Facultad de Ciencias

Espacios Topológicos Finitos

(Finite Topological Spaces)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Rodrigo Gallardo Gómez

Directora: Nuria Corral Pérez

Junio - 2023

Resumen

En este trabajo se ha llevado a cabo un estudio de los espacios topológicos finitos. Se han estudiado las propiedades topológicas básicas que cumplen los espacios topológicos finitos: la compacidad, la conexión, los axiomas de separación y el estudio de las aplicaciones continuas entre ellos. Además, se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos preordenados, por lo que se podrán considerar ambas estructuras matemáticas como iguales. Posteriormente, se ve que todo espacio topológico finito se puede representar mediante un grafo dirigido y que, además, los espacios finitos que verifiquen la hipótesis T_0 podrán ser representados por un diagrama de Hasse. Estos diagramas van a ser útiles para estudiar la homotopía de los espacios topológicos finitos, donde se verá que todo espacio topológico finito es homotópicamente equivalente a un espacio topológico finito minimal. Por último, se ha estudiado la Teoría de McCord, donde se prueba que a cada espacio topológico finito T_0 se le puede asociar un complejo simplicial, y que se puede definir una equivalencia homotópica débil entre la realización geométrica del complejo simplicial asociado y el espacio topológico finito. Del mismo modo, se prueba que a cada complejo simplicial se le puede asociar un espacio topológico finito T_0 y que, de nuevo, se puede definir una equivalencia homotópica débil entre la realización geométrica del complejo simplicial y el espacio topológico finito asociado.

Palabras clave: espacio topológico finito, base minimal, conjunto finito preordenado, axiomas de separación, diagrama de Hasse, núcleo, equivalencia homotópica débil, complejo simplicial.

Abstract

The present work is a study of finite topological spaces. The basic topological properties of finite topological spaces have been studied: compactness, connectedness, separation axioms and the properties of continuous maps between them. In addition, it has been proved the existence of a one-to-one correspondence between finite topological spaces and finite preordered sets, therefore, both mathematical structures can be considered as equals. Subsequently, it is shown that each finite topological space can be represented graphically via a directed graph and that, furthermore, the finite topological spaces that verify the T_0 hypothesis can be represented by a Hasse diagram. These diagrams will be valuable tools to study the homotopy of finite topological spaces, where it will be proved that each finite topological space is homotopically equivalent to a minimal T_0 finite topological space. Finally, the Theory of McCord has been studied, in which a simplicial complex is associated to each T_0 finite topological space, and it can be defined a weak homotopy equivalence from the geometric realization of the associated simplicial complex to the finite topological space. In the same way, a T_0 finite topological space can be associated to each simplicial complex, and a weak homotopy equivalence can also be defined from the geometric realization of the simplicial complex to the associated finite topological space.

Key words: finite topological space, minimal base, preordered finite set, separation axioms, Hasse diagram, core, weak homotopy equivalence, simplicial complex.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En 1937, el matemático ruso Alexandroff publicó un artículo [1] en el que trabajaba con un tipo concreto de espacios topológicos, los ahora llamados Espacios de Alexandroff, que él denomina *Diskreten Räumen* (espacios discretos). Estos espacios topológicos son los que verifican que la intersección arbitraria de abiertos es un conjunto abierto. En ese artículo, Alexandroff demuestra la relación biunívoca que hay entre los Espacios de Alexandroff T_0 y los conjuntos parcialmente ordenados, demostrando que ambas estructuras pueden considerarse como iguales. Los espacios topológicos finitos son un caso particular de Espacios de Alexandroff, por lo que ese artículo fue el comienzo del estudio de los espacios topológicos finitos.

A partir de entonces, los matemáticos se centraron en estudiar los espacios topológicos finitos, dejando de lado el estudio de los Espacios de Alexandroff infinitos. A finales de la década de 1960 y a principios de la década de 1970 fue cuando los espacios topológicos finitos tuvieron mayor relevancia. En esos años, matemáticos como McCord [8], Stong [15], Sharp [11], Stephen [14] y Stanley [13] publicaron resultados e investigaciones sobre estos espacios, donde cada uno enfocó su trabajo en el estudio de distintas propiedades de estos. Por ejemplo, mientras Stephen [14], Sharp [11] y Stanley [13] estudiaban el número de abiertos que podía tener una topología en un conjunto finito, Stong [15] se centraba en el estudio homotópico de los espacios topológicos finitos y McCord [8] relacionaba los espacios topológicos finitos con los complejos simpliciales.

Después de esa época, los espacios topológicos finitos perdieron interés en la comunidad matemática. No fue hasta inicios del siglo XXI cuando autores como May [7], Barmak [2] y [3], o algunos estudiantes es sus Trabajos de Fin de Grado, como Gutiérrez Gutiérrez [5] o Díaz Tiburón [4], volvieron a sacar a la luz este tema.

Además de los artículos citados previamente, han sido consultados otros documentos de topología general y de topología algebraica, como los libros de Munkres [10] y [9], Spanier [12], Maunder [6], o Willard [16], que nos han sido de ayuda para enunciar definiciones y resultados generales de la topología.

Como hemos indicado previamente, los espacios topológicos finitos son un caso particular de Espacios de Alexandroff, por lo que algunos de los resultados que demos en esta memoria serán ciertos para cualquier Espacio de Alexandroff. Sin embargo, en esta memoria nos centraremos en el estudio de los espacios topológicos finitos.

El capítulo 1 de la memoria es la presente introducción. En el capítulo 2 recordaremos algunas definiciones y resultados básicos de topología, a modo de preliminares y para que el trabajo sea lo más autocontenido posible.

En el capítulo 3 comenzaremos con el estudio de los espacios topológicos finitos. Veremos que en todo espacio topológico finito se puede construir una base minimal de la topología, la cual será muy importante a lo largo de todo el trabajo. Demostraremos la relación biunívoca que hay entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos preordenados, y cómo pasar de uno a otro, además de ver que los espacios topológicos finitos T_0 son equivalentes a los conjuntos finitos parcialmente ordenados. Enunciaremos varias propiedades sobre la conexión y la conexión por caminos de los espacios topológicos finitos, introduciremos la noción de conexión por orden, y probaremos que las tres nociones son equivalentes en espacios topológicos finitos. A continuación, dedicaremos una sección a estudiar los axiomas de separación, y veremos la relación que existe entre estos axiomas y ciertas relaciones de preorden. Por último en este capítulo, entraremos a estudiar la continuidad de las aplicaciones entre espacios topológicos finitos, y veremos propiedades que cumple el espacio de aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos finitos.

El objetivo del capítulo 4 es estudiar el tipo de homotopía de un espacio topológico finito. En la primera sección, haremos un repaso de las definiciones y resultados más importantes sobre homotopía general. En la segunda veremos que se pueden representar los espacios topológicos finitos mediante grafos dirigidos y que, más aún, los espacios topológicos finitos T_0 pueden ser representados por un diagrama de Hasse. Por último, estudiaremos la teoría de homotopía de espacios topológicos finitos. Mostraremos la construcción del cociente de Kolmogorov de un espacio topológico finito, demostraremos que dicho espacio de Kolmogorov es T_0, y que todo espacio topológico finito es homotópicamente equivalente a su cociente de Kolmogorov. Veremos la noción de núcleo de un espacio y, ayudándonos del cociente de Kolmogorov, demostraremos que cualquier espacio topológico finito tiene un núcleo, que dicho núcleo es único salvo homeomorfismo, y que tiene el mismo tipo de homotopía que el espacio. Gracias a los diagramas de Hasse, podremos ver cómo llegar al núcleo de un espacio topológico finito.

Por último, en el capítulo 5 nos centraremos en la teoría de McCord. Tendremos que introducir los grupos de homotopía de orden superior para poder dar la definición de equivalencia homotópica débil. También introduciremos definiciones sobre complejos simpliciales para, en la última sección de la memoria, poder estudiar la relación que hay entre los espacios topológicos finitos T_0 y los complejos simpliciales. Veremos que todo espacio topológico X finito T_0 tiene asociado un complejo simplicial, cuya realización geométrica es débilmente homotópicamente equivalente a X, y que todo complejo simplicial K tiene asociado un espacio topológico X finito T_0 tal que la realización geométrica de K es débilmente homotópicamente equivalente a X.

Capítulo 2

Preliminares de topología

Comenzaremos este trabajo recordando algunas definiciones básicas de topología y algunos de los conceptos que vamos a usar a lo largo del trabajo, además de algunos resultados de topología general que no se van a demostrar. La prueba de estos resultados se puede encontrar en cualquier libro de topología básica, como, por ejemplo, en Munkres [10].

Recordemos la definición de espacio topológico.

Definición 2.1. Un *espacio topológico* es un par (X, τ) donde X es un conjunto y $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ un conjunto de conjuntos de X que cumple:

- El conjunto vacío y X pertenecen a τ .
- Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de τ, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$.
- Si $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de elementos de τ, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

A τ se le llama topología sobre X y sus elementos se denominan *abiertos*.

Ejemplo 2.2. Veamos algunos ejemplos sencillos de espacios topológicos:

1. Dado un conjunto X cualquiera, el conjunto $\{\emptyset, X\}$ es una topología en X llamada topología trivial. Se simbolizará como $\tau_{trivial}$.

2. Dado un conjunto X cualquiera, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ es una topología en X, llamada topología discreta. Se simbolizará como $\tau_{discreta}$. Con esta topología, todos los subconjuntos de X son abiertos. Cuando un conjunto X esté dotado de $\tau_{discreta}$, diremos que X es discreto.

3. En $\mathbb{R}$, se llama topología usual a la formada por todos los intervalos de la forma (a, b) con $a < b$, y por las uniones arbitrarias de estos. La topología usual se simbolizará como τ_u. Por ejemplo, $(0, 1)$ es un abierto de $(\mathbb{R}, \tau_u)$, mientras que $[0, 1)$, $(0, 1]$ y $[0, 1]$ no lo son.

A un subconjunto de un espacio topológico se le puede dotar de estructura de espacio topológico mediante la llamada topología de subespacio. Vamos a definirla.

Definición 2.3. Sea (X, τ_X) un espacio topológico e $Y \subseteq X$ un subconjunto de X. En Y se define la topología de subespacio τ_Y de la siguiente forma:

$$V \in \tau_Y \iff V = U \cap Y \text{ donde } U \in \tau_X$$

Notación: Salvo que se indique lo contrario, en $[0,1]$ consideraremos la topología de subespacio como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Definición 2.4. Un *espacio topológico finito* es un espacio topológico (X,τ) donde X es un conjunto finito, es decir, $|X| = n \in \mathbb{N}$

Notación: Se denotará como X a un espacio topológico cuando la topología definida en el espacio no sea relevante para el resultado. En otro caso, se escribirá (X,τ).

Una vez introducida la noción de conjunto abierto, daremos la definición de conjunto cerrado.

Definición 2.5. Dados un espacio topológico (X,τ) y un subconjunto F de X, se dice que F es *cerrado* si el complementario de F es abierto, es decir, si $X \backslash F \in \tau$.

Introduciremos también las definiciones de entorno y de base de entornos, pues serán útiles en varias definiciones y demostraciones.

Definición 2.6. Sean (X,τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un *entorno* de x es un conjunto $U \subset X$ tal que existe $V \in \tau$ con $x \in V \subset U$. Si además $U \in \tau$, diremos que U es un *entorno abierto* de x. El conjunto $\mathcal{U}_x$ de todos los entornos de x se denomina *sistema de entornos* de x.

Definición 2.7. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Una *base de entornos* para x en X es una subcolección $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{U}_x$ donde para todo $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ con $V \subseteq U$. De esta forma, se puede construir $\mathcal{U}_x$ a partir de $\mathcal{B}_x$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : V \subseteq U \text{ para algún } V \in \mathcal{B}_x\}$$

Los elementos de $\mathcal{B}_x$ se llamarán *entornos básicos.*

Será importante a lo largo del trabajo la noción de adherencia de un conjunto.

Definición 2.8. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subconjunto, se llama *adherencia de A* al menor cerrado que contiene a A. Se denotará como $\overline{A}$, y verifica que $\overline{A} := \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F cerrado}} F$.

Proposición 2.9. *Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ un subconjunto y $x \in X$, entonces:*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \textit{para todo entorno abierto } U \textit{ de } x\textit{, se tiene que } U \cap A \neq \emptyset$$

También será de utilidad recordar la definición de base de una topología.

Definición 2.10. Sea (X,τ) un espacio topológico. Decimos que β es una *base para la topología* τ si $\beta \subset \tau$ y todo abierto de X se puede escribir como unión de elementos de β.

Lema 2.11. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Se tiene que β es una base para la topología τ si, y solo si, para todo abierto U y para todo $x \in U$, existe $B \in \beta$ con $x \in B \subseteq U$.*

Ejemplo 2.12. En $(\mathbb{R},\tau_u)$, una base para la topología usual es el conjunto formado por todos los intervalos de la forma (a,b) con $a < b$.

Teorema 2.13. *Sean X un conjunto y $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se dice que β es base para una topología en X si, y solo si,*

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$.

2. Para cualesquiera $B_1, B_2 \in \beta$ con intersección no vacía y para todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

La topología generada por β será aquella formada por el conjunto vacío y por uniones arbitrarias de elementos de β.

También, como parte de un trabajo de topología, es importante recordar la definición de aplicación continua, pues será útil a lo largo de todo el trabajo, así como la de homeomorfismo.

Definición 2.14. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Una aplicación $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es *continua* si para todo abierto V en Y, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un abierto en X.

Definición 2.15. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos y $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ una aplicación. Se dice que f es *homeomorfismo* si f es biyectiva, continua y con inversa continua.

Un tipo de aplicación continua importante a lo largo de todo el trabajo son los caminos, definidos de la siguiente manera:

Definición 2.16. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se llama *camino* en X a cualquier aplicación continua $\sigma : [0, 1] \to X$. Los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$ se llaman *extremos del camino*. Además, dado un camino σ, se define el camino inverso de σ como $\overline{\sigma}(s) := \sigma(1 - s)$.

También será importante la concatenación de caminos para algunos resultados del trabajo.

Definición 2.17. Sean X un espacio topológico y dos caminos $\delta, \gamma : [0, 1] \to X$ tales que $\delta(1) = \gamma(0)$. Podemos considerar la *concatenación* de δ y γ, que se denota por $\delta * \gamma$, y está dada por:

$$(\delta * \gamma)(s) = \begin{cases} \delta(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observemos que la concatenación de dos caminos es un camino.

Recordaremos también las definiciones de las propiedades topológicas básicas, como son la compacidad, la conexión y la conexión por caminos.

Definición 2.18. Un *recubrimiento* de un espacio topológico X es una colección $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X cuya unión es X.
Un recubrimiento se dirá que es un *recubrimiento abierto* si todos los conjuntos de la colección son abiertos.

Definición 2.19. Un *subrecubrimiento* de un recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ es una subcolección $\{U_j\}_{j \in J}$ con $J \subset I$ que a su vez es un recubrimiento.

Definición 2.20. Un espacio topológico (X, τ) se dice *compacto* si todo recubrimiento abierto del espacio admite un subrecubrimiento finito.

Definición 2.21. Un espacio topológico es *localmente compacto* si todo punto admite una base de entornos compactos.

Definición 2.22. Un espacio topológico (X, τ) es *conexo* si no existen dos abiertos U, V disjuntos no vacíos tales que $X = U \cup V$.

Definición 2.23. Un espacio topológico (X, τ) es *conexo por caminos* si para cualesquiera $x, y \in X$, existe un camino σ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$.

Por último, antes de pasar a desarrollar el contenido propio del trabajo, daremos unos últimos resultados y definiciones relacionados con la conexión que serán de utilidad a lo largo del trabajo.

Proposición 2.24. *Si un espacio topológico es conexo por caminos entonces es conexo.*

Definición 2.25. Un espacio topológico X se dice *localmente conexo* si cualquier $x \in X$ tiene una base de entornos conexos.

Definición 2.26. Un espacio topológico X se dice *localmente conexo por caminos* si cualquier $x \in X$ tiene una base de entornos conexos por caminos.

Teorema 2.27. *Un espacio topológico localmente conexo por caminos es localmente conexo.*

Lema 2.28. *Si X es un espacio topológico conexo y localmente conexo por caminos, entonces X es conexo por caminos.*

Capítulo 3

Propiedades de los espacios topológicos finitos

En esta sección estudiaremos las propiedades topológicas elementales (conexión, compacidad, axiomas de separación...) que cumplen los espacios topológicos finitos. Esta sección será el núcleo del trabajo, y encontraremos en ella resultados relevantes y, a mi parecer, incluso sorprendentes, pues veremos que los espacios topológicos finitos se pueden relacionar biunívocamente con otro tipo de estructura matemática, los conjuntos finitos preordenados, que, a primera vista, podría parecer que no tienen nada que ver entre sí, y que, sin embargo, esta relación será clave a lo largo de todo el trabajo.

3.1. Primeros resultados

El primer resultado que observamos sobre espacios topológicos finitos es el siguiente:

Teorema 3.1.1. *Un espacio topológico finito tiene un número finito de abiertos en su topología.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico finito con n elementos. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ de las partes de X tiene 2^n elementos. Como $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces τ contiene a lo sumo 2^n abiertos, por lo que la topología tiene un número finito de abiertos. $\square$

Como resultado directo de esta proposición obtenemos:

Corolario 3.1.2. *Todo espacio topológico finito es compacto.*

Demostración. Como un espacio topológico finito solo tiene un número finito de abiertos, cualquier recubrimiento abierto del espacio será finito. Por lo tanto, el espacio es compacto. $\square$

Relacionado con el número de abiertos que tiene la topología de un espacio finito, tenemos un artículo de Sharp [11] y otro de Stanley [13] en los que se enuncian varios resultados sobre el cardinal de las topologías en conjuntos finitos. Cada autor enfocó su trabajo desde un punto de vista distinto. Sharp [11] pone una condición al espacio topológico, como, por ejemplo, ser conexo, y da una cota al número máximo de abiertos que puede tener una topología con esas condiciones. Por otra parte, Stanley [13] indica exactamente cuántos espacios topológicos distintos salvo homeomorfismo hay con n elementos que cumplan una condición, por ejemplo, ser T_0, y que tienen un número concreto de abiertos.

Otro resultado relevante en el estudio del cardinal de una topología es el siguiente teorema, enunciado por Stephen [14].

Teorema 3.1.3. *Sea X un conjunto con $n > 1$ elementos. La única topología en X con más de $3 \cdot 2^{n-2}$ conjuntos abiertos es la topología discreta.*

Este resultado se puede encontrar también en el artículo de Sharp [11], donde él lo enuncia de la siguiente forma:

Teorema 3.1.4. *Si X es un conjunto finito con $n \geq 2$ elementos, no existe ninguna topología τ en X que verifique:*

$$\frac{3}{4}2^n < |\tau| < 2^n$$

Es claro que los dos teoremas son equivalentes, por lo que nos bastará con demostrar uno de los dos. Demostraremos el enunciado por Stephen, usando también su prueba, pero antes de pasar a ello, necesitamos introducir un teorema intermedio, en cuya demostración realizaremos una construcción que nos será de gran utilidad a lo largo de todo el trabajo.

Teorema 3.1.5. *Para cualquier espacio topológico finito existe una única base minimal de la topología.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico finito. Para cada $x \in X$ consideramos

$$B_x := \bigcap_{\substack{x \in U \\ U \in \tau}} U \tag{3.1}$$

la intersección de todos los abiertos de τ que contienen a x. Como X es finito, en τ solo hay un número finito de abiertos, por lo que B_x es un abierto al ser intersección de un número finito de abiertos. Entonces $B_x \in \tau$ para cada $x \in X$. De hecho, para todo $x \in X$, se tiene que B_x es igual a uno de los elementos de la intersección.

Consideramos $\beta = \{B_x : x \in X\}$ el conjunto formado por los abiertos definidos previamente. Veamos que β es base de τ y que es minimal (en el sentido de la inclusión) y única.

Como $B_x \in \tau$ para todo $x \in X$, es claro que $\beta \subset \tau$. Veamos que para cualquier abierto U de X, se tiene que $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. Probemos la igualdad por doble contenido:

$\subseteq$) Para todo $p \in U$, es claro que $p \in B_p$. Entonces, $p \in B_p \subseteq \bigcup_{x \in U} B_x$. Por lo tanto, $U \subseteq \bigcup_{x \in U} B_x$.

$\supseteq$) Por definición de B_x se tiene que $B_x \subseteq U$ para cada $x \in U$. Entonces $\bigcup_{x \in U} B_x \subseteq U$.

Por lo tanto, queda demostrado que β es una base de la topología τ, ya que cualquier abierto de esta se puede escribir como unión de elementos de β. Falta probar que la base es minimal y única. Para ver que es minimal, veamos que cualquier otra base de la topología contiene a β.

Sea $\mathcal{V}$ una base para la topología τ. Sea $x \in X$, como B_x es un abierto de τ, existen V_1,...,V_r elementos de $\mathcal{V}$ tales que $B_x = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$. Esto implica que cada V_i está contenido en B_x. Entonces, existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $x \in V_j$, por lo que, como V_j es abierto, se tiene que $B_x \subseteq V_j$. De esta forma, $B_x = V_j$, por lo que todo elemento de β está también en $\mathcal{V}$, así que $\beta \subseteq \mathcal{V}$, como queríamos probar. Además, esto también prueba que la base minimal es única, porque si existiera cualquier otra base minimal, tendría que ser ella misma. Por lo tanto, queda demostrado el resultado. □

Notación: la base β construida en la demostración anterior la vamos a denotar como *base minimal de la topología*. Los conjuntos B_x que la forman serán denominados *abiertos minimales* de la topología. Además, dado x un punto del espacio, B_x lo llamaremos *abierto minimal asociado a x*.

