Facultad
de
Ciencias

ECUACIÓN DE ONDAS DE BOUSSINESQ

(Boussinesq wave equation)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Ángel de Hoyos Sainz

Director: Rafael Granero Belinchón

Junio-2023

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio de la ecuación de ondas de Boussinesq. El trabajo se desarrolla principalmente en el campo de análisis matemático, en particular sobre ecuaciones en derivadas parciales, aunque también jugarán un papel importante nociones algebraicas, geométricas y algunos conceptos físicos. Se estudiará su derivación desde el movimiento de las olas en aguas poco profundas y desde los estudios de Fermi-Pasta-Ulam basados en la evolución de un cristal hacia el equilibrio térmico, detallando en cada caso el contexto y cálculos que les llevo a obtener la ecuación. También se tratará la existencia de solución para el problema de valores iniciales y se demostrará la existencia de solución local aplicando un argumento de punto fijo sobre un operador correctamente definido en el espacio de Sobolev H^1. Por último, se realizarán simulaciones en MATLAB de la solución del IVP de Boussinesq. Para ello se resolverá aplicando el método de Runge-Kutta-Fehlberg con orden (4,5).

Abstract

In this work a study of the Boussinesq wave equation is carried out. The work is developed mainly in the field of mathematical analysis, particularly on equations in partial derivatives, although algebraic and geometric notions and some physical concepts will also play an important role. Its derivation from the movement of waves in shallow waters and from the Fermi-Pasta-Ulam studies based on the evolution of a crystal towards thermal equilibrium will be studied, detailing in each case the context and calculations that led them to obtain the equation. The existence of a solution for the initial value problem will also be discussed and the existence of a local solution will be demonstrated by applying a fixed point argument to a correctly defined operator in the Sobolev space H^1. Finally, MATLAB simulations of the Boussinesq IVP solution will be performed. To do this, it will be solved by applying the Runge-Kutta-Fehlberg method with order (4,5).

Índice general

1. Introducción **1**

2. Derivación de la ecuación **3**
2.1. Derivación desde el movimiento de las olas del agua 3
2.1.1. Contexto 4
2.1.2. Ecuaciones fundamentales en la derivación 4
2.1.3. Aproximación de la función potencial 5
2.1.4. Condiciones de contorno 6
2.1.5. Deducción de la ecuación de Boussinesq 8
2.2. Derivación desde la ecuación de Fermi-Pasta-Ulam 12
2.2.1. Contexto 12
2.2.2. Estimación mediante diferencias finitas 13
2.2.3. Estimación con cambio de variable 15

3. Existencia local **17**
3.1. Problema de valores iniciales (IVP) 17
3.2. Solución de las ecuaciones lineales de Boussinesq 19
3.2.1. Solución para la ecuación homogénea 19
3.2.2. Solución para la ecuación no homogénea 22
3.3. Teoría de existencia local para el IVP en H^1 23
3.3.1. Operador punto fijo 25
3.3.2. Existencia y unicidad de Solución 32
3.4. Resolución analítica mediante solitones 37
3.4.1. Método de la tangente hiperbólica 37
3.4.2. Solución explícita 39

4. Simulaciones **41**
4.1. Métodos Runge-Kutta 41
4.2. Métodos espectrales 43
4.3. Simulaciones en MATLAB 45

Bibliografía **49**

Apéndice **50**
A.4. Definiciones 50
A.5. Resultados 52

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones de Boussinesq aparecen al estudiar fenómenos en la costa, ríos, lagos e incluso tsunamis, son usadas frecuentemente en la ingeniería costera, donde se realizan simulaciones para describir las olas en aguas poco profundas. Estas ecuaciones toman la forma de una EDP de segundo orden en tiempo.

En el capítulo 2 de este trabajo se estudiará la derivación de la ecuación de Boussinesq desde el movimiento de las olas del agua (sección 2.1) donde se seguirán y se desarrollarán los estudios de Boussinesq [1]. Para ello se introducirá un breve contexto histórico sobre la teoría de los solitones y una vez expuestas las ecuaciones fundamentales de mecánica de fluidos, se procederá a obtener la aproximación de Boussinesq basada en la onda solitaria y planteamiento del problema de valores iniciales. Además, en este capítulo también se estudiará la derivación desde los experimentos de Fermi-Pasta-Ulam [4] en 1952-1955 sobre la evolución de un cristal hacia el equilibro térmico (sección 2.2), donde se obtendrá la ecuación de Boussinesq mediante aproximaciones con diferencias finitas y un cambio de variable.

En el capítulo 3 se abordará la existencia local. Se presentará el problema de valores iniciales para la ecuación lineal de Boussinesq, se analizarán sus dos variantes (ecuación "buena" y "mala") y se resolverán mediante el método de variación de parámetros. En el caso no lineal se demostrará la existencia y unicidad de solución local utilizando un argumento basado en el teorema de la aplicación contractiva y teorema de punto fijo sobre un operador correctamente definido. Por último, al final de capítulo se proporcionará un ejemplo de resolución de la ecuación "mala" de Boussinesq usando soluciones del tipo solitón con el método de la tangente hiperbólica.

En el capítulo 4 se realizarán las simulaciones en MATLAB para el IVP con la ecuación "buena" de Boussinesq. Se aplicará un cambio de variable al espacio de Fourier para trabajar con EDOs en el IVP. Se explicarán los métodos de Runge-Kutta y espectrales, así como que papel juegan en nuestro problema. Se mostrará el código MATLAB que representa el IVP y lo resuelve empleando el método de pares encajados con orden (4,5) que recoge la función ode45. Además, en el main también se recogerá el código que realiza las representaciones gráficas para distintas condiciones iniciales de la evolución de un conjunto de soluciones frente al tiempo, junto con la gráfica de la solución en el espacio en instantes concretos.

Capítulo 2

Derivación de la ecuación

Vamos a obtener la ecuación de Boussinesq a partir de las ecuaciones que rigen el movimiento de fluidos en aguas poco profundas. Para ello seguiremos los estudios de Boussinesq sobre las observaciones de John Scott Russell de la onda de traslación [1] (actualmente conocida como solitón). Por otro lado, también estudiaremos la obtención de la ecuación de Boussinesq desde la ecuación de Fermi-Pasta-Ulam obtenida a partir de sus experimentos realizados en 1952-1955 [4] sobre la evolución de un cristal hacia el equilibrio térmico.

2.1. Derivación desde el movimiento de las olas del agua

En esta sección primero introduciremos el contexto histórico del estudio de Boussinesq, seguido de las ecuaciones y nociones básicas de la hidrodinámica. Estas ecuaciones serán modificadas de acuerdo a las particularidades del fluido que vamos a estudiar (subsecciones (2.1.1) y (2.1.2)). A continuación, en la subsección (2.1.3) daremos una aproximación para la función potencial que utilizaremos en la subsección (2.1.5) para expandir las condiciones de la superficie libre[A,4] del fluido. En la subsección (2.1.4) se mostrará el sistema que plantea el movimiento del fluido en el plano XZ (omitiendo la coordenada y) a lo largo de un canal rectangular, este sistema esta formado por las condiciones de contorno junto con la ecuación de la continuidad. En la última subsección deduciremos la ecuación de Boussinesq, para ello haremos uso de las dos expresiones que muestran la variación de la elevación de la superficie libre y la velocidad en el fondo en función de las variables x, t. Con estas expresiones y realizando una segunda aproximación en las condiciones de contorno podremos obtener la ecuación buscada.

2.1.1. Contexto

En 1834 John Scott Russell realizo unas observaciones sobre la propagación de una ola con unas características particulares a lo largo de un canal. Si a la entrada de un canal rectangular que contiene un líquido en reposo y de profundidad constante se produce una perturbación, ya sea por la entrada en el canal de líquido desde el exterior o por hacerlo retroceder por un pistón, esto genera una única ola que se propaga a lo largo del canal. Esta ola se caracteriza por tener una sección longitudinal regular y simétrica respecto el eje vertical y por recorrer grandes distancias sin deformarse. La ola observada por Scott Russell en sus experimentos se denomina onda solitaria o solitón.
A partir de las observaciones de Russell sobre el solitón, Boussinesq dio una aproximación, unas ecuaciones en derivadas parciales no lineales conocidas como ecuaciones de Boussinesq. Estas ecuaciones están destinadas a describir el movimiento irrotacional de un fluido incompresible[A,4], homogéneo y no viscoso, además son válidas para olas largas débilmente no lineales. Las ecuaciones de Boussinesq son más completas que otras ecuaciones sobre aguas poco profundas, debido a que tienen en cuenta efectos dispersivos[A,4], dependiendo de cómo se haya escogido la dispersión la efectividad de las ecuaciones variará.

2.1.2. Ecuaciones fundamentales en la derivación

Tomamos el sistema cartesiano (x, y, z), coordenadas que representan un punto en el espacio ocupado por una molécula de fluido en un instante t, sea p la presión en ese punto y ρ la densidad. Tomamos como funciones continuas p, u, v y w en x, y, z, t, donde u, v, w son las tres componentes de la velocidad asociadas a los ejes. El fluido en el que vamos a trabajar será incompresible y no viscoso con un flujo irrotacional. También tenemos que introducir la función potencial $\varphi(x, y, z, t)$ que determina el movimiento de dicho fluido, la cual usaremos para denotar el flujo potencial[A,4], dicho potencial existe por la irrotación

$$\nabla \times \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \nabla\varphi$$

siendo $\vec{u} = (u, v, w)$ el vector de velocidad y $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T$ el gradiente. Por último llamaremos F_1, F_2 y F_3 a las componentes de las fuerzas externas por unidad de masa que actúan sobre el volumen del flujo. Así diremos que las ecuaciones del movimiento, también conocidas como **las Ecuaciones de Euler** para fluidos incompresibles con densidad constante y uniforme, son:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = F_1 - \frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = F_2 - \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = F_3 - \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t} \tag{2.1.1}$$

Donde $\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla u$ denota la derivada material[A,4]. Debido a la incomprensibilidad del fluido (densidad constante) y la irrotacionalidad del flujo se tiene

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla^2 \cdot \varphi = \Delta\varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{2.1.2}$$

A continuación, recordando la relación $\vec{u} = \nabla\varphi$ podemos integrar las ecuaciones en (2.1.1), teniendo en cuenta $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = -g \cdot \vec{e_3}$, donde g es la gravedad.

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) + f_1(y, z, t) \tag{2.1.3}$$

De igual manera obtenemos el resto.

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) + f_2(x, z, t) \tag{2.1.4}$$

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) + f_3(x, y, t) \tag{2.1.5}$$

Las funciones $f_1(y, z, t), f_2(x, z, t)$ y $f_3(x, y, t)$ son funciones arbitrarias obtenidas al integrar con respecto a x, y o z las ecuaciones de (2.1.1). Realizando (2.1.3) - (2.1.4) $\Rightarrow f_1(y, z, t) = f_2(x, z, t) = f(z, t)$, con esto hemos deducido que tanto f_1 como f_2 son funciones que dependen solo de z y t. A su vez, si restamos (2.1.3) - (2.1.5) $\Rightarrow f_3(x, y, t) = gz + f(z, t)$ luego $f_3 = F(t)$ es una función que solo depende de t, sustituyendo $f(z, t) = F(t) - gz$ en (2.1.3) obtenemos **la ecuación de Bernoulli** junto con una función arbitraria $F(t)$.

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) + F(t) \tag{2.1.6}$$

2.1.3. Aproximación de la función potencial

Partiendo del planteamiento que propuso Boussinesq, suponemos el líquido contenido en una piscina de fondo horizontal y agitado de tal manera que las componentes

horizontales de la velocidad u y v tienen valores similares en cualquier momento para todas las moléculas del fluido que se encuentren sobre una misma sección vertical. Tomamos el fondo de la piscina como el plano XY y llamaremos $\varphi_0(x, y, t)$ al valor de la función potencial φ en los puntos de este plano. Podemos observar que en el plano XY ($z = 0$) la velocidad vertical $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$.
Según la condición especial en el fondo tenemos:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, t) + \int_0^z \int_0^{z'} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\, dz\, dz'$$

usando (2.1.2);

$$\varphi = \varphi_0 - \int_0^z \int_0^{z'} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dz\, dz' \tag{2.1.7}$$

Ahora podemos reemplazar en (2.1.7) las velocidades u y v por los valores en el fondo $u_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$ y $v_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$ (situado en la misma vertical) que son valores similares como suponíamos antes. Integrando teniendo en cuenta que φ_0 depende solo de x, y, t obtenemos una primera aproximación de φ.

$$\varphi \approx \varphi_0 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} \right)$$

Sustituimos esta aproximación de la función potencial en la integral de (2.1.7) para obtener un nuevo término en la aproximación de mayor orden. Realizando estas sustituciones sucesivamente obtenemos una serie convergente a la función potencial φ en función de los valores del fondo. Llamando $\triangle_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ tenemos finalmente:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} \triangle_2 \varphi_0 + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \triangle_2^2 \varphi_0 - \frac{z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \triangle_2^3 \varphi_0 + ... \tag{2.1.8}$$

2.1.4. Condiciones de contorno

A continuación tenemos que encontrar las condiciones de contorno que restringen el problema; las dos condiciones frontera sobre la vertical, la dinámica y cinemática. Sea p_0 la presión atmosférica que suponemos constante en todo momento y lugar; p la presión en la profundidad considerada; H la profundidad constante del líquido en las partes donde no se encuentra agitado; $H + h$ la profundidad, siendo h una función en x, y, t que representa las variaciones de profundidad en la superficie del líquido. Además, denotaremos por Ω_t al dominio del fluido no acotado lateralmente, que se encuentra limitado inferiormente por el fondo del canal (plano $z = 0$) y superiormente por la superficie libre ($z = H + h(x, y, t)$). De acuerdo a la presión

hidrostática

$$p = p_0 + \rho g(H + h - z)$$

Ahora podemos sustituir la presión p en la ecuación (2.1.6), agrupando la expresión constante gH en la función arbitraria $F(t)$. En cuanto a la función arbitraria $F(t)$ de la ecuación (2.1.6), podemos determinarla observando que en puntos muy distantes, donde $\varphi = 0$ las cuatro derivadas de φ en x, y, z, t y las cantidades p_0 y h se anulan a la vez, por tanto, se tiene $F(t) = 0$. Con todo esto, **la condición dinámica** (2.1.6) evaluada en la superficie libre se convierte en:

$$\frac{p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gh - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \tag{2.1.9}$$

tomando $p_0 = 0$ obtendremos la primera condición especial de la superficie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gh + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) = 0 \quad en \;\; z = H + h(x, y, t)$$

La **condición cinemática para el flujo**, que se deducen del movimiento de las moléculas del agua a lo largo de la superficie

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad en \;\; z = H + h(x, y, t)$$

Por último nos queda **la condición en el fondo**. Como el fondo lo hemos considerado plano, su vector normal será $\vec{n} = -e_3$. Así tenemos:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \nabla \varphi \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Nos proponemos estudiar los movimientos a lo largo de un canal de longitud indefinida para evitar tratar las condiciones frontera. Solo consideramos las velocidades horizontales en el plano XZ independientes de y. La función potencial en el fondo plano φ_0 y la parte variable de la profundidad h solo dependerán de x y t ($\Omega_t = \mathbb{R} \times [0, H + h]$). Finalmente, juntando las condiciones de contorno y añadiendo la ecuación de la continuidad (2.1.2) tenemos el siguiente sistema:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad 0\le z\le H+h(x,t) \tag{2.1.10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gh+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)=0 \qquad z=H+h(x,t) \tag{2.1.11}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} \qquad z=H+h(x,t) \tag{2.1.12}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \qquad z=0 \tag{2.1.13}$$

