproximación del volumen de los conjuntos semi-algebraicos cuando esta acotación sea posible y que sea útil para conjuntos cuyo cálculo requiera una gran dificultad.

El desarrollo de la informática ha tenido un papel fundamental en la investigación matemática, en concreto en la matemática computacional, que es la rama encargada de la resolución de problemas mediante la simulación por ordenador. En el siglo XVII, el matemático y filósofo Blaise Pascal crea la primera máquina capaz de realizar cálculos. Este invento es el precursor de las calculadoras y computadoras modernas, pero no es hasta mediados del siglo XX cuando aparecen los primeros ordenadores electrónicos y los primeros lenguajes de programación, que evolucionarán hasta llegar a los lenguajes

actuales. En este trabajo se usará la plataforma de programación y cálculo numérico, Matlab, que junto a un algoritmo permitirá obtener aproximaciones de los volúmenes de distintos conjuntos semi-algebraicos.

Este problema se puede ver desde el punto de vista de estimar el volumen de un conjunto semialgebraico o, como indica el título de este TFG, de estimar el número de puntos enteros en conjuntos semialgebraicos: ambos son versiones equivalentes del mismo problema, puesto que el volumen se estima como la proporción de puntos en una rejilla en el conjunto frente al total, y mediante una homotecia de la razón apropiada, esto es equivalente a contar puntos enteros en el conjunto resultante. Durante el desarrollo del trabajo nos ha parecido más natural centrarnos en el estudio desde el punto de vista del volumen, por lo que mantenemos esa versión del problema en el resto de la memoria.

Por tanto, en base a los conocimientos matemáticos desarrollados en las distintas ramas como el cálculo integral, cálculo diferencial y matemática computacional se realizará este trabajo.

En el primer capítulo se definirán los conjuntos semi-algebraicos y se enunciarán sus principales propiedades. También se explicarán otras características de los conjuntos que permitirán comprender mejor su comportamiento.

En el segundo capítulo, se realizará la demostración de que el volumen de un conjunto semi-algebraico contenido en  $[0, 1]^n$  está acotado, para posteriormente mostrar y explicar dos algoritmos que aproximen su volumen. También se explicará como aproximar el volumen de conjuntos semi-algebraicos acotados pero que no están contenidos en  $[0, 1]^n$ .

Finalmente, se pondrá en práctica lo visto en el segundo capítulo. Para ello, se realizarán varios ejemplos de distinta dificultad. Este proceso se hará mediante un código en Matlab que simule uno de los algoritmos. Con los resultados obtenidos se observará la precisión y eficacia del algoritmo.

# Capítulo 1

## Conceptos básicos

Este primer capítulo va a estar destinado principalmente a definir los conjuntos semi-algebraicos, sobre los cuales se va a desarrollar este trabajo, además de exponer sus características y detallar sus principales propiedades.

Por otro lado, se dará una introducción a otras propiedades necesarias para poder demostrar los distintos teoremas utilizados para acotar el volumen de dichos conjuntos.

### 1.1 Conjuntos semi-algebraicos

En este trabajo se va a tratar de calcular o aproximar el volumen de conjuntos semi-algebraicos. Estos conjuntos tienen unas ciertas características que van a ser útiles a la hora de aproximar su volumen mediante un algoritmo. A continuación, se van a definir los conjuntos semi-algebraicos, además de explicar algunas de sus principales propiedades.

**Definición 1.1.1 (Conjunto semi-algebraico).** *Un conjunto semi-algebraico está formado por una unión finita de conjuntos semi-algebraicos básicos.*

**Definición 1.1.2 (Conjunto semi-algebraico básico).** *Un conjunto semi-algebraico básico es un subconjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  definido por una cantidad finita de ecuaciones polinómicas de la forma  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  y de desigualdades de la forma  $Q(x_1, \dots, x_n) > 0$ . Un conjunto semi-algebraico básico se puede expresar de la siguiente forma.*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : p_1(x) = 0, \dots, p_k(x) = 0, q_1(x) > 0, \dots, q_m(x) > 0\}$$

Donde  $p_1(x), \dots, p_k(x), q_1(x), \dots, q_m(x)$  son polinomios en  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n$ .

Una de las cualidades de estos conjuntos es la facilidad para saber si un punto pertenece al conjunto o no. Es decir, sea  $E$  un conjunto semi-algebraico y sea  $x \in \mathbb{R}^n$  un punto, entonces  $x \in E$  si verifica las ecuaciones y desigualdades vistas en la anterior definición.

Aparte de esta característica, los conjuntos semi-algebraicos tienen más propiedades, las cuales van a ser detalladas a continuación siguiendo el trabajo de M. Coste en [Cos98].

**Proposición 1.1.3.** (*Propiedades de los conjuntos semi-algebraicos.*)

- i) Los conjuntos semi-algebraicos son cerrados bajo las operaciones de unión, intersección y complementario. Es decir, sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos semialgebraicos. Entonces  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  y  $A^c$  son conjuntos semi-algebraicos.
- ii) Los conjuntos semi-algebraicos son cerrados bajo transformaciones afines. Es decir, sea  $A$  un conjunto semi-algebraico y sea  $f$  una transformación afín, entonces  $f(A)$  es un conjunto semi-algebraico.
- iii) (**Teorema de Tarski-Seidenberg**). Sea  $A$  un conjunto semi-algebraico de dimensión  $n$  y sea  $m \leq n$ . Entonces, considerando la proyección,  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la imagen de  $A$  por la proyección,  $\pi(A)$ , es un conjunto semi-algebraico.
- iv) Un conjunto semi-algebraico es un conjunto medible Lebesgue.

*Demostración.*

- i) Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos semi-algebraicos, formados por una cantidad finita de conjuntos semi-algebraicos básicos definidos de la siguiente manera.

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i(x) = 0, q_j > 0\}$$
$$B_m = \{x \in \mathbb{R}^n : f_{i'}(x) = 0, g_{j'} > 0\}$$

Entonces, se tiene que ver que los conjuntos  $S = A \cup B$  y  $S' = A \cap B$  son conjuntos semi-algebraicos. Viendo como están definidos los conjuntos  $A$  y  $B$  y siendo  $N$  y  $M$  dos números naturales, podemos definir  $S$  de la siguiente forma.

$$S = (\cup_{n=0}^N A_n) \cup (\cup_{m=0}^M B_m)$$

Por definición este conjunto es semi-algebraico.

El conjunto  $S'$  se va a definir de la siguiente forma.

$$S' = (\cup_{n=0}^N A_n) \cap (\cup_{m=0}^M B_m)$$

Entonces  $S'$  se define como el conjunto que contiene todos los puntos que pertenecen a ambos conjuntos. Como estos conjuntos están formados por la unión finita de conjuntos definidos mediante una combinación de ecuaciones y desigualdades, entonces dicha intersección se podrá definir como una unión finita de conjuntos dados por una combinación de ecuaciones y desigualdades. Concluyendo que por definición  $S'$  es un conjunto es semi-algebraico.

Ahora se comprobará si el conjunto complementario de  $A$  es un conjunto semi-algebraico, para ello se definirán los conjuntos semi-algebraicos básicos que lo forman como  $A_n^c$ , mediante la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} A^c &= \{x \notin A\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < p_i(x) \text{ o } p_i(x) > 0 \text{ o } q_j < 0 \text{ o } q_j = 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : p_i(x) > 0 \text{ o } -q_j > 0 \text{ o } -p_i(x) > 0 \text{ o } q_j = 0\} \end{aligned}$$

Entonces queda visto que  $A^c$  se puede expresar como una combinación de ecuaciones y desigualdades, siendo  $A^c$  un conjunto semi-algebraico.

Si  $A$  es un conjunto semi-algebraico cualquiera, su complementario es la intersección de los conjuntos semi-algebraicos dados por el complementario de los conjuntos semi-algebraicos básicos que forman  $A$ . Por lo tanto,  $A^c$  es también semi-algebraico.

ii) Una transformación afín es una aplicación entre dos espacios afines tal que  $f(x) = Ax + b$ . Entonces, sea  $A$  un conjunto semi-algebraico el cual está formado por una unión finita de conjuntos semi-algebraicos básicos expresados mediante una cantidad finita de ecuaciones  $p_i(x) = 0$  y de desigualdades  $q_j(x) > 0$ . Si se aplica la transformación afín  $f$  a un conjunto  $A_i$ , se obtendrá un conjunto definido por la siguiente expresión.

$$A'_i = f(A_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1(f(x)) = 0, \dots, p_k(f(x)) = 0, q_1(f(x)) > 0, \dots, q_m(f(x)) > 0\}$$

El conjunto  $A'_i$  está definido por una cantidad finita de ecuaciones e inecuaciones, por tanto se puede concluir que es un conjunto semi-algebraico básico. Entonces el conjunto  $A'$  está expresado de la siguiente forma:

$$A' = \cup_{i=0}^n A'_i$$

Por la *Definición* 1.1.1, se puede concluir que  $A'$  es un conjunto semi-algebraico.

iii) Véase en [Cos02].

iv) Para esta demostración se van a usar dos propiedades de los conjuntos medibles. La primera dice que los conjuntos cerrados y abiertos son conjuntos medibles Lebesgue y la segunda indica que la unión y la intersección finitas de conjuntos medibles Lebesgue es un conjunto medible Lebesgue. ([FF02])

Entonces usando la *Definición* 1.1.2 de conjunto semi-algebraico básico, dicho conjunto está formado por una unión finita de conjuntos abiertos y de conjuntos cerrados expresados por las ecuaciones y desigualdades que definen los distintos conjuntos semi-algebraicos básicos. Entonces los conjuntos semi-algebraicos básicos son medibles Lebesgue y cómo un conjunto semi-algebraico es una unión finita de conjuntos semi-algebraicos básicos, es decir, una unión finita de conjuntos medibles Lebesgue, se concluye que un conjunto semi-algebraico es un conjunto medible Lebesgue.  $\square$

**Observación 1.1.4.** *Un conjunto algebraico es el conjunto de ceros de un conjunto de polinomios. Entonces, un conjunto algebraico es un conjunto semi-algebraico básico pero el recíproco no se cumple. ([AM95])*

