



**Facultad
de
Ciencias**

**LA FUNCIÓN DE GREEN: PROPIEDADES Y
APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES**
(Green's Function: properties and applications in solving
partial differential equations)

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS**

Autora: Amaya García Zulueta

Directora: Diana Stan

Junio - 2023

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi directora, Diana, su implicación y toda la ayuda que me ha proporcionado a lo largo de estos meses.

Al profesorado de la Universidad, por todo lo aprendido, y al personal no docente, por su amabilidad y buen trato.

Por otro lado, a mis amigos y a todas las personas que he conocido a lo largo de estos cuatro años, gracias por haber hecho de mi paso por la facultad una etapa que siempre recordaré.

Y por último, gracias a mi familia, por ser partícipes en todo cuanto he conseguido hasta hoy. A mi padre, por su apoyo en los momentos de mayor desánimo. A mi madre, por ser un ejemplo para mí, y sobre todo, a mi hermano, por hacer el camino más fácil.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es obtener la función de Green asociada a determinados problemas de contorno. Se estudiarán varios ejemplos en los que es posible encontrar dicha función y se enunciarán algunas de sus propiedades más importantes. La función de Green, asociada a un operador diferencial o en derivadas parciales lineal \mathcal{L} , es la solución de la ecuación $\mathcal{L}[u] = \delta$, donde el término no homogéneo δ es la Delta de Dirac. Por tanto, se introducirá esta distribución y algunas de sus propiedades más relevantes.

Como punto de partida se determinará la función de Green asociada a algunos problemas de contorno sencillos, en los que la ecuación involucrada es una ecuación diferencial ordinaria. Posteriormente, el trabajo se centrará en la obtención de dicha función para resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales clásicas, como la Ecuación de Laplace, la Ecuación de Poisson o la Ecuación del Calor.

Palabras clave: Función de Green, problema de contorno, Delta de Dirac, operador diferencial, ecuación diferencial ordinaria, ecuación en derivadas parciales, Ecuación de Laplace, Ecuación de Poisson, Ecuación del Calor.

Abstract

The aim of this project is to obtain the Green's function associated to certain boundary-value problems. We will study several examples in which it is possible to find this function and we will show some of its most important properties. The Green's function associated to a linear ordinary or partial differential operator \mathcal{L} , is the solution to the problem $\mathcal{L}[u] = \delta$, where the nonhomogeneous term δ is the Dirac Delta function. Therefore, we will introduce this distribution and some of its most relevant properties.

As a starting point, we will determine the Green's function associated to some boundary-value problems, in which the equation involved is an ordinary differential equation. Afterwards, the dissertation will focus on obtaining this function aiming to solve some classical partial differential equations such as Laplace equation, Poisson equation or Heat equation.

Key words: Green's function, boundary-value problem, Dirac Delta, differential operator, ordinary differential equation, partial differential equation, Laplace equation, Poisson equation, Heat equation.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Breve historia	1
1.2. Planteamiento matemático	2
1.3. Estructura del trabajo	2
2. La función de Green	4
2.1. Delta de Dirac	4
2.1.1. Interpretación física	4
2.1.2. Breve historia	5
2.1.3. Definición	6
2.1.4. Propiedades	8
2.1.5. La función de Heaviside	9
2.2. Introducción al concepto de función de Green	10
2.3. La función de Green para EDOs	11
2.3.1. Problemas de Contorno	11
2.3.2. Determinación de la función de Green	12
2.3.3. La función de Green en el sentido de las distribuciones	19
3. EDPs Elípticas: Ecuaciones de Laplace y Poisson	23
3.1. Resultados previos	24
3.1.1. Principio del máximo y del mínimo	26
3.2. Representación de Green	28
3.2.1. Identidades de Green	28
3.2.2. Solución fundamental de la Ecuación de Laplace	29
3.2.3. Derivación de la función de Green	33
3.2.3.1. Definición de la función de Green	35
3.2.3.2. Generalización al problema no homogéneo	36
3.3. Integral de Poisson	37

4. EDPs Parabólicas: La Ecuación del Calor	42
4.1. Solución fundamental de la Ecuación del Calor	43
4.2. Representación de Green	47
4.2.1. Generalización al problema no homogéneo	48
Bibliografía	51
A. Distribuciones	1
A.1. La derivada en el sentido de las distribuciones	4
B. Problema de Cauchy para EDOs de segundo orden	5
B.1. Existencia y unicidad de solución	6
C. Algunos resultados de Teoría de la Medida	7
C.1. Espacios de Lebesgue	8
C.2. Derivación bajo el signo integral	9
C.3. Otros resultados	11
D. Algunos resultados de Cálculo	15
D.1. El operador de Laplace	16
D.2. Fórmulas de Green	17
D.3. Coordenadas Polares	18
E. Función Gamma	19
E.1. Otros resultados	20

Capítulo 1

Introducción

1.1. Breve historia

Las funciones de Green son una herramienta matemática utilizada en la teoría de ecuaciones diferenciales y con muchas aplicaciones en la física teórica, para resolver ecuaciones diferenciales bajo ciertas condiciones de contorno. Estas funciones llevan el nombre del matemático británico George Green (1793-1841), quien las introdujo por primera vez en su ensayo de 1828 titulado “*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*”. Green fue uno de los primeros matemáticos en darse cuenta de que las soluciones de las EDP podían expresarse en términos de funciones especiales que dependen de las condiciones de contorno del problema en cuestión. En particular, observó que las soluciones de la Ecuación de Laplace, sujeta a unas determinadas condiciones de contorno, podían expresarse a través de lo que hoy se conoce como funciones de Green. Dicho problema es conocido como *Problema de Dirichlet* y se introducirá más adelante en el trabajo.



Figura 1.1: George Green, extraída de [15].

Sin embargo, la teoría de Green no fue muy conocida hasta que se utilizó para resolver problemas de transferencia de calor. A partir de entonces, las funciones de Green se convirtieron en

una herramienta valiosa para la solución de problemas en diversas áreas de la física, la ingeniería y las matemáticas.

En el trabajo que nos ocupa, nos centraremos en las aplicaciones matemáticas de las funciones de Green, sobre todo, en el campo de las Ecuaciones en Derivadas Parciales. En dicha materia, estas funciones proporcionan una manera de calcular la solución de una EDP en unas condiciones de contorno adecuadas. Esta solución se calcula mediante una integral que involucra la función de Green y el término no homogéneo. De modo que, si se logra construir dicha función, la solución al problema queda reducida al cálculo de una integral.

1.2. Planteamiento matemático

En términos matemáticos, el problema descrito anteriormente se puede expresar de la siguiente forma. La función de Green $G(t, s)$ para un operador diferencial o en derivadas parciales lineal \mathcal{L} , se puede definir como su solución cuando el término no homogéneo es la Delta de Dirac¹:

$$\mathcal{L}[G](t, s) = \delta(t - s).$$

Por tanto, la solución al problema no homogéneo $\mathcal{L}[u](t) = f(t)$ se puede construir aplicando la siguiente relación

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(s)ds.$$

1.3. Estructura del trabajo

El objetivo principal de este trabajo es la obtención de la función de Green para algunas EDPs clásicas, como la Ecuación de Laplace, y su versión no homogénea, la Ecuación de Poisson, ó la Ecuación del Calor, bajo ciertas condiciones de contorno. No obstante, también se introducirá una fórmula de determinación de dicha función cuando la ecuación asociada al problema es una EDO de segundo orden. Por ello, el trabajo se organizará de la siguiente forma.

Como punto de partida, el TFG comenzará por establecer algunos resultados elementales sobre las funciones de Green. En el **Capítulo 2** se estudiará la Delta de Dirac. Se definirá formalmente el concepto de función de Green y se detallarán algunas de sus propiedades más relevantes. Además, gran parte de este capítulo se dedicará a la obtención de una fórmula general de determinación de la función de Green cuando la ecuación involucrada es una EDO de segundo orden. Como aplicación, se resolverán varios ejemplos sencillos que ayudarán a entender el concepto de función de Green.

¹Se introducirá mas adelante en el trabajo.

Los capítulos siguientes se centrarán en la determinación de la función de Green para dos EDPs clásicas, una de tipo elíptico y otra de tipo parabólico. En el **Capítulo 3** se estudiará con detalle la conocida Ecuación de Laplace y su versión no homogénea, la Ecuación de Poisson. Se introducirán varios resultados auxiliares que serán de ayuda en la determinación de la solución fundamental de dicha ecuación. Se trabajará con el clásico Problema de Dirichlet. Por otro lado, el **Capítulo 4** se centrará en el estudio de la Ecuación del Calor siguiendo una estructura similar a la del capítulo anterior.

Capítulo 2

La función de Green

Para la elaboración de este capítulo se han consultado fundamentalmente [4], [10], [11].

2.1. Delta de Dirac

La función de Green para un operador diferencial lineal (o en derivadas parciales) es su solución cuando el término no homogéneo es la función *Delta de Dirac*, debida a una fuerza puntual unitaria en un dominio dado. Por ello, se hace necesario, antes de comenzar con el estudio de la función de Green, caracterizar la Delta de Dirac, así como enunciar algunas de sus propiedades más importantes, que serán utilizadas en el desarrollo del trabajo. La Delta de Dirac es una de las distribuciones más conocidas. En el Anexo A se estudian con más detenimiento algunas nociones elementales de *Teoría de Distribuciones*.

Con el objetivo de facilitar su comprensión, se comenzará por introducir el significado físico de la Delta de Dirac a través de un ejemplo particular, para, posteriormente, profundizar más en el concepto matemático.

2.1.1. Interpretación física

Por lo general, las magnitudes físicas se extienden a lo largo de un dominio espacial y durante un intervalo de tiempo específico. Sin embargo, hay casos en los que las condiciones iniciales o los parámetros se concentran en una región muy pequeña del dominio. Por ejemplo, una carga puede estar concentrada en una sección muy pequeña de una viga. También es necesario estudiar procesos en los que se ejerce una fuerza intensa durante un breve lapso, como en el caso de un “chispazo”. Todos estos escenarios exigen un esquema que contemple tanto variables distribuidas en el espacio y el tiempo, como aquellas que se concentran en puntos o momentos específicos. Por lo tanto, se requiere una perspectiva que abarque estos distintos aspectos. Todo ello motiva la introducción del posterior ejemplo:

Ejemplo 2.1.1. Consideremos la acción de una fuerza “instantánea”. Supongamos que un cuerpo de masa unidad ($m = 1$), en reposo en el instante inicial $t = 0$, experimenta la acción de una fuerza impulsiva en un instante $t_0 > 0$, que le comunica una velocidad $v = 1$, después de lo cual la acción de la fuerza termina. ¿Qué fuerza actúa sobre el cuerpo en el instante t ? (Ver [4, Pág 145, Cap 7]).

Solución. Sea $F(t)$ la fuerza a determinar, aplicando la Segunda Ley de Newton¹, si $a(t)$ denota la aceleración del cuerpo en el instante t entonces

$$F(t) = a(t). \quad (2.1)$$

En este caso,

$$a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

ya que la velocidad del objeto permanece constante excepto en el momento t_0 , cuando experimenta un cambio instantáneo de $v = 0$ a $v = 1$.

Teóricamente, vemos que la expresión obtenida (2.2) carece de sentido matemático, puesto que, es imposible encontrar una función de t que asigne el valor infinito. Por otro lado, si integramos (2.1) entre 0 y $\delta > t_0$ obtenemos:

$$\int_0^\delta F(t) dt = \int_0^\delta a(t) dt = v(\delta) - v(0) = 1, \quad (2.3)$$

donde $v(t)$ denota la velocidad del cuerpo en el instante de tiempo t . Sin embargo, aplicando (2.2), se tiene que $F(t) = 0$ si $t \neq t_0$, lo que significa que $\int_0^\delta F(t) dt = 0$, mientras (2.3) nos lleva a $\int_0^\delta F(t) dt = 1$. Por tanto, llegamos a un absurdo. Estas aparentes contradicciones pueden resolverse mediante el concepto de *función generalizada o distribución*, que se introducirá a continuación.

2.1.2. Breve historia

La *Delta de Dirac* debe su nombre al físico teórico inglés *Paul Adrien Maurice Dirac* (1902-1984), quien trabajó con ella en su libro “*Principios de la mecánica cuántica*”. Esta herramienta ya había sido manejada a finales del siglo XIX por varios físicos, entre los que destacó, el británico, *Oliver Heaviside* (1850-1925), quien desarrolló la “*función escalón*”. Sin embargo, como ya se ha comentado, las funciones generalizadas no son consideradas del todo funciones. En sus inicios, la Delta de Dirac no contó con aceptación matemática por ser aparentemente poco

¹La segunda ley de Newton establece que las aceleraciones que experimenta un cuerpo son proporcionales a las fuerzas que recibe ($F = m \cdot a$, donde m es la masa del cuerpo, F la fuerza que recibe y a su aceleración).

²Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada de la velocidad.

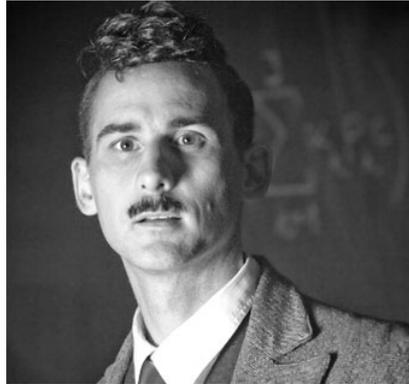


Figura 2.1: Paul A. M. Dirac, extraída de [13].

rigurosa. Heaviside fue muy criticado por trabajar con ella. Incluso, muchos de los trabajos que la involucraban no lograron ser publicados. No fue hasta mediados del siglo XX cuando el matemático francés *Laurent Schwartz (1915-2002)* publicó una serie de artículos, que exponían una teoría matemáticamente coherente y más rigurosa sobre la Delta de Dirac. A la par que Schwartz, la escuela rusa³ hizo importantes contribuciones al desarrollo de la teoría de distribuciones, que a su vez permitió una mejor comprensión y tratamiento de la Delta de Dirac en el contexto matemático. Por lo tanto, los trabajos de ambos son considerados piezas fundamentales en el desarrollo de las distribuciones.

2.1.3. Definición

Conocida la Definición A.1 (ver Anexo A) de la Delta de Dirac en términos de distribuciones, en base a la idea intuitiva expuesta en el Ejemplo 2.1.1, vamos a dar ahora una definición alternativa de la Delta entendida como el límite de una sucesión de funciones⁴. La Delta de Dirac en el punto $t = t_0$ debe verificar formalmente:

$$\delta(t - t_0) = {}^5 \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Es claro que, no existe una función así definida entre las funciones clásicas conocidas. Sin embargo, sea $\epsilon > 0$, consideremos la siguiente familia de funciones clásicas:

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si } t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]. \end{cases} \quad (2.5)$$

³La escuela rusa de matemáticas se refiere a un grupo de matemáticos rusos que surgieron a principios del siglo XX y que destacaron en el campo de la matemática pura. Algunos de los nombres más conocidos de esta escuela incluyen a Andrey Kolmogorov, Pavel Alexandrov, Sergei Sobolev, entre otros.

⁴Dicha Definición nos será más útil y manejable en el desarrollo del trabajo.

⁵También usaremos δ_{t_0} para denotar la Delta de Dirac en el punto t_0

Observamos que se puede definir una función generalizada a partir del límite de (2.5), que aproxima la Delta de Dirac:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_\epsilon(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases} = \delta(t - t_0). \quad (2.6)$$

Además de (2.5) existen muchas otras familias de funciones clásicas que pueden ser utilizadas para definir la Delta de Dirac. Una función que se suele usar como aproximación es la función gaussiana⁶. Consideramos el siguiente ejemplo:

$$\phi(\epsilon, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\epsilon} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\epsilon^2}}. \quad (2.7)$$

de modo que si $\epsilon \rightarrow 0^+$ entonces $\phi(\epsilon, t) \rightarrow \delta(t)$.

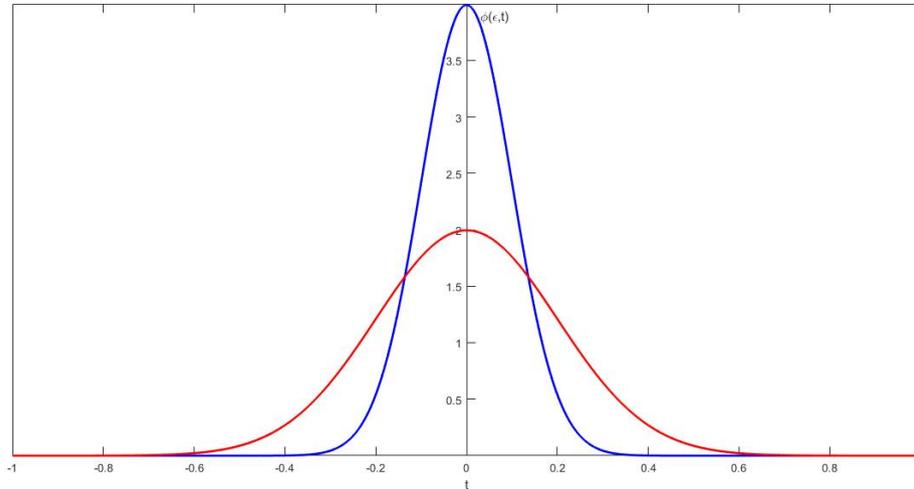


Figura 2.2: Aproximación de la Delta de Dirac en el origen usando (2.7) para $\epsilon = 0,1$ (azul) y $\epsilon = 0,2$ (rojo).

Para formalizar el concepto de expresar la Delta de Dirac a partir del límite de una familia de funciones clásicas, basándonos en el Lema A.1, introducimos la siguiente definición.

