Universidad de Cantabria

Facultad
de
Ciencias

El problema de contorno lineal regular: existencia, unicidad y cálculo de soluciones

(The regular linear boundary value problem: existence, uniqueness and computation of solutions)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Nerea Cenizo de Luis

Directora: Delfina Gómez Gandarillas

Junio-2023

Resumen

El problema de contorno o condiciones en la frontera aparece con frecuencia en diversas ramas como por ejemplo la Física o la Ingeniería. El objetivo del trabajo es estudiar diversos aspectos matemáticos en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En primer lugar, se estudiará la existencia y unicidad de solución. Posteriormente, se determinarán las soluciones a través de la denominada Función de Green. Finalmente se abordará su resolución numérica.

Palabras clave: Problema de contorno, Teorema de la Alternativa, Problema Regular de Sturm-Liouville, Función de Green, método del disparo

Abstract

Boundary value problems frequently arise in different branch of knowledge such as Physics or Engineering. The aim of this work is to study different mathematical aspects in the context of ordinary differential equations. Firstly, the existence and uniqueness of solutions will be examined. Next, the solutions will be determined using the Green's function. Finally, their numerical resolution will be addressed.

Keywords: Boundary value problem, Alternative Theorem, Regular Sturm-Liouville Problem, Green's Function, Shooting method

Índice general

Introducción

En múltiples ocasiones a lo largo de la historia se ha precisado de la descripción matemática de determinados fenómenos físicos. Por ejemplo, en la construcción, muchas estructuras requieren de vigas y estas se deforman debido a su propio peso o por otras fuerzas que actúan sobre la misma. La deformación es diferente dependiendo de cómo esté sujeta la viga y la fuerza a la que es sometida; es por ello por lo que la flexión de una viga es uno de los problemas físicos que se ha estudiado desde un punto de vista matemático. Para su modelado se suele utilizar una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden cuatro sujeta a ciertas condiciones sobre la función y sus derivadas en dos puntos distintos, los extremos; es decir, tenemos un problema de contorno. Dependiendo de cómo esté sujeta la viga, las condiciones de contorno que lo describen son diferentes. Si tenemos, por ejemplo, una viga de longitud L empotrada en uno de los extremos las condiciones que lo describen son $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$; sin embargo, si solamente está apoyada, sin nada que la sujete, tenemos que $y(0) = 0$ e $y''(0) = 0$. Si el otro extremo de la viga está libre, como pudiera ser en un trampolín o en el ala de un avión, tendríamos que $y''(L) = 0$ e $y'''(L) = 0$ (ver, por ejemplo, [14] para más detalles).

Como vemos, las condiciones de contorno juegan un papel muy importante a la hora de describir las deformaciones que se producen en una viga. Existen otros modelos diferenciales donde aparecen los problemas de contorno como por ejemplo el flujo del calor en un alambre o las oscilaciones de una cuerda. El objetivo de este trabajo es estudiar los problemas de contorno desde un punto de vista matemático. En primer lugar, abordaremos la existencia y unicidad de solución para un problema de contorno lineal regular; posteriormente determinaremos sus soluciones a través de la Función de Green y concluiremos calculando sus soluciones de forma numérica.

La memoria está dividida en tres capítulos. En el primero definimos conceptos básicos que nos acompañarán durante todo el trabajo; el problema de contorno lineal regular y la k-compatibilidad. Además, en este capítulo veremos el Teorema de la Alternativa de Fredholm que nos ofrece una condición necesaria y suficiente para que el problema de contorno tenga una única solución. Dicho resultado estará presente durante toda la memoria.

El segundo capítulo es el principal. Allí, construiremos la función de Green asociada a un problema de contorno con el fin de determinar sus soluciones en el caso de que existan. Nuestro objetivo es resolver todos los problemas de contorno que comparten el mismo operador de diferenciación lineal y las mismas condiciones de contorno con la siguiente expresión

$$y(t) = \int_0^L G(t,s)f(s)\mathrm{d}s,$$

donde G es la denominada función de Green, f la función dato asociada al problema de contorno concreto del cual queremos calcular su solución y $0, L$ son los extremos del intervalo donde están definidas las condiciones de contorno. Distinguiremos dos casos: cuando se satisface la condición del Teorema de la Alternativa de Fredholm y cuando no lo hace. En el primero tenemos garantizada la existencia y unicidad de solución mientras que en el segundo daremos una condición necesaria y suficiente relativa a la función dato f para que exista solución y, en ese caso, habrá infinitas.

Por último, en el capítulo tres, presentamos el método del disparo lineal. Este método busca describir las soluciones de un problema de contorno a través de diversos problemas de Cauchy. Así, aproximando numéricamente las soluciones de los problemas de Cauchy, obtenemos una aproximación de las soluciones del problema de contorno.

Capítulo 1

El problema de contorno lineal

Este primer capítulo tendrá como hilo conductor el problema de contorno lineal asociado a una ecuación diferencial ordinaria de orden n con $n \geq 2$. Empezaremos definiendo qué es y un concepto que será, sin duda, clave en las dos secciones: la k-compatibilidad. En el caso de un problema de contorno homogéneo nos dará la dimensión del subespacio de soluciones además de ayudarnos a introducir, en la Sección 1.2, el primer resultado importante: el Teorema de la Alternativa de Fredholm. El resultado dado por el matemático sueco Erik Ivar Fredholm, nos ayudará a obtener la condición necesaria y suficiente para que un problema de contorno lineal tenga solución y sea única mirando el problema homogéneo asociado. Demostraremos esta parte en un marco general donde la ecuación diferencial lineal ordinaria será regular de orden n y consideraremos n condiciones lineales de contorno. Durante el capítulo las referencias principales que se seguirán son las siguientes [6], [9] y [11].

1.1. Primeras definiciones

En esta primera sección empezaremos con las dos definiciones clave del capítulo: el problema de contorno asociado a una ecuación diferencial ordinaria lineal de orden $n \geq 2$ y la k-compatibilidad. Terminaremos dando tres ejemplos que clarifiquen dichos conceptos. Las referencias en las que nos apoyaremos en este apartado serán [11] y en menor medida [6].

Definición 1.1.1. *Llamaremos* ***problema lineal regular de contorno*** *al problema que consiste en la búsqueda de funciones $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $a < b$, que verifiquen*

$$\begin{cases} L[y] = \mathsf{b}, & t \in [a,b], \\ U_i(y) = \gamma_i, & i = 1, ..., m, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $L[y] = \mathsf{b}$ es una ecuación diferencial lineal de orden n, $n \geq 2$, definida en un intervalo $[a,b]$ como

$$L[y] = a_n(t)y^{n)} + a_{n-1}(t)y^{n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = \mathsf{b}(t) \tag{1.2}$$

con $a_0, a_1, ..., a_n, \boldsymbol{b} : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas y* $a_n(t) \neq 0$ *para todo* $t \in [a, b]$*. Además, llamaremos* ***condiciones de contorno*** *a* $U_i(y) = \gamma_i$ *que son* m *ecuaciones lineales que relacionan el valor de la función y sus derivadas hasta un orden inferior al de la ecuación diferencial en los extremos del intervalo* $[a, b]$ *definidas como*

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^i y^{j)}(a) + \beta_j^i y^{j)}(b), \quad i = 1, ..., m, \tag{1.3}$$

donde $\alpha_j^i, \beta_j^i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ *fijados.*

En términos generales, el número de condiciones de contorno es inferior o igual a dos veces el orden de la ecuación ($m \leq 2n$) ya que podemos dar una condición por cada valor de cada uno de los dos extremos en la función y sus $n-1$ primeras derivadas. Sin embargo, como nuestro objetivo es tener un problema bien planteado con solución única, impondremos que el número de condiciones de contorno coincida con el orden de la EDO ($m = n$) y que $rg(A) = m$ donde A es la matriz de los coeficientes de las condiciones de contorno definida como

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0^1 & \cdots & \alpha_{n-1}^1 & \beta_0^1 & \cdots & \beta_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^m & \cdots & \alpha_{n-1}^m & \beta_0^m & \cdots & \beta_{n-1}^m \end{pmatrix}.$$

A diferencia del problema de Cauchy o de condiciones iniciales, impondremos que al menos uno de los α_j^i y otro β_j^i tiene que ser distinto de cero; es decir, necesitamos un mínimo de información de cada extremo. Cuando las condiciones de contorno estén dadas sin que aparezcan los dos extremos simultáneamente en la misma ecuación, las llamaremos **condiciones separadas**.

Definición 1.1.2. *Llamaremos* ***problema de contorno homogéneo*** *al caso particular de problema de contorno donde tanto la ecuación diferencial como las condiciones de contorno son homogéneas; es decir:*

$$\begin{cases} L[y] = 0, & t \in [a, b], \\ U_i(y) = 0, & i = 1, ..., n. \end{cases} \tag{1.4}$$

A continuación, analizamos algunas propiedades de (1.4). Sabemos que las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de orden n forman un subespacio vectorial de dimensión n (véase [1]). Al imponer condiciones de contorno lineales a la solución general de la ecuación, tenemos un nuevo subespacio vectorial de dimensión k con k menor o igual a n. Señalemos que como lo que estamos resolviendo es un problema de contorno homogéneo, este siempre tiene solución ya que la función constantemente cero (solución trivial) verifica el problema. Esto no ocurre con un problema de contorno no homogéneo ya que este puede no tener solución. Con esta idea en mente, introducimos la siguiente definición.

Definición 1.1.3. *Sea (1.4) el problema de contorno homogéneo asociado al problema de contorno (1.1). Decimos que el problema de contorno homogéneo es* ***k-compatible*** *si*

el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión k. Es decir, toda solución del problema se expresa como $y(t) = c_1y_1(t) + ... + c_ky_k(t)$ donde $y_1, .., y_k$ son soluciones linealmente independientes del problema.
Además, un problema de contorno es k-compatible si posee solución y el problema homogéneo asociado es k-compatible. En ambos casos, denotamos a k como el ***índice de compatibilidad****.*

Notemos que el k que mencionábamos antes que viene de resolver el problema homogéneo, se llama índice de compatibilidad y además es igual al del problema de contorno asociado. Vemos cómo en la definición de k-compatibilidad para un problema de contorno no homogéneo hacemos un pequeño matiz ya que solo tiene sentido cuando este tiene solución; por ello siempre se puede hablar de la k-compatibilidad en un problema homogéneo, pero no en un problema de contorno en general.

Observación 1.1.4. Siguiendo con la notación precedente, cuando el índice de compatibilidad es igual a cero tenemos un problema 0-compatible. En este caso, esto implica que la solución del problema homogéneo tiene que ser única; es decir, será la solución trivial. Por otro lado, cuando un problema homogéneo es k-compatible con $k > 0$, tendrá infinitas soluciones tanto él, como el problema de contorno (por la superposición de soluciones) en el caso de que exista solución.

Esta observación es importante ya que va sentando las bases del Teorema de la Alternativa que demostraremos al final de la la Sección 1.2. Introducimos a continuación unos ejemplos donde pongamos en práctica estas definiciones.

Ejemplo 1.1.5. Sea el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 1, & t \in [0, \pi], \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 0, \\ y(\pi) - y''(\pi) - y''(0) = -1, \end{cases} \tag{1.5}$$

donde la matriz de los coeficientes de las condiciones de contorno queda dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango de esta matriz es 3 y se verifica que $rg(A) = 3 = m = n$. Su problema homogéneo asociado es

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0, & t \in [0, \pi], \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y(\pi) - y''(\pi) - y''(0) = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

La solución general de la ecuación diferencial homogénea $y''' - y'' + y' - y = 0$ es la siguiente

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3 \mathrm{e}^t, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Ahora procedemos a imponer las condiciones de contorno homogéneas para resolver el problema (1.6)

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_3 = 0 \\ y'(0) &= c_2 + c_3 = 0 \\ y(\pi) - y''(\pi) - y''(0) &= -c_1 - c_3 = 0. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones obtenemos que el problema (1.6) tiene infinitas soluciones de la forma $y(t) = c_1 \cos(t) + c_1 \sin(t) - c_1 \mathrm{e}^t$ con $c_1 \in \mathbb{R}$ y tenemos un subespacio vectorial de dimensión 1; por ello, decimos que el problema homogéneo, y por tanto el problema de contorno no homogéneo en el caso de tener solución, es 1-compatible.
Ahora resolvemos el problema no homogéneo (1.5). Para resolver la ecuación $y''' - y'' + y' - y = 1$ añadimos a la solución general de la ecuación homogénea una solución particular de la ecuación no homogénea (véase [1]) y tenemos que la solución es

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3 \mathrm{e}^t - 1, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Aplicando las condiciones de contorno no homogéneas, vemos que el problema de contorno tiene infinitas soluciones y son de la forma $y(t) = c_1 \cos(t) + c_1 \sin(t) - c_1 \mathrm{e}^t - 1$ con $c_1 \in \mathbb{R}$. En consecuencia, el índice de compatibilidad del problema de contorno y el del homogéneo asociado es el mismo, en este caso es uno.

A diferencia de lo que ocurre en los problemas de Cauchy donde bajo hipótesis de continuidad de las funciones $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ y b tenemos asegurada la existencia y unicidad de solución, en los problemas de contorno las condiciones juegan un papel fundamental a la hora de ver el número de soluciones y la existencia de ellas. Lo veremos en el siguiente ejemplo donde mantenemos la misma ecuación diferencial y cambiamos las condiciones de contorno.

Ejemplo 1.1.6. Sea el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 1, \quad t \in [0, \pi], \\ y(0) = -1, \\ y(\pi) = -1, \\ y(\pi) - y''(\pi) = -3, \end{cases} \tag{1.9}$$

donde ahora la matriz de los coeficientes de las condiciones de contorno queda definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las condiciones que tenemos son separadas y, como en el Ejemplo 1.1.5, cumple que $rg(A) = 3 = m = n$. La ecuación diferencial es la misma, entonces la solución será (1.8). Ahora procedemos a imponer las condiciones de contorno

$$y(0) = c_1 + c_3 - 1 = -1$$

$$y(\pi) = -c_1 + c_3 e^{\pi} - 1 = -1$$
$$y(\pi) - y''(\pi) = -2c_1 - 1 = -3$$

y vemos que no se pueden cumplir simultáneamente estas tres condiciones; por tanto, no existe solución. En este ejemplo no podemos hablar de la k-compatibilidad de (1.9). Sin embargo, sí podemos hacerlo del problema homogéneo asociado

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0, \quad t \in [0,\pi], \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0, \\ y(\pi) - y''(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

En este caso, la solución de la ecuación es de nuevo (1.7) y las condiciones de contorno son

$$y(0) = c_1 + c_3 = 0$$
$$y(\pi) = -c_1 + c_3 e^{\pi} = 0$$
$$y(\pi) - y''(\pi) = -2c_1 = 0$$

donde obtenemos que $c_1 = c_3 = 0$ y, en consecuencia, la solución del problema viene dada por $y(t) = c_2 \sin(t)$ con $c_2 \in \mathbb{R}$. Por tanto, tenemos que el problema homogéneo es 1-compatible.

En el Ejemplo 1.1.5 hemos visto cómo el problema de contorno (1.5) tenía infinitas soluciones y en el Ejemplo 1.1.6 que el problema (1.9) no tenía solución. Veamos ahora un ejemplo donde el problema de contorno tiene solución única.