*Un ejemplo de un conjunto semi-algebraico básico que no es un conjunto algebraico es el conjunto:*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 1/x \wedge x > 0\}$$

*Este conjunto es semi-algebraico básico, pero no es un conjunto algebraico ya que no puede ser descrito como la solución de un número finito de ecuaciones polinomiales.*

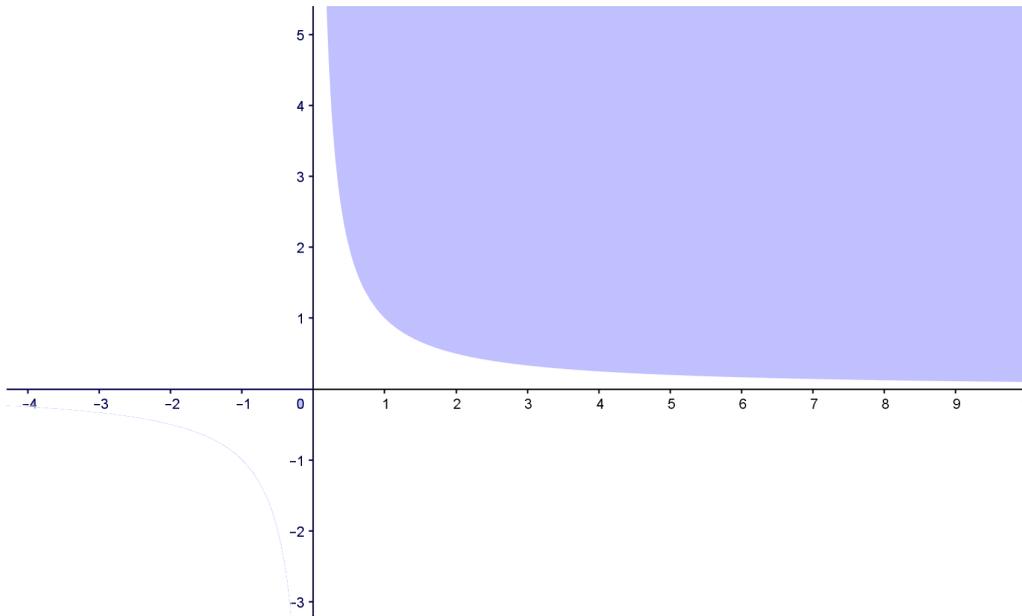


Figura 1.1: Ejemplo de conjunto semi-algebraico básico que no es algebraico. Dicho conjunto se expresa mediante la ecuación  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 1/x \wedge x > 0\}$ .

Por último, se van a mostrar algunos ejemplos de conjuntos semi-algebraicos, con sus respectivas ecuaciones y desigualdades que los definen.

**Ejemplo 1.1.5.** *i) En  $\mathbb{R}$  cualquier intervalo de la forma  $(a, b)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $a < b$  es un conjunto semi-algebraico. Estos intervalos se pueden definir mediante la siguiente expresión.*

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

*ii) El conjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , es decir, es el círculo de centro  $(0, 0)$  y radio 1.*

- iii) El conjunto  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ . Este conjunto representa la mitad superior de la bola cerrada de centro  $(0,0,0)$  y radio 1.
- iv) El conjunto  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$ , es decir, el hiperboloide de una hoja.
- v) El cono de revolución es un conjunto semi-algebraico, ya que este conjunto es formado por los puntos que satisfacen que:  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, z \geq 0, y = \sqrt{z - x^2}\}$

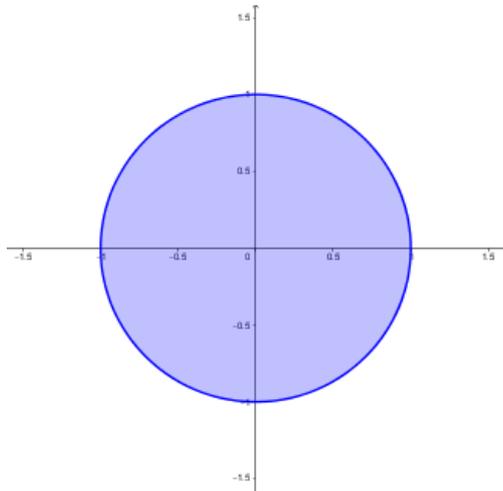


Figura 1.2: Ejemplo de conjunto semi-algebraico. Representa el círculo de centro  $(0,0)$  y radio 1 y viene definido por la expresión  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

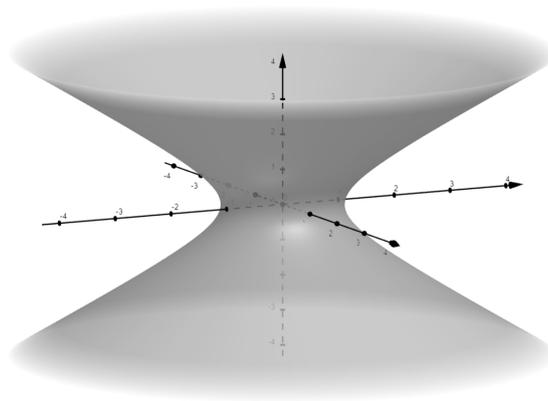


Figura 1.3: Ejemplo de conjunto semi-algebraico. Representa el hiperboloide de una hoja definido por la ecuación  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$ .

## 1.2 Algunos conceptos topológicos.

La topología es la rama de las matemáticas encargada de estudiar las propiedades de las figuras o conjuntos que permanecen invariantes cuando dichos objetos son deformados o plegados, de forma que no se pierden puntos ni aparecen nuevos puntos en el conjunto. Estos conjuntos son transformados mediante funciones continuas. Una de las propiedades que estudia la topología es la conexidad de los conjuntos, y este concepto va a ser importante en este trabajo.

Una de las ideas principales para obtener la aproximación del volumen de conjunto  $E$ , es obtener la cantidad de componentes conexas que tiene  $E$  cuando se interseca con una línea paralela a un eje de coordenadas. Por tanto, es importante definir que es un conjunto conexo, para ello se introducirán primero algunos conceptos topológicos.

**Definición 1.2.1 (Topología).** *Una topología sobre un conjunto  $X$  es una colección  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de  $X$  que verifica:*

- 1)  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- 2) *La unión de elementos de  $\mathcal{T}$  pertenece a  $\mathcal{T}$ .*
- 3) *La intersección finita de elementos de  $\mathcal{T}$  pertenece a  $\mathcal{T}$ .*

**Definición 1.2.2 (Espacio topológico).** *Un espacio topológico es un par  $(X, \mathcal{T})$  donde  $X$  es un conjunto y  $\mathcal{T}$  es una topología sobre  $X$ . Los elementos de  $\mathcal{T}$  se denominan conjuntos abiertos de la topología.*

Intuitivamente, un conjunto se considera conexo si aparece como una única pieza, es decir, no puede dividirse en dos o más componentes.

**Definición 1.2.3 (Conjunto conexo).** *Sea un subconjunto  $C \subseteq X$  de un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice conexo si no existen dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos  $U$  y  $V$  en  $X$  tales que  $C = U \cup V$ .*

Después de detallar que es un conjunto conexo, otra propiedad importante de los conjuntos sobre los que se va a aproximar su volumen es que son conjuntos acotados.

**Definición 1.2.4 (Conjunto acotado).** *Un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es acotado, si existe un valor  $r \geq 0$ , tal que, existe una bola contenida en  $\mathbb{R}^n$  de centro  $0$  y radio  $r$  que contiene al conjunto  $S$ .*

$$\exists r \geq 0 : S \subseteq \mathbf{B}(0, r)$$

Como los conjuntos sobre los que se van a trabajar están contenidos en un cubo de  $\mathbb{R}^n$ , es fácil ver que existe una bola de centro  $0$  en  $\mathbb{R}^n$  que contiene a dicho cubo, bastaría con tomar el radio  $r$  como la mayor distancia del centro a un punto del cubo. Por tanto, dicha bola contiene cualquiera de dichos conjuntos, de forma que estos conjuntos son acotados.

# Capítulo 2

## Aproximación del volumen de conjuntos semi-algebraicos

En este capítulo, primero se va a realizar la demostración de que el volumen de los conjuntos semi-algebraicos acotados, los cuales se denotarán por  $E$ , va a estar acotado por un valor obtenido en función de la dimensión en la que se trabaje y de las ecuaciones que definan dicho conjunto.

Después se van a generar distintos algoritmos que aproximen con la mayor exactitud posible el volumen de los conjuntos. Por lo tanto, se va a calcular una aproximación del volumen en función de  $\epsilon$ , siendo  $\epsilon > 0$  y obteniendo un valor que difiere del volumen del conjunto  $E$  en una cantidad máxima de  $\epsilon$ .

Los distintos teoremas, proposiciones, lemas con sus correspondientes demostraciones y los algoritmos que se van a ver en este capítulo están basados en [SS98] y en [Koi95]

### 2.1 Acotación del volumen de $E$ .

La idea para calcular el volumen de  $E$  es contar el número de puntos de una cuadrícula que pertenecen a dicho conjunto. Para ello, se va a considerar  $E$  un conjunto acotado, ya que está contenido en un cubo de  $\mathbb{R}^n$ , con la propiedad de que, para toda línea  $L$  paralela a uno de los ejes de coordenadas, el número de componentes conexas de la intersección  $L \cap E$  es menor a una constante.

**Definición 2.1.1.** *Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , se define  $\kappa(E)$  como el máximo número de componentes conexas de  $E \cap L$ , siendo  $L$  una línea paralela a algún eje de coordenadas.*

En particular, en dimensión 1,  $\kappa(E)$  es el número de componentes conexas de  $E$ . A continuación, se va a acotar el valor de  $\kappa(E)$  para cualquier dimensión  $n$ .