Observación 3.1.6. Sean (X, τ) un espacio topológico y β la base minimal de su topología. Para todo $x \in X$, el abierto minimal asociado a x, $B_x \in \beta$, cumple que para todo $V \in \tau$ con $x \in V$, se tiene que $B_x \subseteq V$.

A continuación, vamos a utilizar la base minimal como apoyo para probar el teorema de Stephen.

Demostración del Teorema 3.1.3. Sea (X, τ) un espacio topológico finito con n elementos. Denotamos por $N(\tau)$ al número de abiertos que hay en la topología τ. Consideramos la base minimal $\beta = \{B_x : x \in X\}$ de τ construida en la demostración anterior. Es claro que $|\beta| \leq n$, puesto que puede ocurrir que $B_x = B_y$ para $x \neq y$. Supongamos que $1 \leq |\beta| = k \leq n$.

- Si $k = 1$, entonces $\beta = \{X\}$, por lo que la topología en X es la trivial.

- Suponemos entonces que $k > 1$:

i) Primer caso: suponemos que en β no existen $B_x \neq B_y$ tales que $B_x \subset B_y$.
Veamos que esto significa que para cualquier $x \in X$, se tiene que $B_x \not\subset \bigcup\limits_{\substack{B \in \beta \\ B \neq B_x}} B$:

Llamemos $C_x = \{B \in \beta : B \neq B_x\}$. Supongamos por reducción al absurdo que $B_x \subset \bigcup\limits_{B \in C_x} B$.
Entonces, como $x \in B_x$, existe $B \in C_x$ tal que $x \in B$, luego $x \in B_x \cap B$. Pero por construcción de B_x, sabemos que $B_x \subset B_x \cap B$, lo que implica que $B_x \subset B$, con lo que llegamos a una contradicción con la hipótesis inicial. Por lo tanto, $B_x \not\subset \bigcup\limits_{B \in C_x} B$ como queríamos demostrar. Además, si C es un subconjunto de C_x, entonces $B_x \not\subset \bigcup\limits_{B \in C} B$, es decir, B_x tampoco está contenido en la unión de un subconjunto de C_x, con lo que $(\bigcup\limits_{B \in C} B) \cup B_x \neq \bigcup\limits_{B \in C} B$.

De esta forma, $N(\tau)$ será la suma del número de uniones de h elementos distintos de β con $h = 0, ..., k$. Es decir:
$N(\tau) = 1 + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + ... + \binom{k}{k-1} + 1 = \sum\limits_{n=0}^{k} \binom{k}{n} = 2^k$ por propiedades de los números combinatorios. Distinguimos dos casos:

1. Si $k = n$, entonces $N(\tau) = 2^n$ y por lo tanto, τ es la topología discreta.
2. Si $1 < k < n$, entonces $N(\tau) = 2^k \leq 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2} < 3 \cdot 2^{n-2} < 2^n$ y, claramente, τ no es la topología discreta.

ii) Segundo caso: supongamos que en β existen solo dos elementos B_x, B_y tales que $B_x \subsetneq B_y$. Este caso no es incompatible con que existan $p, q \in X$ tales que $B_p = B_q$.
Igual que en el caso anterior, para contar el número de abiertos contamos las posibles combinaciones distintas de uniones de elementos de β.
Dados $x, y \in X$ tales que sus abiertos de la base asociados verifican $B_x \subsetneq B_y$, consideramos los conjuntos C_x, C_y definidos como en el apartado anterior. Tomamos $B \in C_x \cap C_y$, entonces $B \neq B_x$ y $B \neq B_y$. Para cualquier subconjunto C de $C_x \cap C_y$ se tiene que $(\bigcup\limits_{B \in C} B) \cup B_y = (\bigcup\limits_{B \in C} B) \cup B_y \cup B_x$.
Por ejemplo, si $C = \emptyset$, $B_y = B_y \cup B_x$, por lo que una de las uniones de dos elementos ya está contabilizada en las uniones de un elemento.

De la misma forma, hay $\binom{k-2}{m-2}$ uniones de m abiertos que ya están contabilizados en las uniones de $m-1$ abiertos. El resto de las uniones, al igual que en el caso anterior, son todas distintas. De esta forma:

$$N(\tau) = 1 + \binom{k}{1} + \left(\binom{k}{2} - \binom{k-2}{0}\right) + \left(\binom{k}{3} - \binom{k-2}{1}\right) + ... + \left(\binom{k}{k} - \binom{k-2}{k-2}\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} - \sum_{m=0}^{k-2} \binom{k-2}{m} = 2^k - 2^{k-2} = 4 \cdot 2^{k-2} - 2^{k-2} = 3 \cdot 2^{k-2}$$

1. Si $k < n$, entonces $3 \cdot 2^{k-2} < 3 \cdot 2^{n-2}$, y la topología no es la discreta.
2. Si $k = n$, entonces $N(\tau) = 3 \cdot 2^{n-2}$, y la topología tampoco es la discreta.

iii) Último caso: supongamos que existen al menos dos elementos B_x, B_y tales que $B_x \subsetneq B_y$. En este caso, es claro que el número de abiertos será menor o igual que en el segundo caso, siendo igual solamente si existen exactamente dos B_x, B_y que lo cumplen. Entonces, $N(\tau) \leq 3 \cdot 2^{n-2}$ y la topología no es discreta.

Para acabar la prueba, construyamos una topología en X que tenga exactamente $3 \cdot 2^{n-2}$ abiertos, es decir, veamos que la cota no se puede mejorar.

Sea $X = \{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto finito con n elementos. Para $i = 1, ..., n-1$ definimos $B_{x_i} = \{x_i\}$ y sea $B_{x_n} = \{x_1, x_n\}$. Consideramos $\beta_1 = \{B_{x_i} : i \in \{1, ..., n-1\}\}$ y $\beta = \beta_1 \cup \{B_{x_n}\}$. Veamos que β es base para una topología en X, que vamos a denominar τ_β, y que dicha topología tiene $3 \cdot 2^{n-2}$ abiertos.

Es claro que $\bigcup_{B \in \beta} B = X$. Además, los únicos elementos de β que tienen intersección no vacía son B_{x_1} y B_{x_n}, pues el resto son todos unipuntuales y disjuntos. Se tiene que, $B_{x_1} \cap B_{x_n} = \{x_1\} = B_{x_1}$, por lo que $x_1 \in B_{x_1} \subseteq B_{x_1} \cap B_{x_n}$, y se verifican las hipótesis del Teorema 2.13. Por lo tanto, β es base para una topología en X, en concreto, de τ_β.

Realizando uniones arbitrarias de elementos de β_1, obtenemos 2^{n-1} abiertos distintos de la topología τ_β, de los cuales, ninguno contiene a x_n. Por otra parte, realizando uniones arbitrarias de $\beta_1 \backslash \{\{x_1\}\} = \beta_1 \backslash \{B_{x_1}\}$ y haciendo la unión de estas uniones con el conjunto $\{x_1, x_n\}$, obtenemos 2^{n-2} abiertos distintos, que todos ellos contienen a x_n. No hay más abiertos distintos en τ_β, por lo que $N(\tau_\beta) = 2^{n-1} + 2^{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}$, como queríamos demostrar. □

Para finalizar esta sección, vamos a dar un resultado relacionando la base minimal de la topología con la base de entornos.

Proposición 3.1.7. *Sea X un espacio topológico finito y β la base minimal de su topología. Para cada $x \in X$, el conjunto $\{B_x\}$ es una base de entornos para x, donde $B_x \in \beta$ es el abierto minimal asociado a x.*

Demostración. Fijado $x \in X$, para ver que $\{B_x\}$ es base de entornos de x tenemos que comprobar que $\{B_x\}$ verifica la Definición 2.7, es decir, hay que ver que para cualquier entorno U de x, se tiene que $B_x \subseteq U$. Tomamos U un entorno cualquiera de x. Por la definición de entorno de x, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq U$. Como vimos en la Observación 3.1.6, al ser V un abierto, entonces $B_x \subseteq V$ y, claramente, $x \in B_x$. En conclusión $x \in B_x \subseteq V \subseteq U$, como queríamos ver, con lo que queda probado que $\{B_x\}$ es una base de entornos para x. □

Este resultado nos será de utilidad para comprobar cuándo un espacio topológico finito cumple las propiedades locales, como por ejemplo, la compacidad.

Proposición 3.1.8. *Si X es un espacio topológico finito, entonces todo abierto de X es compacto.*

Demostración. Como X es espacio topológico finito, todo subconjunto abierto de X es finito, luego todo abierto es un conjunto compacto. □

Corolario 3.1.9. *Todo espacio topológico finito es localemente compacto.*

Demostración. Para cualquier punto $x \in X$, la base de entornos $\{B_x\}$ está formada únicamente por el abierto minimal de x, el cual, al ser un conjunto abierto, es compacto, como acabamos de ver en la Proposición 3.1.8. Entonces $\{B_x\}$ es una base de entornos compactos. □

3.2. Órdenes parciales y preórdenes

En esta sección vamos a ver la relación que tienen los espacios topológicos finitos con los conjuntos preordenados y parcialmente ordenados. Daremos también la definición de espacio topológico T_0, pues será importante en esta sección, aunque volveremos a enunciarla más adelante en el trabajo junto al resto de los axiomas de separación.

Definición 3.2.1. Un espacio topológico X es T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe un abierto que contiene a uno de los puntos y no al otro.

Daremos una caracterización de los espacios topológicos finitos T_0, que será de utilidad para relacionarlo con los conjuntos parcialmente ordenados.

Proposición 3.2.2. *Un espacio topológico finito X es T_0 si, y solo si, para $x, y \in X$, $B_x = B_y$ implica que $x = y$.*

Observación 3.2.3. La segunda implicación de la proposición es equivalente a que si $x, y \in X$ son distintos, entonces $B_x \neq B_y$.

Demostración de la Proposición 3.2.2: Probemos el resultado por doble implicación.

Supongamos que X es T_0. Entonces, dados $x, y \in X$ distintos, existe un abierto U que contiene a uno y no al otro. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \in U$ e $y \notin U$. Entonces $B_x \subseteq U$ y $B_y \nsubseteq U$, por lo que estos dos conjuntos son distintos.

Para la otra implicación, supongamos que para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, se tiene que $B_x \neq B_y$. Entonces tenemos que ver que existe un abierto que contiene a uno y no al otro. Para ello, basta ver que, o bien $x \notin B_y$, o bien $y \notin B_x$. Supongamos por reducción al absurdo que $x \in B_y$ e $y \in B_x$. Entonces, todo abierto que contiene a x contiene también a y y viceversa. Por lo tanto, teniendo en cuenta la definición de B_x en (3.1), obtenemos $B_x = B_y$. Pero esto es un absurdo, porque por hipótesis $B_x \neq B_y$. Por lo tanto, o bien $x \notin B_y$ o bien $y \notin B_x$. De esta forma, como B_x y B_y son abiertos, y al menos uno de ellos contiene solo a uno de los dos puntos, se verifica que el espacio es T_0.

Quedan así probadas ambas implicaciones del resultado. □

Enunciemos también las definiciones de orden y preorden.

Definición 3.2.4. Un *preorden* en un conjunto X es una relación binaria $\leq$ en X que es reflexiva y transitiva, es decir, que verifica:

- $x \leq x$ para todo $x \in X$.
- Dados $x, y, z \in X$ tales que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

En este caso, diremos que $(X, \leq)$ es un *conjunto preordenado*.

Definición 3.2.5. Un *orden parcial* en un conjunto X es una relación binaria $\leq$ en X que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. Es decir, que verifica:

- $x \leq x$ para todo $x \in X$.

- Dados $x, y, z \in X$ tales que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
- Dados $x, y \in X$, si $x \leq y$ e $y \leq x$, entoces $x = y$.

En este caso, diremos que $(X, \leq)$ es un *conjunto parcialmente ordenado*.

Observación 3.2.6. Podemos observar que un orden parcial es un preorden antisimétrico, y que un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto preordenado cuya relación es antisimétrica.

Será importante definir también la noción de desigualdad estricta a partir del orden ya definido.

Definición 3.2.7. Sea $(X, \leq)$ un conjunto preordenado. Dados $x, y \in X$, diremos que $x < y$ si $x \leq y$ y además $x \neq y$.

Definición 3.2.8. Dados un conjunto preordenado finito $(X, \leq)$ y $x, y \in X$, diremos que x e y son *comparables* si $x \leq y$ ó $y \leq x$. En caso de no cumplirse ninguna de las dos, diremos que x e y *no son comparables*.

Definición 3.2.9. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es un *subconjunto totalmente ordenado* si cualesquiera $x, y \in Y$, x e y son comparables.

Una vez dadas las definiciones pertinentes, vamos a relacionar los espacios topológicos finitos con el concepto de preorden.

Definición 3.2.10. Sea (X, τ) un espacio topológico finito. Definimos el preorden $\leq_\tau$ en X de la siguiente forma:

$$x \leq_\tau y \Longleftrightarrow x \in B_y \ \text{ (lo cual es equivalente a } B_x \subseteq B_y\text{)}$$

Comprobemos que la relación es un preorden. Es claro que $x \leq_\tau x$, pues $x \in B_x$ para todo $x \in X$. Además, para $x, y, z \in X$ tales que $x \leq_\tau y$ e $y \leq_\tau z$, entonces $x \in B_y$ e $y \in B_z$. Esto último es equivalente a $B_y \subseteq B_z$, por lo que $x \in B_z$. Entonces $x \leq_\tau z$, por lo que la relación es transitiva.

Observación 3.2.11. La relación $\leq_\tau$ no tiene por qué ser un orden parcial, pues pueden existir $x \neq y$ tales que $B_x = B_y$, como vamos a ver en el ejemplo a continuación.

Ejemplo 3.2.12. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\}$, entonces $B_a = B_b = \{a, b\}$, pero $a \neq b$, por lo que la relación $\leq_\tau$ no es un orden parcial.

Hemos visto que en todo espacio topológico finito se puede dar una relación de preorden. Vamos a ver que el recíproco también es cierto. Es decir, dado un conjunto preordenado finito, se puede definir en él una topología.

Proposición 3.2.13. *Dado un conjunto preordenado finito $(X, \leq)$, se puede definir en él una topología cuyos abiertos son los subconjuntos U de X que verifican:*

$$\text{si } x \in U \text{ e } y \leq x \Rightarrow y \in U \tag{3.2}$$

En esta topología, el conjunto $\beta_\leq := \{B_x : x \in X\}$ donde para cada $x \in X$:

$$B_x = \{y \in X : y \leq x\}$$

es una base minimal para la topología. La topología definida de esta forma la denominaremos $\tau_\leq$.

Demostración. Comprobemos que $\tau_{\leq}$ es una topología en X. Es claro que el vacío y X verifican la propiedad (3.2). Además, si tomamos una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos y $x, y \in X$ con $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$ e $y \leq x$, entonces existe $j \in I$ con $x \in U_j$ y, al ser U_j abierto, tenemos que $y \in U_j$, con lo que $y \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} U_i$ verifica la condición (3.2), por lo que la unión arbitraria de abiertos es abierta. Por último, tomemos una familia finita de abiertos $\{U_i\}_{i=1}^n$ y $x, y \in X$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ e $y \leq x$. Entonces $x \in U_i$ para todo $i = 1, ..., n$, y como todos ellos son abiertos, entonces $y \in U_i$ para todo $i = 1, .., n$, por lo que $y \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Por lo tanto, se verifica (3.2), con lo que la intersección finita de abiertos es un abierto. De esta forma, queda probado que los conjuntos que verifican (3.2) forman una topología.

Además, es inmediato comprobar que, dados $x \in X$ y U un abierto cualquiera con $x \in U$, se tiene que $B_x \subseteq U$. Por lo tanto, B_x es el abierto minimal de x. □

Con estos resultados hemos probado que hay una correspondencia biunívoca entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos finitos preordenados. Es decir, que en todo espacio topológico finito se puede definir un preorden, y que en cualquier conjunto preordenado finito se puede dar una topología. Vamos a definir la noción de topología y preorden asociados para, posteriormente, enunciar un resultado más fuerte de relación.

Definición 3.2.14. Dados una topología τ y un preorden $\leq$ definidos en un conjunto finito X, decimos que τ y $\leq$ son asociados si se verifica que $\leq$ es idéntica a $\leq_\tau$ y τ es idéntica a $\tau_{\leq}$.

Teorema 3.2.15. *Sean X un conjunto finito, y τ una topología y $\leq$ un preorden asociados en X. Entonces, son equivalentes:*

i) (X, τ) *es un espacio topológico* T_0.

ii) $(X, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

Demostración. Vimos en la Proposición 3.2.2 que ser T_0 era equivalente a que si $x, y \in X$ con $B_x = B_y$, entonces $x = y$. Usaremos esta caracterización en la demostración de la prueba, la cual realizaremos por doble implicación.

i)⇒ii) Supongamos que (X, τ) es T_0. Tenemos que comprobar que se cumple la propiedad antisimétrica. Tomemos $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces se tiene $x \in B_y$ e $y \in B_x$. Entonces, $B_x = B_y$. Pero como X es T_0, esto implica que $x = y$. Por lo tanto, se verifica la propiedad antisimétrica, por lo que $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

ii)⇒i) Supongamos que $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Sean $x, y \in X$ tales que $B_x = B_y$. Entonces se tiene que $x \leq y$ e $y \leq x$, pero como $\leq$ es un orden parcial, entonces $x = y$. Por lo tanto, se verifica la caracterización de la Proposición 3.2.2, por lo que (X, τ) es T_0.

□

Para finalizar esta sección, enunciaremos y demostraremos dos resultados breves que nos serán de utilidad en las pruebas de algunas proposiciones posteriores.

Proposición 3.2.16. *Sean X un espacio topológico finito y $\beta = \{B_x : x \in X\}$ su base minimal, se tiene que, para $x, y \in X$:*

$$x \in B_y \text{ si, y solo si } y \in \overline{\{x\}}$$

Demostración. La prueba es bastante sencilla, pues se tiene

$$x \in B_y \Leftrightarrow \text{ todo abierto en } X \text{ que contiene a } y \text{ contiene también a } x \ \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}$$

□

Gracias a este resultado, es inmediato lo siguiente.

Corolario 3.2.17. *Sean X un espacio topológico finito y $\leq$ el preorden asociado. Se tiene:*

$$x \leq y \text{ si, y solo si } y \in \overline{\{x\}}$$

A partir de ahora, a lo largo del trabajo usaremos indistintamente que X es un espacio topológico finito o que es un conjunto preordenado con relación asociada $\leq$, ya que hemos probado que están biunívocamente relacionados.

3.3. Conexión

En esta sección vamos a estudiar la conexión de los espacios topológicos finitos y vamos a relacionarlo con el preorden que se puede definir en un espacio topológico finito gracias a una nueva noción llamada conexión por orden.

El primer resultado para esta sección es el siguiente:

Proposición 3.3.1. *Dado un espacio topológico finito X, se tiene que los abiertos minimales B_x son conexos por caminos.*

Demostración. Sea $x \in X$ y consideramos $B_x \in \beta$ el abierto minimal asociado a x. Veamos que para todo $y \in B_x$, existe un camino σ que une x con y.

Sea $y \in B_x$. Definimos:

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & [0,1] & \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } t = 0 \\ y & \text{si } t \in (0,1] \end{cases} \end{array}$$

Es claro que $\sigma(0) = x$ y que $\sigma(1) = y$. Veamos que la aplicación σ es continua, con lo que sería un camino.

Sea U un abierto de X. Como $y \in B_x$, todo abierto que contiene a x también contiene a y, por lo que tenemos tres opciones para U.

- Si x e y pertenecen a U, entonces $\sigma^{-1}(U) = [0,1]$, que claramente es abierto de $[0,1]$.
- Si y pertenece a U pero x no, entonces $\sigma^{-1}(U) = (0,1]$, que también es abierto de $[0,1]$.
- Si ninguno de los dos puntos pertenece a U, entonce $\sigma^{-1}(U) = \emptyset$, que también es abierto del intervalo.

De esta forma, la contraimagen de cualquier abierto en X es abierto en $[0,1]$, por lo que σ es un camino. Por lo tanto, el conjunto B_x es conexo por caminos. □

A continuación, vamos a enunciar una observación que será de utilidad más adelante en un resultado más importante.

Observación 3.3.2. La proposición anterior se puede enunciar de forma equivalente como: si x e y son comparables, entonces existe un camino que los une.

Gracias a la Proposición 3.3.1, obtenemos de forma inmediata el siguiente resultado:

Corolario 3.3.3. *Todo espacio topológico finito es localmente conexo por caminos.*

Demostración. Sean X un espacio topológico finito y $x \in X$. Como B_x es conexo por caminos y $\{B_x\}$ es una base de entornos de x, como vimos en la Proposición 3.1.7, entonces se tiene que $\{B_x\}$ es una base de entornos conexos por caminos. Es decir, cada punto tiene una base de entornos conexo por caminos, por lo que el espacio X es localmente conexo por caminos. □

El siguiente resultado es inmmediato también.

Corolario 3.3.4. *Un espacio topológico finito es conexo si, y solo si, es conexo por caminos.*

Demostración. Sea X un espacio topológico. Por la Proposición 2.24, sabemos que si X es conexo por caminos, entonces es conexo.

Para el recíproco, sabemos por el Corolario 3.3.3 que X es localmente conexo por caminos. Si suponemos que X es conexo, gracias al Lema 2.28, al ser conexo y localmente conexo por caminos, entonces X es conexo por caminos. □

Será de utilidad, tanto en esta sección como más adelante en el trabajo, dar la definición de componente conexa y de componente conexa por caminos para cualquier espacio topológico. Veremos que, en espacios topológicos finitos, las componentes conexas y conexas por caminos coinciden. Comenzaremos con la definición general de componente conexa.

