



*Facultad
de
Ciencias*

ECUACIONES DIFERENCIALES QUE MODELAN COMBUSTIÓN

(Differential equations modeling combustion)

Trabajo de fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Rubén Quintana Bravo

Director: Rafael Granero Belinchón

Junio - 2023

Agradecimientos

A Rafa, por tus innumerables consejos y directrices que han hecho posible la realización de este trabajo.

A mis padres y hermana, por vuestra confianza depositada en mí a lo largo de estos años, por el esfuerzo realizado para que haya podido estudiar lo que más me gustaba y, en general, por todo.

A Leire, pilar fundamental durante estos años. Gracias por estar ahí día tras día.

Por último, a mis amigos. Con vuestra compañía habéis hecho de estos cuatro años un agradable camino que, si no fuera por vosotros, hubiese sido más bien un camino lleno de baches.

Resumen

La combustión se ve envuelta en varios fenómenos físicos como la turbulencia, así como en diversas reacciones químicas. En este trabajo, se presenta un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que modelan este fenómeno. Este sistema, ha sido introducido previamente por Andrew Majda en su artículo llamado “*A qualitative model for dynamic combustion*”, desde el cuál parte este estudio.

A lo largo del mismo, se demuestra la existencia y unicidad local de soluciones clásicas en espacios de Sobolev, que, posteriormente son demostradas como existencia y unicidad global. Además, incluye el estudio de una cantidad conservada que presenta el sistema junto con una simulación numérica para explorar el comportamiento de la solución estudiada previamente.

Palabras clave: combustión, existencia local, existencia global, unicidad, EDP.

Abstract

Combustion is involved in various physical phenomena such as turbulence, as well as different chemical reactions. In this study, a system of partial differential equations is presented to model this phenomenon. This system has been previously introduced by Andrew Majda in his article titled “*A qualitative model for dynamic combustion*”, from which this study begins.

In this article, the existence and local uniqueness of classical solutions in Sobolev spaces are demonstrated, which are subsequently proven to exist globally and be unique. Furthermore, the investigation of a conserved quantity that the system presents is appreciated, along with a numerical simulation to explore the behavior of the previously studied solution.

Keywords: combustion, local existence, global existence, uniqueness, PDE.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Espacios L^p	3
1.2. Espacios de Sobolev	5
2. Análisis del problema	7
2.1. Presentación del modelo final	7
2.2. Estudio del problema (2.5)	9
2.2.1. Resultado principal y metodología	9
2.2.2. Estimaciones de energía	10
2.2.3. Regularización del problema	20
2.2.4. El problema regularizado está bien puesto	21
2.2.5. Paso al límite del problema regularizado	27
2.2.6. Unicidad de solución	35
3. Propiedades	37
3.1. Cantidad conservada	37
3.2. Existencia global	38
4. Resultados numéricos	47
Referencias bibliográficas	49
Anexos	51

Introducción

Los fluidos incompresibles son objeto de estudio en gran parte de la matemática aplicada, teniendo gran importancia (como viene motivado en [9]) tanto desde el punto de vista teórico como del punto de vista práctico. El punto de vista teórico permite el estudio de propiedades y singularidades y, el punto de vista práctico, permite realizar simulaciones para observar los fundamentos teóricos.

En este trabajo, se va a estudiar y analizar el fenómeno de la combustión de una manera simplificada ya que el problema completo trae consigo una gran dificultad. Uno de los motivos de que el estudio de la teoría de la combustión conlleve un desafío formidable, como apunta Andrew Majda en [1], es que hay varios fenómenos físicos involucrados como pueden ser ondas de choque, turbulencias o temperaturas de autoignición, así como una gran variedad de escalas de tiempo y longitud presentes en las soluciones.

Algo común de muchos de los estudios sobre los fluidos incompresibles como pueden ser [2], [9] o [10], es que se presenta no-localidad en la variable que representa el espacio. Sin embargo, algo que diferencia este estudio de los mencionados anteriormente es que la no-localidad se presenta en la variable que representa al tiempo.

Por lo tanto, este problema resulta interesante tanto desde el punto de vista físico como matemático. Además, el modelo presentado tiene relación análoga con el flujo de gas de reacción como lo hace la ecuación de Burgers con el flujo de fluido compresible ordinario.

A continuación, se va a presentar el modelo definitivo que se utilizará para el posterior estudio y, que va a resultar de gran importancia en todo el trabajo, que es definido por Andrew Majda en [1] :

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= \nu u_{xx} \\ \left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right)_t + \left(u\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right)\right)_x + (pu)_x &= (\nu u_x u)_x + (\lambda T_x)_x \\ (\rho Z)_t + (u\rho Z)_x &= -K\phi(T)\rho Z + d(\rho Z_x)_x\end{aligned}\tag{1}$$

donde ρ es la densidad, u la velocidad, e es la energía interna absoluta por unidad de masa de la mezcla, p es la presión, $T = \frac{p}{\rho}$ es la temperatura y Z es la fracción de masa del gas no quemado. También, hay que mencionar que hay tres constantes positivas, ν , λ y d , que representan respectivamente viscosidad, la conducción de calor y la difusión de especies. Las distintas ecuaciones que forman el sistema hacen referencia a la masa, momento, energía y reacción química respectivamente.

Centrándose ahora más en este trabajo, se va a realizar un breve resumen de lo que se ha realizado en cada capítulo.

El primer capítulo, consiste en una breve introducción de alguno de los conceptos clave para seguir este trabajo, así como alguno de los lemas más importantes para la resolución de

muchos de los apartados del mismo.

El segundo capítulo, supone el mayor grueso del trabajo. En él, se termina de presentar el sistema de estudio y se realiza el estudio de existencia y unicidad local de solución mediante el método clásico de la energía, para el que se ha razonado de forma similar a [9] o [10].

Una vez demostrada la existencia y unicidad local de solución, se va un paso más allá en el tercer capítulo, demostrando que dicha existencia y unicidad es global. Además, se demuestra la existencia de una cantidad conservada para cualquier instante de tiempo t .

Para finalizar, en el cuarto capítulo se realiza una simulación numérica que permitirá apreciar lo que se ha estudiado teóricamente y se concluirá el estudio enunciando una conjetura.

Preliminares

En este capítulo se presenta una introducción de algunos de los términos que posteriormente aparecerán en el trabajo y conviene mencionarlos para que el lector pueda seguir el trabajo realizado. Conviene empezar por la definición de ecuación en derivadas parciales (EDP) y de ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Definición 1.1 (EDP). *Se dice que una ecuación es una ecuación en derivadas parciales de orden $n \in \mathbb{N}$ si aparece una función que depende de al menos dos variables reales, junto a algunas derivadas parciales de la misma de hasta orden n .*

Definición 1.2 (EDO). *Se dice que una ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de orden $n \in \mathbb{N}$ cuando aparece una función desconocida que depende solamente de una variable real, junto a algunas derivadas de orden n de la misma.*

A lo largo de este trabajo se podrán encontrar diversas ecuaciones en derivadas parciales, donde las funciones desconocidas serán el objeto de estudio. Por ejemplo, la derivada parcial de la función desconocida $u(x, t)$ con respecto a la variable x se denotará como $\partial_x u(x, t)$ o como $u_x(x, t)$. En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se denotará la derivada de una función en una variable, por ejemplo $u(t)$, como $\frac{d}{dt}u(t)$.

Unos conceptos muy importantes a la hora de comprender este artículo son los espacios L^p , que serán introducidos a continuación.

1.1. Espacios L^p

Los espacios L^p son también conocidos como los espacios de Lebesgue, debido al matemático francés Henri Léon Lebesgue. Para entender estos espacios, conviene conocer cierta información sobre lo que son los espacios medibles (en sentido Lebesgue) y las funciones medibles (de nuevo, en sentido Lebesgue) con el objetivo de seguir la lectura (se puede ampliar información sobre estos conceptos en [3] y [5]). El concepto espacio de medida es esencial a la hora de definir los espacios L^p . Es el siguiente:

Definición 1.3 (Espacio de medida). *$(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida si Ω es un conjunto, \mathcal{M} es un álgebra en Ω y μ es una medida en (Ω, \mathcal{M}) . (Se puede profundizar en [3])*

Una vez introducido el concepto de espacio de medida, se introduce otro concepto esencial, los espacios \mathcal{L}^p .

Definición 1.4 (Espacios \mathcal{L}^p). *Sea la terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$, se define $\mathcal{L}^p_\mu(\Omega)$ como el espacio vectorial formado por las funciones medibles que cumplen*

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty$$

Ahora bien, teniendo en cuenta esta definición, se considera la siguiente relación de equivalencia \mathcal{R} sobre $\mathcal{L}_\mu^p(\Omega)$:

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f = g \text{ en casi todo punto}$$

Con lo que se puede definir un nuevo espacio vectorial.

Definición 1.5 (Espacios $L^p(\Omega)$). *Se define $L^p(\Omega)$ como $L^p = \mathcal{L}^p/\mathcal{R}$, es decir, como el espacio vectorial cuyos elementos son las clases de equivalencia de la relación \mathcal{R} . En este espacio, se define la norma de una clase de función f de la siguiente manera*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Por otro lado, falta por presentarse el caso en el que $p = \infty$. Es por ello por lo que hay que introducir la siguiente definición.

Definición 1.6 (Espacio L^∞). *Sea la terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $p = \infty$, el espacio \mathcal{L}_μ^∞ se define como el espacio vectorial formado por las funciones medibles acotadas esencialmente. Considerando de nuevo la relación de equivalencia \mathcal{R} , se define el espacio L^∞ como el espacio vectorial formado por todas las clases de equivalencia dadas por la misma. En este caso, se define la norma en L^∞ como el supremo esencial, es decir,*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{K \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq K \quad \forall x \in \Omega\}$$

Los espacios L^p , con $1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Banach, es decir, son espacios vectoriales normados y completos en la métrica definida a raíz de la norma definida en la definición 1.5 o en la definición 1.6. Si bien no se profundizará en este concepto, conviene mencionarlo para su posterior uso.

Por otro lado, en [8] se definen algunas desigualdades que serán introducidas y utilizadas en este trabajo. En primer lugar, conviene presentar la desigualdad Hölder.

Lema 1.1 (Desigualdad de Hölder). *Sean p, q dos valores tales que $1 \leq p, q \leq \infty$ y $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ y sean f, g dos funciones medibles, se cumple*

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Además, es interesante añadir una generalización de la desigualdad de Hölder ya que también será utilizada a lo largo del trabajo. Esta generalización viene descrita en [7] o en [8] de la siguiente manera:

Lema 1.2 (Generalización desigualdad de Hölder). *Asumiendo que cada una de las funciones f_1, f_2, \dots, f_k son funciones tales que*

$$f_i \in L^{p_i} \text{ con } 1 \leq i \leq k \text{ cumpliendo que } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$$

Entonces, el producto $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$ pertenece a L^p y se verifica

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdot \|f_2\|_{L^{p_2}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}$$

Otra de las desigualdades que se usará a lo largo del trabajo y que el lector debe conocer está recogida en el siguiente lema. Tanto esta desigualdad como las restantes de esta sección vienen presentadas en [8].

Lema 1.3 (Desigualdad de Young). *Sean p, q dos enteros positivos tales que $1 < p, q < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para cualesquiera números positivos $a, b > 0$, se tiene*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Sin embargo, en ocasiones convendrá hacer tender a 0 uno de los dos términos. Por ello, es necesario introducir la anterior desigualdad de manera generalizada.

Lema 1.4 (Desigualdad de Young generalizada). *Sean dos números $a, b > 0$ y sea $\epsilon > 0$, se verifica*

$$ab \leq \epsilon a^p + (\epsilon p)^{-q/p} \cdot \frac{1}{q} \cdot b^q$$

Con este lema y la elección del ϵ adecuado, se conseguirá la obtención de términos deseados más adelante. Otra desigualdad que se utilizará a menudo es la siguiente.

Lema 1.5 (Desigualdad triangular). *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $u, v \in L^p(\Omega)$. Entonces,*

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}$$

Por último, se va a mencionar la conocida desigualdad de Gronwall en su forma diferencial.

Lema 1.6 (Desigualdad de Gronwall). *Sea $f(t)$ una función continua no negativa en $[0, T]$ que satisface para casi todo punto t la desigualdad*

$$f'(t) \leq \phi(t)f(t) + \psi(t)$$

donde $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son no negativas sumables en $[0, T]$. Entonces

$$f(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[f(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$. En particular, si

$$f \leq \phi f \text{ en } [0, T] \text{ y } f(0) = 0$$

entonces

$$f \equiv 0 \text{ en } [0, T]$$

1.2. Espacios de Sobolev

También es necesario definir el concepto de espacios de Sobolev, ya que será un concepto que aparecerá de forma continua en este trabajo, cobrando una gran importancia a lo largo del mismo.

Definición 1.7 (Espacios de Sobolev). *Un espacio de Sobolev es un subespacio vectorial de los espacios L^p (mencionados en la sección 1.1) ya que, dado $\Omega \in \mathbb{R}^n$, se define el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como el conjunto de funciones $u \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$ cuyas derivadas de hasta orden m pertenecen a L^p .*

En este trabajo, se denotará por H^m si $p = 2$. Es decir, siempre que el espacio de Sobolev sea de la forma $W^{m,2}(\Omega)$ será denotado como H^m .

Una desigualdad que va a ser utilizada en varias ocasiones (introducida en [8]) es la siguiente:

Lema 1.7 (Desigualdad de Sobolev). *Sea $u \in H^s$ con $0 < s < \frac{1}{2}$, entonces para toda p que verifique*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - s$$

existe una constante C tal que se verifica

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|u\|_{H^s}$$

Además, conviene introducir otra versión de la desigualdad de Sobolev, ya que serán utilizadas las dos a lo largo del trabajo. Esta desigualdad está presentada en [4].

Lema 1.8 (Desigualdad de Sobolev. 2ª versión). *Sea $\delta > 0$ y u una función tal que $u \in H^{\frac{1}{2}+\delta}$. Entonces, existe una constante C_δ tal que se verifica*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_\delta \|u\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}}$$

Por último, se mostrará la última de las desigualdades. Esta, es la conocida interpolación en espacios de Sobolev, que viene introducida en [4].

Lema 1.9 (Interpolación en espacios de Sobolev). *Dado $s > 0$, entonces existe una constante C , tal que para todo $v \in H^s(\Omega)$ y $0 < s' < s$,*

$$\|u\|_{H^{s'}} \leq C \cdot \|u\|_{L^2}^{1-\frac{s'}{s}} \cdot \|u\|_{H^s}^{\frac{s'}{s}}$$

Análisis del problema

En este capítulo, se va a profundizar en el modelo presentado en la introducción. Partiendo de él, se estudiará la existencia y unicidad de solución local para un sistema más simplificado.

2.1. Presentación del modelo final

Partiendo del sistema inicial (1), Majda [1] transforma dicho sistema en el sistema de ecuaciones (2.1), dado por:

$$\begin{aligned}
 \tau_t - v_x &= 0 \\
 v_t + p_x &= \nu (\tau^{-1} v_x)_x \\
 \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right)_t + (pv)_x &= v (\tau^{-1} \nu_x v)_x + (\lambda \tau^{-1} T_x)_x \\
 (Z)_t &= -K \phi(T) Z + (dZ_x)_x
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\tau = \frac{1}{\rho}$ y v la velocidad del fluido.

Además, se debe recalcar el valor de algunas funciones y variables. Ente ellas, se tiene a $\phi(T)$, que ayudará a evitar la dificultad que supone el “límite frío”. Además, se presenta el valor de la variable e , que representa la energía interna por unidad de masa tanto de los gases no quemados como de los gases quemados. Esta variable tiene la forma:

$$e \equiv Z e_0 + (1 - Z) e_1 = \frac{1}{\gamma - 1} T + g_1 + Z (g_0 - g_1) \tag{2.2}$$

En este caso, solo se considera reacciones exotérmicas, por lo que la energía liberada $q_0 \equiv g_0 - g_1$ satisface $q_0 > 0$.

Ahora bien, centrándose en el sistema (2.1), se observa que la primera ecuación, $\tau_t - v_x = 0$, se puede despejar de tal manera que τ sea una función en términos de v :

$$\tau(x, t) = \int_0^t v_x(x, s) ds + \tau(x, 0)$$

De la misma manera, se utiliza la segunda igualdad para expresar p en función de τ y v y, por ende, en función de v . Entonces, se aprecia que si se obtiene la función v , se puede conocer de forma directa τ y p . Por consiguiente, de forma inmediata se ve que las características esenciales del sistema (2.1), que era el objeto de estudio inicial, están codificadas en las dos últimas ecuaciones ya que ambas ecuaciones las podemos expresar en términos de Z y v .