Ejemplo 1.1.7. Sea el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 1, \quad t \in [0,\pi], \\ y(0) = -1, \\ y''(0) = 0, \\ y'(\pi) + y''(\pi) = -1, \end{cases} \tag{1.11}$$

donde la matriz de los coeficientes de las condiciones de contorno queda dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y se verifica $rg(A) = 3 = m = n$. Su problema homogéneo asociado es

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0, \quad t \in [0,\pi], \\ y(0) = 0, \\ y''(0) = 0, \\ y'(\pi) + y''(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Aplicamos las condiciones de contorno a la solución de la ecuación diferencial homogénea:

$$y(0) = c_1 + c_3 = 0$$

$$y''(0) = -c_1 + c_3 = 0$$

$$y'(\pi) + y''(\pi) = c_1 - c_2 + 2c_3\mathrm{e}^{\pi} = 0.$$

Obtenemos que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, y por tanto la única solución del problema será la solución trivial $y \equiv 0$. Como la dimensión del subespacio que genera la solución trivial es cero, podemos decir que el problema homogéneo y el no homogéneo en caso de existir solución, son 0-compatibles. Análogamente, podemos ver que la solución del problema no homogéneo es única y está dada por $y(t) = -1 + \sin(t)$.

Estos ejemplos que acabamos de ver, a parte de ayudarnos a comprender los conceptos, nos enseñan la importancia de las condiciones de contorno. Hemos visto cómo con la misma ecuación y cambiando ligeramente las condiciones de contorno pasamos de tener infinitas soluciones a no tener ninguna o incluso a tener una única. Al final de la Sección 1.2 analizaremos de nuevo estos ejemplos y veremos una manera de determinar la existencia y unicidad de la solución de nuestro problema de contorno; simplemente, analizando la k-compatibilidad de su problema de contorno homogéneo asociado.

1.2. Teorema de la Alternativa

En esta sección daremos una condición de existencia y unicidad de solución de un problema de contorno. Para ello necesitaremos enunciar un par de resultados donde la k-compatibilidad jugará un papel importante. En el primero de estos resultados estudiaremos las soluciones de un problema de contorno homogéneo. Tras esto, veremos el resultado equivalente a uno no homogéneo y culminaremos con el Teorema de la Alternativa, encontrando así la condición que buscábamos. Este resultado se convertirá en la antesala de encontrar una solución explícita de un problema de contorno en el Capítulo 2. Las referencias principales serán [9] y [11].

Proposición 1.2.1. *Sea $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $L[y] = 0$ donde el operador de diferenciación L verifica las hipótesis de la Definición 1.1.1. Entonces el problema (1.4) es k-compatible si y sólo si $rg(U) = n - k$ donde U denota la siguiente matriz*

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sea y solución de la ecuación $L[y] = 0$. Por ser $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un sistema fundamental de soluciones, existen constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $y(t) = c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t)$ (véase [1]). Imponemos las condiciones de contorno homogéneas en la solución y, que por ser lineales, quedan de la siguiente manera

$$U_i(y) = c_1 U_i(y_1) + c_2 U_i(y_2) + \cdots + c_n U_i(y_n) = 0, \; i = 1, ..., n$$

obteniendo el sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la dimensión del subespacio de soluciones de este sistema homogéneo es $n - rg(U)$ (véase [5]). Pero esta dimensión del subespacio de n-uplas solución coincide con la dimensión k, del subespacio de las soluciones del problema de contorno homogéneo de contorno, lo cual prueba el resultado. □

El resultado que acabamos de demostrar relaciona las condiciones de un problema homogéneo con su k-*compatibilidad*. En el siguiente resultado, en la misma línea, veremos lo que ocurre con un problema de contorno no homogéneo.

Proposición 1.2.2. *Consideremos el problema de contorno (1.1) y sea $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación $L[y] = 0$ e $y_p(t)$ una solución particular de la ecuación $L[y] = \mathsf{b}$. Entonces el problema de contorno es $k-compatible$ si y solo si $rg(U) = rg(U^*) = n - k$ donde U^* denota la siguiente matriz*

$$U^* = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) & \gamma_1 - U_1(y_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) & \gamma_n - U_n(y_p) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Procederemos análogamente a la anterior demostración. Sabemos que la solución general de la ecuación $L[y] = \mathsf{b}$ es $y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + \ldots + c_n y_n(t)$. Tras imponer las condiciones de contorno, obtenemos el siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - U_1(y_p) \\ \vdots \\ \gamma_n - U_n(y_p) \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Sabemos que dicho sistema es compatible si y solo si el rango de la matriz U es igual al rango de la matriz ampliada U^*. En consecuencia, el problema (1.1) admite solución si y solo si $rg(U) = rg(U^*)$ y podemos ayudarnos de la Proposición 1.2.1 para deducir que el índice de compatibilidad es k si y sólo si el $rg(U)$ es $n - k$ y concluir con la demostración. □

Con estas dos proposiciones que acabamos de demostrar, estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado. Este nos dará la condición de existencia y unicidad de solución de un problema de contorno mirando las soluciones del problema de contorno homogéneo asociado.

Teorema 1.2.3. ***(Teorema de la Alternativa)****. El problema lineal regular de contorno (1.1) posee solución única si y solo si su problema homogéneo asociado (1.4) tiene como única solución la trivial.*

Demostración. Esta demostración es casi directa tras haber visto las dos proposiciones anteriores. Denotemos por $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$, y por $y_p(t)$ una solución particular de $L[y] = \mathsf{b}$. Sabemos que el problema homogéneo (1.4) admite únicamente la solución trivial si y solo si el rango de la matriz U es n (Proposición 1.2.1). Pero esto es lo mismo que afirmar que el rango de las matrices U y U^* es n, ya que U^* es de tamaño $n \times (n+1)$, lo que significa (ver demostración de la Proposición 1.2.2) que el problema de contorno posee exactamente una solución por ser el sistema 1.13) compatible determinado. $\square$

Observación 1.2.4. Como su nombre indica, este teorema también se puede reescribir de forma que plantee una alternativa. Es análogo a decir que o el problema de contorno posee solución única o el homogéneo asociado posee solución no trivial, donde cada alternativa no puede cumplirse simultáneamente.

Rescataremos los ejemplos de la Sección 1.1 para ver que se cumple el Teorema 1.2.3. Como vimos, los tres ejemplos de problemas de contorno tienen la misma ecuación pero con distintas condiciones de contorno y esto hace que el número de soluciones sea completamente distinto.

En el Ejemplo 1.1.5 podemos observar que ni el problema de contorno (1.5) tiene solución única ni el homogéneo asociado (1.6) tiene como única solución la trivial ya que los problemas son 1-compatibles. En el Ejemplo 1.1.7 vemos cómo el problema homogéneo asociado (1.12) tiene únicamente la solución trivial; y como dice el Teorema de la Alternativa, el problema de contorno (1.11) tiene solución única. En el caso del Ejemplo 1.1.6 el problema de contorno (1.9) no tiene solución y vemos que el problema homogéneo asociado (1.10) tiene infinitas soluciones.

Como hemos visto, un problema de contorno no homogéneo puede no tener solución. Hasta ahora, solo tenemos asegurada la existencia de solución en el caso donde los problemas sean 0-compatibles; y ahí, además de la existencia tenemos asegurada la unicidad.

Capítulo 2

La función de Green

En este segundo capítulo construiremos la función de Green asociada a un problema de contorno con el fin de encontrar sus soluciones en el caso de que existan. Por simplicidad, consideraremos el caso de una ecuación diferencial de orden dos con condiciones separadas (para orden superior ver [11]). Antes de nada, definiremos algunos conceptos y resultados importantes como por ejemplo el operador adjunto y la Identidad de Green y reescribiremos, sin pérdida de generalidad, la ecuación de forma autoadjunta para su estudio.

Hasta ahora hemos visto cómo no podemos garantizar la existencia de solución de un problema de contorno, es por ello que en la Sección 2.2 impondremos la condición de la Alternativa de Fredholm donde el problema homogéneo asociado al problema de contorno que estudiemos tenga únicamente la solución trivial. De esta forma, además de asegurar la existencia de solución, tenemos también la unicidad. Con esto, construiremos la función de Green que nos dará la solución explícita $y(t)$ del problema de contorno en la forma integral

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds}, \tag{2.1}$$

con $G(t,s)$ la función de Green y $f(s)$ el término independiente de la ecuación $L[y] = f$. Como podemos observar la solución del problema de contorno solo depende de su función de Green y de la función dato.

En la Sección 2.3 culminaremos el estudio de existencia y unicidad de solución de un problema de contorno de orden dos, dando una condición necesaria y suficiente para que exista solución cuando no se cumple la hipótesis del Teorema de la Alternativa. En caso de verificar esa condición, el problema de contorno tendrá infinitas soluciones siendo 1-compatible y la solución dependerá de un parámetro. Asimismo, veremos que una solución puede ser determinada por la Función de Green generalizada donde la particular la podremos obtener directamente con (2.1). Sin embargo, la forma explícita de la función de Green generalizada no será tan fácil de obtener. Las referencias generales de las que haremos uso en este capítulo serán [9], [10], [12] y [13].

2.1. Preliminares

La finalidad de esta sección será la de sentar conceptos básicos que serán útiles a lo largo del capítulo. En la primera parte, la Subsección 2.1.1, introduciremos el operador adjunto y algunas de sus propiedades esenciales. En la Subsección 2.1.2 definiremos el problema regular de Sturm-Liouville: un problema de contorno lineal regular con una ecuación autoadjunta de orden dos y unas condiciones lineales de contorno separadas. La referencia principal que seguiremos a la hora de escribir las definiciones será [12].

2.1.1. Operador autoadjunto

La meta de esta subsección es introducir la definición de operador diferencial lineal autoadjunto. Para ello, empezaremos primero dando la definición de operador adjunto. Pensemos en la siguiente expresión

$$L[y] = a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y \tag{2.2}$$

como el operador de diferenciación lineal de orden dos donde impondremos a los coeficientes condiciones de regularidad más restrictivas que en (1.2). Además, supondremos que es regular, es decir, que $a_2(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$; sin pérdida de generalidad tomaremos $a_2(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$. El objetivo es definir el operador adjunto, que denotaremos como $L^*[y]$, del operador L tal que se verifique

$$\int_a^b zL[y]\mathrm{dt} = \int_a^b L^*[z]y\mathrm{dt}$$

con z, y funciones en ciertos espacios. Con esto en mente, la idea para que se cumpla la igualdad es la de integrar por partes tantas veces como sea necesario hasta que la y quede como una función que multiplique a toda la expresión. Por tanto, impondremos que $a_2 \in \mathcal{C}^2[a,b]$, $a_1 \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $a_0 \in \mathcal{C}^0[a,b]$ en (2.2) y nos queda lo siguiente

$$\int_a^b zL[y]\mathrm{dt} = \int_a^b (za_2(t)y'' + za_1(t)y' + za_0(t)y)\mathrm{dt}.$$

Aunque todas las funciones dependan de $t \in [a,b]$, para simplificar, en algunas partes lo obviaremos. Ahora integramos la anterior expresión por partes, los dos primeros términos de la integral una vez y después el primero otra vez

$$\begin{aligned}\int_a^b zL[y]\mathrm{dt} &= [za_2y' + za_1y]\Big|_a^b - \int_a^b ((za_2)'y' + ((za_1)'y - za_0y)\mathrm{dt} \\ &= [za_2y' + za_1 - (za_2)'y]\Big|_a^b + \int_a^b ((za_2)''y - (za_1)'y + za_0y)\mathrm{dt}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Vemos que las funciones z, y deberán pertenecer a $\mathcal{C}^2[a,b]$ para que la expresión esté bien definida pero además para que el primer término se anule y nos quede la igualdad de las integrales, tienen que pertenecer a un subespacio que especificaremos más adelante en la Proposición 2.1.11. Ahora podemos introducir la definición del operador adjunto que buscábamos.

Definición 2.1.1. *Sea $L[y]$ el operador de diferenciación lineal de orden dos (2.2), diremos que el operador*

$$L^*[y] = (a_2(t)y)'' - (a_1(t)y)' + a_0(t)y \tag{2.4}$$

es su ***operador adjunto****.*

A estas alturas podemos introducir la *Identidad de Green* dada por la siguiente expresión

$$\int_a^b (zL[y] - yL^*[z])\mathrm{dt} = (za_2y' + za_1y - (za_2)'y)\Big|_a^b, \tag{2.5}$$

que se tiene al despejar de la construcción anterior las integrales (ver (2.3) y (2.4)).

Por otro lado, si usamos la definición de operador adjunto, obtenemos lo siguiente

$$zL[y] - yL^*[z] = z(a_2y'' + a_1y' + a_0y) - y((a_2y)'' - (a_1y)' + a_0y),$$

donde si reordenamos los términos de la igualdad tenemos la *Identidad de Lagrange*

$$zL[y] - yL^*[z] = \frac{d}{dt}\left(za_2y' + za_1y - (za_2)'y\right). \tag{2.6}$$

Veamos una propiedad natural del operador autoadjunto.

Proposición 2.1.2. *El operador adjunto del adjunto del operador de diferenciación lineal de orden dos (2.2) es el operador en cuestión; es decir, $L = (L^*)^*$.*

Demostración. Vamos a calcular quién es el adjunto $L^*[y]$ de nuestro operador lineal $L[y]$. Lo haremos usando directamente la Definición 2.1.1 de operador adjunto. Derivando por la regla de la cadena y reordenando los términos:

$$L^*[y] = a_2y'' + (2a_2' - a_1)y' + (a_2'' - a_1' + a_0)y. \tag{2.7}$$

El adjunto de este será

$$\begin{aligned}(L^*)^*[y] &= (a_2y)'' - ((2a_2' - a_1)y)' + (a_2'' - a_1' + a_0)y \\ &= a_2y'' + a_2''y + 2a_2'y' - (2a_2'' - a_1')y - (2a_2' - a_1)y' + (a_2'' - a_1' + a_0)y \\ &= a_2y'' + (2a_2' - 2a_2' + a_1)y' + (a_2'' - 2a_2'' + a_2'' + a_1' - a_1' + a_0)y\end{aligned}$$

que si operamos nos queda $L = (L^*)^*$. □

Acabamos de ver la relación entre un operador y el adjunto de su adjunto, concretamente que son iguales. Pero en general un operador y su adjunto no son iguales ya que por ejemplo el operador $L[y] = y'' + y' + y$ no es igual a $L^*[y] = y'' - y' + y$. Es por esto que introducimos la siguiente definición que es la principal de esta subsección.

Definición 2.1.3. *Sea $L[y]$ el operador de diferenciación lineal de orden dos (2.2). Cuando el operador L coincide con su adjunto L^*, diremos que es un* ***operador autoadjunto****.*

Ahora bien, ¿cuándo un operador es autoadjunto? Con el fin de responder a esta pregunta daremos una condición necesaria y suficiente para que nuestro operador sea autoadjunto. Este resultado será muy útil y usado a lo largo del capítulo.

Lema 2.1.4. *El operador (2.2) es autoadjunto si y solo si $a_2'(t) = a_1(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Además, en el caso que el operador sea autoadjunto, podremos escribirlo de la forma*

$$L[y] = (a_2(t)y')' + a_0(t)y.$$

Demostración. Usando la definición de operador adjunto operada que calculamos en (2.7) y comparando con la definición de operador (2.2) tenemos que para que $L[y] = L^*[y]$ tiene que ocurrir simultáneamente

$$\begin{cases} 2a_2' - a_1 = a_1 \\ a_2'' - a_1' + a_0 = a_0, \end{cases}$$

es decir, esto es lo mismo que se cumpla que $a_2'(t) = a_1(t)$ para todo $t \in [a, b]$ y con esta condición tenemos que

$$(a_2(t)y')' = a_2(t)y'' + a_2'(t)y' = a_2(t)y'' + a_1(t)y'$$

y podemos reescribir el operador como nos dice el enunciado. $\square$

A continuación, daremos el concepto de ecuación lineal autoadjunta y veremos un resultado que nos permitirá restringirnos al estudio de ecuaciones diferenciales autoadjuntas sin pérdida de generalidad.

