



***Facultad
de
Ciencias***

**Geometría del conjunto de rectas del
espacio tridimensional real
(Geometry of the set of lines in the real
three-dimensional space)**

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Miguel Madueño Sanz

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Junio - 2023

Resumen

Si se considera el conjunto de rectas del espacio tridimensional real para cada geometría lineal (vectorial, afín y proyectiva), es difícil a primera vista dotarlo de un atlas diferenciable o una topología. El objetivo de este trabajo es determinar tales estructuras y estudiar algunas de sus propiedades.

Para hacerlo, establecemos una biyección entre el conjunto de rectas y otro del que conozcamos una topología y un atlas. De esta forma, la biyección permite pasar estas estructuras definidas en el segundo conjunto al primero.

Así, se obtienen en todos los casos variedades diferenciables, cuyas propiedades cambian notablemente según el espacio que consideremos y si damos orientación o no a las rectas.

Palabras clave: espacio de rectas, geometría lineal, biyección.

Abstract

If we consider the set of lines of the real three-dimensional space for each linear geometry (vector, affine and projective), at first sight, it is difficult to come up with a smooth atlas or topology on it. The goal of this text is to find such structures, and then study what characterizes them.

To do so, we establish a bijection between the set of lines and another one whose properties are known to a greater extent. In this way, the bijection lets us pass any smooth or topological structure defined on the second set to the first one.

In all cases, smooth manifolds are obtained, with different properties depending on the space considered and whether the lines are endowed with an orientation or not.

Keywords: space of lines, linear geometry, bijection.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares: las tres geometrías lineales	3
1.1. Definiciones y construcciones básicas	3
1.2. Relación entre los espacios de las geometrías lineales	6
2. Rectas vectoriales orientadas de \mathbb{R}^3	9
2.1. \mathbb{S}^2 como espacio topológico	9
2.2. \mathbb{S}^2 como variedad diferenciable	10
2.3. Rectas vectoriales orientadas de \mathbb{R}^n	11
3. Rectas vectoriales no orientadas de \mathbb{R}^3	13
3.1. $\mathbb{R}P^2$ como espacio topológico	14
3.2. $\mathbb{R}P^2$ como variedad diferenciable	16
3.3. Rectas vectoriales no orientadas de \mathbb{R}^n	20
4. Rectas afines orientadas de \mathbb{R}^3	21
4.1. TS^2 como variedad diferenciable	23
4.2. La reflexión sobre una recta: una estructura casi paracompleja en TS^2	25
4.3. Rectas afines orientadas de \mathbb{R}^n	25
5. Rectas afines no orientadas de \mathbb{R}^3	27
5.1. Rectas afines no orientadas de \mathbb{R}^n	28
6. Rectas proyectivas no orientadas de $\mathbb{R}P^3$	29
6.1. Coordenadas en $Gr(2, 4)$	30
6.2. La relación de Plücker y la cuádrlica de Klein	31
7. Rectas proyectivas orientadas de $\mathbb{R}P^3$	33

Introducción

Durante el grado, se han estudiado los espacios vectoriales, afines y proyectivos, y las rectas como un caso particular de estos. Sin embargo, es menos frecuente considerar el conjunto de estas rectas y darle estructura. En geometría proyectiva, se utiliza el espacio de rectas vectoriales para construir los espacios proyectivos; en concreto, hemos estudiado que el conjunto de rectas vectoriales no orientadas de \mathbb{R}^3 está identificado con el plano proyectivo real, que tiene una topología natural como cociente de la esfera con la topología usual.

Podríamos plantearnos lo mismo, si en lugar de rectas de un espacio vectorial, consideráramos rectas en otro tipo de espacios. Si pensamos en el conjunto de rectas de \mathbb{R}^3 con estructura de espacio afín, o el espacio proyectivo real de dimensión 3, es difícil a primera vista saber qué topología, más allá de la trivial y la discreta, podemos definir en él; y menos intuitivo aún resulta pensar que estos conjuntos de rectas se puedan dotar de estructura de variedad diferenciable.

Ejemplos como el del plano proyectivo muestran cómo las variedades diferenciables son una versión generalizada de las superficies de \mathbb{R}^3 . La intuición que dan las cartas definidas sobre un conjunto es que este se parece localmente a un espacio euclídeo, de manera similar a lo que pasa en la geometría de superficies. Más aún, la geometría riemanniana toma conceptos geométricos como el de ángulo, longitud, o curvatura, y los aplica a variedades de dimensión cualquiera.

Este trabajo parte de un espacio de dimensión 3, una dimensión que hemos usado frecuentemente durante la carrera. El objetivo es estudiar desde un punto de vista topológico y geométrico el conjunto de rectas del espacio tridimensional real, cuando en él se consideran tres estructuras, correspondientes a las tres geometrías lineales: espacio vectorial, afín y proyectivo. Se tratará entonces de determinar y comparar las propiedades que presentan los conjuntos de rectas en los diferentes casos, teniendo en cuenta además si estas se orientan o no. Para ello, se busca establecer una biyección de cada uno de estos conjuntos en otro de propiedades más conocidas. Veremos por tanto la utilidad de las biyecciones para definir estructuras en un conjunto.

Supongamos dos conjuntos entre los que se puede hacer una biyección, $\phi : X \rightarrow Y$, y que en X hay definida una topología, τ . Debido a que las biyecciones conservan las intersecciones arbitrarias de conjuntos, es decir, $\phi(\cap A) = \cap \phi(A)$, con $A \subseteq X$, es fácil comprobar que el conjunto $\{\phi(A) : A \in \tau\}$ cumple las condiciones para ser una topología en Y . Con esto, lo que conseguimos es pasar una topología de un conjunto a otro a través de la biyección. Es importante notar que, en estas condiciones, ϕ es un homeomorfismo. De la misma forma, si X está dotado de una estructura diferenciable a través de un atlas \mathcal{A} , la composición de ϕ^{-1} con las cartas de \mathcal{A} da un atlas diferenciable sobre Y , y la aplicación ϕ es un difeomorfismo. Por lo tanto, a lo largo de esta revisión, los espacios de rectas corresponden al conjunto Y anterior, y X es el espacio topológico o variedad diferenciable con la que los estudiamos.

Veremos que en todos los casos se puede obtener una estructura diferenciable y una topología. Sin embargo, aunque estos conjuntos de rectas que vamos a estudiar puedan resultar parecidos a primera vista, se muestra cómo la elección del espacio, así como dar o no orientación a las rectas, supone diferencias considerables en las propiedades del conjunto de rectas, como la dimensión o la orientabilidad.

Empezamos con un capítulo de introducción, en el que recordamos definiciones y propiedades relevantes para el desarrollo del trabajo. Después de esto, se expone, por capítulos, el conjunto de rectas para cada tipo de espacio en el siguiente orden:

- El conjunto de rectas vectoriales orientadas, difeomorfo a la esfera \mathbf{S}^2 .
- El conjunto de rectas vectoriales no orientadas, difeomorfo al plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$.
- El conjunto de rectas afines orientadas, difeomorfo al fibrado tangente de la esfera $T\mathbf{S}^2$.
- El conjunto de rectas afines no orientadas, difeomorfo al fibrado tangente del plano proyectivo $T\mathbb{R}P^2$.
- El conjunto de rectas proyectivas no orientadas, difeomorfo a la grassmannniana $Gr(2, 4)$.
- El conjunto de rectas proyectivas no orientadas, difeomorfo a $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$.

Así, en los dos primeros casos obtenemos variedades bidimensionales y en los otros cuatro casos variedades de dimensión cuatro. En los dos casos de rectas afines se obtienen variedades no compactas, mientras que los restantes casos son variedades compactas. Respecto de la orientabilidad, solo el plano proyectivo es no orientable; el resto de variedades es orientable.

Capítulo 1

Preliminares: las tres geometrías lineales

Las geometrías con las que vamos a trabajar están basadas en los espacios vectoriales. En este capítulo repasamos la definición de espacio afín, espacio vectorial y proyectivo; y vemos también algunas relaciones entre ellos que usaremos a lo largo del documento.

1.1. Definiciones y construcciones básicas

Definición 1.1.1. *Un espacio vectorial V sobre un cuerpo F es un conjunto no vacío que tiene definidas dos operaciones, $+$: $V \times V \rightarrow V$ y \cdot : $F \times V \rightarrow V$ que cumplen las siguientes propiedades para cualquier $v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in F$:*

- $u + (v + w) = (u + v) + w$.
- $u + v = v + u$.
- $\exists 0 \in V$ tal que $v + 0 = v$.
- $\exists -v \in V$ para el que $v + (-v) = 0$.
- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$.
- $1 \cdot v = v$, con 1 el elemento neutro del producto en F .
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$.
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.

A partir del espacio vectorial, definimos el espacio afín y el proyectivo.

Definición 1.1.2. *Un conjunto X se dice espacio afín si está asociado a un espacio vectorial, \vec{X} , y hay definida una aplicación $\phi : X \times \vec{X} \rightarrow X$ que cumple:*

- Para todo $x \in X$, $\phi(x, 0) = x$, con 0 el cero de \vec{X} .
- Para todo $v, w \in \vec{X}$ y $x \in X$, $\phi(\phi(x, v), w) = \phi(x, v + w)$.
- Dado $x \in X$, la función que da a cada $v \in \vec{X}$ la imagen $\phi(x, v)$ es una biyección.

La dimensión de un espacio afín es por definición la dimensión del espacio vectorial que tiene asociado.

Definición 1.1.3. Dado un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo F , se llama espacio proyectivo de V al conjunto de clases de equivalencia de $V \setminus \{0\}$ bajo la relación de equivalencia \sim dada por $x \sim y \iff \exists \lambda \in F$ tal que $x = \lambda y$. Este conjunto se denota por $P_{n-1}(F)$ o FP^{n-1} .

La dimensión del proyectivo de un espacio vectorial de dimensión n es por definición $n - 1$.

Por tanto, la clase de equivalencia de un vector x está formada por el subespacio de dimensión 1 generado por x sin el cero. En particular, en \mathbb{R}^3 , las rectas no orientadas forman las clases que dan lugar al plano proyectivo real, $\mathbb{R}P^2$. Como consecuencia, este paso al cociente da una identificación entre el conjunto de rectas de \mathbb{R}^3 y $\mathbb{R}P^2$, una superficie que, como vamos a ver en este capítulo, tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión 2.

Dar una referencia en un espacio proyectivo permite trabajar con coordenadas, que son útiles a la hora de hacer cálculos. Para construir la referencia, necesitamos el concepto de dependencia proyectiva de un conjunto de puntos.

Definición 1.1.4. Sea $P = P(V)$ el espacio proyectivo correspondiente a un espacio vectorial V y sean p_1, \dots, p_r puntos de P , con representantes $v_1, \dots, v_r \in V$ respectivamente. Se dice que p_1, \dots, p_r son proyectivamente dependientes si y solo si sus representantes son linealmente dependientes. En caso contrario, se dice que los puntos son proyectivamente independientes.

A continuación damos la definición de referencia proyectiva, junto con la de base asociada a una referencia, que permite definir las coordenadas homogéneas.

Definición 1.1.5. Sea $P = P(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n . Una colección ordenada de $n + 2$ puntos, $\mathcal{R} = \{p_0, \dots, p_n; p_{n+1}\}$, se dice que es una referencia proyectiva si cualesquiera $n + 1$ puntos de \mathcal{R} son proyectivamente independientes.

Definición 1.1.6. Una base de V , $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ se dice que está asociada a \mathcal{R} si $p_i = [v_i]$, $i = 0, \dots, n$ y $p_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$.