Es por ello que Majda introdujo en [1] un sistema simplificado. Este sistema es el que se va a analizar matemáticamente, ya que captura las principales características que el modelo

inicial. Sin pérdida de generalidad, se puede presentar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(u + q_0 Z)_t + (f(u))_x &= \beta u_{xx} \\ Z_t &= -\phi(u)Z\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde se mantiene la ecuación cinética en (2.1), ya que sigue teniendo transporte, pero ignorando la difusión de especies (término en el que aparecía d en el sistema (2.1)), manteniendo el mecanismo esencial de transferencia de energía, modelando los efectos no lineales del fluido usando $f(u)$. Además, se agrupan los efectos de la conducción de calor y la viscosidad en un solo término de difusión, βu_{xx} . En este caso, las funciones $f(u)$ y $\phi(u)$ serán:

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad \phi(u) = e^{-1/u}, \quad u \geq 0\tag{2.4}$$

Por lo que, sustituyendo en el sistema (2.3), el sistema final de estudio es el siguiente:

$$\begin{aligned}(u + q_0 Z)_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x &= \beta u_{xx} \\ Z_t &= -e^{-1/u}Z \\ u(x, 0) &= u_0(x) > 0 \\ Z(x, 0) &= Z_0(x) \geq 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

$x \in [-\pi, \pi]$ con condiciones de borde periódicas, $t \in [0, T], T > 0$

Cabe destacar que las soluciones de u y Z del sistema (2.5) no están relacionadas con las soluciones del sistema (2.1), ya que, pese a que mantienen ciertas características, los sistemas de estudio no son equivalentes.

Por otro lado, se observa que, dentro del sistema (2.5), la ecuación

$$Z_t(x, t) = -e^{-\frac{1}{u(x,t)}} \cdot Z(x, t)\tag{2.6}$$

hace que dicho sistema sea no-local en tiempo. De forma directa, se puede resolver la ecuación (2.6), obteniendo

$$Z(x, t) = Z_0(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds}\tag{2.7}$$

A continuación, sustituyendo esta solución en la ecuación correspondiente a u_t en el sistema de estudio (2.5), se logra

$$u_t = -u \cdot u_x + \beta u_{xx} + e^{-1/u} \cdot q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds}\tag{2.8}$$

donde se puede observar la no-localidad mencionada anteriormente.

2.2. Estudio del problema (2.5)

En esta sección, se estudiará la existencia de soluciones para las ecuaciones de (2.5). En concreto, se debe estudiar la solución de $u(x, t)$, ya que la solución de $Z(x, t)$ es conocida y ya ha quedado expuesta en (2.7), por lo que existirá siempre que lo haga la solución $u(x, t)$. Se llevará a cabo el estudio de la misma utilizando el clásico método de energía desarrollado por Leray en 1934.

2.2.1. Resultado principal y metodología

El resultado principal que se va a tratar de resolver a lo largo el capítulo es el siguiente:

Teorema 2.1 (Resultado principal). *Dados $u_0 > 0$ y $Z_0 \geq 0$ tal que $(u_0, Z_0) \in H^3 \times H^3$, entonces existe $t > 0$ tal que existe una única solución local $(u, Z) \in C([0, t], H^3 \times H^3)$.*

Para llegar a demostrar este teorema, se va a utilizar el método de energía que ha sido mencionado antes. Concretamente, se define

$$E[u](t) = \|u(t)\|_{H^3}^2 + y(t) \quad (2.9)$$

donde

$$y(t) = \frac{1}{m(t)} \text{ con } m(t) = \min_x u(x, t)$$

Se observa que $E(t)$ es la suma de una cantidad integral junto con una cantidad puntual. El objetivo es garantizar que $E(t)$ está acotada, ya que, para una determinada función $u(x, t)$, si $E[u](t)$ está acotada, sus dos sumandos, por ser positivos (como se verá más adelante con el término $y(t)$), están acotados también. Además, por el segundo término de la suma, se sabe que la función $u(x, t)$ es positiva por el hecho de que si $y(t)$ está acotada, $m(t) > 0$ y, por lo tanto, $u(x, t) > 0$. Por otro lado, si $E[u](t)$ está acotada, el primer término está acotado también, luego tanto u como u_{xxx} pertenecen a L^2 .

En primer lugar, el objetivo inicial fue obtener una desigualdad diferencial para la derivada

$$\frac{d}{dt} E[u](t) = \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} y(t) \quad (2.10)$$

del tipo

$$\frac{d}{dt} E[u](t) \leq C(E(t) + 1)$$

con $C \in \mathbb{R}$. Sin embargo, debido a la no-localidad en tiempo presente en el problema, es necesario definir la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}[u] = \sup_{t \leq T} (\|u(t)\|_{H^3}^2 + y(t)) = \sup_{t \leq T} E[u](t) \quad (2.11)$$

Para $\mathcal{E}(u)$ se conseguirá una desigualdad polinómica del tipo

$$\mathcal{E} \leq C + t\mathcal{P}(\mathcal{E})$$

lo que permitirá obtener un tiempo uniforme de existencia.

Luego, en la próxima sección, se realizarán estimaciones de energía para lograr acotar los diversos sumandos. Estos, serán necesarios para demostrar la existencia de solución.

2.2.2. Estimaciones de energía

Una vez enunciada la metodología y el resultado principal, se van a realizar las estimaciones de energía con el objetivo de demostrar la existencia de solución local. En esta sección, se va a asumir que hay una solución regular y, siempre que el lector vea normas en L^p , si no se especifica en que variable es, será en la variable x .

Recordando que la ecuación de la función $Z(x, t)$ (descrita en (2.6)) tiene una solución directa (como se ve en (2.7)), este capítulo se va a centrar en la obtención de las acotaciones de la función $u(x, t)$. En primer lugar, se acotará

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2$$

partiendo de la ecuación de la u en el sistema (2.5) junto con la sustitución de la expresión (2.7), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_t \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} u \left(-uu_x + \beta u_{xx} + q_0 \cdot e^{-1/u} \cdot Z_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u} \, ds} \right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (u^3)_x \, dx + \beta \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_{xx} \, dx + \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} \, ds} \, dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

donde I_1 , I_2 e I_3 son los sumandos de la última igualdad, nombrados en orden de posición. Estos tres sumandos, son con los que se debe trabajar para acotar la norma L^2 de u . Se empezará acotando I_1 :

$$I_1 = -\frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (u^3)_x \, dx = 0$$

ya que, por el teorema fundamental de cálculo, como u es una función periódica, su valor al cubo es el mismo en $-\pi$ que en π y, por tanto, el resultado es 0.

La siguiente acotación será la de I_2 :

$$I_2 = \beta \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_{xx} \, dx = \beta \cdot u \cdot u_x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \beta \int_{-\pi}^{\pi} (u_x)^2 \, dx = -\beta \int_{-\pi}^{\pi} (u_x)^2 \, dx \leq 0$$

ya que β es una constante estrictamente positiva.

En la última igualdad, el primer término es 0 ya que como u es una función periódica, u_x también lo es, luego el producto de ambas también, y, por ende, razonando de forma análoga a la de I_1 , su valor es 0.

Finalmente, se tiene que acotar I_3 . Para ello, se utilizará la desigualdad de Hölder (Lema 1.1).

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} \, ds} \, dx \leq \|u\|_{L^2} \cdot \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \cdot \|e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} \, ds}\|_{L^\infty}$$

Entonces, es necesario acotar cada uno de los términos de I_3 . En cuanto al primero de ellos, no es relevante ya que es la cantidad que está siendo acotada. Centrándose en el segundo término, al ser el dato inicial multiplicado por una constante, estará acotado por una cantidad arbitraria sin que importe su valor, solamente que este acotado. Por ende, es necesario enfocarse solo en el tercer término.

Para acotar dicho término, hay que evitar el caso en el que $u = 0$. Por ello, se define

$$\min_{x \in (-\pi, \pi)} u(x, t) = m(t)$$

Entonces, se define $m(t) = u(x_t, t)$, donde se denota x_t como el punto x donde se alcanza el mínimo para cada t . Antes de continuar, se debe demostrar que la función $m(t)$ tiene derivada y verifica

$$\frac{d}{dt}m(t) = u_t|_{x_t}$$

Esta igualdad no es obvia ya que derivando $m(t)$ se tiene

$$\frac{d}{dt}m(t) = u_t(x_t, t) + u_x(x_t, t) \cdot x'_t$$

donde la trayectoria del mínimo x_t no es necesariamente continua y, por lo tanto, no se puede hablar de su derivada. Por ello, se demostrará en primer lugar que $m(t)$ es Lipschitz. Por un lado, se tiene

$$\begin{aligned} m(t) - m(s) &= \min_x u(x, t) - \min_x u(x, s) = u(x_t, t) - u(x_s, s) \\ &= u(x_t, t) - u(x_t, s) + u(x_t, s) - u(x_s, s) \end{aligned}$$

y, como $u(x_s, s)$ es menor que $u(x_t, s)$ por darse en x_s el mínimo en el instante de tiempo s , se tiene

$$\begin{aligned} \min_x u(x, t) - \min_x u(x, s) &\geq u(x_t, t) - u(x_t, s) \\ &\geq \partial_t u(x_t, \xi)(t - s) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da por la desigualdad de derivada. Ahora, denotando por

$$L = \max_y \max_{\xi} |\partial_t u(y, \xi)|$$

se da:

$$\min_x u(x, t) - \min_x u(x, s) \geq -L(t - s)$$

Razonando de manera análoga, pero teniendo en cuenta que $u(x_t, t)$ es menor que $u(x_s, t)$, resulta

$$\begin{aligned} m(t) - m(s) &= \min_x u(x, t) - \min_x u(x, s) = u(x_t, t) - u(x_s, s) \\ &= u(x_t, t) - u(x_s, t) + u(x_s, t) - u(x_s, s) \\ &\leq \partial_t u(x_s, \bar{\xi})(t - s) \\ &\leq L(t - s) \end{aligned}$$

Entonces, se tiene

$$|m(t) - m(s)| \leq L|t - s|$$

por lo que se ha demostrado que $m(t)$ es Lipschitz. Ahora, usando el teorema de Rademacher, se tiene que $m(t)$ es diferenciable en casi todo punto. Entonces, usando que en x_t se encuentra el mínimo, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t) &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{m(t + h_j) - m(t)}{h_j} = \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{u(x_{t+h_j}, t + h_j) - u(x_t, t)}{h_j} \\ &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{u(x_{t+h_j}, t + h_j) \pm u(x_t, t + h_j) - u(x_t, t)}{h_j} \\ &\geq \partial_t u(x_t, t) \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t) &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{m(t - h_j) - m(t)}{-h_j} = \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{u(x_{t-h_j}, t - h_j) - u(x_t, t)}{-h_j} \\ &= \lim_{h_j \rightarrow 0} \frac{u(x_{t-h_j}, t - h_j) \pm u(x_t, t - h_j) - u(x_t, t)}{-h_j} \\ &\leq \partial_t u(x_t, t) \end{aligned}$$

Se concluye entonces que

$$\frac{d}{dt}m(t) = \partial_t u(x_t, t)$$

Luego, una vez demostrada la igualdad, sustituyendo $u_t|_{x_t}$ con la ecuación (2.8), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t) &= u_t|_{x_t} \\ &= -u \cdot u_x|_{x_t} + \beta \cdot u_{xx}|_{x_t} + e^{-1/m(t)} \cdot q_0 \cdot Z_0|_{x_t} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/m(s)} ds} \\ &\geq e^{-1/m(t)} \cdot q_0 \cdot Z_0|_{x_t} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/m(s)} ds} \end{aligned} \quad (2.12)$$

ya que, por darse en x_t el mínimo, cuando se evalúa u_x en x_t es 0 y $u_{xx}|_{x_t} \geq 0$. Se puede observar que es posible realizar una acotación inferior de manera sencilla, debido a que las exponenciales siempre son positivas, q_0 es una constante estrictamente positiva y, recordando lo mencionado en la introducción, Majda (en [1]) argumenta que la variable Z representa la fracción de masa del gas no quemado, luego ha de ser positivo. Es por ello que $Z_0(x_t) \geq 0$, luego se tiene

$$\frac{d}{dt}m(t) \geq 0$$

lo que quiere decir que $m(t)$ es creciente, es decir, $u(x_t, t)$ es creciente, con lo que se puede asegurar que

$$0 < u(x_0, 0) \leq u(x_t, t)$$

y, por darse $\min_{x \in (-\pi, \pi)} u(x, t) = u(x_t, t)$, se tiene

$$0 < u(x_0, 0) \leq u(x, t)$$

con lo que se puede afirmar

$$\frac{1}{u(x, t)} \leq \frac{1}{u(x_0, 0)}$$

e invirtiendo la desigualdad al cambiar de signo, se tiene

$$-\frac{1}{u(x_0, 0)} \leq -\frac{1}{u(x, t)}$$

Por consiguiente, dicha desigualdad certifica que la expresión no tiende a infinito y sea menor que 0, dado que $u(x, t)$ es siempre positivo. Por lo tanto, el término puede ser acotado de la siguiente manera:

$$\|e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds}\|_{L^\infty} \leq e^0 \cdot e^{-t \cdot e^0} \leq 1$$

Reuniendo los cálculos realizados, se obtiene la siguiente acotación:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u(t)\|_{L^2} \cdot \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \leq E^{\frac{1}{2}} \cdot \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \quad (2.13)$$

Otro de los sumandos de $E[u](t)$ que se debe acotar es $y(t)$. Se tiene que

$$y(t) = \frac{1}{m(t)}$$

con lo que derivando la expresión se obtiene

$$y'(t) = -\frac{1}{m^2(t)} \cdot m'(t)$$

A continuación, dividiendo la desigualdad (2.12) entre $m^2(t)$ e invirtiéndola se adquiere:

$$y'(t) \leq -(y(t))^2 \cdot e^{-y(t)} \cdot q_0 \cdot Z_0(x_t) \cdot e^{\int_0^t e^{-y(s)} ds}$$

que, razonando de forma análoga a la anterior, se logra acotar ya que tanto $y^2(t)$ como $Z_0(x_t)$ son mayores o iguales que 0 y las exponenciales son positivas. Asimismo, q_0 es una constante estrictamente positiva, por lo que resulta que

$$y'(t) \leq 0$$

Por lo tanto, ya se tienen acotadas tanto $\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2$ como $y'(t)$, por lo que solo falta trabajar con un término para poder hacer una acotación de $\mathcal{E}[u]$. Dicho término es $\frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2$, el cual se estudiará ahora.

Multiplicando la ecuación (2.8) por $-\partial_x^6 u$, se tiene

$$-\partial_x^6 u \cdot u_t = \partial_x^6 u \cdot u \cdot u_x - \partial_x^6 u \cdot \beta u_{xx} - \partial_x^6 u \cdot e^{-1/u} \cdot q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds}$$

A continuación, integrando respecto a x , se halla:

$$\begin{aligned} -\int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u_t \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u \cdot u_x \, dx - \beta \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u_{xx} \, dx \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot e^{-1/u} \cdot q_0 \cdot Z_0(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds} \, dx \end{aligned}$$

En primer lugar, se abordará la parte izquierda de la igualdad. Integrando por partes 4 veces, se concluye:

$$\begin{aligned}
-\int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u_t \, dx &= -u_{xxxxx} \cdot u_t|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxxx} \cdot \partial_t u_x \, dx \\
&= u_{xxxx} \cdot \partial_t u_x|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} \cdot \partial_t u_{xx} \, dx \\
&= -u_{xxx} \cdot \partial_t u_{xx}|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxx} \cdot \partial_t u_{xxx} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

donde los términos de borde son 0 por ser tanto u como sus derivadas parciales funciones periódicas. Luego, se verifica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u \cdot u_x \, dx - \beta \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u_{xx} \, dx \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot e^{-1/u} \cdot q_0 \cdot Z_0(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds} \, dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

donde hay que acotar cada una de las integrales I_1, I_2 y I_3 .

Pues bien, se empezará por I_1 :

$$\begin{aligned}
I_1 &= u_{xxxxx} \cdot u \cdot u_x|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxxx} \cdot (u_x^2 + u \cdot u_{xx}) \, dx \\
&= -u_{xxxx} \cdot (u_x^2 + u \cdot u_{xx})|_{-\pi}^{\pi} \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} \cdot (2 \cdot u_x \cdot u_{xx} + u_x \cdot u_{xx} + u \cdot u_{xxx}) \, dx
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Hölder (Lema 1.1), la desigualdad de Young (Lema 1.4 con $\epsilon > 0$), se tiene

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2} \|3 \cdot u_x \cdot u_{xx}\|_{L^2} + \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2} \|u \cdot u_{xxx}\|_{L^2} \\
&\leq 2\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|3 \cdot u_x \cdot u_{xx}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|u \cdot u_{xxx}\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{9}{4\epsilon} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 \|u_{xx}(t)\|_{L^\infty}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|u(t)\|_{L^\infty}^2 \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Por último, se aplica la desigualdad de Sobolev (Lema 1.8) y se acota en base a la función E .

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 2\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_1 \|u_x(t)\|_{L^2}^2 \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_2 \|u_x(t)\|_{L^2}^2 \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_1 E^2 + C_2 E^2 \\
&\leq 2\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C E^2
\end{aligned}$$

Una vez acotada I_1 , se tiene que acotar los otros dos términos restantes. En este caso, se empezará, por ejemplo, con I_2 .

$$\begin{aligned} I_2 &= -\beta \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u_{xx} \, dx = -\beta \cdot u_{xxxxx} \cdot u_{xx}|_{-\pi}^{\pi} + \beta \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxxx} \cdot u_{xxx} \, dx \\ &= \beta \cdot u_{xxxx} \cdot u_{xxx}|_{-\pi}^{\pi} - \beta \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx}^2 \, dx \\ &= -\beta \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

sabiendo que todos los términos de borde vuelven a ser nulos por ser funciones periódicas.