Definición 2.1.5. *Diremos que una ecuación lineal regular de orden dos $L[y] = \mathsf{b(t)}$ es una* ***ecuación autoadjunta*** *cuando el operador $L[y]$ sea autoadjunto.*

Proposición 2.1.6. *Toda ecuación diferencial lineal regular de orden dos puede ser transformada en una autoadjunta.*

Demostración. Sea la ecuación $a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = \mathsf{b(t)}$ con $a_2(t) \neq 0$ para todo t. Multiplicamos dicha ecuación por el cociente $p(t)/a_2(t)$ donde

$$p(t) = exp\left(\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt\right),$$

obteniendo

$$p(t)y'' + \frac{a_1(t)}{a_2(t)}p(t)y' + \frac{a_0(t)}{a_2(t)}p(t)y = \frac{p(t)\mathsf{b(t)}}{a_2(t)}.$$

Como

$$p'(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)}p(t)$$

y además

$$(p(t)y')' = p'(t)y' + p(t)y'' = \frac{a_1(t)}{a_2(t)}p(t)y' + p(t)y'',$$

renombrando $q(t) = p(t)a_0(t)/a_2(t)$ y $f(t) = p(t)\mathsf{b(t)}/a_2(t)$ tenemos la ecuación autoadjunta

$$(p(t)y')' + q(t)y = f(t).$$

□

Pongamos un ejemplo donde veamos en práctica lo que acabamos de demostrar. Notemos que este ejemplo lo iremos ampliando a lo largo del capítulo.

Ejemplo 2.1.7. Sea la ecuación $y'' - 2y' + y = 1$ definida en el intervalo $I = [0, 1]$, transformémosla en una ecuación autoadjunta.

Vemos que esta ecuación no es autoadjunta ya que por el Lema 2.1.4 la derivada de $a_2(t) = 1$ debería de ser $a_1(t) = -2$ y esto es absurdo. Por tanto, como nos indica la Proposición 2.1.6 multiplicamos la expresión por el cociente $p(t)/a_2(t)$ donde $p(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ para obtener

$$\mathrm{e}^{-2t}y'' - 2\mathrm{e}^{-2t}y' + \mathrm{e}^{-2t}y = \mathrm{e}^{-2t}.$$

Ahora vemos como $(\mathrm{e}^{-2t})' = -2\mathrm{e}^{-2t}$ con lo que ya tenemos la ecuación transformada a una con forma autoadjunta. Dicha ecuación se puede reescribir como

$$(\mathrm{e}^{-2t}y')' + \mathrm{e}^{-2t}y = \mathrm{e}^{-2t}.$$

Para concluir esta subsección demos un resultado donde veamos cómo queda la Identidad de Lagrange dada por (2.6) en el caso de tener una ecuación autoadjunta.

Proposición 2.1.8. *Sea un problema de contorno con ecuación autoadjunta $L[y] = (p(t)y')' + q(t)y = f(t)$. Sean z, y dos funciones $\mathcal{C}^2[a, b]$. Entonces, se cumple que*

$$zL[y] - yL^*[z] = \frac{d}{dt}\left(p(t)(zy' - z'y)\right). \tag{2.8}$$

Demostración. Como por hipótesis la ecuación es autoadjunta, utilizando (2.6) directamente tenemos que

$$\begin{aligned} zL[y] - yL^*[z] &= zL[y] - yL[z] \\ &= \frac{d}{dt}\left(zp(t)y' + zp'(t)y - (zp(t))'y\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(zp(t)y' + zp'(t)y - (z'p(t))y - (zp'(t))y\right) = \frac{d}{dt}\left(p(t)(zy' - z'y)\right). \end{aligned}$$

□

2.1.2. Problema regular de Sturm-Liouville

A partir de ahora, estudiaremos un problema de contorno de la forma

$$\begin{cases} L[y] = (p(t)y')' + q(t)y = f(t), \quad t \in [a,b], \\ U_1(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \\ U_2(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

donde la ecuación $L[y] = f$ es autoadjunta de orden dos (Proposición 2.1.6), $p \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $p(t) > 0$ en $[a,b]$, $q, f \in \mathcal{C}^0[a,b]$. Las condiciones lineales de contorno son separadas y homogéneas donde α_0 y α_1 no pueden ser las dos idénticamente nulas, y lo propio con β_0 y β_1; es decir, $|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0$ y $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$. Lo llamaremos *problema regular de Sturm-Liouville*.

Con estas condiciones, dependiendo de si hay algún a_i o b_i que se anulen, tienen nombres propios y suelen denominarse de la siguiente manera:

- Cuando $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ tenemos las condiciones de Dirichlet o extremos fijos:
$$\begin{cases} U_1(y) = \alpha_0 y(a) = 0, \\ U_2(y) = \beta_0 y(b) = 0, \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} y(a) = 0, \\ y(b) = 0. \end{cases}$$
- Cuando $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ tenemos las condiciones de Neumann o extremos libres:
$$\begin{cases} U_1(y) = \alpha_1 y'(a) = 0, \\ U_2(y) = \beta_1 y'(b) = 0, \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} y'(a) = 0, \\ y'(b) = 0. \end{cases}$$
- Cuando $\alpha_0 = \beta_1 = 0$ o $\alpha_1 = \beta_0 = 0$ tenemos condiciones mixtas:
$$\begin{cases} U_1(y) = \alpha_1 y'(a) = 0, \\ U_2(y) = \beta_0 y(b) = 0, \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} U_1(y) = \alpha_0 y(a) = 0, \\ U_2(y) = \beta_1 y'(b) = 0. \end{cases}$$
Es decir,
$$\begin{cases} y'(a) = 0, \\ y(b) = 0, \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y(a) = 0, \\ y'(b) = 0. \end{cases}$$

Primero veamos que no hay pérdida de generalidad si nos restringimos a estudiar a partir de ahora un problema regular de Sturm-Liouville en vez de uno cualquiera con una ecuación de orden dos y condiciones separadas. Así, a partir de ahora, el problema de contorno sobre el que realizaremos el estudio de soluciones será un problema regular de Sturm-Liouville y podremos hacer uso de sus propiedades.

Proposición 2.1.9. *Sea un problema lineal regular de contorno con condiciones separadas de la forma*

$$\begin{cases} L[y] = a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t), \quad t \in [a,b], \\ U_1(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \\ U_2(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

con $a_2(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$, $a_2 \in \mathcal{C}^2[a,b]$, $a_1 \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $a_0 \in \mathcal{C}^0[a,b]$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0$ y $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Podemos transformarlo en un problema regular de Sturm-Liouville de la forma (2.9).

Demostración. Lo primero que haremos será homogenizar las condiciones lineales de contorno. Tras esto, usando la Proposición 2.1.6, transformamos la ecuación a una de forma autoadjunta y ya tendríamos el problema de la forma que buscamos.

Para ello, como tanto la ecuación como las condiciones de contorno son lineales, tomando el cambio $z(t) = y(t) - h(t)$ con $h(t)$ una función que verifique las condiciones de contorno y que pertenezca a $\mathcal{C}^2[a,b]$ tenemos que

$$L[z] = L[y-h] = L[y] - L[h] = \mathsf{b} - L[h]$$

donde en la última igualdad hemos usado que $L[y] = \mathsf{b}$. Para las condiciones de contorno, como sabemos que $U_i(h) = \gamma_i = U_i(y)$ con $i = 1,2$ tenemos que

$$U_i(z) = U_i(y-h) = U_i(y) - U_i(h) = \gamma_i - \gamma_i = 0.$$

De esta manera, obtenemos el problema con condiciones homogéneas

$$\begin{cases} L[z] = \tilde{\mathsf{b}}, & \text{donde } \tilde{\mathsf{b}} = \mathsf{b} - L[h], \\ U_i(z) = 0, & i = 1,2, \end{cases}$$

donde ahora, aplicando la Proposición 2.1.6, podemos transformar la ecuación diferencial en una autoadjunta y habríamos terminado.

Nos queda por probar que al menos existe una función h que cumpla lo que queremos. Construyamos una. Distingamos por casos dependiendo de qué coeficientes α_i,β_i de las condiciones de contorno se anulen:

- En el caso de tener condiciones de Dirichlet de la forma $y(a) = \gamma_1$ e $y(b) = \gamma_2$, podemos dar h como el polinomio interpolador de Lagrange [2] que pase por esos dos puntos
$$h(t) = \frac{\gamma_1(t-b)}{(a-b)} + \frac{\gamma_2(t-a)}{(b-a)}$$
que trivialmente vemos que cumple las condiciones de contorno.
- En el caso de tener condiciones de Neumann de la forma $y'(a) = \gamma_1$ e $y'(b) = \gamma_2$, hacemos lo análogo buscando un polinomio que al derivar nos de el polinomio de interpolación de Lagrange en esos puntos. Un h de esta forma que nos vale es:
$$h(t) = \frac{\gamma_1(t^2 - 2bt)}{2(a-b)} + \frac{\gamma_2(t^2 - 2at)}{2(b-a)}.$$
- Para condiciones mixtas suponemos sin pérdida de generalidad que son de la forma $y'(a) = \gamma_1$ e $y(b) = \gamma_2$. Tomando una recta de esta manera
$$h(t) = \gamma_1(t-b) + \gamma_2,$$
vemos que se cumplen.

Hemos cubierto los casos cuando hay dos coeficientes α_i o β_i que se anulan. Ahora, para ver qué pasa en los casos donde uno solo se anula o ninguno, supondremos que existe un $h(t) = Ct + D$ y veremos qué pasa. Al sustituir en las condiciones de contorno y agrupar términos obtenemos

$$\begin{cases} C(\alpha_0 a + \alpha_1) + D\alpha_0 = \gamma_1, \\ C(\beta_0 b + \beta_1) + D\beta_0 = \gamma_2. \end{cases}$$

- Si $\alpha_0 = 0$ (el caso $\beta_0 = 0$ es análogo), como todos los demás coeficientes $\alpha_1, \beta_0, \beta_1$ son distintos de cero nos queda

$$C = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \ \text{ y } \ D = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1(\beta_0 b + \beta_1)}{\beta_0\alpha_1}.$$

- Si $\alpha_1 = 0$ (el caso $\beta_1 = 0$ es análogo) o no hay ningún coeficiente que se anule, llegamos a un sistema donde no tenemos asegurada la existencia o unicidad de solución. Si existiese solución, tomamos una. En caso contrario, podríamos encontrar una solución aumentando el grado del polinomio.

Con la existencia de la h ya demostrada, hemos terminado. □

Veamos un ejemplo donde realicemos la transformación de la Proposición 2.1.9 que acabamos de demostrar.

Ejemplo 2.1.10. Transforma en un problema regular de Sturm-Liouville (2.9) el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2, \quad t \in [0,1], \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Primero transformamos las condiciones de contorno que vemos que son del tipo Dirichlet o de extremos fijos. Tomamos un $h(t) = 1$ que es una función en $\mathcal{C}^2[a,b]$ que verifica las condiciones de contorno no homogéneas. Entonces hacemos el cambio $z(t) = y(t) - 1$ donde ahora la ecuación queda transformada en

$$z'' - 2z' + z = (y-1)'' - 2(y-1)' + (y-1) = y'' - 2y' + y - 1 = 2 - 1 = 1$$

y las condiciones de contorno están igualadas a cero:

$$\begin{cases} z'' - 2z' + z = 1, \quad t \in [0,1], \\ z(0) = 0, \\ z(1) = 0. \end{cases}$$

Aún no hemos terminado ya que la ecuación no está en su forma autoadjunta. Viendo el Ejemplo 2.1.7 vemos que esta forma la logramos multiplicando por $p(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ que es claramente una función positiva en $[0,1]$ y $q(t) = \mathrm{e}^{-2t} = f(t)$. Tras esto obtenemos

$$\begin{cases} (\mathrm{e}^{-2t} z')' + \mathrm{e}^{-2t} z = \mathrm{e}^{-2t}, \quad t \in [0,1], \\ z(0) = 0, \\ z(1) = 0, \end{cases}$$

donde el problema de contorno queda transformado en un problema regular de Sturm-Liouville.

Un resultado que nos será útil más adelante es ver que si las funciones tienen que cumplir las condiciones de contorno del problema (2.9), la Identidad de Green dada por (2.5) es igual a cero.

Proposición 2.1.11. *Sea un problema regular de Sturm-Liouville (2.9). Sean z, y dos funciones $\mathcal{C}^2[a,b]$ que cumplan las condiciones de contorno de dicho problema. Entonces, se cumple que*

$$\int_a^b (zL[y] - yL^*[z])\,dt = 0.$$

Demostración. Sabiendo que el operador del problema de contorno es autoadjunto, $L = L^*$, e integrando por partes en (2.8) se tiene

$$\int_a^b (L[y]z - L^*[z]y)\mathrm{dt} = p(t)[y'(t)z(t) - y(t)z'(t)]\Bigg|_a^b. \tag{2.10}$$

Ahora usaremos el hecho de que las funciones z, y cumplen las condiciones de contorno. Lo dividiremos en cuatro casos dependiendo de cómo son estas condiciones.

- Si las condiciones son del tipo Dirichlet, es decir, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, $z(a) = 0$ y $z(b) = 0$. Entonces es trivial que se cumple que la integral de (2.10) es igual a cero.
- Si $\alpha_1 = 0$ y $\beta_1 \neq 0$ ($\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 = 0$ será análogo). Esto implica, que $\alpha_0 \neq 0$ y tenemos que $y(a) = 0 = z(a)$. Evaluemos y veamos que nos queda la siguiente expresión

$$p(t)[y'(t)z(t) - y(t)z'(t)]\Bigg|_a^b = -p(b)[y'(b)z(b) - y(b)z'(b)].$$

  Ahora como de $U_2(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0$ podemos despejar $y'(b)$ ya que por hipótesis β_1 es no nulo, tenemos que $y'(b) = -\beta_0 y(b)/\beta_1$. De la misma manera vemos que $z'(b) = -\beta_0 z(b)/\beta_1$ y sustituyendo esto vemos que

$$-p(b)[y'(b)z(b) - y(b)z'(b)] = \frac{\beta_0 p(b)}{\beta_1}[y(b)z(b) - y(b)z(b)] = 0.$$

- Si $\alpha_1 \neq 0$ y $\beta_1 \neq 0$ razonando como en el caso anterior podemos despejar de las condiciones de contorno y deducir que $y'(b) = -\beta_0 y(b)/\beta_1$ y $z'(b) = -\beta_0 z(b)/\beta_1$. Si hacemos lo mismo con las de U_1 tenemos lo propio para el extremo a, $y'(a) = -\alpha_0 y(a)/\alpha_1$ y $z'(a) = -\alpha_0 z(a)/\alpha_1$. Ahora sustituimos en (2.10) y obtenemos lo que buscábamos

$$\begin{aligned} p(t)[y'(t)z(t) - y(t)z'(t)]\Bigg|_a^b &= \frac{-\alpha_0 p(a)}{\alpha_1}[y(a)z(a) - y(a)z(a)] \\ &\quad + \frac{\beta_0 p(b)}{\beta_1}[y(b)z(b) - y(b)z(b)] = 0. \end{aligned}$$

Con esto tenemos cubiertos todos los casos y en cada uno de ellos hemos probado que la Identidad de Green se anula. □

2.2. La función de Green

En esta sección consideraremos el problema de Sturm-Liouville (2.9). Supondremos que el problema homogéneo asociado a dicho problema

$$\begin{cases} L[y] = (p(t)y')' + q(t)y = 0, & t \in [a,b], \\ U_1(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \\ U_2(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

tiene solución única. Con esta hipótesis, lo que haremos será buscar la solución única que nos aseguraba el Teorema de la Alternativa. Construiremos la denominada función de Green $G(t,s)$ que nos permite escribir la solución del problema (2.9) de la forma

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds}, \tag{2.12}$$

con f el término independiente de la ecuación de problema de contorno. Este resultado no solo nos ayuda a determinar la solución explícita de un problema de contorno; sino que con la misma función de Green podremos encontrar fácilmente la solución de cualquier problema de contorno que tengan el mismo operador asociado y las mismas condiciones de contorno sin más que calcular la expresión (2.12), independientemente del término no homogéneo. Nos apoyaremos en las referencias [4], [8], [9] y [10].