Definición 3.3.5. Una *componente conexa* de un espacio topológico X es un subconjunto C que verifica:

1. C es conexo.

2. Cualquier subconjunto Y que verifique $C \subset Y \subseteq X$ no es conexo.

Daremos ahora la definición de componente conexa respecto de un punto.

Definición 3.3.6. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se llama *componente conexa de x* al conjunto $C(x) := \bigcup_{\substack{U \text{ conexo} \\ x \in U}} U$, la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x. Este conjunto es el mayor conexo que contiene a x.

El conjunto $C(x)$ es conexo gracias al siguiente teorema, que se puede encontrar en el libro de Munkres [10] junto con la prueba del mismo.

Teorema 3.3.7. *Sean X espacio topológico y $\{X_i\}_{i \in I}$ subconjuntos conexos de X tales que $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} X_i$ es un conjunto conexo.*

Observación 3.3.8. Dada una componente conexa C, si $x \in C$, entonces $C(x) = C$.

A continuación, vamos a enunciar la definición de componente conexa por caminos.

Definición 3.3.9. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se llama *componente conexa por caminos de x* al conjunto

$$A(x) := \{y \in X : \text{ existe un camino en } X \text{ que une } x \text{ con } y\}$$

Una vez enunciadas todas las definiciones necesarias, veamos que, efectivamente, las componentes conexas por caminos coinciden con las componentes conexas en espacios topológicos finitos.

Proposición 3.3.10. *Sean X un espacio topológico finito y $x \in X$. Entonces $C(x)$ coincide con $A(x)$.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto de un espacio topológico finito. Queremos ver que $A(x) = C(x)$.

$\subseteq$) Como $A(x)$ es conexo por caminos, por la Proposición 2.24 se tiene que $A(x)$ es conexo y contiene a x. Por lo tanto, $A(x) \subseteq \bigcup_{\substack{U \text{ conexo} \\ x \in U}} U = C(x)$.

$\supseteq$) Sea $y \in C(x)$. Como $C(X)$ es un subespacio topológico finito conexo de X, por el Corolario 3.3.4, $C(X)$ es conexo por caminos. Por lo tanto, existe un camino en X que une x con y, con lo que $y \in A(x)$.

Queda así probado que $A(x) = C(x)$. □

Observación 3.3.11. El resultado anterior es, en realidad, más general de como lo hemos enunciado, ya que se verifica para cualquier espacio topológico localmente conexo por caminos, como indica en Munkres en [10].

Proposición 3.3.12. *Las componentes conexas de un espacio topológico finito son abiertas.*

Demostración. Para demostrar este resultado, vamos a demostrar que dada C una componente conexa de X un espacio topológico finito, tenemos que $C = \bigcup_{x \in C} B_x$. De esta forma, C es unión de abiertos, por lo que C será también abierto. Veámoslo por doble contenido:

$\subseteq$) Sea $z \in C$, entonces $z \in B_z \subseteq \bigcup_{x \in C} B_x$. Por lo tanto, $C \subseteq \bigcup_{x \in C} B_x$.

$\supseteq$) Sea $z \in \bigcup_{x \in C} B_x$. Entonces existe $y \in C$ tal que $z \in B_y$. Por lo tanto, $z \leq y$. Entonces, por la Observación 3.3.2, existe un camino que une y con z, con lo que estos dos puntos pertenecen a la misma componente conexa. Es decir, $z \in C$. Así, $\bigcup_{x \in C} B_x \subseteq C$.

Por lo tanto, $C = \bigcup_{x \in C} B_x$, por lo que es abierto, como queríamos demostrar. □

Observación 3.3.13. Podemos observar que en Munkres [10] tenemos un resultado más general al dado en la Proposición 3.3.12, pues se tiene que las componentes conexas de un espacio son abiertas si el espacio es localmente conexo. Esto es claro que se verifica también en un espacio topológico finito, pues este es siempre localmente conexo. Sin embargo, al igual que en la Proposición 3.3.10, nos interesa más centrarnos en el caso de los espacios topológicos finitos, ya que para la prueba podemos usar resultados y construcciones solo válidas para espacios topológicos finitos, como los abiertos minimales.

Vamos a introducir a continuación varias nociones que relacionan la conexión con el orden.

Definición 3.3.14. Sea X un espacio topológico finito. Una *cadena* es una sucesión finita de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que x_i y x_{i+1} son comparables para todo $i = 1, \ldots, n-1$. En este caso, se dirá que existe una cadena que une x_1 con x_n.

Definición 3.3.15. Un espacio topológico finito X es *conexo por orden* si para todo par de puntos $x, y \in X$ existe una cadena $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que $x_1 = x$ y $x_n = y$, es decir, que une x con y.

A continuación, vamos a relacionar este concepto nuevo con las nociones usuales de conexión y conexión por caminos, y vamos a probar que estas dos últimas, que ya hemos visto que son equivalentes entre sí, son también equivalentes a la conexión por orden en cualquier espacio topológico finito.

Proposición 3.3.16. *Sea X un espacio topológico finito. Son equivalentes:*

i) *X es conexo por orden.*

ii) *X es conexo por caminos.*

Demostración. Vamos a demostrar este resultado por doble implicación, apoyándonos en la Proposición 2.24.

$i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que X es conexo por orden. Entonces, para cualesquiera $x, y \in X$, existe una cadena que une x con y, es decir, que existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que $x_1 = x$ y $x_n = y$ con $x_i \leq x_{i+1}$ o $x_{i+1} \leq x_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Gracias a la Observación 3.3.2, sabemos que existe un camino σ_i que une x_i con x_{i+1} para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. La concatenación de dichos caminos, $\sigma := \sigma_1 * \sigma_2 * \ldots * \sigma_n$, es un camino que cumple $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$. Por lo tanto, X es conexo por caminos.

$ii) \Rightarrow i)$ Supongamos que X es conexo por caminos. Entonces, X es conexo. Fijemos un punto $x_0 \in X$ y consideramos el siguiente subconjunto de X:

$$A := \{x \in X : \text{ existe una cadena que une } x_0 \text{ con } x\}$$

Obviamente $A \neq \emptyset$, ya que $x_0 \in A$. Veamos ahora que A es abierto y cerrado en X.

Para ver que es abierto, veamos que si $x \in A$, entonces $B_x \subseteq A$. Tomamos $y \in B_x$, es decir, $y \leq x$. Como $x \in A$, existe una cadena $x_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x$ que une x_0 con x. Entonces $x_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x, y$ es una cadena que une x_0 con y, por lo que $y \in A$. Entonces A es abierto.

Para ver que es cerrado, veamos que $X \backslash A$ es abierto, siguiendo el mismo argumento que antes, es decir, si $x \in X \backslash A$, veamos que $B_x \subseteq X \backslash A$. Para ello, tomemos $y \in B_x$, es decir, $y \leq x$. Como $x \notin A$, no existe una cadena que una x_0 con x. Por lo tanto, tampoco puede existir una cadena que una x_0 con y ya que, en caso contrario, si $x_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y$ fuera una cadena que une x_0 con y, entonces $x_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y, x$ sería una cadena que une x_0 con x, lo cual no puede ocurrir ya que $x \notin A$. Por lo tanto, $y \notin A$, con lo que $B_x \subseteq X \backslash A$. De esta forma, $X \backslash A$ es abierto, por lo que A es cerrado.

Por lo tanto, tenemos que A es un subconjunto cerrado, abierto y no vacío de X conexo, por lo que $A = X$. Por lo tanto, X es conexo por orden.

□

Observación 3.3.17. Si juntamos los resultados enunciados en el Corolario 3.3.4 y en la Proposición 3.3.16, obtenemos que, dado X un espacio topológico finito, son equivalentes:

i) X es conexo.

ii) X es conexo por caminos.

iii) X es conexo por orden.

Veamos un último resultado para terminar con esta sección:

Corolario 3.3.18. *Sean un espacio topológico finito X y $x, y \in X$. Son equivalentes:*

i) *Existe una cadena que une x con y.*

ii) *Existe un camino que une x con y.*

Demostración. Veamos el resultado por doble implicación.

i) $\Rightarrow$ ii) Hemos visto en la demostración de la Proposición 3.3.16 que toda cadena que une dos puntos nos permite definir un camino entre dichos dos puntos.

ii) $\Rightarrow$ i) Supongamos que existe un camino σ que une x con y. Como σ es continua y $[0,1]$ es conexo, entonces el conjunto $\sigma([0,1])$ es conexo en X, por lo que, por las equivalencias de la Observación 3.3.17, $\sigma([0,1])$ es conexo por orden. Como $x, y \in \sigma([0,1])$, existe una cadena que une x con y.

Queda así probado el resultado. □

3.4. Axiomas de separación

En esta sección trabajaremos con los axiomas de separación y estudiaremos algunos resultados relacionados con estos. Los tres primeros axiomas, los llamados T_0, T_1 y T_2, son, en general, definidos de igual forma por todos los autores. Sin embargo, para el resto de los axiomas suele haber pequeñas diferencias entre las definiciones que encontramos en diferentes referencias, dependiendo de qué notación o definición prefirió usar el autor. En este trabajo vamos a utilizar las definiciones y los nombres dados por Willard en su libro [16], pero enunciaremos los resultados sobre espacios topológicos finitos que Barmak estudia en su tesis [2], que utiliza una notación distinta a la que se va a emplear en este trabajo. Por ejemplo, Barmak llama WT_4 a lo que nosotros vamos a nombrar *completamente regular*. Vamos a proceder a enunciar las definiciones que se vamos a utilizar. Si bien la definición de espacio T_0 ya ha sido dada en la Definición 3.2.1, la volveremos a enunciar para tener en esta sección todas las definiciones de los axiomas de separación juntos.

Definición 3.4.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que el espacio X es:

- T_0 si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un abierto U que contiene a uno y no al otro.
- T_1 si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen U, V entornos abiertos de x e y respectivamente tal que $x \notin V$ e $y \notin U$.
- T_2 si para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen U, V entornos abiertos disjuntos de x e y respectivamente.
- *Regular* si para todo cerrado A de X y para todo $x \notin A$, existen dos abiertos disjuntos U, V con $x \in U$ y $A \subset V$.
- T_3 si es un espacio regular y T_1.
- *Completamente regular* si para todo cerrado A de X y para todo $x \notin A$ existe una aplicación continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ o *Tychonoff* si es un espacio completamente regular y T_1.
- *Normal* si para cualesquiera A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X, existen U, V abiertos disjuntos con $A \subset U$ y $B \subset V$.
- T_4 si es un espacio normal y T_1.
- *Completamente normal* si para cualesquiera $A, B \subset X$ con $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$, existen dos abiertos disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.
- $T_{4\frac{1}{2}}$ si es un espacio completamente normal y T_1.

Comenzaremos la sección enunciado varios resultados de topología general:

Proposición 3.4.2. $T_{4\frac{1}{2}} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$

A continuación, vamos a probar las siguientes equivalencias, las cuales podemos encontrar en Willard [16]

Proposición 3.4.3. *Dado un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X *es* T_1.

b) Cada conjunto unipuntual de X *es cerrado.*

c) Cada subconjunto de X *es la intersección de los abiertos que lo contienen.*

Demostración. Observemos que este resultado y esta prueba sirven para cualquier espacio topológico, no solo aquellos que son finitos.

a) $\Rightarrow$ b) Sea $\{x_0\} \in X$. Si tomamos $y \in X \backslash \{x_0\}$, como X es un espacio T_1, existe un entorno abierto V_y de y que no contiene a x_0, por lo que $y \in V_y \subseteq X \backslash \{x_0\}$. Entonces $X \backslash \{x_0\}$ es un conjunto abierto, luego $\{x_0\}$ es cerrado, como queríamos probar.

b) $\Rightarrow$ c) Supongamos que todos los conjuntos unipuntuales de X son cerrados. Tenemos que comprobar que para cualquier $A \subseteq X$, se tiene que

$$A = \bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ A \subseteq V}} V$$

Como A está contenido en cada uno de los conjuntos de la intersección, se tiene que

$$A \subseteq \bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ A \subseteq V}} V$$

Pasemos a ver la otra contención. Para todo elemento $x \notin A$, se tiene que $A \subseteq X \backslash \{x\}$. Por hipótesis, el conjunto $X \backslash \{x\}$ es abierto y, además, contiene a A, por lo que

$$x \notin \bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ A \subseteq V}} V$$

Por lo tanto:

$$X \backslash A \subseteq X \backslash \bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ A \subseteq V}} V$$

Concluimos que

$$\bigcap_{\substack{V \text{ abierto} \\ A \subseteq V}} V \subseteq A$$

con lo que quedan probadas ambas contenciones.

c) $\Rightarrow$ a) Si suponemos que se cumple c), entonces para $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es la intersección de todos los abiertos que lo contienen, por lo que para cualquier $y \neq x$ existe un entorno de x que no contiene a y. Por lo tanto, el espacio X es T_1.

□

Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente corolario, ya cierto solo para espacios topológicos finitos:

Corolario 3.4.4. *Si X es un espacio topológico finito T_1, entonces X es discreto.*

Demostración. Para probar que el espacio es discreto, hay que ver que cualquier conjunto unipuntual es abierto, lo cual es equivalente a que los conjuntos de la forma $X\backslash\{x_0\}$ sean cerrados para cualquier $x_0 \in X$. Pero esto es sencillo de comprobar ya que, fijado $x_0 \in X$, se tiene que

$$X\backslash\{x_0\} = \bigcup_{\substack{x\in X \\ x\neq x_0}} \{x\}$$

Todos los conjuntos unipuntuales son cerrados por ser el espacio T_1, por lo que $X\backslash\{x_0\}$ es unión finita de cerrados. Luego $X\backslash\{x_0\}$ es cerrado, lo que implica que $\{x_0\}$ es abierto, por lo que concluimos que el espacio es discreto. □

El resultado anterior implica que, si un espacio topológico finito es T_1, es inmediatamente discreto, con lo cual obtenemos lo siguiente:

Corolario 3.4.5. *Sea X un espacio topológico finito. Entonces se tiene:*

$$T_{4\frac{1}{2}} \Leftrightarrow T_4 \Leftrightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Leftrightarrow T_3 \Leftrightarrow T_2 \Leftrightarrow T_1 \Leftrightarrow \textit{discreto}$$

Es decir, que todos los axiomas de separación que impliquen que el espacio es T_1 también serán discretos.

Demostración. Debido a las implicaciones de la Proposición 3.4.2, tenemos la siguiente secuencia de implicaciones:

$$T_{4\frac{1}{2}} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$$

Además, por el Corolario 3.4.4, tenemos la implicación $T_1 \Rightarrow$ discreto. Por último, si el espacio es discreto, tenemos que es T_1 y completamente normal, ya que todos los subconjutos son abiertos y cerrados. Por lo tanto, tenemos la implicación que nos faltaba:

$$\text{espacio discreto } \Rightarrow T_{4\frac{1}{2}}$$

lo que nos da las equivalencias que buscábamos. □

Como hemos visto que las condiciones $T_1, T_2, ..., T_{4\frac{1}{2}}$ son equivalentes en espacios topológicos finitos, vamos a trabajar con las nociones de espacio regular, completamente regular, normal y completamente normal que hemos definido previamente, ya que estas condiciones no implican ser T_1, por lo que veremos que no son equivalentes a ser un espacio discreto y podremos obtener algún resultado interesante con ellas.

Proposición 3.4.6. *En espacios topológicos finitos se cumple lo siguiente:*

i) *T_1 implica regular.*

ii) *Regular es equivalente a completamente regular.*

iii) *Regular implica completamente normal.*

iv) *Completamente normal implica normal.*

Antes de probar este resultado, vamos a ver un lema que relaciona cada axioma de separación con una relación de preorden distinta en el conjunto. Para ello, hay que introducir algunas definiciones para entender los conceptos.

Definición 3.4.7.

i) Un preorden $\leq$ es una *relación de equivalencia* si verifica la propiedad simétrica, es decir, si para todos $x, y \in X$ tales que $x \leq y$, se tiene que $y \leq x$.

ii) Un preorden $\leq$ es un *bosque* si para todos $x, y \in X$ que no son comparables no existe ningún $z \in X$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$.

iii) Un *árbol* es un bosque con una sola componente conexa.

iv) Un preorden $\leq$ es *dirigido* (hacia arriba) si para cualesquiera $x, y \in X$, existe $z \in X$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$. Diremos que es *dirigido por componente* si se cumple la condición anterior para cualesquiera $x, y \in X$ que estén en la misma componente conexa de X.

Lema 3.4.8. *Sea X un espacio topológico finito cuya relación de orden asociada es $\leq$. Entonces:*

a) X es discreto si, y solo si, $\leq$ es la relación identidad.

b) X es regular si, y solo si, $\leq$ es relación de equivalencia.

c) X es completamente normal si, y solo si, $\leq$ es un bosque.

d) X es normal si, y solo si, $\leq$ es un preorden dirigido por componente.

Demostración.

a) El espacio X es discreto si, y solo si, $B_x = \{x\}$ para todo $x \in X$, lo cual se cumple si, y solo si, para todo $x \in X$, si $y \leq x$, entonces $y = x$, es decir, si, y solo si, $\leq$ es la relación identidad.

b) Para demostrar este resultado, vamos a probar que completamente regular implica regular, que regular implica que $\leq$ es relación de equivalencia y, por último, que si $\leq$ es relación de equivalencia, entonces el espacio es completamente regular, por lo que queda también demostrado el apartado ii) de la Proposición 3.4.6.

En general, para cualquier espacio topológico se tiene que completamente regular implica regular. Por lo tanto, esto también se cumple para los espacios topológicos finitos.

Veamos ahora que si X es regular, entonces la relación de preorden $\leq$ asociada es una relación de equivalencia. Para ello, es suficiente comprobar que $\leq$ verifica la propiedad simétrica. Sean $x, y \in X$ tales que $x \leq y$. Supongamos por reducción al absurdo que $y \not\leq x$. Entonces, por el Corolario 3.2.17, se tiene que $x \notin \overline{\{y\}}$. Como X es regular, existen dos abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $\overline{\{y\}} \subset V$. Pero entonces $y \in V$ con V abierto, y como $x \leq y$, entonces $x \in V$. Por lo tanto $x \in U \cap V$. Pero esto es un absurdo, ya que U y V eran disjuntos. Por lo tanto, es necesario que $y \leq x$, con lo que $\leq$ es una relación de equivalencia.

Veamos, por último, que si $\leq$ es relación de equivalencia, entonces el espacio es completamente regular. Es decir, que para todo cerrado F y para todo $x \notin F$, existe una aplicación continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = \{1\}$. Notemos que como $\leq$ es una relación de equivalencia, se tiene que si $x \leq y$, entonces $y \leq x$. Es decir, que si $B_x \subseteq B_y$, entonces $B_y \subseteq B_x$, por lo que estos dos son iguales. Dicho de otro modo, si $y \leq x$, entonces $B_y = B_x$. Sea entonces $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado y tomamos $x_0 \notin F$. Como $\leq$ es una relación de equivalencia, podemos tomar las clases de equivalencia de un punto, definidas, para $x \in X$:

$$[x] := \{y \in X : y \leq x\} = \{y \in X : B_x = B_y\}$$

De hecho, se tiene que $y \in [x] \Leftrightarrow y \leq x \Leftrightarrow y \in B_x$, por lo que $[x] = B_x$, es decir, que las clases de equivalencia son abiertas. A continuación, definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & [0,1] \\ & y & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } y \in [x_0] \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{array}$$

Esta aplicación está bien definida porque cada elemento solo puede pertenecer a una clase de equivalencia. Además, tenemos que $f^{-1}(0) = [x_0]$ y $f^{-1}(1) = X \backslash [x_0] = \bigcup_{y \notin [x_0]} [y]$, las cuales son ambas abiertas. Comprobemos que f es continua. Sea $U \subseteq [0,1]$. Entonces se tiene que:

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin U \text{ y } 1 \notin U \\ [x_0] & \text{si } 0 \in U \text{ y } 1 \notin U \\ X \backslash [x_0] & \text{si } 0 \notin U \text{ y } 1 \in U \\ X & \text{si } 0 \in U \text{ y } 1 \in U \end{cases}$$

En todos los casos, la contraimagen del abierto es un abierto, por lo que queda probado que la aplicación f es continua. Además, f verifica que $f(x_0) = 0$ y $f(F) = \{1\}$. Comprobemos que se cumple esto último. Supongamos que existe $y \in F$ tal que $f(y) = 0$, entonces $y \in F \cap [x_0]$. Por lo tanto, $y \leq x_0$, con lo cual $x_0 \in \overline{\{y\}} \subseteq F$, lo cual es una contradicción ya que $x_0 \notin F$. Por lo tanto, se tiene que $f(F) = \{1\}$ como queríamos ver.