Y, por último, se tiene que acotar el sumando restante, I_3 . Para facilitar la lectura, se obviarán los términos de borde ya que siempre son 0 por tratarse de funciones periódicas. Integrando por partes I_3 , se tiene:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxxx} \cdot q_0 \cdot Z_0(x) e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right) dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxxx} \cdot q_0 \cdot Z_0'(x) e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} dx \end{aligned}$$

y, de nuevo, integrando por partes cada uno de los dos términos, resulta:

$$\begin{aligned} I_3 &= -2 \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} \cdot q_0 \cdot Z_0'(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right) dx \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} \cdot q_0 \cdot Z_0(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right)^2 dx \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} \cdot q_0 \cdot Z_0(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \cdot \left(-\frac{2u_x^2}{u^3} + \frac{u_{xx}}{u^2} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left(-\frac{2e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)^2}{u(x,s)^3} + \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)^2}{u(x,s)^4} + \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_{xx}(x,s)}{u(x,s)^2} \right) ds \right) dx \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} \cdot q_0 \cdot Z_0''(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} dx \end{aligned}$$

En este punto, se aplica la desigualdad de Hölder (Lema 1.1) para obtener las normas deseadas y, posteriormente, se aplica la desigualdad de Young generalizada (Lema 1.4) para poder simplificar los términos. Además, el lector observará la aparición de términos denotados por A_1, A_2, A_3 y A_4 . Dichos términos, simplemente se establecen para facilitar la lectura y han sido definidos por orden de aparición en la desigualdad. Se puede apreciar lo mencionado en las siguientes líneas:

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq 2\|u_{xxxx}(t)\|_{L^2} \cdot \left\| q_0 \cdot Z'_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right) \right\|_{L^2} \\
&+ \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2} \cdot \left\| q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right) \right\|_{L^2}^2 \\
&+ \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2} \cdot \left\| q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \cdot \left(-\frac{2u_x^2}{u^3} + \frac{u_{xx}}{u^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^t \left(-\frac{2e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)^2}{u(x,s)^3} + \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)^2}{u(x,s)^4} + \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_{xx}(x,s)}{u(x,s)^2} \right) ds \right) \right\|_{L^2} \\
&+ \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2} \cdot \left\| q_0 \cdot Z'_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \right\|_{L^2} \\
&\leq 5\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4
\end{aligned}$$

Es en este término donde se debe usar \mathcal{E} por la aparición de las integrales en tiempo dentro de la norma. En las siguientes líneas, conviene sustituir el valor de ϵ por $\epsilon = \beta/7$ con la finalidad de hacer desaparecer el término $\|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}$ cuando se junten las distintas acotaciones I_1, I_2 e I_3 . Además, cabe recalcar que la notación que el lector se encontrará en las siguientes líneas como $\|\cdot\|_{L_{x,t}^\infty}$, significa que se realiza la norma infinito tanto en la variable x como en la variable t .

Pues bien, se acotarán a continuación los términos A_1, A_2, A_3 y A_4 por separado para su posterior agrupación. Cabe destacar que $C_i \in \mathbb{R}^+$ y que, aunque se aprecien las mismas letras a lo largo de las acotaciones, son coeficientes que pueden ir cambiando línea a línea. En primer lugar, se acota A_1 :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{7}{2\beta} \left\| q_0 \cdot Z'_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \cdot \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} \cdot u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right) \right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{7}{2\beta} \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot \left\| \frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} \cdot u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq \frac{7}{2\beta} \cdot \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot \left\| u_x \cdot y^2(t) - \int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} \cdot u_x(x,s) \cdot y^2(s) ds \right\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq \frac{7}{2\beta} \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \cdot \left(\|u_x\|_{L^\infty}^2 + \left\| \int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} \cdot u_x(x,s) ds \right\|_{L^\infty}^2 \right) \\
&\leq \frac{7}{2\beta} \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \left(\|u_x(t)\|_{L^\infty}^2 + t^2 \|u_x\|_{L_{x,t}^\infty}^2 \right) \\
&\leq C \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \cdot (C_1 E + C_2 t^2 \mathcal{E})
\end{aligned}$$

donde, de nuevo, se ha utilizado las desigualdad de Hölder (lema 1.2), la desigualdad de Sobolev (lema 1.8) y la acotación de $\frac{1}{u}$ mediante $y(0)$ junto con la definición de E y \mathcal{E} .

A continuación, se acota de manera análoga A_2 :

$$A_2 = \frac{7}{4\beta} \left\| q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right) \right\|_{L^2}^2$$

y, utilizando la desigualdad de Hölder generalizada (lema 1.2), la desigualdad de Sobolev (lema 1.8) y, como en el caso anterior, teniendo en cuenta las definiciones de E y \mathcal{E} y que la norma de la integral es menor o igual que la integral de la norma (ver [8]), se tiene

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \frac{7}{4\beta} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot \left\| \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{u(x,s)}} u_x(x,s)}{u(x,s)^2} ds \right) \right\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \frac{7}{4\beta} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot \left\| \left(u_x \cdot y^2(0) - \int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} \cdot u_x(x,s) \cdot y^2(0) ds \right) \right\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \frac{7}{4\beta} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot \left\| 2(u_x \cdot y^2(0))^2 + 2 \left(y^2(0) \int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} \cdot u_x(x,s) ds \right) \right\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq C \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^8(0) \cdot \left(\|u_x(t)\|_{L^\infty}^4 + t^4 \|u_x\|_{L_{x,t}^\infty}^4 \right) \\ &\leq C \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^8(0) \cdot (C_1 E^2 + C_2 t^4 \mathcal{E}^2) \end{aligned}$$

El siguiente término en acotar es A_3 :

$$\begin{aligned} A_3 &\leq \frac{7}{4\beta} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \left\| -\frac{2u_x^2}{u^3} + \frac{u_{xx}}{u^2} - \int_0^t \left(-\frac{2u_x^2(x,s)}{u^3(x,s)} + \frac{u_x^2(x,s)}{u^4(x,s)} + \frac{u_{xx}(x,s)}{u^2(x,s)} \right) ds \right\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \frac{7}{4\beta} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \left\| -2u_x^2 \cdot y^3(0) + u_{xx} \cdot y^2(0) + \int_0^t 2u_x^2(x,s) \cdot y^3(0) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t u_x^2(x,s) \cdot y^4(0) ds - \int_0^t u_{xx}(x,s) \cdot y^2(0) ds \right\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \frac{7}{4\beta} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \left(4 \cdot y^6(0) \|u_x(t)\|_{L^\infty}^4 + y^4(0) \|u_{xx}(t)\|_{L^\infty}^2 + 4 \cdot y^6(0) \|u_x\|_{L_{x,t}^\infty}^4 \right. \\ &\quad \left. + y^8(0) \|u_x\|_{L_{x,t}^\infty}^4 + y^4(0) \|u_{xx}\|_{L_{x,t}^\infty}^2 \right) \\ &\leq C \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 (C_1 \cdot y^6(0) \cdot E^2 + C_2 \cdot y^4(0) \cdot E + C_3 \cdot y^6(0) \cdot \mathcal{E}^2 + C_4 \cdot y^8(0) \cdot \mathcal{E}^2 \\ &\quad + C_5 \cdot y^4(0) \cdot \mathcal{E}) \end{aligned}$$

donde se han utilizado los mismos procedimientos que en A_1 y A_2 .

Por último, se debe trabajar con A_4 . En este caso, es el término más fácil de acotar. Aplicando la desigualdad de Hölder generalizada (lema 1.2), se obtiene:

$$\begin{aligned} A_4 &\leq \frac{7}{4\beta} \|q_0 \cdot Z_0''\|_{L^2}^2 \left\| e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(x,s)}} ds - \frac{1}{u}} \right\|_{L^\infty}^2 \\ &\leq \frac{7}{4\beta} \|q_0 \cdot Z_0''\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Ahora, se deben recoger los términos en una sola acotación, teniendo en cuenta que el término $\|u_{xxx}\|_{L^2}$ ya no aparecerá debido al cambio de $\epsilon = \beta/7$ mencionado anteriormente.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 &\leq C_1 E^2 + C_2 \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \cdot (C_3 E + C_4 T^2 \mathcal{E}) \\
&\quad + C_5 \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^8(0) \cdot (C_6 E^2 + C_7 T^4 \mathcal{E}^2) \\
&\quad + C_8 \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot [C_9 \cdot y^6(0) \cdot E^2 + C_{10} \cdot y^4(0) \cdot E \\
&\quad + C_{11} \cdot y^6(0) \cdot \mathcal{E}^2 + C_{12} \cdot y^8(0) \cdot \mathcal{E}^2 + C_{13} \cdot y^4(0) \cdot \mathcal{E}] \\
&\quad + \frac{7}{4} \|q_0 \cdot Z''_0\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Luego, una vez obtenidas las diversas acotaciones de $\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2$ y $\frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2$, se puede abordar la acotación de $E[u](t)$ debido a su definición en (2.10), ya que

$$\frac{d}{dt} E[u](t) = \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} y(t)$$

y, como se ha visto en esta sección, $y'(t) \leq 0$, con lo que se tiene

$$\frac{d}{dt} E[u](t) \leq \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2$$

Con ello, se puede sustituir nuestras estimaciones de energía (definidas en (2.13) y (2.14)) en la anterior expresión. Para evitar mantener las constantes C_1, \dots, C_{13} se agruparán todos los términos en base a una única constante C tal que sea mayor que todas las constantes de los diferentes términos, quedando:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E[u](t) &\leq C \left[E^{\frac{1}{2}}(t) \cdot \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} + E^2(t) + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \cdot (E(t) + t^2 \mathcal{E}) \right. \\
&\quad + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^8(0) \cdot (E^2(t) + t^4 \mathcal{E}^2) + \frac{7}{4} \|q_0 \cdot Z''_0\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 (y^6(0) \cdot E^2(t) + y^4(0) \cdot E(t) + y^6(0) \cdot \mathcal{E}^2 \\
&\quad \left. + y^8(0) \cdot \mathcal{E}^2 + y^4(0) \cdot \mathcal{E}) \right]
\end{aligned}$$

Pero esta es una acotación de la derivada de E , por lo que se debe integrar para obtener una acotación de E . En las siguientes líneas, C es una nueva constante renombrada.

$$\begin{aligned}
E[u](t) &\leq C \left[E(0) + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \int_0^t E^{\frac{1}{2}}(s) ds + \int_0^t E^2(s) ds \right. \\
&\quad + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \cdot \left(\int_0^t E(s) ds + t^3 \cdot \mathcal{E} \right) \\
&\quad + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^8(0) \cdot \left(\int_0^t E^2(s) ds + t^5 \cdot \mathcal{E}^2 \right) + \|q_0 \cdot Z''_0\|_{L^2}^2 \cdot t \\
&\quad + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \left(y^6(0) \cdot \int_0^t E^2(s) ds + y^6(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot t \right. \\
&\quad \left. + y^4(0) \cdot \int_0^t E(s) ds + y^8(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot t + y^4(0) \cdot \mathcal{E} \cdot t \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

Tomando el supremo para $t \leq T$, sabiendo que $\sup_{t \leq T} E[u](t) = \mathcal{E}$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \leq C & \left[E(0) + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \cdot \mathcal{E}^{\frac{1}{2}} \cdot T + \mathcal{E}^2 \cdot T \right. \\ & + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \cdot (\mathcal{E} \cdot T + \mathcal{E} \cdot T^3) \\ & + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^8(0) \cdot (\mathcal{E}^2 \cdot T + \mathcal{E}^2 \cdot T^5) + \|q_0 \cdot Z''_0\|_{L^2}^2 \cdot T \\ & + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 (y^6(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot T + y^6(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot T \\ & \left. + y^4(0) \cdot \mathcal{E} \cdot T + y^8(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot T + y^4(0) \cdot \mathcal{E} \cdot T) \right] \end{aligned}$$

y, agrupando términos y redefiniendo C , resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \leq C & \left[E(0) + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \cdot \mathcal{E}^{\frac{1}{2}} \cdot T + \mathcal{E}^2 \cdot T \right. \\ & + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \cdot \mathcal{E} \cdot T (1 + T^2) \\ & + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^8(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot T \cdot (2 + T^4) + \|q_0 \cdot Z''_0\|_{L^2}^2 \cdot T \\ & + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^6(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot T \\ & \left. + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \cdot y^4(0) \cdot \mathcal{E} \cdot T \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se puede considerar que $T < 1$, con lo que, teniendo en cuenta esta restricción y, de nuevo, una agrupación de los términos y la modificación de C , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \leq C & \left[E(0) + \|q_0 \cdot Z''_0\|_{L^2}^2 + \left(\|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \right) \cdot y^4(0) \right. \\ & \left. \left[\mathcal{E}^{1/2} \cdot T + \mathcal{E}^2 \cdot T + \mathcal{E} \cdot T + y^4(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot T + y^2(0) \cdot \mathcal{E}^2 \cdot T \right] \right] \end{aligned}$$

Y, agrupando los coeficientes de \mathcal{E}^2 , se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \leq C & \left[E(0) + \|q_0 \cdot Z''_0\|_{L^2}^2 + \left(\|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \right) \cdot y^4(0) \right. \\ & \left. \left[\mathcal{E}^{1/2} \cdot T + \mathcal{E}^2 \cdot T \cdot (1 + y^2(0) + y^4(0)) + \mathcal{E} \cdot T \right] \right] \end{aligned}$$

A continuación, se aplica la desigualdad de Young (lema 1.3) con $\mathcal{E}^{1/2}$ y, recordando que $T < 1$ y que C es un coeficiente que va cambiando, se simplifica la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \leq C & \left[E(0) + \|Z''_0\|_{L^2}^2 + \left(\|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \right) \cdot y^4(0) \right. \\ & \left. \left[\left(\frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{1}{2} \right) \cdot T + \mathcal{E}^2 \cdot T \cdot (1 + y^2(0) + y^4(0)) + \mathcal{E} \cdot T \right] \right] \\ & \leq C \left[E(0) + \|Z''_0\|_{L^2}^2 + \left(\|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \right) \cdot y^4(0) \right] + \\ & C \left[\left(\|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} + \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 + \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 \right) \cdot y^4(0) \cdot (3 + y^2(0) + y^4(0)) \right. \\ & \left. \left[\mathcal{E} \cdot T + \mathcal{E}^2 \cdot T \right] \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, denotando como K la constante asociada al término independiente y como C la constante que multiplica a \mathcal{E} y \mathcal{E}^2 , se tiene:

$$\mathcal{E} \leq K + C \cdot T \cdot (\mathcal{E} + \mathcal{E}^2)$$

También se puede considerar la desigualdad de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}(1 - C \cdot T) \leq K + C \cdot T \cdot \mathcal{E}^2$$

y, asumiendo que $T < \frac{1}{2C}$, se verifica la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq 2K + 2C \cdot T \cdot \mathcal{E}^2 \\ \mathcal{E} &\leq \bar{K} + \bar{C} \cdot T \cdot \mathcal{E}^2 \end{aligned}$$

donde $\bar{K} = 2K$ y $\bar{C} = 2C$. Ahora, multiplicando ambos lados de la expresión por \bar{C} , resulta

$$\bar{C} \cdot \mathcal{E} \leq \bar{C} \cdot \bar{K} + \bar{C}^2 \cdot T \cdot \mathcal{E}^2$$

donde, denotando como $\mathcal{F} = \bar{C} \cdot \mathcal{E}$ y $\bar{\bar{K}} = \bar{C} \cdot \bar{K}$, se tiene la siguiente desigualdad

$$\mathcal{F} \leq \bar{\bar{K}} + \mathcal{F}^2 \cdot T$$

Acto seguido, se van a estudiar las raíces de la expresión cuadrática. Como $T > 0$, $\mathcal{F}^2 T + \bar{\bar{K}} - \mathcal{F}$ es una función convexa que, para un T suficientemente pequeño tendrá dos soluciones reales. Estas soluciones son

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4T\bar{\bar{K}}}}{2T}$$

En este trabajo, interesa la raíz menor, ya que es la solución más próxima a 0 para un T suficientemente pequeño. Recordando que $\mathcal{F} \leq \bar{\bar{K}} + \mathcal{F}^2 \cdot T$, para cierto $T > 0$, se cumplirá que $\mathcal{F} \leq 2\bar{\bar{K}}$ y, por lo tanto,

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4T\bar{\bar{K}}}}{2T} \leq 2\bar{\bar{K}}$$

Pudiendo reorganizar la expresión de la siguiente manera:

$$1 - 4T\bar{\bar{K}} \leq \sqrt{1 - 4T\bar{\bar{K}}}$$

Esta expresión se satisface siempre que $0 < 4T\bar{\bar{K}} \leq 1$, o lo que es lo mismo, es cierta para $0 < T \leq \frac{1}{4\bar{\bar{K}}}$, por lo que se han de limitar los valores posibles de T para nuestra expresión.