Definición 2.1.3.1. Sea f_ϵ la definida en (2.5) y sea φ una función continua, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \varphi(t) dt := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(t) \varphi(t) dt.$$

Observación 2.1.3.1. La Definición 2.1.3.1 se ha particularizado a la función (2.5), que será con la que trabajaremos en el capítulo. No obstante, dicha definición es válida para cualquier

⁶La solución fundamental de la Ecuación del Calor que estudiaremos en el Capítulo 4 es utilizada para aproximar la Delta de Dirac.

otra familia de funciones clásicas que verifique (2.6).

2.1.4. Propiedades

A continuación, estudiaremos algunas de las propiedades de la Delta de Dirac, centrándonos en aquellas que toman relevancia en la caracterización de la función de Green.

Proposición 2.1.4.1. (Propiedades). *Algunas propiedades importantes de la Delta de Dirac son las siguientes:*

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\varphi(t)dt = \varphi(t_0)$ (Propiedad fundamental).

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\varphi(t_0)dt = \varphi(t_0)$.

3. El área bajo la curva que define la función Delta de Dirac (2.6) es igual a 1.

donde $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Demostración. Estudiaremos cada propiedad por separado:

1. Para cada función $\varphi(t)$ continua en t_0 , aplicando la Definición 2.1.3.1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\varphi(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(t)\varphi(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} f_{\epsilon}(t)\varphi(t)dt. \quad (2.8)$$

Por otro lado, estamos en condiciones de aplicar el Teorema del Valor Medio para el Cálculo Integral C.3. Sea φ una función continua en un conjunto cerrado y acotado $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, entonces φ alcanza su punto medio para algún t en ese conjunto, es decir:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \varphi(t)dt = \varphi(t_0). \quad (2.9)$$

Por tanto, uniendo (2.8) y (2.9) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\varphi(t)dt = \varphi(t_0).$$

2. Procediendo igual que para la propiedad anterior, para f_{ϵ} la definida en (2.5), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\varphi(t_0)dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(t)\varphi(t_0)dt = \varphi(t_0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(t)dt \\ &= \varphi(t_0) \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \frac{1}{2\epsilon} dt = \varphi(t_0) \left[\frac{1}{2\epsilon} 2\epsilon \right] = \varphi(t_0). \end{aligned}$$

3. A partir de la propiedad fundamental, tomando $\varphi(t) = 1$, de modo que φ es una función continua en \mathbb{R} , y procediendo igual que para los casos anteriores, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)(1)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(t)dt = 1,$$

donde f_{ϵ} es de nuevo la función (2.5).

□

2.1.5. La función de Heaviside

Como ya se comentó en el Anexo A, la Delta de Dirac se define como la derivada de la conocida “función escalón” de Heaviside. A partir de la Definición A.1.1 lo probaremos.

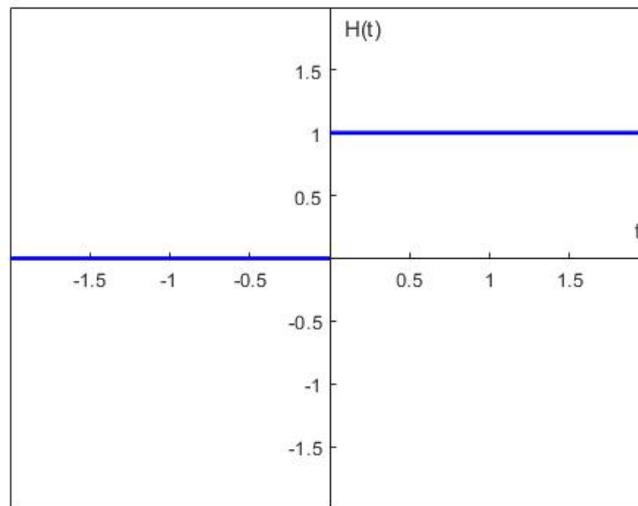


Figura 2.3: Gráfica de la función de Heaviside.

Definición 2.1.5.1. (Función de Heaviside) La función “escalón” de Heaviside, es una función discontinua cuyo valor es 0 para cualquier argumento negativo, y 1, para cualquier argumento positivo:

$$H(t) := \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Observación 2.1.5.1. De modo análogo, se define $H(t - t_0)$ de la siguiente forma:

$$H(t - t_0) := \begin{cases} 1, & \text{si } t > t_0 \\ 0, & \text{si } t < t_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Esta función se utiliza frecuentemente para restringir la solución de un problema de contorno a un intervalo concreto⁷ $t > t_0$.

Proposición 2.1.5.1. *La derivada en el sentido de las distribuciones de la función de Heaviside (2.10) coincide con la Delta de Dirac en el origen, es decir, $H'(t) = \delta(t)$.*

Demostración. Sea (2.10), si elegimos trabajar con el intervalo $(-1, 1)$, aplicando la Definición A.1.1, para cada función $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$,

$$\int_{-1}^1 H'(t)\varphi(t)dt = - \int_{-1}^1 H(t)\varphi'(t)dt = - \int_0^1 \varphi'(t)dt = -\varphi(1) + \varphi(0) = {}^8\varphi(0). \quad (2.12)$$

Por otro lado, aplicando la Propiedad Fundamental de la Delta de Dirac en $t_0 = 0$, se tiene que

$$\int_{-1}^1 \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0). \quad (2.13)$$

Uniendo las expresiones (2.12) y (2.13) se concluye

$$\int_{-1}^1 \delta(t)\varphi(t)dt = \int_{-1}^1 H'(t)\varphi(t)dt \quad (\text{para cada } \varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)).$$

Por tanto, en el sentido de las distribuciones:

$$H'(t) = \delta(t).$$

□

2.2. Introducción al concepto de función de Green

Antes de comenzar, se hace necesario introducir el siguiente concepto:

Definición 2.2.1. (*Operador en derivadas parciales lineal \mathcal{L} de orden k*). [2, Pág 2, Cap 1, Def 1]. Un operador en derivadas parciales lineal \mathcal{L} es un operador definido como una aplicación $\mathcal{L} : X_1 \mapsto X_2$ entre dos espacios funcionales X_1, X_2 . Sea $u \in X_1$ una función tal que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, y sea $x \in \Omega$. Se define:

$$\mathcal{L}[u](x) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad (2.14)$$

donde α es un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ llamado multi-índice tal que cada componente

⁷Usaremos esta función para expresar la función de Green asociada a la Ecuación del Calor en el Capítulo 4.

⁸Teniendo en cuenta que $\varphi \in \mathcal{D}(-1, 1)$, entonces $\varphi(1) = 0$.

α_i es un número natural y su orden es $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. D^α se corresponde con

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Observación 2.2.1. En el caso particular de dimensión $n = 1$ el operador \mathcal{L} es un operador diferencial lineal de orden k .

Como ya se comentó en la introducción, la función de Green $G(t, s)$ para un operador diferencial o en derivadas parciales lineal, en un dominio Ω satisface la siguiente ecuación:

$$\mathcal{L}[G](t, s) = \delta(t - s), \quad (2.15)$$

donde $\delta(t - s)$ es la Delta de Dirac en el punto s . Además, (2.15) está sujeta a las siguientes condiciones de contorno en la frontera $\partial\Omega$:

$$\mathcal{B}[G](t, s) = 0,$$

donde \mathcal{B} es un operador diferencial o en derivadas parciales lineal cuyo orden es menor que el de \mathcal{L} .

Observación 2.2.2. Si el dominio Ω es todo el espacio, la solución al problema de contorno se conoce como solución fundamental del operador \mathcal{L} .

2.3. La función de Green para EDOs

Para entender mejor el concepto de función de Green, vamos a trabajar, en primer lugar, en la obtención de dicha función para ecuaciones diferenciales ordinarias. Como punto de partida, se hace necesario establecer algunos conocimientos previos que serán fundamentales en el trabajo (Ver [4, Cap 5]).

2.3.1. Problemas de Contorno

Para el estudio y determinación de la función de Green, nos vamos a centrar en un tipo particular de problema de contorno. En concreto, aquellos del tipo:

$$(PC) \begin{cases} (p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = f(t), & t \in [a, b] \\ a_1u(a) + a_2u'(a) = \alpha \\ b_1u(b) + b_2u'(b) = \beta, \end{cases} \quad (2.16)$$

donde $p \in C^1[a, b]$, $q, f \in C[a, b]$, $p(t) > 0$, $\forall t \in [a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$. Con el objetivo de simplificar la notación, vamos a trabajar con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u](t) &:= (p(t)u'(t))' + q(t)u(t), \\ H_a[u] &:= a_1u(a) + a_2u'(a), \\ H_b[u] &:= b_1u(b) + b_2u'(b),\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde \mathcal{L} es el operador diferencial lineal (2.14) de orden 2 asociado. Por tanto, el problema de contorno (2.16), se puede expresar de la siguiente forma

$$(PC) \begin{cases} \mathcal{L}[u](t) = f(t), & t \in [a, b] \\ H_a[u] = \alpha \\ H_b[u] = \beta. \end{cases}$$

Teorema 2.3.1.1. (Identidad de Lagrange). [4, Pág 86, Cap 5]. Sean $u, v : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dos funciones de clase $C^1([a, b])$. Aplicando (2.17), se tiene que:

$$u(t)\mathcal{L}[v](t) - v(t)\mathcal{L}[u](t) = \frac{d}{dt} (p(t)W[u, v](t)) \quad \forall t \in [a, b],\tag{2.18}$$

donde $W[u, v](t)$ es el Wronskiano de u, v en un punto $t \in [a, b]$ y viene definido por la siguiente expresión:

$$W[u_1, u_2](t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} = u(t)v'(t) - v(t)u'(t).$$

Demostración. Es fácil comprobar que se verifica la identidad desarrollando cada término por separado:

$$\begin{aligned}u(t)\mathcal{L}[v](t) - v(t)\mathcal{L}[u](t) &= u(t)(p(t)v'(t))' - v(t)(p(t)u'(t))' = \\ &= \frac{d}{dt} (u(t)(p(t)v'(t)) - v(t)(p(t)u'(t))) = \frac{d}{dt} (p(t)W[u, v](t)).\end{aligned}$$

□

2.3.2. Determinación de la función de Green

En lo que a la búsqueda de la función de Green se refiere, cuando trabajamos con un problema de contorno del tipo (2.16), se puede determinar una fórmula general de obtención de dicha función apoyándonos fundamentalmente en el *método de separación de variables*.

Teorema 2.3.2.1. *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, y el problema de contorno*

$$(PCS) \begin{cases} \mathcal{L}[u](t) = f(t), & t \in [a, b] \\ H_a[u] = 0 \\ H_b[u] = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Si (2.19) tiene una única solución, es posible encontrar una integral, que involucra la función de Green y el término no homogéneo $f(t)$, la cual permite obtener una fórmula general de solución independientemente de cual sea la función f . Es decir,

$$u(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds. \quad (2.20)$$

Demostración. Sea $u(t)$ la única solución del problema (2.19). Vamos a encontrar una expresión para $u(t)$ aplicando la técnica de variación de parámetros. Procedemos separando (2.19) en dos problemas de Cauchy.

$$(PC1) \begin{cases} \mathcal{L}[u](t) = 0, & t \in [a, b] \\ u(a) = a_2 \\ u'(a) = -a_1, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$(PC2) \begin{cases} \mathcal{L}[u](t) = 0, & t \in [a, b] \\ u(b) = b_2 \\ u'(b) = -b_1, \end{cases} \quad (2.22)$$

Como la EDO involucrada en ambos problemas es lineal y sus coeficientes $p(t), q(t)$ son continuos en $[a, b]$ por hipótesis, el Teorema de Existencia y Unicidad de solución global B.1.1 (ver Anexo B) nos asegura que (2.21) y (2.22) poseen una única solución, que además está definida en $[a, b]$. Denotemos $u_1(t)$ y $u_2(t)$ las soluciones, linealmente independientes en $[a, b]$, de (2.21) y (2.22), respectivamente. Por la forma en que han sido definidas u_1 y u_2 es claro que $H_a[u_1] = H_b[u_2] = 0$ y además son soluciones linealmente independientes de la misma EDO. Ahora, vamos a aplicar el método de separación de variables. Para ello, en primer lugar, vamos a transformar la EDO de segundo orden $\mathcal{L}[u](t) = f(t)$ en un sistema equivalente con dos EDOs de primer orden. Para conseguirlo, consideramos las funciones:

$$v_1(t) = u(t) \quad \text{y} \quad v_2(t) = p(t)u'(t),$$

y obtenemos:

$$v_1'(t) = u'(t) = \frac{p(t)u'(t)}{p(t)} = \frac{v_2(t)}{p(t)}$$

$$v_2'(t) = 9 - q(t)v_1(t) + f(t).$$

Uniendo las dos expresiones anteriores, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} v_1'(t) = \frac{v_2(t)}{p(t)} \\ v_2'(t) = -q(t)v_1(t) + f(t). \end{cases}$$

Ahora, aplicando el método de variación de parámetros, buscamos $u(t)$ tal que

$$\begin{aligned} u(t) &= A(t)u_1(t) + B(t)u_2(t), \\ p(t)u'(t) &= A(t)p(t)u_1'(t) + B(t)p(t)u_2'(t), \end{aligned}$$

con $A(t)$ y $B(t)$ funciones desconocidas. Nuestro objetivo es resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A'(t)u_1(t) + B'(t)u_2(t) = 0 \\ A'(t)u_1'(t) + B'(t)u_2'(t) = \frac{f(t)}{p(t)}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Dado que

$$W[u_1, u_2](t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

podemos obtener la única solución del problema usando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} A'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(t) \\ \frac{f(t)}{p(t)} & u_2'(t) \end{vmatrix}}{W[u_1, u_2](t)} = \frac{-u_2(t)f(t)}{p(t)W[u_1, u_2](t)}, \\ B'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} u_1(t) & 0 \\ u_1'(t) & \frac{f(t)}{p(t)} \end{vmatrix}}{W[u_1, u_2](t)} = \frac{u_1(t)f(t)}{p(t)W[u_1, u_2](t)}. \end{aligned}$$

$A(t)$ y $B(t)$ serán obtenidas integrando las expresiones anteriores. Por tanto, la única solución del problema (2.19) viene dada por la siguiente expresión,

$$u(t) = \left(\int_b^t \frac{-u_2(s)f(s)}{p(s)W[u_1, u_2](s)} ds \right) u_1(t) + \left(\int_a^t \frac{u_1(s)f(s)}{p(s)W[u_1, u_2](s)} ds \right) u_2(t). \quad (2.24)$$

Sin embargo, aplicando la identidad de Lagrange (2.18), obtenemos que para todo $t \in [a, b]$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{d}{dt} (p(t)W[u_1, u_2](t)) = u_1(t)\mathcal{L}[u_2](t) - u_2(t)\mathcal{L}[u_1](t) = 0 \implies p(t)W[u_1, u_2](t) = K. \quad (2.25)$$

⁹Despejando en la EDO del problema de contorno (2.16).

Por tanto, la expresión (2.24) se reduce a

$$u(t) = \left(\int_b^t \frac{-u_2(s)f(s)}{K} ds \right) u_1(t) + \left(\int_a^t \frac{u_1(s)f(s)}{K} ds \right) u_2(t). \quad (2.26)$$

Solo queda verificar que (2.26) satisface las condiciones del problema (2.19).

- En primer lugar, es claro que, por construcción, se verifica $\mathcal{L}[u](t) = f(t)$ en $[a, b]$.
- Por otro lado, se cumplen las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} H_a[u](t) &= a_1(A(a)u_1(a) + B(a)u_2(a)) + a_2(A(a)u_1'(a) + B(a)u_2'(a)) \\ &= A(a)(a_1a_2 - a_1a_2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_b[u](t) &= b_1(A(b)u_1(b) + B(b)u_2(b)) + b_2(A(b)u_1'(b) + B(b)u_2'(b)) \\ &= B(b)(b_1b_2 - b_1b_2) = 0, \end{aligned}$$

sin más que aplicando $u'(t) = A(t)u_1'(t) + B(t)u_2'(t)$ y $A(b) = B(a) = 0$.

Recapitulando, uniendo todas las expresiones anteriores, la función de Green del problema de contorno (2.19) viene dada por la siguiente expresión

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{u_1(t)u_2(s)}{K}, & \text{si } t \in [a, s] \\ \frac{u_1(s)u_2(t)}{K}, & \text{si } t \in [s, b]. \end{cases} \quad (2.27)$$

Por tanto, se puede resolver el problema por medio de la siguiente integral:

$$u(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds.$$

□

Observación 2.3.2.1. *En la prueba del Teorema 2.3.2.1, para la construcción de la función de Green no es necesario que u_1 u u_2 sean soluciones de (2.21) y (2.22), es suficiente con que verifiquen $\mathcal{L}[u_1](t) = \mathcal{L}[u_2](t) = 0$ en $[a, b]$ y $H_a[u_1] = H_b[u_2] = 0$. Si se modificase u_1 ó u_2 automáticamente cambiaría la constante K . Deberíamos recalculamos (2.25) para las nuevas \tilde{u}_1 y \tilde{u}_2 , y como ambas son linealmente dependientes de u_1 y u_2 respectivamente, finalmente, si operásemos de nuevo, la función de Green (2.27) no cambiaría¹⁰.*

Observación 2.3.2.2. *La función de Green es independiente del término no homogéneo $f(t)$. Por ello, una vez calculada, gracias a (2.20) podemos hallar la solución al problema de contorno*

¹⁰No nos vamos a detener en probar este resultado para no extendernos demasiado, ya que su dificultad únicamente reside en operar con los nuevos valores \tilde{u}_1 y \tilde{u}_2 .

para cualquier función $f(t)$, sin necesidad de recalcular la función de Green. Por tanto, la función de Green es conocida como **solución fundamental** del problema de contorno.