Empezaremos buscando dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $L[y] = 0$. Sean y_1, y_2 las respectivas soluciones de los siguientes problemas de valores iniciales o de Cauchy:

$$\begin{cases} L[y] = 0, & t \in [a,b], \\ y(a) = \alpha_1, \\ y'(a) = -\alpha_0. \end{cases} \qquad \begin{cases} L[y] = 0, & t \in [a,b], \\ y(b) = \beta_1, \\ y'(b) = -\beta_0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Primero de todo sabemos que existen y son únicas estas soluciones por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales (ver [11] página 241). Claramente son soluciones no nulas ya que al menos uno de los coeficientes α_i o β_i es no nulo. Cada una de ellas cumple la ecuación diferencial lineal homogénea; además, por construcción, la primera verifica las condiciones de contorno homogéneas asociadas al primer extremo $t = a$, U_1, y la segunda a $t = b$, U_2.

Ahora si el problema de Sturm-Liouville homogéneo asociado tiene como única solución la trivial tenemos además que $U_1(y_2) \neq 0$ y $U_2(y_1) \neq 0$. Esto se da porque si alguna de las dos anteriores expresiones fuera nula, tendríamos una solución no trivial del problema homogéneo y esto es contrario a nuestra hipótesis. Así pues, demos ahora un resultado que será útil.

Lema 2.2.1. *Sean y_1, y_2 soluciones de los respectivos problemas de Cauchy (2.13). Si el problema de contorno homogéneo asociado a (2.9) tiene como única solución la solución trivial; entonces, y_1, y_2 son linealmente independientes.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que son linealmente dependientes. Entonces, podríamos escribir $y_2(t) = \lambda y_1(t)$ para todo t en $[a, b]$ con λ una constante real no nula. Veamos cómo y_1 cumple las condiciones de contorno. La del primer extremo la cumple por definición y trivialmente vemos que también cumple la del segundo ya que como

$$\beta_1 = y_2(b) = \lambda y_1(b) \Rightarrow y_1(b) = \frac{\beta_1}{\lambda}$$

$$-\beta_0 = y_2'(b) = \lambda y_1'(b) \Rightarrow y_1'(b) = \frac{-\beta_0}{\lambda}.$$

Sustituyendo directamente tenemos que

$$U_2(y_1) = \beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_2(b) = \frac{\beta_0\beta_1 - \beta_1\beta_0}{\lambda} = 0.$$

Entonces vemos que y_1 es solución del problema de Sturm-Liouville homogéneo, y no es nula, por tanto es absurdo ya que nuestra premisa es que el homogéneo asociado tiene únicamente solución trivial. □

Antes de definir y construir la función de Green vamos a resolver el problema de contorno (2.9) con el método de variación de parámetros. Una solución de la ecuación $L[y] = f$ tendrá la forma

$$y_p = c_1(t)y_1 + c_2(t)y_2$$

con y_1, y_2 como acabamos de calcular y $c_1(t), c_2(t)$ dos funciones a determinar que al menos pertenezcan a $\mathcal{C}^2[a, b]$. Derivando esta expresión dos veces, sustituyendo en la ecuación $L[y] = f$ y utilizando que y_1, y_2 son soluciones de $L[y] = 0$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = 0, \\ c_1'(t)y_1' + c_2'(t)y_2' = \dfrac{f(t)}{p(t)}, \end{cases} \tag{2.14}$$

donde la primera de ellas la hemos impuesto. Resolviendo por el método de Crammer, directamente tenemos que

$$c_1'(t) = \frac{-y_2 f(t)}{p(t)W(y_1(t), y_2(t))} \qquad c_2'(t) = \frac{y_1 f(t)}{p(t)W(y_1(t), y_2(t))}$$

donde $W(y_1(t), y_2(t))$ indica el wronskiano de las funciones y_1, y_2 que se define como el determinante

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Al ser linealmente independientes (Lema 2.2.1), su wronskiano es distinto de cero y como $p(t)$ es una función positiva en el intervalo de definición $I = [a, b]$ las funciones $c_1'(t), c_2'(t)$

están bien definidas. Integrando las anteriores expresiones podemos fijar $c_1(t), c_2(t)$ de la forma

$$c_1(t) = \int_b^t \frac{-y_2(s)f(s)}{p(s)W(y_1(s), y_2(s))}\mathrm{ds} \quad c_2(t) = \int_a^t \frac{y_1(s)f(s)}{p(s)W(y_1(s), y_2(s))}\mathrm{ds}$$

y dan lugar a la solución general de $L[y] = f$

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + y_1(t)\int_t^b \frac{y_2(s)f(s)}{p(s)W(s)}\mathrm{ds} + y_2(t)\int_a^t \frac{y_1(s)f(s)}{p(s)W(s)}\mathrm{ds}, \tag{2.15}$$

con k_1, k_2 constantes reales arbitrarias. Por simplicidad $W(s)$ denota $W(y_1(s), y_2(s))$.

Si derivamos la expresión (2.15) obtenemos

$$y'(t) = k_1 y_1'(t) + k_2 y_2'(t) + y_1'(t)c_1(t) + y_2'(t)c_2(t) + c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t)$$

y como se verifica $c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0$ (ver (2.14)) la derivada de la solución es

$$y'(t) = k_1 y_1'(t) + k_2 y_2'(t) + y_1'(t)\int_t^b \frac{y_2(s)f(s)}{p(s)W(s)}\mathrm{ds} + y_2'(t)\int_a^t \frac{y_1(s)f(s)}{p(s)W(s)}\mathrm{ds}.$$

Ahora vamos imponer que la solución y calculada tiene que cumplir las condiciones de contorno. Imponemos la primera y obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 = U_1(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= \alpha_0[k_1 y_1(a) + k_2 y_2(a) + y_1(a)c_1(a) + y_2(a)c_2(a)] \\ &+ \alpha_1[k_1 y_1'(a) + k_2 y_2'(a) + y_1'(a)c_1(a) + y_2'(a)c_2(a)], \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, por la linealidad de las condiciones de contorno,

$$0 = U_1(y) = k_1 U_1(y_1) + k_2 U_1(y_2) + c_1(a)U_1(y_1) + c_2(a)U_1(y_2).$$

Usamos que, por definición de c_2, $c_2(a) = 0$ y que y_1 es solución del primer sistema de (2.13) luego $U_1(y_1) = 0$ y la expresión se transforma en $0 = k_2 U_1(y_2)$. Como por hipótesis y_2 no puede verificar las condiciones de contorno en $t = a$, ($U_1(y_2) \neq 0$) tenemos que $k_2 = 0$.

De manera análoga, con las condiciones de $U_2(y) = 0$ tenemos que $k_1 = 0$. Obtenemos finalmente que la solución del problema de contorno será

$$y(t) = y_1(t)\int_t^b \frac{y_2(s)f(s)}{p(s)W(s)}\mathrm{ds} + y_2(t)\int_a^t \frac{y_1(s)f(s)}{p(s)W(s)}\mathrm{ds}. \tag{2.16}$$

Ahora que sabemos que la solución tiene esta forma podemos definir la función de Green de manera explícita como

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{y_2(s)y_1(t)}{p(s)W(y_1(s), y_2(s))}, & a \leq t < s \leq b, \\ \\ \dfrac{y_1(s)y_2(t)}{p(s)W(y_1(s), y_2(s))}, & a \leq s < t \leq b \end{cases}$$

para que se cumpla

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds}.$$

Observación 2.2.2. Esta forma la podemos dar de una manera más simplificada viendo que $p(s)W(y_1(s), y_2(s))$ es constante. Para ello basta comprobar que su derivada es cero. Demostrémoslo para dos soluciones de la ecuación homogénea $L[y] = 0$ cualesquiera; en particular, será cierto para nuestro caso.

Consideremos la definición de wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

y su derivada

$$W' = y_1 y_2'' + y_1' y_2' - y_2 y_1'' - y_2' y_1' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Así,

$$(pW)' = p'W + pW' = p'(y_1 y_2' - y_2 y_1') + p(y_1 y_2'' - y_2 y_1'').$$

como y_1, y_2 son soluciones de $L[y] = p(t)y'' + p'(t)y' + q(t)y = 0$ se cumple que

$$\begin{aligned} -y_2 L[y_1] &= -y_2(p(t)y_1'' + p'(t)y_1' + q(t)y_1) = 0 \\ y_1 L[y_2] &= y_1(p(t)y_2'' + p'(t)y_2' + q(t)y_2) = 0. \end{aligned}$$

Si sumamos estas dos expresiones obtenemos en función de W que $pW' + p'W = 0$. Con lo cual $Wp = k$. Notemos que k es no nula ya que ni W ni p se anulan en $I = [a, b]$. Así pues podemos dar la expresión anterior como

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} y_2(s) y_1(t), & a \leq t < s \leq b, \\ \\ \dfrac{1}{k} y_1(s) y_2(t), & a \leq s < t \leq b. \end{cases} \tag{2.17}$$

Vamos a ver las particularidades que tiene la función que acabamos de construir. Podemos notar que el intervalo de definición será un cuadrado dividido en dos regiones triangulares.

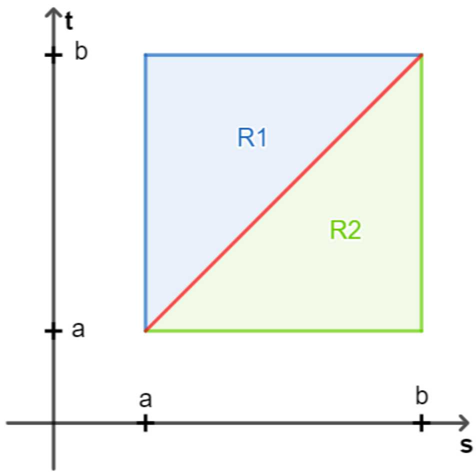

Figura 2.1: Regiones de definición de la función de Green.

Fijándonos en la Figura 2.1 tenemos las regiones $R1 = \{(t,s) : a \leq t \leq s \leq b\}$ y $R2 = \{(t,s) : a \leq s \leq t \leq b\}$. La función G es simétrica ya que $G(t,s) = G(s,t)$ en sus intervalos de definición. Además vemos que en los dos triángulos, $R1, R2$, la función es de clase $\mathcal{C}^2$ por construcción. Para que G sea continua en el cuadrado en general, tendríamos que también lo debe ser en la frontera común de las dos regiones, es decir en la diagonal $t = s$, lo cual es cierto pues

$$\frac{1}{k}y_2(s)y_1(s) = \frac{1}{k}y_1(s)y_2(s).$$

Por otro lado, vemos que la derivada respecto de t de $G(t,s)$ en la frontera en común presenta un salto de discontinuidad; es decir,

$$\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s^+} - \left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s^-} = \frac{1}{k}y_2'(s)y_1(s) - \frac{1}{k}y_1'(s)y_2(s) = \frac{1}{p(s)},$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que $k = p(s)W(y_1(s), y_2(s))$.

Otra particularidad que podemos observar es que por cómo la hemos construido, al fijar s se verifica $L[G] = 0$ excepto en la diagonal $t = s$ ya que y_1, y_2 son soluciones de $L[y] = 0$. Además como función de t por construcción de y_1, y_2 cumplen las condiciones de contorno en los extremos $t = a$ y $t = b$ respectivamente. Es decir, como función de t la función de Green es solución del problema de contorno homogéneo. Aquí vemos la independencia con la función dato. Con esto podemos introducir la definición de función de Green:

Definición 2.2.3. *Una función $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ se denomina **función de Green** para el problema regular de Sturm-Liouville (2.9) si verifica las siguientes propiedades:*

1. *G es continua en $[a,b] \times [a,b]$ y de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b] \times [a,b] \setminus \{(t,t), t \in [a,b]\}$.*
2. *La derivada respecto de t en la diagonal $t = s$ presenta un salto dado por*

$$\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s^+} - \left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s^-} = \frac{1}{p(s)} \quad \text{con } s \in [a,b].$$

3. *Fijado $s \in [a,b]$, $G(t,s)$, como función de t, satisface las condiciones de contorno.*
4. *Fijado $s \in [a,b]$ excepto en la diagonal $t = s$,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right) + q(t)G(t,s) = 0.$$

Notemos que en esta definición no está incluida la propiedad de la simetría ya que se va a obtener de las anteriores.

Proposición 2.2.4. *Sea $G(t,s)$ una función de Green que cumpla las propiedades de la Definición 2.2.3, entonces $G(t,s)$ es simétrica; es decir, $G(t,s) = G(s,t)$ para todo $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$.*

Demostración. Consideremos las funciones de Green $I = G(t, s_1)$ y $H = G(t, s_2)$ con $a < s_1 < s_2 < b$. Por construcción tenemos que tanto I como H cumplen la propiedad 1 de la Definición 2.2.3, en particular fijado s_i, tenemos que excepto en $t = s_i$ las funciones son $\mathcal{C}^2[a, b]$. Como L es un operador autoadjunto podemos usar la Proposición 2.1.8 para obtener que

$$IL[H] - HL^*[I] = IL[H] - HL[I] = \frac{d}{dt}\left(p(t)(IH' - I'H)\right), \tag{2.18}$$

donde por simplicidad hemos utilizado I' y H' para denotar las derivadas parciales respecto de t de I y de H. Como además, cumplen la propiedad 3 de la Definición 2.2.3; es decir, $L[I] = 0$ y $L[H] = 0$ (excepto en $t = s_1$ y $t = s_2$ respectivamente), la parte izquierda de la igualdad (2.18) se anula y tenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)(IH' - I'H)\right) = 0.$$

Ahora, por construcción podemos integrar las funciones de Green respecto de t en los intervalos $[a, s_1]$, $[s_1, s_2]$, y $[s_2, b]$ para obtener:

$$\begin{aligned}
0 &= (p(t)[IH' - I'H])\Big|_{t=a}^{t=s_1} + (p(t)[IH' - I'H])\Big|_{t=s_1}^{t=s_2} + (p(t)[IH' - I'H])\Big|_{t=s_2}^{t=b} \\
&= p(s_1)I(s_1, s_1)[H'(s_1^-, s_2) - H'(s_1^+, s_2)] + p(s_1)H(s_1, s_2)[I'(s_1^+, s_1) - I'(s_1^-, s_1)] \\
&\quad + p(s_2)I(s_2, s_1)[H'(s_2^-, s_2) - H'(s_2^+, s_2)] + p(s_2)H(s_2, s_2)[I'(s_2^+, s_1) - I'(s_2^-, s_1)] \\
&\quad + (p(t)[IH' - I'H])\Big|_{t=a}^{t=b}.
\end{aligned}$$

El último término se anula por la propiedad 3 de la Definición 2.2.3 donde tenemos que las funciones en los extremos $t = a$ y $t = b$ cumplen las condiciones de contorno.