Por ello, para $0 < T \leq \min\left\{\frac{1}{4\bar{\bar{K}}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2C}\right\}$ se satisface

$$\mathcal{F} \leq 2\bar{\bar{K}}$$

y, por ende, se verifica que

$$\mathcal{E} \leq 2\bar{K}$$

2.2.3. Regularización del problema

En este, se diseñará un problema alternativo para el que se demostrará existencia de solución. En primer lugar, hay que introducir la función \mathcal{J}_ϵ , tal que \mathcal{J}_ϵ es el núcleo periódico del calor a tiempo $t = \epsilon$. Además, se va a denotar por “*” la convolución. A lo largo de las siguientes secciones, se usarán tanto las propiedades de la convolución como las propiedades de la convolución del núcleo del calor con la función u_ϵ que se pueden encontrar en [4].

Entonces, se define el problema regularizado

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_\epsilon = q_0 \cdot \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) \right) - \mathcal{J}_\epsilon * \left((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \cdot \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \right) \\ \quad + \beta \cdot (\mathcal{J}_\epsilon * \partial_x^2 (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) \\ \partial_t Z_\epsilon = -e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u}} \cdot Z_\epsilon \\ u_\epsilon(x, 0) = \mathcal{J}_\epsilon * u_0 \\ Z_\epsilon(x, 0) = \mathcal{J}_\epsilon * Z_0 \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Al presentar esta regularización del problema (2.16), se tiene que las estimaciones tomadas en la sección (2.2.2) son válidas para este problema también. Se puede ver de la siguiente manera:

$$\int u \cdot \mathcal{J}_\epsilon * f \, dx = \int \mathcal{J}_\epsilon * u \cdot f \, dx$$

por las propiedades de la convolución. Por ello, se puede pensar en las estimaciones realizadas en el apartado (2.2.2). Por ejemplo, en la estimación de

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2$$

se multiplicaba la expresión (2.8) por u . Una vez multiplicada por u , dentro de la integral aplicando la propiedad que acabamos de enunciar y, tras realizar el cambio $v = \mathcal{J}_\epsilon * u$, se obtiene la misma estimación que la calculada anteriormente. De manera análoga, se puede calcular la estimación de

$$\frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2$$

2.2.4. El problema regularizado está bien puesto

Para demostrar la existencia de solución de este nuevo problema regularizado, se va a aplicar el teorema de Picard. Como se ha mencionado en el capítulo 1, los espacios L^p son espacios de Banach, por lo que se puede introducir el teorema de Picard como se introduce en [4].

Teorema 2.2 (Teorema de existencia y unicidad de solución de Picard). *Sea $A \subseteq \mathbf{B}$ un abierto de un espacio de Banach \mathbf{B} y sea $F(X)$ una aplicación que satisface:*

1. $F(X)$ lleva A a \mathbf{B} .
2. F es localmente Lipschitz continua, es decir, para cualquier $X \in A$ existe un valor $K > 0$ y un abierto $U_X \subset A$ de X tal que

$$\|F(\tilde{X}) - F(\hat{X})\|_{\mathbf{B}} \leq L \|\tilde{X} - \hat{X}\|_{\mathbf{B}} \quad \text{para todo } \tilde{X}, \hat{X} \in U_X.$$

Entonces, para cualquier $X_0 \in A$, existe un tiempo T tal que la EDO

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad X|_{t=0} = X_0 \in A,$$

tiene una única solución local $X \in C^1[(-T, T); A]$.

En este caso, se define la función $F(u, Z)$ de la siguiente manera:

$$F(u, Z) = \begin{pmatrix} F^{(1)}(u, Z) \\ F^{(2)}(u, Z) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

con

$$F^{(1)}(u, Z) = q_0 \cdot \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) \right) - \mathcal{J}_\epsilon * \left((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \right) + \beta \cdot (\mathcal{J}_\epsilon * \partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon))$$

y

$$F^{(2)}(u, Z) = -e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u}} \cdot Z_\epsilon$$

Se tiene entonces que la función F está definida de tal manera que

$$F : H^3 \times H^3 \longrightarrow H^3 \times H^3$$

Entonces, se puede enunciar la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *La función F definida en la ecuación (2.17), para todo $u \in U \subset H^3$, $Z \in V \subset H^3$, es localmente Lipschitz con respecto a la norma de $H^3 \times H^3$.*

Demostración. Para demostrarlo solamente hay que ver que, dados $u, v \in U$ y $Z, W \in V$, se tiene que

$$\|F(u, Z) - F(v, W)\|_{H^3 \times H^3} \leq K \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3} \quad (2.18)$$

con $K > 0$.

En este caso, se define la norma en dicho espacio de la siguiente manera

$$\|F(u, Z) - F(v, W)\|_{H^3 \times H^3} = \left\| F^{(1)}(u, Z) - F^{(1)}(v, W) \right\|_{H^3} + \left\| F^{(2)}(u, Z) - F^{(2)}(v, W) \right\|_{H^3}$$

Para demostrar la expresión 2.18, se afrontan cada uno de los términos por separado.

$$\begin{aligned} \left\| F^{(1)}(u, Z) - F^{(1)}(v, W) \right\|_{H^3} &\leq \left\| F_1^{(1)}(u) - F_1^{(1)}(v) \right\|_{H^3} + \left\| F_2^{(1)}(u) - F_2^{(1)}(v) \right\|_{H^3} + \\ &\quad + \left\| F_3^{(1)}(u, Z) - F_3^{(1)}(v, W) \right\|_{H^3} \\ &\leq S_1 + S_2 + S_3 \end{aligned}$$

donde

$$F_1^{(1)}(u) = q_0 \cdot \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z \right) \right), \quad F_2^{(1)}(u) = \mathcal{J}_\epsilon * \left((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \right)$$

y

$$F_3^{(1)}(u, Z) = \beta \cdot (\mathcal{J}_\epsilon * \partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon))$$

De nuevo, abordando la acotación por sus distintos sumandos (S_1, S_2 y S_3), se va a ir subdividiendo las acotaciones para llegar a los términos deseados.

En primer lugar, se observa que

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\| q_0 \cdot \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) \right) - q_0 \cdot \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) \right) \right\|_{H^3} \\ &\leq q_0 \left\| \mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) - \mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \cdot W_\epsilon \right) \right\|_{H^3} \\ &\leq q_0 \left\| \mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) - \mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \cdot W_\epsilon \right) \pm \mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot W_\epsilon \right) \right\|_{H^3} \\ &\leq q_0 \left\| \mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot (Z_\epsilon - W_\epsilon) \right) + \mathcal{J}_\epsilon * \left(\left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \right) \cdot W_\epsilon \right) \right\|_{H^3} \\ &\leq q_0 \left\| \mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot (Z_\epsilon - W_\epsilon) \right) \right\|_{H^3} + q_0 \left\| \mathcal{J}_\epsilon * \left(\left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \right) \cdot W_\epsilon \right) \right\|_{H^3} \end{aligned}$$

Aprovechando ahora las propiedades de la derivación en las convoluciones con el núcleo del calor y aplicando la desigualdad de Hölder (lema 1.2) se tiene

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C_1(q_0, \epsilon) \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot (Z_\epsilon - W_\epsilon) \right\|_{L^2} + C_2(q_0, \epsilon) \left\| \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \right) \cdot W_\epsilon \right\|_{L^2} \\ &\leq C_1(q_0, \epsilon) \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{L^\infty} \|Z_\epsilon - W_\epsilon\|_{L^2} + C_2(q_0, \epsilon) \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \right\|_{L^2} \|W_\epsilon\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

A su vez, se acotan ambas partes. Por un lado,

$$\begin{aligned} C_1(q_0, \epsilon) \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{L^\infty} \|Z_\epsilon - W_\epsilon\|_{L^2} &\leq C_1(q_0, \epsilon) \|Z_\epsilon - W_\epsilon\|_{L^2} \\ &\leq C_1(q_0, \epsilon) (\|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - W_\epsilon\|_{L^2}) \\ &\leq C_1(q_0, \epsilon) (\|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^3} + \|Z_\epsilon - W_\epsilon\|_{H^3}) \\ &\leq C_1(q_0, \epsilon) \|(u_\epsilon, Z_\epsilon) - (v_\epsilon, W_\epsilon)\|_{H^3 \times H^3} \end{aligned}$$

por otro lado, estudiando el otro término y recordando la definición de $W(x, t)$ y el teorema fundamental del cálculo, se obtiene que

$$\begin{aligned} C_2(q_0, \epsilon) \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \right\|_{L^2} \|W_\epsilon\|_{L^\infty} &\leq C_2^*(q_0, \epsilon, W_0) \left\| \int_0^1 \partial_\lambda \left[e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon} \lambda - (1-\lambda) \frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \right] d\lambda \right\|_{L^2} \\ &\leq C_2^*(q_0, \epsilon, W_0) \left\| \int_0^1 e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon} \lambda - (1-\lambda) \frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} d\lambda \right\|_{L^\infty} \\ &\quad \left\| \frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon} - \frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon} \right\|_{L^2} \\ &\leq C_2^*(q_0, \epsilon, W_0) \left\| \frac{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon - \mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon \cdot \mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon} \right\|_{L^2} \\ &\leq \bar{C}_2(q_0, \epsilon, W_0, \bar{K}) \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} \\ &\leq \bar{C}_2(q_0, \epsilon, W_0, \bar{K}) (\|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - W_\epsilon\|_{L^2}) \\ &\leq \bar{C}_2(q_0, \epsilon, W_0, \bar{K}) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3} \end{aligned}$$

Con lo que, juntando ambas acotaciones, se puede asegurar que

$$S_1 = \left\| F^{(1)}(u, Z) - F^{(1)}(v, W) \right\|_{H^3} \leq \bar{C}_1(q_0, \epsilon, W_0) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3}$$

donde

$$\bar{C}_1(q_0, \epsilon, W_0) = \max \{ C_1(q_0, \epsilon), \bar{C}_2(q_0, \epsilon, W_0) \}$$

En segundo lugar, centrándose en el segundo sumando se logra

$$\begin{aligned} S_2 &= \|\mathcal{J}_\epsilon * ((\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)) - \mathcal{J}_\epsilon * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon))\|_{H^3} \\ &\leq C(\epsilon) \|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) - (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{H^3} \\ &\leq C(\epsilon) \|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) - (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \pm (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{H^3} \\ &\leq C(\epsilon) \|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * (v_\epsilon - u_\epsilon)) + (\mathcal{J}_\epsilon * (v_\epsilon - u_\epsilon)) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{H^3} \\ &\leq C(\epsilon) \|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * (v_\epsilon - u_\epsilon))\|_{H^3} + C(\epsilon) \|(\mathcal{J}_\epsilon * (v_\epsilon - u_\epsilon)) \cdot \partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{H^3} \end{aligned}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la siguiente desigualdad, que se puede encontrar en [4]:

$$\|f \cdot g\|_{H^3} \leq K \|f\|_{H^3} \cdot \|g\|_{H^3} \quad \text{con } K > 0 \quad (2.19)$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} S_2 &\leq C(\epsilon) (\|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)\|_{H^3} \cdot \|\partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * (v_\epsilon - u_\epsilon))\|_{H^3} + \|(\mathcal{J}_\epsilon * (v_\epsilon - u_\epsilon))\|_{H^3} \cdot \|\partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{H^3}) \\ &\leq C_3(\bar{K}, \epsilon) \cdot \|\partial_x(\mathcal{J}_\epsilon * (v_\epsilon - u_\epsilon))\|_{H^3} + C_4(\bar{K}, \epsilon) \cdot \|(\mathcal{J}_\epsilon * (v_\epsilon - u_\epsilon))\|_{H^3} \\ &\leq C_3^*(\bar{K}, \epsilon) \cdot \|v_\epsilon - u_\epsilon\|_{H^3} + C_4(\bar{K}, \epsilon) \cdot \|v_\epsilon - u_\epsilon\|_{H^3} \end{aligned}$$

Renombrando de la siguiente manera las constantes

$$C_2(\bar{K}, \epsilon) = \text{máx} \{C_3^*(\bar{K}, \epsilon), C_4(\bar{K}, \epsilon)\}$$

se concluye que

$$\begin{aligned} S_2 &= \left\| F_2^{(1)}(u) - F_2^{(1)}(v) \right\|_{H^3} \leq C_2(\bar{K}, \epsilon) \cdot \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^3} \\ &\leq C_2(\bar{K}, \epsilon) \cdot (\|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^3} + \|Z_\epsilon - W_\epsilon\|_{H^3}) \\ &\leq C_2(\bar{K}, \epsilon) \cdot \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3} \end{aligned}$$

Por último, para acabar con el primer sumando de la expresión inicial, se tiene la siguiente acotación

$$\begin{aligned} S_3 &= \left\| F_3^{(1)}(u) - F_3^{(1)}(v) \right\|_{H^3} = \left\| \beta \cdot (\mathcal{J}_\epsilon * \partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) - \beta \cdot (\mathcal{J}_\epsilon * \partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)) \right\|_{H^3} \\ &= \beta \left\| \mathcal{J}_\epsilon * (\partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - \partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)) \right\|_{H^3} \\ &\leq C_3(\beta, \epsilon) \left\| \partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon - \mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \right\|_{H^3} \\ &\leq C_3(\beta, \epsilon) \left\| \mathcal{J}_\epsilon * (u_\epsilon - v_\epsilon) \right\|_{H^5} \\ &\leq C_3(\beta, \epsilon) \cdot \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^3} \\ &\leq C_3(\beta, \epsilon) \cdot (\|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{H^3} + \|Z_\epsilon - W_\epsilon\|_{H^3}) \\ &\leq C_3(\beta, \epsilon) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3} \end{aligned}$$

Finalmente, juntando todos los resultados se obtiene:

$$\left\| F^{(1)}(u, Z) - F^{(1)}(v, W) \right\|_{H^3} \leq C(\epsilon, \beta, q_0, W_0, \bar{K}) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3}$$

con C definido por

$$C(\epsilon, \beta, q_0, W_0, \bar{K}) = \text{máx} \{ \bar{C}_1(q_0, \epsilon, W_0), C_2(\bar{K}, \epsilon), C_3(\beta, \epsilon) \}$$

Por otro lado, se tiene que acotar también el sumando asociado a la diferencia de la función $F^{(2)}$, que es el siguiente

$$\begin{aligned} \left\| F^{(2)}(u, Z) - F^{(2)}(v, W) \right\|_{H^3} &= \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \cdot W_\epsilon - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right\|_{H^3} \\ &= \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \cdot (W_\epsilon - Z_\epsilon) + \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right) \cdot Z_\epsilon \right\|_{H^3} \\ &\leq \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \cdot (W_\epsilon - Z_\epsilon) \right\|_{H^3} + \left\| \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right) \cdot Z_\epsilon \right\|_{H^3} \\ &\leq \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} \right\|_{H^3} \cdot \|W_\epsilon - Z_\epsilon\|_{H^3} + \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{H^3} \cdot \|Z_\epsilon\|_{H^3} \\ &\leq C_1(\epsilon, \bar{K}) \|W_\epsilon - Z_\epsilon\|_{H^3} + C(Z_0, \epsilon, \bar{K}) \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{H^3} \end{aligned}$$

En la última desigualdad, se ha hecho uso de la acotación de \mathcal{E} para la solución explícita de Z_ϵ . Por otro lado, el término de la diferencia de exponenciales es el que requiere de más estudio. Se tratará de manera individual:

$$\begin{aligned}
\left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{H^3} &\leq \left\| \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} \\
&+ \left\| \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^5} - \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^5} \right\|_{L^2} \\
&+ \left\| \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^4} - \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^4} \right\|_{L^2} \\
&+ \left\| \frac{3e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_{xx}}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^4} - \frac{3e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_{xx}}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^4} \right\|_{L^2} \\
&+ \left\| \frac{6e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_{xx}}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^3} - \frac{6e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_{xx}}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^3} \right\|_{L^2} \\
&+ \left\| \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_{xxx}}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^2} - \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_{xxx}}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^2} \right\|_{L^2} \\
&+ \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{L^2} \\
&\leq A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7
\end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ y A_7 son los siete términos que se deben acotar. Primero, se debe acotar A_7 ya que aparecerá en todos los demás términos.

$$\begin{aligned}
A_7 &= \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \int_0^1 e^{-\lambda \frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon} - (1-\lambda) \frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} d\lambda \right\|_{L^\infty} \cdot \left\| \frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon} - \frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon} \right\|_{L^2} \\
&\leq C(\bar{K}) \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} \\
&\leq C(\bar{K}) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3}
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Hölder generalizada (lema 1.2) y el teorema fundamental del cálculo.

En cuanto a los demás términos, se pueden acotar de manera similar todos ellos. Por ello, solo se mostrará la acotación de uno de ellos. A continuación se muestra, por ejemplo, la acotación de A_1 .