Para ilustrar el método general de determinación de la función de Green cuando la ecuación asociada al problema de contorno es una EDO, a continuación estudiaremos varios ejemplos. En primer lugar, se trabajará con un problema de contorno, el cual, debido a su sencillez, se puede resolver fácilmente usando las técnicas conocidas hasta el momento (por ejemplo, por integración directa). Posteriormente, se calculará la función de Green asociada, comprobándose que efectivamente se llega al mismo resultado.

Ejemplo 2.3.2.1. *El problema de contorno*

$$(\widetilde{P1}) \begin{cases} \mathcal{L}[u](t) = u''(t) = t + 1, \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

donde \mathcal{L} denota el operador diferencial lineal sujeto a las condiciones de contorno dadas.

Solución. Dicho problema se puede resolver o bien por integración directa, o bien mediante funciones de Green. Véase cada método por separado.

- Integrando dos veces $u(t)$ respecto a la variable t se tiene:

$$u'(t) = \int t + 1 \, dt = \frac{t^2}{2} + t + C \implies u(t) = \int \frac{t^2}{2} + t + C \, dt = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + Ct + D.$$

Aplicando las condiciones de contorno, se obtiene el valor de las constantes C, D .

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 + D = 0 \implies D = 0 \\ u(1) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + C = 0 \implies C = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$u(t) = \frac{t^3 + 3t^2 - 4t}{6}.$$

- A partir de los resultados obtenidos para el problema general (2.19), la función de Green asociada al problema (2.28) será de la forma (2.27)

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{u_1(t)u_2(s)}{K}, & \text{si } t \in [0, s] \\ \frac{u_1(s)u_2(t)}{K}, & \text{si } t \in [s, 1], \end{cases}$$

donde, por un lado, u_1 verifica $u_1''(t) = 0$ y $u_1(0) = 0$ y por otro lado, de forma análoga, u_2 verifica $u_2''(t) = 0$ y $u_2(1) = 0$. Por tanto, se puede tomar $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = t - 1$.

La constante K , aplicando (2.25), se corresponde con el Wronskiano de u_1 y u_2 (en este caso $p(t) \equiv 1$):

$$W[u_1, u_2](t) = \begin{vmatrix} t & t-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Por tanto,

$$G(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & \text{si } t \in [0, s] \\ s(t-1), & \text{si } t \in [s, 1], \end{cases} \quad (2.29)$$

es la función de Green asociada al problema (2.28).

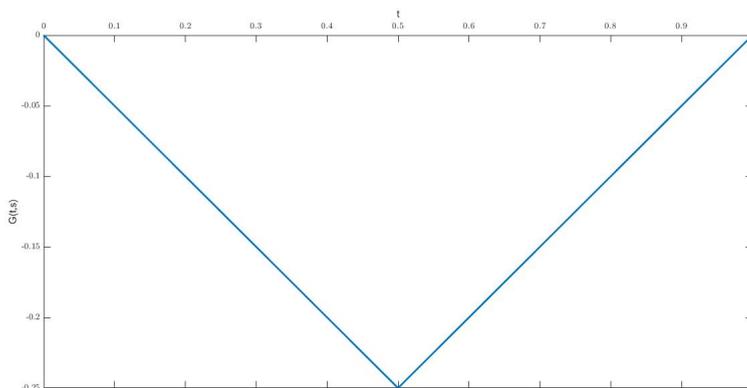


Figura 2.4: Gráfica de la función (2.29) para $s = 0,5$.

Finalmente, aplicando (2.20), resulta sencillo comprobar que

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 G(t, s)(s+1)ds = \int_0^t s(t-1)(s+1)ds + \int_t^1 t(s-1)(s+1)ds \\ &= \frac{2t^4 + t^3 - 3t^2}{6} + \frac{-2t^4 + 6t^2 - 4t}{6} = \frac{t^3 + 3t^2 - 4t}{6}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.2.2. Se considera el problema de contorno que representa las vibraciones de una cuerda tensa de longitud l , definido por

$$(\widetilde{P2}) \begin{cases} \mathcal{L}[u](t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) + k^2 u(t) = -f(t), & 0 < t < l \\ u(0) = 0 \\ u(l) = 0, \end{cases} \quad (2.30)$$

donde \mathcal{L} denota el operador diferencial lineal sujeto a las condiciones de contorno dadas (Ver [11, pp. 31, Chap. 2, Ex. 2.9]).

Solución. A partir de los resultados obtenidos para el problema general (2.19), la función de

Green asociada al problema (2.30) será de la forma (2.27)

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{u_1(t)u_2(s)}{K}, & \text{si } t \in [0, s] \\ \frac{u_1(s)u_2(t)}{K}, & \text{si } t \in [s, l], \end{cases}$$

donde, por un lado, u_1 verifica $\mathcal{L}[u_1](t) = 0$ y $H_a[u_1] = u_1(0) = 0$ y por otro lado, de forma análoga, u_2 verifica $\mathcal{L}[u_2](t) = 0$ y $H_b[u_2] = u_2(l) = 0$. Por tanto, se puede tomar $u_1(t) = \sin(kt)$ y $u_2(t) = \sin[k(t-l)]$ con $0 < t < l$.

La constante K , aplicando (2.25), se corresponde con el Wronskiano de u_1 y u_2 (en este caso $p(t) \equiv 1$).

$$W[u_1, u_2](t) = \begin{vmatrix} \sin(kt) & \sin[k(t-l)] \\ k \cos(kt) & k \cos[k(t-l)] \end{vmatrix} = k \sin(kl).$$

Recapitulando, se tiene que $u_1(t) = \sin(kt)$, $u_2(t) = \sin[k(t-l)]$ y $K = k \sin(kl)$. Por tanto,

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\sin(kt) \sin[k(s-l)]}{k \sin(kl)}, & \text{si } t \in [0, s] \\ \frac{\sin(ks) \sin[k(t-l)]}{k \sin(kl)}, & \text{si } t \in [s, l], \end{cases}$$

es la función de Green asociada al problema (2.30), la cual existe siempre que $\sin(kl) \neq 0$. Luego, aplicando (2.20), la solución de (2.30) se reduce al cálculo de la siguiente integral:

$$u(t) = \int_0^t \frac{\sin(kt) \sin[k(s-l)]}{k \sin(kl)} (-f(s)) ds + \int_t^l \frac{\sin(ks) \sin[k(t-l)]}{k \sin(kl)} (-f(s)) ds.$$

A modo de conclusión, recalcar que todas las funciones de Green halladas en esta sección verifican algunas propiedades.

Proposición 2.3.2.1. (Propiedades de la función de Green).

- **Simetría:** La función de Green es simétrica, es decir,

$$G(t, s) = G(s, t)$$

para cada $t, s \in [a, b]$.

- **Continuidad:** La función de Green es continua en el punto $t = s$. Es decir:

$$\lim_{t \rightarrow s^+} G(t, s) = \lim_{t \rightarrow s^-} G(t, s).$$

Demostración. Lo comprobaremos para la función hallada en el Ejemplo 2.3.2.1. Sea $G(t, s)$ la

función de Green:

$$G(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & \text{si } t \in [0, s] \\ s(t-1), & \text{si } t \in [s, 1]. \end{cases} \quad (2.31)$$

- La simetría se verifica fácilmente intercambiando las variables.
- Veamos que (2.31) es continua en el punto $t = s$:

$$\lim_{t \rightarrow s^+} G(t, s) = \lim_{t \rightarrow s^+} s(t-1) = s(s-1) = \lim_{t \rightarrow s^-} t(s-1) = \lim_{t \rightarrow s^-} G(t, s)$$

(La prueba para el Ejemplo 2.3.2.2 se realiza de forma análoga). □

2.3.3. La función de Green en el sentido de las distribuciones

Partiendo de la función de Green (2.27) hallada para el problema de contorno (2.19)

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{u_1(t)u_2(s)}{K}, & \text{si } t \in [a, s] \\ \frac{u_1(s)u_2(t)}{K}, & \text{si } t \in [s, b], \end{cases}$$

se va a reinterpretar dicha función utilizando ahora la Delta de Dirac. Como ya se comentó en la introducción, la función de Green $G(t, s)$ para un operador \mathcal{L} , se puede definir como la solución de una EDO o EDP, cuando el término no homogéneo es la Delta de Dirac. A continuación, lo probaremos (Ver [4, Cap 7, Sección 7.7]).

Teorema 2.3.3.1. *Sea G la función de Green hallada para (2.19), \mathcal{L} el operador diferencial lineal asociado, entonces:*

$$\mathcal{L}[G(\cdot, s)](t) = \delta(t - s),$$

donde δ es la Delta de Dirac en el punto s .

Demostración. En primer lugar, aplicando la Definición A.1.1 derivamos dos veces $G(t, s)$ en el sentido de las distribuciones con respecto a la variable t .

$$\frac{dG}{dt}(t, s) = \begin{cases} \frac{u_1'(t)u_2(s)}{K}, & \text{si } t \in [a, s] \\ \frac{u_1(s)u_2'(t)}{K}, & \text{si } t \in [s, b] \end{cases}$$

Multiplicando la expresión por $p(t)$:

$$p(t) \frac{dG}{dt}(t, s) = \begin{cases} \frac{p(t)u_1'(t)u_2(s)}{K}, & \text{si } t \in [a, s] \\ \frac{p(t)u_1(s)u_2'(t)}{K}, & \text{si } t \in [s, b] \end{cases}$$

Ahora, derivando de nuevo, sea

$$p(t) \frac{dG}{dt}(t, s) = f_1(t, s),$$

aplicando (A.1), resulta que para cada $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ ¹¹

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1'(t, s) \varphi(t) dt &= - \int_a^b f_1(t, s) \varphi'(t) dt \\ &= - \int_a^s \left(\frac{p(t)u_1'(t)u_2(s)}{K} \right) \varphi'(t) dt - \int_s^b \left(\frac{p(t)u_1(s)u_2'(t)}{K} \right) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes cada integral, teniendo en cuenta que como $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$, se tiene que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_a^s \left(\frac{p(t)u_1'(t)u_2(s)}{K} \right) \varphi'(t) dt &= \left[\frac{p(t)u_1'(t)u_2(s)}{K} \varphi(t) \right]_a^s - \int_a^s \varphi(t) \left(\frac{(p(s)u_1'(s))'u_2(s)}{K} \right) dt \\ &= \left[\frac{p(s)u_1'(s)u_2(s)}{K} \varphi(s) \right] \\ &\quad - \int_a^s \varphi(t) \left(\frac{(p(t)u_1'(t))'u_2(s)}{K} \right) dt, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \int_s^b \left(\frac{p(t)u_1(s)u_2'(t)}{K} \right) \varphi'(t) dt &= \left[\frac{p(t)u_1(s)u_2'(t)}{K} \varphi(t) \right]_s^b - \int_s^b \varphi(t) \left(\frac{u_1(s)(p(t)u_2'(t))'}{K} \right) dt \\ &= \left[- \frac{p(s)u_1(s)u_2'(s)}{K} \varphi(s) \right] \\ &\quad - \int_s^b \varphi(t) \left(\frac{u_1(s)(p(t)u_2'(t))'}{K} \right) dt. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Por otro lado, aplicando (2.25), el salto en la discontinuidad $t = s$ vale:

$$\frac{p(t)W[u_1, u_2](t)}{K} = 1 \quad \forall t \in [a, b]$$

entonces:

$$\left(\frac{p(s)u_1'(s)u_2(s)}{K} \right) \varphi(s) - \left(\frac{p(s)u_1(s)u_2'(s)}{K} \right) \varphi(s) = \left(\frac{p(s)W[u_1, u_2](s)}{K} \right) \varphi(s) = \varphi(s). \quad (2.34)$$

¹¹Recordar (A.2).

Uniendo (2.32) y (2.33), y aplicando la relación (2.34), se tiene

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'_1(t, s)\varphi(t)dt &= -\int_a^s \left(\frac{p(t)u'_1(t)u_2(s)}{K}\right)\varphi'(t)dt - \int_s^b \left(\frac{p(t)u_1(s)u'_2(t)}{K}\right)\varphi'(t)dt \\
&= \left[\frac{p(s)W[u_1, u_2](s)}{K}\right]\varphi(s) + \int_a^s \varphi(t)\left(\frac{(p(t)u'_1(t))'u_2(s)}{K}\right)dt \\
&\quad + \int_s^b \varphi(t)\left(\frac{u_1(s)(p(t)u'_2(t))'}{K}\right)dt \\
&= \varphi(s) + \int_a^s \varphi(t)\left(\frac{(p(t)u'_1(t))'u_2(s)}{K}\right)dt + \int_s^b \varphi(t)\left(\frac{u_1(s)(p(t)u'_2(t))'}{K}\right)dt \\
&= \int_a^b \delta(t-s)\varphi(t)dt + \int_a^s \varphi(t)\left(\frac{(p(t)u'_1(t))'u_2(s)}{K}\right)dt \\
&\quad + \int_s^b \varphi(t)\left(\frac{u_1(s)(p(t)u'_2(t))'}{K}\right)dt.
\end{aligned}$$

Ahora, aplicando las Propiedades 2.1.4.1 de la Delta de Dirac¹²:

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dG}{dt}(t, s)\right)(t, s) = \begin{cases} \frac{(p(t)u'_1(t))'u_2(s)}{K} & \text{si } t \in [a, s] \\ \frac{u_1(s)(p(t)u'_2(t))'}{K} & \text{si } t \in [s, b] \end{cases} + \delta(t-s). \quad (2.35)$$

En vista de (2.17),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[G(\cdot, s)](t) &= \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dG}{dt}(t, s)\right)(t, s) + q(t)G(t, s) \\
&= \begin{cases} \frac{((p(t)u'_1(t))' + q(t)u_1(t))u_2(s)}{K} & \text{si } t \in [a, s] \\ \frac{u_1(s)((p(t)u'_2(t))' + q(t)u_2(t))}{K} & \text{si } t \in [s, b] \end{cases} + \delta(t-s). \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[u_1](t) = \mathcal{L}[u_2](t) = 0$, se anula¹³ el primer término de (2.36) y por tanto, podemos concluir que:

$$\mathcal{L}[G(\cdot, s)](t) = \delta(t-s).$$

Aplicando formalmente el operador \mathcal{L} a la expresión (2.20) se obtiene:

$$\mathcal{L}[u](t) = \int_a^b \mathcal{L}[G(\cdot, s)](t)f(s)ds = \int_a^b \delta(t-s)f(s)ds = {}^{14}f(t), \quad \forall t \in [a, b].$$

□

A continuación, se va a estudiar de nuevo el Ejemplo 2.3.2.1, interpretado esta vez en el sentido de las distribuciones.

¹² $\int_a^b \delta(t-s)\varphi(t)dt = \varphi(s)$

¹³ $\mathcal{L}[u_1](t) = (p(t)u'_1(t))' + q(t)u_1(t) = 0$ y $\mathcal{L}[u_2](t) = (p(t)u'_2(t))' + q(t)u_2(t) = 0$.

¹⁴ Aplicando las Propiedades 2.1.4.1 de la Delta de Dirac.

Ejemplo 2.3.3.1. Dado el problema de contorno (2.28),

$$(\widetilde{P1}) \begin{cases} \mathcal{L}[u](t) = u''(t) = t + 1, \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

estudiado en el Ejemplo 2.3.2.1, vamos a re-interpretar la función de Green obtenida, utilizando la Delta de Dirac.

Solución. En el Ejemplo 2.3.2.1 se probó que

$$G(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & \text{si } t \in [0, s] \\ s(t-1), & \text{si } t \in [s, 1] \end{cases}$$

es la función de Green asociada a dicho problema. Por tanto, en virtud de (2.20), la única solución del mismo viene dada por la siguiente integral

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)(s+1)ds. \quad (2.37)$$

Siguiendo el procedimiento descrito para el caso general, en primer lugar, se deriva dos veces $G(t, s)$ en el sentido de las distribuciones (Recordar la Definición A.1.1 del Anexo A).

$$\frac{dG}{dt}(t, s) = \begin{cases} s-1, & \text{si } t \in [0, s] \\ s, & \text{si } t \in [s, 1]. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = t-1$, y por tanto $u_1''(t) = u_2''(t) = 0$, la expresión obtenida para el caso general (2.35) se reduce a:

$$\frac{d^2G}{dt^2}(t, s) = \begin{cases} \frac{u_1''(t)u_2(s)}{K}, & \text{si } t \in [a, s] \\ \frac{u_1(s)u_2''(t)}{K}, & \text{si } t \in [s, b] \end{cases} + \delta(t-s) = \delta(t-s)$$

Finalmente, aplicando la derivación bajo el signo integral¹⁵, se deriva dos veces con respecto a la variable t la expresión (2.37):

$$u''(t) = \int_0^1 \frac{d^2G}{dt^2}(t, s)(s+1)ds = \int_0^1 \delta(t-s)(s+1)ds = {}^{16}t+1, \quad t \in [0, 1].$$

¹⁵Se puede justificar con el Teorema C.2.1.

¹⁶Aplicando las Propiedades 2.1.4.1 de la Delta de Dirac.

Capítulo 3

EDPs Elípticas: Ecuaciones de Laplace y Poisson

En este capítulo nos centraremos en la determinación de la función de Green para el famoso problema de Dirichlet, asociado a una EDP de tipo elíptico, la Ecuación de Laplace, y a su versión no homogénea, la Ecuación de Poisson. El problema de obtener la solución de una EDP sujeta a unas determinadas condiciones de contorno mediante las funciones de Green, es análogo al descrito para las EDO en el Capítulo 2. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado esencialmente [2], [7].

