



**Estructuras promediables en torno a los  
operadores posición y momento en  
mecánica cuántica**  
*(Amenable structures around position and  
momentum operators in quantum mechanics)*

**Laura Sáenz Diez**

**Trabajo de Fin de Grado**  
para acceder al  
**Grado en Matemáticas**  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Director: Rafael Granero Belinchón  
Co-Director: Fernando Lledó Macau (UC3M-ICMAT)  
Junio - 2023

ABSTRACT. In the present manuscript the amenability of several algebraic structures generated by the position and momentum operators of quantum mechanics is studied. Taking into account that both operators are unbounded and their treatment requires certain subtleties, it has been deemed appropriate to devote a great part of this memory to an introduction on the theory of unbounded operators on Hilbert spaces. Subsequently, starting from the canonical commutation relation satisfied by the position and momentum operators, the amenability of the algebra generated by two abstract elements satisfying this relation has been studied. Additionally, the Følner sequences have been studied in the specific case where the generators are the matrix representations of the position and momentum operators.

KEYWORDS: amenability, Følner sequences, unbounded self-adjoint operators, canonical commutation relation.

RESUMEN. En el presente manuscrito se estudia la promediabilidad algebraica de algunas estructuras generadas por los operadores de posición y momento de la mecánica cuántica. Teniendo en cuenta que ambos son operadores no acotados y como tales su tratamiento requiere ciertas sutilezas, se ha visto conveniente dedicar gran parte de esta memoria a una introducción en la teoría de operadores no acotados en espacios de Hilbert. Posteriormente, partiendo de la relación de conmutación canónica que satisfacen los operadores posición y momento se ha analizado la promediabilidad del álgebra generada por dos elementos abstractos que satisfacen esta relación. Se han estudiado además las sucesiones de Følner en el caso concreto de que los generadores sean las representaciones matriciales de los operadores posición y momento.

PALABRAS CLAVE: promediabilidad, secuencias de Følner, operadores no acotados autoadjuntos, relaciones de conmutación.

# Índice

Capítulo 0. Introducción y Resumen de Contenidos de la Memoria	1
Capítulo 1. Operadores no acotados en espacios de Hilbert	4
1.1. Relación de conmutación canónica: operadores posición y momento	7
1.2. Operadores autoadjunto y esencialmente autoadjuntos	9
1.3. Extensiones del operador momento	12
Capítulo 2. Estructuras promediables en mecánica cuántica	20
2.1. Descomposiciones paradójicas	20
2.2. Promediabilidad	23
2.2.1. Condición de Følner	25
2.3. El álgebra generada por $Q$ y $P$ es promediable	28
2.3.1. Dinámica de los subespacios	32
2.4. Representación matricial del álgebra generada por $P$ y $Q$	35
Capítulo 3. Próximos pasos	42
Apéndice A. Importancia de los operadores autoadjuntos	43
A.1. Fundamentos de la Mecánica cuántica	43
A.2. Teorema espectral: medidas espectrales	45
A.3. Dinámica a través de SCOUG	47
Apéndice. Bibliografía	48

## Introducción y Resumen de Contenidos de la Memoria

Y tú, ¿qué imagen tienes de las matemáticas? Miembros de la Real Sociedad Matemática Española señalan que existe la percepción social del matemático como genio y por ende de las matemáticas como ciencia al alcance de pocos [4]. A ello conducen prácticas frecuentes en la divulgación como la de exponer algunos teoremas como resultados inauditos. Al presentarlos de forma aislada parecen de lo más sorprendentes. Un ejemplo estándar es la Paradoja de Banach Tarski. Precisamente, esta paradoja dio pie a que von Neumann introdujera la noción de promediabilidad [31], dicotómica a la de descomposición paradójica, y que será el concepto principal sobre el que versará el Capítulo 2. Pese a tratarse de un resultado contra-intuitivo, y de ahí que se haya popularizado como paradoja, lo cierto es que resulta bastante natural si se contextualiza en el marco de algunos resultados previos. Así, con la pretensión de alejarnos de la idea de las matemáticas como ciencia de ideas felices esclarecemos a continuación los orígenes de esta paradoja.

La Paradoja de Banach Tarski establece que una bola puede descomponerse en un número finito de piezas que girándolas en el espacio pueden ser recolocadas para formar dos bolas del mismo tamaño que la original. En lo que respecta al volumen, inicialmente uno podría pensar que esto lleva a la contradicción  $1 = 2$ . Pero ¿qué es el volumen? O empecemos por algo más general, ¿qué significa medir? Matemáticos como Peano, Jordan, Borel o Lebesgue contribuyeron a responder esta pregunta [9, Capítulo 1]. En concreto, Lebesgue introdujo la función conocida como *medida de Lebesgue*,  $m$ , que asignaba a conjuntos de la recta real su medida y cumplía algunas propiedades razonables como  $m[a, b] = b - a$  para  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > a$  o la  $\sigma$ -aditividad, i.e.  $m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$  con  $A_n$  conjuntos disjuntos dos a dos. Sin embargo, Vitali encontró un conjunto de números reales que no era medible por tal aplicación. Se buscó entonces una definición de medida menos estricta que la de Lebesgue y para ello la  $\sigma$ -aditividad se relajó a aditividad finita [33, p. 17].

Con esta definición alternativa todos los conjuntos de la recta real eran medibles [33, p. 229]. Es más, todos los conjuntos del plano lo eran también respecto a la generalización de la medida a  $\mathbb{R}^2$ . Sin embargo, no ocurría lo mismo en  $\mathbb{R}^3$  [33, p. 229]. En este espacio aún con la definición modificada seguían existiendo conjuntos no medibles. Ejemplo de ello serían las piezas que constituyen la descomposición de la bola que conduce a la obtención de dos copias. No se llega entonces a la contradicción  $1 = 2$  pues directamente el volumen no está definido para los conjuntos involucrados [33, p. 30].

Empleando la terminología matemática pertinente la paradoja establece que la bola en  $\mathbb{R}^3$  tiene una descomposición paradójica. Este resultado queda enmarcado en la intersección entre la teoría de grupos y la teoría de la medida donde los grupos paradójicos, a grandes rasgos, se definen como aquellos que presentan dos subconjuntos disjuntos que pueden reordenarse por la acción de este para formar el grupo completo. En un estudio de esta paradoja von Neumann concluiría que es precisamente la estructura paradójica de un grupo la que se transfiere a un conjunto al actuar sobre este definiendo en él las

descomposiciones [33, p. 219]. Por otro lado, Tarski probó además que los conjuntos no paradójicos admitían un tipo de medida que por el contrario no podía definirse en los paradójicos. De nuevo, von Neumann apreció que esto era consecuencia de que estos conjuntos admitían la actuación de un grupo que presentaba una medida con tales características, entre otras la actividad finita e invariancia ante la acción del grupo. Acuñó por primera vez el término promediable para referirse a los citados grupos. Así, subyacente a los resultados de Banach y Tarski había una clasificación dicotómica de grupos en paradójicos y promediables.

Pronto fueron encontrándose una gran variedad de condiciones equivalentes a la promediabilidad de un grupo. Es más, algunas de ellas han dado pie a que la dicotomía encuentre hoy cabida en otras ramas de las matemáticas como el álgebra pura o el análisis funcional. Ejemplo de ello es la condición de Følner que definiremos en el Capítulo 2 y que será en base a cual llevaremos a cabo el estudio primordial de esta memoria que se corresponde con la Sección 2.3. En vez de estudiar la estructura global del grupo, Følner proporcionó una propiedad local. Estudiaba así el crecimiento inducido en los subconjuntos del grupo por la acción de este. La clave de poder clasificar grupos respecto a esta condición se encontraba entonces en la existencia de una dinámica. Advirtiendo que toda álgebra forma un grupo y que por tanto presenta la misma dinámica, resulta natural que esta condición sea extrapolable a álgebras. De hecho, en el caso particular de álgebras de operadores se introdujo otra noción de gran interés: las secuencias de proyecciones de Følner. Esto es, proyecciones que asintóticamente conmutan con los operadores del álgebra [11, Sección 5]. También para determinadas álgebras se ha definido una medida de dimensión [3, Definición 4.5] equivalente a la que consideró von Neumann sobre grupos si bien menos *regular* dado que la aditividad finita y la invariancia se ven remplazadas por desigualdades.

En el presente trabajo pretendemos extender el estudio de la promediabilidad a la representación matricial álgebras abstractas donde cada matriz representa a su vez a un operador no acotado. Lo haremos recurriendo a la condición de Følner en la formulación de Connes [11] por tratarse de un enfoque más intuitivo y analítico que el relativo a las medidas de dimensión. Motivados por que nuestro trabajo admita una proyección física centraremos nuestro estudio en el ejemplo estándar de álgebra generada por dos objetos que satisfacen la relación de conmutación canónica. El motivo no es otro sino que este álgebra abstracta puede representarse en un álgebra de generada por los operadores posición y momento de la mecánica cuántica.

La dificultad técnica inherente a la manipulación de operadores no acotados como los de posición y momento justifica la necesidad de incluir en esta memoria el Capítulo 1. En concreto, se definen en este los operadores no acotados así como algunas de las propiedades más relevantes que pueden presentar. Se incluyen además resultados de interés que ponen en relación algunas de estas propiedades. Se trata de un capítulo meramente bibliográfico en el que se recogen aspectos no incluidos la formación del grado y que sin embargo están latentes en el Capítulo 2.

El Capítulo 2 presenta fundamentalmente contenido original además, por supuesto, del contexto formal en el que encuentran cabida los resultados obtenidos. Se incluyen así las nociones básicas de la teoría de promediabilidad algebraica. Los principales resultados quedan detallados al final de esta introducción.

Finalmente se presenta un apéndice complementario al contenido de la memoria que clarifica la trascendencia de que los operadores no acotados en espacios de Hilbert sean autoajuntos.

### Principales resultados

Entre todo el contenido original incluido en la presente memoria destacamos a continuación los, a nuestro juicio, cuatro resultados originales más relevantes del trabajo.

Denotemos por  $\mathcal{C}$  el álgebra compleja (abstracta) generada por dos elementos abstractos  $Q$  y  $P$  satisfaciendo la relación de conmutación canónica, i.e.

$$\mathcal{C} := \langle P, Q \mid QP - PQ = i\mathbb{1} \rangle$$

y por  $W_N$  a sus subespacios dados por

$$W_N := \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} \alpha_{kl} P^k Q^l \mid \alpha_{kl} \in \mathbb{C} \right\}.$$

RESULTADO 1. *El álgebra  $\mathcal{C}$  es algebraicamente promediable* (Ver Teorema 2.3.7).

RESULTADO 2. *La secuencia de subespacios  $\{W_N\}_{N \in \mathbb{N}_0}$  del álgebra  $\mathcal{C}$  es secuencia de Følner* (Ver Proposición 2.4.3).

Sean  $\widehat{Q}$  y  $\widehat{P}$  los operadores posición y momento de la mecánica cuántica. Veremos que admiten representación matricial con dominio  $c_{00} \subset \ell_2 \cong L^2(\mathbb{R})$  que permiten a su vez la representación matricial del álgebra  $\mathcal{C}$  y que denotamos por  $\widehat{\mathcal{C}}$ .

RESULTADO 3. *Sea  $\Pi_n$  la proyección ortogonal en  $\langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle$  entonces  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es secuencia de Følner de  $\widehat{\mathcal{C}}$*  (Ver Proposición 2.4.7).

Defínanse los subespacios  $\widehat{W}_N$  de modo análogo a los  $W_N$ , i.e.,

$$\widehat{W}_N := \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} \alpha_{kl} \widehat{P}^k \widehat{Q}^l \mid \alpha_{kl} \in \mathbb{C} \right\}.$$

RESULTADO 4. *Sea  $\Omega = e_1 \in \ell_2$ ,  $\Pi_N$  la proyección ortogonal en  $\langle \{e_1, \dots, e_N\} \rangle$  y considérese la función  $\Phi$  definida como*

$$\begin{aligned} \Phi: \widehat{\mathcal{C}} &\rightarrow \ell_2 \\ T &\mapsto T\Omega \end{aligned}$$

entonces

$$\langle \{\Phi(T) \mid T \in \widehat{W}_N\} \rangle = \langle \{\Pi_{N+1}\psi \mid \psi \in \ell_2\} \rangle$$

(Ver Proposición 2.4.14).

## CAPÍTULO 1

# Operadores no acotados en espacios de Hilbert

### Índice

---

1.1. Relación de conmutación canónica: operadores posición y momento	7
1.2. Operadores autoadjunto y esencialmente autoadjuntos	9
1.3. Extensiones del operador momento	12

---

Siete años después del nacimiento de la mecánica cuántica, en 1932, von Neumann publicaba el libro *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [32] presentando el formalismo matemático más riguroso de esta teoría hasta entonces. En él, no solo se establecen axiomas que a día de hoy prevalecen, sino que también se incluyen contribuciones reseñables a la teoría de espacios de Hilbert. Y es que precisamente von Neumann erige toda su descripción de la mecánica cuántica tomando los espacios de Hilbert complejos separables como escenario natural de definición.

Motivados por este hecho, en este capítulo nos limitaremos a considerar operadores en espacios de Hilbert complejos separables. Cierto es que algunas de las nociones que se presentan son igualmente válidas en otros espacios más generales como los espacios de Banach o incluso espacios normados. No obstante, nos abstendremos de un afán de generalización con el fin de evitar entorpecer la lectura con reiteradas precisiones sobre los espacios de definición en cada caso.

Respecto a la restricción al estudio de operadores no acotados, veremos que se debe a que los operadores fundamentales de la mecánica cuántica son de este tipo. Las diferencias con los acotados son sustanciales. El manejo de los operadores no acotados es técnicamente más difícil dado que se acentúa el carácter determinante del dominio y surgen problemas de extensión debido a la falta de continuidad. Finalmente, en este capítulo, se definirán los de operadores autoadjuntos, con relevantes implicaciones en física, además de otras nociones fundamentales de los operadores no acotados en espacios de Hilbert.

**DEFINICIÓN 1.0.1.** [8, p. 25] *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ , se dice que  $\mathcal{H}$  es un **espacio preHilbert o espacio de producto interior** si está dotado de un producto escalar. Es decir, una aplicación*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$$

que satisface:

- i)  $\langle \psi, \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi, \psi \rangle} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$
- ii)  $\langle \varphi + \psi, \chi \rangle = \langle \varphi, \chi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle \quad \forall \varphi, \psi, \chi \in \mathcal{H}.$
- iii)  $\langle \lambda \varphi, \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$
- iv)  $\langle \psi, \psi \rangle > 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \psi \neq 0.$

donde para  $\lambda \in \mathbb{C}$  denotamos por  $\bar{\lambda}$  a su conjugado.

Habitualmente, en el ámbito de la mecánica cuántica la propiedad *iii*) es sustituida por [18, p. 55]

$$\langle \varphi, \lambda \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle .$$

No obstante, en este manuscrito se adoptará la Definición 1.0.1 seguida en el curso de Espacios de Hilbert incluido en el grado.

DEFINICIÓN 1.0.2. [18, Definición A.44] *Un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  se dice **espacio de Hilbert** si está dotado de un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y es completo con respecto a la norma  $\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$  inducida por el producto escalar.*

El estudio llevado a cabo en este trabajo queda enmarcado en la teoría del análisis funcional lineal. Resulta por ende pertinente adoptar la siguiente definición.<sup>1</sup>

DEFINICIÓN 1.0.3. *Sea  $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  una aplicación, con  $\mathcal{D}(T)$  denso en  $\mathcal{H}$  diremos  $T$  es un **operador** si es lineal como aplicación. A  $\mathcal{D}(T)$  se le denomina **dominio** de  $T$ .*

Un ejemplo destacable de espacio de Hilbert es el espacio  $L^2(\mathbb{R}^3)$  sobre el que se definen los operadores más importantes de la mecánica cuántica. Este espacio se obtiene una generalización a tres variables de  $L^2(\mathbb{R})$  definido como sigue:

$$L^2(\mathbb{R}) := \{ \psi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) / \sim \mid \|\psi\|_2 < \infty \} \quad \text{donde} \quad \|\psi\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx}$$

siendo  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  el conjunto de funciones medibles Lebesgue en  $\mathbb{R}$ ,  $\sim$  la relación de equivalencia dada por la igualdad en casi todo punto<sup>2</sup> y  $\|\cdot\|_2$  la norma asociada al producto escalar definido en  $L^2(\mathbb{R})$  como  $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$  para todo  $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ .

Nótese que dada una función  $\psi$  nula en casi todo punto, entonces  $\|\psi\|_2 = 0$ . Por ser  $\|\cdot\|_2$  una norma, los elementos del espacio  $L^2(\mathbb{R})$  no pueden ser funciones sino que son clases de funciones.

En general, los operadores pueden definirse en cualquier espacio sobre un cuerpo. Dependiendo del tipo de espacio se podrán clasificar en base a distintas propiedades teniendo en cuenta si los objetos involucrados en la caracterización se encuentran o no definidos en el espacio. Tal y como se ha indicado anteriormente, en este capítulo se considerarán exclusivamente operadores definidos en espacios de Hilbert. En concreto, en estos espacios queda definida la noción de norma que se ve envuelta en las definiciones 1.0.4 y 1.0.6.

DEFINICIÓN 1.0.4. *Sea  $T$  un operador con dominio  $\mathcal{D}(T)$ , su norma viene dada por la siguiente expresión*

$$\|T\| := \sup_{\psi \in \mathcal{D}(T)} \frac{\|T\psi\|}{\|\psi\|}$$

OBSERVACIÓN 1.0.5. Esta norma satisface la propiedad submultiplicativa. Esto es, sean  $T$  y  $S$  dos operadores con dominios respectivos  $\mathcal{D}(T)$  y  $\mathcal{D}(S)$  y denotemos por  $TS$  a la composición  $T \circ S$  entonces  $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup_{\psi \in \mathcal{D}(TS)} \frac{\|TS\psi\|}{\|\psi\|} = \sup_{\psi \in \mathcal{D}(TS)} \left( \frac{\|TS\psi\|}{\|S\psi\|} \frac{\|S\psi\|}{\|\psi\|} \right) \leq \sup_{\psi \in \mathcal{D}(TS)} \frac{\|TS\psi\|}{\|S\psi\|} \cdot \sup_{\psi \in \mathcal{D}(S)} \frac{\|S\psi\|}{\|\psi\|} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(T)} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \cdot \sup_{\psi \in \mathcal{D}(S)} \frac{\|S\psi\|}{\|\psi\|} = \|T\| \|S\| \end{aligned}$$

<sup>1</sup>De forma más general puede definirse un operador sin exigir la linealidad

<sup>2</sup>Sean  $\psi, \varphi$  dos funciones, se dice que coinciden en todo punto, i.e.  $\psi \stackrel{c.t.p.}{=} \varphi$ , si ambas funciones coinciden salvo en un conjunto de medida nula.

donde en (\*) se ha tenido en cuenta que  $\{S\psi \mid \psi \in \mathcal{D}(TS)\} \subset \mathcal{D}(T)$ .

DEFINICIÓN 1.0.6. Un operador  $T$  con dominio  $\mathcal{D}(T)$  se dice **acotado** si existe  $C \in \mathbb{R}^+$  tal que:

$$\|T\psi\| \leq C\|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T).$$

En caso contrario, i.e. si  $\|T\| = \infty$ , se dice **no acotado**.

Denotaremos por  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  al conjunto de operadores acotados en el espacio Hilbert  $\mathcal{H}$ . Además, se tomará la definición 1.0.6 como definición de operador no acotado. Así, operadores acotados y no acotados se diferencian en que para los primeros la imagen de la bola unidad queda dentro de una bola de radio finito mientras que para los segundos no. No obstante, cabe comentar que también está extendida la definición menos exigente de operador no acotado como operador no necesariamente acotado.

Probablemente, el ejemplo más sencillo de operador no acotado que podemos considerar es el operador diferencial  $\frac{d}{dx}$ . Tomemos como dominio el conjunto de polinomios definidos en el intervalo unidad  $\mathcal{P}[0, 1]$  con la norma heredada del espacio de Hilbert  $L^2[0, 1]$ . Tengamos en cuenta que su definición es análoga a la de  $L^2(\mathbb{R})$  (incluida al comienzo del capítulo) pero con la pertinente restricción del dominio de integración a  $[0, 1]$ . Para  $x^n \in \mathcal{P}[0, 1]$  tenemos que

$$\frac{\|\frac{d}{dx}x^n\|}{\|x^n\|} = n \frac{\|x^{n-1}\|}{\|x^n\|} = n \frac{\sqrt{\int_0^1 x^{n-1}x^{n-1}dx}}{\sqrt{\int_0^1 x^n x^n dx}} = n \frac{\sqrt{\frac{1}{2n-2}}}{\sqrt{\frac{1}{2n}}} = n \sqrt{\frac{n}{n-1}} > n$$

Observando que el conjunto de monomios mónicos es un subconjunto del conjunto de polinomios, i.e.  $\mathcal{M} := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}[0, 1] \subset L^2[0, 1]$ , podemos deducir que el operador no es acotado,

$$\left\| \frac{d}{dx} \right\| \geq \sup_{x^n \in \mathcal{M}} \frac{\|\frac{d}{dx}x^n\|}{\|x^n\|} = \infty.$$

Por otro lado, cabe destacar que el interés de distinguir los operadores entre acotados y no acotados se ve justificado por la equivalencia acotación-continuidad en el contexto lineal.

PROPOSICIÓN 1.0.7. Un operador es acotado si y solo si es continuo.

DEMOSTRACIÓN.