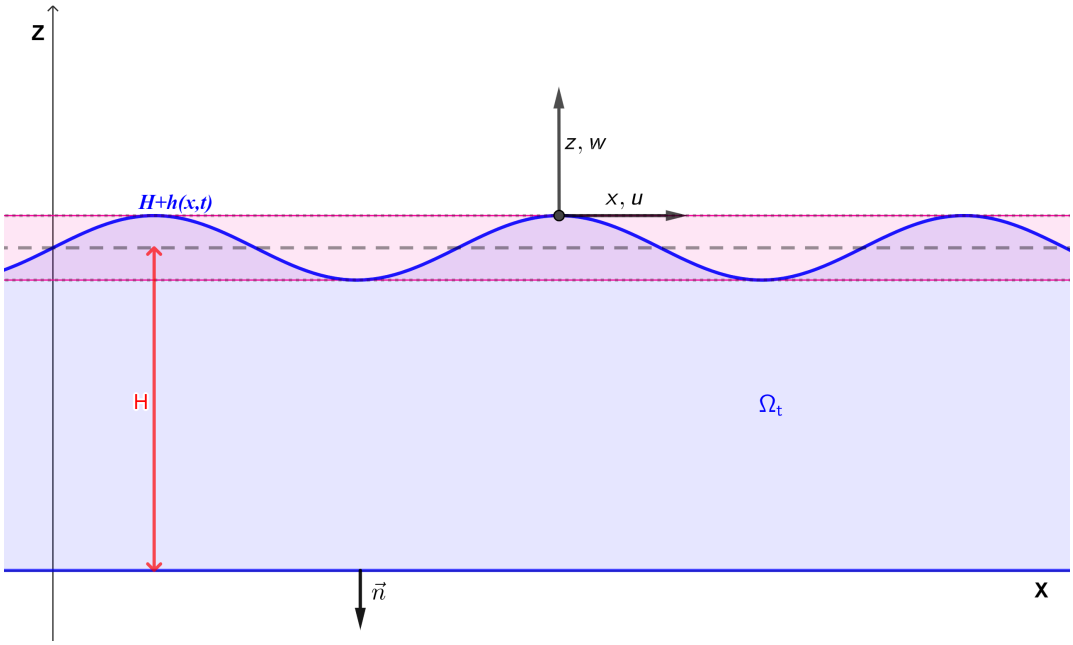

Figura 2.1: Geometría en la sección vertical XZ

2.1.5. Deducción de la ecuación de Boussinesq

Suponemos que el movimiento se propaga hacia $x\in\mathbb{R}^+$ y cuando $x\to\infty$ se anulan φ_0 y u_0. Esto supone

$$\varphi_0=-\int_{x'}^{\infty}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}dx=-\int_{x'}^{\infty}u_0\,dx$$

Sustituyendo φ_0 en la aproximación (2.1.8) y recordando que nuestro sistema es independiente de la variable y, obtenemos

$$\varphi=-\int_{x'}^{\infty}u_0\,dx-\frac{z^2}{1\cdot 2}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}-\frac{z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\frac{\partial^5 u_0}{\partial x^5}+\ldots \tag{2.1.14}$$

Esta nueva aproximación de φ la utilizaremos para sustituirla en las condiciones de la superficie libre (2.1.11) y (2.1.12) para $z = H + h$

$$\begin{cases} gh - \int_{x'}^{\infty} \frac{\partial u_0}{\partial t}\, dx - \frac{(H+h)^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + ... \\ ... + \frac{1}{2}\left[\left(u_0 - \frac{(H+h)^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + ...\right)^2 + \left(-\frac{H+h}{1}\frac{\partial u_0}{\partial x} + ...\right)^2\right] = 0; \\ \\ -\frac{H+h}{1}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{(H+h)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - ... = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}(u_0 - \frac{(H+h)^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + ...). \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Estas son dos ecuaciones se encuentran regidas por las variaciones de h y u_0 en x y t. Si determinamos estas dos funciones, las fórmulas (2.1.14) y (2.1.9) nos permitirán obtener las velocidades u, w y la presión p_0 no hidrostática en todos los puntos del fluido. Tanto la variable h de la profundidad como la velocidad u_0 las supondremos muy pequeñas, por tanto, sus sucesivas derivadas en x serán cada vez más pequeñas, luego la serie (2.1.14) será rápidamente convergente. Realizando una primera aproximación despreciando los términos más pequeños frente a u_0 en la primera de (2.1.15) y frente a $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ en la segunda, las ecuaciones de (2.1.15) se reducen a

$$\int_{x'}^{\infty} \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}\, dx = gh(x,t); \tag{2.1.16}$$

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = -H\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}. \tag{2.1.17}$$

A continuación multiplicando por H y derivando dos veces con respecto a x a (2.1.16) y diferenciada con respecto a t (2.1.17) se tiene

$$\left.\begin{aligned} -H\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} &= gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= -H\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{2.1.18}$$

Esta es la ecuación diferencial aproximada encontrada por Lagrange que representa el movimiento de las olas en aguas poco profundas.

Solución de la ecuación (2.1.18)

La ecuación se trata de una EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Las ecuaciones características de $h_{tt} - gHh_{xx} = 0$ son:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4\cdot(-gH)}}{2}$$

que admite como soluciones las rectas $x = \lambda_i t + cte$ con $\lambda_i = \pm\sqrt{gH}$ para i =1,2. El discriminante de la ecuación característica es menor que cero por ser g negativo, luego estamos ante un caso elíptico. Ahora tomamos el cambio

$$\varepsilon(t,x) = x - t\sqrt{gH}; \;\; \eta(t,x) = x + t\sqrt{gH}$$

entonces con este cambio podemos reescribir (2.1.18) como

$$h_{\varepsilon\eta}(\varepsilon,\eta) = 0 \Rightarrow \int\int h_{\varepsilon\eta}(\varepsilon,\eta)d\varepsilon\, d\eta = f(\varepsilon) + f_1(\eta)$$

Luego la solución a la ecuación (2.1.18) es:

$$h(x,t) = f\left(x - t\sqrt{gH}\right) + f_1\left(x + t\sqrt{gH}\right) \tag{2.1.19}$$

Una vez obtenida la solución a la ecuación del movimiento (2.1.18), podemos sustituir en (2.1.17) e integrar esa expresión con respecto a x, con esto obtenemos

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}}\left[f\left(x - t\sqrt{gH}\right) - f_1\left(x + t\sqrt{gH}\right) + g(t)\right] \tag{2.1.20}$$

La función arbitraria $g(t)$ deducimos que es nula al sustituir esta ecuación en (2.1.16). En cuanto a las dos funciones arbitrarias f y f_1 se determinarán usando que para $t = 0$, u_0 y h son funciones en x. Solo estudiamos los movimientos de las olas propagadas en las x positivas, podemos suponer que hemos elegimos el origen de las x tal que para $t = 0$, $u_0(x,0) = 0$ y $h(x,0) = 0$ o al menos insensibles para valores de $x > 0$. Con todo esto, de las fórmulas (2.1.19) y (2.1.20) sacamos $f(x) = f_1(x)$ y $f(x) = -f_1(x)$ entonces tenemos $f(x) = f_1(x) = 0$ para $x > 0$. Si solo consideramos valores de $x > -t\sqrt{gH} \Rightarrow x + t\sqrt{gH} > 0$ nos permite reducir las expresiones más generales (2.1.19) y (2.1.20) en:

$$h(x,t) = f\left(x - t\sqrt{gH}\right); \;\; u_0(x,t) = \sqrt{\frac{g}{H}}h(x,t) \tag{2.1.21}$$

Pasando a una segunda aproximación (respecto a la realizada para obtener las ecuaciones (2.1.16) y (2.1.17)) de las condiciones de contorno (2.1.15), mantendremos los siguientes términos:

1. En la primera ecuación de (2.1.15) mantenemos (el resto de términos serán

despreciados por ser más pequeños)

$$gh - \int_{x'}^{\infty} \frac{\partial u_0}{\partial t}\, dx - \frac{H^2}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}u_0^2 = 0$$

2. En la segunda de (2.1.15) conservamos

$$-\frac{H+h}{1}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{H^3}{6}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x}$$

Con esta nueva aproximación y teniendo en cuenta las relaciones entre u_0 y h de (2.1.21), las ecuaciones de (2.1.15) se reducen a

$$\begin{cases} \int_{x'}^{\infty} \frac{\partial u_0}{\partial t} dx = gh + \frac{g}{2}\left(\frac{h^2}{H} + H^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right); \\ \\ \frac{\partial h}{\partial t} = -H\frac{\partial u_0}{\partial x} - \sqrt{gH}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^2}{H} - \frac{H^2}{6}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right). \end{cases} \qquad (2.1.22a)\text{-}(2.1.22b)$$

A continuación, si derivamos una vez con respecto a t (2.1.22b), observando en (2.1.21) que $\frac{\partial u_0}{\partial x} = \sqrt{\frac{g}{H}}\frac{\partial h}{\partial x}$ y que $\frac{\partial h}{\partial t} = -\sqrt{gH}\frac{\partial h}{\partial x}$, se tiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-H\left(\sqrt{\frac{g}{H}}\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \sqrt{gH}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^2}{H} - \frac{H^2}{6}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{h^2}{H} - \frac{H^2}{6}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) \qquad (2.1.23)$$

Derivando dos veces con respecto a x, multiplicando por H la ecuación (2.1.22.a) y teniendo en cuenta $\frac{\partial u_0}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x}$, obtenemos

$$H\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-g\int_{x'}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial x}dx\right) = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{gH}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{h^2}{H} + H^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{gH}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{h^2}{H} + H^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right). \qquad (2.1.24)$$

Finalmente sumando (2.1.23)+(2.1.24) obtenemos la ecuación de Boussinesq (no adimensional)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{3h^2}{2H} - \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) \qquad (2.1.25)$$

Para obtener su expresión adimensional realizamos los cambios; $\phi = \frac{h}{2H}$, la elevación

de la superficie adimensional; $\tau = \sqrt{3}t\sqrt{\frac{g}{H}}$, el tiempo adimensional; $\varepsilon = \sqrt{3}\frac{x}{H}$, la posición horizontal adimensional.

$$\phi_{\tau\tau} - \phi_{\varepsilon\varepsilon} - \left(3\phi^2 + \phi_{\varepsilon\varepsilon}\right)_{\varepsilon\varepsilon} = 0 \tag{2.1.26}$$

2.2. Derivación desde la ecuación de Fermi-Pasta-Ulam

En la siguiente presentaremos el contexto histórico de los estudios Fermi-Pasta-Ulam que les llevo a experimentar con modelos no lineales (2.2.1) y su relación con la ecuación de Boussinesq. En las subsecciones (2.2.2) y (2.2.3) mostraremos dos maneras de obtener una aproximación a la ecuación de Boussinesq a partir de la ecuación de Fermi-Pasta-Ulam, en (2.2.2) partiendo de diferencias finitas sobre la función de fuerzas entre partículas independiente del espaciado del enrejado y en (2.2.3) mediante un cambio de variable que represente el estiramiento de la i-ésima partícula con respecto a la $i-1$ y tomando un espaciado de enrejado arbitrario en la función de fuerzas, que consideraremos pequeño.

2.2.1. Contexto

Los científicos Enrico Fermi, John Pasta y Stanislaw Ulam planearon una serie de experimentos numéricos con el fin de entender mejor los sistemas no lineales, realizaron estos experimentos sobre un modelo no lineal simple. Estos experimentos fueron llevados a cabo en Los Álamos utilizando la supercomputadora MANIAC-1, computadora cuyo uso inicial era para realizar cálculos sobre armas nucleares. Fermi, Pasta y Ulam decidieron seleccionar para su estudio un modelo físico sencillo que se adaptase a un modelo no lineal y simular su comportamiento en un periodo de tiempo. el modelo escogido fue el estudio de la evolución de un cristal hacia el equilibrio térmico modelizado mediante una cadena de osciladores[A,4] acoplados, cada oscilador se encuentra unido por un potencial de interacción[A,4] cuadrático junto con una interacción débil no lineal (modelo discreto determinado por la masa unitaria de los osciladores).
En el modelo lineal la solución es una vibración periódica de la cadena, luego el resultado esperado para el modelo no lineal sería la aleatorización del movimiento de la cadena de osciladores y la equipartición térmica (la energía esta compartida de igual manera entre modos[A,4] a medida que el sistema evoluciona). Contrariamente

a lo esperado, el reparto de la energía del modo original entre los demás modos no ocurría, la cadena mostraba un comportamiento casi periódico en el que prácticamente toda la energía original regresaba al modo original. Este hecho se le conoce como la paradoja de FPU, la no linealidad no es condición suficiente para garantizar la equipartición de la energía. Fermi, Pasta y Ulam afirmaron que en su EDO, si se permite que el número de partículas se vuelva infinito esta ecuación se transforme en la ecuación de Boussinesq.
Una vez publicados sus experimentos en 1955, en los años posteriores se continuaron realizando más estudios sobre el FPU. En 1961 Zabusky explico el comportamiento periódico introduciendo el concepto de solitón, ondas solitarias estables no lineales que se comportan como partículas, que se encuentra presente en el FPU. Paralelamente, Morikazu Toda se interesó por el FPU y trabajo sobre una red con interacciones exponenciales conocida como red de Toda, sistema completamente integrable que también tenía soluciones del tipo solitón. Sin embargo, no fue hasta 1971 cuando el matemático V.E.Zakharov propuso una explicación del fenómeno recurrente del FPU[A,4] usando la ecuación de Boussinesq. Su principal resultado fue que las ecuaciones de Boussinesq presentan un conjunto infinito de integrales conmutables del movimiento[A,4], es decir, un sistema hamiltoniano[A,4] completamente integrable con órbitas casi periódicas. Debido a la gran relación entre la ecuación de Boussinesq y el FPU, la ecuación de Boussinesq explicaría la cuasi periodicidad del FPU, sin embargo, Zakharov no llego a profundizar en sus estudios sobre esta relación. En esta sección abordaremos como podemos obtener la ecuación de Boussinesq a partir de la ecuación del FPU.

2.2.2. Estimación mediante diferencias finitas

Consideramos la ecuación no lineal cuadrática de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) sobre la recta real:

$$\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + (u_{i+1} - u_i)^2 - (u_i - u_{i-1})^2;\ x \in \mathbb{R} \qquad (2.2.1)$$

Donde u_i es el desplazamiento de la i-ésima partícula y las condiciones de contorno del problema son $u_1 = 0, u_n = 0$.
Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(s) = s + hs^2$ que representa la fuerza ejercida entre dos partículas de la cadena (relación esfuerzo-deformación), con $h > 0$ el espaciado en la red de Toda[A,4] (considerado pequeño). Vamos a tratar de dar una nueva versión

del (FPU) utilizando los operadores de diferencias finitas progresivas y regresivas.

$$\Delta_h [f](x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Delta_h^- [f](x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Utilizando estos operadores, planteamos una versión del (FPU)

$$\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} = \Delta_h \left[f\left(\Delta_h^- [f](x,t)\right)\right].$$

Si consideramos la función f como $f(s) = s + s^2$ (independiente del espaciado del enrejado), la ecuación anterior se convierte en:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}\right) - \left(\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}\right)\right] + \\ +\frac{1}{h}\left[\left(\frac{u(x+h,t)-u(x,t)}{h}\right)^2 - \left(\frac{u(x,t)-u(x-h,t)}{h}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Podemos observar que si tomamos $h = 1$ esta ecuación se convierte en la original del (FPU) (2.2.1). A continuación consideramos las expansiones de Taylor

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + ...$$

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + ...$$

Con esto tenemos en (2.2.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{h^2}\Bigg(h\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + R_1 \\ -h\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + R_2\Bigg)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^3}\Bigg(h^2\frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{h^4}{4}\frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial x^2} + h^3\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{h^4}{3}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + R_3 \\ -h^2\frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{h^4}{4}\frac{\partial^2 u^2(x,t)}{\partial x^2} + h^3\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{h^4}{3}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + R_4\Bigg)\end{aligned}$$

Donde R_1, R_2, R_3 y R_4 son los términos restantes omitidos en la expansión. Sí operamos esta EDP obtenemos finalmente una versión escalada de la ecuación de Bous-

sinesq junto con un término restante R.