Quedan así demostradas todas las implicaciones.

c) Sea X un espacio completamente normal y sean $x, y \in X$ dos puntos no comparables, es decir, que ni $x \leq y$ ni $y \leq x$. Queremos ver que $\leq$ es un bosque. Como $x \not\leq y$, se tiene que $y \notin \overline{\{x\}}$. De la misma forma, dado que $y \not\leq x$, entonces $x \notin \overline{\{y\}}$. Así que $\{x\} \cap \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} \cap \{y\} = \emptyset$. Dado que el espacio X es completamente normal, existen dos abiertos U, V disjuntos con $\{x\} \subseteq U$ y $\{y\} \subseteq V$. Por lo tanto, se tiene que $B_x \subseteq U$ y $B_y \subseteq V$ y, como U y V son disjuntos, también lo son B_x y B_y. Por lo tanto no existe ningún $z \in X$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$, con lo que queda demostrado que $\leq$ es un bosque.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que el preorden $\leq$ es un bosque y consideremos $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Definimos los abiertos $U := \bigcup_{x \in A} B_x$ y $V := \bigcup_{x \in B} B_x$. Es claro que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Entonces, si tomamos $x, y \in X$ tales que $x \in A$ e $y \in B$, se verifica que $\{x\} \cap \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} \cap \{y\} = \emptyset$. Comprobemos que se cumple esta propiedad. Como $\{x\} \subseteq A$, $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{B}$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$, se tiene que $\{x\} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$. De forma idéntica se prueba la otra igualdad. Por lo tanto, se tiene que $x \notin \overline{\{y\}}$, con lo que $y \not\leq x$ y, de la misma forma, $x \not\leq y$, por lo que x e y no son comparables. De esta forma, dado que $\leq$ es un bosque, no existe $z \in X$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$, por lo que $B_x \cap B_y = \emptyset$. Por lo tanto, los abiertos U y V son disjuntos con $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, con lo que queda demostrado que el espacio X es completamente normal.

d) Supongamos que el espacio X es normal. Sea $x_0 \in X$. Definimos el conjunto $A := \{y \in X :$ existe $z \in X$ que verifica $x_0 \leq z, y \leq z\}$. Es claro que $A \neq \emptyset$, ya que $x_0 \in A$. Para ver que $\leq$ es un preorden dirigido por componente, queremos ver que A coincide con toda la componente conexa de x_0. Para ello, basta ver que si $x \in A$ e $y \in X$, se tiene que:

1. $y \leq x \Rightarrow y \in A$
2. $x \leq y \Rightarrow y \in A$

Probemos estos dos resultados:

1. Como $x \in A$, existe $z_0 \in X$ tal que $x_0 \leq z_0$ y $x \leq z_0$. Como $y \leq x$, por la propiedad transitiva del preorden, tenemos que $y \leq z_0$, por lo que $y \in A$.
2. Como $x \in A$, existe $z_0 \in X$ tal que $x_0 \leq z_0$ y $x \leq z_0$. Para $y \in X$ con $x \leq y$, supongamos que no existe $z \in X$ tal que $z_0 \leq z$ e $y \leq z$. Entonces $\overline{\{z_0\}}$ y $\overline{\{y\}}$ son cerrados disjuntos. Como X es normal, existen U, V abiertos disjuntos con $\overline{\{z_0\}} \subseteq U$ y $\overline{\{y\}} \subseteq V$.

   Por hipótesis se tiene que $x \leq y$, por lo que $x \in V$. Además, $x \leq z_0$, por lo que también se tiene que $x \in U$. Pero esto no puede suceder, ya que habíamos supuesto que U y V eran disjuntos. Por lo tanto llegamos a una contradicción, con lo que necesariamente tiene que existir $z \in X$ tal que $z_0 \leq z$ e $y \leq z$. Por lo tanto, por la propiedad transitiva del preorden tenemos que $x_0 \leq z$ e $y \leq z$, por lo que $y \in A$.

De esta forma, queda probado que el conjunto A es toda la componente conexa de x_0, y el preorden $\leq$ es dirigido por componentes.

Para ver el recíproco, supongamos que $\leq$ es un preorden dirigido por componente, y tomemos F, G dos conjuntos cerrados y disjuntos en X. Entonces, tenemos que F y G están contenidos en uniones de componentes conexas distintas dos a dos. Es decir, que no existen $x \in F$ e $y \in G$ que estén en la misma componente conexa de X. Si esto sucediera, como $\leq$ es dirigido por componente, existiría $z \in X$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$, con lo que $z \in \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$, luego $z \in F \cap G$, lo cual es imposible ya que F y G son disjuntos. Como las componentes conexas de X son conjuntos abiertos, como vimos en la Proposición 3.3.12, entonces existen dos abiertos disjuntos U y V que contienen a F y a G respectivamente. Por lo tanto, el espacio X es normal.

□

Una vez visto qué relación tiene asociado cada axioma de separación, podemos pasar a demostrar la Proposición 3.4.6, apoyándonos en la prueba del resultado anterior.

Demostración de la Proposición 3.4.6.

i) Si el espacio es T_1, entonces la relación $\leq$ asociada es la identidad, pero es claro que esta es relación de equivalencia, ya que dados x, y, z tres puntos del espacio, se cumple que $x = x$, si $x = y$ entonces $y = x$, y si $x = y$ e $y = z$, entonces $x = z$, pues x, y y z son, en realidad, el mismo punto del espacio. Por lo tanto, se cumple que la relación identidad es relación de equivalencia y, por el apartado b) del Lema 3.4.8, X es regular.

ii) Esta implicación queda probada en el apartado *b*) de la demostración del Lema 3.4.8.

iii) Si el espacio es regular, tenemos que la relación $\leq$ asociada es una relación de equivalencia. Para ver el resultado, basta probar que una relación de equivalencia es un bosque. Sean X un espacio topológico finito regular y $x, y \in X$ no comparables. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $z \in X$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$. Como el espacio es regular, la relación $\leq$ es relación de equivalencia, por lo que $x \leq z$. Por lo tanto, por la propiedad transitiva de $\leq$, obtenemos que $x \leq y$, lo cual es un absurdo porque habíamos supuesto que x e y no eran comparables. Por lo tanto, no puede existir dicho z, por lo que $\leq$ es un bosque.

iv) Por último, para probar que completamente normal implica normal no es necesario acudir a las relaciones asociadas a estos conjuntos, pues este resultado se verifica siempre. Es inmediato si consideras A y B dos conjuntos cerrados que verifican $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Como son cerrados, se cumple que $\overline{A} = A$ y $\overline{B} = B$, con lo que A y B son disjuntos y se cumple la hipótesis de normalidad.

□

Observación 3.4.9. Estas implicaciones no se dan todas cuando el espacio topológico no es finito.

Terminaremos la sección enunciando el siguiente resultado:

Proposición 3.4.10. *Si un espacio topológico finito es T_0 y regular, entonces es discreto.*

Demostración. Sea X un espacio topológico finito T_0 y regular. Como es regular, la relación $\leq$ asociada al espacio es una relación de equivalencia. Es decir, dados $x, y \in X$ tales que $x \leq y$, entonces $y \leq x$. Sin embargo, como el espacio es T_0, es necesario que $x = y$. Por lo tanto, la relación $\leq$ es la identidad y, por el Lema 3.4.8, el espacio es discreto. □

3.5. Continuidad y espacios de funciones

En la rama de la topología, una de las secciones más importantes es el estudio de la continuidad de aplicaciones entre espacios topológicos. En este trabajo, vamos a estudiar cómo son las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos finitos, y también vamos a trabajar con el espacio de funciones entre dos espacios topológicos finitos, que va a ser un conjunto finito, y sobre el cual vamos a poder definir varias topologías que, en esencia, acabarán siendo la misma. Empezaremos estudiando la continuidad de funciones entre espacios topológicos.

Vamos a introducir la noción de conservar el orden.

Definición 3.5.1. Dados $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ dos conjuntos preordenados, diremos que una aplicación $f : X \to Y$ *conserva el orden* si, para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \leq_X y$, entonces $f(x) \leq_Y f(y)$.

Gracias a esta noción obtenemos el primer resultado.

Proposición 3.5.2. *Una aplicación $f : X \to Y$ entre espacios topológicos finitos es continua si, y solo si, preserva el orden.*

Demostración. Sean X, Y dos espacios topológicos finitos cuyo preorden asociado es $\leq_X$ y $\leq_Y$ respectivamente, y $f : X \to Y$ una aplicación. Denotaremos por B_x a los abiertos de la base minimal de X, y U_y a los abiertos de la base minimal de Y. Veamos el resultado por doble implicación.

⇒) Supongamos que f es continua. Tomemos $x, y \in X$ tales que $x \leq_X y$, es decir, que $x \in B_y$. Se tiene que $f(y) \in U_{f(y)}$, entonces $y \in f^{-1}(U_{f(y)})$, el cual es un abierto por ser $U_{f(y)}$ abierto y f continua. Por lo tanto, por propiedades de los abiertos minimales, $B_y \subseteq f^{-1}(U_{f(y)})$. Como $x \in B_y$, entonces $x \in f^{-1}(U_{f(y)})$, con lo que $f(x) \in U_{f(y)}$. Por lo tanto, queda probado que $f(x) \leq_Y f(y)$, con lo que f preserva el orden.

⇐) Supongamos que f preserva el orden. Para ver que f es continua es suficiente ver que la contraimagen de los elementos de la base minimal son abiertos, es decir, que $f^{-1}(U_z)$ es abierto para todo $z \in Y$. Para ello, basta ver que $B_y \subseteq f^{-1}(U_z)$ para todo $y \in f^{-1}(U_z)$.
Tomamos $z \in Y$ y $x, y \in X$ tales que $y \in f^{-1}(U_z)$ y $x \in B_y$. Entonces $x \leq_X y$ y, como f preserva el orden, se tiene que $f(x) \leq_Y f(y)$. Además, tenemos que $f(y) \in U_z$. Por lo tanto, $f(x) \in U_z$ y entonces $x \in f^{-1}(U_z)$. De esta forma, todo elemento de B_y está también en $f^{-1}(U_z)$, con lo que $B_y \subseteq f^{-1}(U_z)$. Luego $f^{-1}(U_z)$ es abierto, con lo que f es continua.

□

Otro resultado sobre aplicaciones entre espacios topológicos, pero esta vez de un espacio sobre sí mismo es el siguiente:

Proposición 3.5.3. *Sean X un espacio topológico finito y $f : X \to X$ una aplicación continua. Se tiene lo siguiente:*

f es homeomorfismo si, y solo si, f es inyectiva o sobreyectiva.

Demostración. Sean (X,τ) un espacio topológico finito y $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ aplicación continua. Es claro que si f es homeomorfismo, entonces f es biyectiva y, por lo tanto, inyectiva y sobreyectiva. Para ver la otra implicación, al ser f una aplicación de un espacio finito en sí mismo, ser inyectivo es equivalente a ser sobreyectivo. Por lo tanto, si es inyectiva o sobreyectiva, es inmediatamente biyectiva. Como f es continua por hipótesis, solo es necesario comprobar que f^{-1} es continua. Esto es equivalente a probar que para todo $U\in\tau$, se tiene que $f(U)\in\tau$ también. Veamos que se cumple. Definimos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \psi_f: & \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ & A & \longmapsto & f(A) \end{array}$$

que es biyectiva por serlo f. Sea $A\in\mathcal{P}(X)$ y supongamos que $\psi_f(A):=f(A)\in\tau$. Como f es continua, $f^{-1}(f(A))\in\tau$, pero como f es biyectiva, $f^{-1}(f(A))=A$. Entonces, $A\in\tau$. Ahora, consideramos $U\in(\mathrm{Im}\ \psi_f)\cap\tau$. Como $U\in\mathrm{Im}\ \psi_f$, entonces existe $V\in\mathcal{P}(X)$ tal que $\psi_f(V)=U$. Además, como ψ_f es biyectiva, se tiene que $(\mathrm{Im}\ \psi_f)\cap\tau=\mathcal{P}(X)\cap\tau=\tau$. Así, tenemos que $U=\psi_f(V)\in\tau$. Aplicando lo anterior se tiene que $V\in\tau$. Entonces acabamos de ver que cualquier conjunto que está en τ se puede escribir como la imagen de un conjunto que también está en τ, es decir, que $\tau\subseteq\psi_f(\tau)$. Como la aplicación ψ_f es biyectiva, τ es un conjunto finito y $\tau\subseteq\psi_f(\tau)$, necesariamente se ha de tener que $\tau=\psi_f(\tau)$, con lo que si $U\in\tau$, entonces $f(U)=\psi_f(U)\in\psi_f(\tau)=\tau$ como queríamos ver. □

A continuación, vamos a estudiar los espacios de funciones continuas entre dos espacios topológicos. Dados dos espacios topológicos X e Y, podemos considerar el conjunto formado por todas las aplicaciones continuas de X en Y

$$\mathcal{C}(X,Y):=\{f:X\to Y \text{ tal que } f \text{ es aplicación continua}\}$$

En él se puede definir una topología:

Definición 3.5.4. En $\mathcal{C}(X,Y)$ se define la *topología compacto-abierta*. Los abiertos de esta topología son las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos de la forma

$$\omega(K,U):=\{f\in\mathcal{C}(X,Y): f(K)\subseteq U\}$$

donde K es compacto en X y U es abierto en Y. Los conjuntos $\omega(K,U)$ forman una subbase de la topología, y serán denominados abiertos de la subbase.

Gracias a este conjunto y a la topología definida en él, podemos dar el siguiente resultado general, que se puede encontrar en Munkres [10].

Teorema 3.5.5 (Ley exponencial)**.** *Sean X,Y,Z tres espacios topológicos con X localmente compacto y $f:X\times Z\to Y$ una aplicación, donde en $X\times Z$ tomamos la topología producto. Consideramos $F:Z\to\mathcal{C}(X,Y)$ la aplicación adjunta de f definida como $F(z)(x)=f(x,z)$ donde $x\in X$ y $z\in Z$. Entonces:*

$$f:X\times Z\to Y \text{ es continua} \iff F:Z\to\mathcal{C}(X,Y) \text{ es continua}$$

En lo que queda de sección, vamos a suponer en todo momento que X e Y son espacios topológicos finitos. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ será finito y en él se puede definir el siguiente preorden:

Definición 3.5.6. En $\mathcal{C}(X,Y)$ se define el *preorden puntual* de la siguiente forma:

$$f\leq g\iff f(x)\leq g(x) \text{ para todo } x\in X$$

Como $\mathcal{C}(X,Y)$ es un conjunto finito, el preorden $\leq$ está univocamente relacionado con una topología en dicho espacio. Veamos un resultado relacionado con dicha topología:

Proposición 3.5.7. *El preorden puntual $\leq$ definido previamente en $\mathcal{C}(X,Y)$ está asociado con la topología compacto-abierta.*

Demostración. Para ver que el preorden puntual está asociado exactamente con la topología compacto-abierta, vamos a ver que los abiertos de la subbase de la topología compacto-abierta son abiertos en $\tau_{\leq}$, y que, recíprocamente, los abiertos minimales de $\tau_{\leq}$ son abiertos en la topología compacto abierta.

Sean K un compacto de X, U un abierto de Y y $\omega(K,U)$ un abierto de la subbase de la topología compacto abierta. Veamos que $\omega(K,U)$ es abierto de $\tau_{\leq}$. Sea $f \in \omega(K,U)$, veamos que

$$B_f = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) : g \leq f\} \subseteq \omega(K,U)$$

Sea $g \in B_f$, entonces $g \leq f$, es decir, $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. En concreto, se verifica $g(y) \leq f(y)$ para todo $y \in K$. Si $y \in K$, entonces $f(y) \in U$, porque $f \in \omega(K,U)$. Como U es abierto en Y, entonces $g(y) \in U$ para todo $y \in K$. Por lo tanto, $g \in \omega(K,U)$. Queda probado que $B_f \subseteq \omega(K,U)$, con lo que $\omega(K,U)$ es abierto de $\tau_{\leq}$.

Para ver la otra relación, consideramos $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ y B_f su abierto minimal de $\tau_{\leq}$. Para ver que B_f es abierto de la topología compacto-abierta, comprobemos la siguiente igualdad:

$$B_f = \bigcap_{x \in X} \omega(\{x\}, B_{f(x)})$$

Es claro que el segundo término es abierto de la topología compacto-abierta, ya que $\{x\}$ es compacto y $B_{f(x)}$ es abierto para todo $x \in X$, por lo que B_f es intersección finita de conjuntos abiertos, ya que X es un conjunto finito. Veamos la igualdad:

$$\begin{aligned} g \in B_f &\iff g \leq f \iff g(x) \leq f(x) \text{ para } x \in X \iff g(x) \in B_{f(x)} \text{ para } x \in X \iff \\ &\iff g \in \omega(\{x\}, B_{f(x)}) \text{ para } x \in X \iff g \in \bigcap_{x \in X} \omega(\{x\}, B_{f(x)}) \end{aligned}$$

Queda así probada la igualdad y, con ella, el resultado. □

Proposición 3.5.8. *La intersección de todos los abiertos de $\mathcal{C}(X,Y)$ que contienen a f es:*

$$B_f = \{g \in \mathcal{C}(X,Y) : g \leq f\}$$

Este conjunto será el abierto minimal de f en $\mathcal{C}(X,Y)$ con la topología compacto-abierta.

Demostración. La demostración es obvia, pues hemos visto en la Proposición 3.5.7 que la topología compacto-abierta está asociada con el preorden puntual. Además, como es un espacio topológico finito, la intersección de todos los abiertos que contienen a una función es un abierto, en concreto, es el abierto minimal, que está definido como en la Proposición 3.2.13. □

Lema 3.5.9. *Si Y es T_0, entonces $\mathcal{C}(X,Y)$ es T_0.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$ tales que $f \leq g$ y $g \leq f$. Entonces $f(x) \leq g(x)$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Pero como Y es T_0, entonces $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, $f = g$, con lo que $\leq$ es un orden parcial, que equivale a que $\mathcal{C}(X,Y)$ sea T_0. □

Capítulo 4

Homotopía

En este capítulo vamos a tratar conceptos de topología algebraica, sobre todo centrándonos en las equivalencias homotópicas. Vamos a introducir los conceptos de homotopía necesarios para este trabajo, como las homotopías de caminos y de aplicaciones, y los retractos. También nos será de utilidad relacionar los conjuntos preordenados finitos (que recordemos que son equivalentes a los espacios topológicos finitos) con grafos dirigidos, para dar una representación gráfica de estos espacios. Por último, ayudándonos de los grafos para visualizar los espacios, vamos a aplicar los conceptos generales de topología algebraica a los espacios finitos para dar resultados específicos para los mismos.

4.1. Introducción a la homotopía

Comenzamos con algunas de las definiciones de topología algebraica general para ponernos en el contexto de esta sección.

Comenzaremos la sección dando la definición de homotopía entre dos aplicaciones continuas.

Definición 4.1.1. Sean X e Y dos espacios topológicos, $A \subset X$ un subconjunto de X y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f es *homótopa a g relativo al conjunto A*, y lo denotamos por $f \simeq_{rel(A)} g$, si existe una aplicación continua $F : X \times [0,1] \to Y$ que verifica:

- $F(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$.
- $F(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.
- $F(a, t) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ y para todo $t \in [0,1]$.

Decimos que F es una *homotopía* entre f y g.

Observación 4.1.2. Si $A = \emptyset$, decimos que f es homótopa a g y escribimos $f \simeq g$.

Observación 4.1.3. Un caso particular de homotopía es la homotopía de caminos. En este caso, las aplicaciones $f, g : [0,1] \to X$ son caminos y el conjunto $A = \{0, 1\}$.

Una noción importante dentro de la homotopía es la de espacio contráctil, pues esta noción representa la clase más sencilla de espacios desde el punto de vista de la homotopía.

Definición 4.1.4. Un espacio topológico X se dice *contráctil* si la aplicación identidad $Id_X : X \to X$ es homótopa a una aplicación constante.

Definición 4.1.5. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Una aplicación continua $r : X \to A$ se llama *retracción* si $r \circ i = Id_A$ donde $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión. Es decir, $r|_A = Id_A$. Si existe r con esas condiciones, se dice que A es un *retracto* de X.

También vamos a dar las definiciones de retracto y de retracto de deformación.

Definición 4.1.6. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice A es un *retracto de deformación* de X si existe una retracción $r : X \to A$ tal que $i \circ r \simeq_{rel(A)} Id_X$ donde $Id_X : X \to X$ es la identidad e $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión.

Observación 4.1.7. Cualquier subconjunto unipuntual de un espacio topológico es retracto del espacio topológico, pero en general no es retracto de deformación. Solo en algunos casos particulares los conjuntos unipuntuales serán retractos de deformación del espacio. En la Proposición 4.1.8 vemos cuándo esto sucede.

Proposición 4.1.8. *Un espacio topológico X es contráctil si, y solo si, existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ es retracto de deformación de X.*

Definición 4.1.9. Una aplicación continua $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X e Y se dice que es una *equivalencia homotópica* si existe $g : Y \to X$ continua tal que $g \circ f \simeq Id_X$ y $f \circ g \simeq Id_Y$. En este caso decimos que X e Y son *homotópicamente equivalentes* o *que tienen el mismo tipo de homotopía*, y a la aplicación g se le denomina *inverso homotópico de f*.

Observación 4.1.10. Una retracción de deformación es un caso concreto de equivalencia homotópica. Por eso, cuando un subconjunto A de un espacio X es retracto de deformación, estos dos tienen el mismo tipo de homotopía.

Observación 4.1.11. Ser homotópicamente equivalentes define una relación de equivalencia.

4.2. Grafos dirigidos

En esta sección hablaremos superficialmente de grafos dirigidos, pues nos interesa la relación que hay entre estos y los espacios topológicos finitos. En general, si tenemos un conjunto finito X y una relación binaria $\mathcal{R}$ cualquiera, podemos representarlo como un grafo dirigido (o digrafo) donde los vértices son los elementos del conjunto y las aristas son los pares ordenados $(x, y) \in X \times X$ donde $x\mathcal{R}y$. En particular, podemos representar los espacios topológicos finitos mediante grafos dirigidos, ya que los primeros están biunívocamente relacionados con los conjuntos finitos preordenados. En este caso, los vértices serán los elementos del conjunto y las aristas serán los pares ordenados (x, y) tales que $x < y$. Cuando $x < y$, la arista entre x e y será representada como en la Figura 4.1

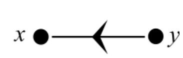


Figura 4.1: $x < y$

Veamos un ejemplo sencillo para visualizar el grafo:

Ejemplo 4.2.1. Consideremos el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$, y tomemos la siguiente topología en X:

$$\tau = \{\emptyset, \{b, c, d\}, X\}$$

La base minimal asociada a esta topología es la formada por los conjuntos $B_a = X$ y $B_b = B_c = B_d = \{b, c, d\}$. Su preorden asociado verifica $b \leq a$, $c \leq a$, $d \leq a$, $b \leq c$, $c \leq b$, $b \leq d$, $d \leq b$, $c \leq d$ y $d \leq c$.