( $\Rightarrow$ ) Sea  $T$  un operador continuo, en particular es continuo en 0, esto es,

$$\forall \varepsilon, \exists \delta \text{ tal que } \|T\varphi - T0\| = \|T\varphi\| \leq \varepsilon, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(T) \text{ con } \|\varphi\| \leq \delta.$$

Para probar que es acotado veamos que existe  $M$  tal que  $\|T\varphi\| \leq M\|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(T)$

$$\|T\varphi\| = \frac{\|\varphi\|}{\delta} \left\| T \left( \frac{\delta\varphi}{\|\varphi\|} \right) \right\| \leq \frac{\|\varphi\|}{\delta} \varepsilon.$$

Donde la desigualdad se tiene por ser  $\left\| \frac{\delta\varphi}{\|\varphi\|} \right\| = \delta$ . Tomando  $M = \frac{\varepsilon}{\delta}$  queda probada la implicación.

( $\Leftarrow$ ) Sea ahora  $T$  un operador acotado, entonces  $\|T\varphi\| \leq M\|\varphi\|$  para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ . Por ser un operador una aplicación lineal, sea  $\psi \in \mathcal{D}(T)$ :

$$\|T(\varphi + \psi) - T\psi\| = \|T\varphi\| \leq M\|\varphi\|.$$

Así, tomando límites se tiene que  $T$  es continuo en  $\psi$

$$0 \leq \lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \|T(\varphi + \psi) - T\psi\| = \lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \|T\varphi\| \leq M \cdot \lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \|\varphi\| = 0.$$

Donde la existencia del límite queda garantizada por la regla del Sándwich.

□

Por otro lado, se tiene que linealidad de los operadores juega un papel condicionante en la continuidad.

PROPOSICIÓN 1.0.8. *Sea  $T$  un operador con dominio  $\mathcal{D}(T)$  tal que existe  $\varphi \in \mathcal{D}(T)$  con  $T$  continuo en  $\varphi$ . Entonces  $T$  es continuo en todo su dominio.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $T$  un operador continuo en  $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ . Consideremos una sucesión  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$  convergente en  $\mathcal{D}(T)$ , i.e.,  $\psi_n \rightarrow \psi \in \mathcal{D}(T)$ . Entonces:

$$\psi_n - \psi + \varphi \rightarrow \varphi.$$

Por lo tanto, aplicando la linealidad de  $T$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\psi_n) - T(\psi) + T(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\psi_n - \psi + \varphi) = T(\varphi).$$

Concluimos entonces que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T\psi_n = T(\psi)$ , es decir,  $T$  es continuo en  $\psi$ . □

Partiendo de la Proposición 1.0.7 un operador no acotado es necesariamente discontinuo en algún punto de su dominio de definición. Ahora, por la Proposición 1.0.8, un operador no acotado es discontinuo en todo punto de su dominio.

### 1.1. Relación de conmutación canónica: operadores posición y momento

El interés del estudio de los operadores no acotados se ve respaldado por los importantes ejemplos que acoge: los operadores posición y momento de la mecánica cuántica denotados por  $Q$  y  $P$  respectivamente [18, p. 63]. Como se ha indicado anteriormente, ambos operadores se definen habitualmente en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . No obstante, por simplicidad, en esta memoria consideraremos el caso de unidimensional en el que estos operadores quedan definidos como sigue [18, Proposición 3.6]

$$(1.1.1) \quad \begin{array}{ll} Q: \mathcal{D}(Q) \subset L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \psi(x) & \longmapsto x\psi(x) \end{array} \quad \begin{array}{ll} P: \mathcal{D}(P) \subset L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \psi(x) & \longmapsto -i\frac{d\psi}{dx}. \end{array}$$

En cualquier caso, los resultados que se recogen pueden generalizarse sin excesiva compilación a los respectivos operadores en tres dimensiones.

En Julio de 1925, Heisenberg sentaba las bases de la mecánica cuántica al proponer una nueva cinemática basada exclusivamente en las relaciones entre magnitudes observables [20, p. 1]. Formulada en términos de los operadores  $Q$  y  $P$ , apenas unos meses después, en Diciembre de 1925, Born y Jordan publicaban un artículo [10] en el que presentaban que la relación entre ambos operadores conocida como relación de conmutación canónica (RCC) [10, Ecuación 37] podía expresarse como

$$(1.1.2) \quad [Q, P] = i\mathbb{1}$$

donde  $[Q, P] = QP - PQ$  denota el conmutador usual de los operadores  $Q$  y  $P$ .

Como muestra la siguiente proposición, de esta relación se deduce que al menos uno de estos operadores ha de ser no acotado.

PROPOSICIÓN 1.1.1. [25, p. 274] *Sean  $Q$  y  $P$  dos operadores que satisfacen la RCC, entonces  $P$  y  $Q$  no pueden ser ambos acotados.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar, por inducción, que para todo  $k \in \mathbb{N}_0$  se tiene

$$[Q^k, P] = Q^k P - P Q^k = ikQ^{k-1}.$$

Sea  $k = 0$  es directo que  $[Q^0, P] = [\mathbb{1}, P] = P - P = 0$ .

Teniendo en cuenta que  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$  para todos operadores  $A, B$  y  $C$  entonces

$$[Q^k, P] = [QQ^{k-1}, P] = Q[Q^{k-1}, P] + [Q, P]Q^{k-1}.$$

Así, asumiendo que la relación se cumple para  $k - 1$ , esto es  $[Q^{k-1}, P] = i(k - 1)Q^{k-2}$  se deduce que también es cierto para  $k$ ,

$$[Q^k, P] = i(k - 1)Q^{k-1} + i\mathbb{1}Q^{k-1} = ikQ^{k-1}.$$

Supóngase ahora por reducción al absurdo que los dos operadores son acotados. En ese caso  $\|Q^k P - PQ^k\| = \|ikQ^{k-1}\|$ .

Desarrollando el término de la izquierda de la igualdad aplicando la desigualdad triangular y la propiedad submultiplicativa,

$$\|Q^k P - PQ^k\| \leq \|Q^k P\| + \|PQ^k\| \leq \|Q^k\| \|P\| + \|P\| \|Q^k\| = 2\|Q^k\| \|P\| \leq 2\|Q^{k-1}\| \|Q\| \|P\|.$$

Con esto,

$$2\|Q^{k-1}\| \|Q\| \|P\| \geq \|ikQ^{k-1}\| = k\|Q^{k-1}\|.$$

Ahora, para  $k \geq 2$  se tiene que  $\|Q^{k-1}\| \neq 0$ . En caso contrario, por la propiedad probada inicialmente se tendría que  $0 = \|Q^{k-1}P - PQ^{k-1}\| = i(k - 1)\|Q^{k-2}\|$ , de donde se deduce que  $\|Q^{k-2}\| = 0$ . Iterando este proceso para valores decrecientes de  $k$  finalmente se obtendría  $\|Q\| = 0$ . Pero en ese caso:

$$0 = 2\|P\| \|Q\| \geq \|QP - PQ\| = \|i\mathbb{1}\| \Rightarrow 0 = \|i\mathbb{1}\|$$

que es absurdo. Dividiendo entonces por  $\|Q^{k-1}\|$  se obtiene

$$2\|Q\| \|P\| \geq k.$$

Y dado que  $k$  puede ser arbitrariamente grande, necesariamente al menos uno de los dos operadores debe ser no acotado.  $\square$

De hecho, se tiene que ninguno es acotado. A partir de las definiciones (1.1.1), observamos que para  $\psi$  una función cualquiera de  $L^2(\mathbb{R})$  a priori, no podemos asegurar que  $x\psi(x)$  ni  $-i\psi'(x)$  pertenezcan a  $L^2(\mathbb{R})$ . Es decir, ninguno de los dominios cubre al completo el espacio de Hilbert, esto es,  $\mathcal{D}(Q) \subsetneq L^2(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{D}(P) \subsetneq L^2(\mathbb{R})$  [18, p. 69]. Como veremos en la Sección 1.2,  $Q$  y  $P$  son operadores simétricos y de esta imposibilidad de extensión a todo el espacio de Hilbert se deducirá que son no acotados. Cabe subrayar que  $Q$  y  $P$  no son a priori acotados al considerar su definición sobre subconjuntos  $\mathcal{D}(Q)$  y  $\mathcal{D}(P)$  cualesquiera de  $L^2(\mathbb{R})$ . En determinados casos sí. Por ejemplo, considérese el operador  $Q$  con una definición análoga pero en  $L^2[0, 1]$  es evidente que se trataría de un operador acotado.

Cabe observar que el hecho de que operador momento sea no acotado implica que los operadores diferenciales tampoco lo son. Así, la teoría de este capítulo no solo cobra importancia en la mecánica cuántica sino que también trasciende al ámbito las ecuaciones diferenciales.

Finalmente, como justificará el cálculo funcional desarrollado en la Sección A.2, a partir de los operadores no acotados  $Q$  y  $P$  pueden definirse los operadores acotados, de hecho unitarios,

$$U(t) = e^{itP} \quad \text{y} \quad V(s) = e^{isQ}.$$

Los operadores  $U(t)$  y  $V(s)$  satisfacen la relación de Weyl dada por

$$(1.1.3) \quad U(t)V(s) = e^{its}V(s)U(t)$$

interpretable como una versión exponencial de la RCC [25, Ecuación VIII.8]. La unicidad de esta relación queda garantizada por el teorema de Stone-von Neumann [18,

Teorema 14.8] en el sentido de para dos operadores  $A, B$  cualesquiera satisfaciendo la RCC exponencial, existe un operador unitario  $W : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}$  tal que

$$W^*AW = e^{itP} \quad \text{y} \quad W^*BW = e^{isQ}.$$

Dejamos esta cuestión acerca de las representaciones de la RCC como un mero comentario por alejarse del propósito de la presente memoria. No obstante, en el Apéndice A se recoge la parte del teorema relativa a Stone (Teorema A.3.2) que establece una correspondencia entre operadores autoadjuntos y grupos unitarios uniparamétricos fuertemente continuos.

## 1.2. Operadores autoadjunto y esencialmente autoadjuntos

Son muchas las propiedades que pueden atribuirse a los operadores definidos en un espacio de Hilbert. Ahora, como evidenciará el Apéndice A, entre las múltiples caracterizaciones posibles es indudable que en el ámbito de la física matemática destacan por su interés los operadores autoadjuntos.

A continuación se introducen algunas de las definiciones y propiedades necesarias para entender los operadores autoadjuntos y esencialmente autoadjuntos. A fin de que este capítulo no sea excesivamente extenso no demostraremos todos los resultados sino tan solo aquellos que se obtengan de una aplicación directa de las definiciones. Veremos que el objeto clave de esta sección será el operador adjunto que estará involucrado en la mayoría de las definiciones. Como señalaremos, este operador solo queda definido para operadores densamente definidos.

**DEFINICIÓN 1.2.1.** *Un operador  $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$  se dice **densamente definido** si  $\mathcal{D}(T)$  es denso en  $\mathcal{H}$ .*

En todo lo que sigue se considerarán operadores densamente definidos. Realmente no se trata de una exigencia limitante puesto que todo operador  $T$  es densamente definido sobre  $\overline{\mathcal{D}(T)}$  que es un espacio de Hilbert.

**DEFINICIÓN 1.2.2.** [25, p. 252] *Sea  $T$  un operador densamente definido y  $\mathcal{D}(T^*)$  el conjunto de  $\varphi \in \mathcal{H}$  tales que existe  $\eta \in \mathcal{H}$  satisfaciendo:*

$$(1.2.1) \quad \langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T)$$

*Se define entonces  $T^*$ , el **operador adjunto** de  $T$ , como*

$$T^*: \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \varphi & \longmapsto & \eta \end{array}$$

Nótese que la condición de que  $\mathcal{D}(T)$  sea denso en  $\mathcal{H}$  es necesaria para que  $T^*$  esté bien definido, i.e, para que exista un único  $\eta \in \mathcal{H}$  satisfaciendo la igualdad (1.2.1) [25, p. 252]. Si  $\mathcal{D}(T)$  no es denso en  $\mathcal{H}$ , esto es,  $\overline{\mathcal{D}(T)} \neq \mathcal{H}$ , existe  $\chi \neq 0$  en el complemento ortogonal de  $\overline{\mathcal{D}(T)}$  en  $\mathcal{H}$  de forma que  $\langle \psi, \chi \rangle = 0$  para todo  $\psi \in \mathcal{D}(T) \subset \overline{\mathcal{D}(T)}$ . Por tanto

$$\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle = \langle \psi, \eta \rangle + \langle \psi, \chi \rangle = \langle \psi, \eta + \chi \rangle.$$

Y se tiene que  $\eta + \chi$  satisface la condición 1.2.1 contradiciendo la unicidad de  $\chi$ .

En cambio, si  $\overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{H}$  entonces  $\mathcal{D}(T)^\perp = \{0\}$ . Supongamos que existen  $\eta, \chi$  satisfaciendo (1.2.1). Entonces  $\langle \psi, \chi \rangle = \langle \psi, \xi \rangle$  para todo  $\psi \in \mathcal{D}(T)$ . Equivalentemente,  $\langle \psi, \eta \rangle - \langle \psi, \chi \rangle = 0$  para todo  $\psi \in \mathcal{D}(T)$  pero por ser  $\mathcal{D}(T)^\perp = \{0\}$ , necesariamente  $\eta = \chi$ .

A menudo en física ocurre que los operadores no satisfacen determinadas propiedades que serían convenientes para su manejo. Ahora bien, en muchos de los casos es suficiente

con que existan extensiones de ellos que sí las satisfagan. Ejemplo de esta idea será la noción de operador esencialmente autoadjunto de interés por la propiedad de extensión recogida en la Proposición 1.2.17.

DEFINICIÓN 1.2.3. [25, p. 250] Sean  $T, S$  dos operadores. Se dice que  $S$  es una **extensión** de  $T$  y se denota por  $T \subset S$  si  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$  y  $T\psi = S\psi$  para todo  $\psi \in \mathcal{D}(T)$ .

Obsérvese que las extensiones heredan relación de orden parcial de la inclusión de conjuntos.

Se incluye a continuación una propiedad de los operadores adjuntos de gran utilidad.

PROPOSICIÓN 1.2.4. [25, p. 252] Sea  $T$  un operador densamente definido y  $S$  una extensión de  $T$ , entonces  $T^*$  es una extensión de  $S^*$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(S^*)$ , entonces existe  $\eta \in \mathcal{H}$  tal que

$$\langle S\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(S)$$

con  $S^*\varphi = \eta$ .

Ahora, por ser  $S$  una extensión de  $T$  se tiene que  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$  con lo que en particular

$$\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle = \langle \psi, S^*\varphi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T)$$

Con  $\varphi \in \mathcal{D}(T^*)$  de forma que  $\mathcal{D}(S^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$  y  $T^*\varphi = \eta = S^*\varphi$ . Con ambos resultados queda probado que  $S^* \subset T^*$ .  $\square$

Aunque sin implicaciones tan directas en física como los operadores autoadjuntos, con una definición menos exigente se tienen los operadores simétricos.

DEFINICIÓN 1.2.5. [25, p. 255] Un operador  $T$  densamente definido se dice **simétrico** si

$$\langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Se trata de una propiedad que relaciona acotación y dominio de definición. En concreto, el teorema de Hellinger-Toeplitz establece que todo operador simétrico definido en todo un espacio de Hilbert es acotado [25, p. 84], [18, Corolario 9.9].

Puede verse cierta similitud entre las definiciones de operador adjunto y simétrico y es que en efecto se da la siguiente propiedad.

PROPOSICIÓN 1.2.6. [18, Proposición 9.4] Un operador  $T$  es simétrico si y solo si  $T^*$  es una extensión de  $T$ .

DEMOSTRACIÓN. Para probar la implicación hacia la derecha tomemos  $\varphi \in \mathcal{D}(T)$  y defínase  $\eta = T\varphi$ . Por ser  $T$  simétrico tenemos que

$$\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T\varphi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Con esto,  $\varphi \in \mathcal{D}(T^*)$  y por tanto  $T \subset T^*$  puesto que  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$  y  $T^*\varphi = \eta = T\varphi$ . Para la otra implicación observamos que

$$\langle T\varphi, \psi \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle \varphi, T^*\psi \rangle \stackrel{(ii)}{=} \langle \varphi, T\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(T)$$

Donde (i) se da por la definición de  $T^*$  y (ii) porque  $T \subset T^*$ . Queda así probado que  $T$  es simétrico.  $\square$

Añadiendo una exigencia sobre el dominio del operador adjunto llegamos a la definición de operador autoadjunto.

DEFINICIÓN 1.2.7. [25, p. 255] Un operador densamente definido  $T$  es **autoadjunto** si  $T = T^*$ . En particular  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ .

Cabe destacar que esta diferencia con respecto a los operadores simétricos no es en absoluto trivial puesto que como se indica en la Proposición 1.2.4 una ampliación del dominio de un operador se ve reflejado en una reducción del de su adjunto.

PROPOSICIÓN 1.2.8. *Sea  $T$  un operador autoadjunto, entonces  $T^*$  también es autoadjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ , entonces

$$\langle T^*\psi, \varphi \rangle = \langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, T^*\varphi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*).$$

Sea  $\eta = T^*\varphi$ , la igualdad anterior queda de la forma

$$\langle T^*\psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \eta \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*).$$

Luego tomando  $T^{**}\varphi = \eta$  se tiene que  $T^* = T^{**}$  puesto que

$$\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \eta \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*).$$

□

Veamos ahora que todo operador autoadjunto es maximal respecto a extensiones autoadjuntas.

PROPOSICIÓN 1.2.9. [22, Corolario 3.1] *Sean  $T, S$  operadores autoadjuntos tales que  $T \subset S$  entonces  $T = S$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $T$  y  $S$  dos operadores autoadjuntos tales que  $T \subset S$

$$T \subset S = S^* \stackrel{(i)}{\subset} T^* = T$$

donde (i) es consecuencia de la Proposición 1.2.4. De la inclusión se deduce que  $S = T$ . □

Un concepto relevante en la teoría general de operadores no acotados son los operadores cerrados. En cierto modo estos operadores remplazan la noción de continuidad que, como hemos visto en al comienzo del capítulo, no se tiene en los operadores no acotados. A continuación se introducen algunos los términos que conciernen a la teoría de operadores cerrados y que además serán necesarios para definir los esencialmente autoadjuntos.

DEFINICIÓN 1.2.10. [25, p. 250] *Sea  $T$  un operador se define el **grafo**  $\Gamma(T)$  como el conjunto de pares:*

$$(\psi, T\psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T)$$

DEFINICIÓN 1.2.11. [25, p. 250] *Un operador  $T$  densamente definido se dice **cerrado** si su grafo es un subconjunto cerrado de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .*

DEFINICIÓN 1.2.12. [25, p. 250] *Un operador  $T$  densamente definido se dice **cerrable** si tiene una extensión cerrada. La menor extensión cerrada se le llama **cierre o clausura** y se denota por  $\bar{T}$ .*

El siguiente teorema que incluimos sin demostración recoge las relaciones esenciales entre el operador adjunto y las definiciones anteriores.

TEOREMA 1.2.13. [25, p. 253] [28, Teorema 1.8] *Sea  $T$  un operador densamente definido, entonces*

- i)  $T$  es cerrable si y solo si  $T^*$  es densamente definido.
- ii) si  $T$  es cerrable, entonces
  - (a)  $(\bar{T})^* = T^*$ ;
  - (b)  $\bar{T} = T^{**}$  donde  $T^{**} := (T^*)^*$ .
- iii)  $T$  es cerrado si y solo si  $T = \bar{T}$ .

A partir de este teorema es sencillo demostrar que en la categoría de operadores cerrables quedan incluidos todos los simétricos y por tanto todos los autoadjuntos.

PROPOSICIÓN 1.2.14. [25, p. 255] *Todo operador simétrico es cerrable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $T$  un operador simétrico, entonces por la Proposición 1.2.6,  $T^*$  es una extensión de  $T$ . Por ser los operadores simétricos densamente definidos se tiene que

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}(T)} \subset \overline{\mathcal{D}(T^*)} \subset \mathcal{H}.$$

Por tanto  $\overline{\mathcal{D}(T^*)} = \mathcal{H}$  y por el Teorema 1.2.13 *i)*  $T$  es cerrable.  $\square$

DEFINICIÓN 1.2.15. [25, p. 256] *Un operador  $T$  densamente definido se dice **esencialmente autoadjunto** si es simétrico y  $\overline{T}$  es autoadjunto y  $T^* = T^{**}$ .*

Finalmente, como indica la Proposición 1.2.16, ser esencialmente autoadjunto es una propiedad menos exigente que ser autoadjunto.

PROPOSICIÓN 1.2.16. *Todo operador autoadjunto es esencialmente autoadjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición se tiene que  $T$  es simétrico y por la Proposición 1.2.14,  $T$  es cerrable. Finalmente, por la Proposición 1.2.8 y el apartado *ii)* del Teorema 1.2.13

$$(\overline{T})^* = T^* = T^{**} = \overline{T}$$

con lo que  $\overline{T}$  es autoadjunto y se concluye la demostración.  $\square$

Como se ha mencionado anteriormente, el interés de esta noción se encuentra en la propiedad recogida en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.2.17. [18, Proposición 9.11] *Sea  $T$  un operador esencialmente autoadjunto entonces  $\overline{T}$  es la única extensión autoadjunta de  $T$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $T$  un operador esencialmente autoadjunto, entonces es simétrico. En base a la Proposición 1.2.14 se tiene además  $T$  es cerrable. La prueba de que  $\overline{T}$  es autoadjunto es igual que la demostración anterior. La unicidad es consecuencia de la Proposición 1.2.9.  $\square$

### 1.3. Extensiones del operador momento

En esta sección nos centraremos en el operador momento para ilustrar las sutilezas de la teoría de extensiones de operadores no acotados. Como hemos visto en la Sección 1.1, el operador momento en una dimensión viene dado por (1.1.1):

$$\begin{aligned} P: \quad \mathcal{D}(P) \subset L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \psi(x) &\longmapsto -i \frac{d\psi}{dx}. \end{aligned}$$

Naturalmente, su generalización a más dimensiones se obtiene sustituyendo la derivada parcial  $\frac{d\psi}{dx}$  por su gradiente  $\nabla\psi$ .