Definición 3.1. (*Ecuación de Laplace de dimensión n*). Sea Ω abierto tal que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^2(\Omega)$ y sea Δu el operador Laplaciano D.1.1 asociado, se define la ecuación de Laplace de dimensión n de la siguiente forma:

$$\Delta u = 0 \quad (\geq 0, \leq 0)^1. \quad (3.1)$$

Definición 3.2. (*Función armónica*). Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n , y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función real de n variables, u es una función armónica en Ω , si $u \in C^2(\Omega)$ y satisface la ecuación de Laplace (3.1) en Ω .

Observación 3.1. La definición 3.2 es análoga para funciones subarmónicas y superarmónicas. Si u verifica $\Delta u \geq 0$ se denomina función subarmónica, y si $\Delta u \leq 0$, función superarmónica (Ver Anexo D).

Una vez introducido el concepto de función armónica, se estudiarán algunas de sus propiedades, que serán de gran utilidad en la determinación de la función de Green.

¹En el Anexo D se explica el significado de las desigualdades.

3.1. Resultados previos

Como punto de partida, se comenzará con el Teorema de la Divergencia en \mathbb{R}^n .

Teorema 3.1.1. (Teorema de la Divergencia en \mathbb{R}^n). [7, Pág 13, Cap 2]. Sea Ω_0 un dominio acotado de frontera $\partial\Omega_0$, de clase C^1 . Sea ν la normal exterior a $\partial\Omega_0$, para cualquier campo vectorial $w \in C^1(\overline{\Omega_0}) \cap C^1(\Omega_0)$ se tiene:

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} w \, dx = \int_{\partial\Omega_0} w \cdot \nu \, ds, \quad (3.2)$$

donde ds denota el diferencial del área de dimensión $n-1$ en $\partial\Omega_0$.

En particular, si $u \in C^1(\overline{\Omega_0}) \cap C^2(\Omega_0)$, y se toma $w = \nabla u$ se tiene:

$$\int_{\Omega_0} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega_0} \nabla u \cdot \nu \, ds = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds. \quad (3.3)$$

A continuación, se introducirán algunos teoremas que serán de ayuda en la caracterización de las funciones armónicas.

Teorema 3.1.2. (Desigualdades de valor medio). Sea Ω abierto tal que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u(x) = 0$ (≥ 0 , ≤ 0) en Ω . Entonces, para toda bola $B_R(y) \subset \Omega$ se tiene:

$$u(y) = (\leq, \geq) \frac{1}{nw_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(x) \, ds(x). \quad (3.4)$$

$$u(y) = (\leq, \geq) \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x) \, dx, \quad (3.5)$$

donde w_n denota el volumen de la bola unidad en \mathbb{R}^n . Para funciones armónicas, el Teorema dice que el valor de la función en el centro de la bola $B_R(y)$, es igual al valor medio integral sobre la superficie frontera y sobre la propia $B_R(y)$.

Demostración. Probaremos cada desigualdad por separado.

1. En primer lugar, se procederá con la prueba de (3.4). Teniendo en cuenta que $\int_{\partial B_R(y)} u(x) \, ds(x)$ se corresponde con:

$$\int_{\partial B_R(y)} u(x) \, ds(x) = \frac{1}{nw_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(x) \, ds(x).$$

Si se introducen coordenadas radiales y angulares

$$r = |x - y|, \quad w = \frac{x - y}{r}, \quad u(x) = u(y + rw)$$

²Usando $\operatorname{div} w = \operatorname{div} \nabla u = \Delta u$ en la ecuación (3.2).

³Usando la Definición D.1 de derivada direccional de u en la dirección de ν .

aplicando el cambio en la integral para $B_r(y)$ donde $r \in (0, R]$, se tiene:

$$\phi(r) = \int_{\partial B_r(y)} u(x) ds(x) = \int_{\partial B_1(0)} u(y + rw) ds(w). \quad (3.6)$$

Continuamos aplicando la derivación bajo el signo integral⁴ a (3.6):

$$\phi'(r) = \left(\int_{\partial B_1(0)} u(y + rw) ds(w) \right)' = \int_{\partial B_1(0)} (u(y + rw))' ds(w).$$

Teniendo en cuenta que ν es el vector normal exterior a $\partial B_R(y)$ en y , de modo que $\|\nu\| = 1$, se deduce que ν coincide con la dirección de la recta $x - y$. Por lo que, como ν es unitario y $\|x - y\| = r$

$$\nu = \frac{x - y}{\|x - y\|} = \frac{x - y}{r} = w.$$

Por otro lado, aplicando (D.1)

$$(u(y + rw))' = \frac{\partial u}{\partial \nu}(y + rw) = \nabla u(y + rw) \cdot w = \nabla u(y + rw) \cdot \frac{x - y}{r}, \quad (3.7)$$

luego, a partir de (3.7), se tiene

$$\phi'(r) = \int_{\partial B_r(y)} \nabla u(x) \cdot \frac{x - y}{r} ds(x) = \int_{\partial B_r(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) ds(x).$$

Si se aplica ahora la primera identidad de Green (D.11)

$$\int_{\partial B_r(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) ds(x) = \frac{R}{n} \int_{B_r(y)} \Delta u(x) dx = {}^5(\geq, \leq) 0.$$

Entonces, ϕ es una función constante:

$$\phi'(r) = 0 \implies \phi(r) = C \quad \forall r \in (0, R].$$

Por tanto, sea $t \in (0, R)$, se considera la bola $B_t(y)$

$$C = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B_t(y)} u(x) ds(x) = \int_{\partial B_R(y)} u(x) ds(x) = u(y).$$

2. Ahora, para la prueba de (3.5), sea $p \in (0, R]$, teniendo en cuenta que por (3.4) se tiene

$$nw_n p^{n-1} u(y) = (\leq, \geq) \int_{\partial B_p(y)} u(x) ds(x)$$

⁴Se puede justificar con el Teorema C.2.1.

⁵ $\Delta u = 0$ por hipótesis.

haciendo uso de las coordenadas polares enunciadas en el Anexo D

$$\begin{aligned} \int_{B_R(y)} u(x) dx &= \int_0^R \left(\int_{\partial B_p(y)} u(x) ds(x) \right) dp \\ &= u(y) \int_0^R n w_n p^{n-1} dp = n w_n \left[\frac{p^n}{n} \right]_0^R = (\leq, \geq) w_n R^n u(y). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Despejando la expresión anterior (3.8)

$$u(y) = (\leq, \geq) \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x) dx.$$

□

3.1.1. Principio del máximo y del mínimo

Con la ayuda del Teorema 3.1.2, se obtendrá la versión fuerte del principio del máximo (y del mínimo), para funciones subarmónicas. Para la elaboración de esta sección además de las fuentes ya citadas, nos hemos servido de [1].

Teorema 3.1.1.1. (Principio fuerte del máximo (mínimo)). *Sea $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Se supone que existe un punto $y \in \Omega$ para el cual $u(y) = \sup_{\Omega} u$ ($\inf_{\Omega} u$), entonces u es constante. Es decir, una función armónica no puede tener un máximo o mínimo interior a no ser que sea constante.*

Demostración. Sea $\Delta u \geq 0$ en Ω . Se denota $M = \sup_{\Omega} u$. Entonces, se define el conjunto

$$\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\}.$$

Se supone en primer lugar que, por hipótesis, $\Omega_M \neq \emptyset$ (es decir, existen puntos de máximo). Además, como u es continua, Ω_M es cerrado en relación a Ω con respecto a la topología inducida en Ω . Es decir, se puede ver el conjunto Ω_M como

$$\Omega_M = u^{-1}(\{M\}) \cap \Omega$$

donde $u^{-1}(\{M\})$ es un conjunto cerrado en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, por tanto, $\Omega_M \subset \Omega$ es un conjunto cerrado en Ω .

Veáse a continuación que Ω_M es también un conjunto abierto. Sea $z \in \Omega_M$, como Ω es un conjunto abierto, existe un conjunto $B_{\bar{p}}(z) \subset \Omega$ con $\bar{p} > 0$ tal que aplicando (3.5) a la función subarmónica $u - M$ en la bola $B_p(z) \subset \Omega$ se obtiene

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{w_n p^n} \int_{B_p(z)} (u(x) - M) dx \leq 0, \quad \text{con } x \in \Omega, \quad \forall p \in (0, \bar{p}].$$

Por tanto, necesariamente

$$u(x) - M = 0 \implies u(x) = M \text{ en } B_p(z) \text{ cualquiera que sea } p \in (0, \bar{p}].$$

En consecuencia, $B_{\bar{p}}(z) \subset \Omega_M$. Es decir, para todo $z \in \Omega_M$ existe un conjunto abierto $B_{\bar{p}}(z)$ de modo que $z \in B_{\bar{p}}(z) \subset \Omega_M$. Esto significa que, el conjunto Ω_M es también un conjunto abierto con respecto a la topología inducida en Ω . Por lo tanto, $\Omega = \Omega_M$. \square

Observación 3.1.1.1. *La prueba del Teorema 3.1.1.1 para funciones superarmónicas se sigue de remplazar u por $-u$ en la demostración anterior.*

Los principios fuertes del máximo y del mínimo implican estimaciones globales, llamadas principio débil (del máximo y del mínimo respectivamente).

Teorema 3.1.1.2. (Principio débil del máximo (mínimo)). *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ con $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) en Ω . Entonces, dado Ω acotado:*

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\inf_{\bar{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u \right), \quad (3.9)$$

en consecuencia, para u armónica:

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad x \in \Omega.$$

Demostración. Como Ω es un conjunto acotado, se sigue que $\bar{\Omega}$ es un conjunto compacto. Por otro lado se tiene que $\Omega \subset \bar{\Omega}$, por lo que, por el Teorema de Weierstrass⁶, existe el máximo (mínimo) de u en $\bar{\Omega}$. Es decir, $\sup_{\bar{\Omega}} u$ se alcanza donde se alcance el máximo de $\bar{\Omega}$. Por el Teorema 3.1.1.1 el supremo de u no puede estar en Ω salvo que u sea constante.

En caso de que u no sea una función constante, el supremo (ínfimo) de u en $\bar{\Omega}$ se alcanzará en $\partial\Omega$ ⁷, por lo que, efectivamente:

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\inf_{\bar{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

En consecuencia, para u armónica,

$$\inf_{\bar{\Omega}} u \leq u(x) \leq \sup_{\bar{\Omega}} u \implies \inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad x \in \Omega.$$

\square

⁶Cualquier función continua en un compacto tiene máximo (mínimo) global.

⁷Recuérdese que $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Teorema 3.1.1.3. *Sea $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta u = \Delta v$ en Ω , $u = v$ en $\partial\Omega$, entonces se tiene que $u = v$ en Ω .*

Demostración. Sea $w = u - v$, entonces, por hipótesis $\Delta u = \Delta v$ en Ω , luego:

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v = 0 \text{ en } \Omega.$$

Por otro lado, como $u = v$ en $\partial\Omega$:

$$w = u - v = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Por tanto, aplicando el Teorema 3.1.1.2 se tiene que:

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w = 0 \implies w = 0 \text{ en } \Omega \implies u = v \text{ en } \Omega.$$

□

3.2. Representación de Green

Como preludeo al estudio de la existencia de soluciones, se introducen ahora algunas consecuencias del Teorema de la Divergencia 3.1.1 en \mathbb{R}^n , conocidas como *identidades de Green*.

3.2.1. Identidades de Green

Definición 3.2.1.1. (Primera identidad de Green). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio para el cual se cumple el Teorema 3.1.1 y sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Sea ν el vector normal exterior a $\partial\Omega$, se toma $w = \nabla u \cdot \nu$ en (3.2), y se aplican (3.3) y la regla de la cadena⁸,*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w = \int_{\Omega} \nu \cdot \Delta u \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds, \quad (3.10)$$

si se intercambian u y v en (3.10):

$$\int_{\Omega} u \cdot \Delta v \, dx + \int_{\Omega} Dv \cdot Du \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds, \quad (3.11)$$

y se restan las expresiones (3.10) y (3.11), se obtiene la *segunda identidad de Green*:

Definición 3.2.1.2. (Segunda identidad de Green). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio para el cual se cumple el teorema 3.1.1 y sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, sea ν el vector normal exterior a $\partial\Omega$.*

⁸ $\operatorname{div} w = \operatorname{div}(\nabla u \cdot \nu) = \nu \cdot \Delta u + \nabla u \cdot Dv.$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds. \quad (3.12)$$

3.2.2. Solución fundamental de la Ecuación de Laplace

Como punto de partida a la búsqueda de soluciones para la Ecuación de Laplace, una buena estrategia para comenzar es identificar primero algunas soluciones explícitas y después, siempre que la EDP sea lineal, ensamblar soluciones más complicadas a partir de las específicas anotadas previamente. Suele ser conveniente fijarse en funciones con ciertas propiedades de simetría. Por tanto, véase en primer lugar que la Ecuación de Laplace es invariante ante rotaciones.

Proposición 3.2.2.1. *La Ecuación de Laplace (3.1), $\Delta u = 0$, es invariante ante rotaciones, esto es, si O es una matriz ortogonal de dimensión $n \times n$ (con $n \in \mathbb{N}$) y se define:*

$$v(x) = u(Ox) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces $\Delta v = 0$.

Demostración. Sea $O = [o_{ij}]$ con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ una matriz ortogonal, se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} o_{ij}. \quad (3.13)$$

Como O es una matriz ortogonal, efectivamente se verifica

$$OO^T = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} & \cdots & o_{1n} \\ o_{21} & o_{22} & \cdots & o_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{n1} & o_{n2} & \cdots & o_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} o_{11} & o_{21} & \cdots & o_{n1} \\ o_{12} & o_{22} & \cdots & o_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{1n} & o_{2n} & \cdots & o_{nn} \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^n o_{ij} o_{kj} \right)_{i,k} = I_n.$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^n o_{ij} o_{kj} = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases} \quad (3.14)$$

Observamos que a partir de (3.13) se tiene la siguiente relación:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} o_{ij} o_{kj}. \quad (3.15)$$

Por lo tanto, aplicando en primer lugar (3.15)

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} o_{ij} o_{kj} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} o_{ij} o_{kj} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \left(\sum_{j=1}^n o_{ij} o_{kj} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \delta_{i,k}.\end{aligned}$$

Ahora, se pueden distinguir dos casos en función de (3.14).

- Si $i = k$, entonces $\delta_{i,k} = 1$ luego

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \delta_{i,k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u = 0.$$

- Si $i \neq k$, entonces $\delta_{i,k} = 0$ y se sigue trivialmente el resultado

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \delta_{i,k} = 0.$$

□

El hecho de que la Ecuación de Laplace sea invariante ante rotaciones, probado en la Proposición 3.2.2.1, sugiere empezar a buscar soluciones radiales, esto es, funciones de $r = |x - y| = |z|$.

Proposición 3.2.2.2. *La solución fundamental de la Ecuación de Laplace (3.1) es una función radial, es decir, $v : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que $u(z) = v(r)$, de la forma:*

$$v(r) = \begin{cases} \frac{b}{r^{n-2}} + c, & \text{si } n > 2 \\ b \log(r) + c, & \text{si } n = 2, \end{cases}$$

donde $r = |x - y| = |z| = (z_1^2 + \dots + z_n^2)^{\frac{1}{2}}$ y, b, c son constantes⁹ (Ver [2, pp 20, Section 2.2.1]).

Demostración. Se trata de encontrar una solución u de la ecuación de Laplace (3.1) de la forma:

$$u(z) = v(r)$$

donde $r = |z| = (z_1^2 + \dots + z_n^2)^{\frac{1}{2}}$ y v debe ser elegido de forma que $\Delta u = 0$. En primer lugar, nótese que para $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial r}{\partial z_i} = \frac{1}{2} (z_1^2 + \dots + z_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2z_i = \frac{z_i}{(z_1^2 + \dots + z_n^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{z_i}{r} \quad (z \neq 0).$$

⁹El valor de las constantes b, c lo determinaremos a continuación.

Por tanto, aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial u}{\partial z_i} = v'(r) \frac{\partial r}{\partial z_i} = v'(r) \frac{z_i}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} = v''(r) \frac{z_i}{r} \cdot \frac{z_i}{r} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{z_i}{r^2} \cdot \frac{z_i}{r} \right) = v''(r) \frac{z_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{z_i^2}{r^3} \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} = v''(r) \left(\frac{z_1^2 + \dots + z_n^2}{r^2} \right) + v'(r) \frac{1}{r} \left(\left(1 - \frac{z_1^2}{r^2} \right) + \dots + \left(1 - \frac{z_n^2}{r^2} \right) \right) \\ &= v''(r) \left(\frac{z_1^2 + \dots + z_n^2}{r^2} \right) + v'(r) \frac{1}{r} \left(n - \frac{z_1^2 + \dots + z_n^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $r = |z| = (z_1^2 + \dots + z_n^2)^{\frac{1}{2}}$, se simplifica

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Por lo que, $\Delta u = 0$, sí, y solo sí:

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0 \implies \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r}. \quad (3.16)$$

Si $v'(r) \neq 0$ se deduce:

$$(\log(v'(r)))' = {}^{10} \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r}$$

integrando

$$\log(v'(r)) = \int \frac{1-n}{r} dr = (1-n) \log(r) \implies v'(r) = e^{(1-n)\log(r)} = e^{\log(r^{1-n})} = r^{1-n}.$$

Luego, $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ para cualquier constante a . En consecuencia, si $r > 0$, se tiene

$$v(r) = \begin{cases} \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{si } n > 2 \\ b \log(r) + c & \text{si } n = 2 \end{cases} \quad (3.17)$$

donde b, c son constantes. □

Todas estas consideraciones, motivan la introducción de la *solución fundamental de la Ecuación de Laplace*.

¹⁰Recuérdese que la derivada de un logaritmo es $(\log(v(r)))' = \frac{v'(r)}{v(r)}$.

Definición 3.2.2.1. (*Solución fundamental de la Ecuación de Laplace*). [2, pp 22].