**Proposición 2.1.2.** *Sea  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto semi-algebraico definido por una cantidad finita ( $s$ ) de ecuaciones y de desigualdades polinómicas con grado, respecto una variable, a lo sumo  $d$ . Entonces  $\kappa(E) \leq sd + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $L$  una recta paralela a un eje cualquiera, entonces la intersección  $L \cap E$  viene dada por una combinación de  $s$  ecuaciones y desigualdades polinómicas de grado máximo  $d$ . Las raíces de estos polinomios están limitadas en número por un valor igual a  $sd$  y determinan un máximo de  $sd + 1$  intervalos. Cada uno de estos intervalos están en  $E$  o en su complementario, con lo cual se demuestra de forma directa que  $\kappa(E) \leq sd + 1$ .  $\square$

Se pueden obtener límites superiores exponenciales para  $\kappa(E)$ , si en la expresión que define el conjunto intervienen funciones exponenciales. Esto es una consecuencia directa de los resultados de Khovanskii en [Kho91].

Ahora se va a considerar un conjunto  $E \subseteq [0, 1]^n$ , con el objetivo de aproximar su volumen, el cual se va a denotar por  $v(E)$ . Para ello, se considera un número natural  $N \in \mathbb{N}$  y su inverso  $h = \frac{1}{N}$ . A partir de estos valores se va a definir una cuadrícula  $G$  contenida en  $[0, 1]^n$  dada por los puntos  $(y_1, \dots, y_n)$  con  $y_i \in \{0, h, 2h, \dots, (N-1)h\}$ . De esta forma, se genera una cuadrícula con una finura  $h$ , la cual contiene  $N^n$  puntos y se quiere estimar, en función de  $v(E)$ , la proporción de puntos de ellos pertenece a  $E$ , a esta proporción se la va a denotar por  $\mu_h(E)$ .

La finura de la cuadrícula  $G$ , va a tener una gran importancia en la precisión del algoritmo, ya que, a medida que  $h$  es más pequeño  $N$  es más grande y entonces la cuadrícula contiene más puntos y, por tanto, la proporción  $\mu_h(E)$  que va a dar el algoritmo es más próxima al volumen de  $E$ .

Para ver esto, se van a mostrar dos ejemplos de cuadrículas en  $\mathbb{R}^2$  que muestren la diferencia de puntos en función de la finura.

En la primera cuadrícula vamos a tomar un  $N$  igual a 3 mientras que en la segunda  $N$  es igual a 10. El objetivo es observar como la finura disminuye proporcionalmente a medida que aumenta  $N$ . En cambio, el número de puntos contenidos en la segunda cuadrícula aumenta cuadráticamente respecto a la primera. Esto es debido a que el número de puntos es igual a  $N^n$  siendo en este caso  $n=2$ .

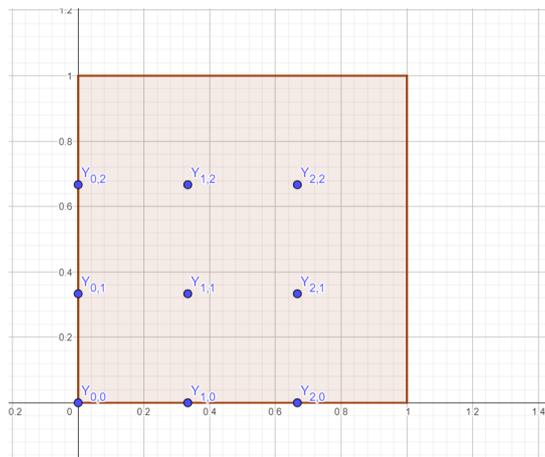


Figura 2.1: Cuadrícula contenida en el cuadrado  $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Con una finura  $h = \frac{1}{3}$ , con  $N = 3$  y contiene 9 puntos.

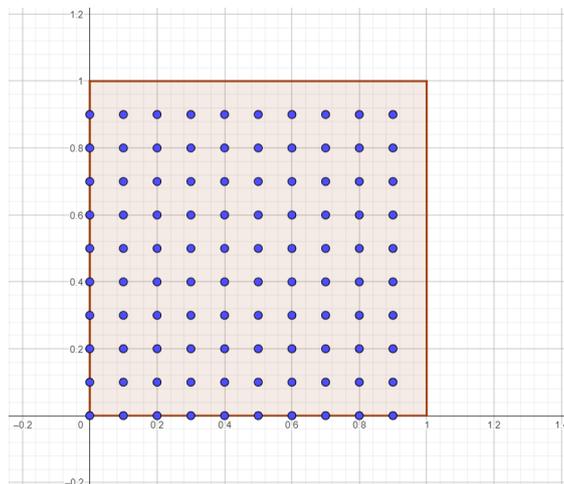


Figura 2.2: Cuadrícula contenida en el cuadrado  $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Con una finura  $h = 0.1$ , con  $N = 10$  y contiene 100 puntos.

A continuación, se va a empezar a aproximar el volumen de un conjunto  $E$  de dimensión 1 y que esté contenido en el intervalo  $[0,1]$ . Para ello se va a calcular la diferencia entre  $\mu_h(E)$  y el volumen de  $E$ .

**Lema 2.1.3.** *Sea  $E \subseteq [0,1]$  un conjunto medible tal que  $\kappa(E)$  es finito. Entonces se verifica que:*

$$|\mu_h(E) - v(E)| \leq h \cdot \kappa(E)$$

*Demostración.* En el caso unidimensional, todo conjunto conexo es un intervalo, luego el conjunto  $E$  se puede escribir como unión disjunta de  $\kappa(E)$  intervalos  $I_1, \dots, I_{\kappa(E)}$ .

Para aproximar el volumen de  $E$ , bastaría con aproximar el volumen de cada intervalo  $I_j$  con  $j=1, \dots, \kappa(E)$  y usar la siguiente desigualdad.

$$|\mu_h(E) - v(E)| \leq \sum_{j=1}^{\kappa(E)} |\mu_h(I_j) - v(I_j)|$$

Sea  $I_j$  cualquiera de las componentes conexas de  $E$  y sea  $k$  la cantidad de puntos de la cuadrícula  $G$  contenidos en  $I_j$ . Entonces el volumen de  $v(I_j)$  satisface que:

$$(k-1) \cdot h \leq v(I_j) \leq (k+1) \cdot h$$

Siendo  $h$  la finura de la cuadrícula y  $k$  la cantidad de puntos de la cuadrícula que pertenecen a  $I_j$ .

Por otro lado,  $\mu_h$  es igual a  $hk$ . Entonces se deduce que para todas las componentes conexas  $I_j$  de  $E$  se cumple que  $|\mu_h(I_j) - v(I_j)| \leq h$ . En consecuencia, se demuestra que  $|\mu_h(E) - v(E)| \leq h \cdot \kappa(E)$   $\square$

Con este lema y su correspondiente demostración queda aproximado el volumen de un conjunto  $E$  contenido el intervalo  $[0, 1]$ .

A continuación, se va a realizar la misma demostración en dimensión  $n$ , es decir, el conjunto  $E$  va a estar contenido en  $[0, 1]^n$ .

**Teorema 2.1.4.** *Sea  $E \subseteq [0, 1]^n$  un conjunto medible tal que  $\kappa(E)$  es finito. Entonces se cumple:*

$$|\mu_h(E) - v(E)| \leq n \cdot h \cdot \kappa(E) \tag{2.1}$$

*Demostración.* Esta demostración se va a realizar por inducción. Como hemos visto anteriormente en el *Lema 2.1.3*, este Teorema se cumple para  $n=1$ . Entonces, se va a considerar que  $n \geq 2$ .

El conjunto  $E$  se puede definir mediante su función característica  $f_E$  y obtener el volumen mediante la siguiente integral.

$$v(E) = \int_{[0,1]^n} f_E(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

Por otro lado, se sabe que para  $n=1$   $\mu_h = \sum_{j=1}^{\kappa(E)} \mu_h(I_j)$ , con  $\mu_h(I_j) = k \cdot h$  siendo  $k$  el número de puntos de  $G$  contenidos en  $I_j$ . Entonces, para  $n \geq 2$ , se tiene que:

$$\mu(E) = h^n \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{N-1} f_E(h_{i_1}, \dots, h_{i_n})$$

Con estas dos igualdades es fácil obtener que  $|\mu_h(E) - v(E)|$  es igual a

$$\left| h^n \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{N-1} f_E(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) - \int_{[0,1]^n} f_E(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \right|$$

Este valor absoluto como máximo es

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[0,1]^n} f_E(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n - h \sum_{i=0}^{N-1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_E(h_i, x_2, \dots, x_n) dx_2, \dots, x_n \right| \\ & + \left| h \sum_{i=0}^{N-1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_E(h_i, x_2, \dots, x_n) dx_2, \dots, x_n - h^n \sum_{i_2, \dots, i_n=0}^{N-1} f_E(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) \right| \end{aligned}$$

A continuación, se van a acotar ambos términos, para obtener el resultado del teorema.

Primero se va a trabajar sobre el primer término. Para ello se van a invertir el orden de los símbolos de suma y de integración obteniendo la siguiente acotación.

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[0,1]^n} f_E(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n - h \sum_{i=0}^{N-1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_E(h_i, x_2, \dots, x_n) dx_2, \dots, x_n \right| \\ & \leq \sup_{(x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^{n-1}} \left| \int_0^1 f_E(x_1, \dots, x_n) dx_1 - h \sum_{i=0}^{N-1} f_E(h_i, x_2, \dots, x_n) \right| \end{aligned}$$

Para cualquier punto  $(a_2, \dots, a_n) \in [0,1]^{n-1}$ , y para el conjunto  $G$ , generado por la intersección de  $E$  y la línea dada por  $x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ , es decir,  $G = E \cap \{x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n\}$ , se tiene que  $\kappa(G) \leq \kappa(E)$ . Entonces aplicando el *Lema 2.1.3* se obtiene que el valor de

$$\left| \int_0^1 f_E(x_1, a_2, \dots, a_n) dx_1 - h \sum_{i=0}^{N-1} f_E(h_i, a_2, \dots, a_n) \right|$$

es como máximo  $h\kappa(E)$ , de lo cual se deduce que el supremo está acotado por  $h\kappa(E)$ . De esta forma queda acotado el primer término.