Por construcción tenemos que tanto I como H cumplen la propiedad 2 de la Definición 2.2.3, tenemos que es derivable en todo el intervalo excepto I en $t = s_1$ y H en $t = s_2$ que presentan un salto; es decir,

$$I'(s_2^+, s_1) = I'(s_2^-, s_1), \quad H'(s_1^-, s_2) = H'(s_1^+, s_2)$$

para la parte continua y para la discontinua

$$I'(s_1^+, s_1) - I'(s_1^-, s_1) = \frac{1}{p(s_1)}, \quad H'(s_2^+, s_2) - H'(s_2^-, s_2) = \frac{1}{p(s_2)}.$$

Sustituyendo directamente tenemos que

$$0 = p(s_1)H(s_1, s_2)[1/p(s_1)] + p(s_2)I(s_2, s_1)[-1/p(s_2)] = H(s_1, s_2) - I(s_2, s_1)$$

o lo que es lo mismo

$$H(s_1, s_2) = I(s_2, s_1).$$

Por construcción de I y H tenemos que $G(s_1, s_2) = G(s_2, s_1)$; de donde extraemos que es simétrica. □

Veamos ahora que para cualquier Función de Green verificando las propiedades de la Definición 2.2.3 se tiene que la solución de (2.9) viene dada por la expresión integral (2.12).

Teorema 2.2.5. *Bajo la hipótesis de que el problema (2.11) tiene solución única, la solución del problema regular de Sturm-Liouville (2.9) es*

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds, \tag{2.19}$$

donde $G(s,t)$ es una función de Green verificando la Definición 2.2.3.

Demostración. Primero, sabemos que existe ya que es la integral del producto de dos funciones integrables. Veamos que y definida por (2.19) verifica la ecuación diferencial $L[y] = f$. Usando la regla de Leibniz (ver [3]) en la expresión

$$y(t) = \int_a^t G(t,s)f(s)\mathrm{ds} + \int_t^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds}$$

y teniendo en cuenta que la función G es de clase $\mathcal{C}^2$ en cada región $R1$ y $R2$ y continua en todo el cuadrado $[a,b]\times[a,b]$ (propiedad 1 de la Definición 2.2.3), la derivada respecto de t de la solución quedaría dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} y'(t) &= G(t,t^-)f(t) + \int_a^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds} - G(t,t^+)f(t) + \int_t^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds} \\ &= \int_a^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds} + \int_t^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds} = \int_a^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds}. \end{aligned}$$

Para la segunda derivada respecto de t resulta:

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{\partial G(t,t^-)}{\partial t} f(t) + \int_a^t \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)\mathrm{ds} - \frac{\partial G(t,t^+)}{\partial t} f(t) + \int_t^b \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)\mathrm{ds} \\ &= \left(\frac{\partial G(t,t^-)}{\partial t} - \frac{\partial G(t,t^+)}{\partial t}\right) f(t) + \int_a^b \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)\mathrm{ds} \\ &= \frac{f(t)}{p(t)} + \int_a^b \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)\mathrm{ds}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado la propiedad 2 de la Definición 2.2.3. Sustituyendo en la ecuación del problema, se tiene que

$$\begin{aligned} L[y] &= \frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\int_a^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds}\right) + q(t)\int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds} \\ &= p'(t)\int_a^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds} + p(t)\left(\frac{f(t)}{p(t)} + \int_a^b \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)\mathrm{ds}\right) + q(t)\int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds} \\ &= f(t) + \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right) + q(t)G(t,s)\right) f(s)\mathrm{ds} \\ &= f(t) + \int_a^b L[G]f(s)\mathrm{ds} = f(t), \end{aligned}$$

para la última igualdad se ha usado que, fijado s, $G(t,s)$ es solución de la ecuación homogénea (propiedad 4). Con esto hemos demostrado que y es solución de $L[y] = f$.

Ahora veamos que cumple las condiciones de contorno teniendo en cuenta que para s fijo $G(t,s)$ lo hace como función de t.

$$\begin{aligned}
U_1(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) \\
&= \alpha_0 \int_a^b G(a,s) f(s) \mathrm{ds} + \alpha_1 \int_a^b \left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=a} f(s) \mathrm{ds} \\
&= \int_a^b U_1(G) f(s) \mathrm{ds} = 0.
\end{aligned}$$

Para ver que $U_2(y) = 0$ es análogo. Como $y(t)$ cumple la ecuación y las condiciones de contorno, vemos que es la solución del problema. □

Acabamos de encontrar la solución explícita del problema regular de de Sturm-Liouville (2.9). Si cambiamos el término independiente del problema, la función de Green no cambia así que esta vale para cualquier problema de Sturm-Liouville que tenga el mismo problema de contorno homogéneo asociado. Entonces, tan solo calculando una vez la función de Green, podemos encontrar la solución de cualquier problema de contorno de este tipo a través de la integral (2.19).

La existencia de la función de Green la tenemos probada por construcción, demostremos pues su unicidad.

Proposición 2.2.6. *Si el problema de contorno (2.11) tiene solución única; entonces la función de Green definida por las propiedades de la Definición 2.2.3 es única.*

Demostración. Supongamos que existen dos funciones de Green G_1, G_2 del problema (2.9). Sabemos por hipótesis que para cualquier f continua la solución es única y vendrá dada por las funciones de Green. En consecuencia tenemos

$$\int_a^b G_1(t,s) f(s) \mathrm{ds} = \int_a^b G_2(t,s) f(s) \mathrm{ds},$$

es decir

$$\int_a^b (G_1(t,s) - G_2(t,s)) f(s) \mathrm{ds} = 0.$$

Si tomamos para cada $t \in [a,b]$ fijo, $f(s) = G_1(t,s) - G_2(t,s)$ entonces nos queda que

$$\int_a^b (G_1(t,s) - G_2(t,s))^2 \mathrm{ds} = 0.$$

Como además las funciones de Green son continuas en $[a,b] \times [a,b]$, vemos que $G_1(t,s) = G_2(t,s)$ y queda probada la unicidad. □

Pongamos un ejemplo para concluir la sección. Empezaremos con un problema de contorno sin una forma particular de orden dos y busquemos su solución construyendo su función de Green. Usaremos el mismo ejemplo que hemos estado considerando a lo largo del capítulo.

Ejemplo 2.2.7. Encuentra la función de Green y la solución del siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2, & t \in [0,1], \\ y(0) = 1, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Primero veamos que este problema de contorno tiene solución única. Su problema homogéneo asociado es el siguiente

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0, & t \in [0,1], \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

La solución del la ecuación homogénea $y'' - 2y' + y = 0$ es

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^t t, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno homogéneas tenemos que

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y(1) = \mathrm{e}(c_1 + c_2) = 0.$$

Por tanto, vemos que la única solución del problema de contorno homogéneo es la solución trivial $y \equiv 0$. Por el Teorema de la Alternativa el problema de contorno tiene única solución y estamos en las hipótesis de la sección.

Como vimos en el Ejemplo 2.1.10 podemos transformar el problema de contorno en un problema equivalente que sea de la forma de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} (\mathrm{e}^{-2t} z')' + \mathrm{e}^{-2t} z = \mathrm{e}^{-2t}, & t \in [0,1], \\ z(0) = 0, \\ z(1) = 0. \end{cases}$$

Busquemos dos soluciones linealmente independientes z_1, z_2 donde cada una verifica una de las condiciones de contorno[1], es decir, tomamos $z_1(t) = \mathrm{e}^t t$, $z_2(t) = \mathrm{e}^t(1-t)$ que cumplen lo pedido donde además su wronskiano es $W(z_1(t), z_2(t)) = -\mathrm{e}^{2t}$ y la constante que menciona la Observación 2.2.2 es $k = -1$. Ahora podemos encontrar nuestra expresión con la ecuación (2.17)

$$G(t,s) = \begin{cases} \mathrm{e}^s (s-1) \mathrm{e}^t t, & 0 \le t < s \le 1, \\ \\ \mathrm{e}^s s \mathrm{e}^t (t-1), & 0 \le s < t \le 1. \end{cases}$$

[1]En la construcción dada anteriormente hemos pedido que y_1, y_2 satisfagan los problemas de Cauchy dados en (2.13). No obstante, basta con que sean linealmente independientes y que cada una verifique una de las condiciones de contorno ya que diferirán en una constante que se ajustará con la constante k de la expresión (2.17).

Por tanto, la solución única será, por el Teorema 2.2.5,

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \int_0^1 G(t,s)\mathrm{e}^{-2s}\mathrm{d}s = \mathrm{e}^t(t-1)\int_0^t \mathrm{e}^{-s}s\mathrm{d}s + \mathrm{e}^t t\int_t^1 \mathrm{e}^{-s}(s-1)\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^t(t-1)(1-(t+1)\,\mathrm{e}^{-t}) + \mathrm{e}^t t(t\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-1}) = 1+\mathrm{e}^t(t-1)-\mathrm{e}^{t-1}t.
\end{aligned}
$$

Para resolver el problema inicial, tenemos que despejarl y de la relación $z(t) = y(t) - h(t)$ donde $z(t)$ es la solución a la que acabamos de llegar y $h(t) = 1$. La solución del problema del enunciado será

$$
y(t) = z(t) + h(t) = 1 + \mathrm{e}^t(t-1) - \mathrm{e}^{t-1}t + 1 = 2 + \mathrm{e}^t(t-1) - \mathrm{e}^{t-1}t.
$$

Vamos ahora a resolver el problema de contorno del enunciado de manera análoga a los ejemplos de la Sección 1.2. La solución de la ecuación $y'' - 2y' + y = 2$ es

$$
y(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^t t + 2,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.
$$

Imponiendo las condiciones de contorno lineales tenemos que

$$
y(0) = c_1 + 2 = 1
$$

$$
y(1) = \mathrm{e}(c_1 + c_2) + 2 = 1.
$$

llegamos a que la solución del problema es

$$
y(t) = -\mathrm{e}^t + (-\mathrm{e}^{-1}+1)\mathrm{e}^t t + 2 = 2 + \mathrm{e}^t(t-1) - \mathrm{e}^{t-1}t
$$

como acabábamos de calcular con la integral.

2.3. La función de Green generalizada

Hasta ahora hemos estudiado cuándo un problema de contorno tiene solución única y cómo determinarla explícitamente a través de la función de Green. Sin embargo, como vimos en la Sección 1.1, un problema de contorno puede no tener solución o esta no ser única. Esto es lo que trataremos a lo largo de esta última sección del capítulo. Las referencias en las que nos apoyaremos serán: [4], [9] y [13].

Sin pérdida de generalidad, consideraremos el problema de contorno (2.9). La primera hipótesis que impondremos será la contraria a la que estábamos tomando en la Sección 2.2, que el problema de contorno lineal regular homogéneo de orden dos asociado (2.11) no tenga como única solución la trivial. Por el Teorema de la Alternativa sabemos entonces que el problema de contorno (2.9) no tiene solución única. En este caso no tenemos asegurada la existencia de solución. Es por ello que durante la sección daremos una condición necesaria y suficiente para que el problema de contorno (2.9) tenga solución y en caso de verificarse las calcularemos explícitamente (sabiendo que esta no será única).

También introduciremos la función de Green generalizada donde para cualquier problema de Sturm-Liouville con el mismo problema de contorno homogéneo, podamos calcular una solución particular de forma similar a lo que hicimos en la Sección 2.2.

Sabemos que si existe, nuestra solución no va a ser única, es decir, no será 0-compatible. Además, como la ecuación diferencial es de orden dos, en el caso de existir solución, será 1-compatible o 2-compatible. Veamos que no puede darse este último caso.

Si fuera 2-compatible, existirían funciones y_0 e $\hat{y_0}$ linealmente independientes que verifican (2.11), en particular se tendría

$$\begin{cases} U_1(y_0) = \alpha_0 y_0(a) + \alpha_1 y_0'(a) = 0 \\ U_1(\hat{y_0}) = \alpha_0 \hat{y_0}(a) + \alpha_1 \hat{y_0}'(a) = 0. \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes de dicho sistema es $W(y_0(t), \hat{y_0}(t))$ en el punto $t = a$ e $y_0, \hat{y_0}$ son linealmente independientes entonces $W(y_0(t), \hat{y_0}(t))(a)$ no se anula y $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ y esto es contradictorio con nuestras hipótesis de $|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0$.

Con esto vemos que los problemas de Sturm-Liouville de la forma (2.9) son 0-compatibles (estudiado en la Sección 2.2), son 1-compatibles o no tienen solución. Supongamos que estamos en el caso en el que el problema tiene solución y es 1-compatible. Tomamos y_0 como una solución del problema de contorno homogéneo (2.11) e $\hat{y_0}$ solución de la ecuación homogénea que sea linealmente a y_0. Hemos visto que por construcción $U_i(y_0) = 0$ y por ser y_0 e $\hat{y_0}$ soluciones de (2.11) linealmente independientes entonces, $U_i(\hat{y_0}) \neq 0$.

Sin pérdida de generalidad, podemos imponer que la solución y_0 sea normalizada; es decir, que cumpla que

$$\int_a^b y_0(t)^2 \mathrm{dt} = 1. \tag{2.20}$$

Vamos a dar un ejemplo para ver cómo elegir $y_0, \hat{y_0}$.

Ejemplo 2.3.1. Sea el siguiente problema de contorno homogéneo

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & t \in [0, \pi], \\ y(0) + y'(0) = 0, \\ y(\pi) - y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Vemos que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y(t) = k_1 \sin(t) + k_2 \cos(t) \;\; k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Esta claro que la solución del problema de contorno no será ni $c_1 \sin(t)$ ni $c_2 \cos(t)$ sino una combinación de ellas. Es fácil ver que las soluciones del problema de contorno son $y(t) = c_1 \sin(t) - c_1 \cos(t)$ con $c_1 \in \mathbb{R}$. Si elegimos una de ellas normalizada tenemos que

$$y_0(t) = \frac{\sin(t) - \cos(t)}{\sqrt{\pi}}$$

y para obtener $\hat{y_0}$ nos vale con tomar una cualquiera de (2.21) que sea linealmente independiente. En este caso tenemos que tomar una donde $c_1 \neq -c_2$, es por eso que tanto la función seno como coseno nos valdrían.