La función

$$\Gamma(z) = \Gamma(|z|) := \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} |z|^{2-n} & \text{si } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log|z| & \text{si } n = 2. \end{cases} \quad (3.18)$$

definida para $z \in \mathbb{R}^n$, con $z = x - y \neq 0$, es la solución fundamental de la Ecuación de Laplace.

Observación 3.2.2.1. Escribimos $\Gamma(x - y) = \Gamma(|x - y|)$ para enfatizar que la solución fundamental (3.18) es radial.

Observación 3.2.2.2. La elección de las constantes viene motivada por los cálculos posteriores en la resolución del problema de Poisson (Ver [2, pp 23, Thm 1]).

A continuación, calcularemos estimaciones para las derivadas de la solución fundamental (3.18) que serán de ayuda en la simplificación de algunos resultados que se introducirán más adelante en el capítulo.

Proposición 3.2.2.3. (*Estimaciones de las derivadas de la solución fundamental*).

Sea $\Gamma(z)$ la solución fundamental de la Ecuación de Laplace (3.18), siempre que $z \neq 0$, podemos obtener las siguientes estimaciones:

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}(z) \right| \leq \frac{C}{|z|^{n-1}} \quad (3.19)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z_i^2}(z) \right| \leq \frac{C}{|z|^n}, \quad (3.20)$$

para cualquier constante $C > 0$.

Demostración. Se pueden obtener las derivadas primeras y segundas de (3.18) respecto a z operando tal como sigue:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}(z) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} (2-n) |z|^{1-n} = \frac{1}{n\omega_n} |z|^{1-n}. \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z_i^2}(z) = \frac{1}{n\omega_n} (1-n) |z|^{-n} = \left(\frac{1}{n\omega_n} - \frac{1}{\omega_n} \right) |z|^{-n}. \quad (3.22)$$

A partir de (3.21) y (3.22), siempre que $z \neq 0$:

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}(z) \right| \leq \frac{1}{n\omega_n} |z|^{1-n} \leq \frac{C}{|z|^{n-1}}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z_i^2}(z) \right| \leq \frac{1}{n\omega_n} |z|^{1-n} \leq \frac{C}{|z|^n}$$

con $C > 0$ una constante. □

3.2.3. Derivación de la función de Green

El objetivo del capítulo era la determinación de la función de Green asociada al famoso *Problema de Dirichlet*¹¹. Dicho problema es un problema de contorno que busca encontrar una función que satisfaga una EDP en un dominio dado y que también verifique una condición¹² de contorno prescrita en la frontera del dominio. En particular, para la Ecuación de Laplace, sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1 , sea $g \in C(\partial\Omega)$, tenemos:

$$(PDirichlet1) \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.23)$$

También estudiaremos el *Problema de Dirichlet-Poisson*, que es análogo a (3.23), pero la EDP involucrada esta vez es la versión no homogénea de la Ecuación de Laplace (3.1), la Ecuación de Poisson:

$$(PDirichlet2) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.24)$$

con f una función continua. Antes de comenzar con la búsqueda de la función de Green que permita resolver este problema, veamos, apoyándonos en algunos de los resultados previos establecidos en la Sección 3.1, que la solución al Problema de Dirichlet, en caso de existir, es única.

Teorema 3.2.3.1. (Unicidad de solución). *Sea el problema (3.24) donde $g \in C(\partial\Omega)$ y $f \in C(\Omega)$, existe como máximo una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ de (3.24).*

Demostración. Este resultado es consecuencia directa del Principio fuerte del máximo 3.1.1.1 y se prueba de forma análoga al Teorema 3.1.1.3. \square

Teorema 3.2.3.2. (Fórmula de representación de Green). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio para el cual se cumple el Teorema 3.1.1 y sea $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Sea ν el vector normal exterior a $\partial\Omega$ y $\Gamma(x-y)$ la solución fundamental de la Ecuación de Laplace (3.18), se conoce como Fórmula de Representación de Green a la siguiente expresión*

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial\nu}(x) \right) ds(x) + \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx \quad (y \in \Omega). \quad (3.25)$$

Demostración. La singularidad existente en $z = 0$ previene de usar Γ en vez de v en la segunda identidad de Green (3.12). Una forma de solventar este problema es reemplazar Ω por $\Omega - B_\rho$ donde $B_\rho = B_\rho(y)$ para $\rho > 0$ suficientemente pequeño. Sea $y \in \Omega$ un punto fijo, ν la normal

¹¹Puede resolverse para muchas EDPs, aunque originalmente fue planteado para la ecuación de Laplace.

¹²Conocida como condición de Dirichlet.

exterior a $\partial(\Omega - B_\rho)$, se aplica la Segunda Identidad de Green (3.12) en la región $\Omega - B_\rho$

$$\int_{\Omega - B_\rho} (\Gamma(x - y)\Delta u(x) - u(x)\Delta\Gamma(x - y))dx = \int_{\partial(\Omega - B_\rho)} \left(\Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) \right) ds(x).$$

Teniendo en cuenta que Γ es solución de la Ecuación de Laplace, se verifica que $\Delta\Gamma = 0$, luego

$$\begin{aligned} \int_{\Omega - B_\rho} (\Gamma(x - y)\Delta u(x)) dx &= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) \right) ds(x) \\ &\quad + \int_{\partial B_\rho} \left(\Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) \right) ds(x). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Veáse ahora que hacer con $\int_{\partial B_\rho} \left(\Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) \right) ds(x)$. Se analizará el comportamiento de cada término por separado, donde se usarán las Desigualdades de Valor Medio 3.1.2.

En primer lugar, utilizando (3.4), si $\rho \rightarrow 0$, se cumple:

$$\int_{\partial B_\rho} \Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) ds(x) = \Gamma(\rho) \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial\nu}(x) ds(x) \leq n\omega_n\rho^{n-1} \Gamma(\rho) \sup_{B_\rho} |Du| \rightarrow 0.$$

Por otro lado, teniendo también en cuenta (3.4), si $\rho \rightarrow 0$, se cumple:

$$\int_{\partial B_\rho} u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) ds(x) = -\Gamma'(\rho) \int_{\partial B_\rho} u(x) ds(x) \leq \frac{-1}{n\omega_n\rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho} u(x) ds(x) \rightarrow -u(y).$$

Por lo tanto, haciendo $\rho \rightarrow 0$ en (3.26)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Gamma(x - y)\Delta u(x)) dx &= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) \right) ds(x) \\ &\quad + \int_{\partial B_\rho} \left(\Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) \right) ds(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) \right) ds(x) - u(y). \end{aligned}$$

Despejando la expresión anterior se obtiene el resultado:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) - \Gamma(x - y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) \right) ds(x) + \int_{\Omega} \Gamma(x - y)\Delta u(x) dx.$$

□

Definición 3.2.3.1. (Potencial Newtoniano). Para una función f acotada e integrable, la integral $\int_{\Omega} \Gamma(x - y)f(x) dx$ se conoce como Potencial Newtoniano con densidad f .

Observación 3.2.3.1. Si u tiene soporte compacto en \mathbb{R}^n , entonces (3.25) conduce a la fre-

cuentemente usada formula de representación:

$$u(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x - y) \Delta u(x) dx.$$

Demostración. Acorde con la Definición D.4 se sabe que

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$$

lo que implica que $u = 0$ fuera del soporte de la función. Se trabajará con $\overline{\{u \neq 0\}}$, para simplificar la notación, en el resto de la prueba. El conjunto $\{u \neq 0\}$ es un conjunto abierto, ya que se puede expresar como la contraimagen de un conjunto abierto por una aplicación continua u

$$\{u \neq 0\} = u^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, \infty)),$$

entonces $u = 0$ en $\partial(\{u \neq 0\}) = \partial(\overline{\{u \neq 0\}})$ y por tanto $u = 0$ en $\partial\Omega$. Aplicando esto a (3.25), se anula la integral en $\partial\Omega$ y se concluye el resultado. \square

Observación 3.2.3.2. Para $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una función armónica ($\Delta u = 0$), también se tiene la siguiente fórmula de representación:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x - y) - \Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial\nu}(x) \right) ds(x) \quad (y \in \Omega).$$

3.2.3.1. Definición de la función de Green

La fórmula anterior (3.25) permite resolver $u(y)$ si se conocen los valores de Δu en Ω y los valores de $u, \frac{\partial u}{\partial\nu}$, en $\partial\Omega$. Sin embargo, la derivada normal $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ a lo largo de $\partial\Omega$ es desconocida. Por lo tanto, se debe modificar de alguna manera (3.25) para eliminar este término. La idea es introducir, para y fijo, una función que actúe de *función correctora* tal que $h^y = h^y(x)$ y resuelva el problema de contorno siguiente:

$$\begin{cases} \Delta h^y = 0 & \text{en } \Omega \\ h^y = \Gamma(x - y) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.27)$$

Aplicando la segunda identidad de Green (3.12):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h^y \Delta u(x) dx &= \int_{\partial\Omega} \left(h^y(x) \frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x) \frac{\partial h^y}{\partial\nu}(x) \right) ds(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x) \frac{\partial h^y}{\partial\nu}(x) \right) ds(x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

En virtud de (3.28), podemos introducir la función de Green para una región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 3.2.3.1.1. (*Función de Green para una región Ω*). Sea $\Gamma(x - y)$ la solución fundamental de la Ecuación de Laplace (3.18) y $h \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ verificando (3.27), entonces:

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) - h^y(x) \quad (x, y \in \Omega, x \neq y), \quad (3.29)$$

es la función de Green asociada al problema de Dirichlet (3.23).

Una vez definida la función de Green (3.29), podemos expresar (3.25) en términos de esta función.

Teorema 3.2.3.1.1. (*Fórmula de representación usando la función de Green*). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio para el cual se cumple el Teorema 3.1.1 y sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, sea ν el vector normal exterior a $\partial\Omega$ y $G(x, y)$ la función de Green (3.29), entonces:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) ds(x) + \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) dx \quad (y \in \Omega), \quad (3.30)$$

donde

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) \cdot \nu(x),$$

es la derivada normal de G con respecto a la variable x .

Demostración. Tomando $G(x, y)$ la expresada en (3.29), sumando las expresiones (3.25) y (3.28):

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x - y) - \Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right) ds(x) + \int_{\Omega} \Gamma(x - y) \Delta u(x) dx.$$

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x - y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x - y) \right) ds(x) - \int_{\Omega} h^y \Delta u(x) dx.$$

Obtenemos:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) ds(x) + \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(x) dx.$$

□

Observación 3.2.3.1.1. Se verifica que el término $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ no aparece en (3.30). Precisamente se introdujo la función h para que esto sucediese.

3.2.3.2. Generalización al problema no homogéneo

Supongamos ahora que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ resuelve el problema de contorno asociado a la ecuación de Poisson:

$$(PDirichlet2) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.31)$$

para dos funciones continuas f, g . A partir de (3.30) se obtiene el siguiente Teorema.

Teorema 3.2.3.2.1. (Fórmula de Representación usando la función de Green). Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ verificando (3.31), y sean f, g dos funciones continuas, entonces

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) ds(x) - \int_{\Omega} G(x, y) f(x) dx \quad (x \in \Omega) \quad (3.32)$$

es una solución de (3.31).

Como ya se comentó en la introducción, la función de Green es la solución de una determinada ecuación diferencial cuando el término no homogéneo es la Delta de Dirac (2.4). Por tanto, el problema descrito anteriormente (3.31) se puede reescribir en términos de la Delta de Dirac.

Observación 3.2.3.2.1. Fijado $y \in \Omega$, considerando la función de Green G (3.29), como una función exclusivamente de x , dicha función es la solución del problema (3.31) cuando el término no homogéneo f involucrado en la ecuación de Poisson, es la Delta de Dirac (2.4) en el punto y , denotada por δ_y :

$$\begin{cases} -\Delta G = \delta_y & \text{en } \Omega \\ G = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.33)$$

Teorema 3.2.3.2.2. (Simetría de la función de Green). La función $G(x, y)$ dada en (3.29) es simétrica en las variables x e y (Ver [2, pp. 36, Thm. 13]).

El Teorema 3.2.3.2.1 proporciona una fórmula para la solución del problema de contorno (3.31), siempre que se pueda construir la función de Green G (3.29) para el dominio dado Ω . Esto es en general una cuestión difícil, y sólo se puede hacer cuando Ω tiene una geometría simple. A continuación, se estudiarán, a modo de ejemplo, algunos casos especiales para los que es posible un cálculo explícito de G .

3.3. Integral de Poisson

En caso de que Ω sea una bola, la función de Green puede determinarse explícitamente por el método de las imágenes y conduce a la conocida representación integral de Poisson para funciones armónicas en una bola (ver [2, pp. 39, Cap 2]). Se comenzará por estudiar lo que sucede con la bola unidad $B_1(0)$. Se hará uso de la inversión a través de la esfera. Por ello, resulta necesario comenzar definiendo el inverso de un punto cualquiera y de la bola unidad, con respecto a la frontera de la misma, $\partial B_1(0)$.

Definición 3.3.1. (Inverso de y con respecto a $\partial B_1(0)$). Sea $y \in B_1(0)$ con $y \neq 0$, el punto

$$\bar{y} = \frac{y}{|y|^2}$$

es el inverso de y respecto a $\partial B_1(0)$.

Observación 3.3.1. La aplicación $y \mapsto \bar{y}$ se llama *inversión a través de la esfera unidad* $\partial B_1(0)$.

Fijado $y \in B_1(0)$, se trata de encontrar una función h , que llamaremos *función correctora*, tal que $h^y = h^y(x)$ y resuelva el problema de contorno:

$$\begin{cases} \Delta h^y = 0 & \text{en } B_1(0) \\ h^y = \Gamma(x - y) & \text{en } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (3.34)$$

Por tanto, aplicando (3.29) la función de Green será:

$$G(x, y) = \Gamma(x - y) - h^y(x). \quad (3.35)$$

Para encontrar dicha función h que verifique (3.34), la idea es *invertir la singularidad* de $y \in B_1(0)$ a $\bar{y} \notin B_1(0)$. Por el momento, se asume $n \geq 3$. Se define la función $x \mapsto \Gamma(x - \bar{y})$, que es armónica para $x \neq \bar{y}$. Entonces $x \mapsto |y|^{2-n}\Gamma(x - \bar{y})$ es armónica para $x \neq \bar{y}$. Por tanto, la función “correctora” de (3.29) en caso de que el dominio sea la bola unidad es

$$h^y(x) := \Gamma(|y|(x - \bar{y})),$$

la cual es armónica en $B_1(0)$, es decir $\Delta h^y = 0$ en $B_1(0)$.

Además si $x \in \partial B_1(0)$ e $y \neq 0$,

$$|y|^2|x - \bar{y}|^2 = |y|^2 \left(|x|^2 - \frac{2x \cdot y}{|y|^2} + \frac{1}{|y|^2} \right) = {}^{13}|y|^2 - 2x \cdot y + 1 = |x - y|^2. \quad (3.36)$$

Como (3.36) es un número real positivo:

$$|y|^2|x - \bar{y}|^2 = |x - y|^2 \implies \left(|y|^2|x - \bar{y}|^2 \right)^{-\frac{(n-2)}{2}} = (|x - y|^2)^{-\frac{(n-2)}{2}},$$

y se puede concluir $(|y||x - \bar{y}|)^{-(n-2)} = |x - y|^{-(n-2)}$. En consecuencia, se verifica:

$$h^y(x) = \Gamma(x - y) \quad \text{con } x \in \partial B_1(0).$$

Definición 3.3.2. (Función de Green para $B_1(0)$). Sea $x, y \in B_1(0)$ con $x \neq y$, sea \bar{y} el inverso de y con respecto a $\partial B_1(0)$, la función de Green para la bola unidad es

$$G(x, y) := \Gamma(x - y) - \Gamma(|y|(x - \bar{y})).$$

¹³Como $x \in \partial B_1(0)$ entonces $|x|^2 = 1$.

Observación 3.3.2. La misma fórmula (3.3.2) es válida para el caso $n = 2$.

Teorema 3.3.1. (Fórmula de representación de Green para $B_1(0)$). Sea g una función continua en $\partial B_1(0)$ y $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$ tal que resuelve el problema existente en el borde

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (3.37)$$

entonces se obtiene la Fórmula de Representación:

$$u(y) = \frac{1 - |y|^2}{nw_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{g(x)}{|x - y|^n} ds(x). \quad (3.38)$$

Demostración. Haciendo uso de la Fórmula de Representación de Green (3.32) se tiene

$$u(y) = \int_{\partial B_1(0)} g(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) ds(x). \quad (3.39)$$

Ahora, usando (3.3.2), la dificultad reside en el calculo de la derivada normal de la Función de Green para poder simplificar la expresión (3.39):

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x, y) = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x - y) - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(|y|(x - \bar{y})). \quad (3.40)$$

Se procederá estudiando cada término de (3.40) por separado.

- En primer lugar, se estudiará $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x - y)$. Aplicando (3.21), se tiene:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x - y) = \frac{1}{nw_n} |x - y|^{1-n} = \frac{1}{nw_n} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n}. \quad (3.41)$$

- Ahora, veáse que sucede con $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(|y|(x - \bar{y}))$. Aplicando de nuevo (3.21) se tiene:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(|y|(x - \bar{y})) = \frac{1}{nw_n} \left| |y|(x - \bar{y}) \right|^{1-n} = \frac{1}{nw_n} \frac{|y|(x - \bar{y})}{(|y|(x - \bar{y}))^n}.$$

A continuación, usando (3.36),

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(|y|(x - \bar{y})) = \frac{1}{nw_n} \frac{x_i |y|^2 - y_i}{|x - y|^n}. \quad (3.42)$$

Por tanto, uniendo (3.41) y (3.42) se tiene que si $x \in \partial B_1(0)$ y ν es el vector normal exterior a

¹⁴Se anula la parte de la integral correspondiente a $B_1(0)$ ya que $\Delta u = 0$.