El último punto de una referencia se llama punto unidad, y fija los representantes de una base asociada salvo un factor de proporcionalidad [4, Proposición 2.3]. Con este resultado, dado un punto proyectivo $p = [v]$, las coordenadas de v en una base asociada cualquiera, $v = (x_0, \dots, x_n)$, son únicas salvo un factor $\lambda \neq 0$. A los números x_0, \dots, x_n se les llama coordenadas homogéneas de p respecto de \mathcal{R} y p se representa como $p = [x_0 : \dots : x_n]$.

Al ser $\mathbb{R}P^n$ un cociente a partir de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, cada punto proyectivo tiene siempre alguna coordenada no nula. Esta característica permite dividir el espacio en $n + 1$ subespacios: $A_i = \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{R}P^n : a_i \neq 0\}$, con $i = 0, \dots, n$. Para un A_i dado, se puede construir una biyección con \mathbb{R}^n , que recupera para cada clase de equivalencia un vector representante, omitiendo la coordenada en la posición $i + 1$. A este proceso se le llama deshomogeneización de coordenadas:

$$c_i: \begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] & \longmapsto & \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{array}$$

En la proposición 1.1.10 vemos que estas funciones permiten dotar de estructura de variedad diferenciable al espacio proyectivo real. Pero antes, recordamos las siguientes definiciones.

Definición 1.1.7. Sea M un conjunto. Una aplicación $x : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama carta si es inyectiva y $x(U)$ es un abierto de (\mathbb{R}^n, τ_u) .

Definición 1.1.8. Una colección de cartas, \mathcal{A} , sobre M se llama atlas si sus dominios recubren todo el conjunto. Si además, dadas dos cartas, $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $U \cap V \neq \emptyset$, se cumple que $x(U \cap V)$ e $y(U \cap V)$ son abiertos de \mathbb{R}^n , y el cambio de carta $x^{-1} \circ y$ es un difeomorfismo k veces diferenciable, se dice que las cartas son compatibles y que el atlas es diferenciable de clase k .

En nuestro caso, los difeomorfismos que vamos a manejar son de clase C^∞ . Por tanto, cuando nos refiramos a un atlas como diferenciable, entenderemos que se trata de un atlas C^∞ .

Definición 1.1.9. Una variedad diferenciable es un par (M, m) , donde m es un atlas C^∞ maximal sobre M . La dimensión de M es la dimensión del espacio imagen de las cartas, que, por definición, es el mismo para todas.

Todo atlas diferenciable está contenido en un único atlas maximal C^∞ , m [6, Proposición 1.4]. Además, dos atlas sobre un conjunto son equivalentes si su unión es un atlas C^∞ . Se puede comprobar que esta es una relación de equivalencia. Por otro lado, dos atlas son equivalentes si y solo si están contenidos en el mismo atlas maximal, ya que si la unión de dos atlas es otro atlas, este último está contenido en un atlas maximal, y por tanto los dos primeros también están contenidos en él. De esta manera, dar una estructura de variedad diferenciable a un conjunto se puede ver como elegir una clase de equivalencia de atlas, que puede darse eligiendo como representante cualquiera de los atlas que la forman.

Un ejemplo básico de variedad diferenciable es \mathbb{R}^n con la identidad. Al estar formado el atlas por una sola carta, es trivial comprobar la diferenciableidad.

Proposición 1.1.10. La deshomogeneización de coordenadas forma un atlas diferenciable sobre el espacio proyectivo.

Demostración. Las funciones c_i forman un atlas sobre $\mathbb{R}P^n$, ya que $\{A_i\}_i$ recubre el espacio proyectivo, y cada c_i es una biyección entre A_i y \mathbb{R}^n y por tanto una carta.

Para ver que los cambios de carta son diferenciables, tomamos c_i y c_j , con $i < j$. La inversa de la carta c_j es

$$c_j^{-1}(x_1, \dots, x_n) = [x_1 : \dots : x_j : 1 : x_{j+1} : \dots : x_n].$$

Por tanto, la composición $c_i \circ c_j^{-1}$ da la siguiente función sobre el abierto $c_j(A_i \cap A_j) = \mathbb{R}^n \setminus \{x_{i+1} = 0\}$:

$$c_i \circ c_j^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_i}{x_{i+1}}, \frac{1}{x_{i+1}}, \frac{x_j}{x_{i+1}}, \frac{x_{j+1}}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{i+1}} \right),$$

donde el circunflejo sobre una variable la omite.

Este cambio de carta es C^∞ . Además, tiene función inversa, que es

$$c_j \circ c_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_i}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right),$$

definida en el abierto $c_i(A_i \cap A_j) = \mathbb{R}^n \setminus \{x_j = 0\}$ y diferenciable. Con esto concluimos que las cartas son compatibles. Para $i > j$ se resuelve de forma análoga.

Por tanto, tenemos que el conjunto de funciones de deshomogeneización de coordenadas define un atlas diferenciable sobre $\mathbb{R}P^n$. \square

Así resulta que los espacios en los que vamos a poner el conjunto de rectas son variedades diferenciables.

1.2. Relación entre los espacios de las geometrías lineales

La construcción del espacio afín y el proyectivo a partir del vectorial da lugar a relaciones interesantes entre ellos.

1. La primera es que todo espacio vectorial es un espacio afín si se toma como dirección el propio espacio vectorial. Por ejemplo, \mathbb{R}^3 asociado a él mismo como espacio vectorial es un espacio afín, con la suma de las componentes de un punto y un vector como la aplicación del espacio afín.

2. Por otro lado, todo espacio afín se puede sumergir en un espacio proyectivo, expresando este último como el espacio afín unido a un conjunto de puntos, llamado hiperplano del infinito. Se dice que el espacio proyectivo es el completado proyectivo del espacio afín. Esta inmersión permite relacionar nociones afines con proyectivas. Por ejemplo, el paralelismo de subespacios se puede expresar en términos de los puntos del infinito. A continuación, construimos el completado proyectivo de un espacio afín.

Sea X un espacio afín de dimensión n , \vec{X} su espacio vectorial dirección, y ϕ la aplicación asociada. A partir de X se puede construir un espacio vectorial de una dimensión mayor. Para ello, consideramos el cuerpo K sobre el que está definido \vec{X} . Entonces, el conjunto $\hat{X} = ((K \setminus \{0\}) \times X) \cup \vec{X}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre K [4, Apéndice A.2] con las operaciones $+$: $\hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ y \cdot : $K \times \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ dadas por

$$(\lambda, P) + (\mu, Q) = \begin{cases} \mu \vec{PQ} & \text{si } \lambda + \mu = 0 \\ (\lambda + \mu, P + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \vec{PQ}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(\lambda, P) + v = (\lambda, P + \frac{1}{\lambda} v)$$

donde \vec{PQ} representa el único vector tal que $\phi(P, \vec{PQ}) = Q$, y

$$\mu \cdot (\lambda, P) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu = 0 \\ (\mu\lambda, P) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo 0 el cero de \vec{X} . Los casos en los que se operan dos vectores de \vec{X} , o un vector y un escalar, la suma y producto en \hat{X} se reduce a la que tiene definida \vec{X} como espacio vectorial.

De esta forma, X está inmerso en \hat{X} como el hiperplano afín no vectorial $\{1\} \times X \subseteq \hat{X}$.

Para pasar al proyectivo, tomamos clases de equivalencia en \hat{X} como hemos hecho al principio del capítulo. Si consideramos la proyección sobre \hat{X} , $\pi : \hat{X} \rightarrow \tilde{X} = P(\hat{X})$, y restringimos π a $\{1\} \times X \equiv X$, $\pi|_X$ es inyectiva, ya que dado un $x \in X$, la clase $[x]$, tiene un único representante en X , que es $x = [x] \cap X$ [14, Capítulo 4, Sección 1]. Por tanto, podemos identificar X con $\pi(X)$. Además, se tiene que $\tilde{X} = X \cup P(\vec{X})$ y $\tilde{X} \setminus X = P(\vec{X})$. Decimos que \tilde{X} es el completado proyectivo de X , que se obtiene añadiendo a X los

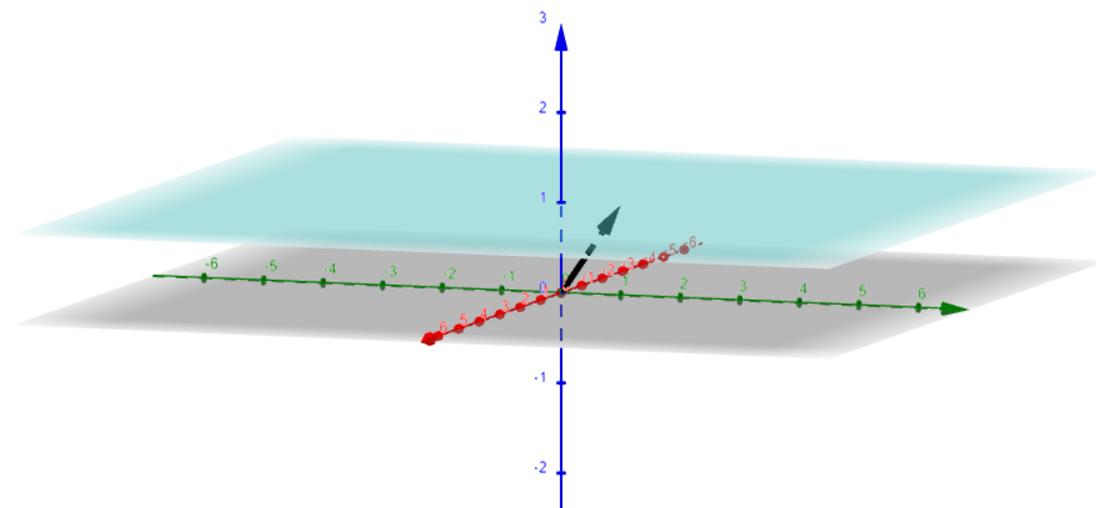


Figura 1.1: Hiperplano afín $\{1\} \times X$ (azul) y espacio vectorial \vec{X} (gris) inmersos en \hat{X}

puntos del infinito, $X_\infty = P(\vec{X})$.

3. Dada una recta r de un espacio afín X , el subespacio vectorial de \hat{X} que la contiene es $W = \{(\lambda, x) : x \in r, \lambda \neq 0\} \cup \vec{r}$, siendo \vec{r} la dirección de r . Entonces, proyectivizando, nos queda la extensión proyectiva de r , $P(W) \equiv r \cup P(\vec{r})$. Es decir, al añadir a un espacio afín los puntos del infinito, cada recta queda extendida por un punto, que es el subespacio proyectivo generado por su dirección. Resulta así que las rectas afines paralelas, que son aquellas que tienen como dirección la misma recta vectorial, al añadir los puntos del infinito, se cortan en el mismo punto de X_∞ . En el caso de un espacio proyectivo real, veremos más adelante que proyectivizar un plano es equivalente a identificar los puntos antipodales de la circunferencia unidad contenida en él. También comprobaremos que la circunferencia identificada es homeomorfa de nuevo a una circunferencia. En resumen, las rectas proyectivas reales son homeomorfas a circunferencias.

4. También existe una relación entre los subespacios proyectivos y los subespacios vectoriales que conviene señalar.

Dado un espacio vectorial, V , de dimensión n , y $P = P(V)$ el espacio de dimensión $n - 1$ que resulta al proyectivizar V , los subespacios proyectivos de P pueden relacionarse con los subespacios del espacio vectorial.

Es fácil ver que dado un subespacio proyectivo $P(W)$, este está asignado de forma única al subespacio vectorial W : $W \longleftrightarrow P(W)$. Dados dos subespacios diferentes, W_1 y W_2 , hay al menos un vector que está en uno y no en el otro, y, por tanto, todos los proporcionales a él también están en el primero y no en el segundo. Esto es lo mismo que decir que, al proyectivizar, hay una clase de equivalencia que está en un subespacio proyectivo y no en el otro.

Cuando tengamos que estudiar las rectas proyectivas de $\mathbb{R}P^3$, esta relación nos sirve para identificar este conjunto con el de planos vectoriales de \mathbb{R}^4 .