El digrafo asociado a este espacio topológico es el que representamos en la Figura 4.2:

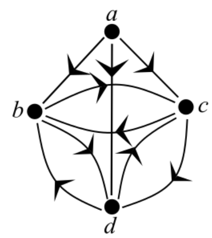


Figura 4.2: Grafo dirigido asociado a (X, τ)

Estos grafos pueden ser útiles para visualizar un espacio topológico finito desde un punto de vista distinto, pero en ocasiones pueden resultar lioso y complejo visualizarlos bien en el caso en que el espacio tenga muchos puntos o si muchos de ellos son comparables entre sí. Por esa razón, vamos a construir otro tipo de digrafo, llamado diagrama de Hasse, que nos servirá únicamente para representar los espacios topológicos finitos T_0, peor lo hará de una forma más simple, es decir, con un menor número de aristas, y nos será de utilidad en el estudio de la homotopía, pues veremos que cualquier espacio topológico finito es homotópicamente equivalente a un espacio topológico finito T_0. Trataremos este tema con más detalle en la sección 4.3.

Para poder construir los diagramas de Hasse, debemos introducir la noción de cubrir.

Definición 4.2.2. Sea $(X, \leq)$ un conjunto finito parcialmente ordenado y sean $x, y \in X$. Diremos que *x cubre a y* si se verifica:

i) $y < x$.

ii) Si existe $z \in X$ tal que $y \leq z < x$, entonces $z = y$.

Denotaremos como $y \prec x$ cuando x cubre a y.

El *diagrama de Hasse* de $(X, \leq)$ es el digrafo cuyos vértices son los puntos del conjunto y cuyas aristas son los pares ordenados $(y, x) \in X \times X$ tales que $y \prec x$. En la representación gráfica, en lugar que escribir las aristas con flechas, dibujaremos el punto x por encima del punto y cuando $y \prec x$, y se unirán mediante un segmento. Es decir, si $y \prec x$, será representado como en la Figura 4.3.

Figura 4.3: x cubre a y

Veamos un ejemplo de un espacio T_0 y dibujemos el diagrama de Hasse asociado a dicho espacio.

Ejemplo 4.2.3. Tomamos el espacio $X = \{a, b, c, d, e\}$ y τ la topología en X cuya base minimal es $\beta = \{X, \{b, c, d, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e\}\}$. Con esta topología tenemos que los abiertos minimales son $B_a = X, B_b = \{b, c, d, e\}, B_c = \{c, e\}, B_d = \{d, e\}$ y $B_e = \{e\}$. El espacio es claramente T_0 ya que ningún par de puntos tienen el mismo abierto minimal, por lo que podemos representar el diagrama de Hasse asociado a dicho espacio (Figura 4.4).

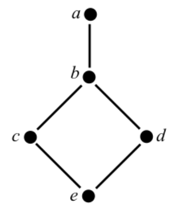


Figura 4.4: Diagrama de Hasse del espacio (X, τ)

Observación 4.2.4. A continuación, vamos a representar en la Figura 4.5 el grafo dirigido asociado al espacio topológico del ejemplo anterior, para compararlo con el diagrama de Hasse.

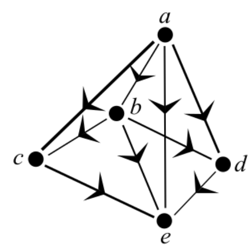


Figura 4.5: Grafo dirigido del espacio (X, τ) del Ejemplo 4.2.3

Podemos observar que el grafo dirigido es mucho más complejo, con más flechas y aristas que el diagrama de Hasse y que, en ejemplos más complejos y con más puntos, puede resultar difícil de visualizar bien. Por ello, para espacios topológicos finitos T_0 vamos a dibujar los diagramas de Hasse, pues son más simples y fáciles de entender.

4.3. Teoría de homotopía de espacios topológicos finitos

En esta sección vamos a estudiar los espacios topológicos finitos desde el punto de vista de la homotopía, viendo que un espacio finito siempre es homotópicamente equivalente a un espacio topológico finito T_0, reduciendo los espacios T_0 hasta su núcleo, y demostrando que el espacio es homotópicamente equivalente a dicho núcleo.

Comenzamos la sección dando un resultado sobre las aplicaciones entre espacios topológicos, que simplificará bastante las pruebas de varios resultados de esta sección.

Teorema 4.3.1. *Sean $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ dos aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos finitos X e Y tales que $f|_A = g|_A$ para $A \subseteq X$. Entonces $f \simeq_{rel(A)} g$ si, y solo si, existe una cadena $f = f_1, f_2, \ldots, f_n = g$ en $\mathcal{C}(X, Y)$ tal que $f_i|_A = f|_A$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Sean X, Y dos espacios topológicos finitos y consideremos el espacio $\mathcal{C}(X, Y)$. Sean $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ tales que $f|_A = g|_A$ para $A \subseteq X$. Si f, g verifican $f \simeq_{rel(A)} g$, entonces existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \to Y$ entre f y g, es decir, que verifica $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$, y $H(a, t) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ y para todo $t \in [0, 1]$. Gracias al Teorema 3.5.5, esto es equivalente a que existe un camino $\alpha : I \to \mathcal{C}(X, Y)$ tal que $\alpha(0) = f$ y $\alpha(1) = g$. Sin embargo, si denominamos $\alpha(t) := h_t \in \mathcal{C}(X, Y)$, tenemos que $h_t(a) = f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, por lo que podemos considerar el camino $\alpha : I \to M$, donde $M := \{h \in \mathcal{C}(X, Y) : h|_A = f|_A\}$. Si aplicamos el resultado del Corolario 3.3.18 al subespacio M de $\mathcal{C}(X, Y)$, la existencia del camino en M que une f con g es equivalente a la existencia de una cadena en M que une f con g, con lo que queda probada la equivalencia. $\square$

Observación 4.3.2. Si en el Teorema 4.3.1 tenemos que $A = \emptyset$, se tiene que $f \simeq g$ si, y solo si, existe una cadena en $\mathcal{C}(X, Y)$ que une f con g.

Corolario 4.3.3. *Dadas $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos finitos tales que $f|_A = g|_A$ para $A \subseteq X$. Entonces, si $f \leq g$, se tiene que $f \simeq_{rel(A)} g$.*

Demostración. Si $f \leq g$, es claro que f, g es una cadena que une f y g que, además, verifica que $f|_A = g|_A$, con lo que, aplicando el Teorema 4.3.1, tenemos que $f \simeq_{rel(A)} g$. □

Continuaremos con un pequeño lema, obtenido del artículo de May [7], el cual veremos que se puede enunciar de maneras distintas.

Lema 4.3.4. *Sea X un espacio topológico finito. Si existe $y \in X$ tal que el único abierto (o el único cerrado) que contiene a y es X, entonces X es contráctil.*

Observación 4.3.5. Observemos que la condición de que exista $y \in X$ tal que X es el único abierto que lo contiene es equivalente a que $B_y = X$, lo cual es equivalente a que $x \leq y$ para todo $x \in X$.

De igual forma, que exista $y \in X$ tal que X es el único cerrado que lo contiene es equivalente a que y pertenece a todos los abiertos de X, en concreto $y \in B_x$ para todo $x \in X$, lo cual es equivalente a que $y \leq x$ para todo $x \in X$.

Demostración del Lema 4.3.4. Supongamos que X es un espacio topológico finito y que existe $y \in X$ tal que el único abierto que lo contiene es X. Veamos que el subconjunto $\{y\}$ es retracto de deformación de X. Definimos $r : X \to \{y\}$ dada por $r(x) = y$ para todo $x \in X$. Por otro lado, consideramos la aplicación inclusión $i : \{y\} \hookrightarrow X$ dada por $i(y) = y$. Es claro que $r \circ i = Id_{\{y\}}$. Veamos que se verifica $i \circ r \simeq_{rel(\{y\})} Id_X$ viendo que $Id_X \leq i \circ r$, gracias al resultado del Corolario 4.3.3. Para ello, hay que ver que $x = Id_X(x) \leq i \circ r(x) = y$ para todo $x \in X$. Pero esto es claro, ya que hemos visto en la Observación 4.3.5 que X es el único abierto que contiene a y si, y solo si, $x \leq y$ para todo $x \in X$. Entonces $Id_X \leq i \circ r$. Además, se tiene que $Id_X(y) = y = i \circ r(y)$, lo que implica, juntado a lo anterior, que $i \circ r \simeq_{rel(\{y\})} Id_X$. Así, queda probado que $\{y\}$ es rectracto de deformación de X, por lo que este espacio es contráctil.

Para el caso en que X es el único cerrado que contiene a y, es decir, que todo abierto de X contiene a y, consideramos r e i como en el caso anterior. Como hemos visto en la Observación 4.3.5, tenemos que $y \leq x$ para todo $x \in X$. De esta forma, $i \circ r(x) = y \leq x = Id_X(x)$, por lo que $i \circ r \leq Id_X$. Además, se tiene que $i \circ r(y) = y = Id_X(y)$. Aplicando el Corolario 4.3.3, $i \circ r \simeq_{rel(\{y\}} Id_X$, con lo que queda probado que $\{y\}$ es retracto de deformación de X, por lo que este espacio es contráctil. □

Como resultado inmediato tenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.3.6. *Sean X un espacio topológico finito y $x \in X$. Entonces el subconjunto B_x es contráctil.*

Demostración. Por construcción de B_x, se tiene que $y \leq x$ para todo $y \in B_x$. Por lo tanto verifica la hipótesis del Lema 4.3.4, con lo que se cumple que B_x es contráctil. □

A continuación, vamos a introducir el cociente de Kolmogorov, que nos ayudará a dar la equivalencia homotópica entre un espacio topológico finito cualquiera y un espacio topológico finito T_0.

Definición 4.3.7. Sea X un espacio topológico finito. En X definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \Leftrightarrow B_x = B_y$$

El espacio $X_0 := X/_\sim$ se llama el *cociente de Kolmogorov* del espacio X, en el cual tomamos la topología cociente de X, y denotaremos la proyección canónica como $p : X \to X_0$, que es continua. Dado $x \in X$, denotaremos por $[x] \in X_0$ a su clase de equivalencia. Así, $p(x) = [x]$.

Notación: Como vamos a trabajar con un conjunto cociente, será de utilidad fijar un representante de cada clase. Tomamos $X_1 \subseteq X$ tal que para cada clase de equivalencia de X_0 existe un único elemento de X_1 que pertenece a dicha clase. De esta forma, la aplicación $\tilde{p} := p|_{X_1} : X_1 \to X_0$ es biyectiva. Los elementos de X_1 los llamaremos *representantes de las clases* y serán denotados como x', donde x' es el representante de la clase de x. El conjunto X_1 es un subespacio topológico de X con la topología de subespacio. Los abiertos minimales de la base son los conjuntos $B_{x'} = B_x \cap X_1$.

Observación 4.3.8. Con la notación anterior, dado $x \in X$ se tiene que $X_1 \cap p^{-1}([x]) = \{x'\}$

Es claro que X_0 es un espacio topológico finito, con la topología cociente, y el siguiente resultado nos caracteriza el preorden asociado a dicha topología:

Lema 4.3.9. *Dados $x, y \in X$ se tiene que $[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \leq y$.*

Demostración. Para probar este lema, vamos a ver primero que para cada $x \in X$ se tiene que $B_x = p^{-1}(p(B_x))$. Utilizaremos esa igualdad para probar que $p(B_x)$ es abierto en X_0, lo cual nos ayudará a probar la igualdad $p(B_x) = B_{[x]}$, donde B_x es el abierto minimal de x en X y $B_{[x]}$ es el abierto minimal de $[x]$ en X_0 con la topología cociente. Por último, pasaremos a demostrar la doble implicación del Lema.

Por propiedades de la imagen y la contraimagen, se tiene siempre que $B_x \subseteq p^{-1}(p(B_x))$. Para ver la otra contención, tomemos $y \in p^{-1}(p(B_x))$. Entonces existe $z \in B_x$ tal que $[z] = [y]$, es decir, que $B_y = B_z$. Se tiene entonces que $y \in B_y = B_z \subseteq B_x$, con lo que queda demostrado el contenido. Por lo tanto,

$$B_x = p^{-1}(p(B_x)) \tag{4.1}$$

como queríamos ver. Debido a que p es una aplicación cociente, entonces $p(B_x)$ es un abierto de X_0.

Por una parte, se tiene que $[x] \in p(B_x)$. Entonces, como $p(B_x)$ es abierto que contiene a $[x]$, se tiene que $B_{[x]} \subseteq p(B_x)$. Por otro lado, es claro que $x \in p^{-1}(B_{[x]})$, ya que $p(x) = [x] \in B_x$, luego, dado que $p^{-1}(B_{[x]})$ es abierto, se tiene que $B_x \subseteq p^{-1}(B_{[x]})$. Por lo tanto, $p(B_x) \subseteq p(p^{-1}(B_{[x]})) = B_{[x]}$ por ser p sobreyectiva. Entonces obtenemos la igualdad

$$p(B_x) = B_{[x]} \tag{4.2}$$

Por último, para ver la doble implicación del enunciado, supongamos que $x \leq y$. Como p es continua, por la Proposición 3.5.2, la aplicación p preserva el orden, con lo que $[x] = p(x) \leq p(y) = [y]$. Supongamos ahora que $[x] \leq [y]$, luego $B_{[x]} \subseteq B_{[y]}$. Por (4.2), tenemos que $p(B_x) \subseteq p(B_y)$. Por último, obtenemos gracias a (4.1) que $B_x = p^{-1}(p(B_x)) \subseteq p^{-1}(p(B_y)) = B_y$, lo que es equivalente a que $x \leq y$. Queda así probado el resultado. □

Corolario 4.3.10. *Con la notación anterior, la aplicación $\tilde{p} : X_1 \to X_0$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sabemos que $\tilde{p}$ es biyectiva, por lo que existe su aplicación inversa, definida de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{p}^{-1} : & X_0 & \longrightarrow & X_1 \\ & [x] & \longmapsto & x' \end{array} \tag{4.3}$$

Veamos que $\tilde{p}$ y $\tilde{p}^{-1}$ son continuas. Para ello, es suficiente ver que preservan el orden. Para ver que $\tilde{p}$ es continua, tomamos $x', y' \in X_1$ tales que $x' \leq y'$. Entonces, por el Lema 4.3.9 tenemos que $\tilde{p}(x') = [x'] \leq [y'] = \tilde{p}(y')$, con lo que queda probado que $\tilde{p}$ es continua. Ahora, para ver que $\tilde{p}^{-1}$ es continua, tomamos $x, y \in X$ tales que $[x] \leq [y]$. Consideramos $x', y' \in X_1$ los representantes de las clases de x y de y. Entonces $[x'] = [x] \leq [y] = [y']$. De nuevo por el Lema 4.3.9 tenemos que $x' \leq y'$. Es decir, hemos visto que si $[x] \leq [y]$, entonces $\tilde{p}^{-1}([x]) = x' \leq y' = \tilde{p}^{-1}([y])$, con lo que queda probado que la aplicación $\tilde{p}^{-1}$ es continua, como queríamos ver. De esta forma, hemos demostrado que $\tilde{p} : X_1 \to X_0$ es un homeomorfismo. □

Lema 4.3.11. *El espacio X_0 es un espacio topológico T_0.*

Demostración. Sea X un espacio topológico finito y X_0 su cociente de Kolmogorov. Veamos que X_0 es T_0 utilizando la caracterización de la Proposición 3.2.2. Sean $[x], [y] \in X_0$ tales que $B_{[x]} = B_{[y]}$. Entonces $[x] \leq [y]$ e $[y] \leq [x]$. Por el Lema 4.3.9 tenemos que $x \leq y$ e $y \leq x$. Es decir, $B_x = B_y$, por lo que $x \sim y$, es decir, $[x] = [y]$ como queríamos ver, luego el espacio X_0 es T_0. □

Corolario 4.3.12. *El subespacio X_1 de los representantes de las clases es un espacio T_0.*

Demostración. La demostración es trivial, ya que X_1 es homeomorfo a X_0, el cual es espacio T_0. □

Ahora que hemos demostrado que el cociente de Kolmogorov de un espacio es un espacio T_0 y que vamos a poder dibujar su diagrama de Hasse, vamos a dar un ejemplo con su representación.

Ejemplo 4.3.13. Vamos a calcular el cociente de Kolmogorov de un espacio topológico finito concreto. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\beta = \{\{a, e\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d, e\}\}$ la base minimal de su topología τ, donde $B_a = B_e = \{a, e\}$, $B_b = \{a, b, e\}$ y $B_c = B_d = \{a, c, d, e\}$. Por lo tanto, $a \sim e$ y $c \sim d$. Tomamos $X_1 = \{a, b, c\}$ el conjunto de los representantes de las clases. Por lo tanto, X_0 es homeomorfo a X_1. La base minimal de la topología τ_0 en X_1 es $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. Veámoslo mejor con el grafo dirigido asociado a X (Figura 4.6a) y el diagrama de Hasse asociado a X_1 (Figura 4.6b):

(a) Grafo dirigido del espacio (X, τ) (b) Diagrama de Hasse de (X_1, τ_0)

Figura 4.6: Comparativa entre el grafo dirigido de X y el diagrama de Hasse de X_1

Teorema 4.3.14. *X_1 es un retracto de deformación de X.*

Demostración. Consideramos las aplicaciones continuas $r := \tilde{p}^{-1} \circ p : X \to X_1$ e $i : X_1 \hookrightarrow X$ la inclusión de X_1 en X. Ambas aplicaciones son continuas. Dado $x \in X_1$, se tiene que

$$r \circ i(x) = \tilde{p}^{-1} \circ p \circ i(x) = \tilde{p}^{-1}(p(i(x))) = \tilde{p}^{-1}(p(x)) = \tilde{p}^{-1}([x]) = x$$

Entonces $r \circ i = Id_{X_1}$ y X_1 es un retracto de X. Por otra parte, veamos que $i \circ r \simeq_{rel(X_1)} Id_X$. Para ello, veamos que $i \circ r \leq Id_X$ y que $i \circ r|_{X_1} = Id_X|_{X_1}$. Sean $x \in X$ y $x' \in X_1$ tal que $[x] = [x']$. Se tiene que $i \circ r(x) = i(r(x)) = i(\tilde{p}^{-1}(p(x))) = i(\tilde{p}^{-1}([x])) = i(x') = x'$, en concreto, $i \circ r(y) = y$ para todo $y \in X_1$. Como x y x' son de la misma clase de equivalencia, entonces se tiene que $x' \leq x$ y $x \leq x'$. Por lo tanto, $i \circ r(x) \leq Id_X(x)$ para todo $x \in X$ y, además, $i \circ r(y) = y = Id_X(y)$ para todo $y \in X_1$, con lo que concluimos que $i \circ r \leq Id_X$ e $i \circ r|_{X_1} = Id_X|_{X_1}$. Por lo tanto, $i \circ r \simeq_{rel(X_1)} Id_X$, como queríamos ver, y queda así probado que X_1 es retracto de deformación de X. □

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos el siguiente Corolario.

Corolario 4.3.15. *Todo espacio topológico finito es homotópicamente equivalente a su cociente de Kolmogorov. Por lo tanto, todo espacio topológico finito tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio topológico finito T_0.*

Demostración. Sean X un espacio topológico finito, X_0 su cociente de Kolmogorov y X_1 el conjunto de los representantes de las clases. Hemos probado en el Corolario 4.3.10 que X_0 es homeomorfo a X_1 y en el Teorema 4.3.14 que X_1 es retracto de deformación de X, por lo que X y X_1 tienen el mismo tipo de homotopía. Pero X_1 también tiene el mismo tipo de homotopía que X_0, con lo que, por transitividad de la equivalencia homotópica, X y X_0 son homotópicamente equivalentes. □

A continuación, vamos a estudiar el tipo de homotopía de un espacio topológico finito. Acabamos de probar que cualquier espacio topológico finito tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio topológico finito T_0. Por ello, en los siguientes resultados vamos a considerar directamente espacios topológicos finitos T_0. Los resultados enunciados en esta última parte pueden ser encontrados en [5] y en [15].

Recordemos que en la Definición 4.2.2 podemos encontrar la definición de que un elemento cubra a otro, que es necesaria para las siguientes definiciones.

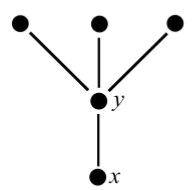
Definición 4.3.16. Sea X un espacio topológico finito T_0.

i) Un punto $x \in X$ se dice *lineal* si existe un único punto $y \in X$ que cubre a x.

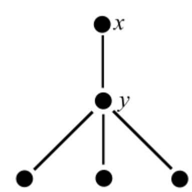
ii) Un punto $x \in X$ se dice *colineal* si existe un único punto $y \in X$ que es cubierto por x.

iii) Un punto $x \in X$ se dice *eliminable* si x es lineal o colineal.

Vamos a llamar a esos puntos eliminables porque veremos que podremos eliminarlos de nuestro espacio topológico finito T_0 sin afectar a su tipo de homotopía. Antes de demostrar esto, vamos a visualizar, gracias a los diagramas de Hasse, un ejemplo de punto lineal (Figura 4.7a) y otro ejemplo de punto colineal (Figura 4.7b).