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\| \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \pm \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} \right\|_{L^2}
\end{aligned}$$

y, agrupando los términos y utilizando la desigualdad triangular (lema 1.5) y la de Hölder generalizada (lema 1.2) se tiene

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \left\| \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right) \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} + \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{L^\infty} \cdot \left\| \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} \\ &\leq C_1(\bar{K}) \left\| (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3 \right\|_{L^\infty} \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} \end{aligned}$$

donde se van a afrontar los términos

$$\left\| (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3 \right\|_{L^\infty} \text{ y } \left\| \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2}$$

por separado. Por otro lado, en el primer término aparece de nuevo A_7 , por lo que se puede sustituir con su acotación:

$$A_1 \leq \bar{C}_1(\bar{K}) \left\| (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3 \right\|_{L^\infty} \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} + \left\| \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2}$$

Ahora, se afrontan los términos mencionados anteriormente:

- En primer lugar:

$$\left\| (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3 \right\|_{L^\infty} \leq \left\| (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^3 \right\|_{H^2} \leq \left\| (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \right\|_{H^2}^3 \leq C(\epsilon) \|v_\epsilon\|_{L^2}^3 \leq C(\epsilon, \bar{K})$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Sobolev (lema 1.7) y, que H^2 es un álgebra de Banach, mediante la desigualdad dada en la ecuación 2.19.

- Por otro lado,

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left\| \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} \\ &= \left\| \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \pm \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} \\ &\leq C_1(\epsilon, \bar{K}) \left\| \frac{1}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{1}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} + C_2(\bar{K}) \left\| (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3 - (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3 \right\|_{L^2} \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha utilizado la anterior acotación. Por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6} - \frac{1}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} &= \left\| \frac{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6 - (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6}{(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6 (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6} \right\|_{L^2} \\ &\leq C(\bar{K}) \left\| (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^6 - (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)^6 \right\|_{L^2} \\ &\leq C(\bar{K}) \left\| \int_0^1 \partial_\lambda [\lambda (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) + (1 - \lambda) (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)]^6 d\lambda \right\|_{L^2} \\ &\leq \bar{C}(\bar{K}) \left\| \int_0^1 [\lambda (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) + (1 - \lambda) (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)]^5 d\lambda \right\|_{L^\infty} \\ &\quad \left\| (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - (\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) \right\|_{L^2} \\ &\leq \bar{C}(\bar{K}) \int_0^1 [\lambda \|(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{L^\infty} + (1 - \lambda) \|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)\|_{L^\infty}]^5 d\lambda \\ &\quad \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} \\ &\leq C^*(\bar{K}) \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} \end{aligned}$$

aplicando las desigualdades de Hölder generalizada y triangular (lemas 1.2, 1.5). De manera muy parecida, se acota el otro término:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x^3 - (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x^3\|_{L^2} &= \left\| \int_0^1 \partial_\lambda [\lambda(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x + (1-\lambda)(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x]^3 d\lambda \right\|_{L^2} \\ &\leq C \left\| \int_0^1 [\lambda(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x + (1-\lambda)(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x]^2 d\lambda \right\|_{L^\infty} \\ &\quad \|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon)_x - (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x\|_{L^2} \\ &\leq C(\epsilon, \bar{K}) \|(\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon) - (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{H^1} \\ &\leq \bar{C}(\epsilon, \bar{K}) \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} \end{aligned}$$

donde se han utilizado los mismos lemas.

Agrupando ahora todas las acotaciones y renombrando las constantes, se tiene

$$\begin{aligned} A_1 &\leq C_1(\epsilon, \bar{K}) \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} + C_2(\epsilon, \bar{K}) \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} + C_3(\epsilon, \bar{K}) \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^2} \\ &\leq C(\epsilon, \bar{K}) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3} \end{aligned}$$

siendo la constante C el máximo de las anteriores. Extrapolando esto a los otros sumandos, se obtendrá una acotación de la forma

$$\left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * v_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{H^3} \leq C(\epsilon, \bar{K}) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3}$$

Con ello, se tiene que, redefiniendo C

$$\left\| F^{(2)}(u, Z) - F^{(2)}(v, W) \right\|_{H^3} \leq C(\epsilon, \bar{K}, V) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3}$$

Por último, se demuestra la expresión (2.17) sumando las acotaciones de $F^{(1)}$ y $F^{(2)}$, junto con la redefinición de la constante C como el máximo de las constantes de las acotaciones de $F^{(1)}$ y $F^{(2)}$, se tiene:

$$\|F(u, Z) - F(v, W)\|_{H^3 \times H^3} \leq C(\epsilon, \beta, q_0, W_0, \bar{K}, V) \|(u, Z) - (v, W)\|_{H^3 \times H^3}$$

con lo que queda verificada y demostrada la proposición. \square

Entonces, una vez demostrado este resultado, se observa que quedan verificadas las hipótesis del teorema 2.2 (Teorema de existencia y unicidad de solución local), por lo que queda demostrada la existencia y unicidad de solución local. Ahora bien, se ha demostrado la existencia y unicidad de solución local en el problema regularizado, que no es el que se quería demostrar. Por ello, se introduce la siguiente sección.

2.2.5. Paso al límite del problema regularizado

Como se ha anticipado, en esta sección se extenderá el resultado del apartado anterior mediante el paso al límite para garantizar la existencia de solución.

Veremos que $u_\epsilon, Z_\epsilon \in C([0, T], L^2)$ forman una sucesión de Cauchy, es decir, que se cumple que para todo $k > 0$, existen dos parámetros $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que se cumple

$$\sup_{t \leq T} \text{ess} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} < k$$

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 &= - \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\epsilon * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) - \mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta))) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&\quad + \beta \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\epsilon * \partial_x^2 (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - \mathcal{J}_\delta * \partial_\delta^2 (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&\quad + q_0 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) - \mathcal{J}_\delta * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} \cdot Z_\delta \right) \right) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Ahora, se van a trabajar los distintos términos por separado. En primer lugar, se interviene I_1 para poder alcanzar el objetivo

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\epsilon * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) - \mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta))) \\
&\quad \pm \mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon)) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&= - \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\epsilon * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) - \mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon))) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon)) - \mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta))) (u_\epsilon - u_\delta) dx
\end{aligned}$$

donde hay que detenerse en la segunda integral (denotada por I_{11} para facilitar la lectura), ya que se tiene:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= - \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon)) - \mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta))) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&= - \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta)))) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&= - \int_{-\pi}^{\pi} ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta))) (\mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta)) dx
\end{aligned}$$

e integrando por partes y, posteriormente aplicando la desigualdad de Hölder (lema 1.1), se obtiene

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)) (\mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta))^2 dx \\
&\leq \|\partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)\|_{L^\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta))^2 dx \\
&\leq \|\partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)\|_{L^\infty} \|\mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^2}^2 \\
&\leq C_1(\bar{K}) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Una vez obtenida la expresión deseada acotando I_{11} , hay que trabajar el otro término de I_1

(denotado por I_{12}) sumando y restando el mismo término continuamente:

$$\begin{aligned}
I_{12} &= - \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\epsilon * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) \pm \mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon))) \\
&\quad - \mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&= - \int_{-\pi}^{\pi} ((\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\delta) * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon))) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&\quad - \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - (\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta))) (u_\epsilon - u_\delta) dx
\end{aligned}$$

En este momento, hay que introducir un lema que es demostrado en [4], que es el siguiente:

Lema 2.1. *Para todo $u \in H^s$ con $s \geq 1$, $\mathcal{J}_\epsilon * u$ converge a u en H^s y la tasa de convergencia de la norma H^{s-1} es lineal en ϵ :*

$$\|\mathcal{J}_\epsilon * u - u\|_{H^{s-1}} \leq C\epsilon \|u\|_{H^s}$$

Entonces, sumando y restando la identidad en el término $(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\delta)$, se puede aplicar el lema anterior, resultando:

$$\begin{aligned}
I_{12} &\leq \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \|(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{H^1} \\
&\quad \|(\mathcal{J}_\delta * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - (\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta))) (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^1}
\end{aligned}$$

y, simplificando en ambas líneas (aplicando que H^1 es un álgebra de Banach en la primera y las propiedades del suavizante en la segunda), se obtiene

$$\begin{aligned}
I_{12} &\leq C_1(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + \|((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - (\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)) (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^1}
\end{aligned}$$

de nuevo, sumando y restando el mismo término y aplicando el lema 2.1, se va logrando la forma deseada:

$$\begin{aligned}
I_{12} &\leq C_1(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + \|((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \pm (\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - (\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)) (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^1} \\
&\leq C_1(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + \|((\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\delta) * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^1} \\
&\quad + \|((\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - (\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)) (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^1} \\
&\leq C_1(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)\|_{H^1} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + \|((\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \pm (\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - (\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x (\mathcal{J}_\delta * u_\delta)) (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^1}
\end{aligned}$$

y, razonando de forma análoga a las anteriores, resulta

$$\begin{aligned}
I_{12} &\leq C_1(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + C_2(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + \|((\mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta)) \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^1} \\
&\quad + \|((\mathcal{J}_\delta * u_\delta) \partial_x ((\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\delta) * u_\epsilon)) (u_\epsilon - u_\delta)\|_{L^1}
\end{aligned}$$

que, utilizando las acotaciones, la desigualdad de Hölder generalizada (lema 1.2) y el lema 2.1, se concluye

$$\begin{aligned} I_{12} &\leq C_1(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + C_2(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\ &\quad + C_3(\bar{K}) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 + \|\mathcal{J}_\delta * u_\delta\|_{L^\infty} \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon\|_{L^2} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\ &\leq C_1(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + C_2(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\ &\quad + C_3(\bar{K}) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 + C_4(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \end{aligned}$$

Por lo que, renombrando las constantes, se concluye que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_1(\bar{K}) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 + C_2(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + C_3(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\ &\quad + C_4(\bar{K}) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 + C_5(\bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \end{aligned}$$

Ahora, se tiene que trabajar con la integral I_2 . De nuevo, sumando y restando la misma cantidad, se tiene:

$$\begin{aligned} I_2 &= \beta \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\epsilon * \partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \pm \mathcal{J}_\delta * \partial_x^2(\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon) - \mathcal{J}_\delta * \partial_\delta^2(\mathcal{J}_\delta * u_\delta)) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\ &= \beta \int_{-\pi}^{\pi} ((\mathcal{J}_\epsilon * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\epsilon) - \mathcal{J}_\delta * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\delta)) * u_\epsilon) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\ &\quad + \beta \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{J}_\delta * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta))) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\ &= I_{21} + I_{22} \end{aligned}$$

Ulteriormente, se acotan los términos I_{21} e I_{22} por separado. Acto seguido, integrando por partes I_{22} , se consigue

$$\begin{aligned} I_{22} &= \beta \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_x^2 \mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta)) (\mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta)) dx \\ &= -\beta \int_{-\pi}^{\pi} (\partial_x \mathcal{J}_\delta * (u_\epsilon - u_\delta))^2 dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Como es negativo, se puede obviar este término, con lo que tan solo hay que trabajar con I_{21} .

$$I_{21} \leq \beta \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \|((\mathcal{J}_\epsilon * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\epsilon) - \mathcal{J}_\delta * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\delta)) * u_\epsilon)\|_{L^2}$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Hölder (lema 1.1). Ahora, hay que centrarse exclusivamente en el término de las derivadas.

$$\begin{aligned} \|((\mathcal{J}_\epsilon * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\epsilon) - \mathcal{J}_\delta * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\delta)) * u_\epsilon)\|_{L^2} &= \|(\partial_x^2(\mathcal{J}_\epsilon * \mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\delta * \mathcal{J}_\delta)) * u_\epsilon\|_{L^2} \\ &\leq \|(\mathcal{J}_\epsilon * \mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\delta * \mathcal{J}_\delta) * u_\epsilon\|_{H^2} \\ &\leq \|(\mathcal{J}_\epsilon * \mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\delta * \mathcal{J}_\delta) * u_\epsilon \pm \mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon \pm \mathcal{J}_\delta * u_\delta\|_{H^2} \\ &\leq \|\mathcal{J}_\epsilon * (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) - \mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon\|_{H^2} \\ &\quad + \|-\mathcal{J}_\delta * (\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon) + \mathcal{J}_\delta * u_\epsilon\|_{H^2} \\ &\quad + \|\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon - \mathcal{J}_\delta * u_\epsilon\|_{H^2} \end{aligned}$$

En este punto, se tiene que volver a aplicar el lema 2.1 y volver a sumar y restar la misma función. Aplicando esto, se llega a:

$$\begin{aligned}
\|((\mathcal{J}_\epsilon * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\epsilon) - \mathcal{J}_\delta * (\partial_x^2 \mathcal{J}_\delta))) * u_\epsilon\|_{L^2} &\leq C_1 \cdot \epsilon \|\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon\|_{H^2} + C_2 \cdot \delta \|\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon\| \\
&\quad + \|\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon - \mathcal{J}_\delta * u_\epsilon \pm u_\epsilon\|_{H^2} \\
&\leq C_1 \cdot \epsilon \|\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon\|_{H^2} + C_2 \cdot \delta \|\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon\| \\
&\quad + C_3 \cdot \epsilon \|u_\epsilon\|_{H^2} + C_4 \cdot \delta \|u_\epsilon\| \\
&\leq C_1^*(\bar{K}) \cdot \epsilon + C_2^*(\bar{K}) \cdot \delta + C_3^*(\bar{K}) \cdot \epsilon + C_4^*(\bar{K}) \cdot \delta \\
&\leq C(\bar{K}) \cdot \max\{\epsilon, \delta\}
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad se ha vuelto a usar el lema 2.1 y C es el máximo de las cuatro constantes.

Entonces, se concluye que

$$I_2 \leq C(\bar{K}, \beta) \cdot \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}$$

Por último, se debe estudiar el término I_3 . Por ello, se tiene:

$$\begin{aligned}
I_3 &= q_0 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) \pm \mathcal{J}_\delta * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) - \mathcal{J}_\delta * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} \cdot Z_\delta \right) \right) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&= q_0 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) - \mathcal{J}_\delta * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) \right) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&\quad + q_0 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathcal{J}_\delta * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) - \mathcal{J}_\delta * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} \cdot Z_\delta \right) \right) (u_\epsilon - u_\delta) dx \\
&\leq q_0 \left\| \left(\mathcal{J}_\epsilon - \mathcal{J}_\delta \right) * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right) \right\|_{L^2} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + q_0 \left\| \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} \cdot Z_\delta \right) (u_\epsilon - u_\delta) \right\|_{L^1}
\end{aligned}$$

donde se ha aplicado la desigualdad de Hölder (lema 1.1) y las propiedades del núcleo del calor. Tras ello, se sigue acotando el término utilizando el lema 2.1.

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq q_0 \cdot C_1 \cdot \max\{\epsilon, \delta\} \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \right\|_{H^1} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + q_0 \left\| \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot Z_\epsilon \pm e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} \cdot Z_\epsilon - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} \cdot Z_\delta \right) (u_\epsilon - u_\delta) \right\|_{L^1} \\
&\leq q_0 \cdot C_1 \cdot \max\{\epsilon, \delta\} \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{H^1} \|Z_\epsilon\|_{H^1} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + q_0 \left\| \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \pm e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} \right) \cdot Z_\epsilon \right\|_{L^2} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + q_0 \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} (Z_\epsilon - Z_\delta) \cdot \right\|_{L^2} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}
\end{aligned}$$

El último resultado, se ha obtenido aplicando la desigualdad de Hölder (lema 1.1) y, en las próximas líneas, se dará por trivial la norma de las exponenciales ya que ha salido más veces en este trabajo, cuyo resultado se obtiene aplicando el teorema fundamental del cálculo.