Resolvemos la ecuación diferencial de (2.9) por el método de variación de parámetros como hicimos en la Sección 2.2 para dar lugar a que la solución es

$$y(t) = k_1 y_0(t) + k_2 \hat{y_0}(t) + y_0(t) \int_t^b \frac{\hat{y_0}(s) f(s)}{p(s)W(s)} \mathrm{ds} + \hat{y_0}(t) \int_a^t \frac{y_0(s) f(s)}{p(s)W(s)} \mathrm{ds},$$

con k_1, k_2 constantes arbitrarias y $W(s) = W(y_0(s), \hat{y_0}(s))$. Su derivada, como vimos, queda expresada por

$$y'(t) = k_1 y_0'(t) + k_2 \hat{y_0}'(t) + y_0'(t) \int_t^b \frac{\hat{y_0}(s) f(s)}{p(s)W(s)} \mathrm{ds} + \hat{y_0}'(t) \int_a^t \frac{y_0(s) f(s)}{p(s)W(s)} \mathrm{ds}.$$

Vamos ahora a imponer las condiciones de contorno. Tomamos $U_1(y) = 0$ sabiendo que $U_1(y_0) = 0$, $c_2(a) = 0$ (como vimos en la sección anterior) y reordenando tenemos que

$$0 = U_1(y) = k_2[\alpha_0 \hat{y_0}(a) + \alpha_1 \hat{y_0}'(a)] = k_2 U_1(\hat{y_0}).$$

Como $U_1(\hat{y_0}) \neq 0$ vemos que $k_2 = 0$. Si imponemos $U_2(y) = 0$, con $k_2 = 0$ tenemos que

$$U_2(y) = \int_a^b \frac{y_0(s) f(s)}{p(s)W(s)} \mathrm{ds} [\beta_0 \hat{y_0}(b) + \beta_1 \hat{y_0}'(b)] = 0,$$

por tanto, como $U_2(\hat{y_0}) \neq 0$, tenemos que

$$\int_a^b \frac{y_0(s) f(s)}{p(s)W(s)} \mathrm{ds} = 0.$$

Por la Observación 2.2.2 sabemos que $p(s)W(s)$ es constante, entonces esto es equivalente a que

$$\int_a^b y_0(s) f(s) \mathrm{ds} = 0. \tag{2.22}$$

Entonces, si se cumple (2.22) va a existir solución. Tenemos ya una condición suficiente. Ahora bien, la solución va a depender de un parámetro y la solución general del problema de contorno, si se cumple (2.22), vemos que va a ser

$$y(t) = k y_0(t) + y_0(t) \int_t^b \frac{\hat{y_0}(s) f(s)}{p(s)W(s)} \mathrm{ds} + \hat{y_0}(t) \int_a^t \frac{y_0(s) f(s)}{p(s)W(s)} \mathrm{ds}, \tag{2.23}$$

con $k \in \mathbb{R}$, que como vemos es 1-compatible.

Es ahora cuando podemos dar una condición necesaria y suficiente de existencia de solución cuando la solución no es única. Demostremos que la condición (2.22) es una condición necesaria y suficiente de que el problema de contorno tenga solución (no única).

Teorema 2.3.2. *Sea el problema regular de Sturm-Liouville (2.9) donde suponemos que el problema homogéneo asociado (2.11) tiene una solución no trivial y_0. Entonces, el problema regular de Sturm-Liouville tiene solución si y solo si*

$$\int_a^b y_0(t) f(t) \, dt = 0. \tag{2.24}$$

Demostración. Hemos visto que es una condición suficiente ya que si se cumple, (2.23) es una solución. Demostraremos la implicación de izquierda a derecha, que (2.24) es una condición necesaria suponiendo que y es solución de (2.9). Empezamos multiplicando la ecuación del problema $L[y] = f$ por la solución y_0 e integramos en el intervalo de definición en las dos partes

$$\int_a^b y_0(t)L[y]\mathrm{dt} = \int_a^b y_0(t)f(t)\mathrm{dt}. \tag{2.25}$$

Como tanto y_0 como y verifican las condiciones de contorno y el operador L es autoadjunto, por la Proposición 2.1.11 vemos que en nuestro problema la Identidad de Green es igual a cero y por tanto tenemos que

$$\int_a^b (y_0(t)L[y] - y(t)L[y_0])\mathrm{dt} = 0.$$

Sabiendo que y_0 es solución del problema homogéneo, en particular cumplirá la ecuación homogénea $L[y_0] = 0$, y obtenemos que

$$\int_a^b y_0(t)L[y]\mathrm{dt} = \int_a^b y(t)L[y_0]\mathrm{dt} = 0. \tag{2.26}$$

Ahora utilizando (2.25) se deduce (2.24). □

Con este resultado hemos terminado con el estudio de existencia y unicidad de las soluciones y damos el siguiente resultado.

Corolario 2.3.3. *El problema regular de Sturm-Liouville (2.9) tiene solución si y solo si se cumple alguna de las siguientes dos condiciones:*

1. *El problema de contorno homogéneo asociado (2.11) tiene solución única.*
2. *El problema de contorno homogéneo asociado (2.11) no tiene solución única y además si y_0 es una solución no trivial de este, entonces,*

$$\int_a^b y_0(t)f(t)\,dt = 0.$$

Ahora vamos a construir la función de Green para este segundo caso llamada función de Green generalizada. Como hemos visto, las soluciones del problema de contorno serán la suma de la solución del problema de contorno homogéneo por una constante arbitraria más una particular. La solución particular vamos a calcularla de forma similar a la Sección 2.2, con la expresión

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds},$$

donde $G(t,s)$ ahora es la función de Green generalizada. Así tendremos la solución, dada por la integral, de todos los problemas de Sturm-Liouville independientemente de su parte no homogénea. La diferencia principal para este caso es que antes pedíamos la condición de que la función de Green cumpliera $L[y] = 0$ con $t \neq s$; sin embargo, veremos que ahora tenemos que pedir algo distinto. La misma función de Green no nos sirve, ya que si lo hiciese, sería

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}\hat{y_0}(s)y_0(t), & a\leq t<s\leq b,\\ \\ \dfrac{1}{k}y_0(s)\hat{y_0}(t), & a\leq s<t\leq b,\end{cases}$$

donde vemos que como función de t, se cumple $U_1(G(t,s))=0$ pero $U_2(G(t,s))\neq 0$ ya que nos quedaría

$$U_2(G(t,s))=\frac{y_0(s)}{k}U_2(\hat{y_0})=0,$$

es decir, que y_0 es la función nula o que $\hat{y_0}$ cumple que $U_2(\hat{y_0})=0$ y ninguna de estas dos puede ocurrir. Entonces, vamos a necesitar que la función de Green generalizada cumpla otra ecuación; en particular, impondremos que cumpla que $L[y]=-y_0(s)y_0(t)$ con $t\neq s$. Como y_0 es ortogonal con f a la hora de encontrar la solución particular que buscamos como está dada por la integral del producto de ellos dos, no nos va a molestar. Además, así suplimos el problema que nos daba en los extremos ya que $y(t)$ cumple las dos condiciones de contorno.

Sin embargo, nos encontramos con un nuevo problema: cualquier función que sea solución de esa ecuación, no puede cumplir las condiciones de contorno a la vez. Si lo hiciera, multiplicando por $y_0(t)$ a ambos lados de la igualdad e integrando en el intervalo, tendríamos que

$$\int_a^b y_0(t)L[y]\mathrm{dt}=\int_a^b -y_0(t)y_0(s)y_0(t)\mathrm{dt},$$

y como vimos en (2.26), la primera igualdad es cero; por tanto,

$$-y_0(s)\int_a^b y_0^2(t)\mathrm{dt}=0.$$

Esto nos conduce a contradicción ya que como se cumple (2.20), implica que $y_0(t)$ es la función trivial contrario a nuestra hipótesis. Con el propósito de evitar esto, dividamos la función en dos ramas e impongamos las condiciones que queremos que cumpla para darla de una forma explícita sin parámetros. Pero para saber las características de la función de Green generalizada definámosla primero.

Definición 2.3.4. *Una función $G:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ se denomina **función de Green generalizada** para el problema regular de Sturm-Liouville (2.9) si*

1. *G es continua en $[a,b]\times[a,b]$ y de clase $\mathcal{C}^2$ en $[a,b]\times[a,b]\setminus\{(t,t),t\in[a,b]\}$.*

2. *La derivada respecto de t en la diagonal presenta un salto*

$$\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s^+}-\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s^-}=\frac{1}{p(s)}\ \textit{con}\ s\in[a,b].$$

3. *Fijado $s\in[a,b]$, $G(t,s)$, como función de t, satisface las condiciones de contorno.*

4. *Fijado $s \in [a,b]$, excepto en la diagonal $t = s$,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right) + q(t)G(t,s) = -y_0(t)y_0(s).$$

5. *G cumple que es ortogonal a y_0 respecto de la variable t*

$$\int_a^b G(t,s)y_0(t)\,dt = 0.$$

Veamos que la propiedad 2 de la Definición 2.3.4 se puede obtener de del resto de propiedades. Como L es autoadjunta usando la Proposición 2.1.8 y viendo $G(t,s)$ como función de t tenemos para $t \neq s$

$$L[G]y_0 - L[y_0]G = \frac{d}{dt}(p(t)[G'y_0 - Gy_0'])$$

donde hemos tomado y_0 una solución normalizada de $L[y] = 0$ y para simplificar denotamos por G' a $\partial G(t,s)/\partial t$. Como $L[y_0] = 0$ y viendo a G como función de t excepto en $t = s$ tenemos $L[G] = -y_0(s)y_0(t)$ por la propiedad 4 de la Definición 2.3.4 y nos queda que

$$-y_0(s)y_0(t)^2 = \frac{d}{dt}(p(t)[G'y_0 - Gy_0']).$$

Integrando ahora la expresión anterior en el intervalo de definición $I = [a,b]$ sabiendo que por la propiedad 1 de la Definición 2.3.4 G' en $t = s$ no es continua, se tiene que

$$-y_0(s)\int_a^b y_0(t)^2\mathrm{dt} = (p(t)[G'y_0 - Gy_0'])\Big|_a^s + (p(t)[G'y_0 - Gy_0'])\Big|_s^b.$$

Teniendo en cuenta la normalización de y_0, (2.20), y reagrupando los términos de la segunda igualdad obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
-y_0(s) &= p(s)G'(s^-,s)y_0(s) - p(s)G(s^-,s)y_0'(s) - p(s)G'(s^+,s)y_0(s) + p(s)G(s^+,s)y_0'(s) \\
&\quad + (p(t)[G'y_0 - Gy_0'])\Big|_a^b = p(s)y_0'(s)[G(s^+,s) - G(s^-,s)] \\
&\quad + p(s)y_0(s)[G'(s^-,s) - G'(s^+,s)] + (p(t)[G'y_0 - Gy_0'])\Big|_a^b.
\end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que G es una función continua (propiedad 1 de la Definición 2.3.4), $G(s^+,s) = G(s^-,s)$, y que tanto ella en función de t (propiedad 3 de la Definición 2.3.4) como y_0 cumplen las condiciones de contorno, nos queda

$$-y_0(s) = p(s)y_0(s)[G'(s^-,s) - G'(s^+,s)]$$

de donde obtenemos que

$$[G'(s^+,s) - G'(s^-,s)] = \frac{1}{p(s)}.$$

Ahora que sabemos cuáles son las propiedades que queremos que verifique, veamos una manera de construirla. Cualquier solución de $L[y] = -y_0(s)y_0(t)$ tendrá la forma

$$y(t) = y_0(t)c_1(s) + \hat{y_0}(t)c_2(s) + y_p(t)y_0(s)$$

con $y_0, \hat{y_0}$ dos soluciones linealmente independientes de $L[y] = 0$ donde además y_0 está normalizada y cumple las condiciones de contorno en ambos extremos, $\hat{y_0}$ en ninguno y donde y_p es una solución particular de la ecuación $L[y] = -y_0(t)$.

Observación 2.3.5. Observemos que hemos elegido como base de la solución homogénea $y_0, \hat{y_0}$. Esto va a ser útil ya que y_0 sabemos que cumple las condiciones de contorno y que $\hat{y_0}$ nunca se anulará en estas. Gracias a esto, cuando impongamos las condiciones de contorno podremos extraer explícitamente algunos parámetros. Si no lo tomáramos así, no podríamos suponer que ninguna de las dos soluciones cumple las condiciones de contorno.

Vamos a definir la función de Green generalizada por dos ramas donde cada c_i puede ser distinto en cada una. Lo haremos de la siguiente manera:

$$G(t,s) = \begin{cases} y_0(t)c_{1a}(s) + \hat{y_0}(t)c_{2a}(s) + y_p(t)y_0(s), & a \le t < s \le b, \\ \\ y_0(t)c_{1b}(s) + \hat{y_0}(t)c_{2b}(s) + y_p(t)y_0(s), & a \le s < t \le b. \end{cases}$$

Impongamos ahora que cumpla las condiciones de contorno lineales del extremo $t = a$:

$$0 = U_1(G) = c_{1a}(s)U_1(y_0) + c_{2a}(s)U_1(\hat{y_0}) + y_0(s)U_1(y_p).$$

Como y_0 cumple $U_1(y_0) = 0$ tenemos que

$$c_{2a}(s)U_1(\hat{y_0}) + y_0(s)U_1(y_p) = 0$$

y podemos despejar c_{2a} en función de y_0 y constantes obtenidas de evaluar y_0 e y_p en el extremo $t = a$:

$$c_{2a}(s) = \frac{-y_0(s)U_1(y_p)}{U_1(\hat{y_0})}.$$

En la segunda rama hacemos lo análogo con la condición de contorno en $t = b$ y obtenemos

$$c_{2b}(s) = \frac{-y_0(s)U_2(y_p)}{U_2(\hat{y_0})}.$$

Si ahora imponemos que queremos continuidad de la función $G(t,s)$ en $[a,b] \times [a,b]$, se tiene que

$$y_0(s)c_{1a}(s) + \hat{y_0}(s)c_{2a}(s) + y_p(s)y_0(s) = y_0(s)c_{1b}(s) + \hat{y_0}(s)c_{2b}(s) + y_p(s)y_0(s).$$

Podemos despejar $c_{1a}(s)$ en función de $c_{1b}(s)$ (o viceversa) si $y_0(s) \neq 0$

$$y_0(s)c_{1a}(s) = \hat{y_0}(s)(c_{2b}(s) - c_{2a}(s)) + y_0(s)c_{1b}(s)$$

y usando las definiciones que habíamos obtenido de c_{2b} y c_{2a} tenemos lo que buscábamos. El último parámetro que nos queda por obtener es c_{1b} y lo podemos determinar con la última condición de la Definición 2.3.4. No la damos explícitamente pero vemos que la parte de c_{1b} que queremos despejar, queda como la integral de

$$\int_a^b c_{1b}(s)y_0^2(t)\mathrm{dt} = c_{1b}(s)$$

por haber tomado y_0 normalizada (2.20). Entonces, solo hay que integrar el resto de términos y despejar.

Lo veremos en un ejemplo pero antes daremos un resultado similar al de la Proposición 2.2.5; veremos que la integral de la función que hemos buscado multiplicado por el término independiente de la ecuación diferencial es la solución particular que buscábamos.

Teorema 2.3.6. *Sea el problema regular de Sturm-Liouville (2.9) donde suponemos que el problema homogéneo asociado (2.11) tiene una solución no trivial y_0. Si f verifica la condición de ortogonalidad (2.24), una solución particular del problema regular de Sturm-Liouville será*

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds.$$

Demostración. De la demostración del Teorema 2.2.5 obtenemos las dos primeras derivadas de la función respecto de t

$$y'(t) = \int_a^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds},$$

$$y''(t) = \frac{f(t)}{p(t)} + \int_a^b \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)\mathrm{ds},$$

donde se ha utilizado las propiedades 1 y 2 de la Definición 2.3.4.

Ahora introduciendo esto en la ecuación del problema y recordando que por la Definición 2.3.4, $L[G] = -y_0(t)y_0(s)$ (propiedad 4) tenemos que

$$\begin{aligned}
L[y] &= \frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\int_a^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds}\right) + q(t)\int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds} \\
&= p'(t)\int_a^b \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s)\mathrm{ds} + p(t)\left(\frac{f(t)}{p(t)} + \int_a^b \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s)\mathrm{ds}\right) + q(t)\int_a^b G(t,s)f(s)\mathrm{ds} \\
&= f(t) + \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right) + q(t)G(t,s)\right) f(s)\mathrm{ds} \\
&= f(t) + \int_a^b L[G]f(s)\mathrm{ds} = f(t) - \int_a^b y_0(t)y_0(s)f(s)\mathrm{ds} = f(t),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que si es solución entonces se cumple que (2.24).