Para acotar el segundo término, se va a tomar  $y = x_2, \dots, x_n$  y de esta forma facilitar la comprensión de esta demostración. Entonces, este término va a estar de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} & \left| h \sum_{i=0}^{N-1} \int_{[0,1]^{n-1}} f_E(h_i, y) dy - h^n \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{i_2, \dots, i_n=0}^{N-1} f_E(h_i, h_{i_2}, \dots, h_{i_n}) \right| \\ & \leq h \sum_{i=0}^{N-1} \left| \int_{[0,1]^{n-1}} f_E(h_i, y) dy - h^{n-1} \sum_{i_2, \dots, i_n=0}^{N-1} f_E(h_i, h_{i_2}, \dots, h_{i_n}) \right| \end{aligned}$$

Para cualquier  $i \leq N - 1$  se va a considerar el hiperplano  $H_i$ , el cual está formado por todos los puntos de  $\mathbb{R}^n$  cuya primera coordenada  $x_1$  es igual a  $h_i$ , es decir, la ecuación que define  $H_i$  es  $\{x_1 = h_i\}$ . Se toma el conjunto  $F$  dado por la intersección de  $E$  y  $H_i$ , por lo cual  $F = E \cap H_i \subseteq [0,1]^{n-1}$  y satisface que  $\kappa(F) \leq \kappa(E)$ . Por hipótesis inductiva, se tiene que  $|\mu_h(F) - v(E)| \leq (n - 1)h\kappa(F)$ . Esto implica que:

$$h \sum_{i=0}^{N-1} \left| \int_{[0,1]^{n-1}} f_E(h_i, y) dy - h^{n-1} \sum_{i_2, \dots, i_n=0}^{N-1} f_E(h_i, h_{i_2}, \dots, h_{i_n}) \right|$$

$$\leq hN[(n - 1)h\kappa(F)] \leq (n - 1)h\kappa(E).$$

La última desigualdad se verifica porque  $h$  es el inverso de  $N$ , entonces  $hN = 1$ , y como se había visto anteriormente  $\kappa(F) \leq \kappa(E)$ .

Tras haber acotado ambos términos, se concluye que:

$$|\mu_h(E) - v(E)| \leq h\kappa(E) + (n - 1)h\kappa(E) = nh\kappa(E).$$

□

## 2.2 Algoritmo para calcular la aproximación del volumen de E.

En este apartado, se van a mostrar dos algoritmos para obtener una aproximación del volumen de E. Para ello, se van a usar las características de los conjuntos semi-algebraicos explicadas en el *Capítulo 1* y los diferentes teoremas, proposiciones y lemas descritos en la sección anterior, *Capítulo 2.1*.

La definición de los conjuntos semi-algebraicos (*Definición 1.1.1*), indica una de las principales características de los conjuntos semi-algebraicos, y es que están definidos por una cantidad finita de ecuaciones e inecuaciones. Esto permite obtener de manera muy sencilla cuando un punto pertenece a dicho conjunto o no, basta con comprobar si el punto cumple todas las ecuaciones y desigualdades. Esto será muy útil para saber que puntos de la cuadrícula están contenidos en el conjunto E.

Además de esta propiedad, el *Teorema 2.1.4* acota el valor de la proporción  $\mu_h(E)$  de puntos de la cuadrícula G, que pertenecen a E mediante la siguiente desigualdad.

$$v(E) - nh\kappa(E) \leq \mu_h \leq v(E) + nh\kappa(E). \quad (2.2)$$

Para cualquier conjunto medible E con  $\kappa(E)$  finito. Como E es un conjunto semi-algebraico, la *Proposición 2.1.2* permite reemplazar  $\kappa(E)$  por  $ds+1$  siendo s la cantidad de ecuaciones y desigualdades que definen E y siendo d el mayor grado de sus respectivos polinomios. Entonces se va a sugerir un algoritmo para resolver el siguiente problema.

”Sea  $E \subseteq [0,1]^n$  un conjunto semi-algebraico definido por una cantidad s de ecuaciones e inecuaciones polinómicas de grado máximo d y sea  $\epsilon > 0$ , se va a obtener el valor v tal que  $|v - v(E)| \leq \epsilon$ .”

A continuación se va a definir el algoritmo para luego explicarlo en mayor profundidad.

**Ejemplo 2.2.1.** (*Algoritmo I*)

```

Input ( $\epsilon$ )
 $N = \text{Ent}(\frac{n(ds+1)}{\epsilon})$ 
 $h = \frac{1}{N}$ 
 $v' = 0$ 
for  $i_1, \dots, i_n = 0$  to  $N$ :
    if  $(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) \in E$ 
         $v' = v' + 1$ ;
    end if
end for
output  $v = \frac{v'}{N^n}$ 

```

El primer paso para realizar este algoritmo, es declarar el valor de  $\epsilon$ , el cual va a indicar la precisión del valor obtenido. A la hora de dar ese valor se tendrá en cuenta que a medida que se requiera más precisión, es decir,  $\epsilon$  es un valor muy próximo a 0, el algoritmo necesitará más tiempo para obtener el valor  $v$ .

Tras haber determinado el valor de  $\epsilon$ , se obtiene el valor de  $N$  y el de su inverso  $h$ . Además, como  $n$  es la dimensión en la cual se encuentra el conjunto, el valor  $N^n$  nos determinará el número de puntos de la cuadrícula y el número de iteraciones que realizará este algoritmo. También, se establecerá un contador  $v'$ , que al final determinará la aproximación deseada.

Con los valores obtenidos, se realizará el bucle for, el cual determinará que porcentaje de puntos de la cuadrícula, pertenecen al conjunto  $E$ . Para ello se tomarán  $n$  variables, tantas como la dimensión en la que se trabaje. Estas variables se denotarán como  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , las cuales van a tomar los valores de todos los números enteros desde 0 hasta  $N$ . Para cada  $i_j$ , se va a tomar un valor  $h_{i_j} = i_j \cdot h$ , generando el punto  $(h_{i_1}, \dots, h_{i_n})$ . Si este punto pertenece al conjunto  $E$ , es decir, verifica la ecuaciones y desigualdades que definen  $E$ , se suma 1 al contador  $v'$ , siendo  $v' = v' + 1$ , en caso contrario no se suma 1 al valor de  $v'$ . Este proceso se ejecutará  $N^n$  veces, obteniendo el número de puntos de la cuadrícula que pertenecen a  $E$ .

Por último, el algoritmo da el valor  $v = \frac{v'}{N^n}$ , que corresponde al porcentaje de puntos de la cuadrícula que pertenecen al conjunto  $E$  y que el *Teorema 2.1.4* garantiza que es una aproximación de su volumen.

Este algoritmo es fiable, preciso y sencillo, pero si se va a pedir una gran precisión a la aproximación del volumen, el número de iteraciones es muy grande, además de tener un crecimiento exponencial a medida que la dimensión se hace mayor. Por tanto, este algoritmo, no es muy útil para conjuntos en una dimensión grande, como se va a mostrar en los siguientes ejemplos sobre el número de iteraciones necesarias para distintos valores de  $\epsilon$ .

**Ejemplo 2.2.2.** *i) Sea bola en  $\mathbb{R}^2$  de centro  $(0.5, 0.5)$  y radio 0.5 contenida en el cuadrado  $[0, 1]^2$ , la cual es expresada por la siguiente ecuación.*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.5^2\}$$

*Si para este conjunto, queremos obtener su volumen con una precisión de  $\epsilon = 0.1$ , entonces,  $N = 60$ . Por tanto, se necesitarán 3600 iteraciones para obtener la aproximación del volumen.*

*Si en cambio, se desea una precisión de  $\epsilon = 0.01$ , entonces,  $N = 600$  y se necesitarían 360000 iteraciones.*

*ii) Sea la bola en  $\mathbb{R}^3$  de centro  $(0.5, 0.5, 0.5)$  y radio 0.5, definida por la siguiente expresión.*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 + (z - 0.5)^2 \leq 0.5^2\}$$

Tomando una precisión de  $\epsilon = 0.1$  se obtiene que  $N = 90$ . Entonces se necesitarán 729000 iteraciones para obtener la aproximación del volumen.

Si en cambio, se desea una precisión de  $\epsilon = 0.01$ , entonces,  $N = 900$  y se necesitarían 729000000 iteraciones.

Vista la cantidad de iteraciones necesarias para calcular el volumen de conjuntos contenidos en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , y con una precisión no muy exigente, se va a tratar de encontrar un algoritmo de una precisión similar para el cual no se necesiten tantas iteraciones.

El principal objetivo, de este nuevo algoritmo es reducir las iteraciones del algoritmo anterior. Para ello, se va a escoger aleatoriamente los puntos de la cuadrícula. De esta forma, es posible eliminar la dependencia exponencial de  $n$  y al mismo tiempo conseguir una buena dependencia del error muestral  $\delta$ .

La entrada del nuevo algoritmo será de la forma  $(\epsilon, \delta)$ , donde  $\delta \in \mathbb{R}$  es un número positivo. De nuevo, se va a aproximar el volumen de  $E$  hasta  $\epsilon$ , pero ahora se incluirá una probabilidad de al menos  $1 - \delta$ . Entonces con estas premisas se va a considerar el siguiente algoritmo.

**Ejemplo 2.2.3.** (*Algoritmo II*)

```

Input  $(\epsilon, \delta)$ 
 $m = \text{Ent}(\log(\frac{2n(ds+1)}{\epsilon}))$ 
 $N = 2^m$ 
 $h = \frac{1}{N}$ 
 $k = \text{Ent}(\frac{2}{\epsilon^2} \ln \frac{2}{\delta})$ 
 $v' = 0$ 
for  $j = 1$  to  $k$ :
    randomly chose  $(i_1, \dots, i_n) \in N^n$ 
    if  $(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}) \in E$ 
         $v' = v' + 1$ ;
    end if
end for
output  $v = \frac{v'}{k}$ 

```

El primer paso de este algoritmo es determinar la precisión que se va a requerir y también se va a declarar el valor del error muestral que se va a querer admitir, siendo este valor  $1 - \delta$ .

Con los valores de  $\epsilon$  y  $\delta$ , se van a obtener la finura de la cuadrícula que es el valor de  $h$  y el número de iteraciones que se van a realizar que es el valor de  $k$ . Estos valores se

obtienen con la fórmulas mostradas en el algoritmo.