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq q_0 \cdot C_1 \cdot \max\{\epsilon, \delta\} \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{H^1} \|Z_\epsilon\|_{H^1} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + C_2(\bar{K}, q_0, T, Z_0) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 + C_2(\bar{K}, q_0, T, Z_0) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\
&\quad + C_3(q_0) \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha utilizado la acotación de u en la ecuación (2.7). Ahora, se simplifica la anterior expresión teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \|Z_\epsilon\|_{H^1} &= \left\| -e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} ds} \cdot Z_0 \cdot \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon(x, s))_x}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon(x, s))^2} ds \right\|_{L^2} + C_2(Z_0, \bar{K}, Z'_0) \\ &\leq C_1(Z_0, \bar{K}) \left\| \int_0^t (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon(x, s))_x ds \right\|_{L^2} + C_2(Z_0, \bar{K}, Z'_0) \\ &\leq C_1(Z_0, \bar{K}) \int_0^t \|(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon(x, s))_x\|_{L^2} ds + C_2(Z_0, \bar{K}, Z'_0) \\ &\leq C(Z_0, \bar{K}, Z'_0) \end{aligned}$$

y, que

$$\left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{H^1} = \left\| \frac{e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)_x}{(\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)^2} \right\|_{L^2} + \left\| e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \right\|_{L^2} \leq C_1(\bar{K})$$

Entonces, renombrando las constantes y tomando los máximos de las mismas, se concluye que

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C_1(q_0, \bar{K}, Z_0, Z'_0) \cdot \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + C_2(q_0) \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\ &\quad + C_3(\bar{K}, q_0, Z_0) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Luego, agrupando términos y redefiniendo constantes, se observa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 &\leq C_1(\bar{K}, q_0, Z_0) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2}^2 + C_2(q_0) \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \\ &\quad + C_3(q_0, \bar{K}, Z_0, Z'_0, \beta) \max\{\epsilon, \delta\} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \end{aligned}$$

Realizando la derivada en tiempo de la parte izquierda de la desigualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} &\leq C_1(\bar{K}, q_0, Z_0) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + C_2(q_0) \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} \\ &\quad + C_3(q_0, \bar{K}, Z_0, Z'_0, \beta) \max\{\epsilon, \delta\} \end{aligned}$$

Por otro lado, se va a hallar la acotación de

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2}^2$$

Para ello, se utiliza la ecuación (2.6) para ϵ y δ . A todo ello, se le multiplica por la diferencia de Z_ϵ y Z_δ y se integra con respecto a x , resultando:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \partial_t (Z_\epsilon - Z_\delta) (Z_\epsilon - Z_\delta) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} Z_\epsilon - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} Z_\delta \right) (Z_\epsilon - Z_\delta) dx$$

y de manera directa se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} Z_\epsilon \pm e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} Z_\epsilon + e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} Z_\delta \right) (Z_\epsilon - Z_\delta) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \pm e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\epsilon}} - e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} \right) Z_\epsilon (Z_\delta - Z_\epsilon) dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\delta * u_\delta}} (Z_\epsilon - Z_\delta) (Z_\delta - Z_\epsilon) dx \end{aligned}$$

En este punto, aplicando la desigualdad de Hölder (lema 1.1) y muchas de las acotaciones que ya se han visto a lo largo de este trabajo, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2}^2 &\leq C(Z_0, \bar{K}) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C(Z_0, \bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\} \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} \end{aligned}$$

Con lo que, si se deriva la norma de la parte izquierda de la desigualdad, se cumple que

$$\frac{d}{dt} \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} \leq C(Z_0, \bar{K}) \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} + C(Z_0, \bar{K}) \max\{\epsilon, \delta\}$$

Sumando las dos acotaciones de las derivadas de la norma, junto con una nueva agrupación y definición de la constante C , que es el máximo de todas, se tiene

$$\frac{d}{dt} (\|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2}) \leq C [\|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} + \max\{\epsilon, \delta\}]$$

Por último, aplicando la desigualdad de Gronwall (1.6) a la función

$$f(t) = \|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} + \max\{\epsilon, \delta\}$$

se concluye que

$$\|u_\epsilon - u_\delta\|_{L^2} + \|Z_\epsilon - Z_\delta\|_{L^2} + \max\{\epsilon, \delta\} \leq e^{Ct} \cdot \max\{\epsilon, \delta\}$$

ya que, como se ha mencionado al principio de la sección, las funciones u_ϵ y u_δ tienen la misma condición inicial y con Z_ϵ y Z_δ ocurre lo mismo. Por lo tanto, se tiene que ambas funciones son de Cauchy ya que tomando el máximo de ϵ y δ suficientemente pequeño, la norma de las diferencias de las funciones será suficientemente pequeña.

Entonces, se tiene que existe el límite de la función u_ϵ , que se va a denotar como u_∞ . Se acaba de ver que $u_\infty \in C([0, T], L^2)$, pero, aplicando la interpolación en espacios de Sobolev (lema 1.9), se concluye que

$$\|u_\epsilon - u_\infty\|_{H^s} \leq \|u_\epsilon - u_\infty\|_{L^2}^{1-\frac{s}{3}} \|u_\epsilon - u_\infty\|_{H^3}^{\frac{s}{3}} \quad \text{para } 0 < s < 3$$

donde el término $\|u_\epsilon - u_\infty\|_{L^2}^{1-\frac{s}{3}}$ puede ser tan pequeño como se considere. Por ello, u también es una función de Cauchy en el espacio $C([0, T], H^r)$ con $r < 3$. Luego, se concluye que

$$\begin{aligned} u_\infty &\in C([0, T], H^r) \text{ con } r < 3 \\ u_\infty &\in L^\infty(0, T, H^3) \end{aligned}$$

donde queda asegurada la existencia de solución u en H^r con $r < 3$.

Entonces, sabemos que $u_\epsilon \rightarrow u_\infty$. Ahora bien, la sucesión u_ϵ es solución para el problema regularizado, pero no está claro que lo sea para la ecuación del sistema inicial (2.5). A continuación, se demostrará que el límite de dicha sucesión sí que es solución del sistema inicial.

Para cualquier función test¹ Φ , se cumple que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \cdot \partial_t u_\epsilon dt dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \partial_t \Phi \cdot u_\epsilon dt - \Phi(x, 0) u_{\epsilon_0} dx$$

¹Cualquier función periódica C^∞ en x con soporte compacto en t

Ahora, como se verifica

$$|u_\epsilon| \leq C(|u_x| + 1)$$

se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada, resultando

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \partial_t \Phi \cdot u_\epsilon dt - \Phi(x, 0)u_{\epsilon_0} dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \partial_t \Phi \cdot u_\infty dt - \Phi(x, 0)u_{\epsilon_0} dx$$

Utilizando que Φ es una función test, se verifica, a raíz de la anterior igualdad, lo siguiente

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \cdot \partial_t u_\epsilon dt dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \cdot \partial_t u_\infty dt dx$$

Una vez introducidas estas equivalencias, se va a realzar el estudio deseado. El objetivo es demostrar que se cumple

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \cdot \partial_t u_\epsilon dt dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \left[q_0 \cdot e^{-1/u_\infty} \cdot e^{-\int_0^s e^{-1/u_\infty} dy} - u_\infty \partial_x u_\infty + \beta \partial_x^2 u_\infty \right] dt dx$$

ya que, u_∞ sería solución del problema regularizado pero también del sistema de estudio (2.5). Para demostrarlo, se van a usar dos propiedades. La primera, se puede encontrar en [4], más en concreto cuando enuncia las propiedades de los mollifiers. Es la siguiente:

Lema 2.2. *Para todo $v \in C^0$, se verifica*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon * v = v$$

La segunda, será demostrada en este trabajo. Es la siguiente:

Lema 2.3. *Sea $u_\epsilon \in C([0, T], L^2)$ una sucesión de Cauchy tal que su límite es u_∞ . Entonces, se cumple*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon = u_\infty$$

Demostración. Se demuestra de manera directa, sumando y restando la misma cantidad y utilizando el lema anterior. En primer lugar, se tiene la siguiente igualdad:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon \pm \mathcal{J}_\epsilon * u_\infty = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon * (u_\epsilon - u_\infty) + \mathcal{J}_\epsilon * u_\infty$$

ahora, utilizando el lema 2.2 visto recientemente, se observa

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon - u_\infty + u_\infty = u_\infty - u_\infty + u_\infty = u_\infty$$

□

Con estos dos lemas, se podrá demostrar que u_∞ es solución del sistema (2.5). Por lo anteriormente visto, se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \partial_t u_\epsilon dt dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-q_0 \cdot \left(\mathcal{J}_\epsilon * \left(e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon}} ds} \cdot Z_0(x) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{J}_\epsilon * ((\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon) \cdot \partial_x (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) + \beta \cdot (\mathcal{J}_\epsilon * \partial_x^2 (\mathcal{J}_\epsilon * u_\epsilon)) \right] dt dx \end{aligned}$$

En este punto, se deben aplicar los lemas 2.2 y 2.3 para cada uno de los sumandos del límite y, de manera casi directa, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \partial_t u_\epsilon dt dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \cdot \left[-q_0 \cdot \left(e^{-\frac{1}{u_\infty}} \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u_\infty}} ds} \cdot Z_0(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - (u_\infty \cdot \partial_x u_\infty) + \beta \cdot \partial_x^2 u_\infty \right] dt dx \end{aligned}$$

Ahora bien, como se ha visto antes, también se verifica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \cdot \partial_t u_\epsilon dt dx = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t \Phi \cdot \partial_t u_\infty dt dx$$

por lo que se puede concluir que el límite u_∞ es solución del sistema propuesto inicialmente, el sistema (2.5).

2.2.6. Unicidad de solución

Una vez demostrada la existencia de solución local, hay que asegurarse de la unicidad de la misma. Se sabe que, por la ecuación (2.7), la solución en caso de que exista será única por su definición en caso de que lo sea $u(x, t)$. Por ello, hay que centrarse en estudiar la unicidad de la solución de la ecuación (2.8).

En esta sección, se va a suponer que existen dos soluciones u y v para la ecuación (2.8). Razonando de forma análoga a la anterior sección, se van a restar las ecuaciones que cumplen ambas funciones y se va a multiplicar la expresión por la diferencia de u y v . Por último, se integra con respecto a la variable x , de tal manera que se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - v\|_{L^2}^2 &= - \int_{-\pi}^{\pi} (uu_x - vv_x)(u - v) dx + \beta \int_{-\pi}^{\pi} (u_{xx} - v_{xx})(u - v) dx \\ &\quad + q_0 \int_{-\pi}^{\pi} Z_0 \left(e^{-\int_0^t e^{-1/u} ds} - e^{-\int_0^t e^{-1/v} ds} \right) (u - v) dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

donde, integrando por partes, se obtiene en el término I_2 la siguiente acotación:

$$I_2 = \beta \int_{-\pi}^{\pi} (u_{xx} - v_{xx})(u - v) dx = -\beta \int_{-\pi}^{\pi} (u_x - v_x)^2 dx \leq 0$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x (u^2 - v^2)(u - v) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x ((u + v)(u - v))(u - v) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x (u + v)(u - v)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x (u - v)(u + v)(u - v) dx \end{aligned}$$

integrando por partes el primer sumando, resulta

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x(u+v)(u-v)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x(u+v)(u-v)^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x(u+v)(u-v)^2 dx \\
&= C(\|u_x\|_{L^2}, \|v_x\|_{L^2}) \|u-v\|_{L^2}^2 \\
&\leq C(\bar{K}) \|u-v\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Por último, utilizando la desigualdad de Hölder y el teorema fundamental del cálculo, se observa

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^\infty} \|u-v\|_{L^2} \left\| e^{-\int_0^t e^{-1/u} ds} - e^{-\int_0^t e^{-1/v} ds} \right\|_{L^2} \\
&\leq \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^\infty} \|u-v\|_{L^2} \left\| \int_0^1 e^{-\lambda \int_0^t e^{-1/u} ds - (1-\lambda) \int_0^t e^{-1/v} ds} d\lambda \right\|_{L^\infty} \left\| \int_0^t e^{-1/u} - e^{-1/v} ds \right\|_{L^2} \\
&\leq C(q_0, Z_0, \bar{K}, T) \|u-v\|_{L^2} \cdot T \cdot \sup_{t \leq T} \text{ess} \|u-v\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Ahora, definiendo la siguiente función

$$\mathcal{G} = \sup_{t \leq T} \|u-v\|_{L^2}^2$$

y juntando las anteriores acotaciones e integrando la expresión con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u-v\|_{L^2}^2 ds &\leq C_1(\bar{K}) \int_0^t \|u-v\|_{L^2}^2 ds \\
&\quad + C_2(q_0, Z_0, \bar{K}, T) \cdot \sup_{t \leq T} \text{ess} \|u-v\|_{L^2} \int_0^t \|u-v\|_{L^2} ds
\end{aligned}$$

que, sustituyendo por la ecuación definida y tomando el máximo de las constantes, resulta

$$\mathcal{G} \leq C(q_0, Z_0, \bar{K}, T) \cdot \mathcal{G} \cdot T \cdot (T+1)$$

Tomando $T \ll 1$, se concluye que

$$\mathcal{G} = 0$$

de donde se obtiene la unicidad de la solución de la ecuación (2.8) y, por ende, la unicidad de la solución de la ecuación (2.6) por estar su solución formada por el dato inicial y la solución u de la ecuación anterior, quedando demostrado el teorema 2.1.

Propiedades

Tras demostrar la existencia y unicidad de solución local, en este capítulo se estudiará tanto la existencia y unicidad global de las soluciones del sistema de estudio como una cantidad conservada que figura en el mismo.

3.1. Cantidad conservada

Partiendo de la ecuación de la u del sistema (2.5), se va a demostrar que existe una cantidad conservada¹ en tiempo. Para ello, partiendo de la ecuación ya mencionada, se integra respecto al espacio

$$\int_{-\pi}^{\pi} (u(x, t) + q_0 \cdot Z(x, t))_t dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} u(x, t) \right)_x dx = \beta \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}(x, t) dx$$

Ahora bien, como se puede observar, hay dos términos los cuales son la integral de la derivada que, por ser tanto u como u_x funciones periódicas, el resultado de ambas es 0. Por ello, se tiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (u(x, t) + q_0 \cdot Z(x, t))_t dx = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) + q_0 \cdot Z(x, t) dx \right] = 0$$

A continuación, se integra la expresión con respecto al tiempo, originando

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u(x, s) + q_0 \cdot Z(x, s) dx \right] ds = 0$$

que, de manera directa, resulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x, t) + q_0 \cdot Z(x, t) dx = \int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) + q_0 \cdot Z_0(x) dx$$

con lo que,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) + q_0 \cdot Z_0(x) dx \tag{3.1}$$

es el valor que se denomina en este trabajo como cantidad conservada, ya que permanece constante a lo largo del tiempo en el sistema.

¹Se llama cantidad conservada a aquella que se mantiene para todos los valores de las variables de una función.

3.2. Existencia global

En esta sección, se estudiará la existencia global de solución. Para ello, se va a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.1 (Existencia global de solución). *El sistema presentado en la ecuación (2.5), tiene una única solución global $u \in (C[0, T], H^3) \forall T > 0$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que en el anterior capítulo se ha estudiado la existencia y unicidad de solución local, tan solo faltaría de demostrar que dicha solución es global.

En cuanto a la solución de $Z(x, t)$, como es una solución que se obtiene de manera directa para la cual no hay restricciones, se sabe que dicha solución es global siempre que esté bien definida y lo sea $u(x, t)$. Por otro lado, se ha de comprobar que tanto u como hasta la derivada de orden 3 de u tiene que estar acotada para que la solución local encontrada en el anterior capítulo sea global. Por ello, empecemos viendo la acotación de $u(x, t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^\infty} &= \partial_t u(\bar{x}_t, t) \text{ con } \bar{x}_t \text{ el punto de máximo} \\ &= -u \cdot u_x|_{\bar{x}_t} + \beta \cdot u_{xx}|_{\bar{x}_t} + Z_0(\bar{x}_t) \cdot q_0 \cdot e^{-\frac{1}{u(\bar{x}_t, t)}} \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{u(\bar{x}_t, s)}} ds} \\ &\leq Z_0(\bar{x}_t) \cdot q_0 \cdot e^{-\frac{1}{\|u(t)\|_{L^\infty}}} \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\|u(s)\|_{L^\infty}}} ds} \end{aligned}$$

Además, se observa que

$$\frac{d}{dt} \int_0^t e^{-\frac{1}{\|u(s)\|_{L^\infty}}} ds = e^{-\frac{1}{\|u(t)\|_{L^\infty}}}$$

por lo tanto, teniendo en cuenta esta última igualdad, y, continuando con la acotación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^\infty} &\leq Z_0(\bar{x}_t) \cdot q_0 \cdot e^{-\frac{1}{\|u(t)\|_{L^\infty}}} \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\|u(s)\|_{L^\infty}}} ds} \\ &\leq \|Z_0\|_{L^\infty} \cdot q_0 \cdot e^{-\frac{1}{\|u(t)\|_{L^\infty}}} \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\|u(s)\|_{L^\infty}}} ds} \\ &\leq -\|Z_0\|_{L^\infty} \cdot q_0 \cdot \frac{d}{dt} \left[e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\|u(s)\|_{L^\infty}}} ds} \right] \end{aligned}$$

Ahora, integrando con respecto al tiempo la expresión anterior, resulta

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty} - \|u_0\|_{L^\infty} &\leq -\|Z_0\|_{L^\infty} \cdot q_0 \cdot \left(e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\|u(s)\|_{L^\infty}}} ds} - 1 \right) \\ \|u(t)\|_{L^\infty} + \|Z_0\|_{L^\infty} \cdot q_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\|u(s)\|_{L^\infty}}} ds} &\leq \|u_0\|_{L^\infty} + \|Z_0\|_{L^\infty} \cdot q_0 \end{aligned}$$

y, como

$$\|Z_0\|_{L^\infty} \cdot q_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-\frac{1}{\|u\|_{L^\infty}}} ds} > 0$$

se concluye que $\|u(t)\|_{L^\infty}$ está acotado para todo tiempo.

Además, si se multiplica la ecuación (2.8) por u y se integra respecto a x como se ha hecho en la sección 2.2.2 pero, en vez de obviar el término asociado a u_{xx} por ser negativo, ahora se mantiene en la igualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 &= \beta \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_{xx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u} ds} dx \\ &= -\beta \int_{-\pi}^{\pi} (u_x)^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u} ds} dx \end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Hölder (lema 1.1), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \beta \|u_x(t)\|_{L^2}^2 &\leq \|u(t)\|_{L^2} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \left\| e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u} ds} \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \|u(t)\|_{L^2} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^2 dx \leq \|u(t)\|_{L^\infty}^2 2\pi$$

se verifica

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \beta \|u_x(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^\infty}^2 2\pi \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}$$

por lo que, como se ha demostrado que $\|u(t)\|_{L^\infty}$ está acotada, se obtiene de manera directa integrando con respecto a t que u_x está acotado en $L^2(0, T, L^2)$ por una función lineal en tiempo. Esta notación, implica que u_x está acotada en $L^2(0, T)$ en la variable t y en L^2 en la variable x .