Por último, veamos que cumple las condiciones de contorno sabiendo que para s fijo $G(t,s)$ lo hace en función de t por la propiedad 3 de la Definición 2.3.4. Es análogo a lo que hicimos en la demostración de la Proposición 2.2.5. Por tanto, tenemos ya demostrado que $y(t)$ es solución del problema de contorno (2.9). $\square$

Esta va a ser la solución particular; sin embargo sabemos que el problema es 1-compatible por tanto tenemos este último resultado de manera directa.

Teorema 2.3.7. *Sea $G(t,s)$ función de Green generalizada del Problema Regular de Sturm-Liouville (2.9) que no tenga solución única. Sea y_0 solución no trivial normalizada del problema de contorno homogéneo asociado (2.11). El conjunto de soluciones de (2.9) están dadas por la siguiente expresión*

$$y(t) = ky_0(t) + \int_a^b G(t,s)f(s)ds,$$

donde k es una constante real arbitraria.

Demostración. Es simplemente una consecuencia del Teorema 2.3.6 como solución particular del problema de contorno y el teorema de superposición de soluciones por ser tanto la ecuación diferencial como las condiciones de contorno lineales. □

Pongamos ahora un ejemplo donde calculemos la solución general de un problema de contorno con solución no única.

Ejemplo 2.3.8. Calcula la solución y la función de Green generalizada del siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' = t-2, & t \in [0,3], \\ y(0) = 0, \\ y(3) - 3y'(3) = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Primero veamos que este problema de contorno no tiene solución única. Su problema homogéneo asociado es el siguiente

$$\begin{cases} y'' = 0, & t \in [0,3], \\ y(0) = 0, \\ y(3) - 3y'(3) = 0. \end{cases}$$

La solución del la ecuación homogénea $y'' = 0$ es

$$y(t) = c_1 t + c_2, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno homogéneas tenemos que

$$y(0) = c_2 = 0$$

$$y(3) - 3y'(3) = 3c_1 + c_2 - 3c_1 = 0.$$

Por tanto, vemos que el problema de contorno homogéneo tiene infinitas soluciones de la forma $y(t) = c_1 t$ con c_1 una constante real. Tomemos $y_0(t) = t/3$ una solución normalizada de la ecuación homogénea.

Ahora veamos si el problema de contorno tiene solución. Como la integral

$$\int_0^3 \frac{s(s-2)}{3} \mathrm{ds} = 0,$$

por el Corolario 2.3.3 el problema de contorno (2.27) tiene solución.

Construyamos pues su función de Green generalizada. Tomamos $y_p(t) = -t^3/18$ una solución particular de la ecuación $L[y] = -y_0(t) = -t/3$. Además, tomamos $\hat{y_0} = 1$ como una solución de $L[y] = 0$ que sea linealmente independiente a y_0. Así, la función de Green Generalizada tendrá la forma

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t}{3}c_{1a}(s) + c_{2a}(s) - \dfrac{st^3}{54}, & 0 \le t < s \le 3, \\ \\ \dfrac{t}{3}c_{1b}(s) + c_{2b}(s) - \dfrac{st^3}{54}, & 0 \le s < t \le 3. \end{cases}$$

Impongamos primero la propiedad 3 de la Definición 2.3.4 viendo que G como función de t cumple las condiciones de contorno. Empecemos con las condiciones del extremo $t = a$ sabiendo que $U_1(y_0) = 0$,

$$0 = U_1(G) = c_{1a}(s)U_1(y_0) + c_{2a}(s)U_1(1) + \frac{s}{3}U_1(y_p) = c_{2a}(s) - 0$$

de donde obtenemos que $c_{2a}(s) = 0$. Ahora imponemos las condiciones en el extremo $t = b$ sabiendo que $U_2(y_0) = 0$

$$0 = U_2(G) = c_{1b}(s)U_2(y_0) + c_{2b}(s)U_2(1) + \frac{s}{3}U_2(y_p) = c_{2b}(s) + s$$

y tenemos que $c_{2b}(s) = -s$.

Ahora impongamos la propiedad 1 de la Definición 2.3.4, que la función G es continua,

$$\frac{s}{3}c_{1a}(s) + c_{2a}(s) - \frac{s^4}{54} = \frac{s}{3}c_{1b}(s) + c_{2b}(s) - \frac{s^4}{54}.$$

Despejando $c_{1a}(s)$ con los valores de c_{2a} y c_{2b} que hemos obtenido, tenemos que $c_{1a} = c_{1b} - 3$. Por último vamos a usar la última propiedad de la Definición 2.3.4,

$$\int_0^3 G(t,s)y_0(t)\mathrm{dt} = 0,$$

para despejar el último término, c_{1b}:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^3 G(t,s)\frac{t}{3}\mathrm{dt} = \int_0^s \left(\frac{t}{3}(c_{1b}(s) - 3) - \frac{st^3}{54}\right)\frac{t}{3}\mathrm{dt} + \int_s^3 \left(\frac{t}{3}c_{1b}(s) - s - \frac{st^3}{54}\right)\frac{t}{3}\mathrm{dt} \\ &= c_{1b}(s) - 3\int_0^s \frac{t^2}{9}\mathrm{dt} - \int_s^3 \frac{st}{3}\mathrm{dt} - \int_0^3 \frac{st^4}{162}\mathrm{dt} = c_{1b}(s) - \frac{s^3}{9} - \frac{3s}{2} + \frac{s^3}{6} - \frac{3s}{10} \end{aligned}$$

de aquí despejamos y vemos que $c_{1b}(s) = 9s/5 - s^3/18$. Con esto ya podemos dar la función de Green generalizada como

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{3st}{5} - \dfrac{s^3t}{54} - t - \dfrac{st^3}{54}, & 0 \le t < s \le 3, \\ \\ \dfrac{3st}{5} - \dfrac{s^3t}{54} - s - \dfrac{st^3}{54}, & 0 \le s < t \le 3. \end{cases}$$

Con esto vamos a obtener una solución particular del problema de contorno (2.27) con la integral del Teorema 2.3.6. Tenemos que

$$y(t) = \int_0^3 \left(\frac{3st}{5} - \frac{s^3t}{54} - \frac{st^3}{54}\right)(s-2)\mathrm{ds} - \int_0^t s(s-2)\mathrm{ds} - \int_t^3 t(s-2)\mathrm{ds}.$$

Por la ortogonalidad de y_0 con f, tenemos que

$$\int_0^3 s(s-2)\mathrm{ds} = 0$$

y directamente vemos que los dos últimos términos de la primera integral son cero. Calculamos las integrales que restan para obtener que

$$y(t) = \int_0^3 \left(\frac{s^3t}{54}\right)(s-2)\mathrm{ds} - \int_0^t s(s-2)\mathrm{ds} - \int_t^3 t(s-2)\mathrm{ds} = \frac{27t}{20} - t^2 + \frac{t^3}{6}.$$

por tanto la solución del problema de contorno (2.27) como nos dice el Teorema 2.3.7 es

$$y(t) = k\frac{t}{3} + \frac{27t}{20} - t^2 + \frac{t^3}{6} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Comprobémoslo. Derivemos la solución dos veces (respecto de la variable t)

$$y'(t) = \frac{k}{3} + \frac{27}{20} - 2t + \frac{t^2}{2} \quad k \in \mathbb{R}, \quad y''(t) = -2 + t.$$

Donde vemos directamente que cumple la ecuación $L[y] = t - 2$. Veamos que cumple las condiciones de contorno:

$$y(0) = 0,$$
$$y(3) - 3y'(3) = k + \frac{81}{20} - 9 + \frac{9}{2} - k - \frac{81}{20} + 18 - \frac{27}{2} = 0.$$

Por tanto, hemos comprobado que es la solución y hemos terminado.

Aunque la función de Green generalizada sea útil en un marco teórico por sus propiedades, hemos visto que es un poco engorrosa de calcular. En la práctica si tuviéramos que buscar una o dos soluciones usando directamente (2.23) saldría más económico.

Si nos fijamos en la definición de Green que dimos en la Definición 2.2.3 y en la de la generalizada que hemos dado en la Definición 2.3.4 hay dos características en las que se diferencian. La primera es que cada una resuelve una ecuación diferente. Sin embargo, como en Green teníamos como única solución la trivial, podemos ver como que es un caso particular de $L[y] = -y_0(s)y_0(t)$ ya que para ese caso $y_0(s) = y_0(t) = 0$ y serían equivalentes.

La otra característica que las diferencia es la última de la Definición 2.3.4. En Green veíamos que la función era simétrica; y si nos fijamos en el Ejemplo 2.3.8 que acabamos de hacer, la función de Green generalizada era simétrica. ¿Es casualidad? La respuesta es que no. Realmente la condición de ortogonalidad que imponemos en la generalizada implica que sea simétrica. Vamos a probarlo.

Proposición 2.3.9. *La función de Green generalizada de la Definición 2.3.4 es simétrica.*

Demostración. Usando la misma notación que en la demostración de la Proposición 2.2.4, tenemos I y H dos funciones de Green en este caso que cumplen la Definición 2.3.4 y en particular la propiedad 4. Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b IL[H] - HL[I]\mathrm{dt} &= \int_a^b (-Iy_0(t)y_0(s_2) + Hy_0(t)y_0(s_1))\mathrm{dt} \\ &= -y_0(s_2)\int_a^b Iy_0(t)\mathrm{dt} + y_0(s_1)\int_a^b Hy_0(t)\mathrm{dt} = 0\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que se cumple la propiedad 5 de la Definición 2.3.4. A partir de aquí la demostración es análoga a la Proposición 2.2.4. □

Con este resultado que acabamos de ver, podemos ver la función de Green como un tipo de función de Green generalizada.

Para concluir con el capítulo, usando la idea que acabamos de razonar, veamos que podemos refinar un poco más el Corolario 2.3.3. Con las notaciones de la sección,

$$\int_a^b y_0(t)f(t)\mathrm{dt} = 0$$

con y_0 normalizada, también podemos tomar una cualquiera sin normalizar. Es cierto que esto nos ha sido cómodo a la hora de demostrar y calcular pero no es necesario para que esto se cumpla ya que una solución normalizada no es más que una solución multiplicada por una constante no nula.

Capítulo 3

El método del disparo lineal

A lo largo del Capítulo 1 y 2 hemos estudiado la existencia y unicidad de solución de los problemas de contorno asociados a una ecuación diferencial lineal de orden dos con condiciones separadas, así como el cálculo de sus soluciones de forma directa (ajustando las constantes en la solución general para que verifiquen las condiciones dadas) o a través de la Función de Green. En este último capítulo abordaremos el cálculo numérico de las soluciones. Los métodos más utilizados para aproximar numéricamente soluciones de un problema de contorno lineal son el método de disparo y diferencias finitas. En este capítulo se analizará el primero y citaremos [2], por ejemplo, para el segundo.

El método numérico del disparo trata de escribir las soluciones del problema de contorno en términos de las soluciones de determinados problemas de Cauchy y luego utilizar algoritmos conocidos para resolver numéricamente dichos problemas de Cauchy. Lo resolveremos primero para el caso de un problema de contorno con condiciones Dirichlet y después en el caso general, a pesar de que este último sea poco considerado en la literatura. Las referencias en las que nos basamos son [2], [7], [8] y [10].

3.1. Condiciones Dirichlet

En esta primera parte del capítulo estudiaremos el siguiente problema de contorno con extremos fijos o de Dirichlet

$$\begin{cases} L[y] = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = \mathsf{b}(t), \quad t \in [a,b], \\ y(a) = \gamma_1, \\ y(b) = \gamma_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde las funciones a_0, a_1 y b son continuas en $[a,b]$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ fijados. En primer lugar supondremos que la función b es no nula. Buscaremos la solución general de la ecuación

$L[y] = \mathsf{b}$ como la suma de soluciones de tres problemas de Cauchy de la siguiente forma:

$$\begin{cases} L[y] = 0, \\ y(a) = 1, \\ y'(a) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L[y] = 0, \\ y(a) = 0, \\ y'(a) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} L[y] = \mathsf{b}(t), \\ y(a) = \gamma_1, \\ y'(a) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Como en todos los problemas, la ecuación es lineal y las funciones a_0, a_1 y b son continuas en $[a, b]$, sabemos que dichos problemas tienen solución definida en $[a, b]$ y es única (ver [11] página 241). Sean y_1, y_2, y_3 las respectivas soluciones; claramente, estas son no triviales y distintas entre sí.

Las dos primeras, y_1, y_2, son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea ya que por construcción

$$W(y_1(t), y_2(t))(a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

La tercera, y_3, es una solución particular de la ecuación $L[y] = \mathsf{b}$. Expresamos por tanto la solución general de la ecuación $L[y] = \mathsf{b}$ como

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_3(t)$$

con c_i constantes reales.

Imponemos ahora las condiciones de contorno. La primera del extremo $t = a$ nos da la siguiente expresión

$$\gamma_1 = y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_3(a) = c_1 + \gamma_1$$

de donde obtenemos que $c_1 = 0$. Imponemos ahora la condición del extremo $t = b$ para ver que

$$\gamma_2 = y(b) = c_2 y_2(b) + y_3(b). \tag{3.3}$$

Distinguimos dos casos:

- Si $y_2(b) \neq 0$, entonces $c_2 = (\gamma_2 - y_3(b))/y_2(b)$ y el problema de contorno (3.1) tiene solución única dada por

$$y(t) = \frac{\gamma_2 - y_3(b)}{y_2(b)} y_2(t) + y_3(t). \tag{3.4}$$

- Si $y_2(b) = 0$, entonces, y_2 es una solución no trivial del problema de contorno homogéneo asociado ya que verifica por construcción $L[y_2] = 0, y_2(a) = 0$. Así que, como vimos en el Capítulo 2, el problema de contorno (3.1) no tendrá solución o, si existe, será 1-compatible. Además, de (3.3) vemos que el problema de contorno (3.1) tiene solución si y solo si $y_3(b) = \gamma_2$. Asimismo, si se cumple esta condición, las soluciones del problema de contorno quedarán determinadas por

$$y(t) = c_2 y_2(t) + y_3(t) \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Observación 3.1.1. Notemos que para el caso $\mathsf{b}(t) = 0$, y_3 no aportaría nada de información nueva ya que estaría dentro del subespacio generado por y_1, y_2 por ser una solución más de la ecuación homogénea. Las soluciones serán por tanto de la forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

con $c_i \in \mathbb{R}$ e imponiendo las condiciones de contorno tenemos por un lado en el extremo $t = a$ que

$$\gamma_1 = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = c_1.$$

El extremo $t = b$ es el que nos va a servir de nuevo como el factor que nos ayude a determinar la existencia y el número de soluciones del problema de contorno, así como su solución explícita ya que se tiene que verificar:

$$\gamma_2 = \gamma_1 y_1(b) + c_2 y_2(b).$$

Es decir, si $y_2(b) \neq 0$ tiene solución única dada por

$$y(t) = \gamma_1 y_1(t) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1 y_1(b)}{y_2(b)} y_2(t). \tag{3.6}$$

Si $y_2(b) = 0$, tenemos infinitas soluciones de la forma

$$y(t) = \gamma_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad \text{con} \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

si y solo si $\gamma_1 \neq 0$ e $y_1(b) = \gamma_2/\gamma_1$.

Si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, al estar en un problema de contorno homogéneo, la solución única dada por (3.6) coincide con la solución trivial $y = 0$ cuando $y_2(b) \neq 0$. Observamos que, como cabía esperar por el Teorema de la Alternativa, en todos los casos existe solución única si y solo si $y_2(b) \neq 0$.