5. La última propiedad que vemos es que en cualquier espacio proyectivo $P(V)$, dada

una referencia se puede establecer una biyección entre el conjunto de sus puntos y en el de sus hiperplanos. Para ello, consideramos una referencia \mathcal{R} . Sea $a = [a_0 : \dots : a_n]$ un punto cualquiera de $P(V)$ expresado en \mathcal{R} . Entonces se puede asociar el punto a al hiperplano de ecuación $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$. Como a tiene alguna coordenada no nula, la ecuación anterior define un hiperplano siempre. Además, la ecuación del plano tiene coeficientes únicos salvo un factor de proporcionalidad, igual que las coordenadas de a , por lo que el hiperplano dado es único.

Capítulo 2

Rectas vectoriales orientadas de \mathbb{R}^3

En este capítulo, nos dedicamos a las rectas vectoriales orientadas, que dan el caso más sencillo de variedad de los que trataremos a lo largo del trabajo. Vamos a ver que se pueden poner en biyección con la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 centrada en el origen. Si tomamos el vector unitario que genera una recta, la idea es asociarle el punto de la esfera al que “señala”. Para ello, repasamos primero el concepto de orientación.

La estructura que estamos considerando para \mathbb{R}^3 es la de espacio vectorial. Las rectas, como subespacios de dimensión 1, tienen bases, formadas por un solo vector. Sea $r \subseteq \mathbb{R}^3$ una recta vectorial. El conjunto, \mathcal{B} , de bases de r puede dividirse en dos clases de equivalencia según el signo del determinante del cambio de base entre dos bases dadas (en este caso, el cambio de base es un factor de proporcionalidad entre dos vectores). Si consideramos bases $B_1 = \{v\}, B_2 = \{w\}$ en \mathcal{B} , $B_1 \sim B_2 \iff v = \lambda w, \lambda > 0$. Dar una orientación en r es elegir una de estas dos clases de equivalencia.

Por tanto, dada una orientación de r , una base en esta clase, $B = \{v\}$, define el vector unitario $v/\|v\| \in \mathbf{S}^2$, que determina una base con la misma orientación. A r con esta orientación se le asigna $v/\|v\|$. Dar la orientación opuesta permite elegir el punto antipodal.

Con esto, con cada recta se pueden cubrir dos puntos de la esfera, uno para cada orientación. Repitiendo el proceso con el resto de rectas, se consigue asociar a cada punto de la esfera, una y solo una recta orientada. Esta biyección identifica el conjunto de rectas vectoriales orientadas con \mathbf{S}^2 .

2.1. \mathbf{S}^2 como espacio topológico

Si dotamos a la esfera de una topología, la biyección que acabamos de dar permite llevar esta estructura al conjunto de rectas orientadas. La topología que vamos a considerar en la esfera es la que hereda como subconjunto de \mathbb{R}^3 con la topología usual. En estas condiciones, la esfera presenta algunas propiedades topológicas importantes, que comparte con el conjunto de rectas vectoriales orientadas de \mathbb{R}^3 cuando en él se considera la topología que se induce por la biyección: es un espacio topológico T_2 , compacto, y conexo por caminos.

Además, es simplemente conexa, ya que su grupo fundamental es el grupo trivial, resultado que puede obtenerse del teorema de van Kampen [16, Ejemplo 4.7].

Por último, satisface el segundo axioma de numerabilidad. Para ver esto, nos fijamos en el conjunto de bolas abiertas de \mathbb{R}^3 de radio racional y centro con coordenadas racionales. Este es un conjunto numerable, y cualquier abierto de la topología usual puede ponerse como unión de estas bolas. Por tanto, la restricción a la esfera da una base de la topología de subespacio, también numerable.

2.2. \mathbf{S}^2 como variedad diferenciable

Hay diferentes formas de definir un atlas en \mathbf{S}^2 . Dado que es un conjunto compacto, y las cartas son homeomorfismos, no es posible definir una carta global en ella. De lo contrario, su imagen sería un abierto compacto de \mathbb{R}^2 , lo cual no es posible. En la siguiente proposición damos estructura de variedad a la esfera con un atlas de dos cartas: las proyecciones estereográficas.

Proposición 2.2.1. *La esfera \mathbf{S}^2 puede dotarse de estructura de variedad diferenciable.*

Demostración. Consideramos las proyecciones estereográficas desde el polo norte, $N = (0, 0, 1)$, y sur, $S = (0, 0, -1)$:

$$\begin{aligned} f_N: \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \\ f_S: \mathbf{S}^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right). \end{aligned}$$

Estas funciones forman un atlas, ya que son inyectivas; su imagen es un abierto, \mathbb{R}^2 , y sus dominios recubren la esfera. La figura 2.1 representa la proyección desde el polo norte [23]. Para cada punto del plano, S , la recta que une S con N determina un punto en la esfera (es sobreyectiva), que es único (es inyectiva).

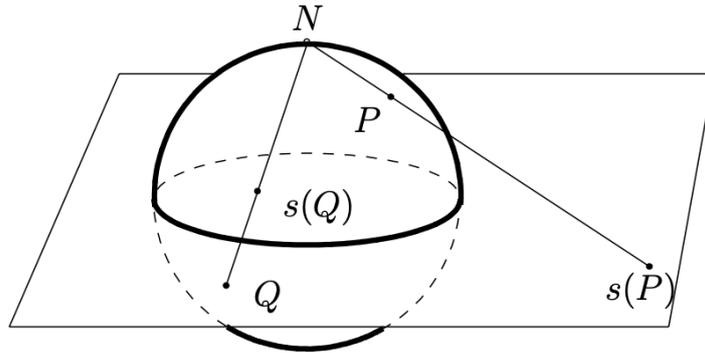


Figura 2.1: Proyección estereográfica desde el polo norte

Por otro lado, el cambio de carta es un difeomorfismo. Consideramos la composición $F = f_N \circ f_S^{-1}$ definida sobre $f_S(\mathbf{S}^2 \setminus \{N, S\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, que es abierto. Para un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$f_S^{-1}((x, y)) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} - 1\right)$$

con lo que

$$F(x, y) = f_N \circ f_S^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Esta función es diferenciable coordenada a coordenada. Además, como $F \circ F = id$, F es biyectiva y $F = F^{-1}$. Con esto concluimos que $\mathcal{A} = \{f_N, f_S\}$ es un atlas C^∞ de \mathbf{S}^2 . \square

Como se ha estudiado en las asignaturas de geometría, la esfera unidad es una superficie que tiene curvatura de Gauss igual a 1 en todo punto. Otro resultado conocido es que es orientable, cosa que puede demostrarse viendo que la aplicación de Gauss sobre ella es la identidad, y por tanto es continua.

2.3. Rectas vectoriales orientadas de \mathbb{R}^n

Con las rectas orientadas de \mathbb{R}^n puede hacerse una biyección con la esfera \mathbf{S}^{n-1} . Terminamos este capítulo repasando las principales características de este caso más general. La esfera de dimensión $k = n - 1$ cumple las mismas propiedades topológicas que la 2-esfera. Su grupo fundamental es el trivial, con $k > 1$, con lo que también es simplemente conexa. Para el caso $k = 1$, la circunferencia tiene grupo fundamental $\pi_1(\mathbf{S}^1) = \mathbb{Z}$ [10, Teorema 1.7]. Respecto a la geometría diferencial, \mathbf{S}^k , es una variedad riemanniana orientable [3, Ejemplo 4.6] de curvatura seccional constante 1 [19, Ejemplo 16.1].

Capítulo 3

Rectas vectoriales no orientadas de \mathbb{R}^3

En el capítulo de preliminares, hemos formado una biyección entre el plano proyectivo y las rectas vectoriales de \mathbb{R}^3 enviando cada recta a la clase que ella misma forma. A continuación, vemos algunas de las propiedades más relevantes de esta variedad. Empezamos con los aspectos topológicos, y después dotamos al plano proyectivo de una métrica riemanniana.

Si se considera $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ como subespacio topológico de (\mathbb{R}^3, τ_u) , puede dotarse al plano proyectivo de una topología a través de la relación de equivalencia anterior. Esta topología, la topología cociente, está formada por los subconjuntos $U \subseteq \mathbb{R}P^2$ tales que $\pi^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, siendo π la proyección dada por $\pi(x) = [x]$. La topología cociente es la topología más fina que hace continua la proyección natural.

A la hora de trabajar con el plano proyectivo, a veces es más fácil usar otras definiciones. Por ejemplo, puede ponerse como conjunto cociente a partir de la esfera unidad centrada en el origen de \mathbb{R}^3 , donde cada clase está formada por una pareja de puntos antipodales. En la siguiente proposición comprobamos que, en efecto, estas definiciones son equivalentes.

Proposición 3.0.1. *Sea \mathbf{S}^2 la esfera unidad centrada en el origen, $\tau = \tau_u|_{\mathbf{S}^2}$ la topología de la esfera como subconjunto de \mathbb{R}^3 y \sim la relación de equivalencia en la esfera definida por: $x \sim y \iff y = \pm x$ para todo $x, y \in \mathbf{S}^2$. Entonces, $\mathbb{R}P^2$ con la topología cociente definida anteriormente es homeomorfo a $(\mathbf{S}^2 / \sim, \tau / \sim)$.*

Demostración. Sea f la aplicación dada por

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{S}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \frac{1}{\|(x, y, z)\|} (x, y, z) \end{array} ,$$

siendo $\|\cdot\|$ la norma euclídea. La aplicación f es continua y abierta. Para ver esto último, tomamos coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y en \mathbf{S}^2 . Dado un vector p , con coordenadas en una base \mathcal{B} , denotamos por r la norma de p , θ el ángulo que forma p con el eje z , y ϕ el ángulo entre la proyección de p sobre el plano XY y el eje x .

En estas coordenadas, podemos considerar la base de la topología usual restringida a $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, \mathcal{B}_τ , que se construye a continuación. Dados intervalos abiertos, $R \subseteq (0, +\infty)$, $\Theta \subseteq [0, \pi]$, $\Phi \subseteq (0, \infty)$, \mathcal{B}_τ está formada por los conjuntos de la forma $R \times \Theta \times \Phi$.

La imagen por f de $R \times \Theta \times \Phi$ es el conjunto $\Theta \times \Phi$, que también es abierto en la esfera. Por tanto, dado un abierto A de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, podemos expresarlo como unión de abiertos de \mathcal{B}_τ :

$$A = \bigcup_{i \in I} R_i \times \Theta_i \times \Phi_i,$$

de donde se obtiene

$$f(A) = \bigcup_{i \in I} \Theta_i \times \Phi_i,$$

que también es abierto. La aplicación f permite llevar abiertos entre \mathbf{S}^2 / \sim y $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$ a través del siguiente diagrama. Las topologías que tiene cada conjunto son las de subespacio de (\mathbb{R}^3, τ_u) , o las correspondientes topologías cociente.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbf{S}^2 \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim & \xrightarrow{k} & \mathbf{S}^2 / \sim \end{array}$$

siendo g y h las identificaciones en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y \mathbf{S}^2 respectivamente. Con esto, la imagen de una clase por k en el primer conjunto es $k([x]_1) = [x/\|x\|]_2$.