Por otro lado, se estudiará la acotación de $\frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{L^2}$. Multiplicando la expresión (2.8) por $-u_{xx}$.

$$-u_{xx} \cdot u_t = -\beta \cdot u_{xx}^2 + u \cdot u_x \cdot u_{xx} - q_0 \cdot Z_0(x) \cdot u_{xx} \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds}$$

e, integrando con respecto a la variable x , se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 = -\beta \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_x \cdot u_{xx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} q_0 \cdot Z_0(x) \cdot u_{xx} \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds} dx$$

Ahora, estudiando las dos integrales por separado, se consigue la acotación deseada. En primer lugar,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_x \cdot u_{xx} dx &= u \cdot u_x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u_x^3 dx - \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_x \cdot u_{xx} dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} u_x^3 dx - \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_x \cdot u_{xx} dx \end{aligned}$$

Apreciando que aparece de nuevo el mismo término, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_x \cdot u_{xx} dx &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u_x^3 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^3}^3 \end{aligned}$$

Por último, se tiene que acotar el término restante. Para ello, se utilizan los lemas 1.1 y 1.4 (desigualdades de Hölder y Young)

$$\begin{aligned} - \int_{-\pi}^{\pi} q_0 \cdot Z_0(x) \cdot u_{xx} \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds} dx &\leq \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2} \cdot \|u_{xx}(t)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{4\epsilon} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 + \epsilon \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Entonces, reuniendo ambas acotaciones en la ecuación, se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 \leq -\beta \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^3}^3 + \frac{1}{4\epsilon} \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^2}^2 + \epsilon \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2$$

A continuación, usando la desigualdad de Sobolev (1.7) y la interpolación en espacios de Sobolev (lema 1.9) en el término asociado a la norma L^3 , se tiene

$$\|u_x(t)\|_{L^3}^3 \leq C \cdot \|u(t)\|_{H^{1+1/6}}^3 \leq C \left[\|u(t)\|_{H^2}^{\frac{1+1/6}{2} \cdot 3} \cdot \|u(t)\|_{L^2}^{\left(1 - \frac{1+1/6}{2}\right) \cdot 3} \right]$$

Ahora bien, se ha demostrado que $\|u(t)\|_{L^\infty}$ está acotado, por lo que también lo está $\|u(t)\|_{L^2}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^2 dx \leq \|u(t)\|_{L^\infty}^2 \cdot 2\pi$$

por estar x definida en $(-\pi, \pi)$. Por consiguiente, aplicando la desigualdad de Young generalizada (lema 1.4) y la acotación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|_{L^3}^3 &\leq \epsilon \cdot C \cdot \|u(t)\|_{H^2}^2 + C(u_0, Z_0, q_0, \epsilon) \\ &\leq \epsilon \cdot C \cdot \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \bar{C}(u_0, Z_0, q_0, \epsilon) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la definición de la norma H^2 , ya que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^2}^2 &= \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|u(t)\|_{L^\infty}^2 \cdot 2\pi + \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

y, sustituyendo ahora en la desigualdad principal, se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \beta \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \leq \epsilon \cdot C^* \cdot \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \bar{C}^*(u_0, Z_0, q_0, \epsilon) + \epsilon \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2$$

tomando $\epsilon = \frac{\beta}{2(\bar{C}^* + 1)}$, se alcanza

$$\frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \beta \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \leq \bar{C}(u_0, Z_0, q_0, \beta)$$

e integrando con respecto al tiempo

$$\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \beta \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C(t + 1)$$

donde

$$C = \text{máx} \left\{ \bar{C}(u_0, Z_0, q_0, \beta), \|u_x(0)\|_{L^2}^2 \right\}$$

Se tiene que u_x esta acotada en $L^\infty(0, T, L^2)$ por una función lineal en tiempo. Por recordar de nuevo, la notación $L^\infty(0, T, L^2)$, indica que esta acotada en $L^\infty(0, T)$ en la variable t y en L^2 en la variable x . Esa misma expresión, sostiene que u_{xx} está acotada en $L^2(0, T, L^2)$ por una función lineal en tiempo.

Ahora, se estudia y demuestra que $\|u_{xx}(t)\|_{L^2}$ está acotada. Para ello, se multiplica la expresión (2.8) por u_{xxxx}

$$u_{xxxx} \cdot u_t = \beta \cdot u_{xxxx} \cdot u_{xx} - u \cdot u_x \cdot u_{xxxx} + q_0 \cdot Z_0(x) \cdot u_{xxxx} \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds}$$

y, de nuevo, se integra dicha expresión con respecto al tiempo. Por un lado, se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} \cdot u_t dx = - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxx} \cdot \partial_t u_x dx = \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx} \cdot \partial_t u_{xx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2$$

Por otro lado, se acotan uno por uno los términos de la parte derecha de la igualdad. En primer lugar,

$$\beta \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxxx} \cdot u_{xx} dx = -\beta \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxx}^2 dx = -\beta \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2$$

En segundo lugar, integrando por partes de nuevo resulta

$$\begin{aligned} - \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_x \cdot u_{xxxx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxx} \cdot u_x^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_{xx} \cdot u_{xxx} dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} 2u_x \cdot u_{xx}^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} u_x \cdot u_{xx}^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_{xx} \cdot u_{xxx} dx \end{aligned}$$

de la última igualdad se aprecia que

$$\int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_{xx} \cdot u_{xxx} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u_x \cdot u_{xx}^2 dx$$

que, sustituyendo en la anterior expresión,

$$- \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_x \cdot u_{xxxx} dx = -\frac{5}{2} \int_{-\pi}^{\pi} u_x \cdot u_{xx}^2 dx \leq \frac{5}{2} \|u_x(t)\|_{L^\infty} \cdot \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2$$

y, utilizando la desigualdad de Sobolev, se tiene

$$- \int_{-\pi}^{\pi} u \cdot u_x \cdot u_{xxxx} dx \leq C \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^3$$

Y, por último, se estudiará el último de los términos. Se integrará por partes para obtener las expresiones deseadas

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} q_0 \cdot Z_0(x) \cdot u_{xxxx} \cdot e^{-1/u} \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u} ds} ds &= - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxx} \cdot q_0 \cdot Z_0(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u} ds - 1/u} \\ &\quad \left(\frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-1/u} \cdot u_x}{u} ds \right) dx \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xxx} \cdot q_0 \cdot Z_0'(x) \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u} ds - 1/u} dx \end{aligned}$$

Se denota el término a acotar por T_1 para facilitar la lectura y se aplica la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Young generalizada (1.1 y 1.4) junto con la desigualdad triangular (lema 1.5).

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \|u_{xxx}(t)\|_{L^2} \cdot \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2} + \|u_{xxx}(t)\|_{L^2} \cdot \|q_0 \cdot Z_0\|_{L^\infty} \cdot \left\| \frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-1/u} \cdot u_x}{u} ds \right\|_{L^2} \\ &\leq 2\epsilon \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \left(\|q_0 \cdot Z_0\|_{L^\infty} \cdot \left\| \frac{u_x}{u^2} - \int_0^t \frac{e^{-1/u} \cdot u_x}{u} ds \right\|_{L^2} \right)^2 \\ &\leq 2\epsilon \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \left(\|q_0 \cdot Z_0\|_{L^\infty} \cdot \left(\left\| \frac{u_x}{u^2} \right\|_{L^2} + \left\| \int_0^t \frac{|u_x|}{u} ds \right\|_{L^2} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

ahora, teniendo en cuenta la acotación de u_x en $L^2(0, T, L^2)$ y en $L^\infty(0, T, L^2)$ y la siguiente desigualdad

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

resulta, junto a la actualización de constantes y sabiendo que la norma de la integral es menor que la integral de la norma, lo siguiente:

$$\begin{aligned} T_1 &\leq 2\epsilon \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|q_0 \cdot Z'_0\|_{L^2}^2 + C_1(\epsilon, q_0, Z_0, \bar{K}) \left(\|u_x(t)\|_{L^2} + \left\| \int_0^t |u_x(s)| ds \right\|_{L^2} \right)^2 \\ &\leq 2\epsilon \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_2(\epsilon, q_0, Z'_0) + C_1(\epsilon, q_0, Z_0, \bar{K}) \left(\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \\ &\leq 2\epsilon \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_2(\epsilon, q_0, Z'_0) + C_1(\epsilon, q_0, Z_0, \bar{K}) (C(t+1) + \bar{C}(t+1)) \\ &\leq 2\epsilon \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_2(\epsilon, q_0, Z'_0) + C_1(\epsilon, q_0, Z_0, \bar{K}) (C(t+1)) \end{aligned}$$

y, renombrando por C la mayor de las constantes, se deduce que

$$T_1 \leq 2\epsilon \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + C(\epsilon, q_0, Z_0, Z'_0, \bar{K})(t+2)$$

Juntando todas las acotaciones y tomando $\epsilon = \beta/4$, se concluye que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{2} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \leq C_1 \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^3 + C_2(\beta, q_0, Z_0, Z'_0, \bar{K})(t+2)$$

Llegados a este punto, se puede aplicar la desigualdad de Gronwall (lema 1.6) ya que, por ser $\|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2$ positivo, se cumple

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \leq C_1 \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^3 + C_2(\beta, q_0, Z_0, Z'_0, \bar{K})(t+2)$$

por lo que, aplicando Gronwall, resulta

$$\begin{aligned} \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 &\leq e^{\int_0^t C_1 \|u_{xx}(s)\|_{L^2} ds} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + C_2 \int_0^t (s+2) ds \right] \\ &\leq e^{\int_0^t C_1 \|u_{xx}(s)\|_{L^2} ds} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + \bar{C}_2 (4t + t^2) \right] \end{aligned}$$

Ahora bien, aplicando Hölder en la norma asociada a t se tiene la siguiente desigualdad

$$\int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2} ds \leq \left(\int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds \right)^{1/2} \cdot t^{1/2}$$

con lo que se concluye que

$$\begin{aligned} \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 &\leq e^{C_1(\int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + \bar{C}_2(4t + t^2) \right] \\ &\leq e^{C_1^*(t+1)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + \bar{C}_2(4t + t^2) \right] \end{aligned}$$

donde se observa que u_{xx} está acotada en $L^\infty(0, T, L^2)$, usando en la última desigualdad que u_{xx} está acotado en $L^2(0, T, L^2)$. Ahora bien, tras esta acotación, se considera de nuevo la desigualdad

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{2} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \leq C_1 \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^3 + C_2(\beta, q_0, Z_0, Z'_0, \bar{K})(t + 2)$$

Integrando ahora con respecto al tiempo y sabiendo que $\|u_{xx}\|_{L^2}^2 \geq 0$, junto con la redefinición de las constantes se tiene

$$\int_0^t \|u_{xxx}(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C_1(\beta) \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^3 ds + C_2(\beta, q_0, Z_0, Z'_0, \bar{K})(t^2 + t)$$

Aplicando la desigualdad de Hölder para la variable t , sustituyendo por las acotaciones de u_{xx} y redefiniendo las constantes, resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u_{xxx}(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq C_1(\beta) \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds \cdot \sup_{t \leq T} \|u_{xx}(t)\|_{L^2} + C_2(t^2 + t) \\ &\leq C_1(\beta) e^{C_2(t+1)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + (4t + t^2) \right] (t + 1) + C_3(t^2 + t) \end{aligned}$$

donde se verifica que u_{xxx} está acotada en $L^2(0, T, L^2)$.

Por último, para concluir con la existencia global, se debe demostrar que u_{xxx} está acotado en $L^\infty(0, T, L^2)$. Para ello, se razona como en la subsección 2.2.2, es decir, multiplicando por $-\partial_x^6 u$ la ecuación (2.8), originando

$$-\partial_x^6 u \cdot u_t = \partial_x^6 u \cdot u \cdot u_x - \partial_x^6 u \cdot \beta u_{xx} - \partial_x^6 u \cdot e^{-1/u} \cdot q_0 \cdot Z_0 \cdot e^{-\int_0^t e^{-1/u(x,s)} ds}$$

Ahora, se debe integrar respecto a la variable x . Como ya se han tratado estos términos, se van a recuperar de dicha sección los términos interesantes. Entre ellos, el siguiente:

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2$$

Además, se rescata también la siguiente acotación:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u \cdot u_x dx \leq 2\epsilon \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{9}{4\epsilon} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 \|u_{xx}(t)\|_{L^\infty}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|u(t)\|_{L^\infty}^2 \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2$$

que, utilizando la desigualdad de Sobolev (lema 1.7) y las acotaciones demostradas en este capítulo, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot u \cdot u_x dx &\leq 2\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_1(\epsilon)(t+1) \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_2(\epsilon)(t+1) \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq 2\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C(\epsilon)(t+1) \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, también se recupera la siguiente cuenta:

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x^6 u \cdot \beta u_{xx} dx = -\beta \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2$$

Por último, se recuperan las acotaciones del término asociado a las exponenciales, que se denotará por I_1 para facilitar su lectura. Pues bien, se tiene:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 5\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_1(\epsilon, q_0, Z'_0, y(0)) \cdot \left\| u_x - \int_0^t u_x(x, s) ds \right\|_{L^\infty}^2 \\ &\quad + C_2(\epsilon, q_0, Z_0, y(0)) \cdot \left\| u_x^2 + \left(\int_0^t u_x(x, s) ds \right)^2 \right\|_{L^\infty}^2 + C_3(\epsilon, q_0, Z''_0) \\ &\quad + C_4(\epsilon, q_0, Z_0, y(0)) \left[\left\| -2y(0) \cdot u_x^2 + u_{xx} \right\|_{L^\infty}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| y(0)(2 - y(0)) \int_0^t u_x^2(x, s) ds - \int_0^t u_{xx}(x, s) ds \right\|_{L^\infty}^2 \right] \end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad triangular (lema 1.5) y sabiendo que la norma de la integral es menor que la integral de la norma, se consigue:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 5\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_1(\epsilon, q_0, Z'_0, y(0)) \cdot \left[\|u_x(t)\|_{L^\infty}^2 + \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds \right] + C_3(\epsilon, q_0, Z''_0) \\ &\quad + C_2(\epsilon, q_0, Z_0, y(0)) \cdot \left[\|u_x(t)\|_{L^\infty}^4 + \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds \cdot \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds \right] \\ &\quad + C_4(\epsilon, q_0, Z_0, y(0)) \left[\|u_x(t)\|_{L^\infty}^4 + \|u_{xx}(t)\|_{L^\infty}^2 + \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds \cdot \int_0^t \|u_x(s)\|_{L^\infty}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^\infty}^2 ds \right] \end{aligned}$$

Acto seguido, aplicando la desigualdad de Sobolev (lema 1.7) y redefiniendo algunas constantes, se tiene:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq 5\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_1(\epsilon, q_0, Z'_0, y(0)) \cdot \left[\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds \right] + C_3(\epsilon, q_0, Z''_0) \\ &\quad + C_2(\epsilon, q_0, Z_0, y(0)) \cdot \left[\|u_{xx}(t)\|_{L^2}^4 + \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds \cdot \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds + \|u_{xx}(t)\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|u_{xx}(s)\|_{L^2}^2 ds \right] \end{aligned}$$

A continuación, se utilizan las acotaciones realizadas en este capítulo de u_{xx} en $L^\infty(0, T, L^2)$ y $L^2(0, T, L^2)$ y la acotación de u_{xxx} en $L^2(0, T, L^2)$. Entonces, resulta:

$$\begin{aligned} I_1 \leq & 5\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C_1(\epsilon, q_0, Z'_0, y(0)) \left[e^{C_2(t+1)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + (4t + t^2) \right] + (t+1) \right] \\ & + C_3(\epsilon, \beta, q_0, Z_0, y(0)) \cdot \left[e^{C_4(t+1)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + (4t + t^2) \right]^2 + (t+1)^2 \right. \\ & \left. + e^{C_5(t+1)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + (4t + t^2) \right] (t+1) + (t^2 + t) \right] + C_6(\epsilon, q_0, Z''_0) \\ & + C_3(\epsilon, \beta, q_0, Z_0, y(0)) \cdot \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Para intentar facilitar la lectura, se define la nueva constante C^* como

$$C = \max \{ C_1(\epsilon, q_0, Z'_0, y(0)), C_3(\epsilon, \beta, q_0, Z_0, y(0)), C_6(\epsilon, q_0, Z''_0) \}$$

y, redefiniendo alguna constante como puede ser C_2 , hace que I_1 se pueda acotar por:

$$\begin{aligned} I_1 \leq & 5\epsilon \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 + C \cdot \left[e^{C_2(t+1)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + (4t + t^2) + 1 \right]^2 (t+1) \right. \\ & \left. + 2(t^2 + 2t + 1) \right] + C \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Una vez realizadas las 4 acotaciones de los distintos términos y tomando $\epsilon = \frac{\beta}{14}$, se juntan todas ellas y se redefinen algunas de las constantes, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{2} \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 \leq & C_1(t+1) \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \\ & + C \left[2(t^2 + 2t + 1) \right. \\ & \left. + e^{C_2(t+1)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + (4t + t^2) + 1 \right]^2 (t+1) \right] \end{aligned}$$

Y, como

$$\frac{\beta}{2} \|u_{xxxx}(t)\|_{L^2}^2 \geq 0$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \leq & C_1(t+1) \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 + C \left[2(t^2 + 2t + 1) \right. \\ & \left. + e^{C_2(t+1)^{1/2} \cdot t^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + (4t + t^2) + 1 \right]^2 (t+1) \right] \end{aligned}$$

Por último, aplicando la desigualdad de Gronwall (lema 1.6), se verifica

$$\begin{aligned} \|u_{xxx}(t)\|_{L^2}^2 \leq & e^{C_1(2t+t^2)} \left[\|u_{xxx}(0)\|_{L^2}^2 + 2C \int_0^t s^2 + 2s + 1 ds \right. \\ & \left. + C \int_0^t e^{C_2(s+1)^{1/2} \cdot s^{1/2}} \left[\|u_{xx}(0)\|_{L^2}^2 + (4s + s^2) + 1 \right]^2 (s+1) ds \right] \\ \leq & F(t) \end{aligned}$$

por lo que, se concluye que la función u_{xxx} está acotada en $L^\infty(0, T, L^2)$. Con ello, se ha demostrado que tanto la función u está acotada en x para todo t como que sus derivadas, u_x , u_{xx} y u_{xxx} , están acotadas en $L^\infty(0, T, L^2)$, es decir, para todo tiempo $t > 0$, su norma en L^2 de la variable x está acotada.