(a) x es un punto lineal



(b) x es un punto colineal

Figura 4.7: Visualización de un punto lineal y de otro colineal

Observación 4.3.17. Podemos dar una caracterización de los puntos lineales y colineales. Dados X un espacio topológico finito T_0 y $x \in X$ se tiene que:

i) x es un punto lineal si, y solo si, el conjunto $\hat{F}_x := F_x \backslash \{x\}$ tiene un mínimo, donde $F_x = \{y \in X : x \leq y\}$. Es decir, si, y solo si, existe $z \in \hat{F}_x$ tal que $z \leq y$ para todo $y \in \hat{F}_x$.

ii) x es un punto colineal si, y solo si, el conjunto $\hat{B}_x := B_x \backslash \{x\}$ tiene un máximo, donde $B_x = \{y \in X : y \leq x\}$. Es decir, si, y solo si, existe $z \in \hat{B}_x$ tal que $y \leq z$ para todo $y \in \hat{B}_x$.

Proposición 4.3.18. *Sean X un espacio topológico finito T_0 y $x_0 \in X$ un punto eliminable. Entonces $X \backslash \{x_0\}$ es un retracto de deformación de X.*

Observación 4.3.19. En $X \backslash \{x_0\}$ consideramos la topología de subespacio de X. El orden parcial asociado a este subespacio, $\leq_{X \backslash \{x_0\}}$, es el dado por la siguiente relación:

$$x \leq_{X \backslash \{x_0\}} y \Longleftrightarrow x \leq_X y$$

Demostración de la Proposición 4.3.18. Sean X un espacio topológico finito T_0 y $x_0 \in X$ un punto eliminable de X. Consideramos $i : X\backslash\{x_0\} \hookrightarrow X$ la inclusión. Supongamos primero que x_0 es un punto lineal, es decir, que existe un único $y \in X$ tal que $x_0 \prec y$. Consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} r: & X & \longrightarrow & X\backslash\{x_0\} \\ & x & \longmapsto & x \text{ si } x \neq x_0 \\ & x_0 & \longmapsto & y \end{array}$$

Veamos que r es continua viendo que preserva el orden. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \leq_X x_2$, vamos a distinguir varios casos:

- Si x_1 y x_2 son distintos de x_0, entonces $r(x_1) = x_1$ y $r(x_2) = x_2$, por lo que $r(x_1) \leq r(x_2)$.
- Si $x_0 = x_2$ y $x_1 \neq x_0$, entonces $r(x_2) = y$ y $r(x_1) = x_1$. Como $x_0 \prec y$, entonces $x_1 \leq y$, con lo que se tiene que $r(x_1) \leq r(x_2)$.
- Si $x_0 = x_1$ y $x_2 \neq x_0$, entonces $r(x_1) = y$ y $r(x_2) = x_2$. Como $x_0 \prec y$ entonces $y \leq x_2$, con lo que se tiene que $r(x_1) \leq r(x_2)$.
- Si $x_1 = x_2 = x_0$, es claro que $r(x_1) = r(x_2)$.

En cualquiera de los casos, la aplicación r preserva el orden, con lo que queda probado que es continua.

Para acabar la demostración, hay que probar que $X\backslash\{x_0\}$ es retracto de deformación de X. Es claro que $r \circ i = Id_{X\backslash\{x_0\}}$ por construcción. Veamos que $i \circ r \simeq_{rel(X\backslash\{x_0\})} Id_X$ probando que $Id_X \leq i \circ r$ y que $i \circ r|_{X\backslash\{x_0\}} = Id_X|_{X\backslash\{x_0\}}$. Sea $x \in X$. Vamos a distinguir dos casos:

- Si $x \neq x_0$, entonces $i \circ r(x) = x = Id_X(x)$, con lo que $i \circ r|_{X\backslash\{x_0\}} = Id_X|_{X\backslash\{x_0\}}$.
- Si $x = x_0$, entonces $i \circ r(x_0) = y$ y, por construcción, $x_0 \leq y$. Por lo tanto, $Id_X(x_0) \leq i \circ r(x_0)$.

Así, $Id_X \leq i \circ r$ e $i \circ r|_{X\backslash\{x_0\}} = Id_X|_{X\backslash\{x_0\}}$ como queríamos ver, con lo que queda demostrado que $X\backslash\{x_0\}$ es retracto de deformación de X.

La demostración cuando el punto x_0 es colineal es análoga, por lo que se omite. $\square$

Definición 4.3.20. Un espacio topológico finito T_0 de dice que es *minimal* si no tiene ningún punto eliminable.

Veamos un ejemplo sencillo de un espacio minimal:

Ejemplo 4.3.21. Tomamos $X = \{a, b, c, d\}$ y τ la topología cuya base minimal asociada es $\beta = \{\{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{c\}, \{d\}\}$, es decir, donde los abiertos minimales asociados a cada punto son $B_a = \{a, c, d\}, B_b = \{b, c, d\}, B_c = \{c\}$ y $B_d = \{d\}$. Este espacio es claramente T_0, por lo que podemos dibujar su diagrama de Hasse (Figura 4.8).

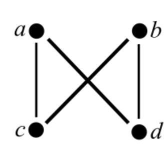


Figura 4.8: Diagrama de Hasse de (X, τ)

Podemos observar que no hay ningún punto eliminable, ya que ningún punto cubre a un solo punto ni es cubierto por un solo elemento. Por lo tanto, el espacio es minimal.

La noción de espacio minimal será importante para la parte final de esta sección, donde trabajaremos con los núcleos de los espacios finitos, los cuales vamos a introducir a continuación.

Definición 4.3.22. Dado un espacio topológico finito X, diremos que $N \subseteq X$ es un *núcleo* de X si N es minimal y es retracto de deformación de X. Por lo tanto, por definición de espacio minimal, el núcleo de un espacio es T_0.

Observación 4.3.23. Un núcleo de un espacio topológico finito se obtiene realizando el cociente de Kolmogorov del espacio, considerando el subespacio X_1 de los representantes de las clases y, en X_1, eliminando aquellos puntos que sean eliminables hasta que no quede ninguno y obtengamos un espacio minimal. Entonces todo espacio topológico finito tiene un núcleo.

Ejemplo 4.3.24. En este ejemplo vamos a realizar los pasos explicados en la Observación 4.3.23 para hallar el núcleo de un espacio topológico finito concreto. En este caso, vamos a hacer el ejemplo con un espacio topológico finito T_0 directamente para poder realizar directamente el diagrama de Hasse y simplificar los pasos y los dibujos. Consideramos $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y τ la topología en X cuya base minimal es $\beta = \{\{a, b, c, d, f, g\}, \{b, c, f\}, \{c\}, \{d, f, g\}, \{e, f, g\}, \{f\}, \{g\}\}$. Es un espacio T_0, y su diagrama de Hasse asociado es el representado en la Figura 4.9.

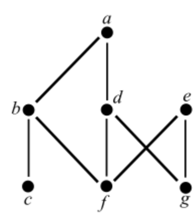


Figura 4.9: Diagrama de Hasse de (X, τ)

Se puede ver en la Figura 4.9 que este espacio no es minimal, ya que, por ejemplo, el punto c es un punto lineal. Por ello, en la Figura 4.10 vamos a ir eliminando puntos eliminables hasta llegar a un espacio minimal, que será un núcleo de nuestro espacio.

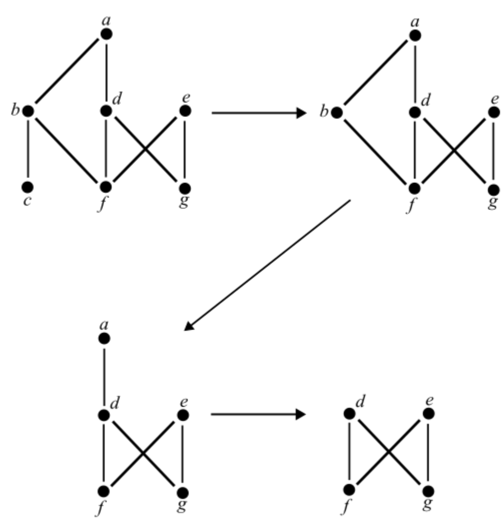


Figura 4.10: Pasos para llegar al núcleo del espacio X

En el primer paso hemos eliminado el punto c, que es un punto lineal. Al eliminar un punto, también hay que quitar las aristas del diagrama que llegan o salen del mismo, y hay que añadir las aristas necesarias para mantener el orden parcial del espacio resultante. Al eliminar el punto c, el punto b, que ya era un punto lineal, ha pasado a ser un punto colineal también, por lo que, en el segundo paso, eliminamos el punto b. Al eliminar este punto, el punto a pasa a ser colineal, por lo que, en el último paso, eliminamos dicho punto. Llegamos al mismo espacio que en la Figura 4.8, la cual ya se vio que representaba un espacio minimal. Este espacio será un núcleo de nuestro espacio inicial.

En los ejemplos hemos visto cómo encontrar un núcleo para cada espacio topológico finito. En esta última parte, vamos a analizar los espacios minimales y las aplicaciones entre ellos y llegaremos a que todo espacio topológico finito tiene un único núcleo salvo homeomorfismo.

Lema 4.3.25. *Sean X un espacio topológico finito minimal y $f : X \to X$ una aplicación continua. Si $f \simeq Id_X$, entonces $f = Id_X$.*

Demostración. Como vimos en el Teorema 4.3.1, si $f \simeq Id_X$, entonces existe una cadena en $\mathcal{C}(X, X)$ que une f con Id_X. Podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que f e Id_X son comparables. Vamos a suponer que $f \leq Id_X$ y, por reducción al absurdo, que $f \neq Id_X$, entonces podemos encontrar $y \in X$ tal que $f(y) < y$, con lo que el siguiente conjunto es no vacío:

$$A := \{x \in X : f(x) < x\}$$

Como A es un conjunto finito, existe al menos un elemento minimal x_0 en A, es decir, que si existe $z < x_0$, entonces $z \notin A$. Veamos que existe $z \in X$ con $z < x_0$.

Supongamos que x_0 es elemento minimal de A y que no existe $z \in X$ tal que $z < x_0$. Entonces x_0 es elemento minimal de X también. Sin embargo, como $x_0 \in A$, se tiene que $f(x_0) < x_0$, lo cuál es imposible porque x_0 era elemento minimal de X. Llegamos a una contradiccón, por lo que siempre existe al menos un punto en X menor que x_0.

Tomamos x_0 un elemento minimal de A. Como $x_0 \in A$, entonces $y_0 := f(x_0) < x_0$, es decir, $y_0 \in \hat{B}_{x_0}$. Recordemos que $\hat{B}_{x_0} := B_{x_0} \backslash \{x_0\}$, como habíamos definido en la Observación 4.3.17. Tomamos $z \in \hat{B}_{x_0}$, es decir, $z \in X$ tal que $z < x_0$. Como la aplicación f es continua, entonces preserva el orden, por lo que se tiene que $f(z) \leq f(x_0)$, pero como x_0 es elemento minimal de A y $z < x_0$, entonces $z \notin A$, es decir, que $f(z) = z$. Hemos llegado a que $z \leq y_0$. Resumiendo, para cualquier $z \in \hat{B}_{x_0}$, se tiene que $z \leq y_0$, por lo que y_0 es máximo de $\hat{B}_{x_0}$. Aplicando el resultado de la Observación 4.3.17, llegamos a que el punto x_0 es un punto colineal de X, lo cual es imposible, ya que X era un espacio minimal. Por lo tanto, llegamos a una contradicción, con lo que podemos concluir que si $f \leq Id_X$, entonces $f = Id_X$.

De forma análoga se prueba que si $Id_X \leq f$ entonces $f = Id_X$ y, con esto, queda probado el resultado. □

Teorema 4.3.26. *Sean X, Y dos espacios topológicos finitos minimales y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces f es una equivalencia homotópica si, y solo si, f es un homeomorfismo.*

Demostración. Si f es homeomorfismo, claramente f es equivalencia homotópica. Para ver el recíproco, consideremos $g : Y \to X$ el inverso homotópico de f. Recordemos que f, g son aplicaciones continuas. Como $g \circ f \simeq Id_X$, se tiene por el Lema 4.3.25 que $g \circ f = Id_X$. Análogamente, como $f \circ g \simeq Id_Y$, se tiene que $f \circ g = Id_Y$. Por lo tanto, f es homeomorfismo. □

Observación 4.3.27. La proposición anterior nos dice que dos espacios topológicos finitos minimales son homotópicamente equivalentes si, y solo si, son homeomorfos. Gracias a este resultado, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.3.28. *El núcleo de un espacio topológico finito es único salvo homeomorfismo. Además dos espacios topológicos finitos tienen el mismo tipo de homotopía si, y solo si, sus núcleos son homeomorfos.*

Demostración. Sea X un espacio topológico finito. Consideramos N_1 y N_2 dos núcleos del espacio X. Veamos que N_1 y N_2 son homeomorfos. Como N_1 y N_2 son núcleos de X, ambos son retractos de deformación de X, por lo que tienen el mismo tipo de homotopía que X. Entonces, N_1 y N_2 son homotópicamente equivalentes entre sí. Por lo tanto, va a existir $f : N_1 \to N_2$ una equivalencia homotópica entre los dos conjuntos N_1 y N_2, que son minimales. Aplicando el resultado del Teorema 4.3.26, obtenemos que f es un homeomorfismo.

Para ver la segunda parte del corolario, consideramos X, Y espacios topológicos finitos. Entonces se tiene que X e Y tienen el mismo tipo de homotopía si, y solo si, sus núcleos tienen el mismo tipo de homotopía si, y solo si, aplicando el resultado de la Observación 4.3.27, sus núcleos son homeomorfos. Queda así probado el resultado. □

Corolario 4.3.29. *Un espacio topológico es contráctil si, y solo si, su núcleo está formado por un solo punto.*

Demostración. Vimos en la Proposición 4.1.8 que un espacio topológico X era contráctil si, y solo si, existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ es retracto de deformación de X. Vamos a apoyarnos en esta afirmación para demostrar el resultado.

Supongamos que X es contráctil. Entonces existe $x \in X$ tal que $\{x\}$ es retracto de deformación de X. En concreto, X tiene el mismo tipo de homotopía que $\{x\}$, el cual es minimal. Sea N un núcleo de X. Por transitividad de la equivalencia homotópica, N y $\{x\}$ tienen el mismo tipo de homotopía, así que va a existir $f : \{x\} \to N$ una equivalencia homotópica entre ellos, que son ambos espacios minimales. Aplicando el resultado de la Proposición 4.3.26, se tiene que f es un homeomorfismo. Por lo tanto, el núcleo de un espacio contráctil es unipuntual.

Para ver el recíproco, tomamos X un espacio topológico finito tal que su núcleo N es unipuntual, es decir, existe $x \in X$ tal que $N = \{x\}$. Entonces, por definición de núcleo, N es retracto de deformación de X, con lo que queda demostrado que X es un espacio contráctil. □

Capítulo 5

Teoría de McCord

En esta sección vamos a estudiar la Teoría de McCord, la cual relaciona los espacios topológicos finitos con los complejos simpliciales. En esta teoría se definen las llamadas aplicaciones $\mathcal{K}$-McCord y $\mathcal{X}$-McCord, que son aplicaciones entre la realización geométrica de un complejo simplicial y un espacio topológico. Se probará que estas dos aplicaciones son equivalencias homotópicas débiles, pero para llegar a esa prueba, primero debemos introducir los grupos fundamentales de orden superior y la definición de equivalencia homotópica débil, así como los conceptos más importantes sobre complejos simpliciales.

5.1. Equivalencia homotópica débil

Las equivalencias homotópicas débiles forman parte del estudio de la homotopía de los espacios topológicos finitos. Sin embargo, para poder definirlas, necesitamos introducir los conceptos de grupos de homotopía de orden superior. Las definiciones y resultados que enunciaremos serán generales, válidos para espacios topológicos arbitrarios, no necesariamente finitos. Los resultados que vamos a enunciar en esta sección no van a ser demostrados. Una lectura más completa puede encontrarse en [6]

Comenzaremos definiendo el grupo de homotopía de orden 0, que, en realidad, no tendrá estructura de grupo, pero le daremos ese nombre como una generalización de los grupos de homotopía de orden superior.

Definición 5.1.1. Sea X un espacio topológico. En X se define la relación de equivalencia $\sim$ dada por $x \sim y$ si x e y están en la misma componente conexa por caminos de X. Entonces el *grupo fundamental de orden* 0 es el conjunto cociente $\pi_0(X) := X/_\sim$, formado por las componentes conexas por caminos de X.

Definición 5.1.2. Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces queda inducida la aplicación $\pi_0(f) : \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ dada por $\pi_0(f)([x]) = [f(x)]$ para todo $x \in X$.

Esta aplicación verifica que, para X, Y, Z espacios topológicos, y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones continuas, entonces $\pi_0(f \circ g) = \pi_0(f) \circ \pi_0(g)$ y $\pi_0(Id_X) = Id_{\pi_0(X)}$. Además se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.1.3. *Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ es una biyección.*

Continuaremos definiendo los grupos de homotopía de orden superior, los cuales serán una generalización del grupo fundamental, que se introduce a lo largo de los estudios del grado de Matemáticas.

Tomando $n \geq 1$, vamos a introducir los conceptos previos necesarios para definir el grupo de homotopía de orden n. Es necesario considerar el $n-$cubo $[0,1]^n := [0,1] \times [0,1] \times \overset{n)}{\cdots} \times [0,1]$, y la frontera del mismo, dada por

$$\partial([0,1]^n) := \{(t_1, \ldots, t_n) : t_i \in \{0,1\} \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

Además, para definir el grupo de homotopía de orden n de un espacio X es necesario fijar un punto base $x_0 \in X$. Al espacio X con x_0 como punto base lo denotaremos (X, x_0). Pasemos a dar la definición formal de $n-$lazo.

Definición 5.1.4. Sea (X, x_0) un espacio topológico con punto base. Un *$n-$lazo con base en x_0* es una aplicación continua $\sigma : [0,1]^n \to X$ tal que $\sigma(\partial([0,1]^n)) = \{x_0\}$. Denotaremos por $\Omega^n(X, x_0)$ al conjunto de todos los $n-$lazos en X con base en x_0.

En el conjunto $\Omega^n(X, x_0)$ se puede definir una aplicación entre $n-$lazos, que es una generalización a n dimensiones de la concatenación de caminos. La concatenación de caminos viene definida de la siguiente forma.

Definición 5.1.5. Dados $\sigma, \gamma \in \Omega^n(X, x_0)$, definimos la concatenación de σ y γ de la siguiente forma:

$$(\sigma * \gamma)(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) = \begin{cases} \sigma(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n) & \text{si } t_n \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n - 1) & \text{si } t_n \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Por otro lado, dado σ un $n-$lazo, se define el $n-$lazo inverso a σ como

$$\overline{\sigma}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) := \sigma(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1 - t_n)$$

Por último, denotaremos el $n-$lazo constante en x_0 como c_{x_0}.

Por último, vamos a dar una relación de equivalencia en $\Omega^n(X, x_0)$, gracias a la cual obtendremos el grupo de homotopía de orden n.

Definición 5.1.6. Dados $\sigma, \gamma \in \Omega^n(X, x_0)$, definimos la relación de equivalencia en $\Omega^n(X, x_0)$ como $\sigma \sim \gamma$ si $\sigma \simeq_{rel.\partial([0,1]^n)} \gamma$, es decir, si σ y γ son $n-$lazos homótopos relativos a $\partial([0,1]^n)$.

Esta relación verifica las siguientes propiedades:

Proposición 5.1.7. *Sean (X, x_0) un espacio topológico con un punto base y $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^n(X, x_0)$. Se tiene que:*

i) *Si $\alpha \sim \gamma$ y $\beta \sim \delta$, entonces $\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$.*

ii) $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.

iii) $c_{x_0} * \alpha \sim \alpha$ *y* $\alpha * c_{x_0} \sim \alpha$.

iv) $\alpha * \overline{\alpha} \sim c_{x_0}$ *y* $\overline{\alpha} * \alpha \sim c_{x_0}$.

Una vez introducidos estos conceptos, podemos definir el grupo de homotopía de orden n.

Definición 5.1.8. Sea (X, x_0) un espacio topológico con un punto base, se define el grupo de homotopía de orden n sobre (X, x_0) como $\pi_n(X, x_0) := \Omega_n(X, x_0)/_{\sim}$. Este conjunto tiene estructura de grupo con la operación $[\sigma] \cdot [\gamma] := [\sigma * \gamma]$, donde el elemento neutro es $[c_{x_0}]$ y el inverso de cada elemento $[\sigma]$ es $[\sigma]^{-1} := [\overline{\sigma}]$

Al igual que con el grupo de homotopía de orden 0, para toda aplicación continua $f : X \to Y$, queda inducida una aplicación entre los grupos de homotopía de orden superior de X y de Y de la siguiente forma:

Definición 5.1.9. Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una aplicación continua y $x_0 \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos definir la aplicación $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ inducida por f dada por $\pi_n(f)([\sigma]) = [f \circ \sigma]$, que es un homomorfismo de grupos.

Esta aplicación inducida entre los grupos de homotopía de orden superior nos permite dar los siguientes resultados:

Proposición 5.1.10. *Sean X, Y dos espacios topológicos, $x_0 \in X$. Si una aplicación $f : X \to Y$ es equivalencia homotópica, entonces $\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos para todo $n \geq 1$.*

Corolario 5.1.11. *Si X es un espacio topológico contráctil, entonces $\pi_n(X, x) \cong \{c_x\}$ para todo $n \geq 0$ y para todo $x \in X$, donde $\{c_x\}$ representa el grupo trivial.*

Después de todos los conceptos introducidos, ya estamos en condiciones de definir el concepto de equivalencia homotópica débil.

Definición 5.1.12. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Diremos que f es una *equivalencia homotópica débil* si verifica:

i) $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ es una biyección.

ii) $\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ es un isomorfismo de grupos para todos $x \in X$ y $n \geq 1$.