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx} + \left(u_x^2\right)_x + R$$

2.2.3. Estimación con cambio de variable

Retomando la función sobre las fuerzas entre partículas $f = s + hs^2$ para un espaciado de enrejado h, podemos escribir la ecuación (2.2.1) con respecto a esta función

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(u_{i+1} - u_i) - f(u_i - u_{i-1})$$

Sea la variable $v(x,t) \mid_{x=iH} = v_i = u_i - u_{i-1}$ que indica la generalización del estiramiento de la i-ésima partícula con respecto a la $i-1$, donde H es el espacio de enrejado constante. Ahora podemos reescribir la ecuación en términos de v_i.

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = f(v_{i+1}) - 2f(v_i) + f(v_{i-1}) \tag{2.2.3}$$

A continuación expandiremos la ecuación tomando el desarrollo en serie de Taylor de $f(v_{i+1})$ y $f(v_{i-1})$:

$$f(v_{i\pm1}) = f(v_i) \pm H\frac{\partial f(v_i)}{\partial x} + \frac{H^2}{2}\frac{\partial^2 f(v_i)}{\partial x^2} \pm \frac{H^3}{6}\frac{\partial^3 f(v_i)}{\partial x^3} + ...$$

aplicamos la transformada de Fourier a la serie de Taylor pasando a la función continua v,

$$\mathfrak{F}(f(v) \pm H\frac{\partial f(v)}{\partial x} + \frac{H^2}{2}\frac{\partial^2 f(v)}{\partial x^2} \pm \frac{H^3}{6}\frac{\partial^3 f(v)}{\partial x^3} + ...)(\varepsilon) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(f(v) \pm H\frac{\partial f(v)}{\partial x} + \frac{H^2}{2}\frac{\partial^2 f(v)}{\partial x^2} \pm \frac{H^3}{6}\frac{\partial^3 f(v)}{\partial x^3} + ...)e^{i\varepsilon x}dx =$$

$$= \mathfrak{F}(f(v))(\varepsilon) \pm i\varepsilon H\mathfrak{F}(\frac{\partial f(v)}{\partial x})(\varepsilon) + (i\varepsilon)^2\frac{H^2}{2}\mathfrak{F}(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial x^2})(\varepsilon) \pm (i\varepsilon)^3\frac{H^3}{6}\mathfrak{F}(\frac{\partial^2 f(v)}{\partial x^2})(\varepsilon) + ... =$$

$$= e^{\pm i\varepsilon H}\mathfrak{F}(f(v))(\varepsilon)$$

Con esto definimos la correspondencia $T(f(v)) = \mathfrak{F}^{-1}(e^{\pm i\varepsilon H}\mathfrak{F}(f(v))(\varepsilon))(\varepsilon) = e^{\pm H\partial_x}f(v)$, esta notación nos permite reescribir la ecuación (2.2.3):

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \left(e^{H\partial_x} + e^{-H\partial_x} - 2\right)f(v(x,t)) = 4sinh^2\left(\frac{H}{2}\partial_x\right)f(v(x,t))$$

Ahora tomamos el desarrollo de Taylor para $sinh^2\left(\frac{H}{2}\partial_x\right)$ entorno a $x = 0$ y aproximamos hasta los elementos de orden $O(H^4)$ y anulamos los términos de orden $O(hH^4)$ (para h pequeños).

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 4\left(\left(\frac{H}{2}\partial_x\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{H}{2}\partial_x\right)^4\right)(v(x,t) + hv(x,t)^2)$$

Finalmente realizando los cambios $x \to \frac{x\sqrt{12}}{H}$, $t \to \sqrt{12}t$, $v \to hv$ y recordando que despreciamos los términos de $O(hH^4)$, llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = \left(v + v^2 + v_{xx}\right)_{xx} \tag{2.2.4}$$

Recordando que v es el tramo discreto de la red y que habíamos considerado $v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, deshacemos este cambio de variable e integramos una vez con respecto a x, así la ecuación (2.2.4) se vuelve:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = u_{xx} + \left(u_x^2\right)_x + u_{xxxx} + F(t)$$

Sí realizamos el cambio $U(x,t) = u(x,t) - \partial_t^{-2}F(t) \Rightarrow \partial_t^2 U(x,t) = \partial_t^2 u(x,t) - F(t)$ nos permite anular la función arbitraria obtenida en la integración sin alterar la parcial de u respecto a x. Con todo esto concluimos con la obtención de la ecuación de Boussinesq.

Capítulo 3

Existencia local

3.1. Problema de valores iniciales (IVP)

Consideramos el siguiente problema de valores iniciales (IVP) para una ecuación de tipo Boussinesq:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (\psi(u))_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Esta ecuación surge en el modelado de cuerdas[A,4] no lineales, la cual es una generalización de la ecuación de Boussinesq. Para el caso $\psi(u) = u^2$ tenemos la denominada **ecuación "buena"de Boussinesq**

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \tag{3.1.2}$$

en comparación con la **ecuación "mala"de Boussinesq** definida como

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0. \tag{3.1.3}$$

Podemos observar que esta versión es la obtenida en la derivación de la sección 2.1 al calcular la ecuación desde el movimiento de las olas del agua y la obtenida en la sección 2.2 basándonos en los estudios de Fermi-Pasta-Ulam. Tanto para la versión "buena" como para la generalizada (3.1.1) podemos estudiar soluciones locales para el (IVP) a diferencia de la versión "mala".
Para la ecuación (3.1.3) solo se conocen soluciones de tipo solitón, es decir, soluciones para ecuaciones que deriven del estudio de la onda solitón. En la sección 3.4

mostraremos como obtener este tipo de soluciones de tipo solitón para la ecuación (3.1.3) usando el método de la tangente hiperbólica.
En cuanto a las versiones lineales de la ecuación "buena" y "mala" las resolveremos en la sección 3.2 aplicando la transformada de Fourier para poder comprobar que las soluciones de la ecuación (3.1.3) lineal crecen como $e^{\pm\varepsilon^2 t}$ con el tiempo, hecho que hereda el problema no lineal, luego para poder estudiar un buen planteamiento tenemos que eliminar la componente proporcional a $e^{\varepsilon^2 t}$. Por otro lado, también calcularemos las soluciones de la ecuación (3.1.2) lineal no homogénea, que nos servirá para plantear el teorema de punto fijo (con base sobre el teorema de punto fijo de Banach), el cual jugará un papel muy importante en el estudio de la existencia local en el espacio de Sobolev H^1 (sección 3.3).

Finalmente, tenemos que definir los espacios de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^d)$, en particular el espacio $H^1(\mathbb{R})$, este espacio nos permitirá tomar funciones las cuales podremos aplicar la trasformada de Fourier correctamente. Previamente, tenemos que introducir el espacio de funciones Lebesgue de p-ésima potencia integrable (espacios L^p). Definimos estos espacios como

$$L^p(\Omega) \overset{def}{=} \left\{ \lfloor u \rfloor_\sim : \|u(x)\|^p_{L^p(\Omega)} \overset{def}{=} \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

Siendo Ω el espacio donde vamos a considerar las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$, en nuestro caso consideraremos $\Omega = \mathbb{R}^d$. Por otro lado, $\lfloor u \rfloor_\sim$ son el conjunto de clases de equivalencia u, con relación de equivalencia dada por $u \sim v$ si $u = v$ en casi todo punto[A,4], es decir, en el sentido que hemos definido la norma en L^p

$$\|u - v\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u(x) - v(x)|^p \, dx = 0$$

Esta relación de equivalencia dota a las funciones medibles la estructura de espacio vectorial normado, así tenemos que los espacios L^p son espacios de Banach, es decir, un espacio vectorial completo. Se tiene el siguiente resultado sobre la completitud,

Teorema 3.1.1. *Dada una sucesión f_n convergente a f en sentido L^p,*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^p_{L^p(\Omega)} = 0$$

existe al menos una subsucesión tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ para casi todo x, y $|f_{n_k}| \leq g(x)$ para cierta g integrable.

Ahora, estamos en condiciones de definir el espacio de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}) \overset{def}{=} \left\{ \lfloor u \rfloor_\sim : \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty \right\} = \left\{ \lfloor u \rfloor_\sim : \int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^2\right) |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}$$

La expresión $\|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}$ se trata de la derivada débil[A,4]. Esta definición puede generalizarse a un mayor número de derivadas y a una dimensión arbitraria

$$H^k(\mathbb{R}^d) \overset{def}{=} \left\{ \lfloor u \rfloor_\sim : \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + |\xi|^{2k}\right) |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\}.$$

Dotamos a este espacio del producto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^k} \overset{def}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) + \partial_x^k f(x) \partial_x^k g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) + |\xi|^{2k} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi) d\xi$$

y de norma

$$\|f\|_{H^k} \overset{def}{=} \sqrt{\langle f, f \rangle_{H^k}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 + \left|\partial_x^k f(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1 + |\xi|^{2k}\right) \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

Podemos llevar esta idea en términos de los espacios L^p y definir así los espacios Sobolev más generales

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) \overset{def}{=} \left\{ \lfloor u \rfloor_\sim : \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}, \|\partial_x u\|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty \right\}.$$

Definimos la norma $\|.\|_{(k,2)}$ en el espacio de Sobolev $H^k(\mathbb{R})$ como $\|f\|_{k,2} = \left\|\Lambda^k f\right\|_2$ donde $\Lambda^k f(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{k/2} \widehat{f}(\xi)$.
Estos espacios nos permiten medir el número de derivadas débiles de una función en términos del decaimiento[A,4] de su transformada de Fourier y aseguran que dada una función y sus sucesivas derivadas hasta cierto orden se las pueda aplicar la transformada de Fourier de manera que se encuentre bien definida.

3.2. Solución de las ecuaciones lineales de Boussinesq

3.2.1. Solución para la ecuación homogénea

Partiendo de (IVP) de (3.1.1), planteamos la versión lineal tomando $\psi(u) = 0$ y dependiendo del signo de $\pm u_{xxxx}$ estaremos hablando de la ecuación "buena" (+) o

"mala" (-) de Boussinesq

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} \pm u_{xxxx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Tomamos las funciones f y g en el espacio de Sobolev H^1. A continuación aplicamos la transformada de Fourier al problema (3.2.1) respecto la variable x, llamando

$$U(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}dx$$

y aplicando la propiedad de la transformada de Fourier $\mathfrak{F}(f^{n)})(\xi) = (i\xi)^n\mathfrak{F}(f)(\xi)$ se obtiene

$$\begin{cases} U_{tt}(\xi,t) = -\xi^2 U(\xi,t) \pm \xi^4 U(\xi,t) & \xi \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \\ U_t(\xi,0) = \hat{g}(\xi). \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Ahora fijando ξ, podemos resolver la EDP como una EDO lineal de segundo orden. El polinomio característico asociado a la ecuación de (3.2.2) es

$$\lambda^2 = -\xi^2 \pm \xi^4 \Rightarrow \lambda = \pm|\xi|\sqrt{-1 \pm \xi^2}$$

Con esto podemos proponer una solución de la forma

$$U(\xi,t) = c_1(\xi)e^{|\xi|\sqrt{-1\pm\xi^2}t} + c_2(\xi)e^{-|\xi|\sqrt{-1\pm\xi^2}t}$$

donde $c_1(\xi)$ y $c_2(\xi)$ son funciones arbitrarias.

<u>Caso ecuación "buena"</u>

En este caso observamos que el polinomio característico $\lambda^2 = -\xi^2 - \xi^4$ tiene dos raíces complejas conjugadas, luego las soluciones independientes de la ecuación homogénea son de la forma

$$U(\xi,t) = c_1(\xi)cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) + c_2(\xi)sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) \tag{3.2.3}$$

Las funciones c_1 y c_2 las podemos sustituir en función de $\hat{f}$ y $\hat{g}$ empleando las condiciones iniciales de (3.2.2)

$$\begin{cases} U(\xi,0) = \hat{f}(\xi) = c_1(\xi) \\ U_t(\xi,0) = \hat{g}(\xi) = c_2(\xi)|\xi|\sqrt{1+\xi^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(\xi,t) = \hat{f}(\xi)cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|\sqrt{1+\xi^2}}sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t)$$

Por último, aplicamos la transformada inversa para poder obtener la solución del problema inicial (3.2.1)

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(& \hat{f}(\xi)cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) + \\ & + \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|\sqrt{1+\xi^2}}sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t)\Big) e^{i\xi x}d\xi \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Caso ecuación "mala"

En cuanto al caso malo, las raíces del polinomio característico $\lambda = \pm|\xi|\sqrt{-1+\xi^2}$ dependen del signo de $-1+\xi^2$. Si $\xi \in (-1,1)$ obtendríamos raíces complejas y volveríamos a proponer una solución del tipo de (3.2.4), sin embargo, si estamos ante el caso $\xi \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ obtendríamos raíces reales y propondríamos

$$U(\xi,t) = c_1(\xi)e^{|\xi|\sqrt{-1\pm\xi^2}t} + c_2(\xi)e^{-|\xi|\sqrt{-1\pm\xi^2}t} \tag{3.2.5}$$

Aplicando de nuevo las condiciones iniciales de (3.2.2) obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} U(\xi,0) = \hat{f}(\xi) = c_1(\xi) + c_2(\xi) \\ U_t(\xi,0) = \hat{g}(\xi) = c_1(\xi)|\xi|\sqrt{-1+\xi^2} - c_2(\xi)|\xi|\sqrt{-1+\xi^2} \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Si calculamos (3.2.6a) + (3.2.6b)/($|\xi|\sqrt{-1+\xi^2}$) sacamos que

$$c_1(\xi) = \frac{\hat{f(\xi)}}{2} + \frac{\hat{g(\xi)}}{2|\xi|\sqrt{-1+\xi^2}};\ c_2(\xi) = \frac{\hat{f(\xi)}}{2} - \frac{\hat{g(\xi)}}{2|\xi|\sqrt{-1+\xi^2}}.$$

Finalmente aplicando la transformada inversa llegamos a

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(c_1(\xi)e^{|\xi|\sqrt{-1+\xi^2}t} + c_2(\xi)e^{-|\xi|\sqrt{-1+\xi^2}t}\Big) e^{i\xi x}d\xi \tag{3.2.7}$$

Podemos observar que la función $\gamma(\xi,t)$ dada por el tiempo t que integramos en la solución (3.2.4) se encuentra acotada para ξ fijo por ser la suma de funciones acotadas ($sen(x), cos(x) \in [-1,1]$). Con esto tenemos

$$|\gamma(\xi,t)| \overset{|cos(x)|,|sen(x)|\in[0,1]}{\leq} \left|\hat{f}(\xi) + \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|\sqrt{1+\xi^2}}\right|$$

entonces la función $\gamma(\xi,t)$ nunca se nos saldrá del espacio de Sobolev considerado para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo, la solución asociada a la ecuación "mala" de Boussinesq (3.2.7) para el caso $|\xi| > 1$ la función $\gamma(\xi,t) = c_1(\xi)e^{|\xi|\sqrt{-1+\xi^2}t} + c_2(\xi)e^{-|\xi|\sqrt{-1+\xi^2}t}$ crece de forma exponencial con el tiempo, esto quiere decir que no se encuentra acotada en t, por lo que no podrá ser una función integrable. La propiedad $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$ tampoco se cumple, así que no podrá ser una función en el espacio de Sobolev H^1 que habíamos tomado de partida.