La función k es biyectiva. Para ver que es continua, tomamos un abierto $U \in \mathbf{S}^2 / \sim$. Como h es continua, $U' = f^{-1}(h^{-1}(U))$ es abierto. Por otro lado, vemos si $g(U')$ es abierto con la definición de topología cociente: la contraimagen de $g(U')$ por g es $g^{-1}(g(U')) = U' \cup (-U')$, que es abierto. Por tanto, como $k^{-1}(U) = g(U')$, k es continua.
1

Finalmente, comprobamos que k es abierta. Para U un abierto en $\mathbb{R}P^2$, $U' = f(g^{-1}(U))$ es abierto. De la misma forma que antes, $h(U')$, es abierto si y solo si $h^{-1}(h(U'))$ lo es. $h^{-1}(h(U')) = U' \cup (-U')$ es unión de abiertos. Por tanto, se tiene $h^{-1}(h(U')) = U' \cup (-U') = k(U)$ con lo que k es continua y abierta, que es lo que queríamos probar. \square

Como ejemplo, la figura 3.1 muestra cómo f actúa sobre un cono. f lleva un vector a uno unitario con la misma dirección y orientación. Por tanto, dado un vector $x \neq 0$, todos los vectores $y = \lambda x, \lambda > 0$, que forman la semirrecta generada por x , r_x , van a parar a $r_x \cap \mathbf{S}^2$.

Una última forma de definir el plano proyectivo que vemos es como un disco cerrado, \mathbf{D}^2 , módulo la relación de equivalencia que identifica p y q si son puntos del borde antipodales. Vemos que esta definición es equivalente a las anteriores si en la esfera identificamos todas las parejas de puntos antipodales menos los de un ecuador, quedando una semiesfera, homeomorfa al interior del disco, y el ecuador, homeomorfo al borde del disco.

3.1. $\mathbb{R}P^2$ como espacio topológico

Hemos construido diferentes modelos del plano proyectivo como espacio cociente, relacionándolo con la esfera y con el disco con borde. Vamos a trabajar con el modelo de la esfera, ya que es interesante para estudiar propiedades como la conexión o la compacidad

¹En general, dado un espacio topológico (X, τ) y \sim una relación de equivalencia, la aplicación cociente π es abierta si y solo si $\pi^{-1}(\pi(A)) \in \tau$ para todo $A \in \tau$. Esto se deduce de la definición de topología cociente.

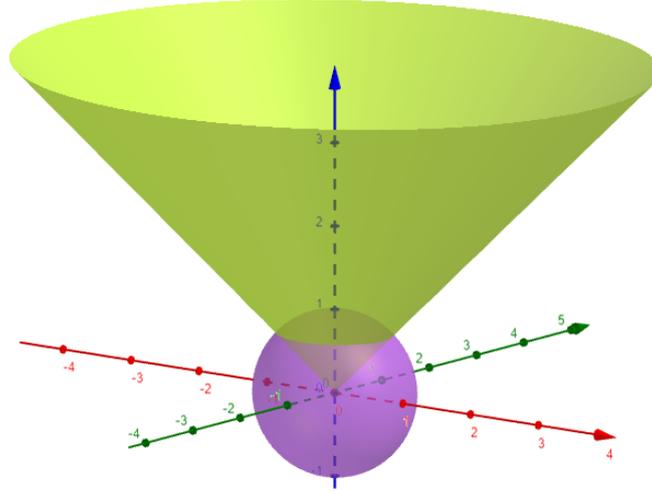


Figura 3.1: Un cono interseca a la esfera en un paralelo

una vez se le dota de la topología cociente. Sin embargo, con cualquiera de las definiciones anteriores $\mathbb{R}P^2$ tiene las siguientes propiedades topológicas:

- Es T_2 : sean $u, v \in \mathbb{R}P^2$ dos puntos distintos. Existen $x, y \in \mathbf{S}^2$ tales que $\pi^{-1}(u) = \{x, -x\}$ y $\pi^{-1}(v) = \{y, -y\}$, donde π es la proyección canónica sobre esfera. \mathbf{S}^2 es T_2 con la topología que hereda de \mathbb{R}^3 . Por tanto, para x e y , existen abiertos disjuntos U_1, V_1 , con $x \in U_1$ y $y \in V_1$. Aplicamos la misma condición a la pareja $-x, y$, obteniendo los abiertos U_2 y V_2 . Definiendo $V = V_1 \cap V_2$ y $U = U_1 \cap (-U_2)$, al tomar imágenes por π , $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son conjuntos disjuntos que contienen respectivamente a u y a v . Además, son abiertos, ya que $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup -U$ y $\pi^{-1}(\pi(V)) = V \cup -V$ lo son.
- Es compacto por ser imagen de la esfera, que es compacta, por la aplicación continua π .
- Es conexo por caminos: dados dos puntos, $u, v \in \mathbb{R}P^2$, existen $a, b \in \mathbf{S}^2$ tales que $\pi(a) = u$ y $\pi(b) = v$. La esfera es conexa por caminos, por lo que podemos considerar un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{S}^2$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Entonces, la composición $\pi \circ \gamma$ es un camino entre u y v . Al ser conexo por caminos, el plano proyectivo es también conexo.
- La esfera es un espacio simplemente conexo, y las aplicaciones $\{id, -id\} \cong \mathbb{Z}_2$ forman un grupo de homeomorfismos tal que para todo $x \in \mathbf{S}^2$, existe un entorno U con $U \cap (-id(U)) = U \cap (-U) \neq \emptyset$. Entonces, $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \pi_1(\mathbf{S}^2/\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ [7, Teorema 1.18], con lo que $\mathbb{R}P^2$ no es simplemente conexo.
- Satisface el segundo axioma de numerabilidad. Sea $\mathcal{B} = \{B_n, n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable de $\tau = \tau_u|_{\mathbf{S}^2}$. Dado un conjunto $A \in \tau / \sim$, A es la imagen por π de un abierto de la esfera: $A = \{[x] : x \in A', A' \in \tau\}$.

Como $A' = \bigcup_{i \in I} B_i$, podemos escribir

$$A = \{[x] : x \in \bigcup_{i \in I} B_i\} = \bigcup_{i \in I} \{[x] : x \in B_i\}.$$

Esto implica que el conjunto $\mathcal{B}' = \{[x] : x \in B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que es numerable, es base de la topología cociente.

3.2. $\mathbb{R}P^2$ como variedad diferenciable

Como variedad, el plano proyectivo admite una inmersión en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, es una superficie compacta y no orientable, por lo que la imagen de cualquier inmersión siempre tiene autointersecciones [6, Teorema 4.35].

Sabemos que el atlas de la proposición 1.1.10 define una topología diferencial en $\mathbb{R}P^2$, τ^{dif} . Sin embargo, no sabemos a priori qué forma tienen sus abiertos y sería útil saberlo para estudiar propiedades. Sin embargo, conocemos la topología de $\mathbb{R}P^2$ como espacio cociente. Entonces, nos planteamos si $\tau/\sim = \tau^{dif}$. Veamos que se da la igualdad.

Proposición 3.2.1. *La topología cociente de $\mathbb{R}P^2$, τ/\sim y la topología diferencial, τ^{dif} , que definen las funciones de deshomogeneización coinciden.*

Demostración. Para probarlo, vemos si las cartas son homeomorfismos con la topología cociente [6, Proposición 3.12]. Lo hacemos para c_0 (se comprueba de la misma forma para las otras cartas).

La función c_0 es inyectiva, ya que es carta, y hemos visto que también es sobreyectiva, por lo que es biyectiva.

Vemos si la carta es abierta estudiando la imagen de los elementos de una base de la topología τ/\sim restringida a A_0 . Los abiertos de A_0 son imagen por la aplicación cociente de abiertos en $A_0^+ = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{S}^2 : x_0 > 0\}$. Por tanto, una base de la topología en A_0 se puede conseguir con una base, \mathcal{B} , de la de este último conjunto. Podemos tomar \mathcal{B} el conjunto de regiones abiertas determinadas por pares de meridianos y paralelos, por ser fácil el cálculo de su imagen por c_0 : los meridianos se transforman en semirectas que parten del origen, y los paralelos en circunferencias centradas en el origen. La figura 3.2 representa la aplicación [22].

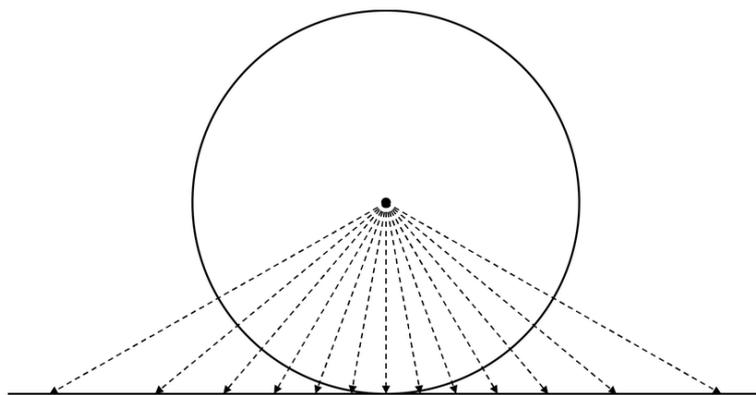


Figura 3.2: Proyección sobre el plano de los puntos de A_0 por la carta c_0

Entonces, la imagen de una de estas regiones por $c_0 \circ \pi$ es un trozo abierto de una corona circular. Por tanto, la aplicación es abierta.

Al mismo tiempo, las secciones de \mathbb{R}^2 determinadas por las semirectas y circunferencias anteriores también definen una base de la topología usual del plano. Por tanto tomando imágenes inversas llegamos a que c_0 es continua.

Con esto, hemos probado que c_0 es homeomorfismo, y con ello que las topologías $\tau / \sim \tau^{dif}$ coinciden. \square

Esto implica que las propiedades que se han probado en la sección 3.1 siguen siendo ciertas para $\mathbb{R}P^2$ como espacio topológico con la topología diferencial. En concreto, $\mathbb{R}P^2$ con la topología diferencial es T_2 y satisface el segundo axioma de numerabilidad, de forma que es una variedad metrizable ².

Lo siguiente que vamos a hacer es introducir el concepto de métrica riemanniana, y después, estudiaremos la curvatura de $\mathbb{R}P^2$, una parte importante de la geometría de una variedad riemanniana.

Definición 3.2.2. *Sea M una variedad diferenciable, se llama métrica riemanniana a cualquier campo tensorial, g , de tipo $(0,2)$ simétrico y definido positivo. En estas condiciones, se dice que el par (M, g) es una variedad riemanniana.*

Para cada punto p de una variedad riemanniana M , la métrica es un producto interno de T_pM , el espacio tangente a M en p .

Un concepto que interesa en la geometría riemanniana es el de curvatura. Hay diferentes formas de generalizar la noción de curvatura de Gauss para superficies que no tienen un embedding en \mathbb{R}^3 . Una de ellas es la curvatura seccional.

Definición 3.2.3. *Sea (M, g) una variedad riemanniana, R un tensor de curvatura $(1,3)$ en M , Π un plano del espacio tangente T_pM en un punto $p \in M$, y $\{X, Y\}$ una base ortonormal de Π , entonces la curvatura seccional de Π , denotada por $K(\Pi)$ es*

$$K(\Pi) = g(R(X, Y)X, Y).$$

Geoméricamente, la curvatura seccional de un plano es la curvatura de Gauss de la superficie que determina la aplicación exponencial aplicada a dicho plano. Recordamos que la aplicación exponencial en un punto p de M manda a cada vector $v \in T_pM$ el punto $\gamma(1) \in M$, siendo γ la única geodésica tal que $\gamma(0) = p$ y cuyo vector tangente en p es v .

A continuación vemos que se puede definir una métrica riemanniana en el plano proyectivo y calculamos su curvatura. Para ello, enunciemos antes el siguiente lema [25, Teorema 2.9.1].

Lema 3.2.4. *Las isometrías locales conservan la curvatura seccional.*

Proposición 3.2.5. *$\mathbb{R}P^2$ es una variedad riemanniana de curvatura seccional constante igual a 1.*

Demostración. Denotamos $\mathbb{R}P^2$ por P^2 por simplicidad. Sea $p \in P^2$, $u, v \in T_pP^2$ y g la métrica riemanniana en la esfera dada por $g = g_u(\mathbb{R}^3)|_{\mathbb{S}^2}$. Si restringimos π a un abierto U de forma que sea inyectiva, con $p \in \pi(U)$, podemos definir una métrica en P^2 , g' , a partir de g .