Observación 5.1.13. Notemos que en el caso en el que X e Y sean conexos por caminos, se tendrá que $f : X \to Y$ es equivalencia homotópica débil si, y solo si, se verifica ii) para un punto prefijado x_0.

Para ver que existe una diferencia entre las equivalencias homotópicas y las equivalencias homotópicas débiles, veremos en el Ejemplo 5.3.4 una aplicación entre dos espacios topológicos finitos que es equivalencia homotópica débil pero que no es equivalencia homotópica. Necesitamos el Teorema 5.3.3 para probar que la aplicación que daremos es equivalencia homotópica débil.

Para terminar con esta sección introductoria, vamos a dar dos proposiciones sobre las equivalencias homotópicas débiles. La primera de ellas la vamos a dar con demostración, pues será relevante en alguna demostración de la Sección 5.3.

Proposición 5.1.14. *Sean X e Y dos espacios topológicos contráctiles y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces f es una equivalencia homotópica débil.*

Demostración. Como X e Y son contráctiles, por el Corolario 5.1.11 se tiene que, para todo $x \in X$, para todo $y \in Y$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n(X, x) \cong \pi_n(Y, y) \cong 0$, donde 0 representa el grupo trivial. Por lo tanto, la aplicación inducida $\pi_n(f)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier aplicación continua $f : X \to Y$. Por lo tanto, cualquier aplicación continua $f : X \to Y$ es equivalencia homotópica débil. $\square$

Proposición 5.1.15. *Sean X, Y, Z espacios topológicos.*

i) Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones continuas. Si dos de las aplicaciones $f, g, g \circ f$ son equivalencias homotópicas débiles, entonces también lo es la tercera.

ii) Sean $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas tales que $f \simeq g$. Entonces f es equivalencia homotópica débil si, y solo si, g es equivalencia homotópica débil.

5.2. Complejos simpliciales

En esta sección vamos a introducir un concepto nuevo en el trabajo, los complejos simpliciales, un objeto matemático de la rama de la topología algebraica. Daremos la definición de complejo simplicial, veremos resultados relacionados con estos y daremos la construcción de un complejo simplicial a partir un espacio topológico finito y viceversa. La mayoría de las definiciones y resultados que vamos a enunciar en esta sección se pueden encontrar en [6].

Primero, comenzaremos dando la definición de complejo simplicial.

Definición 5.2.1. Un *complejo simplicial (abstracto)* K es un par (V_K, S_K) donde V_K es un conjunto finito no vacío de *vértices* y S_K es un conjunto de subconjuntos no vacíos de V_K, denominados *símplices* que verifican:

i) $\{v\} \in S_K$ para todo $v \in V_K$, es decir, todo subconjunto de V_K de cardinal 1 es un símplice.

ii) Si $\sigma \in S_K$ y $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in S_K$, es decir, que todo subconjunto no vacío de un símplice es un símplice.

Denotaremos $v \in K$ si $v \in V_K$ es un vértice y $\sigma \in K$ si $\sigma \in S_K$ es un símplice.

A continuación veamos las definiciones de cara y de dimensión de un símplice.

Definición 5.2.2. Dado un complejo simplicial K y dos símplices $\sigma, \tau \in K$, diremos que σ *es cara de* τ si $\sigma \subseteq \tau$. Además, si $\sigma \subsetneq \tau$, diremos que σ *es cara propia de* τ.

Definición 5.2.3. Decimos que un complejo simplicial K es un *cono simplicial* si existe un vértice $v \in K$ tal que para todo símplice $\sigma \in K$ que no contiene a v, se tiene que $\sigma \cup \{v\}$ es un símplice de K. En ese caso, diremos que v es el *vértice* del cono simplicial.

Definición 5.2.4. Un símplice σ con $n+1$ vértices se llama $n-$*símplice* y tiene *dimensión* n. Lo denotaremos por $dim(\sigma)$.
La *dimensión* de un complejo simplicial K será el máximo de las dimensiones de sus símplices.

Los complejos simpliciales pueden tener subcomplejos simpliciales. Veamos cómo se definen estos.

Definición 5.2.5. Un *subcomplejo simplicial* de un complejo simplicial K es un complejo simplicial L tal que $V_L \subseteq V_K$ y $S_L \subseteq S_K$. Lo denotaremos como $L \subseteq K$.
Además, diremos que L es subcomplejo simplicial *completo* si cualquier símplice de K que tenga todos sus vértices en L es también un símplice de L.

Continuamos dando la definición de símplice cerrado, la cual aparecerá en múltiples ocasiones y será de gran importancia en lo que resta de trabajo.

Definición 5.2.6. Sea $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ un $n-$símplice. Llamaremos *símplice cerrado de* σ al conjunto

$$\overline{\sigma} := \{t_0 v_0 + \ldots + t_n v_n : \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } 0 \leq i \leq n\}$$

En un símplice cerrado se puede definir una topología dada por la métrica siguiente:

$$d\left(\sum_{i=0}^{n} s_i v_i, \sum_{i=0}^{n} t_i v_i\right) := \left(\sum_{i=0}^{n} (s_i - t_i)^2\right)^{1/2}$$

Veamos ahora qué es la realización geométrica de un complejo simplicial.

Definición 5.2.7. Sea K un complejo simplicial. Se define la *realización geométrica de* K, denotada como $|K|$, al conjunto

$$\left\{ \sum_{v \in K} t_v v : \sum_{v \in K} t_v = 1, t_v \geq 0 \text{ para todo } v \in K \text{ y } \{v \in K : t_v > 0\} \text{ es un símplice de } K \right\}$$

Observación 5.2.8. Sea K un complejo simplicial y σ un símplice de K. Entonces se tiene que $\overline{\sigma}$ es un subconjunto de $|K|$. Por lo tanto, se puede considerar la inclusión $i : \overline{\sigma} \hookrightarrow |K|$.

Vamos a ver algún ejemplo de realización geométrica de un símplice y de un complejo simplicial.

Ejemplo 5.2.9. Consideramos el 2−símplice σ generado por $\{v_0, v_1, v_2\}$. Su realización geométrica $|\sigma|$ es la Figura 5.1.

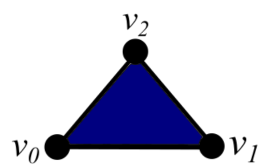


Figura 5.1: Realización geométrica del 2−símplice σ

Por otro lado, consideramos el complejo simplicial K de vértices $V_K = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y de símplices $S_K = \{\{v_0, v_1, v_2\}, \{v_4, v_5, v_6\}, \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_7\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_7\}\}$. La realización geométrica de este complejo simplicial es la Figura 5.2.

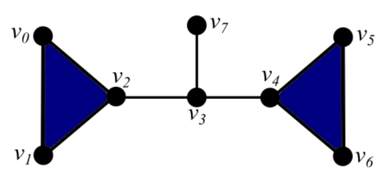


Figura 5.2: Realización geométrica del complejo simplicial K

Proposición 5.2.10. *Dado K un complejo simplicial, entonces $|K|$ se puede dotar de estructura de espacio topológico con la topología más fina en $|K|$ que hace que las aplicaciones $i_{\overline{\sigma}} : \overline{\sigma} \hookrightarrow |K|$ sean continuas para todo $\sigma \in K$, es decir, la topología que verifica que un subconjunto $U \subseteq |K|$ es abierto si, y solo si, $U \cap \overline{\sigma} = i_{\overline{\sigma}}^{-1}(U)$ es abierto en el espacio topológico $\overline{\sigma}$ para todo $\sigma \in K$ con la topología dada en la Definición 5.2.6.*

Vamos a enunciar a continuación dos lemas cuya demostración podemos encontrar en [9].

Lema 5.2.11. *Sea $L \subseteq K$ subcomplejo simplicial. Entonces $|L|$ es un subconjunto cerrado en $|K|$. En particular, si $\sigma \in K$, entonces $\overline{\sigma}$ es un subespacio cerrado en $|K|$.*

Lema 5.2.12. *Una aplicación $f : |K| \to X$ es continua si, y solo si, $f|_{\overline{\sigma}}$ es continua para cada $\sigma \in K$.*

Continuamos introduciendo definiciones generales sobre complejos simpliciales.

Definición 5.2.13. Se llama *soporte* de un punto $x = \sum_{v \in K} t_v v \in |K|$ al símplice $sop(x) = \{v : t_v > 0\}$.

Definición 5.2.14. Sea σ un símplice. Se llama *símplice abierto de* σ al subconjunto de puntos de $\overline{\sigma}$ tales que su soporte es exactamente σ. Lo denotaremos por $\mathring{\sigma}$.

Vamos a definir también las aplicaciones entre complejos simpliciales, y veremos que inducen una aplicación entre sus realizaciones geométricas.

Definición 5.2.15. Sean K y L dos complejos simpliciales. Una *aplicación simplicial* $\varphi : K \to L$ entre K y L es una aplicación entre los vértices V_K y V_L que envía símplices de K en símplices de L, es decir, que si $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in S_K$, entonces $\varphi(\sigma) = \{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n)\} \in S_L$.

Proposición 5.2.16. *Toda aplicación simplicial $\varphi : K \to L$ induce una aplicación continua bien definida $|\varphi| : |K| \to |L|$ entre las realizaciones geométricas, definida de la siguiente forma:*

$$|\varphi| \left(\sum_{v \in K} t_v v \right) = \sum_{v \in K} t_v \varphi(v)$$

A continuación, veamos las últimas definiciones necesarias para poder introducir la definición de subdivisión baricéntrica, la cual será importante en la relación entre los espacios topológicos finitos y los complejos simpliciales.

Definición 5.2.17. Sea K un complejo simplicial. Diremos que un complejo simplicial L es una *subdivisión* de K si verifica:

i) $|K| = |L|$.

ii) Cada símplice de L está contenido en un símplice de K.

Definición 5.2.18. Sea $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ un $n-$símplice. Llamamos *baricentro* de σ al punto

$$b(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k+1} v_i \in \mathring{\sigma}$$

Ya hemos visto todo lo necesario para dar la definición de subdivisión baricéntrica.

Definición 5.2.19. Sea K un complejo simplicial. Se llama (primera) *subdivisión baricéntrica* de K al complejo simplicial K' definido de la siguiente forma: los vértices de K' son los baricentros de los símplices de K, y los símplices de K' son los conjuntos $\{b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_n)\}$ tales que $\sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \dots \subseteq \sigma_n$.

Recursivamente se definen las subdivisiones baricéntricas de orden superior, $K^{(n+1)} = \left(K^{(n)}\right)'$

Proposición 5.2.20. *La función lineal $i_K : |K'| \to |K|$ que manda cada vértice de K' en el punto correspondiente de $|K|$ y que se extiende por linealidad al resto de $|K'|$ es un homeomorfismo.*

A continuación vamos a ver la definición de complejo simplicial asociado a un espacio topológico finito T_0, y el espacio topológico finito T_0 asociado a un complejo simplicial. Recordemos que podemos encontrar la definición de subconjunto totalmente ordenado en la Definición 3.2.9.

Definición 5.2.21. Sea X un espacio topológico finito T_0. El complejo simplicial asociado a X es el complejo simplicial cuyos vértices son los puntos del espacio X y cuyos símplices son los subconjuntos no vacíos totalmente ordenados de X. Al complejo simplicial asociado a X lo denotaremos por $\mathcal{K}(X)$. Además, dada una aplicación continua $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos finitos T_0, queda inducida la aplicación simplicial asociada $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ definida por $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Observación 5.2.22. Notemos que el espacio X debe verificar la condición T_0 para poder considerar sus subconjuntos totalmente ordenados, pues en caso de no ser T_0 no tenemos un orden parcial, por lo que no se puede dar un orden total. Además, comprobemos que ciertamente $\mathcal{K}(X)$ es un complejo simplicial. Es claro que los conjuntos unipuntuales son totalmente ordenados. Además, cualquier subconjunto de un conjunto totalmente ordenado va a ser totalmente ordenado también, por lo que todo subconjunto de un símplice es símplice. Comprobemos también que la aplicación $\mathcal{K}(f)$ es aplicación simplicial. Para ello tenemos que comprobar que dado $A := \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto totalmente ordenado de X, entonces $f(A) := \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ es conjunto totalmente ordenado de Y. Tomamos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Como A es un conjunto totalmente ordenado, se tiene que x_i y x_j son comparables. Como la aplicacion f es continua, preserva el orden, por lo que $f(x_i)$ y $f(x_j)$ también son comparables, con lo que queda probado que $f(A)$ es un conjunto totalmente ordenado de Y y, por lo tanto, un símplice de $\mathcal{K}(Y)$.

Definición 5.2.23. Sea K un complejo simplicial. El espacio topológico finito T_0 asociado a K es el conjunto finito parcialmente ordenado de los símplices de K con la relación de inclusión. Al espacio topológico finito T_0 asociado a K lo denotaremos por $\mathcal{X}(K)$.
Además, dada una aplicación simplicial $\varphi : K \to L$ entre dos complejos simpliciales, queda inducida la aplicación continua asociada $\mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K) \to \mathcal{X}(L)$ definida por $\mathcal{X}(\varphi)(\sigma) = \varphi(\sigma)$ para todo $\sigma \in K$.

Observación 5.2.24. Notemos que el espacio topológico finito asociado a un complejo simplicial K será T_0 porque los símplices de K con la relación de contención forman un conjunto finito parcialmente ordenado. Además, para comprobar que $\mathcal{X}(\varphi)$ es continua, veamos que preserva el orden por inclusión de los símplices. Tomamos $\tau, \sigma \in K$ tales que $\tau \subseteq \sigma$. Si denotamos $\tau = \{u_0, \ldots, u_m\}$ y $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\}$, tenemos que para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$ existe $j_i \in \{0, \ldots, n\}$ con $u_i = v_{j_i}$. Entonces, para todo i se tiene que $\mathcal{X}(\varphi(u_i)) = \varphi(u_i) = \varphi(v_{j_i}) = \mathcal{X}(\varphi(v_{j_i})) \in \mathcal{X}(\varphi(\sigma))$. Es decir, $\mathcal{X}(\varphi(\tau)) \subseteq \mathcal{X}(\varphi(\sigma))$, con lo que queda demostrado que $\mathcal{X}(\varphi)$ preserva el orden.

Las asociaciones que acabamos de definir quedan relacionadas entre sí por el siguiente resultado:

Proposición 5.2.25. *Sea K un complejo simplicial. Se tiene que $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K)) = K'$ es la subdivisión baricéntrica de K.*
Además, dada un aplicación simplicial $\varphi : K \to L$ entre dos complejos simpliciales, queda inducida la aplicación $\mathcal{K}(\mathcal{X}(\varphi)) = \varphi' : K' \to L'$ entre las subdivisiones baricéntricas de K y L.

Para finalizar esta sección, vamos a dar un ejemplo de un espacio topológico finito T_0 X, del cual vamos a calcular y representar su complejo simplicial asociado $\mathcal{K}(X)$, la subdivisión baricéntrica de $\mathcal{K}(X)$, el espacio topológico finito T_0 asociado a $\mathcal{K}(X)$.

Ejemplo 5.2.26. Consideramos el espacio topológico finito $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la base minimal $\beta = \{\{a\}, X, \{c, d\}, \{d\}, \{d, e\}\}$. Notemos que este espacio topológico es T_0 y está representado por el diagrama de Hasse de la Figura 5.3.

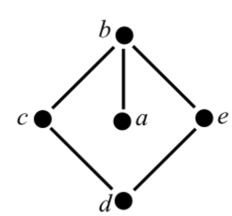


Figura 5.3: Diagrama de Hasse de X

La realización geométrica del complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ asociado a X viene dado en la Figura 5.4.

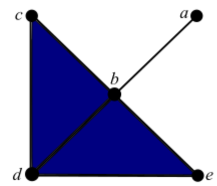


Figura 5.4: Realización geométrica de $\mathcal{K}(X)$

En la Figura 5.5, vamos a visualizar la realización geométrica de la subdivisión baricéntrica de $\mathcal{K}(X)$. Se han representado en rojo los $0-$símplices y los $1-$símplices nuevos.

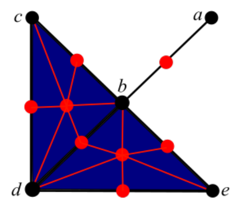


Figura 5.5: Realización geométrica de la subdivisión baricéntrica de $\mathcal{K}(X)$

A continuación, vamos a dar el espacio topológico finito T_0 asociado al complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$. Recordemos que los puntos de este espacio topológico son los símplices de $\mathcal{K}(X)$ y la relación de orden asociada es la inclusión de los símplices. De esta forma, obtenemos el siguiente diagrama de Hasse (Figura 5.6).

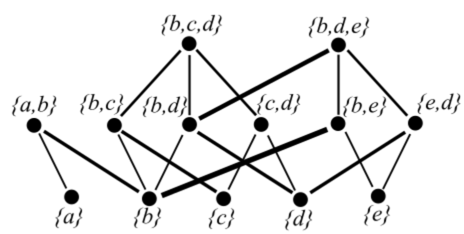


Figura 5.6: Diagrama de Hasse de $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$

Para acabar con el ejemplo, vamos a calcular el complejo simplicial asociado a $\mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$, y comprobaremos que, efectivamente, coincide con la subdivisión baricéntrica de $\mathcal{K}(X)$. Si consideramos $f = \{a, b\}, g = \{b, c\}, h = \{c, d\}, i = \{b, d\}, j = \{d, e\}, k = \{b, e\}, l = \{b, c, d\}$ y $m = \{b, d, e\}$, tenemos que el complejo simplicial $\mathcal{K}(\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)))$ viene representado por la Figura 5.7.

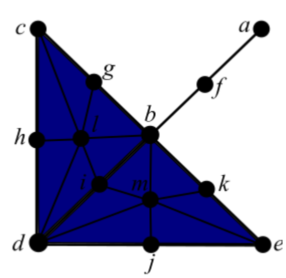


Figura 5.7: Realización geométrica de $\mathcal{K}(\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)))$

Podemos observar que, efectivamente, la subdivisión baricéntrica de $\mathcal{K}(X)$ (Figura 5.5) coincide con el complejo simplicial $\mathcal{K}(\mathcal{X}(\mathcal{K}(X)))$ (Figura 5.7).

5.3. Teoría de McCord

En esta última sección del trabajo, vamos a estudiar los resultados vistos por McCord en su artículo [8], donde demuestra que existen equivalencias homotópicas débiles entre los espacios topológicos finitos y las realizaciones geométricas de los complejos simpliciales.

Vamos a comenzar enunciando el Teorema de McCord, un resultado que nos será de utilidad para las demostraciones de los resultados de esta sección, y cuya prueba se puede encontrar en [8]. Antes de ello, necesitamos introducir la noción de recubrimiento básico.

Definición 5.3.1. Un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de un espacio topológico será llamado *básico* si para todo $x \in U \cap V$ con $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ que verifica $x \in W \subseteq U \cap V$.

Observación 5.3.2. Notemos que en todo espacio topológico finito X, el conjunto $\{B_x : x \in X\}$ es un recubrimiento abierto básico del espacio X.

Ahora sí, podemos enunciar el teorema de McCord.

Teorema 5.3.3 (McCord). *Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Supongamos que existe un recubrimiento abierto básico $\mathcal{U}$ de Y tal que, para cada $U \in \mathcal{U}$, la restricción $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ es una equivalencia homotópica débil. Entonces la aplicación f es una equivalencia homotópica débil.*

Veamos un ejemplo de una aplicación entre dos espacios topológicos finitos que sea equivalencia homotópica débil pero que no sea equivalencia homotópica. El siguiente ejemplo puede encontrarse en el Example 1.4.3. del libro de Barmak [3].

Ejemplo 5.3.4. Consideramos los espacios topológicos finitos $X = \{a_1, a_2, a_3, b, c, d\}$ con la base minimal $\beta_X = \{\{a_1, a_2, c\}, \{a_2\}, \{a_2, a_3, d\}, \{c\}, \{b, c, d\}, \{d\}\}$ e $Y = \{u, v, w, x\}$ con la base minimal $\beta_Y = \{\{u, w, x\}, \{v, w, x\}, \{w\}, \{x\}\}$. Estos espacios son ambos T_0 y están representados por los siguientes diagramas de Hasse (Figura 5.8).

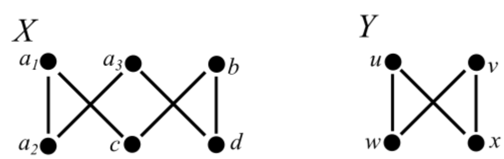


Figura 5.8: Diagramas de Hasse de X e Y

Notemos que ambos espacios topológicos son minimales, ya que ninguno contiene puntos eliminables.

Definimos una aplicación $f : X \to Y$ dada de la siguiente forma: $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = u$, $f(b) = v$, $f(c) = w$ y $f(d) = x$. Con una rápida comprobación se puede ver que esta aplicación preserva el orden, por lo que es continua. A continuación, vamos a aplicar el Teorema 5.3.3 para ver que f es una equivalencia homotópica débil. Consideramos el recubrimiento básico de Y formado por los abiertos minimales, $\{B_y : y \in Y\} = \{\{u, w, x\}, \{v, w, x\}, \{w\}, \{x\}\}$. Sabemos por el Corolario 4.3.6 que los abiertos minimales son contráctiles. La contraimagen por f de estos conjuntos son las siguientes: $f^{-1}(\{w\}) = \{c\}$, que es contráctil, $f^{-1}(\{x\}) = \{d\}$, que es contráctil, $f^{-1}(\{v, w, x\}) = \{b, c, d\} = B_b$, que también es contráctil por ser abierto minimal de X y, por último, $f^{-1}(\{u, w, x\}) = \{a_1, a_2, a_3, c, d\}$. Este subespacio topológico viene representado por el diagrama de Hasse de la Figura 5.9.