Después de determinar los valores necesarios, se realiza un bucle de  $k$  iteraciones, en el cual se van a tomar puntos de la siguiente forma,  $(i_1, \dots, i_n)$ , siendo  $i_j$  un número natural entre el 0 y  $N$  y siendo  $j = \{1, \dots, n\}$ . Entonces, se obtendrán  $k$  puntos de la cuadrícula cuyos valores serán  $(h_{i_1}, \dots, h_{i_n})$  con  $h_{i_j} = i_j \cdot h$  y al igual que el algoritmo anterior se comprobará si dicho punto pertenece a  $E$  o no. En caso de que el punto sí pertenezca a  $E$ , se sumará 1 al contador  $v'$ .

Tras realizar todas las iteraciones se obtendrá la cantidad de puntos aleatorios de la cuadrícula que pertenecen a  $E$ . Tras dividir dicha cantidad  $v'$  entre el número de puntos que se ha seleccionado se obtendrá la proporción de puntos contenidos en  $E$ , y dando como resultado el valor  $v$ , que por el *Teorema 2.1.4* se demuestra que es la aproximación del volumen de  $E$ .

Entonces con este algoritmo se ha conseguido, que el número de iteraciones  $k$  se determine en función de un polinomio en  $\log(\frac{1}{\delta})$  y se ha eliminado la dependencia exponencial de  $n$ . Sin embargo, la dependencia en  $\epsilon$  continua siendo grande, ya que  $k$  es proporcional a  $\frac{2}{\epsilon^2}$ .

La mejoría de este algoritmo respecto el primero se va a mostrar en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.4.** *El segundo algoritmo obtiene un valor  $v$  que satisface que  $|v - v(E)| \leq \epsilon$  con una probabilidad de al menos  $1 - \delta$ . El número de iteraciones, es decir, las veces que se comprueba si un punto está contenido en  $E$  está acotado por  $\text{Ent}(\frac{2}{\epsilon^2} \ln \frac{2}{\delta})$  y cada uno de los puntos se obtiene entre un máximo de  $n \cdot \text{Ent}(\log \frac{2n(ds+1)}{\epsilon})$  opciones aleatorias.*

*Demostración.* Por construcción,  $h$  satisface que,

$$h \leq \frac{\epsilon}{2n(ds+1)}$$

Por el *Teorema 2.1.4* para la cuadrícula  $G \subseteq [0, 1]^n$  de finura  $n$ , la proporción  $\mu_h(E)$  de puntos pertenecientes a  $E$  satisface que,

$$|\mu_h(E) - v(E)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Por otro lado, si se escogen  $k$  números aleatorios en  $G$  y denotando  $S_k$  el número de esos puntos que pertenecen a  $E$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} Pr \left( \left| \frac{S_k}{k} - \mu_h(E) \right| \geq \frac{\epsilon}{2} \right) &= Pr \left( |S_k - k\mu_h(E)| \geq \frac{k\epsilon}{2} \right) \\ &\leq 2^{-\frac{k\epsilon^2}{2}} \end{aligned}$$

Esta desigualdad se cumple por lo demostrado en el *Capítulo 15.3* de [SS98], el cual habla sobre la distribución Binomial.

Por lo tanto, si se desea un error muestral menor a  $1-\delta$ , basta con tomar  $k$  que satisfaga,

$$k \geq \frac{2}{\epsilon^2} \ln \frac{2}{\delta}$$

Con ambas desigualdades tanto de  $k$  como de  $h$  queda demostrado el *Teorema 2.2.4*.  $\square$

Tras comprobar que este algoritmo reduce el número de iteraciones, se va a comparar las iteraciones de este algoritmo con los vistos en el *Ejemplo 2.2.2*.

Para ello vamos a tomar  $\delta = 0.01$  para trabajar sobre una probabilidad del 99% y sea  $\epsilon = 0.01$ . Entoces,  $k = \frac{2}{\epsilon^2} \ln \frac{2}{0.01} = 105966.3473$ . Por tanto, se realizarían 105967 iteraciones que son mucho menores que las 360000 y las 729000000 que se necesitaban en el otro algoritmo con una precisión similar.

## 2.3 Aproximación del volumen de conjuntos no contenidos en $[0,1]^n$ .

Anteriormente se ha visto como se puede aproximar el volumen de conjuntos semi-algebraicos contenidos en  $[0,1]^n$ . Sin embargo, este método también es válido para otros conjuntos de mayor volumen. Esto es posible gracias a los efectos que producen las traslaciones y las homotecias en los conjuntos acotados, ya que se puede obtener un conjunto proporcional al original contenido en  $[0,1]^n$ .

Por tanto, aplicando alguno de los algoritmos vistos en el *Capítulo 2.2*, se calculará el volumen del conjunto obtenido mediante estas transformaciones y solo faltará multiplicarlo por un factor de proporción para obtener la aproximación del volumen del conjunto inicial.

En primer lugar, se van a definir los conceptos de traslación y homotecia junto a los cambios que producen en los conjuntos.

**Definición 2.3.1 (Traslación).** *Una traslación es una isometría, aplicación entre dos espacios métricos que conserva la distancia entre puntos, caracterizada por un vector  $\vec{v}$ , tal que a cada punto  $x$  de conjunto se le hace corresponder el punto  $x'$  definido por:*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x' = x + \vec{v} \end{aligned}$$

En términos de coordenadas se tiene que  $x' = (x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n)$ , siendo  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

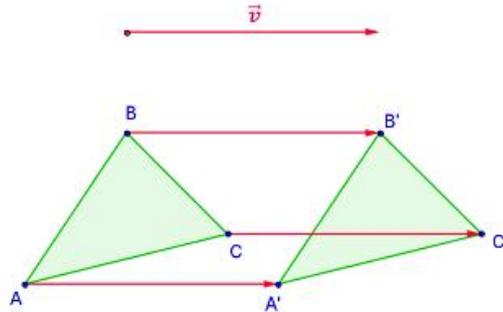


Figura 2.3: Traslación de un conjunto en  $\mathbb{R}^2$ .

Al aplicar una traslación a un conjunto acotado, este mantiene su forma y volumen. Este tipo de transformación geométrica es una isometría, es decir, solo varía la posición del conjunto en función de la dirección y magnitud del vector  $\vec{v}$ . Con esta aplicación, se puede mover cualquier conjunto semi-algebraico acotado sin variar su volumen. Entonces, si un conjunto está contenido en un cubo de la forma  $[p_1, p_1 + 1] \times \dots \times [p_n, p_n + 1]$ , se puede mover dentro de  $[0, 1]^n$  para así poder aplicar los algoritmos de la sección precedente.

En caso de que el conjunto no pueda estar contenido en un cubo de esas características, se tendrá que realizar primero una homotecia, obteniendo un conjunto de volumen proporcional y con la misma forma que el conjunto original.

**Definición 2.3.2 (Homotecia).** Una homotecia es una transformación geométrica isomorfa que amplía o reduce el tamaño de un objeto en relación de un punto  $O$  llamado centro de la homotecia y de un valor  $k$  denominado razón de la homotecia.

De esta forma, cada punto  $A$  del conjunto se le asignará un punto  $A'$  del siguiente modo:

$$H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A \mapsto A' = k * \vec{OA} + O$$

En términos de coordenadas el punto  $A' = k(A_1 - O_1, \dots, A_n - O_n) + (O_1, \dots, O_n)$  siendo  $A = (A_1, \dots, A_n)$  el punto inicial,  $O = (O_1, \dots, O_n)$  el centro de la homotecia y  $k$  la razón de la homotecia.

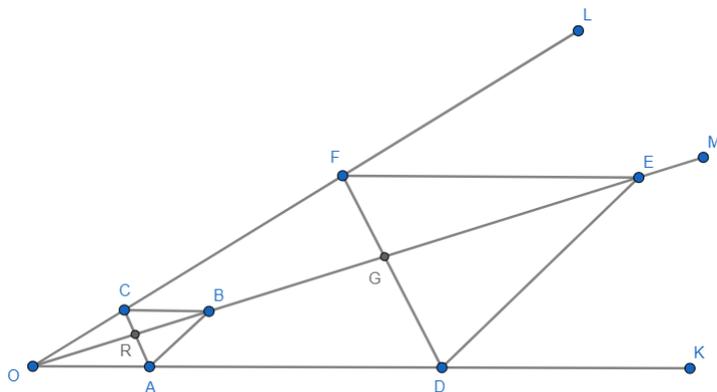


Figura 2.4: Homotecia de un conjunto en  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposición 2.3.3.** (*Propiedades de las homotecias.*)

- i) El centro de la homotecia  $O$  es el único punto que se transforma en sí mismo, es decir, no varía.
- ii) Las homotecias mantienen proporcionalmente la distancia. Si dos puntos están separados por una distancia  $d$ , los puntos transformados también estarán separados por una distancia  $d' = k \cdot d$ .
- iii) Conservación de la colinealidad, es decir, si 3 puntos están alineados en la figura original, tras la homotecia los puntos continuarán alineados.
- iv) La razón de la homotecia  $k$ , indica la proporcionalidad del área y el volumen de la figura obtenida. Si  $|k| > 1$  el área y el volumen aumentan y si  $|k| < 1$  los valores disminuirán.
- v) Homotecia directa. Si  $k > 0$  en este caso los puntos homotéticos se encuentran en el mismo lado que los puntos originales respecto al origen  $O$ .
- vi) Homotecia inversa. Si  $k < 0$  en este caso los puntos iniciales y los puntos homotéticos se encuentran en lados opuestos respecto al origen  $O$ .

Entonces, para los conjuntos semi-algebraicos acotados que no estén contenidos en  $[0,1]^n$  o en un cubo de la forma  $[p_1, p_1 + 1] \times \dots \times [p_n, p_n + 1]$ , se puede aplicar una homotecia con origen en el punto  $O = (0,0,\dots,0)$  y con una razón  $k$  que disminuya su volumen lo suficiente para que estén acotados por alguno de los cubos descritos.