En lo que sigue se presentan ejemplos de operadores en con distintas condiciones de contorno sobre las funciones del dominio y se estudia si son o no adjuntos o esencialmente autoadjuntos. Nos referiremos a todos ellos como operadores momento puesto que vienen dados por la misma *fórmula* si bien son operadores distintos por tener dominios diferentes.

Los ejemplos incluidos a continuación consideran funciones definidas en un intervalo  $[a, b]$  de la recta real con  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ,  $a < b$ . Cabe plantearse si  $L^2[a, b]$  es buen candidato como espacio ambiente para los dominios de los operadores. Recordemos que los objetos de este espacio son clases de equivalencia de funciones y que no dependen

del valor de la función en un conjunto de medida nula como por ejemplo  $\{a, b\}$ . De este modo, no son sensibles a una modificación de las condiciones de contorno. En consecuencia, será necesario tomar subespacios de  $L^2[a, b]$  con más regularidad que este. En esta línea, los espacios de Sobolev serán el escenario natural para todos los dominios involucrados.

La motivación para definir los espacios de Sobolev subyace en proporcionar una escala para medir el número de derivadas así como la integrabilidad de las mismas. Definamos los espacios de funciones  $L^p(U)$  con  $1 \leq p \leq \infty^3$  y  $U \subset \mathbb{R}$ ,

$$L^p(U) := \{\psi \in \mathcal{M}(U) / \sim \mid \|\psi\|_p < \infty\} \quad \text{donde} \quad \|\psi\|_p = \left( \int_U |\psi(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

con  $1 \leq p < \infty$ .

$$L^\infty(U) := \{\psi \in \mathcal{M}(U) / \sim \mid \|\psi\|_\infty < \infty\} \quad \text{donde} \quad \|\psi\|_\infty = \{C > 0 \mid |\psi| \leq C \text{ en c.t.p}\}$$

OBSERVACIÓN 1.3.1. Sean los espacios de Hilbert  $L^p[a, b]$ ,  $L^q[a, b]$  con  $[a, b]$  un intervalo acotado, i.e.,  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Se verifica  $\|\psi\|_p \leq \|\psi\|_q$  pero no son equivalentes<sup>4</sup>. Por lo tanto  $L^q[a, b] \subsetneq L^p[a, b]$ .

A partir de esta inclusión,  $L^q[a, b]$  puede dotarse de la norma heredada de  $L^p[a, b]$ . En la presente memoria en cada espacio  $L^p[a, b]$  se considerará su norma asociada  $\|\cdot\|_p$  sin hacer mención explícita a esta.

Los espacios de Sobolev se definen entonces como subespacios vectoriales de los espacios  $L^p$  y están compuestos por clases de funciones con derivadas hasta cierto orden pertenecientes a  $L^p$ . Nótese que no todos los elementos de  $L^p$  son diferenciables. Ahora bien, en el caso de funciones integrables el concepto de derivada es generalizado por el de derivada débil. A continuación se incluye la definición para funciones en  $L^2[a, b]$ .

DEFINICIÓN 1.3.2. Sea  $\psi \in L^1[a, b]$ , se dice que  $\varphi \in L^1[a, b]$  es la **derivada débil** o **derivada en el sentido de las distribuciones** de  $\psi$  si

$$\int_a^b \varphi(x)\eta(x)dx = - \int_a^b \psi(x)\eta(x)'dx \quad \text{para todo} \quad \eta \in C_0^\infty[a, b].$$

Esta derivada débil coincide con la usual en caso de que la función  $\psi$  sea integrable.

Con el fin de estudiar distintos ejemplos del operador momento y la relevancia de las condiciones de contorno es suficiente con introducir el espacio de Sobolev  $H^1$ . Existe no obstante una definición biparamétrica de espacios de Sobolev de la que la Definición 1.3.3 que se obtiene como un caso particular.

DEFINICIÓN 1.3.3. [30, p. 85] *El espacio de Sobolev  $H^1[a, b]$  viene dado por el siguiente conjunto:*

$$H^1[a, b] := \{\psi \in L^2[a, b] \mid \psi' \in L^2[a, b]\}$$

donde  $\psi'$  es la derivada débil de  $\psi$ .

Las funciones absolutamente continuas también desempeñarán un papel importante en los ejemplos de esta sección.

<sup>3</sup>A  $L^1$  se le denomina el espacio de funciones integrables Lebesgue en casi todo punto.

<sup>4</sup>Dos normas  $\|\cdot\|_p$  y  $\|\cdot\|_q$  en  $\mathcal{H}$  se dicen equivalentes si existen dos constantes reales  $C, \tilde{C} > 0$  tales que  $\|\psi\|_p \leq C\|\psi\|_q$  y  $\|\psi\|_q \leq \tilde{C}\|\psi\|_p$  para todo  $\psi \in \mathcal{H}$ .

DEFINICIÓN 1.3.4. [28, Teorema E.1] Sea  $\psi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ , se dice que  $\psi$  es **absolutamente continua**, i.e.  $\psi \in \mathcal{AC}[a, b]$ , si existe una función  $\varphi \in L^1[a, b]$  tal que

$$\psi(x) = \psi(a) + \int_a^x \varphi(t)dt \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Se tiene además que  $\psi$  es derivable en c.t.p y  $\psi' \stackrel{c.t.p.}{=} \varphi$ .

La categoría de funciones absolutamente continuas está estrechamente relacionadas con el espacio de Sobolev  $H^1$  mediante el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.3.5. [7, Teorema 4] Sea  $\psi \in H^1[a, b]$  entonces  $\psi$  tiene un representante absolutamente continuo  $\tilde{\psi}$ . Esto es, existe  $\tilde{\psi} \in \mathcal{AC}[a, b]$  tal que  $\psi \stackrel{c.t.p.}{=} \tilde{\psi}$  y  $\psi' \stackrel{c.t.p.}{=} \tilde{\psi}'$  donde  $\psi'$  es la derivada débil de  $\psi$ .

Se tiene además que este representante es continuo ya que las funciones absolutamente continuas son en particular funciones continuas.

A partir de la Proposición 1.3.5, considerando la identificación de cada clase de funciones de  $H^1[a, b]$  con un representante absolutamente continuo de esta, el espacio  $H^1[a, b]$  puede expresarse como sigue [28, p. 410]:

$$H^1[a, b] := \{\psi \in \mathcal{AC}[a, b] \mid \psi' \in L^2[a, b]\}.$$

Nótese que se abusa de notación al denotar también por  $H^1[a, b]$  al conjunto de los representantes que, a diferencia del conjunto definido en la Definición 1.3.3, es un conjunto de funciones y no de clases de funciones. Esta vaguedad en la denominación queda justificada en los casos en los que se lleva a cabo un tratamiento integral de las funciones. Tan solo puntos correspondientes a los extremos de integración juegan entonces un papel. Con esta identificación se tiene además la siguiente cadena de inclusiones [28, p. 410]

$$\mathcal{C}^1[a, b] \subset H^1[a, b] \subset \mathcal{AC}[a, b].$$

En todo lo que sigue  $H^1[a, b]$  será el conjunto de representantes de forma cobre sentido imponer condiciones de contorno.

Veamos ahora que resulta sencillo obtener funciones de  $H^1$  a partir de funciones en el espacio  $L^2$ .

OBSERVACIÓN 1.3.6. Sea  $\eta \in L^2[a, b]$  con  $[a, b]$  un intervalo acotado, i.e.,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Definamos  $\chi(x) = \int_a^x \eta(t)dt$  con  $x \in [a, b]$ . Por la Observación 1.3.1,  $L^2[a, b] \subset L^1[a, b]$ . Por lo tanto,  $\eta \in L^1(a, b)$  y se tiene que  $\chi \in \mathcal{AC}[a, b]$ . Además,  $\chi' = \eta \in L^2[a, b]$ , luego con todo,  $\chi \in H^1[a, b]$ .

Por otro lado, para el estudio de los distintos operadores es de utilidad tener en cuenta que la fórmula de integración por partes es aplicable a las funciones absolutamente continuas [28, Teorema E.2]. En el caso particular de que  $\psi, \varphi$  sean funciones en  $\mathcal{AC}[a, b]$  tales que al menos una de ella se anule en los extremos, entonces:

$$(1.3.1) \quad \int_a^b \varphi'(x)\psi(x)dx = \varphi(x)\psi(x)|_a^b - \int_a^b \varphi(x)\psi'(x)dx = - \int_a^b \varphi(x)\psi'(x)dx.$$

También será de ayuda recurrir al anulador en algunos pasos de las demostraciones posteriores.

DEFINICIÓN 1.3.7. Sea  $X$  un subconjunto subconjunto de  $L^2[a, b]$ . Se define el **anulador** de  $X$ , denotado por  $X^\perp$ , como sigue

$$X^\perp := \{\psi \in L^2[a, b] \mid \langle \psi, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in X\}.$$

Analicemos a continuación los distintos ejemplos. En todos ellos, los dominios de los operadores involucrados serán densos con lo que puede definirse el operador adjunto. Además, estos dominios serán subconjuntos de  $\mathcal{AC}[a, b]$  o  $\mathcal{C}^1[a, b]$  con  $[a, b]$  acotado de forma que las funciones serán diferenciables o en su defecto diferenciables en casi todo punto.

EJEMPLO 1.3.8. [28, Ejemplo 1.4] *El operador momento  $P_0 = -i\frac{d}{dx}$  con dominio*

$$\mathcal{D}(P_0) = H_0^1[a, b] = \{\psi \in H^1[a, b] \mid \psi(a) = \psi(b) = 0\}$$

*no es autoadjunto.*

Consideremos dos observaciones iniciales para facilitar la demostración de este resultado.

OBSERVACIÓN 1.3.9. [8, p. 60] Sean  $X, Y$  dos subespacios lineales de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y  $X^\perp, Y^\perp$  sus respectivos anuladores, si  $X \subset Y$  entonces  $Y^\perp \subset X^\perp$ .

OBSERVACIÓN 1.3.10. [8, p. 71] Sea  $X$  un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , entonces  $(X^\perp)^\perp = X^{\perp\perp} = X$ . En ese caso, sea  $Y$  un subespacio lineal cualquiera de  $\mathcal{H}$ , si se cumple  $X^\perp \subset Y$ , por la observación precedente se tiene que  $Y^\perp \subset X^{\perp\perp} = X$ .

LEMA 1.3.11. [28, p. 14] *Sea  $\mathcal{R}(P_0)$  el rango del operador momento, i.e.*

$$\mathcal{R}(P_0) := \{\psi \in L^2[a, b] \mid \exists \varphi \in L^2[a, b], P_0\varphi = \psi\}$$

*entonces  $\mathcal{R}(P_0)^\perp \subset 1 \cdot \mathbb{C}$  siendo 1 la clase de la función constante de valor 1.*

DEMOSTRACIÓN. Observamos que el conjunto  $(1 \cdot \mathbb{C})$  de las funciones constantes es cerrado. Por la observación precedente, basta con ver que  $(1 \cdot \mathbb{C})^\perp \subset \mathcal{R}(P_0)$ .

Sean  $\eta \in (1 \cdot \mathbb{C})^\perp$  y  $\chi(x) = \int_a^x \eta(t)dt$  con  $x \in [a, b]$ . Por la Observación 1.3.6 tenemos que  $\chi \in H^1[a, b]$ . Por otro lado,  $\chi(a) = \int_a^a \eta(t)dt = 0$  y  $\chi(b) = \int_a^b \eta(t)dt = \langle \eta, 1 \rangle = 0$  puesto que  $\eta \in (1 \cdot \mathbb{C})^\perp$ . Con todo esto, podemos afirmar que  $\chi \in \mathcal{D}(P_0)$ , y dado que  $P_0(i\chi) = \chi' = \eta$  se tiene que  $\eta \in \mathcal{R}(P_0)$  como queríamos probar.  $\square$

Probemos a continuación el enunciado del Ejemplo 1.3.8.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que  $\mathcal{D}(P_0^*) = H^1[a, b]$  y que  $P_0^*\psi = -i\psi'$  para todo  $\psi \in \mathcal{D}(P_0^*)$ .

Sea  $\psi \in H^1[a, b]$  y  $\varphi \in \mathcal{D}(P_0)$ , entonces,

$$(1.3.2) \quad \langle P_0\varphi, \psi \rangle = \int_a^b (-i)\varphi'(x)\overline{\psi(x)}dx \stackrel{1.3.1}{=} \int_a^b \varphi(x)\overline{(-i\psi'(x))}dx = \langle \varphi, -i\psi' \rangle.$$

Se tiene así que  $\psi \in \mathcal{D}(P_0^*)$  y  $P_0^*\psi = -i\psi'$ .

Supongamos ahora que  $\psi \in \mathcal{D}(P_0^*)$  y definamos  $\eta := P_0^*\psi$  y  $\chi(x) = \int_a^x \eta(t)dt$ . Como se establece en la Observación 1.3.6,  $\chi \in H^1[a, b]$  y  $\chi' = \eta$ .

Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(P_0)$ , entonces

$$\begin{aligned} -\langle \varphi', \chi \rangle &= -\int_a^b \varphi'(x)\overline{\chi(x)} \stackrel{1.3.1}{=} \int_a^b \varphi(x)\overline{\chi'(x)}dx \\ &= \langle \varphi, \chi' \rangle = \langle \varphi, \eta \rangle = \langle \varphi, P_0^*\psi \rangle = \langle P_0\varphi, \psi \rangle \\ &= \langle -i\varphi', \psi \rangle. \end{aligned}$$

Partiendo de esto, tenemos que  $0 = \langle -i\varphi', \psi \rangle + \langle \varphi, \chi \rangle = \langle -i\varphi', \psi \rangle - \langle -i\varphi, i\chi \rangle = \langle -i\varphi', \psi - i\chi \rangle$ . Y dado que  $P_0\varphi = -i\varphi' \in \mathcal{R}(P_0)$ , entonces  $\psi - i\chi \in \mathcal{R}(P_0)^\perp$  y por el Lema 1.3.11  $\psi - i\chi \in 1 \cdot \mathbb{C}$ . Ahora, dado que  $\chi, 1 \in H^1[a, b]$  y  $H^1[a, b]$  tiene estructura de subespacio concluimos que  $\psi \in H^1[a, b]$ . Finalmente, como  $\mathcal{D}(P_0) \subsetneq \mathcal{D}(P_0^*)$ , se deduce que  $P_0$  no es autoadjunto sino que  $P_0^*$  es una extensión de  $P_0$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 1.3.12.** El operador  $P_0$  considerado en el Ejemplo 1.3.8 es simétrico. Sean  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(P_0)$ , basta con replicar la cadena de igualdades 1.3.2 y llegamos a que  $\langle P_0\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, P_0\psi \rangle$ .

**EJEMPLO 1.3.13.** *Con las condiciones del Ejemplo 1.3.8,  $P_0$  no es esencialmente autoadjunto.*

**DEMOSTRACIÓN.** Para ver que  $P_0$  no es esencialmente autoadjunto es suficiente con ver que es cerrado y no es autoadjunto ya que si  $P_0$  es cerrado entonces  $\overline{P_0} = P_0$ , que no es autoadjunto.

$P_0$  es simétrico por la observación precedente. Veamos ahora que  $P_0$  es cerrado. Observamos que  $\mathcal{D}(P_0^*) = H^1[a, b]$  es denso en  $L^2[a, b]$  [28, p. 14], luego por el Teorema 1.2.13 i),  $P_0$  es cerrable. Ahora por el apartado ii) de dicho teorema tenemos que  $\overline{P_0} = P_0^{**}$ . Con este resultado y el apartado iii), probar que  $P_0$  es cerrado es equivalente a probar que  $P_0 = P_0^{**}$ . Veámoslo por doble inclusión:

( $\subset$ ) Por definición de la clausura  $P_0 \subset \overline{P_0}$ , además en este caso  $P_0^{**} = \overline{P_0}$  con lo que se obtiene el resultado.

( $\supset$ ) Como se ha probado en el Ejemplo 1.3.8,  $P_0 \subset P_0^*$ . Considerando ahora la Proposición 1.2.4,  $P_0^{**} \subset P_0^*$ . Así, sea  $\psi \in \mathcal{D}(P_0^{**}) \subset \mathcal{D}(P_0^*)$ , se tiene  $P_0^{**}\psi = P_0^*\psi = -i\psi'$ . Sea ahora  $\varphi \in \mathcal{D}(P_0^*)$  observamos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P_0^*\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, P_0^{**}\psi \rangle = -i\langle \varphi', \psi \rangle - i\langle \varphi, \psi' \rangle \\ &= -i \int_a^b \varphi'(x)\overline{\psi(x)}dx - i \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi'(x)}dx \\ &= -i \left( \varphi(x)\overline{\psi(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi'(x)}dx \right) - i \left( \varphi(x)\overline{\psi(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x)\overline{\psi(x)}dx \right) \\ &= -i(\varphi(b)\overline{\psi(b)} - \varphi(a)\overline{\psi(a)}) + \langle \varphi, P_0^{**}\psi \rangle - i(\varphi(b)\overline{\psi(b)} - \varphi(a)\overline{\psi(a)}) - \langle P_0^*\varphi, \psi \rangle \\ &= -2i(\varphi(b)\overline{\psi(b)} - \varphi(a)\overline{\psi(a)}). \end{aligned}$$

Finalmente dado que  $\varphi \in \mathcal{D}(P_0^*) = H^1(a, b)$ ,  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  pueden tomar valores arbitrarios. Como la igualdad debe cumplirse siempre, necesariamente  $\psi(a) = \psi(b) = 0$ . Queda así probado que  $\psi \in \mathcal{D}(P_0)$ .  $\square$

**EJEMPLO 1.3.14.** [28, Ejemplo 1.5] *El operador momento  $P = -i\frac{d}{dx}$  con dominio*

$$\mathcal{D}(P) := \{\psi \in H^1[a, b] \mid \psi(a) = \psi(b)\}$$

*es autoadjunto.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(P)$  y  $\psi \in H^1[a, b]$

$$\begin{aligned} \langle P\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, -i\psi' \rangle &= -i \int_a^b \varphi'(x)\overline{\psi(x)}dx - i \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi'(x)}dx \\ (1.3.3) \quad &= -i \left( \varphi(x)\overline{\psi(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi'(x)}dx \right) - i \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi'(x)}dx \\ &= -i(\varphi(b)\overline{\psi(b)} - \varphi(a)\overline{\psi(a)}) = -i\overline{\psi(b)}(\psi(b) - \psi(a)). \end{aligned}$$

Observamos que si se da la igualdad  $\psi(b) = \psi(a)$  entonces  $\psi \in \mathcal{D}(P^*)$  con  $P^*\psi = -i\psi'$ .

Consideremos ahora  $\psi \in \mathcal{D}(P^*)$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $e^{\lambda(b-a)} = 1$ . Definimos la función  $\varphi(x) := e^{\lambda x} \in H^1[a, b]$ . Por elección de  $\lambda$ ,  $\varphi(a) = \varphi(b)$  con lo que  $\varphi \in \mathcal{D}(P)$ . Ahora, como  $P$  es una extensión del operador  $P_0$  del Ejemplo 1.3.8, por la Proposición 1.2.4,  $P^* \subset P_0^*$  y por tanto  $\psi \in H^1[a, b]$  con  $P^*\psi = P_0^*\psi = -i\psi'$ . Con esto, las igualdades (1.3.3) deben ser nulas y como  $\varphi(b) \neq 0$ , necesariamente  $\psi(a) = \psi(b)$ .

Por lo tanto  $\mathcal{D}(P^*) = \{\psi \in H^1[a, b] \mid \psi(a) = \psi(b)\} = \mathcal{D}(P)$  con  $P^*\psi = -i\psi' = P\psi$  para todo  $\psi \in \mathcal{D}(P^*)$ . Queda así probado que  $P$  es autoadjunto.  $\square$

Previamente a introducir otro ejemplo de operador momento consideremos los siguientes lemas que serán de utilidad en la demostración de las propiedades en cuestión.

Defínase el operador  $\widetilde{P}_0 = -i\frac{d}{dx}$  con dominio

$$\mathcal{D}(\widetilde{P}_0) = \{\psi \in \mathcal{C}^1[a, b] \mid \psi(a) = \psi(b) = 0\}.$$

LEMA 1.3.15. *Se cumple la siguiente igualdad*

$$\{\psi' \mid \psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)\} = \{\xi \in \mathcal{C}[a, b] \mid \int_a^b \xi(x)dx = 0\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Probémoslo por doble inclusión:

(C) Sea  $\psi' \in \{\psi' \mid \psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)\}$  observamos que:

$$\int_a^b \psi'(x)dx = \psi(x)|_a^b = 0.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $\mathcal{D}(\widetilde{P}_0) \subset \mathcal{C}^1[a, b]$ , para toda  $\psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)$  se tiene que  $\psi' \in \mathcal{C}[a, b]$ . Se obtiene así la inclusión deseada.