$\partial B_1(0)$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu} &= \frac{\partial G}{\partial |x|} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, y) = \frac{1}{nw_n} \frac{1}{|x-y|^n} \sum_{i=1}^n x_i((x_i - y_i) - x_i|y|^2 + y_i) \\ &= \frac{1}{nw_n} \frac{x_i(x_i(1 - |y|^2))}{|x-y|^n} = \frac{1 - |y|^2}{nw_n|x-y|^n}. \end{aligned}$$

En resumen, **la derivada normal de la función de Green** viene dada por

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial |x|}(x, y) = \frac{1}{nw_n} \frac{1 - |y|^2}{|x-y|^n}. \quad (3.43)$$

Ahora, continuando a partir de (3.39) y aplicando (3.43), se tiene el resultado:

$$u(y) = \frac{1 - |y|^2}{nw_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{g(x)}{|x-y|^n} ds(x).$$

□

A partir de la fórmula anterior (3.38), se trata de generalizar para obtener la versión para una bola cualquiera de radio $R > 0$.

Teorema 3.3.2. (Fórmula integral de Poisson). *Sea g una función continua en $\partial B_R(0)$ y $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$ tal que resuelve el problema de contorno siguiente:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B_R(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_R(0), \end{cases} \quad (3.44)$$

entonces, se conoce como *Fórmula integral de Poisson* a la siguiente expresión:

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{nw_n R} \int_{\partial B_R} \frac{g(x)}{|x-y|^n} ds(x). \quad (3.45)$$

Demostración. Para continuar a partir del Teorema 3.3.1, suponemos que u , en vez de resolver el problema (3.37), verifica

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B_R(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Entonces $\tilde{u}(y) = u(Ry)$ resolvería (3.37), con $\tilde{g}(y) = g(Ry)$ reemplazando a g . Cambiando las nuevas variables se obtiene

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{nw_n R} \int_{\partial B_R} \frac{g(x)}{|x-y|^n} ds(x) \quad \text{con } y \in B_R(0).$$

□

Definición 3.3.3. (Kernel de Poisson). Sea $x \in B_R(0)$, $y \in \partial B_R(0)$, la función

$$K(x, y) := \frac{R^2 - |y|^2}{nw_n R} \frac{1}{|x - y|^n}$$

es conocida como Kernel de Poisson para la bola $B_R(0)$.

Capítulo 4

EDPs Parabólicas: La Ecuación del Calor

En este capítulo, nos centraremos en el estudio de la conocida *Ecuación del Calor*, una EDP parabólica con numerosas aplicaciones dentro de la física. Fundamentalmente, se encarga de describir la distribución del calor (o variación de la temperatura) en una región a lo largo del transcurso del tiempo. Para la elaboración de este capítulo nos hemos servido de [2, Cap 2].

Definición 4.1. (*Ecuación del Calor de dimensión n*). Sea Ω abierto tal que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, sean $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ las variables temporales y de espacio respectivamente, de modo que, $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$ y Δu el operador Laplaciano (D.5) con respecto a las variables de espacio $x = (x_1, \dots, x_n)$. Se llama ecuación del calor de dimensión n a la siguiente expresión

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0. \quad (4.1)$$

Sea $f : \Omega \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ una función cualquiera, la versión no homogénea de (4.1) es:

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t). \quad (4.2)$$

Observación 4.1. u_t en la ecuación (4.1) hace referencia a la derivada parcial de la función u respecto a la variable temporal t , esto es, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$.

Observación 4.2. Las ecuaciones (4.1) y (4.2) están sujetas a unas condiciones iniciales y de contorno adecuadas.

Observación 4.3. Cualquier afirmación sobre funciones armónicas, desarrolladas en el Capítulo 3, da lugar a una versión análoga, aunque, por lo general, más complicada, sobre las soluciones de la Ecuación del Calor¹ (4.1).

¹En el capítulo únicamente nos centraremos en los resultados necesarios para obtener la solución fundamental.

4.1. Solución fundamental de la Ecuación del Calor

Como se comentó en el Capítulo 3, para el caso de la Ecuación de Laplace, el primer paso para estudiar la existencia de soluciones de cualquier EDP, es identificar primero algunas soluciones explícitas, para después, a partir de estas, obtener soluciones más complicadas. Antes de comenzar a buscar, resulta útil estudiar que la Ecuación del Calor verifica algunas propiedades que serán de ayuda en la construcción de dicha solución.

Proposición 4.1.1. *Sea u una solución de la Ecuación del Calor (4.1), entonces verifica las siguientes propiedades:*

- **Invarianza por dilatación:** *si $u(x, t)$ resuelve (4.1) entonces $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ (para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$) también lo hará. Sea $v(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ entonces:*

$$v_t(x, t) = \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) \quad y \quad \Delta v(x, t) = (\lambda \lambda) \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

sin más que sustituyendo en (4.1) se tiene que $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también es solución de (4.1).

- **Invarianza por traslación:** *si $u(x, t)$ resuelve (4.1) entonces $u(x + y, t)$ (para cualquier $y \in \mathbb{R}$) también lo hará. Sea $w(x, t) = u(x + y, t)$, entonces:*

$$w_t(x, t) = u_t(x + y, t) \quad y \quad \Delta w(x, t) = \Delta u(x + y, t)$$

sin más que sustituyendo en (4.1), se tiene que $u(x + y, t)$ también es solución de (4.1).

- **Invarianza por rotación:** *se prueba de forma similar al caso de la Ecuación de Laplace estudiado en la Proposición 3.2.2.1.*

Proposición 4.1.2. *La función:*

$$u(x, t) = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R}^n \text{ y } t > 0). \quad (4.3)$$

donde b es una constante, es una solución específica de la Ecuación del Calor (4.1).

Demostración. En primer lugar, observamos que la Ecuación del Calor involucra una derivada con respecto a la variable temporal t , pero dos derivadas con respecto al espacio de variables x_i ($i = 1, \dots, n$). Por tanto, usando la invarianza por dilatación, si $u(x, t)$ resuelve (4.1) entonces $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ (para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$) también lo hará. Esto sugiere comenzar a buscar soluciones de la forma:

$$u(x, t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) \quad (t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n), \quad (4.4)$$

para una función v por el momento desconocida. Es decir, tomando $u(\lambda x, \lambda^2 t)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, aplicando (4.4):

$$u(\lambda x, \lambda^2 t) = v\left(\frac{(\lambda x)^2}{\lambda^2 t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) = u(x, t).$$

Aunque este enfoque eventualmente conduzca a lo que se busca, es más rápido tratar de encontrar una solución $u(x, t)$ que sea invariante ante dilataciones, con la estructura especial $u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$, para todo $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Tomando $\lambda = \frac{1}{t}$, se obtiene:

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = t^{-\alpha} v(t^{-\beta} x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n), \quad (4.5)$$

donde las constantes α, β y la función $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ han de ser encontradas. Ahora, a partir de (4.5) se trata de obtener u_t y Δu . Comenzamos estudiando u_t :

$$u_t(x, t) = t^{-\alpha-1}(-\alpha)v(t^{-\beta}x) + t^{-\alpha}\nabla v(t^{-\beta}x)(-\beta t^{-\beta-1}x). \quad (4.6)$$

Para hallar Δu , llamamos $y = t^{-\beta}x$ y empezamos calculando las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t) = t^{-\alpha-\beta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} \cdot (t^{-\beta}x) \cdot t^{-\beta} = t^{-\alpha-2\beta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} \cdot (t^{-\beta}x) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Por tanto, el Laplaciano (D.5) de u

$$\Delta u(x, t) = t^{-\alpha-2\beta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} \cdot (t^{-\beta}x) + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2} \cdot (t^{-\beta}x) \right) = t^{-\alpha-2\beta} \Delta_y v(t^{-\beta}x). \quad (4.7)$$

Ahora, introduciendo las expresiones (4.6) y (4.7) en (4.1), y operando:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(t^{-\beta}x) + \beta t^{-\alpha-1}t^{-\beta}x \nabla v(t^{-\beta}x) + t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta_y v(t^{-\beta}x) = 0.$$

Como $y = t^{-\beta}x$, se tiene:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)}y \cdot \nabla v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta_y v(y) = 0. \quad (4.8)$$

Con el objetivo de transformar (4.8) en una expresión solamente en función de la variable y , se toma $B = \frac{1}{2}$. Entonces, los términos en t son idénticos y (4.8) se simplifica:

$$\begin{aligned} \alpha t^{-\alpha}t^{-1}v(y) + \frac{1}{2}t^{-\alpha}t^{-1}y \cdot \nabla v(y) + t^{-\alpha}t^{-1}\Delta_y v(y) &= 0, \\ t^{-\alpha}t^{-1} \left(\alpha v(y) + \frac{1}{2}y \nabla v(y) + \Delta_y v(y) \right) &= 0, \\ \alpha v(y) + \frac{1}{2}y \nabla v(y) + \Delta_y v(y) &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Usando ahora la invarianza por rotación, se puede reducir aún mas la expresión anterior suponiendo que v es una función radial, lo cual reducirá nuestra EDP a una EDO, mucho más fácil de resolver. Esto es, $v(y) = w(|y|)$ para alguna función $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$v(y) = w(r) \quad \text{y} \quad r = |y| = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Por tanto, procediendo igual que en la búsqueda de soluciones de la ecuación de Laplace (3.16):

$$\frac{\partial v}{\partial y_i} = w'(r) \frac{\partial r}{\partial y_i} = w'(r) \frac{y_i}{r} \quad \text{y} \quad \Delta_y v(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} = w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r).$$

En consecuencia, se puede simplificar (4.9) de la siguiente forma:

$$\alpha w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = 0 \quad \left(\text{con } r = |y|, ' = \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (4.11)$$

Ahora, tomando $\alpha = \frac{n}{2}$ en (4.11) y operando:

$$\frac{n}{2} w(r) + \frac{1}{2} r w'(r) + w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) = \frac{n}{2} w(r) + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{1}{2} r \right) w'(r) + w''(r) = 0. \quad (4.12)$$

Multiplicando (4.12) por r^{n-1} :

$$r^{n-1} \left(\frac{n}{2} w(r) + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{1}{2} r \right) w'(r) + w''(r) \right) = 0. \quad (4.13)$$

Veamos que la expresión anterior (4.13) se corresponde con $\left(r^{n-1} w'(r) \right)' + \frac{1}{2} \left(r^n w(r) \right)'$, lo cual simplificará mucho los cálculos:

$$\begin{aligned} \left(r^{n-1} w'(r) \right)' + \frac{1}{2} \left(r^n w(r) \right)' &= (n-1) r^{n-2} w'(r) + r^{n-1} w''(r) + \frac{n}{2} r^{n-1} w(r) + \frac{1}{2} r^n w'(r) \\ &= \frac{n}{2} r^{n-1} w(r) + \left((n-1) r^{n-1} r^{-1} + \frac{1}{2} r^{n-1} r \right) w'(r) + r^{n-1} w''(r) \\ &= r^{n-1} \left(\frac{n}{2} w(r) + \left(\frac{n-1}{r} + \frac{1}{2} r \right) w'(r) + w''(r) \right) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene:

$$\left(r^{n-1} w'(r) \right)' + \frac{1}{2} \left(r^n w(r) \right)' = 0 \quad \stackrel{2}{\implies} \quad r^{n-1} w'(r) + \frac{1}{2} r^n w(r) = a \quad \stackrel{3}{\implies} \quad w'(r) = -\frac{1}{2} r w(r).$$

Entonces, como buscábamos, obtenemos una EDO lineal de primer orden, la cual resulta mucho

²Integrando.

³Como nuestro objetivo es encontrar una de las soluciones de la ecuación del Calor, se puede tomar $a = 0$.

más sencilla de resolver que la EDP inicial. Es decir, mientras $w(r) \neq 0$,

$$w'(r) = -\frac{1}{2}rw(r) \longrightarrow \frac{w'(r)}{w(r)} = -\frac{1}{2}r.$$

Recuérdese que $(\log(w(r)))' = \frac{w'(r)}{w(r)} = -\frac{r}{2}$, por tanto:

$$\log(w(r)) = -\int \frac{r}{2} dr = -\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{2} = -\frac{r^2}{4} + c \implies w(r) = e^{-\frac{r^2}{4}} e^c \implies^4 w(r) = be^{-\frac{r^2}{4}}$$

para b una constante arbitraria. Solo queda comprobar que (4.1) efectivamente verifica la Ecuación del Calor. Recapitulando, uniendo las expresiones (4.5) y (4.1) para las elecciones particulares de $\alpha = \frac{n}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$ y deshaciendo el cambio (4.10),

$$v(y) = w(r) = w(|y|) = be^{-\frac{|y|^2}{4}} =^5 be^{-\frac{|t^{-\beta} \cdot x|^2}{4}} = be^{-\frac{|t^{-2} x|^2}{4}} = be^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Por tanto, la siguiente expresión es una solución específica de la Ecuación del Calor (4.1):

$$u(x, t) = t^{-\alpha} v(t^{-\beta} x) = t^{-\frac{n}{2}} v(y) = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0, b \in \mathbb{R}). \quad (4.14)$$

□

Todas las consideraciones previas, motivan la introducción de la *Solución fundamental de la Ecuación del Calor normalizada*.

Definición 4.1.1. (*Solución fundamental de la ecuación del calor normalizada*).

La función

$$\varphi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

es conocida como *solución fundamental de la Ecuación del Calor*.

La elección de la constante $b = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}$ de (4.3) está justificada por el siguiente Lema.

Lema 4.1.1. (*Masa de la solución fundamental*). [2, Pág 46]. Sea $\varphi(x, t)$ la solución fundamental de la Ecuación del Calor (4.15), sea $x \in \mathbb{R}^n$, para cada $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, t) dx = 1. \quad (4.16)$$

Demostración. La prueba de este resultado requiere del uso de la función Gamma para simplificar algunos cálculos, luego la hemos trasladado al Anexo E.1 (Ver Lema E.1.1). □

⁵Recordar que $y = t^{-\beta} \cdot x$.

Observación 4.1.1. *Debemos tener en cuenta que la solución fundamental (4.15) cumple las siguientes propiedades:*

- $\varphi(x, t)$ es una función positiva radial para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.
- La solución fundamental es singular en $(0, 0)$.
- Es una función gaussiana.

4.2. Representación de Green

Al igual que en el capítulo anterior, el objetivo es determinar la función de Green asociada al problema con una condición inicial (o problema de Cauchy) siguiente:

$$(PC1) \begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.17)$$

con $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$.

Observación 4.2.1. *Es importante aclarar que $\varphi(x, t)$, no está definida para $t = 0$. Por lo tanto, al afirmar que $u(x, t)$ cumple la condición $u(x, 0) = g(x)$ en \mathbb{R}^n , queremos expresar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = g(x)$.*

Observación 4.2.2. *Nótese que la función $(x, t) \mapsto \varphi(x, t)$ resuelve la Ecuación del Calor fuera de la singularidad existente en el punto $(0, 0)$, y, por tanto, usando la invarianza por traslación probada en la Proposición 4.1.1, para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, $(x, t) \mapsto \varphi(x - y, t)$ también resuelve (4.1).*

Teniendo en cuenta la observación anterior, un candidato para ser solución del problema (4.17) es el producto de convolución (ver Definición D.6) de las funciones $\varphi(x, t)$ y $g(x)$:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \quad (4.18)$$

Solo queda comprobar que, efectivamente, (4.18) resuelve el problema (4.17). En el siguiente teorema, lo verificaremos.

Teorema 4.2.1. (Solución del problema de valores iniciales). *[2, pp 47, Thm 1]. Sea $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y sea u la definida en (4.18), entonces:*

- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.
- $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$).
- $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = g(x_0)$ (para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$).

Demostración. La demostración de este teorema requiere de algunas nociones específicas de Cálculo Integral, por lo que lo probaremos en el Anexo C (Ver Teorema C.3.1). \square

La función de Green es la solución fundamental (4.15) de la ecuación cuando el dominio es todo el espacio \mathbb{R}^n . Por otro lado, como se comentó en la introducción, la Delta de Dirac se corresponde con la condición no homogénea g de dicho problema. Teniendo esto en cuenta, (4.17) se puede reescribir de la siguiente forma.

Observación 4.2.3. *Podemos escribir*

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ G = \delta_0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

donde δ_0 denota la Delta de Dirac (2.4) en el punto 0.

Observación 4.2.4. *La solución fundamental de la Ecuación del Calor (4.15) aproxima a la Delta de Dirac (2.4) en el punto 0, es decir, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x, t) = \delta_0$.*

4.2.1. Generalización al problema no homogéneo

Sea $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tal que u es de clase C^2 con respecto a la variable $x \in \mathbb{R}^n$ y de clase C^1 con respecto a la variable temporal $t \in (0, \infty)$ una solución del problema:

$$(PC2) \begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.19)$$

para f una función continua. La dificultad reside en obtener una fórmula de representación para la solución u de este problema no homogéneo. Para ello, aplicaremos el *Principio de Duhamel*⁶. La idea es interpretar el problema como un conjunto de problemas homogéneos, comenzando cada uno de ellos en un instante de tiempo distinto. Recuérdese la Observación 4.2.2, en la cual nos apoyamos para obtener (4.18). La idea ahora es que, para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo y para s tal que $0 < s < t$, entonces $(x, t) \mapsto \varphi(x - y, t - s)$ es también una solución de la Ecuación del Calor. Ahora, si además fijamos s , la función:

$$u = u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y, t - s) f(y, s) dy$$

resuelve

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot; s) = f(\cdot, s) & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases} \quad (4.20)$$

⁶Es una técnica que se asemeja al método de variación de parámetros para EDOs. Es utilizado para obtener soluciones a problemas de evolución lineal no homogéneos, como el de la Ecuación del Calor que nos ocupa, con una condición inicial a partir de la solución del problema homogéneo [16].

el cual es un problema de la misma forma que el inicial (4.17), pero escribiendo $t = s$ en vez de $t = 0$ y $f(\cdot, s)$ en vez de g . Sin embargo, $u(\cdot; s)$ no es ciertamente solución de (4.19). El *Principio de Duhamel* afirma que podemos construir la solución al problema (4.19) a partir de las soluciones (4.20) integrando respecto a la variable s . La idea es considerar:

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0).$$

Reescribiendo, para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, tenemos:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t - s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds. \quad (4.21)$$

Solo queda comprobar que, efectivamente, (4.21) resuelve el problema (4.19). Para ello, introducimos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.2. (Solución del problema de valores iniciales no homogéneo). *Sea u la definida en (4.21), entonces:*

- $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.
- $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$.
- $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = 0$ (para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, con $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$)

(La demostración de este Teorema se realiza de forma similar al Teorema 4.2.1.)