Al estar los conjuntos acotados, existe un valor máximo y mínimo en cada una de las dimensiones. Dichos valores se van a denotar de la siguiente forma; límites inferiores como  $l_1, \dots, l_n$  y límites superiores como  $u_1, \dots, u_n$ . De estos mismos se va a obtener el valor  $L =$

$\min(l_1, \dots, l_n)$  y el valor  $U = \max(u_1, \dots, u_n)$ , siendo estos valores máximos y mínimos para cualquier dimensión. Por tanto, se va a tomar el cuadrado, cubo o hipercubo (dependiendo la dimension) de la forma  $[L, U]^n$ , el cual, por construcción va a contener el conjunto semi-algebraico.

Por último, se debe determinar el valor de la razón de la homotecia. De forma que, al aplicar la homotecia a dicho conjunto, su volumen se reduzca lo suficiente para estar contenido en el cubo  $[0, 1]^n$ . Aplicando lo visto en la *Proposición 2.3.3*, la proporcionalidad del volumen viene determinado por  $k$ . Entonces, como el volumen del cubo  $[0, 1]^n$  es igual a 1 y el volumen del cubo  $[L, U]^n$  es igual a  $(U-L)^n$ , se deberá tomar  $k$  como  $\frac{1}{(U-L)}$ .

En conclusión, para obtener el volumen de un conjunto semi-algebraico  $E \subseteq [L, U]^n$ , se tiene que realizar una homotecia de razón  $k$  y una posible traslación, obteniendo un conjunto  $E'$  proporcional a  $E$ . Posteriormente se calcula el volumen de  $E'$  con lo visto en la sección anterior (*Capítulo 2.2*), de forma que el volumen de  $E$  quede definido según la siguiente ecuación:

$$v(E) = v(E') \cdot \frac{1}{k^n} \tag{2.3}$$

# Capítulo 3

## Aplicación práctica del algoritmo.

En este capítulo se va a explicar de forma más gráfica toda la parte teórica sobre cómo aproximar el volumen de conjuntos semi-algebraicos vista en el *Capítulo 2.2*. Para ello se va a desarrollar el Algoritmo I en Matlab siguiendo los pasos vistos en el *Ejemplo 2.2.1*. Además hay que aclarar que como se ha desarrollado para dimensión 2, los resultados obtenidos son aproximaciones de las áreas de los distintos conjuntos.

El principal objetivo es mostrar ejemplos prácticos de como funciona dicho algoritmo. Pero además se va a poder comprobar la precisión de dicho proceso y la diferencia de tiempo que requiere en función de las iteraciones necesarias.

En Matlab se ha generado una función, a la cual se le dan los valores;  $\epsilon$  la precisión requerida,  $n$  la dimensión en la que se trabaja que en este caso va a ser 2,  $d$  el máximo grado de las ecuaciones y desigualdades polinómicas que definen el conjunto y  $s$  el número de ecuaciones y desigualdades.

Después se calculan los distintos valores necesarios con las expresiones del *Algoritmo I* (*Ejemplo 2.2.1*) y los puntos de la cuadrícula  $G$ .

Por último, se comprueba si los puntos de la cuadrícula pertenecen al conjunto o no y se obtiene el valor  $v$  definitivo.

El código de Matlab varía en función del conjunto, del cual se calcula su área. Esto es debido a que, a la hora de comprobar que puntos de la cuadrícula pertenecen al conjunto, se deben introducir las ecuaciones y desigualdades que definen el conjunto para ver si los puntos de la cuadrícula cumplen o no las ecuaciones y desigualdades. Las imágenes de los distintos códigos usados se pueden ver en el *Apéndice A* [3.2].

### 3.1 Ejemplos prácticos del Algoritmo I.

El primer conjunto semi-algebraico, del cual se va a calcular su área, es el círculo de radio 0.5 y de centro el punto (0.5,0.5), además en el *Ejemplo 2.2.2*, se han visto el número de

iteraciones necesarias para realizar este proceso. Así, se podrá ver el tiempo que requiere la función de Matlab para realizar ese número de repeticiones.

**Ejemplo 3.1.1.** (*Círculo de radio 0.5*)

El círculo viene definido por la siguiente expresión:

$$C_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.5^2\}$$

cuyo área es:

$$A(C_{\frac{1}{2}}) = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0.5^2 = 0.7853981634.$$

Entonces, los primeros valores necesarios para el algoritmo, que obtenemos de la expresión anterior, son el máximo grado de los polinómios (d) que es igual a 2 y el número de ecuaciones y desigualdades (s) que también es igual a 2. Los otros dos valores necesarios son la dimensión en la que se encuentra dicho objeto que es en  $\mathbb{R}^2$  y la precisión requerida ( $\epsilon$ ), la cual va a ir variando para obtener y comparar más resultado.

Se va a lanzar el programa (ver en *Figura 3.2*) para 3 diferentes valores de  $\epsilon$  que van a ser  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  y  $10^{-4}$ . De los cuales se van a observar el área obtenida, el tiempo de ejecución y la diferencia con el área real.

Para  $\epsilon = 10^{-2}$ , se han obtenido los siguientes resultados (ver en *Figura 3.3*): La aproximación del área obtenida es 0.785343, el tiempo que ha tardado es 0.020399 segundos y la diferencia respecto el resultado real es  $5.52 \cdot 10^{-5}$ . Se observa que el resultado obtenido es más preciso de lo requerido y se ha realizado en poco tiempo.

Para  $\epsilon = 10^{-3}$ , los resultados obtenidos son (ver en *Figura 3.4*): La aproximación del área es 0.78539659, el tiempo requerido ha sido 0.395988 segundos y la diferencia es de  $1.57 \cdot 10^{-6}$ . Se observa una mejoría en la aproximación, que sigue siendo bastante mejor que la precisión requerida, pero a su vez el tiempo se multiplica por 20 aproximadamente.

Para  $\epsilon = 10^{-4}$ , los resultados obtenidos son (ver en *Figura 3.5*): La aproximación del área es 0.7853981023, el tiempo requerido ha sido 34.533409 segundos y la diferencia es de  $6.11 \cdot 10^{-8}$ . Para este valor de  $\epsilon$  se observa un aumento considerable del tiempo requerido, esto ocurre debido a que el aumento de las iteraciones es cuadrática como se ha visto en *Ejemplo 2.2.2*. Además, la mejoría del resultado no es grande en comparación con el aumento del tiempo.

En conclusión, los resultados obtenidos para este conjunto son bastante exitosos, sobre todo para los valores de  $\epsilon$  igual a  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$ , ya que se han obtenido buenas aproximaciones en poco tiempo. Además se ha observado que la precisión de los resultados es

mayor a la requerida.

Por otro lado, con este resultado se puede demostrar lo visto en el *Capítulo 2.3*. Por ejemplo, para obtener el área de círculo de radio 1, que es igual a  $\pi \simeq 3.14159265$ , podemos aplicar una homotecia de razón 2 y usar la ecuación (2.3). Entoces, tomando el mejor resultado se obtiene el siguiente valor.

$$A(C_{\frac{1}{2}}) = A(C_1) \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$A(C_1) = 0.7853981023 \cdot 4 = 3,14159240$$

Entonces se ha obtenido una aproximación del área del círculo de radio 1 de un precisión de en torno a  $2 \cdot 10^{-7}$ .

**Ejemplo 3.1.2.** (Región de la función  $f(x) = \frac{x^5}{2} + 0.4$  en  $[0,1]$ )

En este ejemplo se va a aproximar el área de la región encerrada por la función  $f(x) = \frac{x^5}{2} + 0.4$  en el intervalo  $[0,1]$ . Este conjunto va a estar definido por la siguiente expresión:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq 1, y - \frac{x^5}{2} \leq 0.4\}$$

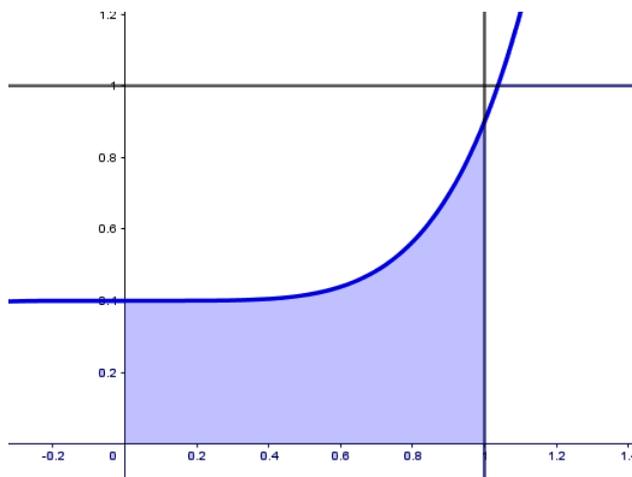


Figura 3.1: Región de la función  $f(x) = \frac{x^5}{2} + 0.4$  en  $[0,1]$

Para ello, primero se va a obtener el área real a través de la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{x^5}{2} + 0.4 = 0.48333 \tag{3.1}$$

Tras ver como es el conjunto y calcular su área real, se va a usar el algoritmo (ver en *Figura 3.6*), para aproximar su volumen, siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo anterior (*Ejemplo*).

Para este conjunto, el máximo grado de los polinomios ( $d$ ) es 5, el número de desigualdades ( $s$ ) es 3 y la dimensión es 2. Entoces se va a ver los resultados obtenidos.

Para  $\epsilon = 10^{-2}$ , se han obtenido los siguientes resultados (ver en *Figura 3.7*): La aproximación del área obtenido es 0.483438, el tiempo que ha tardado es 0.0396769 segundos y la diferencia respecto el resultado real es  $1.05 \cdot 10^{-4}$ .

Para  $\epsilon = 10^{-3}$ , los resultados obtenidos son (ver en *Figura 3.8*): La aproximación del área es 0.4833428, el tiempo requerido ha sido 1.667074 segundos y la diferencia es de  $9.79 \cdot 10^{-6}$ .

Para  $\epsilon = 10^{-4}$ , los resultados obtenidos son (ver en *Figura 3.9*): La aproximación del área es 0.48333421, el tiempo requerido ha sido 163.311885 segundos y la diferencia es de  $1.21 \cdot 10^{-6}$ .