Una vez obtenidas las soluciones de (3.1) a través de las expresiones (3.4) o (3.5), se determinan aproximaciones numéricas de los problemas de Cauchy (3.2) utilizando algoritmos adecuados (Euler, Runge-Kutta, Runge-Kutta-Fehlberg...). La aproximación obtenida para el problema de contorno será del mismo orden que el método numérico utilizado para resolver los problemas de Cauchy.

Antes de poner un ejemplo donde veamos el uso de este método demos un algoritmo para calcular la solución de (3.1) donde aproximemos el cálculo de las soluciones de los problemas de Cauchy (3.2) numéricamente. A la hora de programar este algoritmo tendríamos que tener cuidado con los ceros ya que no es lo mismo un cero numérico obtenido a causa de nuestra máquina, un cero de aproximación del método usado o un cero real a la hora de aproximar soluciones.

Algoritmo para el problema del Disparo Lineal con condiciones Dirichlet:

ENTRADA: a_0, a_1, b, a, b, γ_1, γ_2
SALIDA: la solución del problema de contorno asociado

Resolvemos el segundo y el tercer problema de Cauchy de (3.2)
Si y_2 evaluada en b es distinto de cero **entonces**
Hemos encontrado la solución (3.4) y la devolvemos
Paramos el programa
Si no
Si la solución de y_3 evaluada en b es γ_1 **entonces**
Tenemos infinitas soluciones de la forma (3.5)
Paramos el programa
Si no
No existe solución
Paramos el programa.
Fin si
Fin si
Fin del programa

Pongamos un ejemplo práctico de lo que acabamos de ver.

Ejemplo 3.1.2. Resuelve el siguiente problema de contorno con un método de disparo lineal

$$\begin{cases} L[y] = t^2y'' - 2ty' + 2y = 8\log(t), \quad t \in [1,2], \\ y(1) = 0, \\ y(2) = 2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Veamos primero que el problema de contorno tiene solución. Para ello estudiemos el problema de contorno homogéneo asociado

$$\begin{cases} L[y] = t^2y'' - 2ty' + 2y = 0, \quad t \in [1,2], \\ y(1) = 0, \\ y(2) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Notemos que la ecuación es de Cauchy-Euler y la solución general de $L[y] = 0$ viene dada por

$$y(t) = c_1t + c_2t^2, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de contorno homogéneas vemos que la única solución que lo cumple es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Es por esto que concluimos que el problema de contorno homogéneo (3.8) tiene como única solución la solución trivial $y \equiv 0$ y por el Teorema de la Alternativa tenemos que la solución de (3.7) existe y es única. Si resolvemos el problema de contorno vemos que la solución exacta viene dada por

$$y(t) = (\log 4 - 10)t + (4 - \log 4)t^2 + 4\log t + 6.$$

Vamos a calcular la solución numérica de este problema por el método del disparo que hemos desarrollado durante la sección. Usaremos $Matlab2021A$ y para calcular las soluciones de los problemas de Cauchy usaremos la función $Ode45$. Tomando un paso 0,01 en el intervalo $[1, 2]$, nos queda la siguiente solución

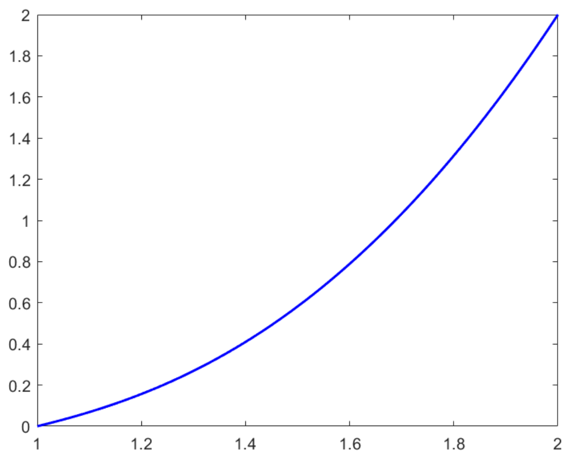

Figura 3.1: Solución aproximada del Ejemplo 3.1.2 calculada por el método del disparo lineal.

Si calculamos el error relativo entre la solución calculada por este método y la real, vemos que es del orden de 10^{-7}. Vemos que este error no viene de la máquina (en este caso Matlab) ya que esta tiene precisión del orden de 10^{-16}, sino de la función usada para aproximar la solución de los problemas de Cauchy (3.2). Usando otra función para encontrar las soluciones de los problemas de Cauchy, el error y por tanto la precisión, podría variar.

3.2. Caso general

Hemos visto qué ocurre cuando las condiciones de contorno son del tipo Dirichlet. Veamos qué pasa con condiciones de contorno separadas cualesquiera

$$\begin{cases} L[y] = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = \mathsf{b}(t), \quad t \in [a, b], \\ U_1(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1, \\ U_2(y) = \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \tag{3.9}$$

donde $a_0, b_1, \mathsf{b} \in \mathcal{C}[a, b]$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0$ y $|\beta_0| + |\beta_1| > 0$.

Tomemos y_1, y_2 soluciones de los dos primeros problemas de Cauchy de (3.2). Sin embargo, ahora consideraremos y_3 solución de la ecuación no homogénea $L[y] = \mathsf{b}(t)$ verificando condiciones iniciales diferente. En particular

$$\begin{cases} L[y] = \mathsf{b}(t), \\ y(a) = 0, \\ y'(a) = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

La solución general del problema de contorno es

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_3(t) \tag{3.11}$$

con c_1, c_2 constantes reales.

Ahora imponemos las condiciones de contorno en los extremos. En el primer extremo, $t = a$, tenemos

$$\begin{aligned} U_1(y) &= \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) \\ &= \alpha_0(c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_3(a)) + \alpha_1(c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) + y_3'(a)) \\ &= \alpha_0 c_1 + \alpha_1 c_2 = \gamma_1, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las condiciones iniciales de y_1, y_2, y_3. Para el segundo, $t = b$, obtenemos que

$$\begin{aligned} U_2(y) &= \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) \\ &= \beta_0(c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_3(b)) + \beta_1(c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b) + y_3'(b)) = \gamma_2 \end{aligned}$$

Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones matriciales $Ac = b$ donde

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b) & \beta_0 y_2(b) + \beta_1 y_2'(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 - \beta_0 y_3(b) - \beta_1 y_3'(b) \end{pmatrix}.$$

De aquí podemos decir que el problema de contorno (3.9) tiene solución única si y solo si el determinante de A es distinto de cero; es decir $\alpha_0(\beta_0 y_2(b) + \beta_1 y_2'(b)) \neq \alpha_1(\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b))$.

En el caso en el que esto no se cumple, tendremos infinitas soluciones si $rg(A) = rg(A^*)$ donde A^* denota la matriz A ampliada con las columnas del término independiente; es decir, $A^* = A|b$. Si $rg(A) \neq rg(A^*)$ no existe solución.

En ambos casos, las soluciones explícitas las encontraremos al determinar los valores de c_i y sustituirlos en la expresión (3.11).

A continuación estudiamos en detalle a modo de ejemplo un caso particular con condiciones de contorno que involucran derivadas:

$$\begin{cases} L[y] = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = \mathsf{b}(t), \quad t \in [a, b], \\ y(a) = \gamma_1, \\ y(b) + \beta y'(b) = \gamma_2, \end{cases} \tag{3.12}$$

donde β es una constante no nula. Tomaremos y_1, y_2, y_3 soluciones de los siguientes problemas de Cauchy

$$\begin{cases} L[y] = 0, \\ y(a) = 1, \\ y'(a) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} L[y] = 0, \\ y(a) = 0, \\ y'(a) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} L[y] = \mathsf{b}(t), \\ y(a) = 0, \\ y'(a) = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

que como ya hemos justificado a lo largo del capítulo son únicas, no nulas y distintas. La solución de (3.12) nos quedará de la forma:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_3(t)$$

con c_i constantes reales. Ahora imponemos las condiciones de contorno en los extremos. Al hacerlo en el primero $t = a$ tenemos que

$$\gamma_1 = y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_3(a) = c_1 + y_3(a).$$

En el segundo extremo, $t = b$, sustituyendo $c_1 = \gamma_1 - y_3(a)$ nos queda

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= y(b) + \beta y'(b)\\ &= c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_3(b) + \beta(c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b) + y_3'(b))\\ &= (\gamma_1 - y_3(a))(y_1(b) + \beta y_1'(b)) + y_3(b) + +\beta y_3'(b) + c_2(y_2(b) + \beta y_2'(b))\end{aligned}$$

Tenemos dos casos, dependiendo de si $y_2(b) + \beta y_2'(b)$ se anula o no, o lo que es lo mismo, si y_2 cumple las condiciones de contorno homogéneas del extremo $t = b$ o no. Podemos ver que esta distinción coincide con la dada por el Teorema de la Alternativa ya que si y_2 cumple las condiciones homogéneas del extremo $t = b$, como por hipótesis $L[y_2] = 0$ y $y_2(a) = 0$, tenemos una solución no nula ($y_2'(a) = 1$) del problema de contorno homogéneo; por tanto si ocurre esto no sabemos si quiera si existe solución y en el caso de hacerlo no sería única. Veamos las expresiones que nos quedan.

- Si $y_2(b) + \beta y_2'(b) \neq 0$, podemos despejar c_2 y tenemos la solución única de (3.12) dada por

$$y(t) = (\gamma_1 - y_3(a))y_1(t) + \frac{(\gamma_1 - y_3(a))(y_1(b) + \beta y_1'(b)) + y_3(b) + \beta y_3'(b)}{y_2(b) + \beta y_2'(b)} y_2(t) + y_3(t). \tag{3.14}$$

- Si $y_2(b) + \beta y_2'(b) = 0$, el problema de contorno (3.12) tendrá solución si y solo si

$$\gamma_2 = (\gamma_1 - y_3(a))(y_1(b) + \beta y_1'(b)) + y_3(b) + \beta y_3'(b) \tag{3.15}$$

  y, en caso contrario será 1-compatible y sus soluciones vendrán dada por

$$y(t) = (\gamma_1 - y_3(a))y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_3(t) \tag{3.16}$$

  con c_2 una constante real.

Vamos a resolver el mismo ejemplo, pero numéricamente, el algoritmo va a ser análogo al de las condiciones Dirichlet solo que ahora necesitamos calcular tres problemas de Cauchy. La diferencia principal a la hora de programar será que también usaremos las derivadas de las soluciones de los problemas de Cauchy (3.13) que igualmente nos la da la función *Ode*45.

Algoritmo para el problema del Disparo Lineal (3.12):

ENTRADA: a_0, a_1, b, a, b, γ_1, γ_2, β
SALIDA: la solución del problema de contorno asociado

Resolvemos los problema de Cauchy de (3.13) y sus derivadas
Si $y_2 + \beta y_2'$ evaluado en b es distinto de cero **entonces**
Hemos encontrado la solución (3.14) y la devolvemos
Paramos el programa
Si no
Si se cumple la igualdad (3.15) **entonces**
Tenemos infinitas soluciones de la forma (3.16)
Paramos el programa
Si no
No existe solución
Paramos el programa.
Fin si
Fin si
Fin del programa

Vemos que el problema de contorno (2.27) del Ejemplo 2.3.8 es de la misma forma que el problema de contorno (3.12) que acabamos de estudiar en un caso más general. Vamos a terminar resolviendo el mismo problema de contorno pero con este nuevo método.

Ejemplo 3.2.1. Resuelve el siguiente problema de contorno con el método del Disparo Lineal (3.12)

$$\begin{cases} y'' = t - 2, & t \in [0, 3], \\ y(0) = 0, \\ y(3) - 3y'(3) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Sabemos por el Ejemplo 2.3.8 que vamos a tener infinitas soluciones. De hecho, si calculamos las soluciones de los problemas de Cauchy de (3.13) donde $L[y] = y''$, $\mathsf{b}(t) = t - 2$ y $\beta = -3$ tenemos que

$$y_1 = 1, \quad y_2 = t, \quad y_3 = \frac{t^2(t-6)}{6}.$$

Por tanto, las soluciones de (3.17) vendrán dada por (3.16), es decir

$$y(t) = c_2 t + \frac{t^2(t-6)}{6} \quad \text{con} \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ahora calculamos diversas soluciones por el algoritmo que acabamos de estudiar utilizando de nuevo *Ode*45 para aproximar las soluciones de los problemas de Cauchy (3.13) y sus derivadas. Al ser infinitas damos las de $c_2 = -1$, $c_2 = 0$ y $c_2 = 1$. Se pueden ver en la figura siguiente en los colores verde, azul y rojo respectivamente:

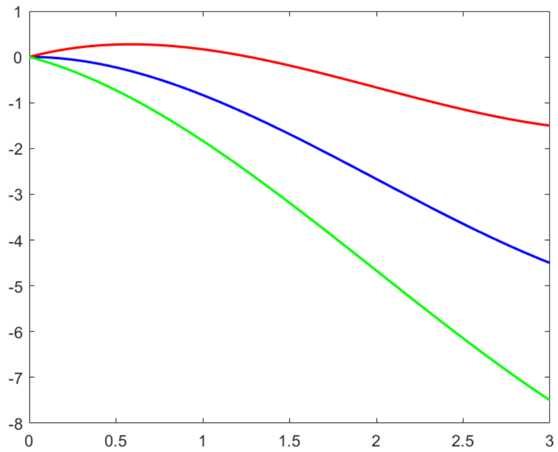

Figura 3.2: Solución aproximada del Ejemplo 3.2.1 para $c_2 \in \{-1, 0, 1\}$ calculada por el método del disparo.

Si calculamos el error relativo entre la solución exacta y la solución aproximada nos queda en cada uno de los casos un error del orden de 10^{-15}, es decir, una muy buena aproximación. Como podemos observar este error es mucho menor al del Ejemplo 3.1.2 aún usando la misma función para resolver los problemas de Cauchy.

Bibliografía

[1] W.E. Boyce, R.C. DiPrima. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa, New York, 1996.

[2] R.L. Burden, D.J. Faires, A.M. Burden. *Análisis numérico (10ª edición)*. Cengage Learning, Mexico, 2017.

[3] J.A. Facenda, F.J. Freniche. *Integración de funciones de varias variables*. Ediciones Pirámide, Madrid, 2002.

[4] P-F. Hsieh, Y. Sibuya. *Basic theory of ordinary differential equations*. Springer, New York, 1999.

[5] K. Hoffman, R. Kunze. *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana S. A., Naucalpan de Juárez, 1973.

[6] E.L. Ince. *Ordinary differential equations*. Longmans, London, 1927.

[7] H.B. Keller. *Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems*. SIAM, Philadelphia, 1976.

[8] F. Marcellán, L. Casasús, A. Zarzo. *Ecuaciones diferenciales: problemas lineales y aplicaciones*. McGraw-Hill, Madrid, 1990.

[9] T. Myint-U. *Ordinary diferential equations*. North-Holland, New York, 1978.

[10] R.K. Nagle, E. B. Saff, A. D. Snider. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems (6^{th} edition)*. Addison-Wesley, Boston, 2012.

[11] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo. *Ecuaciones y sistemas diferenciales*. McGraw-Hill, Madrid, 1995.

[12] R. Rodriguez. *Ecuaciones diferenciales y temas afines*. Vicens-Vives, Barcelona, 1972.

[13] H. Sagan. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physic*. John Wiley & Sons, New York, 1963.

[14] D.G. Zill *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (9ª edición)*. International Thomson Editores, México, 2009.