Para el punto p , consideramos la función $g'_p : T_pP^2 \times T_pP^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g'_p(u, v) = g_{f^{-1}(p)}(f_*^{-1}(u), f_*^{-1}(v)),$$

²Un espacio topológico se dice metrizable si existe una distancia sobre él tal que la topología que induce es la topología previa que tiene el espacio.

con $f = \pi|_U$ y denotando por f_* la aplicación tangente de f en $f^{-1}(p)$. La función g'_p está bien definida, teniendo en cuenta que f_* es un isomorfismo: para cualquier u de $T_p P^2$, existe $f_*^{-1}(u)$, por ser f_* sobreyectiva, y es único, porque es inyectiva. Comprobamos que f_* es biyectiva.

La aplicación f_* depende de la carta escogida en $f^{-1}(p)$ y en p . El cálculo se simplifica si en la esfera se consideran los conjuntos $A_i^+ = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{S}^2 : x_i > 0\}$ y $A_i^- = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{S}^2 : x_i < 0\}$, con $i = 0, 1, 2$ y se toma el atlas diferenciable formado por las aplicaciones

$$\begin{aligned} c_0^\pm: \quad A_0^\pm &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_0, x_1, x_2) &\longmapsto (x_1/x_0, x_2/x_0) \\ \\ c_1^\pm: \quad A_1^\pm &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_0, x_1, x_2) &\longmapsto (x_0/x_1, x_2/x_1) \\ \\ c_2^\pm: \quad A_2^\pm &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_0, x_1, x_2) &\longmapsto (x_0/x_2, x_1/x_2). \end{aligned}$$

Estas funciones recubren \mathbb{R}^2 y son inyectivas, por lo que forman un atlas sobre la esfera. Los cambios de carta son los mismos que los de la demostración de la proposición 1.1.10, por lo que son diferenciables.

Calculamos con este atlas la matriz de f_* . Sea $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{S}^2$ tal que $p = [x]$. Supongamos que $p \in A_0$. Para $p \in A_1$ o $p \in A_2$, el cálculo es el mismo. Entonces, $x \in A_0^+$ o $x \in A_0^-$.

Si $x \in A_0^+$, consideramos la carta c_0^+ en la esfera y c_0 en el plano proyectivo. La matriz, M_* , de la aplicación tangente, $f_* : T_{f^{-1}(p)}\mathbf{S}^2 \rightarrow T_p P^2$, en las bases $\{\partial/\partial(c_0^+)^i\}_{i=1,2}$ y $\{\partial/\partial(c_0)^i\}_{i=1,2}$ de los respectivos espacios tangentes tiene de entradas

$$(M_*)_{i,j} = \frac{\partial(c_0^i \circ f \circ (c_0^+)^{-1})}{\partial t^j} = \delta_i^j.$$

O sea, M_* es la identidad, por lo que f_* es una biyección.

Si $x \in A_0^-$, se toma c_0^- en vez de c_0^+ , y se obtiene el mismo resultado.

Por último, podríamos plantearnos construir la aplicación tangente con otra combinación de cartas. En este caso, también es un isomorfismo. Dadas \bar{c}_h y c_k cartas cuyos dominios contengan a x y p respectivamente, la matriz de f_* es la matriz jacobiana

$$M_* = J(c_k \circ f \circ \bar{c}_h^{-1}) = J(c_k \circ c_i^{-1} \circ c_i \circ f \circ (c_i^\pm)^{-1} \circ (c_i^\pm) \circ \bar{c}_h^{-1}),$$

para algún i tal que $p \in A_i$. Usando la regla de la cadena, expresamos M_* como producto de matrices jacobianas:

$$M_* = J(c_k \circ c_i^{-1}) \cdot Id \cdot J((c_i^\pm) \circ \bar{c}_h^{-1}) = J_1 \cdot J_2.$$

Los cambios de carta son difeomorfismos, por lo que los determinantes de sus jacobianas son no nulos y

$$\det(M_*) = \det(J_1) \cdot \det(J_2) \neq 0.$$

g'_p es bilineal en \mathbb{R} , por ser g bilineal y f_* lineal; es simétrica, por serlo g ; y es definida positiva, porque g también lo es y f_*^{-1} es inyectiva. Por tanto g' es una métrica

riemanniana en P^2 .

Podemos comprobar que π es una isometría local. Dado $x \in \mathbf{S}^2$ y U entorno de x en que $f = \pi|_U$ es inyectiva, escogemos $a, b \in T_x \mathbf{S}^2$. Entonces,

$$g'_{f(x)}(f_*(a), f_*(b)) = g_x(f_*^{-1}(f_*(a)), f_*^{-1}(f_*(b))) = g_x(a, b).$$

La curvatura seccional de un plano Π del espacio tangente a \mathbf{S}^2 en un punto x coincide con la curvatura de Gauss de la superficie $\exp_x(\Pi)$, siendo \exp_x la aplicación exponencial en x . Por otro lado, $T_x \mathbf{S}^2$ tiene dimensión 2, por lo que la curvatura seccional es única y coincide con la curvatura de Gauss en x . Aplicando el lema 3.2.4, tenemos que la curvatura seccional de P^2 también es 1 y constante. \square

La orientabilidad es otra propiedad importante de las variedades diferenciables. Existen varias formulaciones equivalentes. Podemos recordar una primera, en términos geométricos [6, Definición 4.20],

Definición 3.2.6. *Dada una variedad diferenciable M , una orientación en M es una asignación de una orientación en cada espacio tangente, de manera que, dado $p \in M$, existe un entorno U de p y una base local de campos, $\{E_i\}_i$, sobre U que genera la misma orientación en $T_q M$ que la dada previamente, para todo $q \in U$. Se dice que una variedad es orientable si admite una orientación.*

Por otro lado, una definición más general, que abarca la anterior definición, es la de orientación de una variedad topológica [6, Sección 4.1.7.]. Una variedad topológica es un conjunto con un atlas maximal donde la condición de compatibilidad que teníamos para variedades diferenciables se sustituye por una más general de ser los cambios de carta homeomorfismos.

La orientación de una variedad topológica de dimensión n viene dada por el n -ésimo grupo de homología $H_n(M)$. Los grupos de homología son herramientas algebraicas que complementan a los grupos de homotopía en el estudio de las características topológicas de un espacio. Igual que con los grupos de homotopía, para que dos espacios topológicos sean homeomorfos, tienen que tener los mismos grupos de homología. Sin embargo, no entraremos en la definición de grupo de homología, ya que excede el contenido que se pretende abarcar en este trabajo.

El siguiente teorema da una caracterización de la orientación de una variedad topológica [10, Teorema 3.26].

Teorema 3.2.7. *Sea M una variedad de dimensión n , cerrada y conexa. Entonces, M es orientable si y solo si $H_n(M)$ es isomorfo a \mathbb{Z} .*

Por tanto, viendo que el grupo de homología del espacio proyectivo real de dimensión n es

$$H_n(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ es impar} \\ 0 & n \text{ es par} \end{cases},$$

concluimos que $\mathbb{R}P^n$ es orientable si y solo si n es impar. En particular, el plano proyectivo no es orientable [10, Ejemplo 2.42].

3.3. Rectas vectoriales no orientadas de \mathbb{R}^n

También podemos plantearnos la misma cuestión para dimensión arbitraria. Las rectas vectoriales de \mathbb{R}^n forman el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{n-1}$, que mantiene las propiedades de conexión y compacidad del caso $n = 3$. Es T_2 y satisface el segundo axioma de numerabilidad. Además, puede dotarse de estructura de variedad riemanniana, y tiene curvatura seccional constante 1 [8, Lema 5]. Es orientable si n es par y no orientable si n es impar, como hemos visto en el apartado anterior.

Aunque las propiedades en general se mantienen para cualquier dimensión k , hay algunas excepciones. Por ejemplo, $\pi_1(\mathbb{R}P^k) \cong \mathbb{Z}_2$ para $k > 1$, pero en el caso $k = 1$, $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$, porque $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbf{S}^1$. Esto se puede ver poniendo la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$ como cociente de la circunferencia identificando puntos diametralmente opuestos. Esta identificación puede hacerse en todos los pares de puntos menos uno, dejando un conjunto homeomorfo a un arco de circunferencia en el que se identifican los extremos; es decir, una circunferencia.

Otra diferencia se observa cuando se compara $\mathbb{R}P^k$ con el grupo ortogonal especial de orden k . $SO(k)$ es el grupo de transformaciones afines en \mathbb{R}^k cuyas matrices asociadas son ortogonales y de determinante 1. Si $k = 3$, $SO(3)$ equivale al conjunto de rotaciones de \mathbb{R}^3 , y en este caso, $\mathbb{R}P^3$ es homeomorfo a $SO(3)$.

Para ver esto, se considera \mathbf{D}^3 el conjunto de vectores de \mathbb{R}^3 con norma menor o igual que 1 y la aplicación $\phi : \mathbf{D}^3 \rightarrow SO(3)$ que da al cero la identidad y a los vectores no nulos, x , la rotación de eje la recta determinada por el origen de coordenadas y el vector x , ángulo $\pi||x||$, y sentido el que marca la “regla del sacacorchos”. Para cada pareja de puntos antipodales de $\mathbf{S}^2 = \partial\mathbf{D}^3$, su imagen por ϕ es la misma rotación. Esto permite construir otra función $\bar{\phi} : \mathbb{R}P^3 \rightarrow SO(3)$, con $\mathbb{R}P^3$ visto como el conjunto \mathbf{D}^3 con los puntos antipodales de la frontera identificados, que da a cada punto $[x]$ la imagen $\bar{\phi}[x] = \phi(x)$. Puede comprobarse que esta función es un homeomorfismo [10, Sección 3.D].

Por otro lado, para $k \neq 3$, $\mathbb{R}P^k$ y $SO(k)$ no tienen los mismos grupos de homotopía, por lo que no son homeomorfos[18]:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{R}P^1) &= \mathbb{Z} & \pi_1(SO(1)) &= \{e\} \\ \pi_2(\mathbb{R}P^2) &= \mathbb{Z} & \pi_2(SO(2)) &= \{e\} \\ \pi_3(\mathbb{R}P^4) &= \{e\} & \pi_3(SO(4)) &= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ \pi_3(\mathbb{R}P^k) &= \{e\} & \pi_3(SO(k)) &= \mathbb{Z}, k > 4 \end{aligned}$$

Capítulo 4

Rectas afines orientadas de \mathbb{R}^3

Los subespacios afines se construyen sumando a los vectores de un subespacio vectorial un vector fijo. Dada una recta, su dirección es la recta vectorial generada por el vector que relaciona cualquier par de puntos diferentes de ella. Por tanto, el conjunto de direcciones de las rectas afines es el conjunto de rectas vectoriales. Por otro lado, una orientación en esta recta vectorial determina una orientación en la recta afín. Como hemos visto en la sección 1, este conjunto de direcciones y orientaciones puede identificarse con la esfera \mathbf{S}^2 .

Sea R una recta afín que pasa por el origen con una dirección y orientación dadas. Las rectas paralelas y con la misma orientación que R pueden obtenerse trasladando R con un vector \vec{d} perpendicular a ella. Si tomamos el plano afín perpendicular a R que pasa por el origen, cada recta queda determinada por el punto P de dicho plano tal que $\vec{OP} = \vec{d}$. De esta forma, para una dirección y orientación dadas, cada recta afín se puede identificar con un punto de un plano.