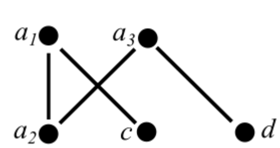


Figura 5.9: Diagrama de Hasse de $f^{-1}(\{u, w, x\})$

Siguiendo los pasos de la Observación 4.3.23, se puede comprobar que el núcleo de este espacio unipuntual, por lo que concluimos que es contráctil. Así, queda probado que B_y y $f^{-1}(B_y)$ son contráctiles para todo $y \in Y$. Por lo tanto, como vimos en la Proposición 5.1.14, las aplicaciones $f|_{f^{-1}(B_y)} : f^{-1}(B_y) \to B_y$ son equivalencias homotópicas débiles para todo $y \in Y$. De esta forma, aplicando el Teorema 5.3.3, se tiene que f es una equivalencia homotópica débil. Por otra parte, aplicando el resultado de la Proposición 4.3.26, tenemos que los espacios X e Y son minimales y f no es un homeomorfismo, por lo que f no es una equivalencia homotópica.

A continuación, vamos a definir las aplicaciones dadas por McCord que relacionan los espacios topológicos finitos con los complejos simpliciales. Posteriormente veremos que esas aplicaciones son equivalencias homotópicas débiles.

Vamos a introducir en primer lugar la llamada aplicación $\mathcal{K}$-McCord, que se construye a partir de un espacio topológico finito T_0.

Definición 5.3.5. Sea X un espacio topológico finito T_0. Se define la *aplicación $\mathcal{K}$-McCord* de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccl} \mu_X : & |\mathcal{K}(X)| & \longrightarrow & X \\ & \alpha & \longmapsto & \mu_X(\alpha) = \text{mín}(sop(\alpha)) \end{array}$$

Veamos un ejemplo de la aplicación $\mathcal{K}-$McCord sobre el espacio topológico finito T_0 definido en el ejemplo 5.2.26, que nos ayudará a entender mejor esta aplicación.

Ejemplo 5.3.6. Vamos a tomar el complejo simplicial asociado al espacio topológico finito X de la Figura 5.3, que ya representamos en la Figura 5.4, y vamos a considerar los siguientes tres puntos, x_1, x_2 y x_3, marcados en rojo en la Figura 5.10:

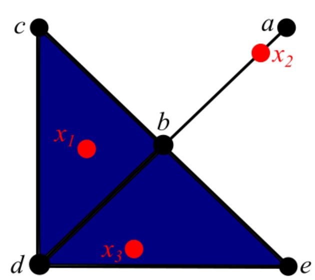


Figura 5.10: Realización geométrica de $\mathcal{K}(X)$

A continuación, vamos a calcular la imagen por la aplicación $\mathcal{K}-$McCord de x_1, x_2 y x_3.

- El soporte del punto x_1 es el conjunto $\{b, c, d\}$, y el mínimo de dicho conjunto en el orden dado en X es el punto d, por lo que $\mu_X(x_1) = d$.

- El soporte del punto x_2 es el conjunto $\{a, b\}$, y el mínimo de dicho conjunto en el orden dado en X es el punto a, por lo que $\mu_X(x_2) = a$.

- El soporte del punto x_3 es el conjunto $\{b, d, e\}$, y el mínimo de dicho conjunto en el orden dado en X es el punto d, por lo que $\mu_X(x_3) = d$.

Ahora queremos demostrar que la aplicación $\mathcal{K}-$McCord es una equivalencia homotópica débil, pero para llegar a ello vamos a ver primero algunos resultados previos.

Lema 5.3.7. *Sean X un espacio topológico finito T_0 y U un abierto de X. Definimos $L := \mathcal{K}(X \backslash U)$, el subcomplejo simplicial completo que contiene los vértices que no están en U. Entonces se verifica:*

1. *$\mu_X^{-1}(U) = |\mathcal{K}(X)|\backslash|L|$.*

2. *La aplicación μ_X es continua.*

3. *$|\mathcal{K}(U)|$ es retracto de deformación de $\mu_X^{-1}(U)$.*

Demostración. Demostremos cada apartado del lema:

1. Vamos a demostrar la igualdad $\mu_X^{-1}(U) = |\mathcal{K}(X)|\backslash|L|$ por doble contenido. Si $\alpha \in \mu_X^{-1}(U)$, entonces $\mu_X(\alpha) = \text{mín}(sop(\alpha)) \in U$, por lo que el soporte de α contiene un vértice de U, con lo que $\alpha \notin |L|$. Para ver la otra implicación, tomemos $\alpha \notin |L|$, entonces, por definición de L, existe $y \in sop(\alpha)$ tal que $y \in U$ y, por lo tanto, $\mu_X(\alpha) = \text{mín}(sop(\alpha)) \leq y$, con lo que $\mu_X(\alpha) \in U$ por ser U abierto, como queríamos ver.

2. Dado un abierto U de X, se tiene que $\mu_X^{-1}(U) = |\mathcal{K}(X)|\backslash|L|$ es abierto en $|\mathcal{K}(X)|$ porque $|L|$ es cerrado en $|\mathcal{K}(X)|$ (véase Observación 5.2.11), con lo que queda demostrada la continuidad de μ_X.

3. Una demostración más general a esta afirmación se puede encontrar en el Lema 70.1 de la página 414 del libro de Munkres [9], la cual hemos tomado como referencia para esta demostración. Ahora bien, pasemos a demostrar nuestro resultado.

   Es claro que $|\mathcal{K}(U)| \subseteq |\mathcal{K}(X)|\backslash|L|$, ya que cualquier subcomplejo de $\mathcal{K}(X)$ que no esté en L tiene al menos un vértice en U, y $\mathcal{K}(U)$ tiene todos sus vértices en U, por lo que podemos considerar la inclusión $i : |\mathcal{K}(U)| \hookrightarrow |\mathcal{K}(X)|\backslash|L|$. Veamos a continuación que para todo $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|\backslash|L|$, α se puede escribir de la forma $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$ para algún $\beta \in |\mathcal{K}(U)|$ y $\gamma \in |L|$ y con $0 < t \leq 1$. Para cualquier vértice v de $\mathcal{K}(X)$, se tiene que o bien $v \in \mathcal{K}(U)$ o bien $v \in L$. Entonces, para cualquier $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|\backslash|L|$, como α se puede escribir de forma única como $\alpha = \sum_{v\in\mathcal{K}(X)} t_v v$, podemos separar el sumatorio entre los vértices en $\mathcal{K}(U)$ y los vértices en L. Es decir, $\alpha = \sum_{u\in\mathcal{K}(U)} t_u u + \sum_{v\in L} t_v v$. Definimos $t := \sum_{u\in\mathcal{K}(U)} t_u$. Notemos que $t > 0$ siempre, porque existe $w \in sop(\alpha)$ tal que $w \in \mathcal{K}(U)$. Si $t = 1$, se tiene que $\alpha \in |\mathcal{K}(U)|$. En caso de que $t \neq 1$, tenemos que

   $$\alpha = \sum_{u\in\mathcal{K}(U)} t_u u + \sum_{v\in L} t_v v = t \cdot \sum_{u\in\mathcal{K}(U)} \frac{t_u}{t} u + (1-t) \cdot \sum_{v\in L} \frac{t_u}{1-t} v = t\beta + (1-t)\gamma$$

   donde $\beta := \sum_{u\in\mathcal{K}(U)} \frac{t_u}{t} u \in |\mathcal{K}(U)|$ y $\gamma := \sum_{v\in L} \frac{t_u}{1-t} v \in |L|$. En cualquiera de los dos casos (tanto si $t = 1$ como si $t \neq 1$), se tiene que $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$ con $\beta \in |\mathcal{K}(U)|$, $\gamma \in |L|$ y $0 < t \leq 1$ como queríamos ver, y dicha expresión es única.

   A continuación consideramos un símplice $\sigma \in \mathcal{K}(X)\backslash L$. Entonces se tiene que $\overline{\sigma} \subseteq |\mathcal{K}(X)|\backslash|L|$. Definimos la aplicación $r_\sigma : \overline{\sigma} \to |\mathcal{K}(U)|$ dada por $r_\sigma(\alpha) := \beta$ para cada $\alpha \in \overline{\sigma}$, es decir, si $\alpha = \sum_{u\in\mathcal{K}(U)} t_u u + \sum_{v\in L} t_v v$, entonces $r_\sigma(\alpha) = \sum_{u\in\mathcal{K}(U)} \frac{t_u}{t} u$, la cual es una aplicación continua. Es inmediato que cualesquiera dos funciones r_σ y r_τ coinciden en la intersección de sus dominios. Por lo tanto, podemos definir la siguiente aplicación

   $$\begin{array}{rccl} r: & |\mathcal{K}(X)|\backslash|L| & \longrightarrow & |\mathcal{K}(U)| \\ & \alpha & \longmapsto & r(\alpha) = r_\sigma(\alpha) \text{ si } \alpha \in \sigma \end{array}$$

La aplicación r es continua gracias al Lema 5.2.12, ya que, para cada $\sigma \in \mathcal{K}(X)\backslash L$, la restricción $r|_{(|\mathcal{K}(X)|\backslash|L|)\cap\overline{\sigma}} := r_\sigma$ es continua. Entonces r es una retracción de $|\mathcal{K}(X)\backslash|L|$ en $|\mathcal{K}(U)|$, pues deja fijos los puntos de $|\mathcal{K}(U)|$.

Por último, consideramos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} H: & (|\mathcal{K}(X)|\backslash|L|)\times[0,1] & \longrightarrow & |\mathcal{K}(X)|\backslash|L| \\ & (\alpha, s) & \longmapsto & H(\alpha, s) := (1-s)\cdot\alpha + s\cdot r(\alpha) \end{array}$$

Esta aplicación es continua por ser combinación de aplicaciones continuas, con lo que H es una homotopía entre $Id_{|\mathcal{K}(X)|\backslash|L|}$ e $i\circ r$ que deja fijos los puntos de $|\mathcal{K}(U)|$, es decir, se tiene que $Id_{|\mathcal{K}(X)|\backslash|L|} \simeq_{rel(|\mathcal{K}(U)|)} i\circ r$, y queda así probado que $|\mathcal{K}(U)|$ es retracto de deformación de $\mu_X^{-1}(U)$.

□

Lema 5.3.8. *Para todo $x \in X$, el conjunto $\mu_X^{-1}(B_x)$ es contráctil.*

Demostración. Fijamos $x \in X$. Para probar este resultado es suficiente con probar que $|\mathcal{K}(B_x)|$ es contráctil, pues como $|\mathcal{K}(B_x)|$ es retracto de deformación de $\mu_X^{-1}(B_x)$ como hemos visto en el punto 3 del Lema 5.3.7, si el primero es contráctil, también lo será el segundo. Comprobemos que se cumple. Los símplices de $\mathcal{K}(B_x)$ son los conjuntos totalmente ordenados de B_x. Tomamos $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ un conjunto totalmente ordenado de B_x que no contenga a x. Como todo elemento de B_x es comparable con x, se tiene que el conjunto $\sigma \cup \{x\}$ es un conjunto totalmente ordenado de B_x, por lo que $\sigma \cup \{x\}$ es un símplice de $\mathcal{K}(B_x)$. Por lo tanto el complejo simplicial $\mathcal{K}(B_x)$ es un cono símplicial de vértice x y, en consecuencia, $|\mathcal{K}(B_x)|$ es contráctil como queríamos ver. □

Finalmente podemos enunciar el teorema que buscábamos.

Teorema 5.3.9. *Sea X un espacio topológico finito T_0. Entonces, la aplicación $\mathcal{K}$-McCord μ_X de X es una equivalencia de homotopía débil.*

Demostración. Para demostrar este resultado vamos a apoyarnos en el Teorema 5.3.3. El recubrimiento básico de X que vamos a considerar es el conjunto $\{B_x : x \in X\}$, y vamos a probar que la aplicaciones $\mu_X|_{\mu_X^{-1}(B_x)} : \mu_X^{-1}(B_x) \to B_x$ son equivalencias homotópicas débiles para todo $x \in X$.

Acabamos de probar que la aplicación μ_X es continua, vimos en el Corolario 4.3.6 que el conjunto B_x es contráctil para todo $x \in X$ y acabamos de probar también que el conjunto $\mu_X^{-1}(B_x)$ es contráctil para todo $x \in X$. Aplicando la Proposición 5.1.14, tenemos inmediatamente que $\mu_X|_{\mu_X^{-1}(B_x)}$ es una equivalencia homotópica débil para todo $x \in X$. Aplicando el Teorema 5.3.3, la aplicación μ_X es una equivalencia homotópica débil, como queríamos ver. □

Por último, antes de continuar con la aplicación $\mathcal{X}-$McCord, veamos que esta construcción también se puede dar para cualquier espacio topológico finito.

Corolario 5.3.10. *Sea X un espacio topológico finito. Existe un complejo simplicial $\mathcal{K}(X)$ y una equivalencia homotópica débil $\mu : |\mathcal{K}(X)| \to X$.*

Demostración. Vimos en el Corolario 4.3.15 que todo espacio topológico finito tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio topológico finito T_0, el cuál vimos que era su cociente de Kolmogorov X_0. Por lo tanto, para todo espaico topológico finito X existe una equivalencia homotópica $f : X_0 \to X$ entre X y su cociente de Kolmogorov X_0, luego la aplicación $\mu := f \circ \mu_{X_0}$ es una equivalencia homotópica débil. □

Una vez vista la aplicación $\mathcal{K}-$McCord, podemos definir la aplicación $\mathcal{X}-$McCord. Esta aplicación será similar a la aplicación $\mathcal{K}-$McCord, pero estará construida a partir de un complejo simplicial. Veremos después que esta aplicación es, al igual que la aplicación $\mathcal{K}-$McCord, una equivalencia homotópica débil.

Definición 5.3.11. Sea K un complejo simplicial, se define la *aplicación $\mathcal{X}-$McCord* como $\nu_K := \mu_{\mathcal{X}(K)} \circ i_K^{-1} : |K| \to \mathcal{X}(K)$, donde $\mu_{\mathcal{X}(K)}$ es la aplicación $\mathcal{K}-$McCord de $\mathcal{X}(K)$ y i_K es la aplicación definida en la Observación 5.2.20.

Proposición 5.3.12. *La aplicación $\mathcal{X}-$McCord ν_K es una equivalencia homotópica débil para todo complejo simplicial K.*

Demostración. Como $\mu_{\mathcal{X}(K)}$ es equivalencia homotópica débil y i_K es homeomorfismo, entonces i_K^{-1} también es homeomorfismo y, por lo tanto, es equivalencia homotópica débil. De esta forma, por la Proposición 5.1.15 la composición $\mu_{\mathcal{X}(K)} \circ i_K^{-1}$ es equivalencia homotópica débil. □

Para finalizar, vamos a dar un ejemplo de la aplicación $\mathcal{X}-$McCord, que nos ayudará a entender mejor esta aplicación.

Ejemplo 5.3.13. Tomaremos el complejo simplicial representado en la Figura 5.4, el cual vamos a denominar K, y calcularemos la imagen por la aplicación ν_K de los puntos x_1, x_2 y x_3 de la Figura 5.10. En la Figura 5.11 recordamos cuales eran estos puntos:

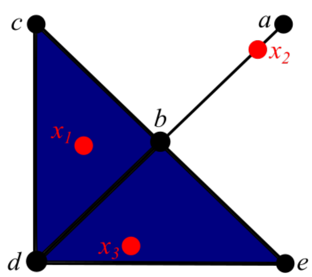


Figura 5.11: Realización geométrica de K

Para calcular la imagen por la aplicación $\mathcal{X}-$McCord ν_K de estos puntos, primero tenemos que calcular la imagen de dichos puntos por la aplicación i_K^{-1} definida en la Observación 5.2.20. Para visualizar mejor cómo funciona esta aplicación, vamos a ver estos puntos sobre la realización geométrica de la subdivisión baricéntrica de K (Figura 5.12).

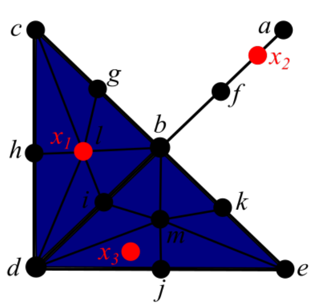


Figura 5.12: Realización geométrica de K'

- El punto x_1 es el baricentro del símplice $\{b, c, d\}$, por lo que se tiene que $i_K^{-1}(x_1) = l$.

- El punto x_2 es combinación lineal del vértice a y del baricentro del símplice $\{a,b\}$. Por lo tanto, x_2 se puede escribir de la forma

$$x_2 = \lambda_a a + \lambda_{\{a,b\}} b(\{a,b\})$$

donde $b(\{a,b\})$ simboliza el baricentro del símplice $\{a,b\}$. De esta forma:

$$i_K^{-1}(x_2) = i_K^{-1}(\lambda_a a + \lambda_{\{a,b\}} b(\{a,b\})) = \lambda_a i_K^{-1}(a) + \lambda_{\{a,b\}} i_K^{-1}(b(\{a,b\})) = \lambda_a a + \lambda_{\{a,b\}} f$$

Es decir, $i_K^{-1}(x_2)$ es combinación lineal de los vértices a y f.

- El punto x_3 es combinación lineal del vértice d y de los baricentros de los símplices $\{d,e\}$ y $\{b,d,e\}$. Entonces x_3 se puede escribir de la forma

$$x_3 = \lambda_d d + \lambda_{\{d,e\}} b(\{d,e\}) + \lambda_{\{b,d,e\}} b(\{b,d,e\})$$

De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} i_K^{-1}(x_3) &= i_K^{-1}(\lambda_d d + \lambda_{\{d,e\}} b(\{d,e\}) + \lambda_{\{b,d,e\}} b(\{b,d,e\})) = \\ &= \lambda_d i_K^{-1}(d) + \lambda_{\{d,e\}} i_K^{-1}(b(\{d,e\})) + \lambda_{\{b,d,e\}} i_K^{-1}(b(\{b,d,e\})) = \\ &= \lambda_d d + \lambda_{\{d,e\}} j + \lambda_{\{b,d,e\}} m \end{aligned}$$

Es decir, $i_K^{-1}(x_3)$ es combinación lineal de los vértices d, j y m.

Una vez que hemos visto la imagen de cada uno de los puntos por la aplicación i_K^{-1}, solo nos queda aplicar $\mu_{\mathcal{X}(K)}$ a las imágenes de los puntos por i_K^{-1}.

- El soporte del punto $i_K^{-1}(x_1)$ es el conjunto $\{l\}$, por lo que $\mu_{\mathcal{X}(K)}(i_K^{-1}(x_1)) = l$.
- El soporte del punto $i_K^{-1}(x_2)$ es el conjunto $\{a,f\}$. El mínimo de este conjunto dado por el orden en $\mathcal{X}(K)$ es el punto a, por lo que $\mu_{\mathcal{X}(K)}(i_K^{-1}(x_2)) = a$.
- El soporte del punto $i_K^{-1}(x_3)$ es el conjunto $\{d,j,m\}$. El mínimo de este conjunto dado por el orden en $\mathcal{X}(K)$ es el punto d, por lo que $\mu_{\mathcal{X}(K)}(i_K^{-1}(x_3)) = d$.

En resumen, la imagen de los tres puntos x_1, x_2 y x_3 por la aplicación $\mathcal{X}-$McCord ν_K es:

- Para el punto x_1, $\nu_K(x_1) = l$.
- Para el punto x_2, $\nu_K(x_2) = a$.
- Para el punto x_3, $\nu_K(x_3) = d$.

Bibliografía

[1] P. Alexandroff. «Diskrete Räume». En: *Rec. Math. [Mat. sbornik] N.S.* (1937), págs. 501-519.

[2] J.A. Barmak. «Espacio Topológicos finitos». Tesis de licenciatura. Universidad de Buenos Aires, 2006.

[3] J.A. Barmak. *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. Springer, 2011.

[4] A. Díaz Tiburón. «Topología de Espacios Finitos». Trabajo Fin de Grado. Universidad Politécnica de Madrid, 2022.

[5] T. Gutiérrez Gutiérrez. «Espacios Topológicos Finitos». Trabajo Fin de Grado. Universidad de La Laguna, 2017.

[6] C.R.F. Maunder. *Algebraic Topology*. New university mathematics series. Van Nostrand Reinhold Company, 1970. URL: `https://books.google.es/books?id=b0bvAAAAMAAJ`.

[7] J.P. May. *Finite spaces and larger contexts*. University of Chicago, 2016. URL: `https://math.uchicago.edu/~may/FINITE/FINITEBOOK/FINITEBOOKCollatedDraft.pdf`.

[8] M.C. McCord. «Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces». En: *Duke Math Journal* 33.3 (1966), págs. 465-474. DOI: `10.1215/S0012-7094-66-03352-7`.

[9] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[10] J.R. Munkres. *Topología*. 2ª Edición. Pearson Educación, 2007.

[11] H. Sharp Jr. «Cardinality of Finite Topologies». En: *Journal of Combinatorial Theory* Vol. 5, issue 1 (1968), págs. 82-86. DOI: `https://doi.org/10.1016/S0021-9800(68)80031-6`.

[12] E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Company, 1966.

[13] R.P. Stanley. «On the Number of Open Sets of Finite Topologies». En: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* Vol. 10, issue 1 (1971), págs. 74-79. DOI: `https://doi.org/10.1016/0097-3165(71)90065-3`.

[14] D. Stephen. «Topology on Finite Sets». En: *The American Mathematical Monthly* Vol. 75, issue 7 (1968), págs. 739-741. DOI: `https://doi.org/10.2307/2315186`. URL: `https://www.jstor.org/stable/2315186`.

[15] R.E. Stong. «Finite topological spaces». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 123.2 (1966), págs. 325-340. DOI: `https://doi.org/10.2307/1994660`. URL: `https://www.jstor.org/stable/1994660`.

[16] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.