(D) Sea  $\xi \in \{\xi \in \mathcal{C}[a, b] \mid \int_a^b \xi(x)dx = 0\}$  y definamos  $\psi' = \xi$ , entonces  $\psi \in \mathcal{C}^1[a, b]$ . Además  $\psi(x) = \int_a^x \xi(t)dt$  con lo que  $\psi(a) = \int_a^a \xi(x)dx = 0$  y  $\psi(b) = \int_a^b \xi(x)dx = 0$ .  $\square$

LEMA 1.3.16. *Se tiene que  $\overline{\{\psi' \mid \psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)\}} = \{1\}^\perp$ .*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es directa a partir del lema anterior.

Sea

$$\xi \in \overline{\{\psi' \mid \psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)\}} = \overline{\left\{ \xi \in \mathcal{C}[a, b] \mid \int_a^b \xi(x)dx = 0 \right\}}$$

entonces  $\xi \in \{1\}^\perp$  ya que  $\langle \xi, 1 \rangle = \int_a^b \xi(x)dx = 0$ .

Recíprocamente, sea  $\xi \in \{1\}^\perp$ , por definición del anulador  $\int_a^b \xi(x)dx = 0$  y dado que  $\mathcal{C}[a, b]$  es denso en  $L^2[a, b]$ , entonces  $\xi \in \overline{\{\psi' \mid \psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)\}}$ .  $\square$

EJEMPLO 1.3.17. [30, p. 61] [22, p. 5,6] [18, Proposición 9.27] *El operador momento  $\widetilde{P}_0 = -i\frac{d}{dx}$  con dominio*

$$\mathcal{D}(\widetilde{P}_0) = \{\psi \in \mathcal{C}^1[a, b] \mid \psi(a) = \psi(b) = 0\}$$

*no es autoadjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0^*)$  y  $\psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)$ , entonces,

$$\langle \widetilde{P}_0\psi, \varphi \rangle = \int_a^b (-i\psi'(x))\overline{\varphi(x)}dx = \int_a^b \psi(x)\overline{\eta(x)}dx = \langle \psi, \eta \rangle \quad \text{con } \eta = \widetilde{P}_0^*\varphi.$$

Sea  $\chi(x) = \int_a^x \eta(t)dt$  entonces, por la Observación 1.3.6,  $\eta = \chi'$  y se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= i \int_a^b \psi'(x) \overline{\varphi(x)} dx + \int_a^b \psi(x) \overline{\eta(x)} dx = i \int_a^b \psi'(x) \overline{\varphi(x)} dx + \int_a^b \psi(x) \overline{\chi'(x)} dx \\ &\stackrel{1.3.1}{=} i \int_a^b \psi'(x) \overline{\varphi(x)} dx + \psi(x) \chi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \psi'(x) \chi(x) dx \\ &= i \int_a^b \psi'(x) \overline{\varphi(x)} dx - \int_a^b \psi'(x) \overline{\left( \int_a^x \eta(t) dt \right)} dx. \end{aligned}$$

Multiplicando por  $(-i)$ ,

$$0 = \int_a^b \psi'(x) \overline{\left( \varphi(x) - i \int_a^x \eta(t) dt \right)} dx.$$

Por lo tanto  $\varphi(x) - i \int_0^x \eta(t) dt \in \{\psi' \mid \psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)\}^\perp$ .

Teniendo en cuenta ahora los Lemas 1.3.15 y 1.3.16 se obtiene:

$$\varphi(x) - i \int_0^x \eta(t) dt \in \{\psi' \mid \psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)\}^\perp = (\{1\}^\perp)^\perp.$$

Ahora, para todo subconjunto de un espacio de Hilbert su doble anulador coincide con la clausura el conjunto que genera, esto es  $(\{1\}^\perp)^\perp = \overline{\langle \{1\} \rangle}$ . En este caso el conjunto generado es el de las funciones constantes, luego finalmente,

$$(\varphi(x) - i\chi(x)) \in \overline{\langle \{1\} \rangle} = \{\psi \in L^2[a, b] \mid \exists z \in \mathbb{C}, \psi \stackrel{c.t.p.}{=} z\}.$$

Teniendo en cuenta que  $\chi \in \mathcal{AC}[a, b]$  y que  $\overline{\langle \{1\} \rangle} \subset \mathcal{AC}[a, b]$  entonces  $\varphi$  es una combinación lineal de funciones absolutamente continuas y por consiguiente  $\varphi \in \mathcal{AC}[a, b]$ .

Ahora, existe  $C \in \mathbb{C}$  tal que  $\varphi(x) + C = i \int_0^x \eta(t) dt$ . Por el teorema fundamental del cálculo  $\eta = -i\varphi'$  de modo que  $\widetilde{P}_0^* \varphi = \eta = -i\varphi'$  para todo  $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0^*)$ . Como  $\text{Im}(\widetilde{P}_0^*) \subset L^2[a, b]$ , necesariamente,  $\varphi' \in L^2[a, b]$ , y con todo,  $\mathcal{D}(\widetilde{P}_0^*) \subset H^1[a, b]$ . Veamos que de hecho se da la igualdad  $\mathcal{D}(\widetilde{P}_0^*) = H^1[a, b]$ . Sea  $\psi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0)$  y  $\varphi \in H^1[a, b]$ , entonces,

$$\langle \widetilde{P}_0 \psi, \varphi \rangle = \int_a^b (-i\psi'(x)) \overline{\varphi(x)} dx \stackrel{1.3.1}{=} \int_a^b \psi(x) \overline{(-i\varphi'(x))} dx = \langle \psi, -i\varphi' \rangle$$

con lo que  $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{P}_0^*)$  y  $P_0^* \varphi = -i\varphi'$  como queríamos probar.

Llegamos finalmente a que  $\mathcal{D}(\widetilde{P}_0) \neq \mathcal{D}(\widetilde{P}_0^*)$  y por tanto el operador no es autoadjunto.  $\square$

EJEMPLO 1.3.18. [30, p. 62] [22, p. 7,8] *El operador momento  $\widetilde{P} = -i \frac{d}{dx}$  con dominio*

$$\mathcal{D}(\widetilde{P}) = \{\psi \in C^1[a, b] \mid \psi(a) = \psi(b)\}$$

*no es autoadjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $P$  el operador definido en el Ejemplo 1.3.14, observamos que  $P$  es extensión de  $\widetilde{P}$  ya que  $C^1[a, b] \subset \mathcal{H}^1[a, b]$ . Por otro lado, sea  $\widetilde{P}_0$  el operador definido en el Ejemplo 1.3.17, se tiene que  $\widetilde{P}$  es extensión de  $\widetilde{P}_0$ . Esto es  $\widetilde{P}_0 \subset \widetilde{P} \subset P$  y por la Proposición 1.2.4:

$$(1.3.4) \quad \{\psi \in H^1[a, b] \mid \psi(a) = \psi(b)\} = \mathcal{D}(P^*) \subset \mathcal{D}(\widetilde{P}^*) \subset \mathcal{D}(\widetilde{P}_0^*) = H^1[a, b].$$

Además, si  $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{P})$  y  $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{P}^*)$  se tiene entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \tilde{P}\psi, \varphi \rangle - \langle \psi, \tilde{P}^*\varphi \rangle = \langle \tilde{P}\psi, \varphi \rangle - \langle \psi, \tilde{P}_0^*\varphi \rangle \\
&= \int_a^b (-i\psi'(x))\overline{\varphi(x)}dx - \int_a^b \psi(x)\overline{(-i\varphi'(x))}dx \\
&\stackrel{1.3.1}{=} \left( (-i\psi(x)\varphi(x))\Big|_a^b + \int_a^b \psi(x)\overline{(-i\varphi'(x))}dx \right) - \int_a^b \psi(x)\overline{(-i\varphi'(x))}dx \\
&= i(\psi(a)\varphi(a) - \psi(b)\varphi(b)) = i\psi(a)(\varphi(a) - \varphi(b))
\end{aligned}$$

Y como esta igualdad debe darse para cualquier  $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{P})$  entonces  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Finalmente, teniendo en cuenta las inclusiones (1.3.4) se tiene que

$$\mathcal{D}(\tilde{P}^*) = \{\psi \in H^1[a, b] \mid \psi(a) = \psi(b)\}$$

y como  $\mathcal{D}(\tilde{P}) \neq \mathcal{D}(\tilde{P}^*)$  el operador no es autoadjunto.  $\square$

**EJEMPLO 1.3.19.** *El operador  $\tilde{P}$  considerado en el Ejemplo 1.3.18 es esencialmente autoadjunto.*

**DEMOSTRACIÓN.** Siendo  $\tilde{P}^*$  una extensión de  $\tilde{P}$ , por la Proposición 1.2.6 se tiene que  $\tilde{P}$  es simétrico. Ahora, por el Teorema 1.2.13,  $(\tilde{P})^* = \tilde{P}^*$  y  $\tilde{P} = \tilde{P}^{**}$ . Luego para ver que  $\tilde{P}$  es autoadjunto y por lo tanto  $\tilde{P}$  es esencialmente autoadjunto basta con ver que  $\tilde{P}^{**} = \tilde{P}^*$ .

Dado que  $\tilde{P} \subset \tilde{P}^*$ , por la Proposición 1.2.4,  $\tilde{P}^{**} \subset \tilde{P}^*$ , luego  $\mathcal{D}(\tilde{P}^{**}) \subset \mathcal{D}(\tilde{P}^*)$ . Veamos que también se tiene la inclusión en el otro sentido. Sean  $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{P}^*)$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{P}^*\varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, -i\psi' \rangle &= -i \int_a^b \varphi'(x)\overline{\psi(x)}dx - i \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi'(x)}dx \\
&= -i \left( \varphi(x)\overline{\psi(x)}\Big|_a^b - \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi'(x)}dx \right) - i \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi'(x)}dx \\
&= -i(\varphi(b)\overline{\psi(b)} - \varphi(a)\overline{\psi(a)}) = 0.
\end{aligned}$$

Y por tanto  $\psi \in \mathcal{D}(\tilde{P}^{**})$  con  $\tilde{P}^{**}\psi = -i\psi'$  como queríamos probar.  $\square$

## CAPÍTULO 2

# Estructuras promediabiles en mecánica cuántica

### Índice

---

<b>2.1. Descomposiciones paradójicas</b>	<b>20</b>
<b>2.2. Promediabilidad</b>	<b>23</b>
2.2.1. Condición de Følner	25
2.2.1.1. Álgebras de operadores	27
<b>2.3. El álgebra generada por <math>Q</math> y <math>P</math> es promediable</b>	<b>28</b>
2.3.1. Dinámica de los subespacios	32
<b>2.4. Representación matricial del álgebra generada por <math>P</math> y <math>Q</math></b>	<b>35</b>
2.4.0.1. Representación matricial de $\widehat{Q}$ y $\widehat{P}$	35
2.4.0.2. Secuencias de Følner	36
2.4.0.3. Relación entre subespacios del álgebra $\widehat{\mathcal{C}}$ y del espacio de Hilbert $\ell_2$	39

---

### 2.1. Descomposiciones paradójicas

En 1924 Banach y Tarski [5] probaban un teorema contrario a la intuición que habitualmente es formulado como “toda bola sólida en el espacio tridimensional admite una descomposición en un número finito de piezas que pueden ser reordenadas para formar dos bolas del mismo tamaño que la original”. Esta afirmación es tan antinatural que de hecho se conoce como paradoja de Banach-Tarski si bien no es una paradoja en sentido estricto sino un teorema (por ende demostrable). Se trata de un resultado de teoría de la medida que formalmente puede expresarse de modo sencillo en términos de medidas finitamente aditivas invariantes por isometrías, definiciones que introducimos a continuación.

**DEFINICIÓN 2.1.1.** *Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida, una medida  $\mu$  se dice **finitamente aditiva** si sea  $\{E_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{M}$  un conjunto finito de subconjuntos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(E_i).$$

**DEFINICIÓN 2.1.2.** *Sea  $X$  un conjunto y  $(G, *)$  un grupo. Se define la **acción a izquierda** del grupo  $G$  sobre  $X$  como la aplicación*

$$\begin{aligned} \cdot: G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

*satisfaciendo*

*i) dados  $g_1, g_2 \in G$  y  $x \in X$  entonces:*

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 * g_2) \cdot x$$

*ii) sea  $e \in G$  el elemento neutro, entonces para todo  $x \in X$ :  $e \cdot x = x$ .*

*Análogamente puede definirse la acción a derecha.*

En todo lo que sigue adoptaremos el convenio de referirnos a la acción a izquierda simplemente como acción. Así, sencillamente diremos que un grupo  $G$  actúa en un

conjunto  $X$  expresando con ello que existe una aplicación satisfaciendo las condiciones de la Definición 2.1.2.

DEFINICIÓN 2.1.3. *Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida, y  $G$  un grupo actuando sobre  $X$ , entonces  $\mu$  se dice  **$G$ -invariante por la izquierda** si*

$$\mu(g \cdot E) = \mu(E) \quad \text{para todo } g \in G \text{ y } E \subset \mathcal{M}.$$

En el caso de que un grupo  $G$  actúe sobre si mismo (mediante su operación interna) diremos simplemente que la medida es invariante por la izquierda obviando la referencia a  $G$ .

Observamos que una media invariante puede definirse en un espacio de medible cualquiera, sin embargo, en lo relativo a este capítulo solo serán de interés aquellos de la forma  $(X, \mathcal{P}(X))$ .

Con estos conceptos, la paradoja de Banach-Tarski puede expresarse como sigue.

TEOREMA 2.1.4 (Banach-Tarski, medida). [16, p. 1] *No existe una medida  $\mu$  en  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$  finitamente aditiva e invariante por isometrías<sup>1</sup> tal que  $\mu(\mathbb{S}^2) \neq 0$ .*

Pese a no considerar oportuno incluir la prueba de este Teorema, si ha de señalarse que en ella asume el axioma de elección. Cabe comentar también que esta no es la formulación más extendida sino la versión equivalente mostrada en el Teorema 2.1.8. Como se publicó en el artículo [5] esta versión es enunciada en términos de grupos paradójicos, un concepto originalmente introducido para la prueba de esta paradoja pero que de la mano de von Neumann trascendió fuera de ella.

DEFINICIÓN 2.1.5. [26, Definición 0.1.1] *Sea  $G$  un grupo actuando en un conjunto  $X$ . Entonces  $E \subset X$  se dice  **$G$ -paradójico** si existen subconjuntos de  $E$ ,  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$  disjuntos dos a dos y elementos  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  de  $G$  tales que*

$$E = \bigcup_{i=1}^n x_i \cdot A_i = \bigcup_{i=1}^m y_i \cdot B_i$$

A la expresión de  $E$  en estas dos uniones se le denomina **descomposición paradójica**.

Si un grupo  $G$  actúa sobre si mismo diremos simplemente que es paradójico (sin hacer mención explícita a  $G$ ) por no existir ambigüedad.

Si bien es cierto que la mayor parte de los grupos más comunes no son paradójicos, existen ejemplos sencillos como el grupo libre de dos generadores.

DEFINICIÓN 2.1.6. [33, p. 4] *Un grupo  $G$  se dice **libre** si existe un subconjunto  $E \subset G$  tal que el siguiente*

$$\widehat{E} = E \cup \{x \mid x^{-1} \in E\} \quad \text{donde } x^{-1} \text{ denota el elemento inverso de } x$$

*es un conjunto generador de  $G$ .*

EJEMPLO 2.1.7. [26, Teorema 0.1.2] *El grupo libre de dos generadores  $\mathbb{F}_2$  es paradójico.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $a, b$  dos generadores de  $\mathbb{F}_2$ , i.e.  $\mathbb{F}_2 = \langle a, b, a^{-1}b^{-1} \rangle$ . Para  $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$  definamos

$$W(x) := \{y \mid y \in x \mathbb{F}_2\}.$$

<sup>1</sup>Recordemos que el conjunto de isometrías es un grupo con la composición de aplicaciones. Se interpreta entonces medida invariante por isometrías de a partir de la Definición 2.1.3.

Sea  $e$  la palabra vacía, entonces  $\mathbb{F}_2$  puede expresarse como una unión de conjuntos disjuntos dos a dos

$$\mathbb{F}_2 = \{e\} \cup W(a) \cup W(b) \cup W(a^{-1}) \cup W(b^{-1}).$$

Sea  $y \in \mathbb{F}_2 \setminus W(a)$ , como  $a^{-1}y \in W(a^{-1})$  entonces  $y \in aW(a^{-1})$  de forma que  $\mathbb{F}_2 = W(a) \cup aW(a^{-1})$ . Razonando del mismo modo,  $\mathbb{F}_2 = W(b) \cup bW(b^{-1})$  y por lo tanto queda probado que  $\mathbb{F}_2$  es paradójico.  $\square$

Finalmente presentamos el enunciado más extendido de la paradoja.

**TEOREMA 2.1.8** (Banach-Tarski, descomposición paradójica). [16, Corolario 1.10] *Sea  $E(3)$  el grupo de isometrías de  $\mathbb{R}^3$ . Toda bola sólida en  $\mathbb{R}^3$  es  $E(3)$ -paradójica. De hecho,  $\mathbb{R}^3$  es  $E(3)$ -paradójico.*

Además Tarski proporcionó una caracterización de los grupos no paradójicos.

**TEOREMA 2.1.9** (Tarski). [16, Theorem 1.11] *Sea  $G$  un grupo actuando en un conjunto  $X$  y sea  $E \subset X$ . Entonces son equivalentes:*

- i) existe una medida finitamente aditiva  $G$ -invariante  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  con  $\mu(E) = 1$ ;*
- ii)  $E$  no es  $G$ -paradójico.*

Puede observarse que la equivalencia entre las dos formulaciones de la paradoja de Banach-Tarski (Teoremas 2.1.4 y 2.1.8) se corresponde exactamente con la equivalencia entre las dos afirmaciones de este teorema. En *i)* la condición  $\mu(E) = 1$  es igual de general que  $\mu(E) \neq 0$  pues si existe una medida  $\lambda$  con  $\lambda(E) = M \neq 0$  basta con tomar  $\mu := \frac{1}{M}\lambda$ .

Abstractamente, la dinámica de la acción de un grupo en un conjunto es igual que la de la acción de un álgebra en sí misma por multiplicación a la izquierda. Resulta entonces natural extender la Definición 2.1.5 a álgebras.

Recordemos en primer lugar la noción de álgebra.

**DEFINICIÓN 2.1.10.** *Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo, se dice que  $\mathcal{A}$  es un  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa y unitaria (abstracta) o simplemente álgebra unitaria si es un anillo unitario que además es espacio  $\mathbb{K}$ -vectorial compatible con la multiplicación de vectores de manera asociativa. Esto es, si para todo  $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$  y  $x, y, z \in \mathcal{A}$  se cumplen las siguientes propiedades:*

- i)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;*
- ii)  $(xy)z = x(yz)$ ;*
- iii)  $x(y + z) = xy + xz$ ;*
- iv)  $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ ;*
- v)  $(\lambda + \gamma) \cdot x = \lambda \cdot x + \gamma \cdot x$ ;*
- vi)  $(\lambda\gamma) \cdot x = \lambda \cdot (\gamma \cdot x)$ ;*
- vii)  $1 \cdot x = x$ ;*
- viii)  $\lambda \cdot (xy) = (\lambda \cdot x)y = x(\lambda \cdot y)$ .*

Donde *i)*, *ii)* y *iii)* resultan de que  $\mathcal{A}$  sea un anillo, *iv)*, *v)*, *vi)* y *vii)* de ser un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y *viii)* expresa de la asociatividad de la multiplicación.

**OBSERVACIÓN 2.1.11.** A la vista de las propiedades de la Definición 2.1.10, una  $\mathbb{K}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  es un  $\mathbb{K}$ -anillo conmutativo que también es  $\mathbb{K}$ -módulo con la misma operación y tal que además la multiplicación por un escalar satisface la propiedad *viii)*.

Recordemos que la Definición 2.1.5 de grupos paradójicos se formula en términos de particiones de conjuntos. Notemos que si además el grupo es finito, cada partición

genera una descomposición de su cardinal en sumandos enteros. En el caso de álgebras, la noción *equivalente* al cardinal de un grupo es la dimensión lineal. Así la idea tras la descomposición paradójica de un álgebra es precisamente la descomposición de su dimensión en sumandos enteros expresada como partición de una de sus bases en subconjuntos.

DEFINICIÓN 2.1.12. [13, Definición 1.2] *Un álgebra de dimensión contable sin divisores del cero se dice **paradójica** si para cualquier base  $\{e_i\}_{i \in I}$  de  $\mathcal{A}$  se cumple que*

i) *existen dos particiones  $(U_1, \dots, U_n)$  y  $(V_1, V_2, \dots, V_m)$  de  $\{e_i\}_{i \in I}$ , esto es*

$$\{e_i\}_{i \in I} = \bigcup_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^m V_i \quad \text{con uniones disjuntas}$$

ii) *existen elementos  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in \mathcal{A}$  tales que*

$$g_1 U_1 \cup \dots \cup g_n U_n \cup h_1 V_1 \cup \dots \cup h_m V_m$$

*es una unión disjunta y familia linealmente independiente en  $\mathcal{A}$ .*

## 2.2. Promediabilidad

Desde su publicación en 1924, la prueba original de la paradoja de Banach-Tarski evolucionó a una versión más común a día de hoy. En ella las descomposiciones paradójicas de los conjuntos  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  se obtienen de ‘transferir’ las descomposiciones paradójicas de un grupo que actúa en ellos. En concreto, en la estructura de esta demostración se incluyen los siguientes puntos:

- i) el grupo libre  $\mathbb{F}_2$  es paradójico (Ejemplo 2.1.7);
- ii) si  $\mathbb{F}_2$  actúa libremente<sup>2</sup> en un conjunto  $X$ , entonces  $X$  es  $\mathbb{F}_2$ -paradójico;
- iii) el grupo especial ortogonal  $SO(3, \mathbb{R})$  y el de isometrías  $E(3)$  poseen un subgrupo isomorfo a  $\mathbb{F}_2$ .