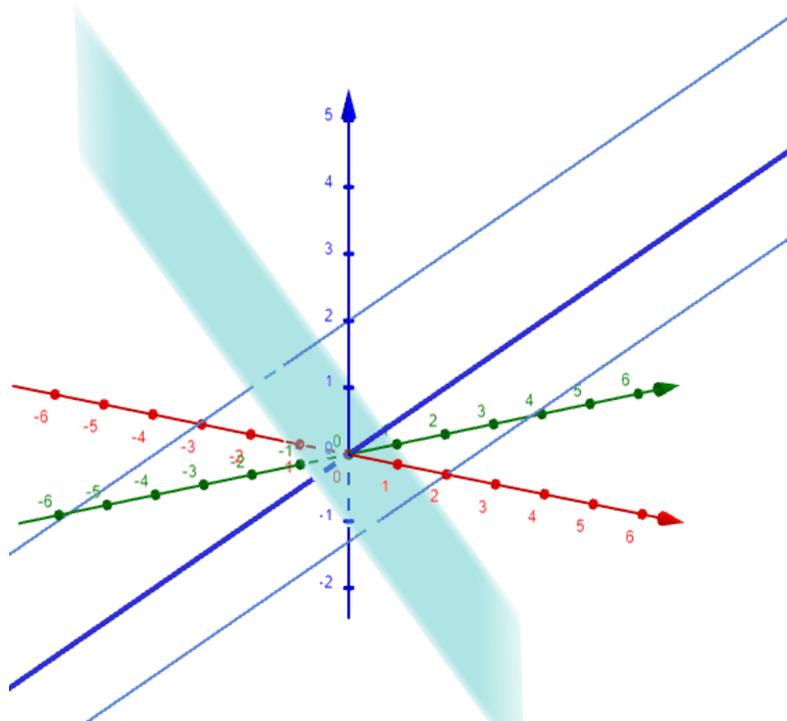


Figura 4.1: Rectas afines paralelas a una dada

Tomar cada punto de la esfera como representación de una dirección y orientación, y asignarle un plano, que corresponde a todas las rectas afines con esa dirección, recuerda a hacer el producto cartesiano de la esfera por un plano, por lo que el conjunto con el que vamos a biyectar las rectas afines orientadas parece que podría ser de dimensión cuatro. De hecho, este conjunto es el fibrado tangente de la esfera \mathbf{S}^2 , que, como veremos más adelante, tiene esta dimensión.

En primer lugar, veamos de forma más precisa la relación entre el espacio de rectas afines orientadas, $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3)$, y $T\mathbf{S}^2$.

Definición 4.0.1. *Dada una variedad diferenciable M , denotamos por TM el conjunto $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}$, llamado fibrado tangente, donde $T_p M$ es el espacio tangente a M en p .*

Se puede hacer una biyección entre $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3)$ y el fibrado tangente de la 2-esfera. La correspondencia se basa en considerar, para una recta afín dada, R , el vector unitario que determina su dirección y sentido, \vec{v} , y el vector \vec{d} de desplazamiento de la recta respecto del origen y que es ortogonal a \vec{v} . Con esto, a R se le asigna el vector \vec{d} como elemento de $T_{\vec{v}}\mathbf{S}^2$, teniendo en cuenta que $\vec{v} \in \mathbf{S}^2$.

Esta aplicación es sobreyectiva: dados $\vec{v} \in \mathbf{S}^2$ y $\vec{d} \in T_{\vec{v}}\mathbf{S}^2$, la recta asociada a \vec{d} es la determinada por el punto $P \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{OP} = \vec{d}$ y que tiene la dirección y orientación de \vec{v} . Además, es inyectiva, porque si dos rectas tienen la misma imagen, el punto y el vector dirección que las determina es el mismo, por lo que son la misma recta.

La definición de fibrado tangente que se ha dado más arriba se parece a la del producto cartesiano $M \times \mathbb{R}^n$. Para comparar estos conjuntos, se usan los isomorfismos de fibrados vectoriales. Antes de discutir este tema, veamos primero qué son los fibrados vectoriales.

Definición 4.0.2. *Un fibrado vectorial de rango n es un par de espacio topológicos, X (espacio base) y E (espacio total), que cuentan con una aplicación continua sobreyectiva $\pi : E \rightarrow X$ para la que cada fibra $\pi^{-1}(\{x\})$ tiene definida una estructura de espacio vectorial de dimensión n . Además, se cumple que para todo $x \in X$ existe un entorno U de x y un homeomorfismo $\phi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que para todo $p \in U$*

- $(\pi \circ \phi)(p, v) = p$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$.
- La aplicación $v \mapsto \phi(p, v)$ es un isomorfismo entre \mathbb{R}^n y $\pi^{-1}(\{p\})$.

El fibrado tangente de una variedad es un caso particular de fibrado vectorial[12].

Definición 4.0.3. *Dado un fibrado vectorial, con la notación de la definición anterior, si E y X están dotados de estructuras de variedad diferenciable, π es una aplicación diferenciable C^∞ , y los homeomorfismos ϕ son además difeomorfismos, entonces decimos que el fibrado es diferenciable.*

A partir de aquí, cuando consideremos un fibrado vectorial, asumiremos que es diferenciable.

Definición 4.0.4. *Dados dos fibrados vectoriales definidos sobre la misma variedad base, $E \rightarrow X$ y $\bar{E} \rightarrow X$, una aplicación $\Phi : E \rightarrow \bar{E}$ diferenciable C^∞ se dice que es un homomorfismo de fibrados vectoriales si lleva elementos de una fibra $\pi^{-1}(\{p\})$ de E a elementos de la fibra correspondiente $\bar{\pi}^{-1}(\{p\})$, con $p \in X$, y la restricción de Φ a cada fibra es un homomorfismo de espacios vectoriales.*

Ahora estamos en condiciones de definir los isomorfismos de fibrados vectoriales.

Definición 4.0.5. Dadas dos variedades, E y \bar{E} , a partir de las que hay definidos dos fibrados sobre el mismo espacio base, X , una aplicación $\Phi : E \rightarrow \bar{E}$ se llama isomorfismo de fibrados vectoriales si es un difeomorfismo de variedades y tanto Φ como Φ^{-1} son homomorfismos de fibrados.

Si tenemos una variedad M y un fibrado definido sobre M , $\phi : E \rightarrow M$, cuyas fibras son isomorfas a \mathbb{R}^n , no suele ser el caso que $E \cong M \times \mathbb{R}^n$. Como ejemplo, consideramos la cinta de Möbius. Esta superficie es un fibrado sobre la circunferencia unitaria \mathbf{S}^1 de fibra \mathbb{R} . Sin embargo, $\mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$ es un cilindro, que es una superficie orientable, y por tanto no es difeomorfa a la cinta de Möbius.

Definición 4.0.6. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial sobre ella. Se dice que E es trivial si $E \cong M \times \mathbb{R}^n$.

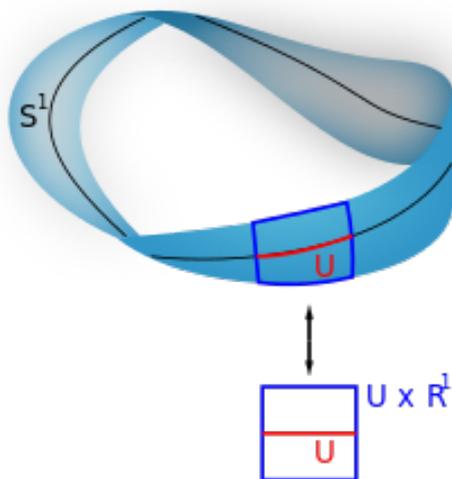


Figura 4.2: La cinta de Möbius no es un fibrado trivial, pero localmente sí lo es.

Los fibrados tangentes, en general, no son triviales. La siguiente proposición da una condición suficiente y necesaria para serlo [2, Capítulo 2, Sección 9].

Definición 4.0.7. Una variedad es paralelizable si admite una base global de campos.

Proposición 4.0.8. Sea M una variedad diferenciable. El fibrado tangente de M es trivial si y solo si M es paralelizable.

Para la demostración de esta proposición, se usa la estructura diferenciable del fibrado tangente de una variedad M que queda definida a partir del atlas de M . Por ello, la reservamos para la siguiente sección, una vez hayamos construido dicho atlas.

Entonces, teniendo en cuenta que las esferas de dimensión par no admiten un campo vectorial sin ceros [13, Teorema 1'], y por tanto no son paralelizables, concluimos que TS^2 es no trivial.

4.1. TS^2 como variedad diferenciable

Definir en un conjunto M un atlas diferenciable permite también dotar de estructura de variedad diferenciable a su fibrado tangente.

Proposición 4.1.1. *Sea M una variedad de dimensión n y TM su fibrado tangente. Entonces, TM tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$.*

Demostración. Consideramos \mathcal{A} un atlas sobre M , y tomamos $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta del atlas de M . Si llamamos $\pi : TM \rightarrow M$ a la proyección natural, que manda (p, v) a p para cada $p \in M$, entonces, podemos definir a partir de x una carta sobre TM [3, Ejemplo 4.1]

$$\begin{aligned} \phi_x : \quad \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (p, \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x^k} |_p) &\longmapsto (x(p), (a_1, \dots, a_n)). \end{aligned}$$

Esta función es inyectiva, ya que x lo es y las coordenadas de un vector en una base son únicas. Por otro lado, como $x(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^n , y las coordenadas a_k cubren todo \mathbb{R}^n , la imagen de ϕ_x es un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Los dominios de las cartas ϕ_x recubren todo TM , como consecuencia de que las cartas x formen un atlas sobre M .

Ahora comprobamos que los cambios de carta son compatibles. Dadas dos cartas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$ y $p \in U \cap V$, los conjuntos $\phi_x(\pi^{-1}(U \cap V))$ y $\phi_y(\pi^{-1}(U \cap V))$ son abiertos, teniendo en cuenta que x e y son compatibles, y por tanto $x(U \cap V)$ e $y(U \cap V)$ son abiertos. El cambio de carta correspondiente en TM

$$\phi_y \circ \phi_x^{-1} : \phi_x(\pi^{-1}(U \cap V)) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

está dado por

$$(a, b) \longmapsto (y \circ x^{-1}(a), (\sum_{k=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial x^k} |_{x^{-1}(a)} b_k, \dots, \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_n}{\partial x^k} |_{x^{-1}(a)} b_k)).$$

Como x e y son compatibles, $y \circ x^{-1}$ es diferenciable sobre $x(U)$. Con esto, se tiene que $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ también lo es. Se comprueba de una manera similar que la función inversa $\phi_x \circ \phi_y^{-1} : \phi_y(\pi^{-1}(U \cap V)) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

Por tanto, el conjunto $\{\phi_x\}_{x \in \mathcal{A}}$ da a TM estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$. \square

Así, de este resultado se tiene que la esfera \mathbf{S}^2 con el atlas formado por las proyecciones estereográficas determina un atlas diferenciable en su fibrado tangente.

Demostración de la proposición 4.0.8. Supongamos M una variedad paralelizable de dimensión n , y $\{X^i\}_{i=1, \dots, n}$ una base global de campos. Sea $v \in T_p M$, para algún $p \in M$. Podemos expresar v en función de los campos X^i evaluados en p :

$$v = v_1 X_p^1 + \dots + v_n X_p^n, \quad v_i \in \mathbb{R}.$$

Entonces podemos definir la aplicación

$$\phi : TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n$$

que manda el vector v anterior a

$$v \longmapsto (p, v_1, \dots, v_n).$$

Es claro que la aplicación ϕ es biyectiva. Por otro lado, recordamos que, dadas dos variedades, M y N , y cartas $x : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{R}^n$, la función f_{xy}

$$f_{xy}: U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (p, q) \longmapsto (x(p), y(q)).$$

es una carta sobre $M \times N$ y el conjunto de funciones de este tipo, variando x e y en sus respectivos atlas, forma un atlas diferenciable sobre $M \times N$. Entonces, dado $(p, v) \in TM$, se puede ver que ϕ es diferenciable en (p, v) eligiendo cartas \hat{x} y \hat{y} cuyos dominios contengan a (p, v) y $\phi(p, v)$, de manera que la composición $\hat{x}^{-1} \circ \phi \circ \hat{y}$ sea diferenciable. Para ello, basta tomar $\hat{x} = \phi_x$ y $\hat{y} = f_{y, id}$, que por tanto igualan la composición anterior a la identidad. De la misma forma se comprueba que ϕ^{-1} es diferenciable. Por tanto, ϕ es un difeomorfismo.