3.2.2. Solución para la ecuación no homogénea

Una vez calculadas las posibles soluciones u_h al problema homogéneo en la anterior subsección, ahora nos centraremos en calcular la solución particular u_p para el caso de la ecuación de Boussinesq "buena", para ello volveremos a plantear el problema (2.3.2) a partir del IVP (2.3.1) no homogéneo con una función arbitraria $h(t), \hat{h}(t) \in H^1$.

$$\begin{cases} U_{tt}(\xi,t) + \xi^2 U(\xi,t) + \xi^4 U(\xi,t) = \hat{h}(t) & \xi \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \\ U_t(\xi,0) = \hat{g}(\xi). \end{cases} \tag{3.2.8}$$

De nuevo fijando ξ estamos ante una EDO lineal no homogénea, la cual resolveremos por el método de variación de parámetros. Buscamos una solución particular de la forma $U_p = k_1(t)U_1 + k_2(t)U_2$, con U_1 y U_2 el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (3.2.3) y con $k_1(t) = -\int \frac{U_2(\xi,t)\hat{h}(t)}{W(U_1,U_2)}dt$ y $k_2(t) = \int \frac{U_1(\xi,t)\hat{h}(t)}{W(U_1,U_2)}dt$. Primero calculamos el Wronskiano del conjunto fundamental de soluciones $\{cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t), sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t)\}$ y sustituimos en las fórmulas de k_1 y k_2

$$W = \begin{vmatrix} cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) & sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) \\ -\sqrt{\xi^2+\xi^4}sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) & \sqrt{\xi^2+\xi^4}cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) \end{vmatrix} = \sqrt{\xi^2+\xi^4} \Rightarrow$$

$$k_1(t) = -\int_0^t \frac{sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}s)\hat{h}(s)}{\sqrt{\xi^2+\xi^4}}ds;\ k_2(t) = \int_0^t \frac{cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}s)\hat{h}(s)}{\sqrt{\xi^2+\xi^4}}ds$$

Una vez obtenidas las funciones arbitrarias ya podemos calcular U_p

$$\begin{aligned} U_p(\xi,t) =& \frac{-1}{\sqrt{\xi^2+\xi^4}}\left(\int_0^t sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}s)\hat{h}(s)ds \cdot cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) - \right. \\ & \left. - \int_0^t cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}s)\hat{h}(s)dt \cdot sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t)\right) \end{aligned} \Rightarrow$$

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U_p(\xi,t)e^{i\xi x}d\xi \tag{3.2.9}$$

Para finalizar, juntando los resultados de (3.2.4) y (3.2.9) la solución del problema no homogéneo asociado a (3.2.1) es $u = u_h + u_p$.

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} & \left(\hat{f}(\xi)cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t)\right. \\ & \left. + \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|\sqrt{1+\xi^2}}sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}t) + U_p(\xi,t)\right)e^{i\xi x}d\xi \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Cabe destacar que la solución particular (3.2.9) se encuentra bien definida en nuestro espacio H^1 por ser la función de dentro de la integral $\overline{\gamma}(\xi,t)$ una función acotada.

$$\begin{aligned} |\overline{\gamma}(\xi,t)| &\overset{D.T}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\xi^4}}\left(\left|\int_0^t sen(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}s)\hat{h}(s)ds\right| + \left|\int_0^t cos(|\xi|\sqrt{1+\xi^2}s)\hat{h}(s)ds\right|\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\xi^4}}\left(\int_0^t \left|\hat{h}(s)\right|ds + \int_0^t \left|\hat{h}(s)\right|ds\right) = \frac{2}{\sqrt{\xi^2+\xi^4}}\int_0^t \left|\hat{h}(s)\right|ds \end{aligned}$$

Con esto concluimos que la función $\overline{\gamma}(\xi,t)$ esta acotada para cualquier t. como la suma de funciones acotadas es una función acotada, tenemos que la función γ de la solución $u = u_h + u_p$ estará formada por la suma de funciones acotadas en t como hemos discutido a lo largo de la subsección. La solución u del IVP no homogéneo (3.2.10) se encuentra bien definida en el espacio de Sobolev, así podemos concluir que el problema (3.2.1) no homogéneo tiene solución para $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ y f,$g,h \in H^1(\mathbb{R})$.

3.3. Teoría de existencia local para el IVP en H^1

En la sección previa hemos comprobado la existencia de solución (3.2.10) para el IVP lineal no homogéneo, en esta sección retomando el IVP (3.1.1), vamos a es-

tudiar el buen planteamiento del problema para la ecuación "buena" de Boussinesq. Nuestro objetivo es probar la existencia de solución, su unicidad y que el comportamiento de la solución cambie continuamente con las condiciones iniciales. Vamos a tomar las funciones correspondientes a las condiciones iniciales (f, g) en el espacio $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

Antes de comenzar con el estudio de la existencia local necesitamos introducir las características de la ecuación no lineal a tratar. Sea $u = u(x, y)$ una variable dependiente en $\mathbb{R}^2$ y $F = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial xy} ... \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \frac{\partial^m u}{\partial y^m})$ una EDP no lineal de orden m en dos variables, podemos clasificar F según:

- F es una EDP **semilineal**, si es una combinación lineal de las derivadas de mayor orden de u, con coeficientes de la combinación en función de las variables independientes, y con componente no lineal dada por una función $R(x, y, u)$.

$$a_1(x,y)\frac{\partial^m u}{\partial x^m} + a_2(x,y)\frac{\partial^m u}{\partial y^m} + a_3(x,y)\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial y} + a_4(x,y)\frac{\partial^m u}{\partial x \partial y^{m-1}} + ...+$$
$$+ a_{n-1}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_n(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y,u); \quad a_1, ..., a_n \in C^m(\mathbb{R}^2), R \in C^m(\mathbb{R}^3)$$

- F es una EDP **cuasi lineal**, si depende linealmente de las derivadas parciales, pero la dependencia con respecto a u no es necesariamente lineal.

$$a_1(x,y,u)\frac{\partial^m u}{\partial x^m} + a_2(x,y,u)\frac{\partial^m u}{\partial y^m} + a_3(x,y,u)\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial y} + a_4(x,y,u)\frac{\partial^m u}{\partial x \partial y^{m-1}} + ...+$$
$$+ a_{n-1}(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + a_n(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y,u); \quad a_1, ..., a_n, R \in C^m(\mathbb{R}^3)$$

- F es una EDP **completamente no lineal**, estas EDPs englobarían al resto de no lineales que no sean ni semilineales ni cuasi lineales. Estas son las más difíciles.

Recordamos que la ecuación "buena" de Boussinesq (3.1.2) es

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + 2\left(u_x^2 + uu_{xx}\right) = 0$$

Esta EDP se trata de una ecuación semilineal, observando que podemos reescribir esta ecuación de segundo orden en t como un sistema equivalente de dos ecuaciones de primer orden en t. El IVP (3.1.1) es equivalente a

$$\begin{cases} u_t = v_x & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v_t = \left(u - u_{xx} - u^2\right)_x \end{cases} \tag{3.3.1}$$

con

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ v(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Podemos observar que el sistema (3.3.1) es equivalente a la ecuación (3.1.2), si derivamos la primera ecuación con respecto a t y la segunda con respecto a x e igualamos v_{xt} obtenemos la ecuación de Boussinesq. Con (3.1.1) podemos ver claramente que se trata de una EDP semilineal.

En esta sección usaremos la siguiente notación,

$$\|u\|_1 = \left(\int_0^T \|u(t)\|_\infty^4 \, dt\right)^{1/4} + \left(\int_0^T \|u_x(t)\|_\infty^4 \, dt\right)^{1/4}$$

y consideraremos el espacio

$$\begin{aligned} &Y_T^a = \{u \in C([0,T] : H^1(\mathbb{R})) \cap L^4([0,T] : L_1^\infty))/ \\ &(-\Delta)^{-1/2}\partial_t u \in C([0,T] : L^2(\mathbb{R})),\ \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_{1,2} \leq a,\ \|u(t)\|_1 \leq a, \\ &\sup_{[0,T]} \left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t u\right\| \leq a\}. \end{aligned}$$

3.3.1. Operador punto fijo

Para probar la existencia local haremos uso del teorema de punto fijo para un operador bilineal correctamente definido. Partiendo del IVP

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = -(u^2)_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{3.3.3}$$

para $(f(x), g(x)) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, si fijamos la parte no lineal de (3.3.3) con $\mathfrak{U} \in Y_T^a$, podemos definir el siguiente problema lineal,

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = -(\mathfrak{U}^2)_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{3.3.4}$$

en la sección 3.2 obtuvimos la solución (3.2.10) para el problema lineal no homogéneo, que se corresponde con la solución del problema (3.3.4) para $h(x,t) = -(\mathfrak{U}^2)_{xx}$, esta nueva solución u se denomina solución *mild*. Ahora definiremos un

operador $\Phi(u)(t)$ en el espacio Y_T^a tal que

$$\Phi(\mathfrak{U})(t) = u.$$

Así, nuestro objetivo será demostrar la existencia de un punto fijo para el operador Φ. Si conseguimos demostrar la existencia de un punto fijo para este operador, habremos concluido la existencia de una solución mild para el IVP (3.3.3). Para empezar probaremos si esta bien definido el operador Φ en el espacio Y_T^a. Antes de probar este resultado consideremos los siguientes lemas

LEMA 3.3.1. *Sea el IVP*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Entonces

$$u(x,t) = V_1(t)f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\widehat{f}(\xi)d\xi \tag{3.3.6}$$

con $\gamma(\xi) = |\xi|\sqrt{1+\xi^2}$, *y además*

$$\|V_1(t)f\|_2 \leq C\|f\|_2 \tag{3.3.7}$$

$$\left(\int_0^T \|V_1(t)f\|_\infty^4\, dt\right)^{1/4} \leq c(1+T^{1/4})\|f\|_2. \tag{3.3.8}$$

Demostración. La prueba de (3.3.7) es inmediata utilizando el teorema de Plancherel

$$\|V_1(t)f(x)\|_2 \overset{A,5,2}{=} \|\widehat{V_1(t)f(x)}\|_2 = \left\|e^{it\gamma(\xi)}\widehat{f}(\xi)\right\|_2 \leq C\left\|\widehat{f}(\xi)\right\|_2 \overset{A,5,2}{=} C\|f\|_2 \tag{3.3.9}$$

Con $C \geq 1 \geq \left|e^{it\gamma(\xi)}\right|$.
Para probar (3.3.8) consideremos $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \equiv 1$ en $[-1,1]$ y $supp\,\chi = \{x \in \mathbb{R} : \chi(x) \neq 0\} \subset [-2,2]$

$$\begin{aligned} V_1(t)f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\widehat{f}(\xi)\chi(\xi)d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\widehat{f}(\xi)(1-\chi(\xi))d\xi \\ &= V_1^1(t)f(x) + V_1^2(t)f(x) \end{aligned}$$

Podemos escribir $V_1^2(t)f(x)$ como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)} \left|\gamma''(\xi)\right|^{1/2} \frac{\widehat{f}(\xi)(1-\chi(\xi))}{\left|\gamma''(\xi)\right|^{1/2}} d\xi.$$

Ahora usando la estimación (A.2.1.1) del teorema A.5.1, la propiedad de que para $|\xi| > \frac{1}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \ll 1$,

$$\gamma''(\xi) = sgn(\xi)\frac{\xi(3+2\xi^2)}{(1+\xi^2)^{3/2}} \Rightarrow 1 \leq |\gamma''(\xi)| \leq 2 \tag{3.3.10}$$

y el teorema de Plancherel (A.5.2) se tiene

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\|V_1^2(t)f(x)\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} \leq c\left\|\frac{\widehat{f}(\xi)(1-\chi(\xi))}{\left|\gamma''(\xi)\right|^{1/2}}\right\|_2 \leq c\left\|\widehat{f}\right\|_2 = c\left\|f\right\|_2. \tag{3.3.11}$$

Y para $V_1^1(t)f(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|V_1^1(t)f(x)\right\|_\infty &= \left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\widehat{f}(\xi)\chi(\xi)d\xi\right\|_\infty \leq c\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\widehat{f}(\xi)\chi(\xi)d\xi\right\|_{1,2} \\
&\overset{def}{=} \left(\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\widehat{f}(\xi)\chi(\xi)d\xi\right\|_2 + \left\|\partial_x\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\widehat{f}(\xi)\chi(\xi)d\xi\right)\right\|_2\right) \\
&\leq c\left\|\widehat{f}\chi\right\|_{1,2} = c\left\|f*\check{\chi}\right\|_{1,2} = c(\left\|f*\check{\chi}\right\|_2 + \left\|\partial_x(f*\check{\chi})\right\|_2) \\
&\overset{A,5,1}{\leq} c\left(\left\|\check{\chi}\right\|_1\left\|f\right\|_2 + \left\|\partial_x\check{\chi}\right\|_1\left\|f\right\|_2\right) \leq c_\chi\left\|f\right\|_2; \\
c_\chi &= max\left\|\check{\chi}\right\|_1 + max\left\|\partial_x\check{\chi}\right\|_1.
\end{aligned}$$

En la primera desigualdad hemos aplicado la desigualdad de Sobolev (A.5.4), la segunda desigualdad viene de aplicar Plancherel y tomar $c \geq \left|e^{it\gamma(\xi)}\right|$ y para terminar el resultado hemos utilizado la propiedad de la transformada de Fourier $\widehat{f*g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ junto con la desigualdad de Young (A.5.1). Ahora, integrando en $[0,T]$

$$\left(\int_0^T \left\|V_1^1(t)f(x)\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} \leq c_\chi T^{1/4}\left\|f\right\|_2. \tag{3.3.12}$$

Combinando los resultados de (3.3.11) y (3.3.12) concluimos el resultado. □

LEMA 3.3.2. *Sea el IVP de (3.3.5) con condiciones iniciales* $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = g_1'(x)$, *entonces*

$$u(x,t) = V_2(t)g_1'(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t\gamma(\xi)+x\xi)} i\frac{sgn(\xi)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}} d\xi \tag{3.3.13}$$

y además

$$\|V_2(t)g_1'(x)\|_2 \leq c\,\|g_1\|_{-1,2} \tag{3.3.14}$$

y

$$\left(\int_0^T \|V_2(t)g_1'\|_\infty^4\,dt\right)^{1/4} \leq c\left(1+T^{1/4}\right)\|g_1\|_{-1,2}\,. \tag{3.3.15}$$

Demostración. la prueba de (3.3.14) es análoga a la de (3.3.9) teniendo en cuenta

$$\left\|\frac{\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}\right\|_2 = \|g_1\|_{-1,2}$$

Para probar (3.3.15) se utiliza un argumento similar al del lema (3.3.1). Sea χ definida como en el lema anterior. Se tiene

$$\begin{aligned} V_2(t)g_1'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t\gamma(\xi)+x\xi)} i\chi(\xi)\frac{sgn(\xi)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t\gamma(\xi)+x\xi)} i(1-\chi(\xi))\frac{sgn(\xi)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi \\ &= V_2^1(t)g_1'(x) + V_2^2(t)g_1'(x) \end{aligned}$$

Se puede ver $V_2^2(t)g_1'(x)$ como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t\gamma(\xi)+x\xi)} i\,|\gamma''(\xi)|^{1/2}\,\frac{sgn(\xi)\widehat{g_1}(\xi)(1-\chi(\xi))}{|\gamma''(\xi)|^{1/2}\,(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi.$$

De nuevo, haciendo uso de (A.2.1.1) del teorema A.5.1 y la desigualdad (3.3.10) se tiene

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left\|V_2^2(t)\partial_x g_1\right\|_\infty^4\right)^{1/4} \leq c\left\|\frac{\widehat{g_1}(\xi)(1-\chi(\xi))}{|\gamma''(\xi)|^{1/2}\,(1+\xi^2)^{1/2}}\right\|_2 \leq c\,\|g_1\|_{-1,2} \tag{3.3.16}$$