En el capítulo 2 se ha demostrado la existencia de una única solución hasta un cierto tiempo T . Si dicha solución no fuese global, la norma H^3 de la misma debería dejar de estar definida. Sin embargo, en esta sección se ha demostrado que la solución no deja de estar definida, por lo que se puede asegurar que la solución es global. \square

Resultados numéricos

En este último capítulo, se va a realizar una simulación para el sistema presentado en este trabajo. Para ello, se va a utilizar el software “Matlab” y, más en concreto, los dos códigos recogidos en los anexos. El primero de ellos, contiene en una función las dos ecuaciones del sistema. Algo a destacar de este capítulo es la utilización de la función programada de Matlab `fft` (fast Fourier transform) y de la función programada `ifft` (inverse fast Fourier transform). Con ambas, se consigue que las derivadas sean realizadas como multiplicaciones en el espacio discretizado de Fourier y que la multiplicaciones entre funciones se realice en el espacio físico.

Una vez explicado el primer código, conviene explicar el segundo. Consiste en un script cuyo principal objetivo es la resolución del sistema para los parámetros β y q_0 introducidos por el usuario. Para su resolución, se utiliza, de nuevo, una función programada de Matlab. Su nombre es `ODE45` y está basada en la fórmula explícita de Runge-Kutta (4,5). Como se explica en [6], este método trabaja con pares encajados tomando un paso h y, para cada paso, se hacen dos aproximaciones. Estas aproximaciones de la solución se comparan y, si la comparación es menor que una cierta tolerancia, el paso se aumenta, mientras que si la comparación es mayor que la tolerancia tomada, el paso se reduce. Este proceso continúa hasta que se verifique cierto test de salida.

Se muestra a continuación, una simulación realizada con el siguiente valor de parámetros:

$$\beta = 0,02 \text{ y } q_0 = 3$$

Además, los datos iniciales tomados son

$$u_0(x) = 10 + \sin(x) \text{ y } Z_0(x) = 5 + \cos(x)$$

que, son datos iniciales que cumplen con los requisitos del sistema de estudio presentado (sistema (2.5)), ya que tanto u_0 como Z_0 cumplen

$$u_0 > 0, Z_0 > 0$$

Ahora, una vez concretados los datos iniciales y los parámetros q_0 y β , se pueden introducir en el software Matlab, con el código mostrado en los anexos, donde se incluye también como se han logrado las figuras que se muestran a continuación:

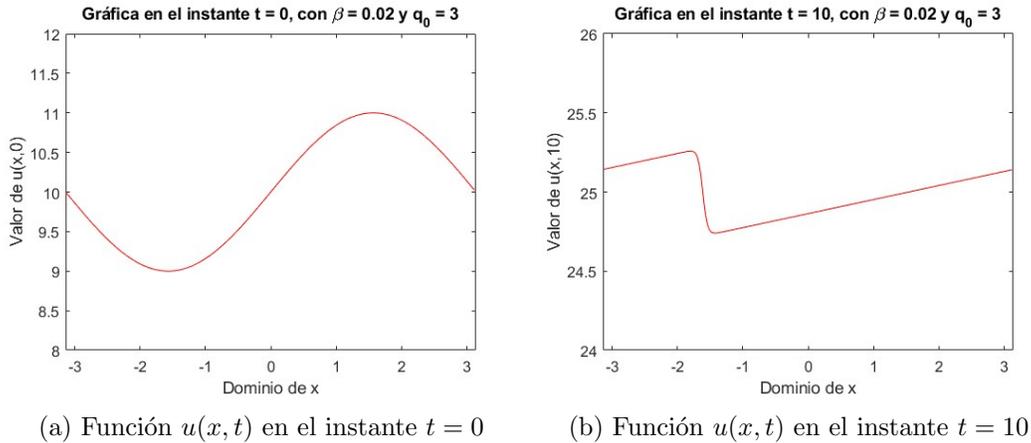


Figura 4.1: Instantes $t = 0, 10$ de la simulación de $u(x, t)$

Pese a que solo se muestran los instantes de tiempo $t = 0$ y $t = 10$, se puede consultar en formato de vídeo (se crea en el código recogido en los anexos) la evolución de la función $u(x, t)$. En esta simulación, se puede apreciar que el mínimo de la función $u(x, t)$ es creciente, lo que concuerda con lo visto a lo largo del trabajo.

Por otro lado, en cuanto a la ecuación de $Z(x, t)$, denota un decrecimiento que tiende hacia 0 como se puede ver en las siguientes figuras:

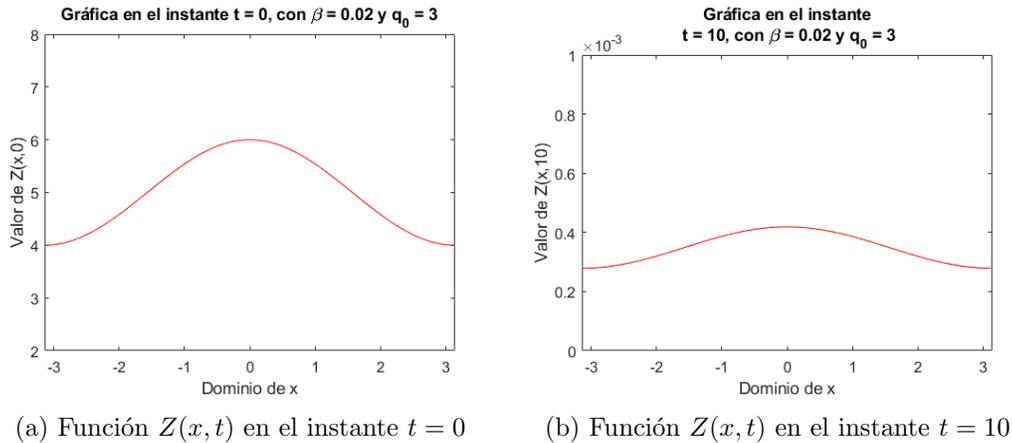


Figura 4.2: Instantes $t = 0, 10$ de la simulación de $Z(x, t)$

Pues bien, se observa que en las simulaciones el crecimiento de $u(x, t)$ está controlado, ya que en todas las simulaciones realizadas, la solución $u(x, t)$ cuando t tiende a T , la función tiende hacia la cantidad conservada definida en la ecuación (3.1). Por ello, se enuncia la siguiente conjetura:

Conjetura 4.1. Sean $u_0(t)$, $Z_0(t)$ los datos iniciales, entonces el límite de la ecuación $Z(x, t)$ tiende a 0 y el límite de la ecuación $u(x, t)$ tiende a la cantidad conservada (3.1).

Referencias bibliográficas

- [1] A. Majda. «A qualitative model for dynamic combustion». En: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 41.1 (1981), págs. 70-93. DOI: 10.1137/0141006.
- [2] P. Constantin, D. Cordoba y J. Wu. «On the critical dissipative quasi-geostrophic equation». En: 50 (2001), págs. 97-107. DOI: 10.48550/arXiv.math/0103040.
- [3] J.A. Facenda Aguirre y F.J. Freniche Ibáñez. *Integración de funciones de varias variables*. Ciencia y Técnica. Ediciones Pirámide, 2002. ISBN: 978-84-368-1665-5.
- [4] A. Majda y A. L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 978-0-521-63948-4.
- [5] M. Capiński y P. E. Kopp. *Measure, integral and probability*. Vol. 14. Springer, 2004. ISBN: 978-1-4471-0645-6. DOI: 10.1007/978-1-4471-0645-6.
- [6] Kurtis D. Fink John. H. Mathews. *Numerical methods using MATLAB*. 4th. Prentice Hall, 2004. ISBN: 978-0-12-812256-3.
- [7] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2010. ISBN: 978-0-387-70913-0. DOI: 10.1007/978-0-387-70914-7.
- [8] L. C. Evans. *Partial differential equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010. ISBN: 978-1-4704-6942-9.
- [9] R. Granero-Belinchón y J. M. Moreno. «La ecuación de Burgers como un paso previo al estudio de los fluidos incompresibles». En: *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 15.3 (2012), págs. 489-511. DOI: 10.48550/arXiv.1105.5990.
- [10] R. Granero-Belinchón y J. K. Hunter. «On a nonlocal analog of the Kuramoto–Sivashinsky equation». En: *Nonlinearity* 28.4 (2015), págs. 1103-1133. DOI: 10.1088/0951-7715/28/4/1103.

Anexos

Función que modeliza la combustión

Se presenta en este apartado el código de Matlab que ha sido utilizado para representar el sistema de ecuaciones:

```
1 function Ftotal=combustion_ode45(t,y,Beta,q0,D,L)
2 %% Sistema de ecuaciones que modelan combustión
3
4 % Diferenciamos entre los valores de u y Z.
5 N=length(y)/2;
6 Uold=y(1:N);
7 Zold=y(N+1:2*N);
8
9 % Se define cada uno de los sumandos de u y el único término de Z
10 U1 = -(D.*fft((real(ifft(Uold)).^2))./2);
11 U2 = -Beta.*L.*Uold;
12 Z1 = - fft(exp(-1./(real(ifft(Uold))).*real(ifft(Zold))));
13 U3 = q0.*Z1;
14
15 % Retorna el resultado
16 Ftotal= [U1+U2-U3;Z1];
17 end
```

Script para la solución y representación del sistema

En este apartado, se muestra el código del script utilizado tanto para la solución como para la representación del sistema de estudio. Se han incluido comentarios explicativos para poder seguir el código fácilmente. Es el siguiente:

```
1 %% Script para la solución representación del sistema estudiado en el TFG
2
3 %% Parámetros físicos del problema
4 N=2^8;
5 x=(2*pi/N)*(-N/2:N/2-1)';
6 % Parámetros simulación (Intercambiar por los que se deseen)
7 Beta=1.e-2;
8 q0=3;
9
10
11 %% Parámetros numéricos
12 dt=1e-2; %paso
13
14 %% Una derivada
15 k=[0:N/2-1, 0, -N/2+1:-1]; %Para una derivada impar
```

```

16 D=1i*k'; %Derivada en el espacio de Fourier
17 clear k
18
19 %% Laplaciano
20 k=[0:N/2, -N/2+1:-1]'; %Para una derivada par
21 L=abs(k).^2; %Laplaciano en el espacio de Fourier.
22 clear k
23
24 %% RESOLUCIÓN CON ODE45
25 [t,y]=ode45(@(t,y) combustion_ode45(t,y,Beta,q0,D,L),0:dt:10, ...
26             [fft(10 + sin(x));fft(5+cos(x))]);
27
28 %% REPRESENTACIÓN CON IMÁGENES DE u(x,t)
29
30 % Se crea la figura en el instante t = 0
31 figure;
32 % Se representa la función u(x,t)
33 plot(x,real(ifft(y(1,1:N))), 'r');
34 % Se fijan los límites de los ejes (Cambiar los valores del eje y
35 %                               para cada simulación)
36 xlim([-pi, pi]);
37 ylim([8, 12]);
38 % Título y etiquetas
39 title('Gráfica en el instante t = 0, con \beta = 0.02 y q_0 = 3');
40 xlabel('Dominio de x');
41 ylabel('Valor de u(x,0)');
42
43 % Se aumenta el tamaño de la fuente del título y las etiquetas
44 set(gca, 'FontSize', 12);
45 pause;
46
47
48 % Crear la figura en el instante t = 10
49 figure;
50 % Se representa la función u(x,t)
51 plot(x,real(ifft(y(1001,1:N))), 'r');
52 % Se fijan los límites de los ejes (Cambiar los valores del eje y
53 %                               para cada simulación)
54 xlim([-pi, pi]);
55 ylim([24, 26]);
56 % Título y etiquetas
57 title('Gráfica en el instante t = 10, con \beta = 0.02 y q_0 = 3');
58 xlabel('Dominio de x');
59 ylabel('Valor de u(x,10)');
60
61 % Se aumenta el tamaño de la fuente del título y las etiquetas
62 set(gca, 'FontSize', 12);
63 pause;
64
65 %% REPRESENTACIÓN CON IMÁGENES DE Z(x,t)
66
67 % Se crea la figura en el instante t = 0
68 figure;
69 % Se representa la función u(x,t)
70 plot(x,real(ifft(y(1,N+1:2*N))), 'r');
71 % Se fijan los límites de los ejes (Cambiar los valores del eje y

```

```

72 %                                     para cada simulación)
73 xlim([-pi, pi]);
74 ylim([2, 8]);
75 % Título y etiquetas
76 title('Gráfica en el instante t = 0, con \beta = 0.02 y q_0 = 3');
77 xlabel('Dominio de x');
78 ylabel('Valor de Z(x,0)');
79
80 % Se aumenta el tamaño de la fuente del título y las etiquetas
81 set(gca, 'FontSize', 12);
82 pause;
83
84
85 % Crear la figura en el instante t = 10
86 figure;
87 % Se representa la función u(x,t)
88 plot(x,real(iff(y(1001,N+1:2*N))), 'r');
89 % Se fijan los límites de los ejes (Cambiar los valores del eje y
90 %                                     para cada simulación)
91 xlim([-pi, pi]);
92 ylim([0, 1.e-3]);
93 % Título y etiquetas
94 title('Gráfica en el instante t = 10, con \beta = 0.02 y q_0 = 3');
95 xlabel('Dominio de x');
96 ylabel('Valor de Z(x,10)');
97
98 % Se aumenta el tamaño de la fuente del título y las etiquetas
99 set(gca, 'FontSize', 12);
100 pause;
101
102
103 %% REPRESENTACIÓN CON VIDEO
104
105 Video = VideoWriter('archivoSimulacionu'); % Cambiar el nombre si se
106 % desea
107
108 % Vídeo de u(x,t) en t \in [0,10]
109 myVideo.FrameRate = 10;
110 open(Video)
111
112 %Bucle para pintar todos los instantes de tiempo
113 for j=1:1001
114     % Se representa la función u(x,t) en el instante t=j
115     plot(x,real(iff(y(j,1:N))), 'r');
116     % Se fijan los límites de los ejes (Cambiar los valores del eje y
117     %                                     para cada simulación)
118     xlim([-pi, pi]);
119     ylim([8, 26]);
120     % Título y etiquetas
121     title('Solución u(x,t) con ODE45 (\beta = 0.01 y q_0 = 3)');
122     xlabel('Dominio de x');
123     ylabel('Valor de u(x,t)');
124     frame = getframe(gcf);
125     writeVideo(Video, frame);
126     plot(x,real(iff(y(j,1:N))), 'r');
127

```

```

128 end
129
130 close(Video)
131 pause;
132 % Vídeo de Z(x,t) en t \in [0,10]
133
134 Video2 = VideoWriter('archivoSimulacionZ'); % Cambiar el nombre si se
135                                             % desea
136 open(Video2)
137
138 %Bucle para pintar todos los instantes de tiempo
139 for j=1:1001
140     % Se representa la función u(x,t) en el instante t=j
141     plot(x,real(iff(y(j,N+1:2*N))), 'r');
142     % Se fijan los límites de los ejes (Cambiar los valores del eje y
143     %                                     para cada simulación)
144     xlim([-pi, pi]);
145     ylim([0, 6]);
146     % Título y etiquetas
147     title('Solución Z(x,t) con ODE45 (\beta = 0.01 y q_0 = 3)');
148     xlabel('Dominio de x');
149     ylabel('Valor de Z(x,t)');
150     frame = getframe(gcf);
151     writeVideo(Video2, frame);
152     plot(x,real(iff(y(j,N+1:2*N))), 'r');
153
154 end
155
156 close(Video2)

```