Además, ϕ en cada fibra manda cada vector X_p^i en el vector de la base canónica e_i , enviando con ello una base en otra. Por tanto, ϕ en cada fibra es un isomorfismo de espacios vectoriales. Como tanto ϕ como ϕ^{-1} son homomorfismos de fibrados, la aplicación ϕ es un isomorfismo de fibrados.

Para demostrar la implicación en sentido contrario, consideramos ϕ un isomorfismo de fibrados. ϕ restringido a una fibra dada, $\pi^{-1}(\{p\})$, es un isomorfismo. Por tanto, lleva bases en bases: en concreto, se puede tomar la base canónica y calcular su contraimagen.

$$X_p^i = \phi^{-1}(p, e_i).$$

Como ϕ^{-1} es diferenciable, X_p^i varía de manera diferenciable sobre M , por lo que define un campo vectorial X^i sobre M . Esto implica la existencia de una base global de campos, es decir, que M es paralelizable. \square

4.2. La reflexión sobre una recta: una estructura casi paracompleja en TS^2

La reflexión de una recta de $\mathbb{L}(\mathbb{R}^3)$ sobre una recta dada R_0 da otra recta orientada, por lo que puede verse como una aplicación $J_1 : \mathbb{L}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^3)$. Se ha consultado [9] para ver que esto define una estructura casi paracompleja.

Definición 4.2.1. *Dada una variedad diferenciable M de dimensión $2n$, se llama estructura casi paracompleja a un endomorfismo en el espacio tangente en cada punto, diferente de la identidad, que aplicado dos veces es la identidad y que tiene dos valores propios, ± 1 , cuyos espacios de vectores propios asociados tiene cada uno dimensión n .*

Se puede demostrar que la aplicación J_1 es una estructura casi paracompleja sobre el fibrado tangente de la esfera TS^2 .

4.3. Rectas afines orientadas de \mathbb{R}^n

Si llevamos el caso de dimensión 3 a una dimensión arbitraria, dada una recta que pasa por el origen, podemos considerar el hiperplano ortogonal a ella que pasa también por el origen. Sus puntos determinan cada una de las rectas paralelas a la primera. Siguiendo la misma idea que con \mathbf{S}^2 , conseguimos biyectar las rectas orientadas de \mathbb{R}^n con el fibrado tangente de la esfera unitaria \mathbf{S}^{n-1} .

Como \mathbf{S}^{n-1} puede dotarse de un atlas diferenciable, queda definido un atlas también en su fibrado tangente, que adquiere estructura de variedad diferenciable de dimensión $2(n-1)$. Por otro lado, este fibrado es trivial solo para las esferas de dimensión 1, 3 y 7, como se muestra en [1, Corolario 2].

Capítulo 5

Rectas afines no orientadas de \mathbb{R}^3

Podemos estudiar las rectas afines de \mathbb{R}^3 sin orientar de una forma parecida a como lo hemos hecho con las rectas orientadas. Dada una dirección, puede desplazarse la recta que pasa por el origen con un vector ortogonal, lo que equivale a mover el origen sobre un plano ortogonal a la recta. Por otro lado, el conjunto de direcciones es el de rectas vectoriales no orientadas. Como sabemos, este conjunto está en biyección con el plano proyectivo. Como resultado, en este caso, obtenemos el fibrado tangente del plano proyectivo, también una variedad diferenciable de dimensión 4.

Una recta, R , queda determinada por su dirección y por un punto de ella. Dada una dirección, para dar un punto consideramos $P \in R$ el único punto tal que el vector $\vec{d} = \vec{OP}$ es ortogonal a R . P es el punto de corte de R con el plano ortogonal a R que pasa por el origen. Además, todo punto de este plano determina una única recta paralela a R .

Teniendo en cuenta que una dirección está representada por un punto de $\mathbb{R}P^2$, llegamos a que las rectas afines no orientadas se pueden identificar con el fibrado tangente del plano proyectivo. Para una recta R , basta considerar el punto $p \in \mathbb{R}P^2$ asociado a su dirección, y el vector \vec{d} de traslación, como elemento de $T_p\mathbb{R}P^2$. Es fácil comprobar que esta correspondencia es biyectiva.

De la misma forma que en el capítulo anterior, nos planteamos si el fibrado tangente de $\mathbb{R}P^2$ es trivial o no. La siguiente proposición nos permite concluir que no, sabiendo que el plano proyectivo no es orientable.

Proposición 5.0.1. *Sea M una variedad diferenciable paralelizable. Entonces, M es orientable.*

Demostración. Sea $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i=1}^n$ una base global de campos, y ν la asignación que determina \mathcal{E} de una orientación en cada plano tangente de M . Dado $p \in M$, y U un entorno cualquiera de p , si consideramos los campos de \mathcal{E} restringidos a U , cumplen trivialmente la condición para que M sea orientable, teniendo en cuenta la definición 3.2.6. \square

Con esto, tenemos que el fibrado tangente del plano proyectivo es no trivial, siguiendo la proposición 4.0.8.

Igual que con la esfera, para dotar a $T\mathbb{R}P^2$ de una estructura diferenciable, basta tomar en $\mathbb{R}P^2$ un atlas diferenciable. Por ejemplo, podemos tomar las funciones de deshomogeneización de coordenadas. De esta forma, dotamos a $T\mathbb{R}P^2$ de estructura de variedad de dimensión 4.

5.1. Rectas afines no orientadas de \mathbb{R}^n

Como hemos hecho con las rectas orientadas del espacio de dimensión n , podemos biyectar el conjunto de rectas afines sin orientar con el fibrado tangente del espacio proyectivo $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Este conjunto puede dotarse de estructura de variedad diferenciable de dimensión $2(n-1)$. Por otro lado, el espacio proyectivo real de dimensión $n-1$ es paralelizable si y solo si $n-1$ es igual a 1, 3 o 7 [24]. Por tanto, solo para estos casos su fibrado tangente es trivial.

Capítulo 6

Rectas proyectivas no orientadas de $\mathbb{R}P^3$

En el capítulo de preliminares vimos que hay una correspondencia biyectiva entre los subespacios vectoriales de un espacio vectorial V y los subespacios proyectivos de $P(V)$ dada por $W \longleftrightarrow P(W)$. En concreto, los planos vectoriales de \mathbb{R}^4 se pueden identificar con las rectas de $\mathbb{R}P^3$. En el siglo XIX, Julius Plücker estudió este conjunto y, posteriormente, Hermann Grassmann se planteó generalizarlo a través de .

Definición 6.0.1. *Dado un espacio vectorial V sobre el cuerpo K de dimensión n , se llama grassmanniana $Gr(k, V)$ al conjunto de subespacios vectoriales de dimensión k de V . Si identificamos V con K^n eligiendo una base, también podemos denotar la grassmanniana por $Gr(k, n)$*

El espacio $P(V)$ es un caso particular de $Gr(k, V)$ poniendo $k = 1$, por lo que con las grassmannianas se generaliza la noción de espacio proyectivo. Además, toda grassmanniana $Gr(k, n)$ admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión $k(n - k)$ [11, Sección 1.2, apartado Cell Structures on Grassmannians]. Por tanto, el conjunto de rectas proyectivas en el espacio de dimensión 3, que está identificado con $Gr(2, 4)$, admite una estructura diferenciable. Además, $Gr(2, 4)$ es una variedad orientable y compacta [26, Sección 0].

Existe una relación entre el conjunto de subespacios de dimensión k y el de subespacios de dimensión $n - k$ de un espacio vectorial.

Proposición 6.0.2. *Sea $V = \mathbb{R}^n$ con la métrica estándar, dado un elemento $W \in Gr(k, n)$, tomando el ortogonal, W^\perp , se define una biyección entre $Gr(k, n)$ y $Gr(n - k, n)$.*

Demostración. Consideremos $V \in Gr(n - k, n)$. El subespacio $W = V^\perp$ tiene como ortogonal $W^\perp = (V^\perp)^\perp = V$. Además, como el ortogonal de todo subespacio es único, W es el único asociado a V y la dimensión de W es k , teniendo en cuenta que $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$. De esta forma, la correspondencia anterior es una biyección. \square

Vemos también que

$$\dim(Gr(n - k, n)) = (n - k)(n - (n - k)) = k(n - k) = \dim(Gr(k, n)).$$

Un caso particular de esta relación lo introdujimos en el primer capítulo, cuando asociamos a cada punto de un espacio proyectivo el hiperplano con una ecuación cuyos coeficientes vienen dados por las coordenadas del punto. Para ver esto, consideramos la biyección $Gr(1, n) \longleftrightarrow Gr(n - 1, n)$, entre rectas e hiperplanos vectoriales. Como vimos

también en los preliminares, los subespacios vectoriales de una dimensión determinada se pueden identificar con los subespacios proyectivos de una dimensión menos. Teniendo en cuenta ambas cosas, nos queda la relación mencionada.

6.1. Coordenadas en $Gr(2, 4)$

Julius Plücker encontró una forma de asignar a cada recta de $\mathbb{R}P^3$ seis coordenadas homogéneas. Posteriormente, Grassmann generalizó esto para cualquier grassmanniana $Gr(k, n)$, definiendo una aplicación, el embedding de Plücker, que lleva $Gr(k, n)$ a un subconjunto del espacio proyectivo de dimensión $\binom{n}{k}-1$ [21, Proposición 2.3]. De esta forma, las coordenadas de Plücker de un elemento de la grassmanniana se definen como las coordenadas homogéneas de su imagen por la aplicación anterior.

Lo siguiente que vamos a hacer es definir una forma de dar coordenadas en conjunto de rectas de $\mathbb{R}P^3$. Para ello, identificamos las rectas proyectivas de $\mathbb{R}P^3$ con los planos vectoriales de \mathbb{R}^4 , y trabajamos desde el espacio vectorial. Un plano en un espacio de dimensión 4 puede determinarse con dos ecuaciones, y con ello ocho coeficientes:

$$\pi : \begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d't = 0 \end{cases} .$$

Hay que tener en cuenta que estos coeficientes no son únicos, ni siquiera salvo multiplicación por un factor.

Por otro lado, es posible reducir el número de parámetros a seis con las coordenadas de Plücker. Sean un plano π , $\mathcal{B} = \{u, w\}$ una base de π , y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Podemos escribir u y w en términos de los vectores de \mathcal{B}' , $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $w = (w_0, w_1, w_2, w_3)$. Colocando las coordenadas en una matriz,

$$M_\pi = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

los menores de orden 2 de M_π [21, Proposición 2.4]

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ w_i & w_j \end{vmatrix},$$

definen unas coordenadas, llamadas coordenadas de Plücker.

Hay que tener en cuenta que $p_{ij} = -p_{ji}$, por lo que basta dar seis menores para determinarlos todos: $(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23})$.

No está claro que las coordenadas vayan a mantenerse si cambiamos la base de π , ni que dos planos distintos vayan a tener siempre coordenadas distintas. Para ver que es así, el siguiente teorema nos ayuda

Teorema 6.1.1. *Sean $\mathcal{B} = \{u, v\}$ y $\mathcal{B}' = \{u', v'\}$ un par de bases de un plano π de \mathbb{R}^4 , y p_{ij} y q_{ij} los determinantes asociados. Entonces, existe $\lambda \neq 0$ tal que $p_{ij} = \lambda q_{ij}$ para todo i, j .*

Demostración. Expresamos primero u' y v' en la base \mathcal{B} .

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v \\ v' &= \gamma u + \delta v \end{aligned}$$

con $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ porque u' y v' son linealmente independientes. Entonces, el parámetro q_{ij} puede desarrollarse usando esta descomposición.