Para este conjunto se vuelven a obtener buenos resultados para los valores de  $\epsilon$  igual a  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$ , en cambio, para  $10^{-4}$  se encuentra un resultado insatisfactorio. Esto es debido a que no se encuentra gran mejora en el resultado obtenido, pero si se encuentra una gran diferencia en el tiempo empleado, el cual pasa de tardar cerca de un 1 segundo a más de 2 minutos.

Respecto al *Ejemplo 3.1.1*, se observa un pequeño aumento en el tiempo de los dos primeros casos y un gran aumento en el tercer caso. Esto se produce por el aumento de los valores  $d$  y  $s$ . Además en el aumento cuadrático de las iteraciones se observa un aumento cuadrático en el tiempo requerido.

Se puede observar que, aunque se está usando la cota  $sd+1$  para  $\kappa(E)$ , en ambos caso se ve directamente que  $\kappa(E)= 1$ , puesto que cualquier línea intersecada con un círculo es un conjunto conexo. De todos modos, se utiliza directamente la cota que nos da la *Proposición 2.1.2* para utilizar exactamente el resultado y el algoritmo descrito en la memoria.

Tras estos dos ejemplos queda comprobada la eficacia del algoritmo, ya que se han podido comparar las aproximaciones de las áreas obtenidas con los resultados reales, siendo estos resultados satisfactorios. Entonces, se va a usar este método para un conjunto cuyo área sea muy difícil de calcular analíticamente. Este conjunto va a estar definido por la siguiente expresión:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \det \begin{pmatrix} y^2 + x & x^2 + y \\ x - y & y - x \end{pmatrix} \in [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]\} \quad (3.2)$$

Este es el conjunto de los  $(x, y)$  tales que esa matriz definida a partir de  $x$  e  $y$  tiene determinante en el intervalo  $[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$ .

**Ejemplo 3.1.3.** (*Área del conjunto S*)

El conjunto  $S$  se puede expresar mediante dos desigualdades, para ello se debe calcular el determinante de la matriz definida anteriormente. Tras esto se obtiene la siguiente expresión.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 - y^2x + y^2 + yx^2 - x^3 - x^2 \geq -\frac{1}{8}, \\ y^3 - y^2x + y^2 + yx^2 - x^3 - x^2 \leq \frac{1}{8}\}$$

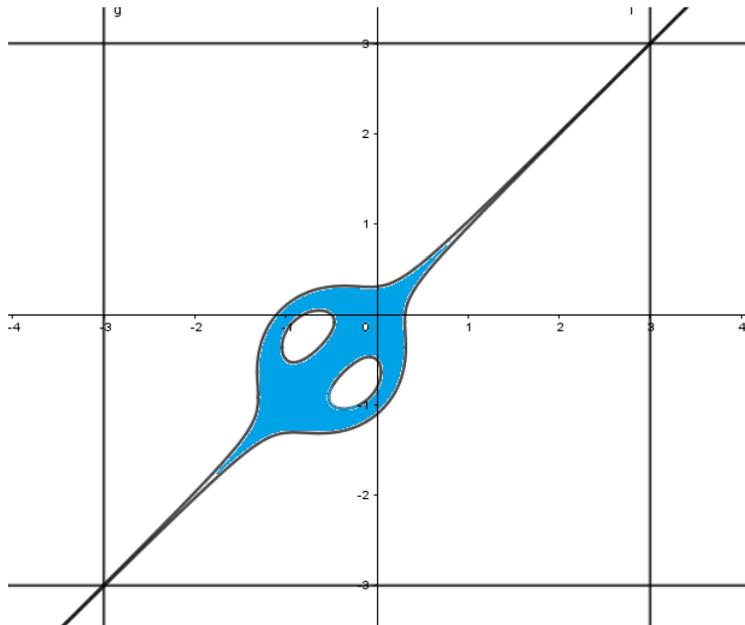


Figura 3.2: Representación gráfica del conjunto  $S$ .

Con la representación gráfica se observa que el conjunto no está acotado. Por tanto se va a calcular la área de este conjunto contenida en el cuadrado  $[-3,3] \times [-3,3]$ , porque es la parte más representativa del conjunto. Entonces, por lo visto en el *Capítulo 2.3* se debería realizar una homotecia y una traslación a este conjunto para poder usar el algoritmo, pero debido a la complejidad de las desigualdades que definen al conjunto y que se puede observar en la *Figura 3.2*, se va a optar por modificar el código de Matlab

para calcular el área del conjunto S.

El principal cambio es generar una cuadrícula en el cuadrado  $[-3, 3]^2$  en vez de en  $[0, 1]^2$ . Para ello, los puntos  $(x_i, y_{ij})$  de la nueva cuadrícula se van a obtener de la siguiente manera.

Sea N es número de iteraciones que se van a realizar, sea h el inverso de N y sean i,j dos variables, las cuales toman valores desde el 0 hasta el N-1 , entonces  $x_i$  e  $y_j$  toman los siguientes valores.

$$\begin{aligned}x_i &= (6h \cdot i) - 3 \\y_j &= (6h \cdot j) - 3\end{aligned}$$

De esta se forma, se genera una cuadrícula en  $[-3, 3]^2$  proporcional a una cuadrícula de finura h en  $[0, 1]^2$ . Esta nueva cuadrícula tiene una finura de valor  $6 \cdot h$ , esto es debido a que el lado del nuevo cuadrado es 6 veces mayor que el lado del cuadrado  $[0, 1]^2$ , y el -3 indica el valor mínimo de la cuadrícula respecto un eje, que en este caso coinciden.

Con este nuevo código, se va a obtener el porcentaje de puntos de la cuadrícula que pertenecen al conjunto S. Entonces para obtener la aproximación del área se deberá multiplicar el valor obtenido por el área del cuadrado, siendo este igual a 36.

Tras ver como se puede aplicar el algoritmo en este conjunto, se va a usar el código modificado (ver en *Figura 3.11*) para una precisión de  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$ .

Para  $\epsilon = 10^{-2}$ , los resultados obtenidos son (ver en *Figura 3.12*): La proporción de puntos que pertenecen a S es 0.0599796, es decir, aproximadamente un 6%, entonces el área de S es 2.159265 y el tiempo requerido ha sido de 0.7346 segundos.

Para  $\epsilon = 10^{-3}$ , los resultados obtenidos son (ver en *Figura 3.13*): La proporción de puntos que pertenecen a S es 0.0599798, entonces el área de S es 2.159276 y el tiempo requerido ha sido de 77.9360 segundos.

En este ejemplo, la primera aproximación es bastante buena, ya que se obtiene un resultado similar al de la segunda aproximación en mucho menos tiempo. Además, este ejemplo muestra como a medida que la complejidad y el grado de los polinomios de las igualdades y desigualdades que definen el conjunto aumentan, el tiempo requerido es cada vez mayor y entonces no se puede pedir una gran precisión.

## 3.2 Conclusión del código.

Tras los resultados obtenidos, se puede concluir que el algoritmo obtiene una buena aproximación del área de los conjuntos . Esto se observa claramente en que la diferencia entre

el valor real y el valor aproximado ha sido pequeño y además en los dos primeros ejemplos mejora la precisión requerida. Además el algoritmo es útil para conjuntos cuya área es muy difícil de obtener analíticamente como se observa en el *Ejemplo 3.1.3*

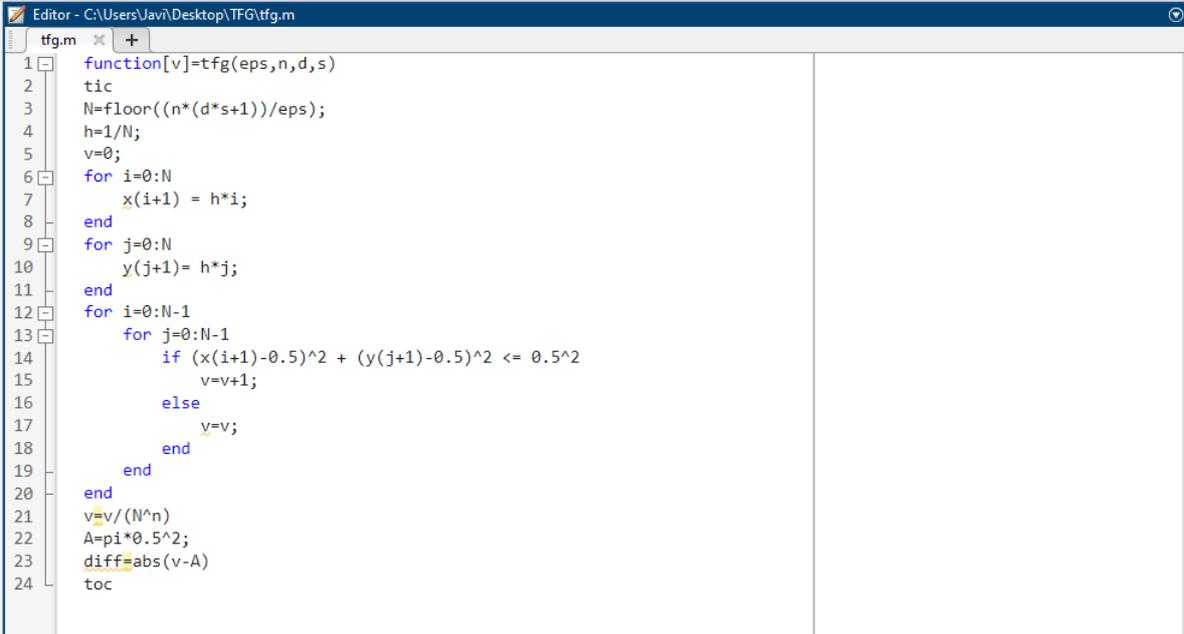
En cuanto al tiempo requerido, se observa un gran aumento cuando  $\epsilon$  es igual a  $10^{-4}$ , como se explica anteriormente esto ocurre porque el valor del número de iteraciones aumenta cuadráticamente. Además dicho número, aumenta cuando  $\epsilon$  disminuye o cuando el grado máximo de los polinomios y el número de ecuaciones aumenta. Entonces, a medida que se requiera mayor precisión y el conjunto aumente en complejidad, el algoritmo será cada vez menos factible para su uso en la práctica.