Observación 4.2.5. *El hecho de que $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ hace referencia a que la función u es de clase C^2 con respecto al espacio de variables $x \in \mathbb{R}^n$ y de clase C^1 con respecto a la variable temporal t .*

En base a todas las consideraciones previas, podemos introducir la función de Green asociada a la Ecuación del Calor.

Definición 4.2.1. (Función de Green para \mathbb{R}^n). *Sea $x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0$, la función de Green para la Ecuación del Calor (4.2) en las condiciones iniciales de (4.19) es:*

$$G(x, y; t, s) := \begin{cases} \varphi(x - y, t - s) & \text{si } 0 < s < t \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.22)$$

donde φ es la solución fundamental (4.15).

Observación 4.2.6. *Podemos reescribir la función de Green (4.22) como:*

$$G(x, y; t, s) = \frac{H(t - s)}{(4\pi(t - s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}.$$

donde $H(t - s)$ es la función escalón de Heaviside (2.11).

Teorema 4.2.3. (Fórmula de representación usando la función de Green). Sea f una función continua, sea $G(x, y; t, s)$ la función de Green (4.22), entonces,

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; t, s) f(y, s) dy ds$$

es una solución para la Ecuación del Calor no homogénea que verifica las condiciones (4.19).

Observación 4.4. A modo de conclusión, observamos que si combinamos las soluciones obtenidas para (4.17) y (4.19) con f y g las definidas en los respectivos Teoremas 4.2.1 y 4.2.2, entonces:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds,$$

o lo que es lo mismo:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; t, 0) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x, y; t, s) f(y, s) dy ds,$$

con $G(x, y; t, s)$ la función de Green asociada a la Ecuación del Calor 4.22, resuelve el siguiente problema:

$$(PC3) \begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Bibliografía

- [1] N.CORRAL, *Notas de clase de Topología*, Universidad de Cantabria, Curso 2020-2021.
- [2] L.C.EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [3] J.A.FACENDA, F.J.FRENICHE, *Integración de funciones de varias variables*, Ediciones Pirámide, 2002.
- [4] L.A.FERNÁNDEZ, *Métodos Matemáticos Avanzados*, Universidad de Cantabria, 2009.
- [5] L.A.FERNÁNDEZ, *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Cantabria, 2022.
- [6] G.B.FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Vol. 40, Wiley, 1999.
- [7] D.GILBARG, N.S.TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [8] D.GÓMEZ, *Notas de clase de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidad de Cantabria, Curso 2020-2021.
- [9] R.GRANERO, *Ampliación de Análisis: Fundamentos de Análisis Armónico y Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Cantabria, 2022.
- [10] P.K.KYTHER, *Green's functions and linear differential equations*, University of New Orleans, 2011.
- [11] T.MYINT-U, L.DEBTNATH, *Partial differential Equations for Scientist and Engineers*, Elsevier Science Publishers B.V, 1987.
- [12] B.PORRAS, *Ampliación de Cálculo Diferencial*, Universidad de Cantabria, curso 2017-2018.
- [13] <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/d/dirac.htm>
- [14] https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_l_valor_medio (Consultado el 12-03-2023).

- [15] https://en.wikipedia.org/wiki/George_Green_%28shipbuilder%29 (Consultado el 16-02-2023).
- [16] https://es.wikipedia.org/wiki/Jean-Marie_Duhamel (Consultado el 12-06-2023).

Apéndice A

Distribuciones

En el desarrollo del trabajo la Delta de Dirac toma un papel fundamental. Por ello, se hace necesario introducir algunas nociones elementales sobre *Teoría de Distribuciones*. Para su elaboración se han consultado fundamentalmente [9], [4].

Las funciones generalizadas o distribuciones se alejan de la noción de función clásica que conocíamos hasta ahora. Intuitivamente, se puede decir que generalizan o amplían la noción de función. Permiten la definición de funciones que no son continuas o derivables en el sentido clásico. En esta sección nos centraremos en entender el concepto de distribución y en establecer algunas propiedades que toman relevancia en el desarrollo del trabajo.

La Delta de Dirac es, probablemente, la distribución más conocida. Sin embargo, su estudio resulta complicado. La Delta de Dirac en el punto $t = t_0$ debe verificar formalmente:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0. \end{cases}$$

Sin embargo, es evidente que no existe ninguna función clásica así definida. Nos encontramos frente al problema de no poder asignar un valor numérico a todo punto. Para tratar de solucionarlo, nos será útil interpretar la Delta de Dirac como un funcional. Esto motiva la introducción de la siguiente definición.

Definición A.1. (*La distribución δ*). [9, Pág 59, Cap 3, Def 7]. La δ de Dirac es un funcional tal que para cada función continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta : C(\mathbb{R}) &\Longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle \delta, \varphi \rangle &:= \varphi(0) \end{aligned}$$

La acción de este funcional sobre la función φ se denota como:

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt.$$

En virtud de la Definición A.1, podemos pensar que lo que nos interesa es saber como actúa la Delta de Dirac sobre las funciones en vez de determinar una fórmula para ella. Podemos decir que integrar es de alguna manera, el equivalente a realizar distintas mediciones. Por tanto, vamos a utilizar el enfoque de analizar el efecto de una distribución al actuar a través de una integral sobre diversas funciones regulares como método para comprender dicha distribución.

En particular, la Delta de Dirac se puede definir como límite de familias de funciones clásicas¹. Sea $\epsilon > 0$, para dar esta definición alternativa, definimos la siguiente sucesión de funciones

$$f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si } t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]. \end{cases}$$

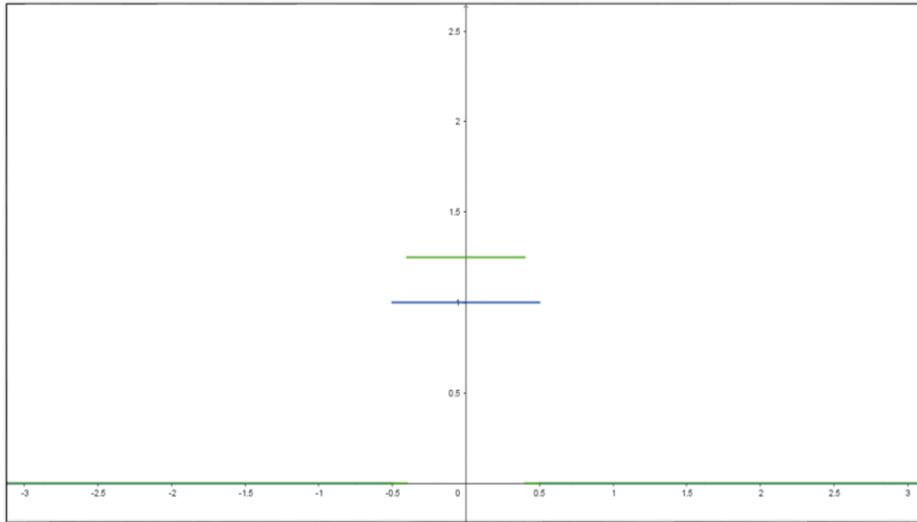


Figura A.1: Representación de $f_{\epsilon}(t)$ para $t_0 = 0$, y $\epsilon = 0,4$ (verde) y $\epsilon = 0,5$ (azul).

Ahora, veamos que, la acción de estas f_{ϵ} , por medio de una integral, nos permite definir la Delta de Dirac de manera rigurosa. Es decir, vamos a considerar los funcionales

$$\phi_{f_{\epsilon}} : C(\mathbb{R}) \implies \mathbb{R}$$

$$\langle \phi_{f_{\epsilon}}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f_{\epsilon}(t) dt$$

y a estudiar su límite.

¹En general, muchas distribuciones pueden ser definidas por medio de esta técnica.

Lema A.1. Sea f_ϵ la familia definida anteriormente y sea $\varphi \in C(\mathbb{R})$ una función dada. Entonces, se tiene que

$$\varphi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \phi_{f_\epsilon}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f_\epsilon(t) dt.$$

Demostración. Aplicando el cambio de variable $t = \epsilon s$

$$\langle \phi_{f_\epsilon}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f_\epsilon(t) dt = \frac{1}{2\epsilon} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{t_0}{\epsilon}-1}^{\frac{t_0}{\epsilon}+1} \varphi(\epsilon s) ds.$$

Por tanto:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \phi_{f_\epsilon}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \int_{\frac{t_0}{\epsilon}-1}^{\frac{t_0}{\epsilon}+1} \varphi(\epsilon s) ds = \frac{\varphi(0)}{2} \int_{\frac{t_0}{\epsilon}-1}^{\frac{t_0}{\epsilon}+1} 1 ds = \varphi(0).$$

□

Una vez introducida la Delta de Dirac, vamos a definir formalmente las distribuciones, para enunciar algunas de sus propiedades que serán utilizadas en el trabajo.

Definición A.2. (Distribución). [9, Pág 60, Cap 3, Def 8]. Una distribución ϕ es un elemento del espacio dual C_c^∞ . Es decir, es un funcional lineal y continuo

$$\varphi : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

El espacio de las distribuciones se denota por $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$.

Proposición A.1. El conjunto $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones suma y producto por un escalar definidas:

- Sean $T, R \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$, entonces $\langle T + R, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle + \langle R, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$.
- Sea $T \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\langle \alpha T, \phi \rangle = \alpha \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$.

Observación A.1. El espacio C_c^∞ hace referencia a las funciones continuas y de soporte compacto. Es decir, el espacio de todas las funciones ϕ de variable real, que tienen derivadas de todos los órdenes y que se anulan fuera de una región acotada en \mathbb{R} . El espacio de estas funciones también se puede denotar por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

En el desarrollo del trabajo es fundamental el concepto de *derivada en el sentido de las distribuciones*.

A.1. La derivada en el sentido de las distribuciones

La definición de derivada clásica de una función, se puede extender de modo que pueda aplicarse a distribuciones. Supongamos que tenemos dos funciones $f, \varphi \in C^1(a, b)$ tal que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Integrando por partes, se tiene

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt = - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt.$$

Observación A.1.1. *El término de la izquierda en la expresión anterior únicamente tiene sentido en el caso en el que f es una función regular. Por el contrario, la parte derecha tiene sentido aunque f no sea derivable en el sentido clásico, por ejemplo, cuando f es una función continua definida a trozos en $[a, b]$.*

Definición A.1.1. (*Derivada en el sentido de las distribuciones*). [4, Pág 147, Cap 7]. Dada una función f , clásica o generalizada en $[a, b]$, se define la derivada primera de f , en el sentido de las distribuciones, como la aplicación lineal:

$$f' : \mathcal{D}(a, b) \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\int_a^b f'(t)\varphi(t)dt := - \int_a^b f(t)\varphi'(t)dt, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\mathcal{D}(a, b) := \{\varphi \in C^\infty(a, b) : \varphi \equiv 0 \text{ fuera de un subintervalo de } (a, b)\}, \quad (\text{A.2})$$

siempre que la integral de la derecha en (A.1) esté bien definida para cada $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$.

Observación A.1.2. *El conjunto $\mathcal{D}(a, b)$ (A.2) se corresponde con el espacio de las funciones continuas y de soporte compacto que hemos definido anteriormente, pero evaluado dentro de un intervalo de \mathbb{R} .*

Apéndice B

Problema de Cauchy para EDOs de segundo orden

En el desarrollo del trabajo, se ha utilizado la noción de *Problema de Cauchy*, y algunos resultados referidos a él. Únicamente hemos trabajado con problemas de orden 2, luego, para no extendernos demasiado, nos centraremos en enunciar los resultados que han sido utilizados en relación a este tipo concreto de problema de Cauchy. Para la elaboración de este apéndice se ha consultado [8, Cap 4].

Se llama problema de Cauchy al conjunto formado por una ecuación diferencial y unas condiciones determinadas que vienen dadas sobre un *mismo punto*, formalmente:

Definición B.1. (*Problema de Cauchy*) Dada $f(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$ con $f : D \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ y los valores $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$, se denomina problema de valores iniciales o problema de Cauchy al problema que consiste en la búsqueda de funciones definidas en un intervalo I que contenga a x_0 , que verifiquen

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \quad \forall x \in I,$$

y que cumplan además

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

denominadas condiciones iniciales. Escribiremos:

$$(PCauchy) \begin{cases} f(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Ejemplo B.1. El siguiente problema

$$(PCauchy1) \begin{cases} y''(x) + \sin(x)y'(x) = 3 \\ y(3) = 1, \quad y'(3) = 2. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

es un problema de Cauchy.

Solución. El problema (B.1) es un problema de Cauchy ya que presenta el mismo número de condiciones que orden tiene la EDO asociada (2) y el valor de las condiciones viene dado sobre el mismo punto ($x_0 = 3$).

B.1. Existencia y unicidad de solución

Como ya se ha comentado, vamos a trabajar únicamente con problemas del tipo

$$(PCauchy) \begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

donde el problema consiste en la búsqueda de soluciones de la ecuación diferencial definidas en un intervalo que contiene a x_0 y además verifiquen las condiciones iniciales.

Teorema B.1.1. (*Existencia y unicidad de solución global*). Si las funciones $a_0, a_1, b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en el intervalo I para cada punto $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R}^2$, entonces (B.2) tiene una única solución; además, dicha solución está definida en todo el intervalo I .

Apéndice C

Algunos resultados de Teoría de la Medida

En esta sección vamos a enunciar varios resultados elementales de teoría de la medida e integración que son utilizados en algunas demostraciones del trabajo. Para la elaboración de este apéndice nos hemos servido de [3], [9], [14].

Teorema C.1. (Teorema de la convergencia monótona). [9, Pág 12, Cap 2, Teo 1]. Sea $f_n(x)$ una sucesión no decreciente de funciones absolutamente integrables. Sea $f(x)$ su límite puntual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x.$$

Entonces f es medible y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Teorema C.2. (Teorema de la convergencia dominada). [9, Pág 12, Cap 2, Teo 3]. Sea f_n una sucesión de funciones que converge puntualmente a f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x.$$

Asumamos que

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

con g una función no negativa e integrable. Entonces f es integrable,

$$|f(x)| \leq g(x)$$

y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Teorema C.3. (*Teorema del Valor Medio para integrales definidas [14]*). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe al menos un valor $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Dado que el valor medio de f en $[a, b]$ está definido como

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx \tag{C.1}$$

luego podemos entender que f alcanza su punto medio en algún $c \in (a, b)$.

C.1. Espacios de Lebesgue

Para la elaboración de esta sección se ha utilizado [9, Pág 15, Cap 2, Sec 2.2].

Definición C.1.1. (*Espacio de funciones absolutamente integrables*) Se considera el conjunto:

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \left\{ \text{conjunto de clases de equivalencia } u \text{ tal que } \|u\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |u(x)| dx < \infty \right\}. \tag{C.2}$$

Observación C.1.1. Se observa que se puede dotar al conjunto (C.2) de la estructura de espacio vectorial normado¹. En efecto, se tiene que tanto la suma como la multiplicación por escalares son operaciones cerradas en $\mathcal{L}^1(\Omega)$.

Una vez definido el espacio \mathcal{L}^1 de clases de equivalencia de funciones absolutamente integrables, se estudiarán los espacios que introducen potencias. El primero de ellos es el espacio $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Definición C.1.2. (*Espacio de las funciones de cuadrado integrable*) Se considera el conjunto:

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ \text{conjunto de clases de equivalencia } u \text{ tal que } \|u\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

A este espacio vectorial se le puede dotar del producto interno:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

y de la norma:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{L}^2}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

¹Para dotar a este tipo de funciones de la estructura de espacio vectorial normado se define la relación de equivalencia $u \sim v$ si $u = v$ en casi todo punto.

Por último, tras considerar el caso de funciones de cuadrado integrable, se puede definir el espacio de las funciones de p -ésima potencia integrable.

Definición C.1.3. (*Espacio de las funciones de p -ésima potencia integrable*) Se considera el conjunto:

$$L^p(\Omega) = \left\{ \text{conjunto de clases de equivalencia } u \text{ tal que } \|u\|_{L^p}^p(\Omega) := \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

C.2. Derivación bajo el signo integral

Sea (X, M, μ) un espacio de medida, sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, y sea $f : X \times J \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para cada $t \in J$, la función que a cada $x \in X$ le asocia $f(x, t)$ es integrable en X . Todo esto permite considerar la función $F : J \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x),$$

la cual es una función definida por una integral dependiente del parámetro t . (Ver [3, Pág 107, Sección 3.2]).

Teorema C.2.1. (*Regla de Leibniz de derivación bajo el signo integral*). [3, Pág 108, Cap 3, Teo 3.2.2]. Si:

1. En casi todo X existe $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$, para todo $t \in J$.
2. Existe una función g integrable en X tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$ (en casi todo X , para todo $t \in J$).