La paradójicidad de  $\mathbb{F}_2$  se *transfiere*<sup>3</sup>  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . John von Neumann fue quien originalmente hizo referencia a posibilidad de efectuar tal *transferencia* en su estudio acerca de la paradoja [31] publicado en 1929. Por otro lado, el teorema de Tarski (2.1.9) indicaba que los conjuntos no paradójicos podían caracterizarse a partir de ciertas medidas. Von Neumann comenzó entonces a clasificar los grupos dotados de medidas de este tipo introduciendo por primera vez la noción de promediabilidad [31].

Tal propiedad se presentó inicialmente para grupos discretos y esta teoría será la que desarrollaremos a continuación. Sin embargo, con pequeñas modificaciones las definiciones que presentamos pueden extenderse a grupos localmente compactos.

DEFINICIÓN 2.2.1. *Un grupo  $G$  se dice **discreto** si está dotado de la topología discreta, i.e. si para todo elemento  $g \in G$  existe un entorno que solo contiene a este elemento.*

Basado en el teorema de Tarski (2.1.9) y buscando una dicotomía con los grupos paradójicos (Corolario 2.2.5) von Neumann definió los grupos promediables (‘*mittelbar*’ en alemán).

<sup>2</sup>Un grupo  $G$  actúa libremente sobre un conjunto  $X$  si se cumple que sea  $g \in G$  tal que  $g \cdot x = x$  para todo  $x \in X$  entonces necesariamente  $g$  es el elemento neutro del grupo.

<sup>3</sup>Von Neumann demostró que ningún grupo promediable contiene un subgrupo isomorfo a  $\mathbb{F}_2$ . Durante más de 20 años se popularizó una conjetura que establecía “un grupo  $G$  es no promediable si y solo si contiene un subgrupo isomorfo al grupo  $\mathbb{F}_2$ ”. A pesar de que se dio a conocer como *conjetura de von Neumann* la primera referencia escrita se ha atribuido a Mahlon Marsh Day. En 1980 se probó la falsedad del enunciado.

DEFINICIÓN 2.2.2. [16, Definición 1.12] Sea  $G$  un grupo discreto. Diremos que  $\mu$  es una **medida en  $G$**  si es una medida finitamente aditiva en  $\mathcal{P}(G)$  con  $\mu(G) = 1$  y que es invariante por la izquierda. Decimos entonces que  $G$  es **promediable** si existe una medida con estas características en  $G$ .

Esta definición es trasladada a la estructura de álgebras substituyendo la medida por una medida de dimensión [3, Definición 4.5]. No obstante, en la prueba de la Sección 2.3 se partirá de una versión más conveniente para este propósito a partir de la condición de Følner (Definición 2.2.10 incluida en la Sección 2.2.1).

EJEMPLO 2.2.3. [16, Ejemplo 2.1] Todos los grupos finitos son promediables.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $G$  un grupo finito y  $A \subset G$  un subconjunto cualquiera, la medida  $\mu$  definida para cada subconjunto como el cociente de cardinales  $\mu(A) := \frac{|A|}{|G|}$  satisface las condiciones de la Definición 2.2.2.  $\square$

El siguiente teorema es consecuencia inmediata de esta definición.

TEOREMA 2.2.4. [16, Proposición 1.14] Sea  $G$  un grupo promediable que actúa en un conjunto  $X$ , entonces  $X$  no es  $G$ -paradójico.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis existe una medida finitamente aditiva en  $\mathcal{P}(G)$  con  $\mu(G) = 1$  y que es invariante por la izquierda. Sea  $x \in X$  un elemento cualquiera de  $X$  que fijamos a . Entonces la aplicación  $\lambda : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$  definida por  $\lambda(E) := \mu(\{g \in G \mid g \cdot x \in E\})$  para todo subconjunto  $E \subset X$  cumple las condiciones del Teorema 2.1.9:

- $\lambda$  es finitamente aditiva. Sea  $\{E_i \mid i \in I\} \subset G$  un conjunto finito de subconjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) &= \mu\left(\left\{g \in G \mid g \cdot x \in \bigcup_{i \in I} E_i\right\}\right) = \\ &= \mu\left(\bigcup_{i \in I} \{g \in G \mid g \cdot x \in E_i\}\right) = \sum_{i \in I} \mu(\{g \in G \mid g \cdot x \in E_i\}) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda(E_i) \end{aligned}$$

habiendo aplicado en la igualdad de la segunda línea que  $\mu$  es finitamente aditiva.

- $\lambda$  es invariante por la izquierda puesto que, sea  $h \in G$ , entonces,

$$\begin{aligned} \lambda(h \cdot E) &= \mu(\{g \in G \mid g \cdot x \in h \cdot E\}) = \mu(\{g \in G \mid h^{-1}g \cdot x \in E\}) \\ &= \mu(h \cdot \{g \in G \mid g \cdot x \in E\}) = \mu(\{g \in G \mid g \cdot x \in E\}) \\ &= \lambda(E) \end{aligned}$$

donde la igualdad de la segunda línea se tiene por ser  $\mu$  invariante por la izquierda.

- $\lambda(X) = \mu(\{g \in G \mid g \cdot x \in X\}) = \mu(G) = 1$ .

$\square$

COROLARIO 2.2.5. Un grupo es promediable si y solo si no es paradójico.

DEMOSTRACIÓN. Basta con considerar la acción del grupo  $G$  en sí mismo y tomar  $X = G$  en la demostración anterior.  $\square$

### 2.2.1. Condición de Følner.

En 1955 Følner proporcionó una condición para grupos equivalente a ser promediable que, de hecho, frecuentemente se presenta como definición. Esta condición se centra en estudiar el crecimiento de los grupos al actuar sobre si mismos.

DEFINICIÓN 2.2.6. [16, Definición 3.1] *Se dice que un grupo discreto  $G$  satisface la **condición de Følner** si para cualquier subconjunto finito  $A \subset G$  y cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto finito no vacío  $F \subset G$  tal que*

$$\frac{|aF \Delta F|}{|F|} \leq \varepsilon \quad \text{para todo } a \in A$$

o equivalentemente

$$\frac{|aF \cup F|}{|F|} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{para todo } a \in A.$$

A diferencia de la Definición 2.2.2 original de grupo promediable, la condición de Følner no precisa conocer la estructura global del grupo. Se trata en cambio de un enfoque aproximativo del grupo por subconjuntos que presentan crecimiento moderado. Como veremos en el Ejemplo 2.2.9 y la Sección 2.3.1, la noción de aproximación nos permitirá además realizar una interpretación geométrica.

Ahora, como establece el Teorema 2.2.8 esta condición es equivalente a que exista una sucesión de subconjuntos finitos adecuada.

DEFINICIÓN 2.2.7. [16, Definición 3.3] *Sea  $G$  un grupo discreto y contable, se dice que una sucesión  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $G$  finitos no vacíos es una **secuencia de Følner** si*

$$\lim_n \frac{|gF_n \Delta F_n|}{|F_n|} = 0 \quad \text{para todo } g \in G$$

o equivalentemente

$$\lim_n \frac{|gF_n \cup F_n|}{|F_n|} = 1 \quad \text{para todo } g \in G.$$

TEOREMA 2.2.8. [16, Lema 3.4] *Sea  $G$  un grupo discreto y contable, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- i)  $G$  satisface la condición de Følner;
- ii)  $G$  tiene secuencia de Følner.

DEMOSTRACIÓN.

$i) \Rightarrow ii)$  Por ser  $G$  un grupo contable puede expresarse como una unión numerable  $G = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  donde  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una secuencia creciente de subconjuntos finitos, es decir,  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ . Consideremos  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ . Por hipótesis, para cada  $\varepsilon_n$  existe un subconjunto finito  $F_n$  tal que para todo  $a \in A_n$ ,

$$\frac{|aF_n \Delta F_n|}{|F_n|} \leq \frac{1}{n}.$$

Observemos ahora que para  $g \in G$  existe  $n_0$  tal que  $g \in A_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Por la desigualdad anterior

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|gF_n \Delta F_n|}{|F_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

y se concluye la prueba.

$ii) \Rightarrow i)$  Por hipótesis, existe una secuencia  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $G$  finitos no vacíos tal que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  de forma que

$$\frac{|gF_n \Delta F_n|}{|F_n|} \leq \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Se cumple entonces la condición de Følner ya que para cualquier subconjunto finito  $A \subset G$ , todo elemento  $a \in A$  pertenece a su vez a  $G$  satisfaciendo por tanto la desigualdad anterior.  $\square$

EJEMPLO 2.2.9. [16, Ejemplo 3.5] *El grupo  $(\mathbb{Z}, +)$  tiene una secuencia de Følner.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que la secuencia  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $F_n = \{-n_0, \dots, n_0\}$  es secuencia de Følner para  $\mathbb{Z}$ .

Sea  $k \in \mathbb{Z}$ , es sencillo comprobar que

$$|kF_{n_0} \cap F_{n_0}| = \begin{cases} 0 & \text{si } n_0 < \lfloor \frac{|k|}{2} \rfloor \\ 2n_0 - |k| + 1 & \text{si } n_0 \geq \lfloor \frac{|k|}{2} \rfloor \end{cases}$$

y por lo tanto

$$|kF_{n_0} \Delta F_{n_0}| = |kF_{n_0}| + |F_{n_0}| - 2|kF_{n_0} \cap F_{n_0}| = \begin{cases} 4n_0 + 2 & \text{si } n_0 < \lfloor \frac{|k|}{2} \rfloor \\ 2|k| & \text{si } n_0 \geq \lfloor \frac{|k|}{2} \rfloor. \end{cases}$$

Finalmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|kF_n \Delta F_n|}{|F_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|k|}{2n + 1} = 0$$

como queríamos probar.  $\square$

Este ejemplo admite además una interpretación gráfica que muestra claramente el crecimiento moderado de subconjuntos de un grupo promediable al que nos referíamos anteriormente en esta sección.

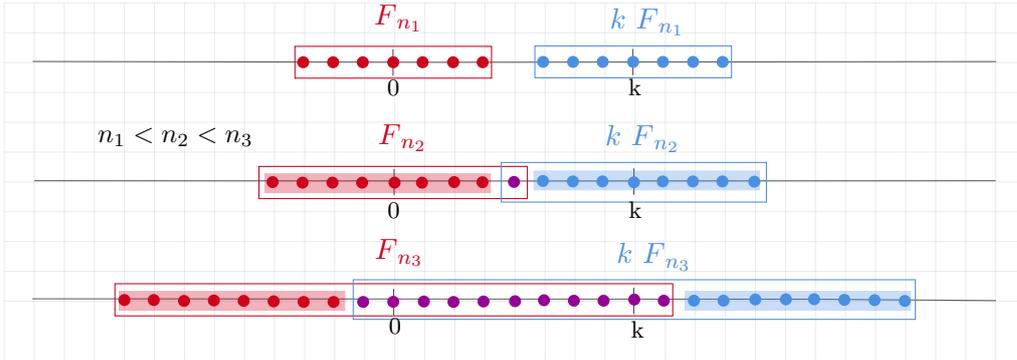


FIGURA 1. Esquema del crecimiento de conjuntos de la secuencia de Følner y de sendos conjuntos trasladados por  $k$ .

En la Figura 1 puede observarse que los cardinales de los conjuntos sombreados, esto es,  $|F_n \setminus (F_n \cap kF_n)|$  y  $|kF_n \setminus (F_n \cap kF_n)|$  son constantes para todo  $n$ . También lo será por tanto  $|kF_n \Delta F_n|$ . En cambio  $|F_n|$  crece linealmente con  $n$  para  $n$ . Resulta evidente entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|kF_n \Delta F_n|}{|F_n|} = 0.$$

Podemos interpretar este comportamiento asintótico como que *la  $k$ -frontera es asintóticamente despreciable frente al volumen*. Donde por  $k$ -frontera nos referimos a las regiones azul

y roja y por volumen a la roja y morada.

Por otra parte, en la Sección 2.1 se ha mencionado el paralelismo entre grupos y álgebras en descomposiciones paradójicas. Llegados a este punto es natural preguntarse cómo puede adaptarse la Definición 2.2.6 de condición de Følner para álgebras. Sencillamente, basta con sustituir el cardinal por la dimensión lineal. La presentamos de hecho como definición de álgebra algebraicamente promediable puesto que de ella partiremos para demostrar que el álgebra  $\mathcal{C} := \langle Q, P \mid [Q, P] = i\mathbb{1} \rangle$  es promediable.

DEFINICIÓN 2.2.10. [1, Definición 3.1] *Un álgebra contable  $\mathcal{A}$  se dice **algebraicamente promediable** (por la izquierda) si para cualquier  $\varepsilon > 0$  y cualquier subconjunto finito  $\Gamma \subset \mathcal{A}$  existe un subespacio finito-dimensional no nulo  $W \leq \mathcal{A}$  tal que*

$$(2.2.1) \quad \frac{\dim(AW + W)}{\dim(W)} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{para todo } A \in \Gamma.$$

OBSERVACIÓN 2.2.11. Toda álgebra  $\mathcal{A}$  con  $\dim(\mathcal{A}) < \infty$  es algebraicamente promediable. Basta con tomar  $W = \mathcal{A}$  [2, p. 692].

En todo lo que sigue obviaremos la precisión de “por la izquierda” y diremos tan solo algebraicamente promediable. Cabe comentar además que esta definición puede adaptarse a otros tipos de álgebras. Nos limitamos a considerar el caso sencillo de álgebras contables (de dimensión contable) por quedar incluidas en esta categoría las álgebras estudiadas en este trabajo.

La Definición 2.2.7 de secuencias de Følner encuentra su equivalente para álgebras en la Definición 2.2.12 que es una definición de promediabilidad algebraica igual de frecuente que la Definición 2.2.10 .

DEFINICIÓN 2.2.12. [3, Observación 3.2] [17, Sección 1.11] [13, Definición 1.1] *Un álgebra contable  $\mathcal{A}$  se dice **algebraicamente promediable** si existe una sucesión  $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subespacios finito-dimensionales no nulos en  $\mathcal{A}$  que satisface*

$$(2.2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim(AW_n + W_n)}{\dim(W_n)} = 1 \quad \text{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

En ese caso la sucesión de subespacios  $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se denomina **secuencia de Følner**.

Y como es de esperar, también en el caso de álgebras se tiene la dicotomía promediable-paradójica.

TEOREMA 2.2.13. [13, Teorema 2] [3, Teorema 2] *Un álgebra  $\mathcal{A}$  es promediable si y solo si no es paradójica.*

#### 2.2.1.1. Álgebras de operadores.

Para álgebras de operadores en un espacio de Hilbert existe además la definición de secuencias de Følner para proyecciones.

DEFINICIÓN 2.2.14. *Se llama **álgebra de operadores** a aquella donde el espacio vectorial es el conjunto de operadores continuos (luego acotados) en un espacio topológico vectorial y la multiplicación viene dada por la composición de aplicaciones.*

DEFINICIÓN 2.2.15. [1, Definición 2.1] [6, Teorema 1.1] *Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra contable de operadores, i.e.,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  y  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de proyecciones ortogonales de rango no nulo. Se dice que  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una **secuencia de Følner** de  $\mathcal{A}$  si para  $a = 1, 2$  se satisface*

$$(2.2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Pi_n \mathcal{A} - A \Pi_n\|_a}{\|\Pi_n\|_a} = 0.$$

Donde  $\|\cdot\|_a$  es la  $a$ -norma de Schatten dada por

$$\|A\|_a = (\text{Tr}(|A|^a))^{1/a} = \left( \text{Tr} \left( (A^*A)^{a/2} \right) \right)^{1/a}.$$

Si la condición se cumple para todo  $A \in \mathcal{A}$  se dice entonces que es **secuencia de Følner** del álgebra  $\mathcal{A}$ .

**TEOREMA 2.2.16.** [3] Sea  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  un álgebra de operadores acotados,  $\mathcal{A}$  es algebraicamente promediable si y solo si existe una sucesión de proyecciones ortogonales  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de rango no nulo que es secuencia de Følner de  $\overline{\mathcal{A}}$ .

En el estudio de este Trabajo Fin de Grado serán de especial interés los operadores no acotados. Por ello, presentamos a continuación una adaptación de esta definición con la exigencia de cierta estabilidad sobre el dominio como única diferencia.

**DEFINICIÓN 2.2.17.** Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra contable de operadores no acotados y  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de proyecciones ortogonales de rango no nulo. Entonces  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una **secuencia de Følner** de  $\mathcal{A}$  si

$$A\mathcal{D}(A) = \{A\psi \mid \psi \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathcal{D}(A)$$

y para  $a = 1$  o  $a = 2$  se tiene

$$(2.2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Pi_n A - A\Pi_n\|_a}{\|\Pi_n\|_a} = 0.$$

Si la condición se cumple para todo  $A \in \mathcal{A}$  se dice entonces que es **secuencia de Følner** del álgebra  $\mathcal{A}$ .

### 2.3. El álgebra generada por $Q$ y $P$ es promediable

Analizamos en esta sección el álgebra compleja (abstracta)  $\mathcal{C}$  generada por dos elementos abstractos  $Q$  y  $P$  que satisfacen la relación de conmutación canónica (RCC) definida en la Ecuación (1.1.2), i.e.,

$$(2.3.1) \quad \mathcal{C} := \langle Q, P \mid [Q, P] = i\mathbb{1} \rangle.$$

Veamos en primer lugar que cualquier polinomio en las variables  $P$  y  $Q$  puede escribirse como una suma de monomios de la forma  $\alpha_{kl}P^kQ^l$  para  $k, l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha_{kl} \in \mathbb{C}$ .

**LEMA 2.3.1.** Sean  $P, Q$  dos elementos generadores de  $\mathcal{C}$  (luego  $[Q, P] = i\mathbb{1}$ ). Entonces, para  $k, l \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$(2.3.2) \quad Q^l P^k = \sum_{j=0}^l i^{l-j} \binom{l}{j} \frac{k!}{(k-l+j)!} P^{k-l+j} Q^j.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Estudiemos en primer lugar el desplazamiento inducido por la multiplicación de  $P^k$  a izquierda de  $Q$ . En concreto, probemos por inducción que

$$(2.3.3) \quad QP^k = ikP^{k-1} + P^kQ.$$

El caso  $k = 1$  no es sino la RCC:  $QP = i\mathbb{1} + PQ$ . Supongamos ahora que la propiedad se cumple para  $k$  y veamos que entonces también para  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} QP^{k+1} &= QP^kP = (ikP^{k-1} + P^kQ)P = i(k+1)P^k + P^k(i\mathbb{1} + PQ) \\ &= i(k+1)P^k + P^{k+1}Q. \end{aligned}$$

Probemos finalmente la Ecuación (2.3.2) por inducción sobre  $l$ . El caso  $l = 1$  se corresponde justamente con la igualdad que acabamos de probar. Por otro lado, observamos que si  $l - j > k$  entonces el sumando asociado es nulo.

Asumiendo por hipótesis que la propiedad se cumple para  $l$ , el caso  $l + 1$  queda como sigue

$$\begin{aligned}
Q^{l+1}P^k &= Q \sum_{j=0}^l i^{l-j} \binom{l}{j} \frac{k!}{(k-l+j)!} P^{k-l+j} Q^j \\
&\stackrel{2.3.3}{=} \sum_{j=0}^l i^{l+1-j} \binom{l}{j} \frac{k!}{(k-l+j-1)!} P^{k-(l+1)+j} Q^j + \\
&\quad + \sum_{j=0}^l i^{l-j} \binom{l}{j} \frac{k!}{(k-l+j)!} P^{k-l+j} Q^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^l i^{l+1-j} \binom{l}{j} \frac{k!}{(k-l+j-1)!} P^{k-(l+1)+j} Q^j + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l+1} i^{l+1-j} \binom{l}{j-1} \frac{k!}{(k-l+j-1)!} P^{k-(l+1)+j} Q^j \\
&= i^{l+1} \binom{l}{0} \frac{k!}{(k-l-1)!} P^{k-(l+1)} + \binom{l}{l} P^k Q^{l+1} + \\
&\quad + \sum_{j=1}^l i^{l+1-j} \left[ \binom{l}{j} + \binom{l}{j-1} \right] \frac{k!}{(k-l+j-1)!} P^{k-(l+1)+j} Q^j \\
&= \sum_{j=0}^{l+1} i^{(l+1)-j} \binom{l+1}{j} \frac{k!}{(k-(l+1)-j)!} Q^j.
\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 2.3.2. En particular, se deduce que  $\deg(Q^l P^k) = \deg(P^k Q^l)$ .

A partir del Lema 2.3.1 es directo que el siguiente conjunto es una base del álgebra  $\mathcal{C}$ ,

$$(2.3.4) \quad \beta_N := \{P^k Q^l \mid k, l \in \mathbb{N}_0, k + l \leq N\}, \quad N \in \mathbb{N}_0.$$

En busca de subespacios finito-dimensionales que cumplan con la condición de la Definición 2.2.10 la propuesta más sencilla es considerar aquellos generados por cada uno de los conjuntos  $\beta_N$ . Comencemos por estudiar su dimensión.