Y para $V_2^1(t)g_1'(x)$ argumentando de la misma manera que en el lema (3.3.1) se tiene

$$\begin{aligned} \left\|V_2^1(t)\partial_x g_1(x)\right\|_\infty &= \left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t\gamma(\xi)+x\xi)} i\chi(\xi)\frac{sgn(\xi)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi\right\|_\infty \\ &\overset{A,5,4}{\leq} c\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t\gamma(\xi)+x\xi)} i\frac{\chi(\xi)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi\right\|_{1,2} \\ &\leq c\left(\left\|\left(\frac{\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}\right)^\vee * \overset{\vee}{\chi}\right\|_2 + \left\|\left(\frac{\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}\right)^\vee * \partial_x\overset{\vee}{\chi}\right\|_2\right) \\ &\overset{A,5,1}{\leq} c_\chi\left\|\left(\frac{\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}\right)^\vee\right\|_2 \overset{A,5,2}{=} c_\chi\,\|g_1\|_{-1,2} \end{aligned}$$

integrando en $[0,T]$

$$\left(\int_0^T \left\|V_2^1(t)g_1'(x)\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} \leq c_\chi T^{1/4} \left\|g_1\right\|_{-1,2}. \tag{3.3.17}$$

Finalmente se obtiene el resultado buscado combinando (3.3.17) y (3.3.16). □

LEMA 3.3.3. *Sea el IVP de (3.3.5) con condiciones iniciales* $u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=g_2''(x)$, *entonces*

$$u(x,t)=V_2(t)g_2''(x)\equiv\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t\gamma(\xi)+x\xi)}\frac{sgn(\xi)\xi\widehat{g_2}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi \tag{3.3.18}$$

y además

$$\left\|V_2(t)g_2''(x)\right\|_2 \leq C\left\|g_2\right\|_2 \tag{3.3.19}$$

y

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|V_2(t)g_2''\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} \leq c\left\|g_2\right\|_2. \tag{3.3.20}$$

Demostración. la prueba de (3.3.19) es análoga a la de (3.3.9) del lema (3.3.1) teniendo en cuenta que $\left|\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right|\leq 1$.
En cuanto a la prueba de (3.3.20) se tiene $V_2(t)g_2''(x)$ como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-t\gamma(\xi)+x\xi)}\left|\gamma''(\xi)\right|^{1/2}\frac{sgn(\xi)\xi\widehat{g_2}(\xi)}{\left|\gamma''(\xi)\right|^{1/2}(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi$$

de nuevo aplicando la estimación del teorema A.5.1, la desigualdad (3.3.10) junto con el teorema de Plancherel (A.5.2) se concluye

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|V_2(t)g_2''\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} \leq c\left\|\frac{sgn(\xi)\xi\widehat{g_2}(\xi)}{\left|\gamma''(\xi)\right|^{1/2}(1+\xi^2)^{1/2}}\right\|_2 \leq c\left\|g_2\right\|_2.$$

□

Ahora ya estamos en condiciones para probar si esta bien definido el operador Φ.

PROPOSICIÓN 3.3.1. *Para* $f\in H^1(\mathbb{R})$ *y* $g=g_1'\in L^2(\mathbb{R})$ *definimos* $\Phi(u)(t)$

como

$$\Phi_{(f,g)}(\mathfrak{U})(t) = \Phi(\mathfrak{U})(t) = \Bigg(\hat{f}(\xi)cos(\gamma(\xi)t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{\gamma(\xi)}sen(\gamma(\xi)t) -$$
$$-\frac{1}{\gamma(\xi)}\left(\int sen(\gamma(\xi)t)\widehat{(\mathfrak{U}^2)}_{xx}dt \cdot cos(\gamma(\xi)t) - \int cos(\gamma(\xi)t)\widehat{(\mathfrak{U}^2)}_{xx}dt \cdot sen(\gamma(\xi)t)\right)\Bigg)^{\vee},$$
$$\gamma(\xi) = |\xi|\sqrt{1+\xi^2} \in C^{\infty}(\mathbb{R} - \{0\})$$

o lo que es lo mismo con las notaciones de los lemas previos

$$\Phi(\mathfrak{U})(t) = V_1(t)f(x) + V_2(t)g_1'(x) - \int_0^t V_2(t-\tau)(\mathfrak{U}^2)_{xx}(\tau)d\tau$$

Entonces $\Phi(u)(t) : Y_T^a \to Y_T^a$ *para algún* T *y* a *dependiendo de* δ*, donde* $\delta = max(\delta_1, \delta_2)$*, y* $\|f\|_{1,2} \leq \delta_1, \|g_1\|_2 \leq \delta_2$*.*

Demostración. Usaremos para la prueba los resultados (3.3.8), (3.3.15), (3.3.20) de los lemas anteriores en combinación con la desigualdad de Hölder A.5.7 y la desigualdad de Sobolev (A.5.4).

$$\|\Phi(u)(t)\|_{L_T^4 L_x^\infty} = \left(\int_0^T \|\Phi(u)(t)\|_\infty^4 \, dt\right)^{1/4} \leq c(1+T^{1/4})\left(\|f\|_2 + \|g_1\|_{-1,2}\right) +$$
$$+ c\int_0^T \|u\|_\infty \|u\|_2 \, d\tau \leq c(1+T^{1/4})\left(\|f\|_{1,2} + \|g_1\|_2\right) + cT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}^2 . \tag{3.3.21}$$

El término $c\int_0^T \|u\|_\infty \|u\|_2 \, d\tau$ que se obtiene al aplicar (3.3.20) vine de

$$\left(\int_0^T \left\|\int_0^T V_2(t-\tau)(|u|u)_{xx}(\tau)d\tau\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} \leq \left(\int_0^T \left(\int_0^T \|V_2(t-\tau)(|u|u)_{xx}(\tau)\|_\infty \, d\tau\right)^4 dt\right)^{1/4}$$
$$\overset{A,5,8}{\leq} \int_0^T \left(\int_0^T \|V_2(t-\tau)(|u|u)_{xx}(\tau)\|_\infty^4 \, dt\right)^{1/4} d\tau \overset{A,5,1}{\leq} c\int_0^T \|(|u|u)(\tau)\|_2 \, d\tau$$
$$\overset{A,5,7}{\leq} c\int_0^T \|u\|_\infty \|u\|_2 \, d\tau$$

A continuación, usando el mismo argumento que en (3.3.21) podemos dar la misma cota para la siguiente expresión

$$\|\partial_x\Phi(u)(t)\|_{L_T^4 L_x^\infty} \leq c(1+T^{1/4})\left(\|f\|_{1,2} + \|g_1\|_2\right) + cT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}^2 . \tag{3.3.22}$$

Ahora combinando (3.3.21) y (3.3.22)

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)(t)\|_1 &\leq 2c(1+T^{1/4})\left(\|f\|_{1,2}+\|g_1\|_2\right)+2cT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}^2 \leq \\ &\leq c(1+T^{1/4})\,(2\delta)+2cTa^2\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

escogemos $a = 8c\delta$ y T tal que $(T^{1/4} + T2^5c^2\delta) \leq 1$, con esto se obtiene la primera propiedad del espacio Y_T^a

$$\|\Phi(u)\|_1 \leq 8c\delta.$$

Siguiendo con la prueba, haciendo uso de (3.3.7), (3.3.14), (3.3.19) junto con la desigualdad de Sobolev (A.5.4) y la de Hölder (A.5.7) (para el tercer término de $\Phi(u)(t)$) se tiene

$$\begin{aligned}\sup_{[0,T]}\|\Phi(u)(t)\|_2 &\leq c\left(\|f\|_2+\|g_1\|_{-1,2}\right)+c\int_0^T\|u\|_\infty\|u\|_2\,d\tau \\ &\leq c\left(\|f\|_{1,2}+\|g_1\|_2\right)+cT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}^2.\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

De la misma forma se obtiene

$$\sup_{[0,T]}\|\partial_x\Phi(u)(t)\|_2 \leq c\left(\|f\|_{1,2}+\|g_1\|_2\right)+cT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}^2. \tag{3.3.25}$$

Uniendo los resultados (3.3.24) y (3.3.25) se sigue

$$\begin{aligned}\sup_{[0,T]}\|\Phi(u)(t)\|_{1,2} &\leq \sup_{[0,T]}\|\Phi(u)(t)\|_2+\sup_{[0,T]}\|\partial_x\Phi(u)(t)\|_2 \\ &\leq 2c\left(\|f\|_{1,2}+\|h\|_2\right)+2cT\sup_{[0,T]}\|u(t))\|_{1,2}^2 \\ &\leq 2c(2\delta)+2cTa^2\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

escogemos $a = 8c\delta$ y T tal que

$$(2^5c^2\delta T) \leq 1 \tag{3.3.27}$$

entonces se tiene que

$$\sup_{[0,T]}\|\Phi(u)(t)\|_{1,2} \leq 8c\delta$$

con esto hemos obtenido la segunda propiedad del espacio Y_T^a.
Para terminar probaremos la última propiedad del espacio Y_T^a. Para ello usaremos la

proposición (A.5.1) junto con la desigualdad de Sobolev (A.5.4) y el teorema (A.5.5)

$$\begin{aligned} \sup_{[0,T]} \left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t\Phi(u)(t)\right\|_2 \leq c\left(\|f\|_{1,2}+\|g_1\|_2\right)+c\int_0^T \left\|u^2\right\|_{1,2} d\tau \leq \\ c\left(\|f\|_{1,2}+\|g_1\|_2\right)+cT\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}^2 . \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Tomando a y T como en (3.3.27) se concluye

$$\sup_{[0,T]} \left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t\Phi(u)(t)\right\|_2 \leq 4c\delta$$

Así hemos probado que $\Phi(u)(t) \in Y_T^a$ y, por tanto, el operador esta bien definido. □

3.3.2. Existencia y unicidad de Solución

En esta subsección vamos a probar la existencia y unicidad de solución en el espacio Y_t^a, para ello utilizaremos el teorema de Punto fijo de Banach (A.5.9) sobre el operador Φ. Con esto habremos concluido la existencia y unicidad de solución para (3.2.10). Además, en el siguiente teorema también probaremos que la solución depende de manera continua de las condiciones iniciales al aplicar una aplicación Lipschitz.

Teorema 3.3.1. *Para todo $f \in H^1(\mathbb{R})$ y $g = g_1' \in L^2(\mathbb{R})$ existe $T = T(\delta) > 0$ y una única solución u para la integral de (3.2.10) en $[0,T]$ con*

$$u \in C([0,T] : H^1) \cap L^4([0,T] : L^\infty)$$

y

$$(-\Delta)^{-1/2}\,\partial_t u \in C([0:T] : L^2).$$

además, para cualquier $T_0 < T$ existe un entorno W de $(f, \partial_x g_1) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, donde la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : W &\rightarrow Y \\ (f, g_1) &\rightarrow u \end{aligned}$$

es Lipschitz, con Y el espacio $Y = \{C([0,T] : H^1) \cap L^4([0,T_0] : L_1^\infty) / \,(-\Delta)^{-1/2}\,\partial_t u \in C([0:T_0] : L^2)\}$.

Demostración. La proposición (3.3.1) afirma que el operador Φ cumple $\Phi(u)(t) : Y_T^a \rightarrow Y_T^a$, lo único que nos falta de probar para verificar que tenga al menos un punto fijo es que Φ sea una aplicación contractiva.

Sean $u, v \in Y_T^a$ con f y $g = g_1'$ por la definición de Φ se tiene

$$(\Phi(u) - \Phi(v))(t) = -\int_0^t V_2(t-\tau)\left(u^2 - v^2\right)_{xx} d\tau.$$

Entonces, usando la estimación (3.3.20), la desigualdad de Hölder (A.5.7) y la desigualdad de Sobolev (A.5.4) en un argumento similar al de (3.3.21) se tiene

$$\begin{aligned}
&\|(\Phi(u) - \Phi(v))(t)\|_{L_T^4 L_x^\infty} = \left(\int_0^T \|(\Phi(u) - \Phi(v))(t)\|_\infty^4 \, dt\right)^{1/4} \\
&= \left(\int_0^T \left\|\int_0^T V_2(t-\tau)\left(u^2 - v^2\right)_{xx} d\tau\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} \\
&\leq \int_0^T \left(\int_0^T \left\|V_2(t-\tau)\left(u^2 - v^2\right)_{xx}\right\|_\infty^4 dt\right)^{1/4} d\tau \overset{3,3,20}{\leq} c\int_0^T \left\|u^2 - v^2\right\|_2 d\tau \\
&= c\int_0^T \|(u+v)(u-v)\|_2 \, d\tau \overset{A,5,7}{\leq} c\int_0^T (||u||_\infty + ||v||_\infty)\, \|(u-v)(\tau)\|_2 \, d\tau \\
&\overset{A,5,4}{\leq} c\int_0^T (||u||_{1,2} + ||v||_{1,2})\, \|(u-v)(\tau)\|_{1,2} \, d\tau \\
&\leq CT \sup_{[0,T]} \|(u-v)(\tau)\|_{1,2} \left(\sup_{[0,T]} ||u||_{1,2} + \sup_{[0,T]} ||v||_{1,2}\right).
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

A continuación, para estimar $||\partial_x \Phi(u) - \partial_x \Phi(v)||_{L_T^4 L_x^\infty}$ se utilizará la siguiente desigualdad

$$|u \cdot u_x - v \cdot v_x| \leq c\left\{|u - v|\,|u_x| + |v|\,|u_x - v_x|\right\}. \tag{3.3.30}$$

A esta desigualdad se llega

$$\begin{aligned}
|u \cdot u_x - v \cdot v_x| &= |u \cdot u_x + u_x \cdot v - u_x \cdot v - v \cdot v_x| = \\
&= |v \cdot (u_x - v_x) + u_x (u - v)| \leq |v| \cdot |u_x - v_x| + |u_x|\,|u - v|
\end{aligned}$$

Entonces combinando la estimación (3.3.20), la desigualdad (3.3.30), la de So-

bolev y la de Hölder (A.5.7) se llega a

$$
\begin{aligned}
&\|(\partial_x\Phi(u)-\partial_x\Phi(v))(t)\|_{L^4_T L^\infty_x} \overset{3,3,20}{\leq} c\int_0^T \left\|\left|\left(u^2-v^2\right)_x\right|\right\|_2 d\tau \\
&= c\int_0^T \|2uu_x-2vv_x\|_2\, d\tau \leq c\int_0^T \|uu_x-vv_x\|_2\, d\tau \\
&\leq c\int_0^T \||u-v|\,|u_x|+|v|\,|u_x-v_x|\|_2\, d\tau \\
&\overset{A,5,7}{\leq} c\int_0^T \|u-v\|_\infty \|u_x\|_2 d\tau + c\int_0^T \|v\|_\infty \|u_x-v_x\|_2\, d\tau \\
&\overset{A,5,4}{\leq} cT(\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}+\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{1,2})\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}\,.
\end{aligned}
\tag{3.3.31}
$$

Combinando (3.3.29) y (3.3.31) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_1 &\leq 2cT(\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}+\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{1,2})\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2} \\
&\leq 2(2a)cT\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}\,.
\end{aligned}
\tag{3.3.32}
$$

Volviendo a hacer uso de los argumentos de (3.3.21) y (3.3.25) llegamos a

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]}\|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\|_2 \leq \\
&\leq cT\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}\,(\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}+\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{1,2})
\end{aligned}
\tag{3.3.33}
$$

Ahora, utilizado (3.3.19), la desigualdad (3.3.30), la desigualdad de Sobolev y la de Hölder de una forma similar a (3.3.29)

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]}\|(\partial_x\Phi(u)-\partial_x\Phi(v))(t)\|_2 \leq \\
&\leq cT\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}\,(\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}+\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{1,2}).
\end{aligned}
\tag{3.3.34}
$$