Entonces F es derivable en J y se cumple:

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

A continuación, aplicaremos el Teorema C.2.1 a una función concreta usada en el Capítulo 4. Veremos que se cumplen las hipótesis.

Ejemplo C.2.1. Como aplicación del Teorema C.2.1 veamos que podemos aplicar la Regla de Leibniz a la función $f(y, t) = \varphi(x - y, t)g(y)$ (para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo).

Solución. Veamos que la función $f(y, t)$ para $J = \mathbb{R}^n$, verifica cada una de las propiedades del Teorema C.2.1.

- En primer lugar, como $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, es claro que existe $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ en \mathbb{R}^n .

- Por otro lado, para comprobar la segunda propiedad, tenemos que encontrar una función integrable h tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) \right| \leq h(y).$$

Ahora, recordando que φ es la solución fundamental (4.15), obtenemos:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} (\varphi(x - y, t)g(y)) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right) \right| \quad (\text{C.3})$$

Se trata de ir acotando la expresión anterior, de modo que podamos encontrar la función h que buscamos. Para ello, aplicando la regla de la cadena para derivar (C.3) y tomando $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [\alpha, \infty)$ (con $\alpha > 0$), tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) \right| &\leq \left| \left(\frac{n}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \frac{1}{t^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| + \left| \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(\frac{|x-y|^2}{4t^2} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| \\ &\leq \left(\frac{n}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \left| \frac{1}{t^{n/2+1}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| + \left(\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \left| \left(\frac{1}{t^{n/2+1}} \frac{|x-y|^2}{4t} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| \\ &\leq \left(\frac{n}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \left| \frac{1}{\alpha^{n/2+1}} \cdot 1 \cdot g(y) \right| + \left(\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \left| \frac{1}{\alpha^{n/2+1}} \left(\frac{|x-y|^2}{4t} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \cdot g(y) \right| \\ &\leq \left(\frac{n}{2(4\pi)^{n/2} \alpha^{n/2+1}} \right) |g(y)| \\ &\quad + \left(\frac{1}{(4\pi)^{n/2} \alpha^{n/2+1}} \right) \left| \left(\frac{|x-y|^2}{4t} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Por último, para terminar de acotar la expresión anterior, vamos a usar la siguiente idea. Sea $w \geq 0$, entonces, veamos que tenemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{w}{e^w} \leq \frac{1}{ae^{2w/5}} \iff w \leq \frac{1}{a} e^{3w/5}, \quad (\text{C.5})$$

donde a es el mínimo de la función $\frac{1}{w} e^{3w/5}$ en $(0, \infty)$. Gráficamente:

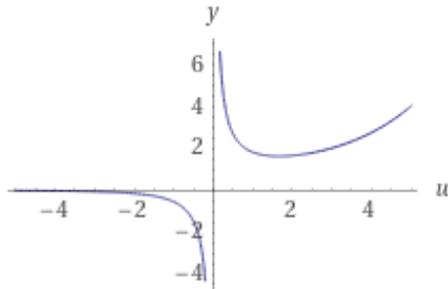


Figura C.1: Gráfica de la función $u(w) = \frac{1}{w} e^{3w/5}$.

Todo esto nos permite acotar el segundo término de la expresión C.4 de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{(4\pi)^{n/2} \alpha^{n/2+1}} \right) \left| \left(\frac{|x-y|^2}{4t} \right) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| \leq \left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{(4\pi)^{n/2} \alpha^{n/2+1}} \right) |g(y)|$$

Recapitulando, uniendo todos los resultados anteriores, tenemos que:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(y, t) \right| \leq \left(\frac{n}{2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \left(\frac{1}{\alpha^{n/2+1}} \right) |g(y)| + \left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \right) \left(\frac{1}{\alpha^{n/2+1}} \right) |g(y)| = C|g(y)|$$

donde C es una constante. Por tanto, como por hipótesis $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos que g es la función integrable que buscábamos. Es decir, $h(y) = g(y)$ y hemos verificado que se cumple la segunda propiedad.

Por tanto, podemos aplicar la derivación bajo el signo integral a $f(y, t)$ y escribir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x-y, t) g(y) dy.$$

Observación C.1. De modo análogo al Ejemplo C.2.1 obtendríamos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y, t) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x-y, t) g(y) dy.$$

C.3. Otros resultados

En el Capítulo 4 presentamos algunos teoremas cuya demostración requería de algunos conceptos específicos de Teoría de la Medida que se han estudiado en este Anexo. Por tanto, hemos trasladado su prueba a esta sección. En primer lugar, recordemos el problema de valores iniciales o de Cauchy (4.17):

$$(PC1) = \begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{en } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Tenemos que comprobar que la siguiente expresión efectivamente resuelve (C.6).

$$u(x, t) = \varphi(x, t) * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

Teorema C.3.1. (Solución del problema de valores iniciales). Sea $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y sea u la definida en (4.18), entonces:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.
2. $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$.

3. $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$ (para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, con $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$).

(Ver [2, pp 47, Cap 2, Thm 1]) .

Demostración. 1. Como $\varphi(x,t)$ es la solución fundamental de (4.1), la cual hemos visto en el Capítulo 4 que es C^∞ , entonces $\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ para cada $\delta > 0$. Por tanto, tenemos que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

2. Ahora, veamos que se verifica la segunda propiedad. Sustituyendo la expresión (4.18) se tiene:

$$u_t(x,t) - \Delta(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)g(y)dy - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)g(y)dy.$$

Para simplificar la expresión anterior, aplicando los resultados obtenidos en el Ejemplo C.2.1:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x-y,t)g(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x-y,t)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x-y,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x-y,t) \right] g(y)dy.$$

Como φ es la solución fundamental de la Ecuación del Calor (4.15), la última igualdad se anula y por tanto:

$$u_t(x,t) - \Delta(x,t) = 0.$$

3. Por último, nos queda comprobar que se cumplen las condiciones iniciales del problema. Como ya se comentó en la Observación 4.2.1, $\varphi(x,t)$, no está definida para $t = 0$. Por lo tanto, al afirmar que $u(x,t)$ cumple la condición $u(x,0) = g(x)$ en \mathbb{R}^n , queremos expresar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x,t) = g(x)$. A continuación, lo probaremos. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo, y sea $\epsilon > 0$. Como $g \in C(\mathbb{R}^n)$ por hipótesis, aplicando la definición de continuidad, se tiene que, podemos elegir $\delta > 0$, tal que:

$$|g(y) - g(x_0)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |y - x_0| < \delta \quad (y \in \mathbb{R}^n). \quad (\text{C.7})$$

Ahora, suponiendo que $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ y teniendo en cuenta que, por el Lema 4.1.1 tenemos $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t) = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} |u(x,t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)g(y)dy - g(x_0) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)g(y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)g(x_0)dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)[g(y) - g(x_0)]dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|dy \\ &= \int_{B_\delta(x_0)} \varphi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|dy + \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)} \varphi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|dy \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Vamos a estudiar cada término por separado.

(I_1). Aplicando el Lema 4.1.1 y teniendo en cuenta que $B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y, t) = 1 \quad \text{y} \quad \int_{B_\delta(x_0)} \varphi(x-y, t) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y, t) dy. \quad (\text{C.9})$$

Se tiene:

$$I_1 = \int_{B_\delta(x_0)} \varphi(x-y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y, t) dy = \epsilon$$

(I_2). Por otro lado, veamos que ocurre con I_2 . Si $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$ y $|y - x_0| \geq \delta$, aplicando la desigualdad triangular, se tiene:

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|. \quad (\text{C.10})$$

Despejando $|y - x|$ en (C.10) y operando, se tiene:

$$|y - x| \geq |y - x_0| - \frac{1}{2}|y - x_0| \geq \frac{1}{2}|y - x_0| \implies |y - x_0| \leq 2|y - x|.$$

Recordemos ahora que, por hipótesis, $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir, g es acotada².

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)} \varphi(x-y, t) |g(y) - g(x_0)| dy \leq 2\|g(x)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)} \varphi(x-y, t) dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)} \varphi(x-y, t) dy \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy. \end{aligned}$$

Para resolver la última integral, debemos realizar un cambio de variable a coordenadas polares, que no justificaremos para no extendernos demasiado en la demostración (Ver [2, pp. 48, Thm 1.3]). Por tanto, I_2 se reduciría a:

$$I_2 \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \quad (\text{C.11})$$

A partir de (C.11), solo queda ver que ocurre si $t \rightarrow 0^+$ (Recordar Observación 4.2.1).

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr.$$

El problema está en introducir el límite dentro de la integral. Este paso está justificado por el Teorema³ de la Convergencia Dominada C.2. Por tanto:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr = \int_\delta^\infty \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C}{t^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr = 0.$$

²Por tanto existe una constante $M > 0$, de modo que $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

³No vamos a verificar las hipótesis de este teorema para no hacer demasiado extensa la prueba.

.

Recapitulando, si $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ y $t > 0$ suficientemente pequeño entonces, uniendo ambos casos y volviendo a (C.8), tenemos:

$$|u(x, t) - g(x_0)| < 2\epsilon \iff \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = g(x_0) \quad (\text{para cada } x_0 \in \mathbb{R}^n, \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, t > 0).$$

□

Apéndice D

Algunos resultados de Cálculo

Definición D.1. (Derivada direccional). [12, Pág 3.9, Def 3.2, Cap 3]. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $\nu \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo. Se define la derivada direccional de f en un punto x_0 de Ω en la dirección de ν como:

$$d_\nu f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\nu) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

si es que este límite existe.

Si f es una función diferenciable en x , la derivada direccional de f en la dirección de ν se puede expresar como:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla f(x) \cdot \nu. \quad (\text{D.1})$$

Definición D.2. (Matriz jacobiana). [12, Pág 3.23, Def 3.6, Cap 3]. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , x_0 un punto de Ω , y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en x_0 , entonces, la matriz asociada

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

se llama Matriz Jacobiana de u en x_0 .

Definición D.3. (Vector gradiente). [12, Pág 3.23, Def 3.6, Cap 3]. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , x_0 un punto de Ω , y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en x_0 , se denomina gradiente de u en x_0 a la siguiente expresión:

$$\nabla u(x_0) := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

Definición D.4. (Soporte de una función real [6]). Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función real, entonces el soporte compacto de f , es la adherencia del

conjunto de puntos en Ω donde la función f no es nula, es decir:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}. \quad (\text{D.2})$$

Decimos que una función tiene **soporte compacto** si la adherencia del conjunto donde no es nula (D.2), forma un conjunto cerrado y acotado.

Definición D.5. (Derivada débil de una función u). [9, Pág 61, Def 11, Cap 3]. La función v es la derivada débil de u si cumple que:

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\phi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x)\frac{\partial\phi}{\partial x}(x)dx, \quad \forall\phi \in C_c^\infty. \quad (\text{D.3})$$

Que la igualdad (D.3) se satisfaga para toda $\phi \in C_c^\infty$ es crucial, porque representa el hecho de que v se comporta como la derivada (clásica) de u (en caso de existir) para toda función ϕ que sirva de test.

Definición D.6. (Producto de convolución de dos funciones). (Ver [5, Pág 50, Def 3.3]). Dadas dos funciones f y g definidas en todo \mathbb{R}^n , se define el producto de convolución de f y g (denotado por $f * g$) como una nueva función que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se define como la integral:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy. \quad (\text{D.4})$$

D.1. El operador de Laplace

La Ecuación de Laplace, con la que trabajamos en el trabajo, requiere recordar el concepto de Laplaciano de una función.

Definición D.1.1. (Laplaciano de una función u de clase C^2). Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , u una función de clase C^2 en Ω , se llama Laplaciano de u , y se escribe Δu , a la siguiente expresión:

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \text{div } \nabla u(x) \quad \forall u \in C^2(\Omega), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{D.5})$$

Es decir, la suma de las derivadas segundas de la función u respecto a las n variables.

Sea $u \in C^2(\Omega)$, entonces teniendo en cuenta que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_i})$ es la derivada débil D.5 de $\frac{\partial u}{\partial x_i}$:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot u \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (\nabla u) \cdot u \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \cdot u \, dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \leq 0.
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Por tanto:

$$\langle -\Delta u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \geq 0. \tag{D.7}$$

$-\Delta$ es un operador definido positivo. Por tanto, en función de (D.6) y (D.7) se puede establecer la siguiente clasificación:

1. Las soluciones u de (D.8) son conocidas como *funciones armónicas*.

$$-\Delta u = 0 \Leftrightarrow \Delta u = 0. \tag{D.8}$$

2. Las soluciones u de (D.9) son conocidas como *funciones superarmónicas*.

$$-\Delta u \geq 0 \Leftrightarrow \Delta u \leq 0. \tag{D.9}$$

3. Las soluciones u de (D.10) son conocidas como *funciones subarmónicas*.

$$-\Delta u \leq 0 \Leftrightarrow \Delta u \geq 0. \tag{D.10}$$

D.2. Fórmulas de Green

Definición D.2.1. (Primera identidad de Green). [2, pp.628, Thm.3.2]. Sea Ω un dominio para el cual se cumple el Teorema 3.1.1 y sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ funciones

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w = \int_{\Omega} v \cdot \Delta u \, dx + \int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds. \tag{D.11}$$

Definición D.2.2. (Segunda identidad de Green). [2, pp.628, Thm.3.3]. Sea Ω un dominio para el cual se cumple el teorema 3.1.1 y sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ funciones

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \, ds. \tag{D.12}$$

D.3. Coordenadas Polares

Teorema D.3.1. (*Coordenadas Polares*). [2, pp.628, Thm.4].

- Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e integrable:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f ds \right) dr$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

- En particular:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{B_r(x_0)} f dx \right) = \int_{\partial B_r(x_0)} f ds$$

para todo $r > 0$.

Apéndice E

Función Gamma

Para la elaboración de este apéndice se ha consultado [5, Cap 4]. La función Gamma tiene una presencia inherente en el cálculo de integrales múltiples y en estadística. Representa una generalización de la función factorial de un número natural y también se utiliza en la definición de otras funciones especiales de la Física Matemática.

Definición E.1. (Función Gamma). [5, Pág 65, Cap 4, Def 4.1]. Dado $z > 0$, se define la función Gamma de z como la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Proposición E.1. (Propiedades). A continuación se detallarán algunas propiedades fundamentales de la función Gamma.

1. $\Gamma(z)$ está bien definida:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \leq \int_0^1 t^{z-1} dt + C_1 \int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt = \frac{1}{z} + 2C_1 e^{-\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Donde se ha utilizado que existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$e^{-t} t^{z-1} \leq C_1 e^{-t/2} \quad \forall t \geq 1.$$

2. Para $z = 0$ la integral es divergente:

$$\Gamma(0^+) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1} dt \geq e^{-1} \int_0^1 t^{-1} dt = e^{-1} |\log t|_{t=0}^{t=1} = +\infty.$$

3. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left| -e^{-t} \right|_{t=0}^{t=+\infty} = 1.$

4. Integrando por partes, obtenemos:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = \left| -e^{-t} t^z \right|_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} z e^{-t} t^{z-1} dt = z \cdot \Gamma(z),$$

para cada $z > 0$.

5. A partir de las propiedades anteriores, con $z = n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \dots = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

6. Si $z > 0$, $\Gamma(z) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} s^{2z-1} ds$.

Se comprueba realizando el cambio de variable $t = s^2$ en la integral que define Γ .

7.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{E.1})$$

Utilizando la propiedad anterior, el valor de esa integral impropia no se puede calcular directamente. Sin embargo, sí se puede hallar utilizando el siguiente “truco”:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+s^2)} dt ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\theta dr = -\frac{\pi}{2} \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_{r=0}^{r=+\infty} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

donde se ha realizado el cambio a coordenadas polares $t = r \cos(\theta)$, $s = r \sin(\theta)$. Se tiene el resultado sin más que despejando de la expresión anterior.

8. Como consecuencia de las propiedades 4. y 7., se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \end{aligned}$$

Hemos visto que la definición de $\Gamma(z)$, en principio, tiene sentido para $z > 0$.

E.1. Otros resultados

A modo de Ejemplo, desarrollaremos la prueba del Lema 4.1.1 citada en el Capítulo 4, en la cual utilizaremos la función Gamma para llegar al resultado.

Lema E.1.1. (Masa de la solución fundamental). [2, Pág 46]. Sea $\varphi(x, t)$ la solución fundamental de la Ecuación del Calor (4.15), sea $x \in \mathbb{R}^n$, para cada $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, t) dx = 1. \quad (\text{E.2})$$

Demostración. Para resolver la integral (E.2) se realizará el siguiente cambio de variable:

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

Teniendo en cuenta que $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, $dx = dx_1, \dots, dx_n$

$$dx_1, \dots, dx_n = dz_1 2\sqrt{t}, \dots, dz_n 2\sqrt{t} \implies dx = (2\sqrt{t})^n dz.$$

Aplicando el cambio, la integral se reduce a:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, t) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{2^n t^{n/2}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z_i|^2} dz_i. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Para continuar a partir de (E.3), se hará uso de la *función Gamma*. En primer lugar, para poder usar dicha función, tenemos que hacer el siguiente cambio de variable:

$$u = z_i^2 \implies z_i = (u)^{1/2} \implies dz_i = \frac{1}{2} u^{-1/2} du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_i^2} dz_i = 2 \int_0^{+\infty} e^{-z_i^2} dz_i = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{1}{2} u^{-1/2} du \right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-1/2} du.$$

A partir de la Definición E.1 y aplicando la propiedad (E.1) se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_i^2} dz_i = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-1/2} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}.$$

Por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, t) dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z_i|^2} dz_i = \frac{1}{\pi^{n/2}} (\pi^{1/2} + \dots + \pi^{1/2}) = \frac{\pi^{n/2}}{\pi^{n/2}} = 1.$$

□

¹Aplicando que la función $e^{-z_i^2}$ es par.