LEMA 2.3.3. *Sea  $N \in \mathbb{N}_0$  y consideremos el subespacio  $W_N$  definido como sigue*

$$W_N := \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} \alpha_{kl} P^k Q^l \mid \alpha_{kl} \in \mathbb{C} \right\}.$$

*Su dimensión viene dada por la siguiente expresión  $\dim(W_N) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Nótese que, por definición del subespacio  $W_N$ , los elementos de la base que lo generan son exactamente los que pertenecen a  $\beta_N$ . Por tanto,

$$\dim(W_N) = |\beta_N| = \sum_{j=0}^N (j+1) = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$$

como se quería probar. □

Nótese que para ver si  $\mathcal{C}$  es algebraicamente promediable en la desigualdad (2.2.1) interviene también el factor  $\dim(AW_N + W_N)$  con  $A \in \mathcal{C}$ . Con el fin de simplificar el cálculo de  $\dim(AW_N + W_N)$  incluimos el siguiente lema del que podremos concluir que el para un polinomio cualquiera  $A \in \mathcal{C}$ , la expresión anterior puede acotarse mediante el sumatorio de las respectivas dimensiones para los monomios que lo conforman.

LEMA 2.3.4. *Considérese el álgebra compleja  $\mathcal{C}$  de la Ecuación (2.3.1) y el conjunto finito  $\Gamma := \{M_j\}_{j=1}^m \subset \beta_N := \{P^k Q^l \mid k, l \in \mathbb{N}_0, k + l \leq N\}$ , donde  $N$  es el grado máximo de los elementos de  $\Gamma$ . Entonces, para cualquier subespacio  $W \leq \mathcal{C}$  se tiene la desigualdad siguiente*

$$\dim \left( \left( \sum_{j=1}^m M_j \right) W + W \right) \leq \sum_{i=1}^m \dim(M_i W + W).$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que

$$\left( \left( \sum_{j=1}^m M_j \right) W + W \right) \subset \sum_{j=1}^m (M_j W + W).$$

Sea  $T \in \left( \sum_{i=1}^m M_j \right) W + W$  entonces existen  $v, w \in W$  tales que  $T = \left( \sum_{j=1}^m M_j \right) v + w$ . Aplicando la propiedad distributiva  $T = \sum_{j=1}^m (M_j v + \frac{1}{m} w) \in \sum_{i=1}^m (M_j W + W)$ . Se tiene así la inclusión deseada y finalmente

$$\dim \left( \left( \sum_{j=1}^m M_j \right) W + W \right) \leq \dim \left( \sum_{j=1}^m (M_j W + W) \right) \leq \sum_{i=1}^m \dim(M_j W + W)$$

sin más que tener para dos subespacios  $U, V$  se tiene

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

□

A continuación probamos que para demostrar que  $\mathcal{C}$  es algebraicamente promediable basta con considerar la dinámica en la base del álgebra, i.e., en el conjunto de monomios en  $\beta_N$ .

LEMA 2.3.5. *El álgebra  $\mathcal{C}$  definida en la Ecuación (2.3.1) es algebraicamente promediable si y solo si para cualquier  $\varepsilon > 0$  y para cualquier subconjunto finito de monomios  $\Gamma \subset \beta_N$ ,  $N \in \mathbb{N}_0$ , existe un espacio finito-dimensional no nulo  $W \leq \mathcal{C}$  tal que*

$$\frac{\dim(MW + W)}{\dim(W)} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{para todo } M \in \Gamma.$$

DEMOSTRACIÓN.

( $\Rightarrow$ ) Es consecuencia directa de la Definición 2.2.10.

( $\Leftarrow$ ) Fijemos  $\tilde{\varepsilon} > 0$  y consideremos un conjunto finito  $\tilde{\Gamma} = \{A_i\}_{i=1}^n$  del álgebra  $\mathcal{C}$ . Sea  $N = \max\{\deg(A_i) \mid A_i \in \tilde{\Gamma}\}$ , entonces, por el Lema 2.3.1 todo  $A_i \in \tilde{\Gamma}$  puede escribirse como suma de monomios de la base  $\beta_N$ . Denotemos por  $\Gamma = \{M_1, \dots, M_m\} \subset \beta_N$  el conjunto de todos es monomios. Por hipótesis, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un espacio finito-dimensional no nulo  $W \leq \mathcal{C}$  tal que para cualquier  $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\frac{\dim(M_j W + W)}{\dim(W)} \leq 1 + \varepsilon$$

o equivalentemente

$$\dim(M_j W + W) - \dim(W) \leq \varepsilon \dim(W).$$

Para probar el resultado deseado bastará con elegir un valor de  $\varepsilon$  suficientemente pequeño para el correspondiente  $\tilde{\varepsilon}$  fijado al inicio de la demostración. A partir de

la cota dimensional del Lema 2.3.4 observamos que para cualquier  $i = \{1, \dots, n\}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \dim(A_i W + W) - \dim(W) &\leq \sum_{j=1}^m [\dim(M_j W + W)] - \dim(W) \\ &\leq \sum_{j=1}^m (\varepsilon + 1) \dim(W) - \dim(W) \\ &\leq m(\varepsilon + 1) \dim(W) . \end{aligned}$$

Tomando  $\varepsilon \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{m} - 1$ , entonces para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\dim(A_i W + W) - \dim(W)}{\dim(W)} \leq \tilde{\varepsilon} \quad \text{y por tanto} \quad \frac{\dim(A_i W + W)}{\dim(W)} \leq 1 + \tilde{\varepsilon} ,$$

lo que prueba que  $\mathcal{C}$  es algebraicamente promediable. □

Finalmente, como se explicará gráficamente en la Sección 2.3.1 la RCC induce una dinámica distinta al multiplicar el subespacio  $W_N$  a izquierda por monomios en la variable  $Q$  o en la variable  $P$ . Así, para calcular  $\dim(MW_N + W_N)$  han de contemplarse distintas situaciones. Ahora bien, como también se muestra en la Sección 2.3.1 existe una cota superior para  $\dim(MW_N + W_N)$  dependiente tan solo en el grado de  $M$ . A continuación probamos analíticamente esta estimación que será suficiente para probar el teorema principal de esta sección.

En línea con la Sección 2.3.1 enunciamos el siguiente lema en términos del cardinal de los conjuntos  $\beta_N$  en vez de en términos de dimensión lineal de subespacios  $W_N$ . Siendo  $\beta_N$  el conjunto generador de  $W_N$  ambos enfoques son equivalentes.

LEMA 2.3.6. *Considérense los elementos de la base  $\beta_N := \{P^k Q^l \mid k, l \in \mathbb{N}_0, k+l \leq N\}$  y  $r, s \in \mathbb{N}_0$ . Entonces para cualquier  $N \in \mathbb{N}_0$  se tiene*

$$|P^r Q^s \beta_N| \leq |\beta_{N+M}| , \quad \text{donde} \quad M = r + s .$$

DEMOSTRACIÓN. Probemos el resultado por inducción sobre  $M = r + s$ . El caso  $M = 0$  es trivial. En el caso  $M = 1$  existen dos posibilidades:

- $r = 1$  y  $s = 0$ :  $|P\beta_N| = |\{PP^k Q^l \mid k+l \leq N\}| \leq |\{P^{k'} Q^{l'} \mid k'+l' \leq N+1\}|$
- $r = 0$  y  $s = 1$ : Observemos que  $\deg(QP^k Q^l) = \deg(P^k Q^l) + 1$  y por el Lema 2.3.1 tenemos que

$$|Q\beta_N| = |\{QP^k Q^l \mid k+l \leq N\}| \leq |\{P^{k'} Q^{l'} \mid k'+l' \leq N+1\}|$$

Supongamos ahora por hipótesis que la propiedad es cierta para  $M$  y veamos que entonces también se satisface para  $M + 1$ :

- $|P^{r+1} Q^s \beta_N| = |PP^r Q^s \beta_N| \leq |P\beta_{N+M}| \leq |\beta_{N+M+1}|$
- $|P^r Q^{s+1} \beta_N| = |PP^{r-1} Q^{s+1} \beta_N| \leq |P\beta_{N+M}| \leq |\beta_{N+M+1}|$ ,

habiendo usado la hipótesis inductiva y la propiedad para  $M = 1$ . □

Podemos finalmente probar la promediabilidad algebraica de  $\mathcal{C}$  modo sencillo haciendo uso de los lemas anteriores.

TEOREMA 2.3.7. *El álgebra compleja (abstracta)  $\mathcal{C} := \langle P, Q \mid QP - PQ = i\mathbb{1} \rangle$  es algebraicamente promediable.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2.3.5 basta con estudiar la dinámica de los monomios. Esto es,  $\mathcal{C}$  será algebraicamente promediable si para cualquier  $\varepsilon > 0$  y cualquier subconjunto finito de monomios  $\Gamma$  existe un subespacio finito-dimensional no nulo  $W \leq \mathcal{C}$  tal que

$$\frac{\dim(AW + W)}{\dim(W)} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{para todo } A \in \Gamma.$$

Observemos que para  $N$  suficientemente grande  $\Gamma \subset \beta_N$  y consideremos el subespacio

$$W_N := \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} \alpha_{kl} P^k Q^l \mid \alpha_{kl} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Veamos ahora que para todo  $\varepsilon > 0$  tomando  $N$  suficientemente grande el subespacio  $W_N$  cumplirá la condición de promediabilidad. Sea  $D = \max\{\deg(A) \mid A \in \Gamma\}$ , por el Lema 2.3.6 obtenemos

$$\dim(AW_N + W_N) \leq \dim(W_{N+D}) \quad \text{para todo } A \in \Gamma.$$

Aplicando a continuación el Lema 2.3.3,

$$\dim(AW_N + W_N) \leq \dim(W_{N+D}) = \frac{(N+D+1)(N+D+2)}{2} \quad \text{para todo } A \in \Gamma.$$

Por lo tanto, estando  $D$  fijo, tenemos que para cualquier  $A \in \Gamma$

$$\frac{\dim(AW_N + W_N)}{\dim(W_N)} \leq \frac{\dim(W_{N+D})}{\dim(W_N)} = \frac{(N+D+1)(N+D+2)}{(N+1)(N+2)} \leq \left( \frac{N+D+2}{N} \right)^2 \leq 1 + \varepsilon,$$

donde para que se de la última desigualdad basta con tomar  $N \geq \frac{D+2}{\sqrt{1+\varepsilon}-1}$  y queda con ello probado el resultado.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.8. *La secuencia de subespacios  $\{W_N\}_{N \in \mathbb{N}_0}$  siendo*

$$W_N := \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} \alpha_{kl} P^k Q^l \mid \alpha_{kl} \in \mathbb{C} \right\}.$$

*es secuencia de Følner.*

La prueba es esencialmente la del Teorema 2.3.7. Con la notación empleada en esta,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\dim(AW_N + W_N)}{\dim(W_N)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{N+D+2}{N} \right)^2 = 1$$

Por otro lado, es evidente que  $\dim(AW_N + W_N) \geq \dim(W_N)$  luego, en efecto, el límite anterior es igual a 1.

OBSERVACIÓN 2.3.9. Teniendo en cuenta que la motivación de este trabajo son los operadores posición y momento, es natural considerar el álgebra compleja (abstracta)  $\mathcal{C}$  generada por los símbolos  $Q$  y  $P$ . Sin embargo, los resultados de esta sección pueden generalizarse fácilmente a álgebras sobre otros cuerpos.

### 2.3.1. Dinámica de los subespacios.

La dimensión de la base  $\beta_N := \{P^k Q^l \mid k, l \in \mathbb{N}_0, k+l \leq N\}$ , y por tanto del subespacio  $W_N := \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} \alpha_{kl} P^k Q^l \mid \alpha_{kl} \in \mathbb{C} \right\}$ , puede representarse geoméricamente como el número de puntos mostrados en la Figura 2 donde la retícula representa  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

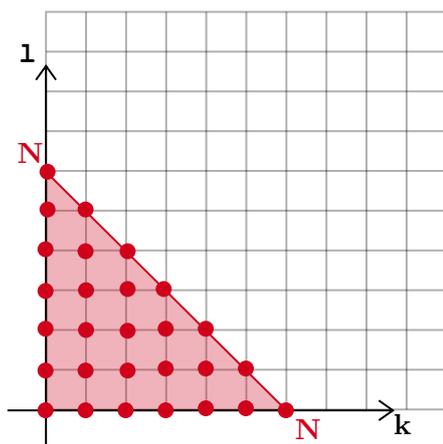


FIGURA 2. Esquema de valores posibles para el par de exponentes  $(k, l)$  de elementos  $P^k Q^l \in \beta_N$ .

Como muestra la Figura 3 (A) si los elementos de  $\beta_N$  se multiplican a izquierda por una potencia de  $P$  se obtiene una traslación horizontal de la sección triangular. En efecto, sea  $P^{k_0} Q^{l_0} \in \beta_N$  entonces  $P^r P^{k_0} Q^{l_0} = P^{r+k_0} Q^{l_0}$  es de la forma  $P^k Q^l$  y el exponente  $k_0$  se ha visto trasladado en  $r$  unidades. Es directo entonces que la dimensión de  $P^r W_N$  es la misma que la de  $W_N$ .

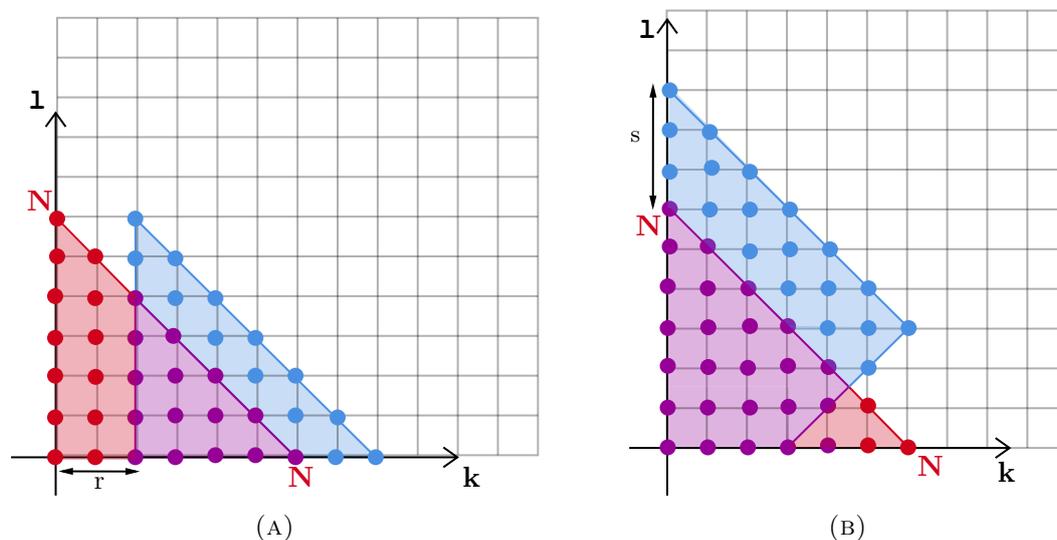


FIGURA 3. Esquema de valores posibles para el par de exponentes  $(k, l)$  de elementos  $P^k Q^l \in \beta_N$  en rojo y  $P^k Q^l \in P^r \beta_N$  en (A) y  $P^k Q^l \in Q^s \beta_N$  en (B) ambos en azul. Las regiones moradas representan la intersección de rojas y azules.

Sin embargo, en la Figura 3 (B) podemos observar que al multiplicar a izquierda por un monomio en la variable  $Q$  el resultado obtenido no es una simple traslación vertical. Naturalmente, esto es consecuencia de que la multiplicación de elementos del álgebra  $\mathcal{C} := \langle P, Q \mid QP - PQ = i\mathbb{1} \rangle$  no es conmutativa sino que precisamente se rige por la relación de conmutación canónica. De este modo, sea  $P^{k_0} Q^{l_0} \in \beta_N$  entonces, aplicando

el Lema 2.3.1,

$$Q^s P^{k_0} Q^{l_0} = (Q^s P^{k_0}) Q^{l_0} = \sum_{j=0}^s (i)^{s-j} \binom{s}{j} \frac{k_0!}{(k_0 - s + j)!} P^{k_0 - s + j} Q^j Q^{l_0}$$

donde los sumandos son nulos si  $s - j > k_0$ . Así, para cada monomio  $P^k Q^l \in \beta_N$  se tiene la situación representada en la Figura 4. Aplicando este proceso a todo  $P^k Q^l \in \beta_N$  se ha obtenido la Figura 3 (B).

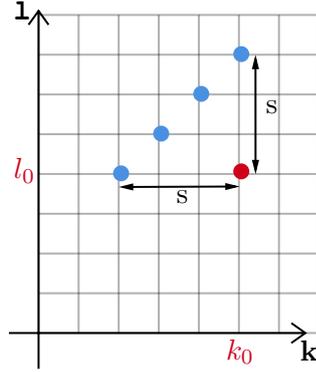


FIGURA 4. Esquema de valores para el par de exponentes  $(k, l)$  de elementos  $P^k Q^l \in \mathcal{C}$ . En rojo se representan el par de exponentes  $(k_0, l_0)$  y en azul los exponentes de los monomios necesarios para expresar  $Q^s P^{k_0} Q^{l_0}$  en términos de la base  $\beta_N$  para  $N$  suficientemente grande.

Finalmente, combinando ambos resultados, la multiplicación de  $\beta_N$  por un monomio bivariado cualquiera del álgebra da lugar a la situación mostrada en la Figura 5.

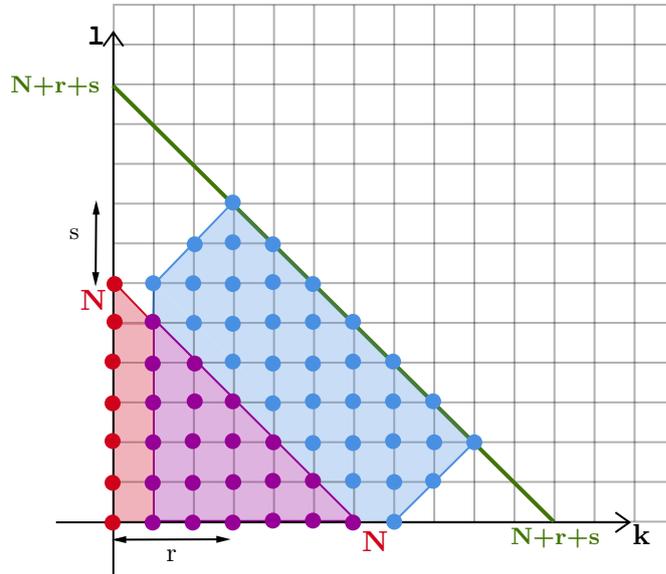


FIGURA 5. Esquema de valores posibles para el par de exponentes  $(k, l)$  de elementos  $P^k Q^l \in \beta_N$  en rojo y  $P^k Q^l \in P^r Q^s \beta_N$  en azul. En morado se representa la intersección de la región roja y la azul.

Observamos que la región de valores  $(k, l)$  de exponentes de elementos  $P^k Q^l \in P^r Q^s \beta_N$  queda comprendida en la región de valores de exponentes de elementos  $P^k Q^l \in \beta_{N+r+s}$ .

En términos de dimensiones esta afirmación es precisamente el Lema 2.3.6.

Finalmente, cabe comentar que existe una estrecha relación entre el estudio presentado en esta sección y el Ejemplo 2.2.9, o más precisamente, con la que sería su generalización a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . De nuevo, la promediabilidad algebraica de  $\mathcal{C}$  es consecuencia de que  $\{W_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  es secuencia de Følner. Fijados  $r$  y  $s$  al incrementar  $N$ , en los triángulos obtenidos de hacer la representación de la Figura 5, se observa que *el borde crece moderadamente frente al volumen*. Donde por *borde* en esta ocasión hacemos referencia a la diferencia de los triángulos relativos a  $\beta_{N+r+s}$  y  $\beta_N$ .

#### 2.4. Representación matricial del álgebra generada por $P$ y $Q$

Veremos en la Sección 2.4.0.1 que los operadores posición  $\widehat{Q}$  y momento  $\widehat{P}$  de la mecánica cuántica admiten una representación matricial con dominio  $\mathcal{D} = c_{00} \subset \ell_2$  [12, p. 1] donde

$$c_{00} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \text{con un número finito de términos } x_i \neq 0\}.$$

Recordemos además que estos operadores satisfacen la RCC [10, Ecuación 37]. De este modo, el álgebra abstracta  $\mathcal{C}$  de la Sección 2.3 admite una representación concreta en un el álgebra de matrices con dominio  $c_{00}$  que denotaremos por

$$(2.4.1) \quad \widehat{\mathcal{C}} = \left\langle \widehat{P}, \widehat{Q} \mid \widehat{P}, \widehat{Q} \text{ definidos en (2.4.5)} \right\rangle.$$

##### 2.4.0.1. Representación matricial de $\widehat{Q}$ y $\widehat{P}$ .

Uno de los ejemplos fundamentales en mecánica cuántica es el oscilador armónico cuántico con masa  $m$  y frecuencia  $\omega$ . La Ecuación de Schrödinger estacionaria para este sistema se expresa como sigue [29, Ecuación 3.2],

$$(2.4.2) \quad \left( -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi_n = E_n \psi_n(x).$$

Sus valores y estados propios vienen dados por (2.4.3) [29, Ecuación 3.24] y (2.4.4) [29, Ecuación 3.23] respectivamente

$$(2.4.3) \quad E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

$$(2.4.4) \quad \psi_n(x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi} x_0 2^n n!)^{1/2}} H_n \left( \frac{x}{x_0} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right\}$$

donde  $H_n$  denota los polinomios de Hermite <sup>4</sup> y  $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  es el estado fundamental..

El estudio de este sistema físico ha derivado en la introducción de nociones de gran interés como pueden ser los operadores creación y destrucción. Otro aspecto de gran interés es que los estados propios  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  constituyen una base ortonormal de las funciones de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \psi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^\beta (x) \right| < \infty \right\}$$

contenidas en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  [18, Teorema 11.4].