En conclusión, este algoritmo para conjuntos en  $\mathbb{R}^2$  y un valor de  $\epsilon$  en torno a  $10^{-3}$  es bastante bueno, debido a que su rapidez y las buenas aproximaciones que obtiene. En cambio, para un conjunto que se encuentre en una dimensión mayor no es aconsejable usarlo, ya que, si se ha observado un gran aumento de tiempo con un exponente igual a 2, el crecimiento del tiempo aumentará con un exponente mayor.

## Apéndice A: Códigos Matlab.

En este anexo, se van a mostrar las funciones de Matlab creadas para obtener el volumen de los distintos ejemplos del *Capítulo 3*, además se mostrará la ventana de comandos donde se encuentra el valor obtenido por el algoritmo y el tiempo que ha tardado en realizar el proceso.

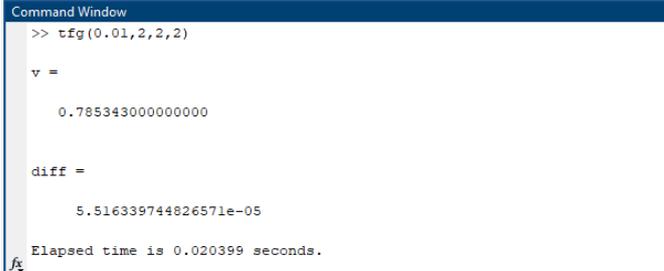
### Código para Ejemplo 3.1.1



```
Editor - C:\Users\Javi\Desktop\TFG\TFG.m
tfg.m x +
1 function [v]=tfg(eps,n,d,s)
2 tic
3 N=floor((n*(d*s+1))/eps);
4 h=1/N;
5 v=0;
6 for i=0:N
7     x(i+1) = h*i;
8 end
9 for j=0:N
10    y(j+1)= h*j;
11 end
12 for i=0:N-1
13    for j=0:N-1
14        if (x(i+1)-0.5)^2 + (y(j+1)-0.5)^2 <= 0.5^2
15            v=v+1;
16        else
17            v=v;
18        end
19    end
20 end
21 v=v/(N^n)
22 A=pi*0.5^2;
23 diff=abs(v-A)
24 toc
```

Figura 3.3: Código usado para la aproximación del área del Círculo de radio 0.5.

### Resultados para Ejemplo 3.1.1



```
Command Window
>> tfg(0.01,2,2,2)

v =

    0.7853430000000000

diff =

    5.516339744826571e-05

Elapsed time is 0.020399 seconds.
```

Figura 3.4: Resultado para  $\epsilon = 10^{-2}$ .

```

Command Window
>> tfg(0.001,2,2,2)

v =

    0.7853965900000000

diff =

    1.573397448328961e-06

Elapsed time is 0.395988 seconds.

```

Figura 3.5: Resultado para  $\epsilon = 10^{-3}$ .

```

Command Window
>> tfg(0.0001,2,2,2)

v =

    0.7853981023000000

diff =

    6.109744832283326e-08

Elapsed time is 34.533409 seconds.

```

Figura 3.6: Resultado para  $\epsilon = 10^{-4}$ .

### Código para Ejemplo 3.1.2

```

Editor - C:\Users\Javi\Desktop\TFG\tfg.m
tfm.m
1 function[v]=tfg(eps,n,d,s)
2 tic
3 N=floor((n*(d*s+1))/eps);
4 h=1/N;
5 v=0;
6 for i=0:N
7     x(i+1) = h*i;
8 end
9 for j=0:N
10    y(j+1)= h*j;
11 end
12 for i=0:N-1
13     for j=0:N-1
14         if x(i+1)>=0 && x(i+1)<= 1 && y(j+1)-0.5*x(i+1)^5 <= 0.4 && y(j+1)>=0
15             v=v+1;
16         else
17             v=v;
18         end
19     end
20 end
21 v=v/(N^n)
22 A=0.483333; %% Area real
23 diff=abs(v-A)
24 toc

```

Figura 3.7: Código para el cálculo del área de la región definida por  $f(x)$ .

## Resultados para Ejemplo 3.1.2

```
Command Window
>> tfg(10^(-2),2,5,3)

v =

    0.483437988281250

diff =

    1.049882812499958e-04

Elapsed time is 0.396769 seconds.
```

Figura 3.8: Resultado para  $\epsilon = 10^{-2}$ .

```
Command Window
>> tfg(10^(-3),2,5,3)

v =

    0.483342789062500

diff =

    9.789062499987455e-06

Elapsed time is 1.667074 seconds.
```

Figura 3.9: Resultado para  $\epsilon = 10^{-3}$ .

```
Command Window
>> tfg(10^(-4),2,5,3)

v =

    0.483334212988281

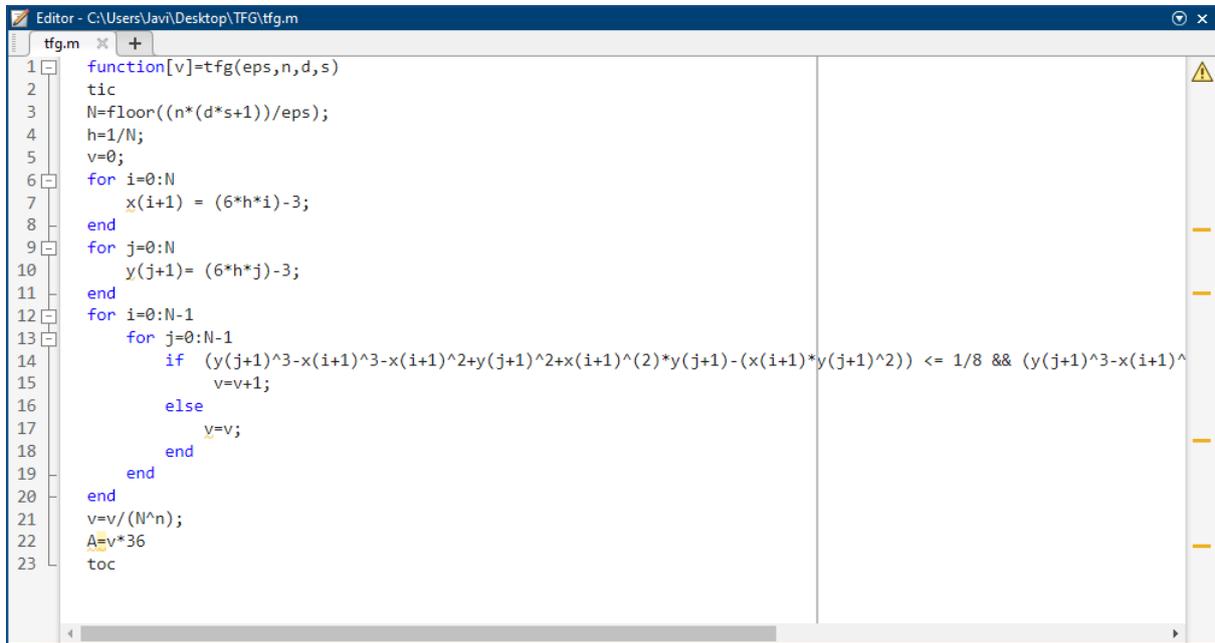
diff =

    1.212988281262817e-06

Elapsed time is 163.311885 seconds.
```

Figura 3.10: Resultado para  $\epsilon = 10^{-4}$ .

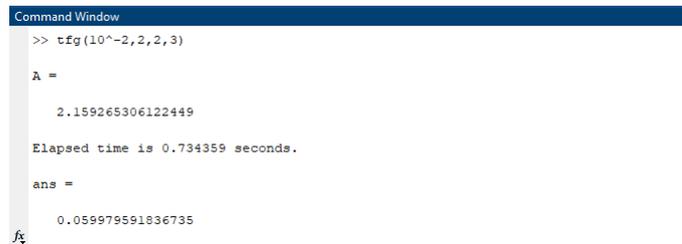
### Código para Ejemplo 3.1.3



```
1 function [v]=tfg(eps,n,d,s)
2 tic
3 N=floor((n*(d*s+1))/eps);
4 h=1/N;
5 v=0;
6 for i=0:N
7     x(i+1) = (6*h*i)-3;
8 end
9 for j=0:N
10    y(j+1)= (6*h*j)-3;
11 end
12 for i=0:N-1
13    for j=0:N-1
14        if (y(j+1)^3-x(i+1)^3-x(i+1)^2+y(j+1)^2+x(i+1)^2)*y(j+1)-(x(i+1)*y(j+1)^2) <= 1/8 && (y(j+1)^3-x(i+1)^
15            v=v+1;
16        else
17            y=v;
18        end
19    end
20 end
21 v=v/(N^n);
22 A=v*36
23 toc
```

Figura 3.11: Código para el cálculo del área del conjunto S.

### Resultados para Ejemplo 3.1.3



```
Command Window
>> tfg(10^-2,2,2,3)

A =

    2.159265306122449

Elapsed time is 0.734359 seconds.

ans =

    0.059979591836735
```

Figura 3.12: Resultado para  $\epsilon = 10^{-2}$ .



```
Command Window
>> tfg(10^-3,2,2,3)

A =

    2.159275959183673

Elapsed time is 77.936039 seconds.

ans =

    0.059979887755102
```

Figura 3.13: Resultado para  $\epsilon = 10^{-3}$ .

# Bibliografía

- [AM95] A.Joyal and I. Moerdijk. *Algebraic set theory*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1995.
- [Cos02] M. Coste. *An introduction to semialgebraic geometry*. RAAG Network, 2002.
- [Cos98] M. Coste. *Real algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1998.
- [FF02] J.A. Facenda and F.Jose Freniche. *Integración de funciones de varias variables*. Grupo Anaya S.A, 2002.
- [Kho91] A.G. Khovanskii. *Fewnomials (Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1991.
- [Koi95] P. Koiran. *Approximating the volume of definable sets*. 1995.
- [SS98] L. Blum F. Cucker M. Shub and S. Smale. *Complexity and Real Computation*. Springer, 1998.