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \begin{vmatrix} u'_i & u'_j \\ v'_i & v'_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha u_i + \beta v_i & \alpha u_j + \beta v_j \\ \gamma u_i + \delta v_i & \gamma u_j + \delta v_j \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha u_i & \alpha u_j \\ \gamma u_i & \gamma u_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha u_i & \alpha u_j \\ \delta v_i & \delta v_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta v_i & \beta v_j \\ \gamma u_i & \gamma u_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta v_i & \beta v_j \\ \delta v_i & \delta v_j \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \gamma\beta) \cdot p_{ij}. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = \alpha\delta - \gamma\beta$ llegamos a lo que queríamos. \square

Por tanto, estas coordenadas no dependen de la base que elijamos salvo por un factor de proporcionalidad. Con esta propiedad podemos considerar las coordenadas de un plano como un punto de un espacio proyectivo, en este caso $\mathbb{R}P^5$, de forma que la aplicación de Plücker queda dada por:

$$\begin{aligned} p: \quad Gr(2,4) &\longrightarrow \mathbb{R}P^5 \\ W &\longmapsto [p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}]. \end{aligned}$$

Además, p es inyectiva [21, proposición 2.3], por lo que las coordenadas determinan un plano de forma unívoca.

6.2. La relación de Plücker y la cuádrlica de Klein

La imagen de la aplicación de Plücker no es todo $\mathbb{R}P^5$ [5, Capítulo 7, Sección 6].

Proposición 6.2.1. *Dado un plano de $Gr(2,4)$, sus coordenadas de Plücker, p_{ij} cumplen la siguiente relación cuadrática:*

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Demostración. Con la notación anterior, tomamos el polinomio que define la relación de Plücker, expresamos las coordenadas como determinantes, e interpretamos la suma obtenida como la expansión de un par de determinantes de un orden superior. En más detalle:

$$\begin{aligned} p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} &= \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ w_0 & w_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_0 & u_2 \\ w_0 & w_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_0 & u_3 \\ w_0 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \\ &= (u_0w_1 - u_1w_0) \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - (u_0w_2 - u_2w_0) \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + (u_0w_3 - u_3w_0) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \\ &= u_0 \left(w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) - \\ &\quad - w_0 \left(u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= u_0 \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} - w_0 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

siendo la última expresión 0 por tener ambos determinantes filas repetidas. \square

El conjunto de puntos de $\mathbb{R}P^5$ que satisfacen esta ecuación recibe el nombre de cuádrlica de Klein. Se puede ver que todo punto de esta cuádrlica se puede asociar a un elemento

de $Gr(2, 4)$. Para ello, consideramos un punto $Q = [q_{01} : q_{02} : q_{03} : q_{12} : p_{13} : q_{23}] \in \mathbb{R}P^5$ cumpliendo la relación de Plücker, donde podemos asumir sin pérdida de generalidad que q_{01} es no nulo.

Es posible determinar una recta en el espacio proyectivo a partir de las coordenadas de Q . La matriz

$$M = \begin{pmatrix} q_{01} & 0 & -q_{12} & -q_{13} \\ 0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \end{pmatrix}$$

tiene rango 2, por lo que sus filas determinan una recta R en $\mathbb{R}P^5$. Queremos probar que las coordenadas de Plücker de R coinciden con las de Q .

Para ver esto, multiplicamos q_{ij} por un factor tal que $q_{01} = 1$. Entonces, es fácil comprobar que los parámetros p_{ij} obtenidos con M coinciden con q_{ij} salvo el caso p_{23} . En este último,

$$p_{23} = -q_{03}q_{12} + q_{02}q_{13},$$

que, aplicando la relación de Plücker en las coordenadas de Q , es precisamente q_{23} . Como consecuencia, la aplicación de Plücker es sobreyectiva.

Así resulta que la aplicación p permite identificar la grassmanniana $Gr(2, 4)$ con la cuádriga de Klein. Al estar definida por una ecuación, esta cuádriga es una hipersuperficie de $\mathbb{R}P^5$ y por tanto tiene dimensión 4. Además, admite estructura de variedad diferenciable, al estar biyectada con $Gr(2, 4)$.

Como dijimos en el capítulo de preliminares, los espacios proyectivos tienen tantos puntos como hiperplanos. Para $\mathbb{R}P^2$, por tanto, los puntos están en biyección con las rectas. Si pensamos en las rectas no orientadas de $\mathbb{R}P^3$, esta propiedad nos permite ver este conjunto desde otro punto de vista. Cada recta afín de \mathbb{R}^3 tiene una única extensión proyectiva, pero en el conjunto de rectas proyectivas, no solo están estas extensiones: están también las rectas contenidas en el hiperplano del infinito. Este hiperplano es un plano proyectivo, por lo que el hecho de que tenga tantas rectas como puntos permite escribir

$$\{\text{rectas no orientadas de } \mathbb{R}P^3\} = \{\text{rectas afines no orientadas de } \mathbb{R}^3\} \cup \mathbb{R}P^2.$$

El conjunto de rectas afines no orientadas hemos visto que se puede identificar con el fibrado tangente del plano proyectivo, por lo que esta fórmula nos da una descomposición interesante de la cuádriga de Klein como el fibrado tangente del plano proyectivo unido a un plano proyectivo.

Capítulo 7

Rectas proyectivas orientadas de $\mathbb{R}P^3$

Para dar una orientación a las rectas proyectivas, es conveniente tener en cuenta que son homeomorfas a circunferencias. En una circunferencia, una orientación queda determinada por tres puntos dados en orden, ya que definen un sentido de giro. Por tanto, podemos hacer lo mismo en las rectas.

Por otro lado, dado un plano vectorial, su orientación viene dada por la elección de una base ordenada, lo que es equivalente a dar un sentido de giro. Este sentido de giro a su vez puede interpretarse como la elección de tres rectas del plano dadas en orden. Estas rectas, en el proyectivo, son puntos dados en orden, que, por tanto, determinan una orientación en la recta proyectiva correspondiente. En resumen, la orientación de un plano se puede corresponder con la de la recta proyectiva que queda al proyectivizarlo. Como consecuencia, el conjunto de rectas proyectivas orientadas de $\mathbb{R}P^3$ se puede identificar con la grassmanniana de planos orientados de \mathbb{R}^4 , $Gr^+(2, 4)$.

Se puede hacer una biyección entre la grassmanniana orientada $Gr^+(2, 4)$ y el producto $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$, de forma que el conjunto de rectas orientadas de $\mathbb{R}P^3$ queda dotado de una estructura de variedad diferenciable de dimensión 4 [17, Sección 2]. Por otro lado, esta variedad es orientable, por ser el producto de dos variedades orientables [20, Ejemplo 2.4].

Recordamos ahora la definición de aplicación recubridora.

Definición 7.0.1. *Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos es una aplicación recubridora si existe un recubrimiento abierto \mathcal{V} de Y tal que para todo $V \in \mathcal{V}$ existe una familia de abiertos de X , $\mathcal{U}_V = \{U_i, i \in I_V\}$ disjuntos dos a dos tales que $f|_{U_i}$ es un homeomorfismo para todo $i \in I_V$ y $f^{-1}(V) = \mathcal{U}_V$.*

La grassmanniana orientada $Gr^+(2, 4)$ es un recubridor doble de $Gr(2, 4)$ [26, Sección 2].

Bibliografía

- [1] Bott, R. y Milnor, J. (1958) On the parallelizability of the spheres, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64(3), pp. 87–89.
- [2] Bredon, G.E. (1993) *Topology and geometry*. Berlin: Springer-Verlag.
- [3] do Carmo, M.P. (1992) *Riemannian geometry*. Boston: Birkhäuser.
- [4] Dominguez, E.O. and Sanchez-Abril, J.M. (2009) *Nociones de Geometría Proyectiva*. Madrid: Sanz y Torres.
- [5] Douglas, H.W.V. y Pedoe, D. (1994) *Methods of algebraic geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] Etayo, F. *Apuntes de Variedades Diferenciables*. Universidad de Cantabria.
- [7] Etayo, F. *Apuntes de Teoría Global de Superficies*. Universidad de Cantabria.
- [8] Gadhia, S. (2007) *Supersymmetric Quotients of M-Theory and Supergravity Backgrounds*. Disertación. University of Edinburgh, Edinburgo.
- [9] Georgiou, N. and Guilfoyle, B. (2022) Almost paracomplex structures on 4-manifolds, *Differential Geometry and its Applications*, 82, 101890.
- [10] Hatcher, A. (2019) *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] Hatcher, A. (2017) *Vector Bundles and K-Theory*. Versión 2.2. Cambridge University Press, New York, 2002
- [12] Kosinski, A.A. (1993) *Differential manifolds*. Boston: Academic Press.
- [13] Milnor, J. (1978) ‘Analytic proofs of the “Hairy Ball theorem” and the Brouwer Fixed Point theorem’, *The American Mathematical Monthly*, 85(7).
- [14] Rodríguez-Sanjurjo, J.M. y Ruíz Sancho J.M. (1998) *Geometría Proyectiva*. Harlow, Inglaterra: Addison-Wesley Iberoamericana España.
- [15] Seifert, H. y Threlfall, W. (1980) *A textbook of topology*. Pure and Applied Mathematics. New York: Academic Press.
- [16] Thomas, A.C. (2009) *The Fundamental Group and Van Kampen’s Theorem*. disertación. California State University, San Bernardino
- [17] Torralbo, F. y Urbano, F. (2015) Minimal Surfaces in $S^2 \times S^2$. *Journal of Geometric Analysis* 25(2): pp. 1132-1156
- [18] Abanov, A. (2009) Appendix 1 homotopy groups used in physics, *Condensed Matter: Theory, Experiment and Device Physics*. State University of New York, New York. Disponible en: <http://felix.physics.sunysb.edu/~abanov/Teaching/Spring2009/Notes/abanov-cpA1-upload.pdf> (Accedido: 13 marzo, 2023).

- [19] Carberry, E. (2015). Riemannian Geometry–Lecture 16. The University of Sydney. Disponible en: https://www.maths.usyd.edu.au/PMH7/r/rg_emma_notes16.pdf (Accedido: 11 marzo 2023).
- [20] Daemi, A. Lecture 10, Washington University in St. Louis. Disponible en <https://www.math.wustl.edu/~adaemi/teaching-knot/Lecture10.pdf>
- [21] Drew, A.H. (2007) The Grassmannian as a projective variety. Disertación. University of Chicago, Chicago. Disponible en: <https://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2007/REUPapers/FINALFULL/Hudec.pdf> (Accedido: 26 mayo 2023).
- [22] Kim, K.-H., Shim, P.-S. y Shin, S. (2019) An alternative bilinear interpolation method between spherical grids, *Atmosphere*, 10(3). Disponible en: <https://doi.org/10.3390/atmos10030123>.
- [23] LibreTextsMATHEMATICS. Stereographic Projection. Disponible en https://math.libretexts.org/Bookshelves/Abstract_and_Geometric_Algebra/Introduction_to_Groups_and_Geometries_%28Lyons%29/01%3A_Preliminaries/1.03%3A_Stereographic_projection (Accedido: 8 marzo, 2023)
- [24] Notes on K-theory and characteristic classes - Math 6530 (2017) Cornell University. Disponible en: <https://pi.math.cornell.edu/~zakh/6530/sec7.pdf> (Accedido: 8 junio 2023).
- [25] Pérez, J. Apuntes de Geometría Riemanniana. Universidad de Granada. Disponible en: <https://www.ugr.es/~jperez/papers/GeomRiem.pdf> (Accedido: 25 marzo, 2023).
- [26] The real Grassmannian $GR(2,4)$. Disponible en: <https://math.harvard.edu/~klin/Gr24.pdf> (Accedido: 7 junio 2023).