Esta base permite la identificación de los espacios de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}) \cong \ell_2$ . Así, los

<sup>4</sup>En este contexto se entiende por polinomios de Hermite aquellos dados por la fórmula general  $H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ . Comúnmente se denominan polinomios de Hermite físicos para diferenciarlos de los polinomios de Hermite probabilísticos.

operadores posición y momento adimensionales pueden representarse como matrices infinitas no acotadas [12, p. 1].

$$(2.4.5) \quad \widehat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \widehat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ambos operadores son esencialmente autoadjuntos en el dominio  $\mathcal{D} = c_{00}$  denso en  $\ell_2$  (véase [24, p. 64]).

En el ámbito de la mecánica cuántica resulta común expresar estos operadores en términos de los operadores creación y destrucción. En la base de los estados propios  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , el operador creación no es sino el operador traslación  $S_w$  con **peso no acotado**  $w = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots)$  que tiene por representación matricial

$$(2.4.6) \quad S_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ w_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & w_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & w_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Su operador adjunto,  $S_w^*$ , se corresponde con el operador destrucción cuya representación viene dada por la matriz transpuesta a la de  $S_w$ .

Con esta definición,  $\widehat{Q}$  y  $\widehat{P}$  se expresan como sigue

$$(2.4.7) \quad \widehat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_w + S_w^*) \quad \text{y} \quad \widehat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}(S_w - S_w^*), \quad \text{donde} \quad w = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots).$$

Observamos finalmente que el operador traslación con peso y su adjunto satisfacen la siguiente relación de conmutación en  $c_{00}$

$$[S_w^*, S_w] = S_w^* S_w - S_w S_w^* = \mathbb{1}$$

conocida como la representación Segal-Bargmann de la RCC [27, p. 141].

Notemos que el álgebra concreta  $\widehat{\mathcal{C}}$  dada por (2.4.1) puede ser generada en  $c_{00}$  tanto por el par  $\{\widehat{Q}, \widehat{P}\}$  como por  $\{S_w, S_w^*\}$ . Se tiene

$$\widehat{\mathcal{C}} = \left\langle \widehat{P}, \widehat{Q} \mid \widehat{P}, \widehat{Q} \text{ definidos en (2.4.5)} \right\rangle = \left\langle S_w, S_w^* \mid S_w \text{ definido en (2.4.6)} \right\rangle.$$

**OBSERVACIÓN 2.4.1.** Estos resultados quedan enmarcados de forma natural en la teoría de representaciones  $\text{Op}^*$  [27, Parte II]. En concreto el álgebra matricial  $\widehat{\mathcal{C}}$  es una representación  $\text{Op}^*$  del álgebra  $\mathcal{C}$  en la que la estructura involutiva dada por  $*$  queda definida por las igualdades  $\widehat{Q}^* = \widehat{Q}$  y  $\widehat{P}^* = \widehat{P}$ . No entraremos en más detalles puesto que la teoría de  $*$ -álgebras excede del objetivo de este trabajo.

#### 2.4.0.2. Secuencias de Følner.

Estudiamos a continuación si las proyecciones ortogonales en  $\ell_2$  constituyen una secuencia de Følner del álgebra  $\widehat{\mathcal{C}}$  o de alguno de los operadores no acotados en  $L^2(\mathbb{R})$  representados por las matrices del álgebra. Obsérvese en primer lugar que el dominio  $c_{00}$  es estable ante cualquier operador del álgebra. Esto es  $T\psi \in c_{00}$  para todo  $T \in \widehat{\mathcal{C}}$  y  $\psi \in c_{00}$ .

NOTACIÓN 2.4.2. Con el fin de expresar de forma condensada las matrices involucradas en la prueba de las siguientes proposiciones denotamos por  $M(i, j)$  el elemento de la fila  $i$ -ésima y columna  $j$ -ésima de la matriz  $M$ .

PROPOSICIÓN 2.4.3. *Sea  $\Pi_n$  la proyección ortogonal en  $\langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle$  entonces  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es secuencia de Følner para  $\widehat{Q}$  y  $\widehat{P}$ .*

DEMOSTRACIÓN.

Veamos en primer lugar que  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es secuencia de Følner para  $\widehat{Q}$ .  
Se tiene que

$$\left( \Pi_n \widehat{Q} - \widehat{Q} \Pi_n \right) (i, j) = \begin{cases} w_n & \text{si } (i, j) = (n, n+1) \\ -w_n & \text{si } (i, j) = (n+1, n) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\left( \Pi_n \widehat{Q} - \widehat{Q} \Pi_n \right)^* \left( \Pi_n \widehat{Q} - \widehat{Q} \Pi_n \right) (i, j) = \begin{cases} w_n^2 & \text{si } (i, j) = (n, n) \text{ o } (i, j) = (n+1, n+1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por tanto

$$\|\Pi_n \widehat{Q} - \widehat{Q} \Pi_n\|_a = (2|w_n|^a)^{1/a} = 2^{1/a} |w_n|.$$

Con esto

$$(2.4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Pi_n \widehat{Q} - \widehat{Q} \Pi_n\|_a}{\|\Pi_n\|_a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1/a} |w_n|}{n^{1/a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{1/a} |n^{1/2}|}{n^{1/a}} = 2^{1/a} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2-1/a}.$$

Para  $a = 1$  este límite es cero y se concluye la prueba.

Probemos ahora que  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es secuencia de Følner para  $\widehat{P}$ .

$$\left( \Pi_n \widehat{P} - \widehat{P} \Pi_n \right) (i, j) = \begin{cases} -iw_n & \text{si } (i, j) = (n, n+1) \\ -iw_n & \text{si } (i, j) = (n+1, n) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\left( \Pi_n \widehat{P} - \widehat{P} \Pi_n \right)^* \left( \Pi_n \widehat{P} - \widehat{P} \Pi_n \right) (i, j) = \begin{cases} w_n^2 & \text{si } (i, j) = (n, n) \text{ o } (i, j) = (n+1, n+1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Siendo este último resultado el mismo que el obtenido para  $\widehat{Q}$ , la prueba se concluye de igual modo.  $\square$

OBSERVACIÓN 2.4.4. Recordemos que en el contexto de álgebras de operadores acotados una  $\|\cdot\|_1$ -secuencia de Følner es equivalente a una  $\|\cdot\|_2$ -secuencia de Følner (ver Definición 2.2.15). En la prueba de la proposición anterior observamos que  $\Pi_n$  no es secuencia de Følner para  $a = 2$  ya que el límite (2.4.8) no es cero. Esta es una diferencia importante que aparece al tratar operadores no acotados.

PROPOSICIÓN 2.4.5. *Sea  $\Pi_n$  la proyección ortogonal en  $\langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle$  entonces  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es secuencia de Følner para  $\widehat{Q}^2$  ni para  $\widehat{P}^2$ .*

DEMOSTRACIÓN. A partir de la expresión de los operadores  $\widehat{Q}$  y  $\widehat{P}$  en términos de los operadores  $S_w$  y  $S_w^*$  sus cuadrados vienen dados por

$$\begin{aligned} \widehat{Q}^2 &= \frac{1}{2} (S_w^2 + (S_w^*)^2 + S_w S_w^* + S_w^* S_w) \\ \widehat{P}^2 &= \frac{1}{2} (S_w S_w^* + S_w^* S_w - S_w^2 - (S_w^*)^2). \end{aligned}$$

La prueba de ambos resultados puede unificarse. Observemos en primer lugar que por la propiedad distributiva de matrices se tiene

$$\begin{aligned} \Pi_n (S_w^2 + (S_w^*)^2 + S_w S_w^* + S_w^* S_w) &= \Pi_n (S_w^2 + (S_w^*)^2) + \Pi_n (S_w S_w^* + S_w^* S_w), \text{ y} \\ (S_w^2 + (S_w^*)^2 + S_w S_w^* + S_w^* S_w) \Pi_n &= (S_w^2 + (S_w^*)^2) \Pi_n + (S_w S_w^* + S_w^* S_w) \Pi_n. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} & \|\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) + \Pi_n(S_w S_w^* + S_w^* S_w) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n - (S_w S_w^* + S_w^* S_w)\Pi_n\|_a \\ & \geq \|\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n\|_a - \|\Pi_n(S_w S_w^* + S_w^* S_w) - (S_w S_w^* + S_w^* S_w)\Pi_n\|_a \\ & = \|\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n\|_a \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene de que  $(S_w S_w^* + S_w^* S_w)$  es una matriz diagonal y por tanto conmuta con  $\Pi_n$ .

Se deduce así que

$$(2.4.9) \quad \|\Pi_n \widehat{Q}^2 - \widehat{Q}^2 \Pi_n\|_a \geq \|\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n\|_a.$$

Teniendo en cuenta que  $\|T\|_a = \|-T\|_a$  por el mismo procedimiento se concluye que

$$(2.4.10) \quad \|\Pi_n \widehat{P}^2 - \widehat{P}^2 \Pi_n\|_a \geq \|\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n\|_a.$$

Las matrices que intervienen en el cálculo de esta norma son

$$(\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n)(i, j) = \begin{cases} -w_{n-1}w_n & \text{si } (i, j) = (n-1, n+1) \\ -w_n w_{n+1} & \text{si } (i, j) = (n, n+2) \\ w_{n-1}w_n & \text{si } (i, j) = (n+1, n-1) \\ w_n w_{n+1} & \text{si } (i, j) = (n+2, n) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n)^* (\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n)(i, j) \\ & = \begin{cases} (w_{n-1}w_n)^2 & \text{si } (i, j) = (n-n, n-1) \text{ o } (n+1, n+1) \\ (w_n w_{n+1})^2 & \text{si } (i, j) = (n, n) \text{ o } (n+2, n+2) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

A partir de estos resultados se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\|\Pi_n S_w^2 - S_w^2 \Pi_n\|_a}{\|\Pi_n\|_a} &= \frac{[2(w_{n-1} w_n)^a + 2(w_n w_{n+1})^a]^{1/a}}{n^{1/a}} = \frac{2^{1/a} w_n (w_{n-1}^a + w_{n+1}^a)^{1/a}}{n^{1/a}} \\ &= \frac{\sqrt{n} ((n-1)^{a/2} + (n+1)^{a/2})^{1/a}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{1/a}} \\ &\geq \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2-1/a} ((n-1)^{a/2} + (n+1)^{a/2})^{1/a} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2-1/a} (n+1)^{1/2} \end{aligned}$$

y dado que  $a = 1$  o  $a = 2$  y esta expresión es una función creciente en  $a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces,

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2-1/a} (n+1)^{1/2} \stackrel{a=1}{\geq} \left(\frac{2(n+1)}{n}\right)^{1/2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Pi_n(S_w^2 + (S_w^*)^2) - (S_w^2 + (S_w^*)^2)\Pi_n\|_a}{\|\Pi_n\|_a} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2(n+1)}{n}\right)^{1/2} = \sqrt{2} \neq 0.$$

Finalmente de las desigualdades (2.4.9) y (2.4.10) se sigue que  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es una secuencia de Følner para  $\widehat{Q}^2$  ni para  $\widehat{P}^2$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 2.4.6.** La idea tras esta prueba sugiere que  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es una secuencia de Følner para ningún  $\widehat{P}^k \widehat{Q}^l$  con  $k, l \in \mathbb{N}$  y  $k + l > 1$ . Exprésese  $\widehat{P}^k \widehat{Q}^l$  como polinomios en las variables  $\{S_w, S_w^*\}$ . Aquellos monomios con igual exponente para  $S_w$  que para  $S_w^*$  quedarán representados por matrices diagonales y no contribuirán a la norma. Por el contrario, aquellos con potencias distintas para  $S_w$  y  $S_w^*$  tendrán asociada una matriz  $M$  nula salvo por una de sus diagonales superiores o inferiores

que vendrá dada por un vector que a partir de una cierta coordenada crece en valor absoluto más rápido que la sucesión  $\{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ . De este modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Pi_n M - M \Pi_n\|_a}{\|\Pi_n\|_a} > 0$$

y tenemos entonces que  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es secuencia de Følner para  $M$ . Teniendo en cuenta las contribuciones de todos los monomios que componen el polinomio, se deduce que  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tampoco es secuencia de Følner para  $\widehat{P}^k \widehat{Q}^l$ .

PROPOSICIÓN 2.4.7. *Sea  $\Pi_n$  la proyección ortogonal en  $\langle\{e_1, \dots, e_n\}\rangle$  entonces  $\{\Pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es secuencia de Følner de  $\widehat{\mathcal{C}}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.4.5, existe  $A \in \widehat{\mathcal{C}}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Pi_n A - A \Pi_n\|_a}{\|\Pi_n\|_a} \neq 0$$

tanto para  $a = 1$  como para  $a = 2$ . □

2.4.0.3. *Relación entre subespacios del álgebra  $\widehat{\mathcal{C}}$  y del espacio de Hilbert  $\ell_2$ .*

Estudiemos a continuación la relación entre los subespacios del espacio de Hilbert  $\ell_2$  generados al aplicarles las proyecciones ortogonales  $\Pi_N$  en  $\langle\{e_i \mid i = 1, \dots, N\}\rangle$  y los subespacios del álgebra  $\widehat{\mathcal{C}}$  definida en (2.4.1),

$$\widehat{W}_N := \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} \alpha_{kl} \widehat{P}^k \widehat{Q}^l \mid \alpha_{kl} \in \mathbb{C} \right\}.$$

La conexión entre estas dos categorías se hace a través de un vector cíclico para el álgebra  $\widehat{\mathcal{C}}$  (ver Proposición 2.4.14).

DEFINICIÓN 2.4.8. [25, p. 226] *Un vector  $\psi \in \mathcal{H}$  se denomina **vector cíclico** para un operador  $T$  si el subespacio generado por  $\{T^n \psi\}_{n=0}^{\infty}$  es denso en  $\mathcal{H}$ .*

LEMA 2.4.9. *Sea  $S_w$  el operador traslación con peso  $w = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots)$  definido en el espacio de Hilbert  $\ell_2$ . El vector*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

*es cíclico para  $S_w$ .*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  la base canónica de  $\ell_2$ . A partir de la representación matricial de  $S_w$  (2.4.6) es directo que

$$S_w^n \Omega = \sqrt{n!} e_{n+1}.$$

Se tiene entonces que  $\langle\{S_w^n \Omega\}_{n=0}^{\infty}\rangle = \langle\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\rangle = \ell_2$  y queda concluida la prueba. □

A partir de la Definición 2.4.8 pueden también considerarse vectores cíclicos para álgebras.

DEFINICIÓN 2.4.10. *Sea  $\mathcal{C}$  un álgebra de operadores en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  o un álgebra cuyos elementos representan operadores. Un vector  $\psi \in \mathcal{H}$  se denomina **vector cíclico** para  $\mathcal{C}$  si el conjunto  $\{T\psi \mid T \in \mathcal{C}\}_{n=0}^{\infty}$  es denso en  $\mathcal{H}$ .*

En este contexto presentamos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.4.11. *Sea el álgebra  $\widehat{\mathcal{C}} = \langle \widehat{P}, \widehat{Q} \mid \widehat{P}, \widehat{Q} \text{ definidos en (2.4.5)} \rangle$  y  $\Omega$  el vector*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

*se tiene que  $\widehat{\mathcal{C}}\Omega$  es denso en el espacio de Hilbert  $\ell_2$ .*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que el álgebra  $\widehat{\mathcal{C}}$  puede ser generada por el par de operadores  $\{S_w, S_w^*\}$  tales que  $[S_w^*, S_w] = \mathbb{1}$ . Esto es,

$$\widehat{\mathcal{C}} = \langle S_w, S_w^* \mid [S_w^*, S_w] = \mathbb{1} \rangle .$$

Tomando  $S_w$  como el operador traslación con peso  $w = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots)$ , por el Lema 2.4.9  $\Omega$  es un vector cíclico para  $S_w$ . Finalmente,

$$\ell_2 = \langle \{S_w^n \Omega\}_{n=0}^\infty \rangle \subset \widehat{\mathcal{C}}\Omega \subset \ell_2 .$$

Con lo que  $\widehat{\mathcal{C}}\Omega = \ell_2$  y se concluye la demostración.  $\square$

Respecto a la dinámica de este vector por  $S_w^*$ , nótese que  $\Omega \in \ker S_w^*$ , es decir, que  $S_w^* \Omega = 0$ .

OBSERVACIÓN 2.4.12. Sea  $l \geq 1$  entonces  $(S_w^*)^l \Omega = 0$ , y en general para  $l \geq 1$  y  $k \in \mathbb{N}_0$  se tiene que  $S_w^k (S_w^*)^l \Omega = 0$ .

Veamos finalmente cómo pueden ser relacionados los subespacios  $\widehat{W}_N$  y las proyecciones  $\Pi_N$ . Resulta conveniente la definición alternativa de  $\widehat{W}_N$  recogida en la siguiente Observación.

OBSERVACIÓN 2.4.13. A partir de la expresión de  $\widehat{Q}$  y  $\widehat{P}$  como combinación lineal de los operadores  $S_w$  y  $S_w^*$  dada en (2.4.7) es directo que los subespacios  $\widehat{W}_N$  pueden reescribirse como

$$\widehat{W}_N = \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^{N-k} \alpha_{kl} S_w^k (S_w^*)^l \mid \alpha_{kl} \in \mathbb{C} \right\} .$$

PROPOSICIÓN 2.4.14. *Sea  $\Omega = e_1 \in \ell_2$  y considérese la función  $\Phi$  definida como*

$$\begin{aligned} \Phi: \widehat{\mathcal{C}} &\rightarrow \ell_2 \\ T &\mapsto T\Omega \end{aligned}$$

*entonces*

$$\langle \{\Phi(T) \mid T \in \widehat{W}_N\} \rangle = \langle \{\Pi_{N+1} \psi \mid \psi \in \ell_2\} \rangle .$$

DEMOSTRACIÓN. Probémoslo por doble inclusión.

(C) Sea  $\alpha_{kl} S_w^k (S_w^*)^l \in \widehat{W}_N$ , entonces,

$$\Phi(\alpha_{kl} S_w^k (S_w^*)^l) = \alpha_{kl} S_w^k (S_w^*)^l \Omega = \begin{cases} \sqrt{k!} e_{k+1} & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto  $\Phi(\alpha_{kl} S_w^k (S_w^*)^l) \in \{e_n\}_{n \in \{1, \dots, N+1\}}$ . Además, por la Observación 2.4.13, todo elemento de  $\widehat{W}_N$  puede expresarse como suma de elementos como el considerado. Por tanto podemos afirmar que

$$\langle \{\Phi(T) \mid T \in \widehat{W}_N\} \rangle \subset \langle \{\Pi_{N+1} \psi \mid \psi \in \ell_2\} \rangle .$$

( $\supset$ ) Sea  $\psi \in \ell_2$  se tiene que

$$\begin{aligned}\Pi_{N+1}\psi \in \langle \{e_n\}_{n \in \{1, \dots, N+1\}} \rangle &= \langle \{S_w^n \Omega\}_{n \in \{1, \dots, N\}} \rangle \\ &= \langle \{\Phi(T) \mid T \in \{S_w^n\}_{n \in \{1, \dots, N\}}\} \rangle \subset \langle \{\Phi(T) \mid T \in \widehat{W}_N\} \rangle\end{aligned}$$

concluyendo la prueba.

□

## CAPÍTULO 3

### Próximos pasos

Presentamos a continuación algunas ideas sobre líneas de estudio que complementarían este trabajo. Algunas de ellas aparecen en simultaneidad al estudio realizado mientras que otras surgen a posteriori al analizar los resultados obtenidos desde la perspectiva que brindan otros estudios de promediabilidad.

- A título académico resultaría pertinente conocer las nociones y los resultados esenciales en teoría de representación de álgebras. En esta línea cabría formalizar la representación del álgebra abstracta  $\mathcal{C}$  en el álgebra matricial  $\widehat{\mathcal{C}}$  así como las propiedades de la involución asociada.
- En lo que respecta a los resultados, a la vista de las proposiciones 2.4.3 y 2.4.5 quedaría abierto comprobar si existe alguna secuencia de matrices que sea secuencia Følner  $\widehat{Q}^2$  y  $\widehat{P}^2$  o, incluso, para el álgebra  $\widehat{\mathcal{C}}$ . Este punto es de especial interés teniendo en cuenta el momento contribuye en cuadratura en la gran mayoría de los hamiltonianos. Este punto es de especial interés teniendo en cuenta el momento interviene en potencia cuadrada en el Hamiltoniano, operador físico por excelencia. Y es que puede que en posteriores estudios se encuentre alguna propiedad de las sucesiones de Følner que haga conveniente su existencia.
- Sin que lo anterior suene demasiado vago, en particular, podría estudiarse si la aproximación estructural definida por sucesiones de Følner en el álgebra matricial puede transferirse a una aproximación espectral de los operadores.
- Por otro lado, cabría estudiar las diferencias entre las propiedades asociadas las  $\|\cdot\|_p$ -secuencias de Følner para distintos índices  $p \in \mathbb{R}$  en el contexto de operadores no acotados.
- Finalmente, queda por estudiar si la promediabilidad del álgebra  $\mathcal{C}$  es en cierto modo una manifestación de algunos de los resultados de un artículo de Kadison y Liu ([21, Teorema 7.4.] y [21, Corolario 7.5]).

## APÉNDICE A

# Importancia de los operadores autoadjuntos

### Índice

---

<b>A.1. Fundamentos de la Mecánica cuántica</b>	<b>43</b>
<b>A.2. Teorema espectral: medidas espectrales</b>	<b>45</b>
<b>A.3. Dinámica a través de SCUG</b>	<b>47</b>

---

Añadimos este apéndice para mostrar la relevancia de los operadores autoadjuntos tanto desde el punto de vista meramente analítico (Sección A.2) como en sus aplicaciones en mecánica cuántica (Sección A.3). Cualquiera de estos puntos es suficiente para justificar que las propiedades definidas en el Capítulo 1 constituyan la clasificación habitual de los operadores no acotados.