Combinando los dos resultados anteriores (3.3.33) y (3.3.34)

$$
\begin{aligned}
\sup_{[0,T]}\|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\|_{1,2} &\overset{def}{=} \sup_{[0,T]}\|(\Phi(u)-\Phi(v))(t)\|_2+\sup_{[0,T]}\|(\partial_x\Phi(u)-\partial_x\Phi(v))(t)\|_2 \\
&\leq 2cT\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}\,(\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{1,2}+\sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{1,2}) \\
&\leq (4a)cT\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}\,.
\end{aligned}
\tag{3.3.35}
$$

Para terminar, usando los argumentos usados en (3.3.28) y (3.3.31) se tiene

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]} \left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t\Phi(u)(t) - (-\Delta)^{-1/2}\partial_t\Phi(v)(t)\right\|_2 \leq \\
&\leq \int_0^T \left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_2(t-\tau)\big(u^2-v^2\big)_{xx}\right\|_2 d\tau \overset{A,5,1}{\leq} c\int_0^T \left\|u^2-v^2\right\|_{1,2} d\tau \\
&\overset{def}{=} c\int_0^T \left\|u^2-v^2\right\|_2 d\tau + c\int_0^T \left\|\left(u^2-v^2\right)_x\right\|_2 d\tau \\
&\overset{3,3,30}{\leq} c\left(\int_0^T \|(u+v)(u-v)\|_2\, d\tau + \int_0^T \||u-v||u_x| + |v||u_x-v_x|\|_2\, d\tau\right) \\
&\overset{A,5,7}{\leq} c\left(\int_0^T \|u+v\|_\infty \|u-v\|_2\, d\tau + \int_0^T \|u-v\|_\infty \|u\|_{1,2}\, d\tau + \int_0^T \|u-v\|_{1,2}\|v\|_\infty\, d\tau\right) \\
&\overset{A,5,4}{\leq} cT\sup_{[0,T]}\|u-v\|_{1,2}\left(2\sup_{[0,T]}\|u\|_{1,2} + 2\sup_{[0,T]}\|v\|_{1,2}\right) \leq cT(4a)\sup_{[0,T]}\|u-v\|_{1,2}\,.
\end{aligned}
\tag{3.3.36}
$$

Juntando los resultados (3.3.32), (3.3.35), (3.3.36) y escogiendo T y a como en (3.3.27) se tiene que $4acT < 1$. Así tenemos que Φ es una aplicación contractiva y tiene un único punto fijo por el teorema de punto fijo de Banach (A.5.9), esto nos asegura la existencia y unicidad de solución para (3.2.10) en Y_T^a. Sin embargo, la unicidad se puede extender a

$$Y = \{C([0,T]:H^1)\cap L^4([0,T_0]:L_1^\infty)/\,(-\Delta)^{-1/2}\,\partial_t u \in C([0:T_0]:L^2)\}.$$

Si suponemos una solución $w \in Y$ satisfaciendo los datos iniciales del teorema, entonces para $T' < T$ suficientemente pequeño $w \in Y_{T'}^a$ y $u = w$ en $\mathbb{R}\times[0,T']$.
Para demostrar la segunda parte del teorema, que para cualquier $T_0 < T$ la aplicación

$$
\begin{aligned}
\varphi : W &\to Y \\
(f, g_1) &\to u
\end{aligned}
$$

es Lipschitz, tomemos u y v soluciones de (3.2.10) con condiciones iniciales $\left\{(f_0, g'_{1,0}), (f_1, g'_{1,1})\right\}$ en W, entonces

$$u(t) - v(t) = V_1(t)(f_0 - f_1) + V_2(t)(g'_{1,0} - g'_{1,1}) - \int_0^{T_0} V_2(t-\tau)(u^2-v^2)_{xx}(\tau)d\tau.$$

Con un argumento similar a (3.3.35) y (3.3.26) se tiene

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]} \|(u-v)(t)\|_{1,2} \leq \\
&\leq c\left(\|f_0-f_1\|_{1,2}+\|g_{1,0}-g_{1,1}\|_2\right)+2cT_0\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}\left(\sup_{[0,T]}\|u\|_{1,2}+\sup_{[0,T]}\|v\|_{1,2}\right)\\
&\leq c\left(\|f_0-f_1\|_{1,2}+\|g_{1,0}-g_{1,1}\|_2\right)+4acT_0\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2},
\end{aligned}
\tag{3.3.37}
$$

de forma análoga a (3.3.32) y (3.3.23) se llega a

$$
\|u-v\|_1 \leq c\left(1+T_0^{1/4}\right)\left(\|f_0-f_1\|_{1,2}+\|g_{1,0}-g_{1,1}\|\right)+4cT_0a\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}
\tag{3.3.38}
$$

y usando argumentos similares a (3.3.36) y (3.3.28)

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]}\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t u(t)-(-\Delta)^{-1/2}\partial_t v(t)\right\|_2 \leq \\
&\leq c\left(\|f_0-f_1\|_{1,2}+\|g_{1,0}-g_{1,1}\|_2\right)+4acT_0\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}
\end{aligned}
\tag{3.3.39}
$$

Finalmente por (3.3.27) se tiene que $4cTa \leq 1$, entonces tomando $A = \|f_0-f_1\|_{1,2}+\|g_{1,0}-g_{1,1}\|_2$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\sup\left\{\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}, \|u-v\|_1, \sup_{[0,T]}\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t u(t)-(-\Delta)^{-1/2}\partial_t v(t)\right\|_2\right\}\\
&\leq \|u-v\|_1 \leq c\left(1+T_0^{1/4}\right)A+4cT_0a\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}
\end{aligned}
$$

Ahora, se puede simplificar esta expresión realizando

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2} \leq c\left(1+T_0^{1/4}\right)A+4cT_0a\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2} \Rightarrow\\
&(1-4cT_0a)\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2} \leq c\left(1+T_0^{1/4}\right)A
\end{aligned}
$$

como $1 > 1-4cT_0$ y para T_0 suficientemente pequeño se tiene $2 > 1/(1-4cT_0)$ entonces

$$
\begin{aligned}
&\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2} \leq c\frac{\left(1+T_0^{1/4}\right)}{(1-4cT_0a)}A \Rightarrow\\
&\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2} \leq 2c\left(1+T_0^{1/4}\right)A
\end{aligned}
$$

Con esto se concluye

$$sup\left\{\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_{1,2}, \|u-v\|_1, \sup_{[0,T]}\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t u(t)-(-\Delta)^{-1/2}\partial_t v(t)\right\|_2\right\}$$
$$\leq c_{T_0}\left(\|f_0-f_1\|_{1,2}+\|g_{1,0}-g_{1,1}\|_2\right)$$

Luego para $\|f_0-f_1\|_{1,2}$ y $\|g_{1,0}-g_{1,1}\|_2$ suficientemente pequeño se tiene el resultado deseado.

□

3.4. Resolución analítica mediante solitones

En esta subsección buscaremos una solución explícita para la ecuación mala de Boussinesq usando el método de la tangente hiperbólica. La forma de Boussinesq que estudiaremos será la ecuación de Boussinesq mala

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{xxxx}+\left(u^2\right)_{xx} \tag{3.4.1}$$

3.4.1. Método de la tangente hiperbólica

El método de la tangente hiperbólica nos permite encontrar soluciones de EDPs no lineales, en nuestro caso soluciones del tipo solitón.
Sea P un polinomio de variables u y sus sucesivas derivadas que representará la EDP a tratar,

$$P(u,u_t,u_x,u_{xx},...)=0. \tag{3.4.2}$$

Para poder resolver esta ecuación se introduce el cambio de variable $\xi=kx-\omega t$ para pasar a términos de la onda solitaria, donde k denotaría el número de onda [A,4] y ω la frecuencia angular. Con este cambio se tiene $u(x,t)=U(\xi)$ y además

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi},\quad \frac{\partial}{\partial x}=k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi},\quad \frac{\partial}{\partial x^2}=k^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi},...$$

Ahora trabajamos con una EDO en lugar de una EDP. Sea R el polinomio resultante al aplicar el cambio de variable a (3.4.2)

$$R(U,U',U'',U''',...)=0$$

El objetivo principal es derivar soluciones exactas o aproximadas, si es posible, para esas EDO. El primer paso para poder aplicar el método de la tangente hiperbólica es asumir una solución del tipo solitón, dicha solución puede ser expresada en términos de la tangente hiperbólica. Para alcanzar nuestro objetivo se introduce una nueva variable $Y(x,t) = tanh(\xi)$. A continuación realizamos el cambio y aplicamos la regla de la cadena a cada una de las derivadas:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y} = \left(1 - Y^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\left(1 - Y^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(1 - Y^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y} + \left(1 - Y^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y} = \\ & \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y}(1 - Y^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y} + (1 - Y^2)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}Y^2} = -2Y(1 - Y^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y} + (1 - Y^2)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}Y^2}\end{aligned}$$

del mismo modo

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\xi^3} = 2(1 - Y^2)(3Y^2 - 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y} - 6Y(1 - Y^2)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}Y^2} + (1 - Y^2)^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}Y^3}.$$

Ahora, la solución que andamos buscando podemos escribirla como una serie de potencias finita en Y, limitándonos al caso del solitón. Dependiendo de si las condiciones frontera se encuentran presentes o no variará la definición de la serie, en nuestro caso no consideramos ninguna condición, luego podemos proponer la solución

$$u(x,t) = U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i Y^i, \tag{3.4.3}$$

Después de sustituir (3.4.3) en la ecuación a estudiar, para poder determinar N (el orden más alto en Y), se igualan los términos de mayor orden lineales con los de mayor orden no lineales. Una vez determinado N, se obtiene k, ω y a_i para $i = 0, 1, ..., N$ resolviendo el sistema asociado a la EDO una vez hemos realizado el cambio $Y(x,t) = tanh(\xi)$.

3.4.2. Solución explícita

Aplicando el método descrito anteriormente para la ecuación "mala"de Boussinesq

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{xxxx} + \left(u^2\right)_{xx}$$

se tienen los cambios $u(x,t) = U(\xi)$ con $\xi = kx - \omega t$. Realizando estos cambios se llega a

$$\begin{aligned}(\omega^2 - k^2)U''(\xi) - k^4 U''''(\xi) - 2k^2((U'(\xi)^2 + UU''(\xi)) = \\ = (\omega^2 - k^2)U''(\xi) - k^4 U''''(\xi) - 2k^2(UU'(\xi))' = 0,\end{aligned}$$

Ahora integrando dos veces en ξ y tomando constante de integración cero,

$$(\omega^2 - k^2)U(\xi) - k^4 U''(\xi) - k^2 U^2(\xi) = 0. \tag{3.4.4}$$

Siguiendo los pasos del método de la tangente hiperbólica, se asume que la solución de (3.4.4) es del tipo solitón

$$u(x,t) = U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} a_i Y^i, \quad Y(x,t) = tanh(\xi).$$

De acuerdo al cambio se tenía que $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} = -2Y(1-Y^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Y} + (1-Y^2)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}Y^2}$, luego (3.4.4) se vuelve

$$(\omega^2 - k^2)U(Y) - k^4\left(-2Y(1-Y^2)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}Y} + (1-Y^2)^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}Y^2}\right) - k^2U^2(Y) = 0. \tag{3.4.5}$$

A continuación para poder calcular N (el orden más alto en Y) se tienen que igualar los términos de mayor orden de la parte lineal y la no lineal. Los términos de mayor orden en (3.4.5) son $U''(Y)$ y $U^2(Y)$. Con esto se deduce que $4 + (N-2) = 2N \Rightarrow N = 2$, entonces

$$U(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \quad con \quad a_2 \neq 0 \tag{3.4.6}$$

Ahora sustituyendo (3.4.6) en (3.4.5)

$$\begin{aligned}(\omega^2 - k^2)(a_0 + a_1Y + a_2Y^2) - k^4\left(-2Y(1-Y^2)(a_1 + 2a_2Y) + (1-Y^2)^2(2a_2)\right) \\ - k^2(a_0 + a_1Y + a_2Y^2)^2 = 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega^2 - k^2)(a_0 + a_1Y + a_2Y^2) - k^4\left(2a_2 - 2a_1Y - 8a_2Y^2 + 2a_1Y^3 + 6a_2Y^4\right) - \\ - k^2(a_0^2 + 2a_0a_1Y + (2a_0a_2 + a_1^2)Y^2 + 2a_1a_2Y^3 + a_2^2Y^4) = 0\end{aligned}$$

e igualando los términos a ambos lados de la igualdad

$$\begin{cases} (\omega^2 - k^2)a_0 - 2k^4 a_2 - k^2 a_0^2 = 0 \\ (\omega^2 - k^2)a_1 + 2k^4 a_1 - 2k^2 a_0 a_1 = 0 \\ (\omega^2 - k^2)a_2 + 8k^4 a_2 - k^2(2a_0 a_2 + a_1^2) = 0 \\ -2k^4 a_1 - 2k^2 a_1 a_2 = 0 \\ -6k^4 a_2 - k^2 a_2^2 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema teniendo en cuenta que $a_2 \neq 0$ se obtienen dos posibles soluciones dependiendo del valor de a_0

$$a2 = -6k^2,\ a_1 = 0,\ a_0 = 6k^2,\ \omega = \pm\sqrt{k^2 + 4k^4} \tag{3.4.7}$$

$$a2 = -6k^2,\ a_1 = 0,\ a_0 = 2k^2,\ \omega = \pm\sqrt{k^2 - 4k^4} \tag{3.4.8}$$

Para el caso (3.4.7) deshaciendo el cambio se tienen dos posibles soluciones en $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& 6k^2 - 6k^2 Y^2 = 6k^2 - 6k^2 tanh^2\left(k(x \mp \sqrt{1+4k^2}t)\right) = \\ =& 6k^2 sech^2\left(k(x \mp \sqrt{1+4k^2}t)\right) \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

y para el caso (3.4.8)

$$u(x,t) = 2k^2 - 6k^2 Y^2 = 2k^2 - 6k^2 tanh^2\left(k(x \mp \sqrt{1-4k^2}t)\right) \tag{3.4.10}$$

En la figura (3.4.2) se representan las dos soluciones para $x \in [-20, 20]$ y $t \in [0, 10]$, tomando $k = \frac{1}{4}$ de tal manera que $\sqrt{1-4k^2} > 0$.

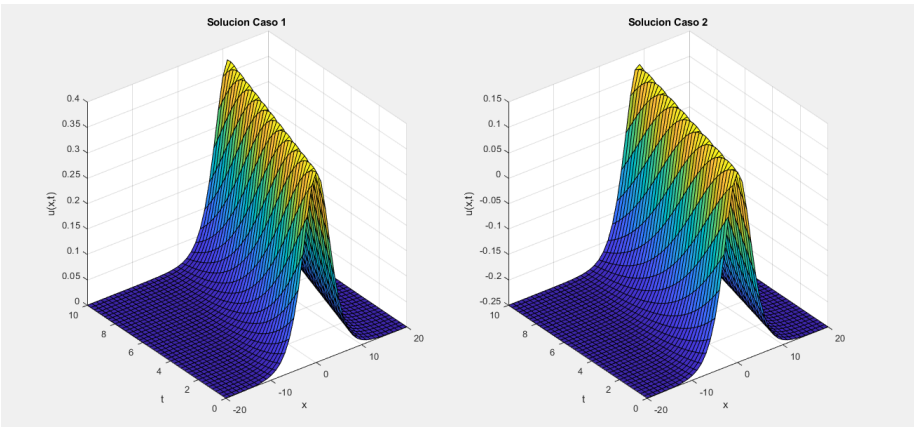

Figura 3.1: Soluciones de la ecuación de Boussinesq (solitón)

Capítulo 4

Simulaciones

El IVP de la ecuación "buena" de Boussinesq que se ha estudiado en los capítulos anteriores

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{4.0.1}$$

como se vio en la sección (3.3) este IVP se podía transformar en el sistema equivalente (3.3.1). Si se pasa el IVP (4.0.1) al espacio de Fourier y se emplea el mismo cambio de variable que en (3.3.1) para el espacio Fourier se tiene

$$\begin{cases} U_t(\xi,t) = V(\xi,t) \\ V_t(\xi,t) = \left(-|\xi|^2 - |\xi|^4\right) U(\xi,t) - |\xi|^2 \hat{u^2} \end{cases} \tag{4.0.2}$$

Con esto se tiene un sistema de dos EDOs que se puede resolver aplicando el método de Runge-Kutta. Se aplicará la variante de Runge-Kutta pares encajados con orden (4,5) mediante la función **Ode45** que proporciona MATLAB y se representarán gráficamente varias soluciones para distintas condiciones iniciales.

4.1. Métodos Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta se tratan de una serie de métodos numéricos iterativos explícitos e implícitos para encontrar aproximaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales o no lineales. Sea la EDO

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y condición inicial $y(t_0) = y_0,\ (t_0, y_0) \in \Omega$. El método de Runge-Kutta de s etapas y orden p tiene la siguiente expresión:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

donde $h = \Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ es el paso de cada iteración y k_i son los términos intermedios que aproximan la función, evaluados localmente en f

$$k_i = f\left(t_n + hc_i, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right), \quad i = 1, ..., s.$$

El error viene dado por

$$max|y(t_i) - y_i| \leq Cht^p.$$

Para poder plantear un método Runge-Kutta, se tienen que dar los números b_i, a_{ij} y c_i ($s^2 + 2s$ números) que dependerán de la regla de cuadratura escogida. Algunos ejemplos de métodos de R-K son el método de Euler de orden 1, el de punto medio de orden 2 o el método Runge-Kutta estándar de orden 4. Cada uno de estos métodos tienen sus respectivos términos b_i, a_{ij} y c_i que se recogen en los tableros de Butcher

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & B \end{array} \quad \text{con } A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq s} \in M_{s \times s}(\mathbb{R}), C = (c_i)_{1 \leq i \leq s} \in \mathbb{R}^s \text{ y } B = (b_i)_{1 \leq i,j \leq s} \in \mathbb{R}^s.$$

Los métodos de R-K explícitos son aquellos en los que los términos k_i en vez de aparecer en función de ellos mismos aparecen despejados. El método R-K más eficiente será aquel en que se puedan reducir el número de etapas en que se evalúa f manteniendo el orden.

El método que se va a utilizar para la resolución de la ecuación de Boussinesq en MATLAB será la variante de R-K conocida como **método de Runge-Kutta-Fehlberg** o pares encajados con la función **ode45** que aplica este método con órdenes (4,5). R-K-F se trata de un método que emplea otros dos métodos R-K de orden p y $p + 1$,

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i,$$

$$\bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + h \sum_{i=1}^{s+1} b'_i k_i.$$

Ambos métodos comparten los términos k_i, además, los términos del tablero de Butcher en R-K-F vienen dados por los términos de los métodos $M1$ y $M2$ elegidos

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & B \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} C' & A \\ \hline & B' \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} C' & A \\ \hline & B \\ \hline \multicolumn{2}{c}{B'} \end{array}$$

R-K-F utiliza el método de mayor orden para estimar el error y el de menor para tomar el paso y avanzar. El error local de truncamiento con el método de orden $p+1$ viene dado por

$$T_{n+1} = h \sum_{i=1}^{s} (b_i - b_i')\, k_i$$

y el paso con el de orden p se toma de acuerdo a

$$h_{New} \leq h \left(\frac{\varepsilon}{|T_{n+1}|} \right)^{1/(p+1)} \quad con \quad |T_{n+1}| < \varepsilon.$$

4.2. Métodos espectrales

Existen distintos métodos numéricos para encontrar una solución aproximada a una ecuación diferencial, entre ellos destacan los métodos de diferencias finitas, métodos de elementos finitos y los espectrales, siendo estos últimos los más adecuados. Mientras que los métodos de diferencias finitas dan soluciones locales aproximadas y los métodos de elementos finitos dan aproximaciones polinomiales continuas o continuas a trozos en regiones poligonales, los métodos espectrales dan soluciones aproximadas como polinomios en todo el dominio.
Los métodos espectrales se utilizan para resolver problemas del tipo

$$\begin{cases} u_t(x,t) = Lu(x,t), & x \in X, t > 0 \\ Fu(x,t) = 0, & x \in \partial X, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in X \end{cases}$$

donde X es el dominio espacial, ∂X su frontera y F es el operador que representa las condiciones frontera. En nuestro caso el sistema a resolver en MATLAB es

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 & x \in [-L, L], t \in [0, 4] \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

con condiciones frontera $Fu(x,t)$ 2L-periódicas,

$$\begin{cases} u(-L,t) = u(L,t) \\ u_x(-L,t) = u_x(L,t) \end{cases}$$

Los métodos espectrales tratan de aproximar la solución exacta por una suma finita de la forma

$$u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\Phi_k(x)$$

donde $\Phi_k(x)$ es una función ortogonal conocida denominada función base. Esta función se escoge de acuerdo a las condiciones frontera

- **Series de Fourier** $\Phi_k(x) = e^{ikx}$: Para condiciones de frontera periódicas. Para nuestro problema son las que utilizaremos para su resolución en MATLAB, ya que nuestro problema tiene condiciones de contorno 2L-periódicas. La función de MATLAB **FFT()** será la que permita aplicar la transformada de Fourier y pasar así al espacio Fourier.

- **Polinomios de Chebyshev o de Legendre**: Para condiciones de frontera no periódicas.

- **Polinomios racionales de Chebyshev o de Legendre**: Para condiciones de frontera en intervalos semi-infinitos.

- **Polinomios de Chebyshev o de Hermite**: Para condiciones de frontera en intervalos infinitos.

Para poder obtener la aproximación a la solución definida en todo el dominio espacial se necesitan los coeficientes a_k, estos coeficientes pueden ser calculados utilizando tres técnicas

- **Método Tau**: Requiere que $u_n(x)$ satisfaga las condiciones frontera y que el residuo $R(x,t) = (u_n(x,t))_t - Lu_n(x,t)$ sea ortogonal a la mayoría de funciones base.

- **Método Galerkin**: Las funciones base se eligen de tal forma que la solución propuesta satisfaga las condiciones de frontera y el residuo sea ortogonal a tantas funciones nuevas base como sea posible.

- **Método de colocación o pseudoespectral**: En este método se asume que la solución aproximada u_n satisface la ecuación diferencial en un conjunto finito

de puntos $x_0, x_1, ..., x_N$. Además, el residuo tiene que anularse en ese conjunto de puntos.

En nuestra resolución de la ecuación de Boussinesq se calcularán los coeficientes a_k usando el método de colocación.

4.3. Simulaciones en MATLAB

En esta sección se muestra el código de MATLAB que implementa el planteamiento del IVP para la ecuación buena de Boussinesq en `RHSboussinesq` y en `MainBous` se resuelve el IVP aplicando Runge-Kutta-Fehlberg con orden (4,5) mediante la función ode45 de MATLAB para distintas condiciones iniciales. Además, en `MainBous` se incluye el código que realiza la representación gráfica de $u(x_0, t)$ frente al tiempo t y la representación de $u(x, t_0)$ frente al espacio x donde se puede verificar que se cumple la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ y la frontera $u(-L, t) = u(L, t)$.

RHSboussinesq

```
function K1=RHSboussinesq(xi,U)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%U: U = [U(xi,t), V(xi,t)]
%xi: variable del espacio fourier
%t: tiempo
%U(xi,t): vector de longitud N que representa la
% transformada de fourier de u(x,t)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
N = length(U)/2;
%calculo de la parte derecha de Vt
Vt = (-abs(xi).^2-abs(xi).^4).*U(1:N)-abs(xi).^2.*fft(real(ifft(U
    (1:N))).^2);
% calculo de Ut = V
Ut = U(N+1:2*N);
K1 = [Ut;Vt];
```

MainBous

```
clear all
format short e
%Parametro Numerico
N=250;
%Dominios
```

```
%x=(2*pi/N)*(-N/2:N/2-1)'; % grafica 1
%x=(8/N)*(-N/2:N/2-1)'; % grafica 2
x=(pi/(2*N))*(-N/2:N/2-1)'; % grafica 3

%condiciones iniciales
%y0 = [fft(cos(x + 2));fft(sin(x + 2))];
%y0 = [fft(sin(pi*x/4));fft(cos(pi*x/4))];
y0 = [fft(cos(2.*x).^2 );fft(sin(x-pi/2))];

%intervalo de integracion
tspan = 0:1e-2:4;
%solucion del sistema espacio fourier
OPTIONS = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-7);
[t,y] = ode45(@RHSboussinesq,tspan,y0, OPTIONS);

% solucion en el espacio fisico
% Y: matriz que almacenara los valores de u(x,t) de acuerdo a
% los valores de x y t
Y = zeros(length(tspan),N);
% Max: matriz que almacenara los valores maximos de u(x,t)
% para cada tiempo t
Max = zeros(1,length(tspan));
for jj=1:length(y(:,1)) %intervalo de timepo

    Y(jj,:)=real(ifft(y(jj,1:N)));
    Max(jj)=max(abs(Y(jj,:)));

end
%evolucion de u(x0,t) para t en [0,4]
subplot(1,2,1)
plot(t,Max,'--k',t,Y(:,1),'-.r', t, Y(:,83),'g', ...
    t,Y(:,166),'c', t,Y(:,250),'-.b')
grid on
title('Solucion Ecuacion Boussinesq frente al tiempo')
xlabel('tiempo (t)')
ylabel('u(x0,t)')
%legend('Maximo u(x,t)','u(-pi,t)','','','u(0.992pi,t)')
%legend('Maximo u(x,t)','u(-4,t)','','','u(3.968,t)')
legend('Maximo u(x,t)','u(-pi/4,t)','','','u(0.248pi,t)')
%graficas de la evolucion de u(x,t) para t =0,1,2,3,4
subplot(1,2,2)
plot(x,Y(1,:),'--b',x,Y(101,:),x,Y(201,:),x,Y(301,:),x,Y(401,:))
grid on
%axis([-pi pi -1.5 1.5]);
```

```
%axis([-4 4 -1.5 1.5]);
axis([-pi/4 pi/4 -1.5 1.5]);

title('Solucion Ecuacion Boussinesq en el espacio')
xlabel('x')
ylabel('u(x,t0)')
legend('u(x,0)','u(x,1)','u(x,2)','u(x,3)','u(x,4)')
```

Gráficas

Partiendo del IVP (4.0.1) con condiciones iniciales $u(x,0) = cos(x+2)$ y $u_t(x,0) = sen(x+2)$ y condiciones frontera 2π-periódicas, tomando los intervalos $t \in$[0,4] y $x \in[-\pi, \frac{248\pi}{250}]$ se obtiene

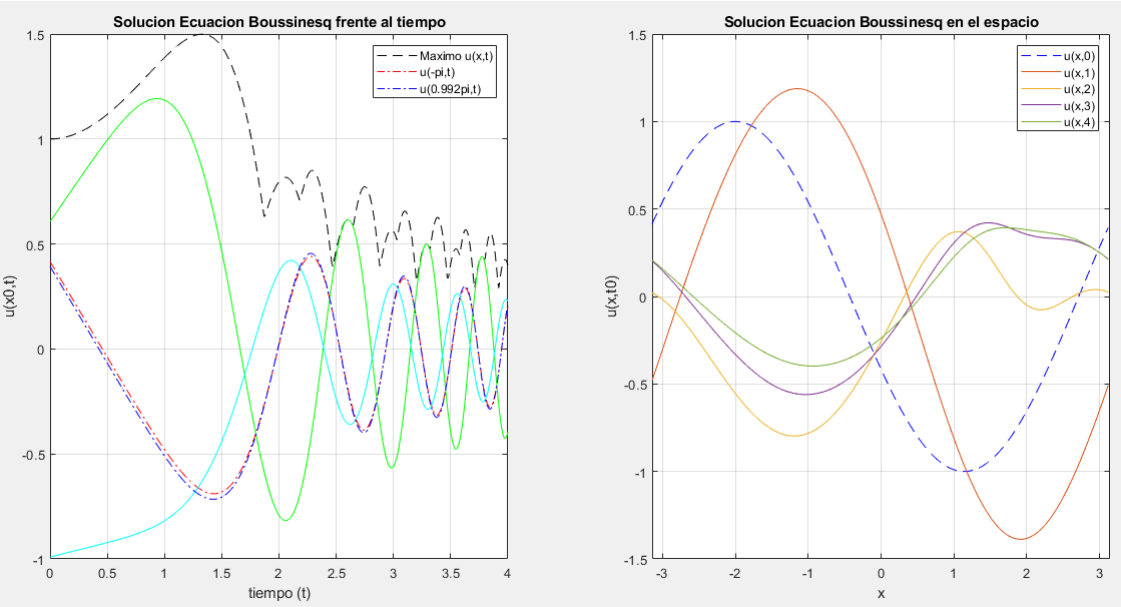

Figura 4.1: A la izquierda gráfica del conjunto de soluciones de la ecuación buena de Boussinesq frente al tiempo para cinco valores x equiespaciados en el intervalo $[-\pi, \frac{248\pi}{250}]$ junto con el máximo $u(x,t)$. Además, se puede observar como $u(-\pi,t) \approx u(\frac{248\pi}{250},t)$ debido a la 2π-periodicidad en las condiciones frontera. A la derecha las gráficas de las soluciones en $t = 0,1,2,3,4$ donde se puede comprobar que en $t = 0$ se cumple la condición inicial $u(x,0) = cos(x+2)$.

Ahora con condiciones iniciales $u(x,0) = sen(\pi x/4)$ y $u_t(x,0) = cos(\pi x/4)$ y condiciones frontera 8-periódicas, tomando el tiempo $t \in$[0,4] y $x \in$[-4, 3.968] se tiene

Por último, tomando $u(x,0) = cos^2(2x)$, $u_t(x,0) = sin(x - \pi/2)$ y condiciones de contorno $\pi/2$-periódicas en $t \in$[0,4] y $x \in[-\pi/4, 0{,}248\pi]$ se tiene

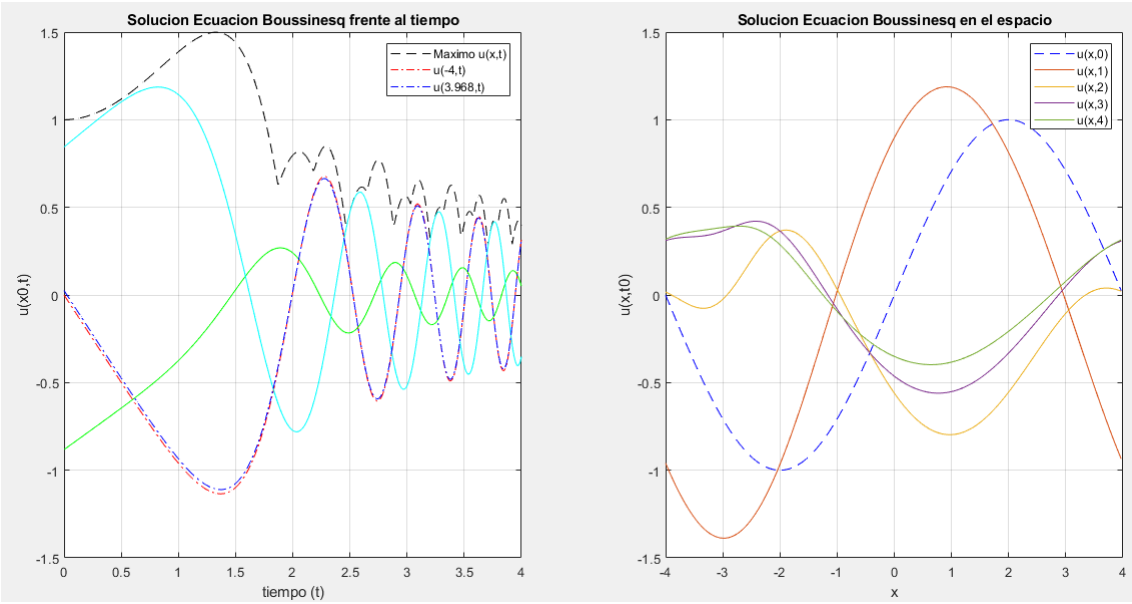

Figura 4.2: A la izquierda gráfica del conjunto de soluciones de la ecuación buena de Boussinesq frente al tiempo t junto con el máximo de $u(x,t)$ para x equiespaciado en [-4, 3.968], donde de nuevo se puede comprobar $u(-4,t) \approx u(3{,}968,t)$. A la derecha las gráficas de las soluciones en $t = 0,1,2,3,4$ donde se puede comprobar que $u(x,0) = sen(\pi x/4)$.