Inicialmente, en la Sección A.1 se introducen los axiomas de la mecánica cuántica como marco de los objetos estudiados en el presente trabajo. Se explica también la evolución temporal de los sistemas físicos con la que queda patente la necesidad de estudiar las nociones y resultados que siguen en las dos secciones restantes del apéndice.

Incluimos en la Sección A.2 una breve introducción a un teorema fundamental en análisis funcional: el teorema espectral. No se trata de un desarrollo detallado debido a la restricción de espacio de esta memoria. La variedad de enunciados y sus múltiples consecuencias lo hacen merecedor por si solo una de un TFG. No obstante, nos ceñiremos al objetivo de definir expresiones tales como las involucradas en la relación de Weyl (1.1.3), i.e.,  $e^{itP}$  siendo  $P$  un operador no acotado autoadjunto que veremos que es generador del grupo uniparamétrico. De modo preciso, el interés recaerá sobre el *cálculo funcional* que define este teorema para operadores autoadjuntos. Fundamentando este cálculo, se optará por una formulación del teorema espectral en términos de medidas espectrales (Teorema A.2.3).

Por último, desde otra perspectiva, la Sección A.3 justifica el interés físico de los operadores autoadjuntos. A partir del teorema de Stone de grupos uniparamétricos fuertemente continuos (Teorema A.3.2) veremos que es necesario que el Hamiltoniano sea autoadjunto para que exista solución a la Ecuación de Schrödinger y sea única.

### A.1. Fundamentos de la Mecánica cuántica

En 1932 von Neumann establecía por primera vez la formulación matemática rigurosa de la mecánica cuántica mediante una serie de axiomas o postulados que pueden ser enunciados de diversas formas equivalentes [32]. Siendo la referencia original una de las más complejas optamos por otra de las formulaciones más canónicas incluidas, por ejemplo, en [18, Capítulo 3] y [30, Sección 2.1].

- i) El espacio de configuraciones de un sistema físico es un espacio de Hilbert complejo y separable  $\mathcal{H}$ . Un posible estado puro del sistema se representa por un vector de norma uno  $\psi$  del espacio  $\mathcal{H}$ .

- ii) Cada observable<sup>1</sup>  $f_A$  del sistema está representado en mecánica cuántica por un operador autoadjunto  $A$  (en general no acotado) definido a lo sumo en un subconjunto denso de  $\mathcal{H}$ . Al hacer una medida del observable  $A$  en un estado  $\psi$  el valor resultante,  $a$ , pertenece al espectro de  $A$  denotado por  $\sigma(A)$  y definido como

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists B \in \mathfrak{B}_\lambda(A)\} \quad \text{donde}$$

$$\mathfrak{B}_\lambda(A) := \left\{ B \in B(\mathcal{H}) \mid \begin{array}{l} B\psi \in \mathcal{D}(A), (A - \lambda\mathbb{I})B\psi = \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \\ B(A - \lambda\mathbb{I})\psi = \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A) \end{array} \right\}.$$

Por ser  $A$  autoadjunto  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .

- iii) Para un sistema en el estado  $\psi \in \mathcal{D}(A)$ , la distribución de probabilidad para una medida del observable  $f_A$  satisface

$$E(f_A^m) = \langle \psi, A^m \psi \rangle.$$

En particular, el valor esperado de en una medida de  $f_A$  viene dado por  $\langle \psi, A\psi \rangle$  que es un número real para todo  $\psi \in \mathcal{D}(A)$ .

- iv) Al obtenerse  $a \in \sigma(A)$  como resultado de una medida del observable  $f_A$  en un sistema inicialmente en el estado  $\psi$ , inmediatamente pasará a encontrarse en el  $\tilde{\psi}$  que satisface:

$$A\tilde{\psi} = a\tilde{\psi}.$$

Entre los fundamentos de esta teoría se encuentra también la ecuación de Schrödinger que rige la evolución temporal de un sistema cerrado

$$(A.1.1) \quad i \frac{d}{dt} \psi(t) = H\psi(t)$$

donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema, esto es, el operador que representa su energía total y que por el axioma *ii*) es autoadjunto. Esta última propiedad es fundamental puesto que, como se detallará en las Secciones A.2 y A.3, que el Hamiltoniano sea autoadjunto es condición suficiente y necesaria para que la solución a la Ecuación A.1.1 exista y sea única. De este modo, contrariamente a la naturaleza probabilística de los procesos de medida, la evolución temporal de un sistema es determinista .

En caso de que el espacio de Hilbert sea  $\mathbb{C}^n$  entonces posee representación matricial. Si además  $H$  es acotado esta ecuación diferencial ordinaria tiene como solución

$$(A.1.2) \quad \psi(t) = \psi_0 e^{-itH} \quad \text{donde} \quad e^{-itH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} H^n.$$

Obsérvese que la serie de potencias es absolutamente convergente en la norma de los operadores, y por tanto convergente, sin más que aplicar la propiedad submultiplicativa de la norma (Observación 1.0.5):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|(itH)^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|H\|^n |t|^n}{n!} = e^{|t|\|H\|}.$$

Para cada valor del tiempo,  $t \in \mathbb{R}$ , la expresión anterior toma valores reales por ser acotado el Hamiltoniano.

En este escenario, para obtener  $H^n$  la opción más conveniente es diagonalizar  $H$ . Que este procedimiento pueda efectuarse queda justificado por el teorema espectral. En el caso que nos atañe, con  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ , el teorema espectral establece que existen una matriz  $D$  diagonal y una unitaria  $U$ , i.e.  $U^*U = UU^* = \mathbb{1}$ , satisfaciendo  $H = UDU^*$ . De hecho, este resultado es generalizable a espacios de dimensión infinita y operadores autoadjuntos no necesariamente acotados formulándolo a partir de funciones medibles.

<sup>1</sup>Se denomina *observable* a una función real en el espacio de fases de la mecánica clásica.

Enunciándolo de manera precisa, *todo operador autoadjunto es unitariamente equivalente a uno diagonal*.

## A.2. Teorema espectral: medidas espectrales

Planteémonos en primer lugar el problema general de definir funciones de un operador autoadjunto  $T$  [30, p. 87]. En concreto, buscamos funciones que satisfagan las siguientes propiedades

$$(f + g)(T) = f(T) + g(T), \quad (fg)(T) = f(T)g(T), \quad (f^*)(T) = f(T)^*$$

donde denotamos por  $f^*$  a la función compleja conjugada de  $f$ .

Si las funciones son polinómicas es directo. Las complicaciones surgen al intentar extender esta definición a una clase más grande de funciones efectuando un procedimiento por paso al límite. Lo más intuitivo sería considerar series de potencias convergentes o el cierre de los polinomios por la norma del supremo. Ahora bien ambas técnicas son válidas exclusivamente si  $T$  es acotado.

En el caso de operadores autoadjuntos, la alternativa se encuentra en definir un cálculo funcional a partir de la descomposición en medidas espectrales. Para ilustrar la idea tras el procedimiento consideraremos en primer lugar un ejemplo sencillo que posteriormente generalizaremos.

Sea  $T$  un operador autoadjunto en  $\mathbb{C}^n$  y  $P_1, \dots, P_k$  las proyecciones ortogonales<sup>2</sup> en los espacios propios de  $T$  ortogonales dos a dos y con valores propios asociados  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  con  $k \leq n$ . El teorema espectral establece que estos espacios son un sistema generador de  $\mathbb{C}^n$ . Así, la identidad se descompone como sigue:

$$(A.2.1) \quad \mathbb{1} = \sum_{i=1}^k P_i.$$

Partiendo de esta descomposición,  $T$  puede expresarse como combinación lineal de proyecciones ortogonales en los espacios propios:

$$T = T \cdot \mathbb{1} = \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^k P_j \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i.$$

Mutuamente en la tercera igualdad se ha aplicado  $P_i P_j = \delta_{i,j} P_j$  puesto que los espacios propio son ortogonales.

Los operadores pueden entonces manipularse *como si fueran números* definiendo funciones de operadores como sigue:

$$(A.2.2) \quad f(T) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) P_i.$$

Consideremos ahora el caso más general de un operador autoadjunto  $T$  no necesariamente acotado y definido en un espacio de Hilbert cualquiera. La generalización natural de la familia de proyecciones  $P_1, \dots, P_k$  será una resolución de la identidad obtenida a partir de medidas espectrales.

<sup>2</sup>Una proyección  $P$  se dice ortogonal si satisface  $P = P^* = P^2$ .

DEFINICIÓN A.2.1. [14, Definición 2.3.18] Sea  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel<sup>3</sup> de  $\mathbb{R}$  y sea  $\mathcal{OP}(\mathcal{H})$  el conjunto de proyecciones ortogonales<sup>4</sup> en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Una función  $E : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{OP}(\mathcal{H})$  se dice **medida espectral** en  $\mathbb{R}$  si satisface las siguientes propiedades:

- i)  $E(\emptyset) = 0$  y  $E(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$ .
- ii)  $E$  es fuertemente aditiva en el sentido de la topología fuerte de operadores. Es decir, sean  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  disjuntos dos a dos, entonces

$$E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n\right)\psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N E(\Omega_n)\psi \quad \text{para todo } \psi \in \mathcal{H}.$$

Cada medida espectral define una proyección ortogonal a través de la identificación  $E(\lambda) := E((-\infty, \lambda])$ . El conjunto de todas las proyecciones definidas de esta forma se denomina resolución de la identidad.

DEFINICIÓN A.2.2. [30, p. 89] Una **resolución de la identidad** en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es una familia uniparamétrica  $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  de proyecciones ortogonales en  $\mathcal{H}$  tal que:

- i) Es monótona, es decir, si  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  entonces  $E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$ .
- ii) Es fuertemente continua por al derecha. Esto es,  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} E(\lambda)\psi = E(\lambda_0)\psi$  para  $\psi \in \mathcal{H}$  y  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ .
- iii)  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda)\psi = 0$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)\psi = \psi$  para  $\psi \in \mathcal{H}$ .

El nombre de resolución de la identidad queda justificado por una descomposición análoga a la que se obtenía para proyecciones ortogonales (ver Ec. (A.2.1)),

$$\mathbb{1} = \int dE(\lambda).$$

En su formulación con medidas espectrales el teorema espectral puede enunciarse alternativamente como sigue.

TEOREMA A.2.3 (Teorema espectral para operadores autoadjuntos). [30, Teorema 3.7] Sea  $T$  un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert, entonces existe una única medida espectral  $E_T$  definida en la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  tal que:

$$T = \int \lambda dE_T(\lambda).$$

Esta medida espectral  $E_T$  define funciones características como resolución de la identidad en  $L^2(\mathbb{R})$ . Se tiene que  $E_T(\lambda) = \chi_{(-\infty, \lambda]}(T)$  para  $\lambda \in \sigma(T)$ . No podemos entrar por limitaciones de espacio en la definición de la integral de la derecha de la igualdad.

Finalmente, a partir de este resultado y en analogía con la Ecuación (A.2.2) del caso finito dimensional, puede definirse el cálculo funcional de Borel [18, Definición 10.5]. Sea  $f$  una función  $f : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ , entonces  $f(T)$  es un operador normal que se define como sigue [25, p. 263]:

$$f(T) = \int_{\sigma(\lambda)} f(\lambda) dE_T(\lambda).$$

<sup>3</sup>La notación más usual para la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$  es  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . No obstante, en esta memoria la denotamos como  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  puesto que el carácter  $\mathcal{B}$  ya lo hemos empleado para referirnos a los operadores acotados de un Hilbert.

<sup>4</sup>El conjunto de proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert coincide con el conjunto de proyecciones autoadjuntas.

### A.3. Dinámica a través de SCOUG

Como se ha justificado en la sección anterior, que un operador sea autoadjunto es condición suficiente para poder definir funciones de este. Como caso particular, si el Hamiltoniano es autoadjunto cobra sentido la expresión (A.1.2) de la solución de la ecuación de Schrodinger (A.1.1). De hecho, como veremos en la Proposición A.3.4, esta condición no solo es suficiente sino también necesaria.

Estudiemos para ello la dinámica de la familia  $U(t) = e^{-itH}$  de operadores solución de la ecuación de Schrödinger que conduce a la siguiente definición abstracta.

DEFINICIÓN A.3.1. [30, Definición 2.3.26] *Una familia de operadores  $U = (U(t))_{t \in \mathbb{R}}$  se dice que es un **grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo (SCOUG)** si :*

- i)  $U(t)$  es unitario para todo  $t \in \mathbb{R}$ , i.e.  $U(t)^*U(t) = U(t)U(t)^* = \mathbb{1}$ ;
- ii)  $U(t)$  es homomorfismo, i.e.  $U(0) = \mathbb{1}$  y satisface la ley exponencial  $U(t+s) = U(t)U(s)$  para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ ;
- iii) converge fuertemente, i.e.  $\lim_{t \rightarrow s} U(t) = U(s)$ .

El principal resultado sobre estas familias de operadores es el Teorema de Stone.

TEOREMA A.3.2 (Stone). [25, Teorema VIII.8] [30, Teorema 5.2] *Sea  $U(t)$  un SCOUG en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Entonces existe un operador autoadjunto  $A$  de forma que  $U(t) = e^{itA}$ .*

Este operador  $A$  se denomina generador infinitesimal del SCOUG [25, p. 268].

OBSERVACIÓN A.3.3. Resulta habitual en la literatura presentar una versión más fuerte del teorema de Stone que establece la correspondencia biunívoca entre operadores autoadjuntos y SCOUGs [14, Teorema 2.3.32]. La discusión de la versión más estándar no merece interés pues la implicación restante es de comprobación directa.

Obsérvese que por ser  $A$  autoadjunto, la expresión  $e^{itA}$  queda bien definida a partir del cálculo funcional desarrollado en la sección anterior partiendo del teorema espectral para operadores autoadjuntos (Teorema A.2.3).

Finalmente, podemos ver que el indudable interés en que el Hamiltoniano sea autoadjunto reside en que tan solo en estas condiciones la evolución temporal del sistema queda unívocamente determinada.

PROPOSICIÓN A.3.4. *Dado un estado inicial  $\psi_0$  existe una única solución  $\psi(t)$  de la ecuación de Schrödinger (A.1.1) si y solo si el Hamiltoniano es autoadjunto.*

Observamos que si  $H$  es autoadjunto, entonces la expresión  $e^{-itH}$  está bien definida. Resolviendo la ecuación diferencial (A.1.1) se tiene la solución  $\psi(t) = \psi_0 e^{-itH}$ . Esta solución es única si  $\psi_0 \in \mathcal{D}(H)$  aunque en el caso de operadores no acotados, se interpreta como solución incluso si  $\psi_0 \notin \mathcal{D}(H)$ . En mecánica cuántica la evolución temporal de un sistema físico viene descrita por el SCOUG  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}} = (e^{-itH})_{t \in \mathbb{R}}$  [28, p. 8]. Aplicando el teorema de Stone podemos concluir que  $-H$  es autoadjunto. Es directo entonces que también  $H$  es autoadjunto.

## Bibliografía

- [1] Ara, P.; Lledó, F.; Yakubovich, D. V. 2014. Følner Sequences in Operator Theory and Operator Algebras. En: M. Bastos; A. Lebre; S. Samko; I. Spitkovsky (eds.). *Operator Theory, Operator Algebras and Applications*. Basel: Springer, p. 1–24. ISBN 978-3-0348-0815-6.
- [2] Ara, P.; Li, K.; Lledó, F.; Wu, J. 2018. Amenability and uniform Roe algebras. *Bulletin of Mathematical Sciences*, **459**, p. 686–716. ISSN 0022-247X.
- [3] Ara, P.; Li, K.; Lledó, F.; Wu, J. 2018. Amenability of coarse spaces and  $\mathbb{K}$ -algebras. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **8**, p. 257–306. ISSN 1664-3615.
- [4] Aramoyana, J.; García-Longoria, A. T. 2021. La imagen distorsionada de las matemáticas en los relatos públicos *La Gaceta de la RSME*, **24**(2), p. 245–248. ISSN 1138-8927.
- [5] Banach S; Tarski, A. 1924. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, **6**, p. 244-277. ISSN 0016-2736.
- [6] Bédos, E. 1995. Notes on hypertraces and  $C^*$ -algebras. *Journal of Operator Theory*, **34**(2), p. 285–306. ISSN 0379-4024.
- [7] Bell, J. 2015. *Sobolev spaces in one dimension and absolutely continuous functions*. [Última Consulta: 28 mayo 2023] <http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/sobolevid.pdf>
- [8] Berberian, S. K. 1961. *Introduction to Hilbert Space*. New York: Oxford University Press. ISBN 9780195008302.
- [9] Bogachev, V. I. 2007. *Measure Theory*. Berlin: Springer. ISBN 978-3-540-34513-8
- [10] Born, M.; Jordan. P. 1925. Zur Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, **34** p. 858–888. ISSN 0044-3328.  
Traducción: Delphenich, D. H. [Última Consulta: 30 mayo 2023] Traducción disponible en: [http://www.neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/born\\_and\\_jordan\\_-\\_qm\\_1.pdf](http://www.neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/born_and_jordan_-_qm_1.pdf).
- [11] Connes, A. 1976. Classification of Injective Factors Cases  $II_1$ ,  $II_\infty$ ,  $III_\lambda$ ,  $\lambda \neq 1$ . *Annals of Mathematics*, **104**, p. 263-269. 73-114. ISSN 0003-486X.
- [12] Dixmier, J. 1956-1958. Sur la relation  $i(PQ - QP) = \mathbb{1}$ . *Compositio Mathematica*, **13**, p. 263-269. [Última consulta: 10 junio 2023] [http://www.numdam.org/item/CM\\_1956-1958\\_\\_13\\_\\_263\\_0/](http://www.numdam.org/item/CM_1956-1958__13__263_0/).
- [13] Elek, G. 2003. The amenability of affine algebras. *Journal of Algebra*, **264**, p. 469-478. ISSN 0021-8693.
- [14] Fackler, S. 2015. *Mathematical Foundations on Quantum Mechanics* [Última Consulta: 10 junio 2023] [https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website\\_uni\\_ulm/mawi.inst.020/fackler/SS15/qm/lnotes\\_mathematical\\_found\\_qm\\_temp.pdf](https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.020/fackler/SS15/qm/lnotes_mathematical_found_qm_temp.pdf).
- [15] Følner E. 1955. On groups with full Banach mean value. *Mathematica Scandinavica*, **3**, p. 243–254. ISSN 0025-5521.
- [16] Garrido, A. 2015 *An introduction to amenable groups*. [Última Consulta: 8 mayo 2023] <https://www.math.uni-duesseldorf.de/~garrido/amenable.pdf>.
- [17] Gromov, M. 1999. Topological Invariants of Dynamical Systems and Spaces of Holomorphic Maps: I. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **2**, p.323–415. ISSN 1572-9656.
- [18] Hall, B. C. 2013. *Quantum Theory for Mathematicians*. New York: Springer. ISBN 978-1-4614-7115-8.
- [19] Halmos, P. R. 1963. What Does the Spectral Theorem Say? *American Mathematical Monthly*, **70**, p. 241-247. ISSN 0002-9890.
- [20] Heisenberg, W. 1925. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, **33**, p. 879–893. ISSN 0044-3328.  
Traducción: Mančal, T. <https://arxiv.org/pdf/2108.03119.pdf>
- [21] Kadison, R. V; Liu, Z. 2014. The Heisenberg Relation – Mathematical Formulations, *Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **10** 00,. ISSN 1815-0659.
- [22] Kulkarni, R. 2021. *Case Study of the Momentum Operator*. [Última Consulta: 8 mayo 2023] [https://rohankulkarni.me/project/case\\_study\\_momentum/case\\_study\\_momentum.pdf](https://rohankulkarni.me/project/case_study_momentum/case_study_momentum.pdf).
- [23] Pier, J. P. 1984. *Amenable locally compact groups*. New York: John Wiley and Sons. ISBN 978-0-4718-9390-5.

- [24] Putnam, C. R. 1967. *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics*. Berlin: Springer. ISBN 978-3-642-85940-3.
- [25] Reed, M.; Simon, B. 1980. I. Functional Analysis. *Methods of modern mathematical physics*. San Diego: Academic Press. ISBN 978-01-258-5050-6.
- [26] Runde, V. 2002. *Lectures on Amenability*. Berlin: Springer. ISBN 978-3-540-42852-7.
- [27] Schmüdgen, K. 1990. *Unbounded Operation Algebras and Representation Theory*. Basel: Springer. ISBN 978-3-7643-2321-9.
- [28] Schmüdgen, K. 2012. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Dordrecht: Springer. ISBN 978-94-007-4752-4.
- [29] Schwabl, F. 2007. *Quantum Mechanics*. Berlin: Springer. ISBN 978-3-540-71932-8.
- [30] Teschl, G. 2009. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Applications to Schrödinger Operators*. Providence: American Mathematical. ISBN 978-0-8218-4660-5.
- [31] von Neumann, J. 1929. Zur allgemeinen Theorie des Masses *Fundamenta Mathematicae*, **13**, p. 73-116 ISSN 0016-2736..
- [32] von Neumann, J.; Wheeler, N. A. (ed.); Beyere, R. T. (trad.). 2018. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*. Princeton: Princeton University Press. ISBN 978-0-691-17856-1.
- [33] Wagon, S. 1985. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 978-0521457040.