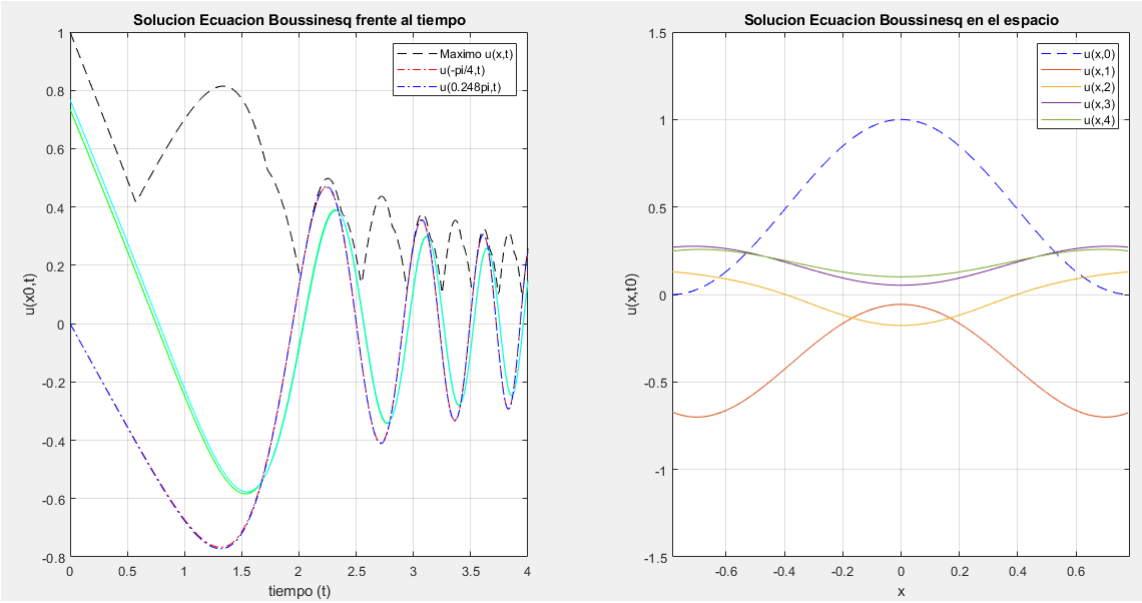

Figura 4.3: A la izquierda gráfica del conjunto de soluciones de la ecuación buena de Boussinesq frente al tiempo t junto con el máximo de $u(x,t)$ con x equiespaciado en $[-\pi/4, 0{,}248\pi]$ y a la derecha gráfica de las soluciones en $t = 0,1,2,3,4$. De nuevo se puede observar que $u(-\pi/4,t) \approx u(0{,}248\pi,t)$ y $u(x,0) = cos^2(2x)$.

Bibliografía

[1] BOUSSINESQ, Joseph. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1872, vol. 17, p. 55-108.

[2] DUTYKH, Denys; DIAS, Frédéric. Dissipative boussinesq equations. *Comptes Rendus Mecanique*, 2007, vol. 335, no 9-10, p. 559-583.

[3] DINGEMANS, Maarten W. Water wave propagation over uneven bottoms. 1994.

[4] BUKOWSKI, John Francis. *The Boussinesq Limit of the Fermi-Pasta-Ulam Equation*. Brown University, 1997.

[5] OLVER, Peter J. Dispersive Fractalization in Fermi–Pasta–Ulam Lattices I. The Linear Regime. 2019.

[6] LINARES, Felipe. *Notes on Boussinesq Equation*. Inst. de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

[7] GRANERO-BELINCHÓN, Rafael. *Ampliación de Análisis: Fundamentos de Análisis Armónico y Ecuaciones en derivadas Parciales*. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria.

[8] GARVI CASAS, Helena. *Introducción al problema espectral de un operador elıptico*. 2019.Universitat de Barcelona.

[9] SÁENZ LÓPEZ, David. Estudio de los métodos espectrales en ecuaciones diferenciales de una dimensión y su comparación con el método de diferencias finitas. 2015.

[10] VADILLO, Fernando. *MÉTODOS DE UN PASO. MÉTODOS RUNGE-KUTTA*. Departamento de Matematicas de la UPV/EHU.

Apéndice

A.4. Definiciones

- **Fluido incomprensible:** Un fluido se dice incompresible si su densidad permanece constante en el tiempo, y tiene la capacidad de oponerse a la compresión del mismo bajo cualquier condición, es decir, la masa y el volumen del fluido permanecen iguales.
- **Dispersión de una Onda:** En física es el fenómeno de separación de las ondas de distinta frecuencia al atravesar un material. Así mismo, la dispersión en olas sería el proceso de separación de las olas en función de la longitud de onda.
- **Flujo potencial:** función que describe la cinemática de un fluido basada en el concepto de función potencial, esta relación viene del hecho de que el campo de velocidades (campo vectorial) del flujo de un fluido es igual al gradiente de una función potencial que rige el movimiento del fluido.
- **Derivada material:** Describe la tasa de cambio en el tiempo de alguna cantidad física de una partícula sujeto a variaciones del campo de velocidad macroscópica dependiente del espacio y el tiempo.
- **Superficie libre:** Superficie de un fluido que está sujeto a una tensión de corte paralela cero, el límite entre dos fluidos homogéneos (superficie que separa el agua y aire de la atmosfera).
- **Oscilador:** Sistema capaz de crear perturbaciones o cambios periódicos o cuasi periódicos en un medio.
- **Potencial de interacción entre partículas:** fuerzas distintas que se generan en la separación entre partículas, una fuerza atractiva que actúa a grandes distancias (fuerzas de dispersión) y una fuerza repulsiva actuando a pequeñas distancias.

- **Modo de vibración:** Diversas formas en que una cuerda o cadena puede vibrar, generando ondas estacionarias (con puntos fijos).

- **FPU:** Acrónimo que se utiliza para referirse al problema de Fermi-Pasta-Ulam.

- **Integral del movimiento:** Expresión analítica $C(x_i, y_i)$ que es constante si se sustituyen sus variables por la expresión temporal de las coordenadas y velocidades generalizadas.

- **Sistema Hamiltoniano:** sistema dinámico completamente descrito por el hamiltoniano que permiten describir las ecuaciones de evolución de un sistema físico.

- **Red de Toda:** modelo sencillo para un cristal unidimensional. Consiste en una cadena de partículas que interaccionan entre sus vecinos mediante ciertas ecuaciones del movimiento en las que juegan un papel clave el momento y el desplazamiento de las partículas.

- **Cuerda:** en teoría de cuerdas, una cuerda es un objeto con una dimensión espacial extendida, a diferencia de las partículas elementales que son de dimensión cero, como un punto.

- **Problema de dispersión inversa:** problema que trata de determinar las características de un objeto, basado en datos sobre cómo se dispersa la radiación o partículas entrantes. Es el problema inverso al problema de dispersión directa, el cual consiste en determinar cómo se dispersa la radiación o partículas en función de las propiedades del dispersor.

- **f = g en casi todo punto:** para un espacio de medida (X, σ, μ) diremos que $f(x) = g(x)$ en casi todo $x \in X$ cuando existe un conjunto $B \in \sigma$ tal que $\mu(B) = 0 \forall x \in X \setminus B$

- **Derivada débil:** La función v es la derivada débil de u si cumple

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\phi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} u(x)\partial_x\phi(x)dx, \ \forall \phi \in C_c^\infty.$$

  Con C_c^∞ el espacio de funciones test.

- **Decaimiento exponencial:** decimos que una función tiene un decaimiento exponencial si disminuye a una tasa proporcional con respecto a su valor actual.

- **Aplicación Lipschitz:** Dada una aplicación $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diremos que f es (globalmente) Lipschitz en el conjunto U cuando existe una constante $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \qquad \forall x, y \in U.$$

- **Número de onda:** El número de onda es una magnitud de frecuencia que indica el número de veces que vibra una onda en una unidad de distancia.

A.5. Resultados

Teorema A.5.1. *(ver **[6]**) Sea el operador $W_\phi(t)f(x)$ definido como*

$$W_\phi(t)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)} \left|\gamma''(\xi)\right|^{\phi/2} \widehat{f}(\xi)d\xi;\ \gamma(\xi) = |\xi|(1+\xi^2)^{1/2}.$$

Si $\phi \in [0,1]$ entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left\|W_{\phi/2}(t)f(x)\right\|_p^q dt\right)^{1/q} \leq c\left\|f\right\|_2 \tag{A.2.1.1}$$

donde $q = 4/\gamma,\ p = 2/(1-\gamma)$.

Teorema A.5.2 (Plancherel)**.** *(ver **[7]**) Sea $f \in L^2$ entonces se puede definir $\widehat{f} \in L^2$ y además*

$$\left\|f\right\|_{L^2} = ||\hat{f}||_{L^2},$$
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi$$

Teorema A.5.3 (Desigualdad de Morrey)**.** *(ver **[8]**) Supongamos $n \leq p \leq \infty$ y sea $C^\rho_\infty(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones con ρ derivadas continuas que se anula en el infinito. Entonces existe una constante C, dependiendo esta solo de p y n, tal que*

$$\left\|f\right\|_{C^\rho_0(\mathbb{R}^n)} \leq C\left\|f\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$\forall f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, donde $\rho = 1 - n/p$.

Teorema A.5.4 (Desigualdad de Sobolev)**.** *(ver **[7]**) Sea $\varepsilon > 0$. Entonces se tiene la siguiente desigualdad*

$$\left\|f\right\|_{C(\mathbb{R})} \leq ||\widehat{f}||_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_\varepsilon \left\|f\right\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})}.$$

para todo $f \in H^{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$. *En particular se tiene que*

$$H^{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}).$$

Además, para el caso H^s *se tiene la siguiente desigualdad*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

donde $2 < p < \infty$ *y* $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}$ *así tenemos la inclusión*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^p.$$

Para el caso $s = d/2$ *falla, se le conoce como exponente crítico de Sobolev.*

LEMA A.5.1 (Desigualdad de Young). *(ver [7]) Dadas* $f \in L^p$ *y* $g \in L^q$ *con*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

se tiene

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Teorema A.5.5. *(ver [6]) Si* $s > n/2$ $H^s(\mathbb{R}^{\ltimes})$ *es un álgebra de Banach, es decir,* $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $fg \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *con*

$$\|fg\|_{s,2} \leq c_s \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}.$$

Teorema A.5.6 (interpolación). *(ver [7]) Sea* f *una función tal que* $f \in L^{p'}(\Omega)$ *y* $f \in L^{q'}(\Omega)$ *entonces* $f \in L^r(\Omega)$ *para todo* $r \in [p', q']$. *Además,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^{p'}(\Omega)} \|f\|^{1-\theta}_{L^{q'}(\Omega)}$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ *se define como*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p'} + \frac{1-\theta}{q'}.$$

Teorema A.5.7 (desigualdad de Hölder). *(ver [7]) Dados* $f \in L^P(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, *con* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, *entonces* $fg \in L^1$ *y se tiene*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

PROPOSICIÓN A.5.1. *(ver [6]) Si*

$$(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_1(t)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} i|\xi|^{-1}\gamma(\xi)e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\widehat{f}(\xi)d\xi,$$

$$(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_2(t)g_1'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} i|\xi|^{-1}\gamma(\xi)e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\frac{sgn(\xi)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi$$

y

$$(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_2(t)g_2''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} i|\xi|^{-1}\gamma(\xi)e^{i(t\gamma(\xi)+x\xi)}\frac{\xi\widehat{g_2}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}d\xi$$

entonces se tiene

$$\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_1(t)f(x)\right\|_2 \leq C\left\|f\right\|_{1,2}, \tag{A.2.1.2}$$

$$\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_2(t)g_1'(x)\right\|_2 \leq C\left\|g_1\right\|_2 \tag{A.2.1.3}$$

y

$$\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_2(t)g_2''(x)\right\|_2 \leq C\left\|g_2\right\|_{1,2}. \tag{A.2.1.4}$$

Demostración. Recordando que habíamos tomado $\gamma(\xi) = |\xi|(1+\xi^2)^{1/2}$, la prueba de las tres estimaciones se realiza del mismo modo aplicando el teorema de Plancherel (A.5.2)

$$\begin{aligned}\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_1(t)f(x)\right\|_2 &\overset{A,5,2}{=} \left\|(-\Delta)^{-1/2}\widehat{\partial_t V_1}(t)f(x)\right\|_2 \leq C\left\||\xi|^{-1}\gamma(\xi)\widehat{f}(\xi)\right\|_2 \\ &= C\left\|(1+\xi^2)^{1/2}\widehat{f}(\xi)\right\|_2 = C\left\|f\right\|_{1,2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_2(t)g_1'(x)\right\|_2 &\overset{A,5,2}{=} \left\|(-\Delta)^{-1/2}\widehat{\partial_t V_2}(t)g_1'(x)\right\|_2 \leq C\left\|\left|\xi\right|^{-1}\gamma(\xi)\frac{sgn(\xi)\widehat{g_1}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}\right\|_2 \\ &= C\left\|g_1\right\|_2\end{aligned}$$

y en la última teniendo en cuenta que $\left|\frac{\xi}{(1+\xi^2)^{1/2}}\right| \leq 1$

$$\begin{aligned}\left\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t V_2(t)g_2''(x)\right\|_2 &\overset{A,5,2}{=} \left\|(-\Delta)^{-1/2}\widehat{\partial_t V_2}(t)g_2''(x)\right\|_2 \leq C\left\|\left|\xi\right|^{-1}\gamma(\xi)\frac{sgn(\xi)\xi\widehat{g_2}(\xi)}{(1+\xi^2)^{1/2}}\right\|_2 \\ &\leq C\left\|g_2\right\|_{1,2}.\end{aligned}$$

□

Teorema A.5.8 (Desigualdad de Jensen)**.** *(ver [7]) Sean $(X;\Im,\mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$ (es decir, un espacio de probabilidad); A un intervalo de la recta real $\mathbb{R}$; $g \in L^1(X,\mu,A)$, es decir, sea g una función μ-integrable con valores*

en A; $f : A \to \mathbb{R}$ una función convexa.
Entonces

$$f\left(\int_X g d\mu\right) \leq \int_X f \circ g d\mu$$

Teorema A.5.9 (Punto fijo de Banach)**.** *(ver **[7]**) Sea X un espacio de Banach y sea $\tau : X \times X \to X$ una aplicación tal que*

$$\|\tau(u) - \tau(v)\|_X \leq K \|u - v\|_X$$

con $K < 1$. Entonces τ tiene un único punto fijo.