



**Facultad
de
Ciencias**

FUNCIONES DE MORSE
(Morse Functions)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Miguel Cañal García

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Junio-2023

Resumen

En este trabajo, se presenta la estrecha relación que existe entre algunas funciones diferenciables y la estructura de la variedad diferenciable en la que se definen. Dichas funciones diferenciables serán definidas bajo el nombre de funciones de Morse, en honor a Marston Morse. En concreto, se centrará la atención en los puntos críticos y sus entornos, siendo el lema de Morse el resultado más destacado en este ámbito. Se profundizará sobre la existencia de funciones de Morse, desprendiéndose en el camino grandes resultados como el teorema de Sard y conceptos clave como la cercanía entre funciones diferenciables o los conjuntos de medida cero. Seguidamente, se introducirán las nociones de campo vectorial gradiente, curva integral y sección de una variedad diferenciable; las cuales son esenciales para presentar dos teoremas denominados fundamentales por su capacidad para relacionar las distintas secciones de una variedad diferenciable. Se culminará con el corolario de descomposición, el cual afirma que cualquier variedad diferenciable es difeomorfa a un complejo de asas.

Palabras Clave: Variedad diferenciable, Teoría de Morse, Función de Morse, Complejo de asas.

Abstract

This work is devoted to investigate the relationship between some differentiable functions and the structure of the differentiable manifold where they are defined. Those differentiable functions will be defined as Morse functions, in honor of Marston Morse. One of the main subjects of study are going to be critical points and their neighbourhoods, where Morse lemma is undoubtedly the most important result. Existence of Morse functions will be analyzed on detail, reaching on the path some major results as Sard theorem and key concepts as the closeness between differentiable functions and sets of measure zero. Next, it will be introduced the notions of gradient vector field, integral curve and section of a differentiable manifold; which are essential to present two fundamental theoremas, so called because they relate any two sections of a differentiable manifold. It will culminate with the corollary of decomposition, which claim that any differentiable manifold is diffeomorphic to a handlebody.

Keywords: Differentiable manifold, Morse theory, Morse function, Handlebody.

Índice general

Introducción	1
Contexto histórico	1
Contenido	1
Convenios y notación	2
1 Definiciones Básicas	3
1.1 Geometría diferencial de una variedad	3
1.1.1 Variedades diferenciables	3
1.1.2 Aplicaciones y funciones diferenciables	5
1.1.3 Vectores y espacios tangentes	5
1.1.4 Campos vectoriales y 1-formas diferenciales	8
1.1.5 Hessiana y puntos críticos	10
1.2 Topología de una variedad	12
2 Funciones de Morse	15
2.1 Funciones de Morse	15
2.2 Lema de Morse	17
2.4 Teorema de Sard	26
2.6 Existencia de funciones de Morse	31
3 Estructura de una variedad a través de funciones de Morse	37
3.1 Campo vectorial gradiente	37
3.2 Curvas integrales y secciones de una variedad	40
3.3 Teoremas fundamentales	43
Bibliografía	46

Introducción

Contexto histórico

Su gran influencia en el mundo de las matemáticas y el contenido de este trabajo, hacen imprescindible unas breves palabras hacia a Marston Morse y sus aportaciones. Tomaremos como referencia el artículo de R. Bott [4]. Marston Morse nació en 1892, sin embargo no fue hasta 1925 que publicó su artículo *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*¹ y empezó a desarrollar lo que hoy en día conocemos como teoría de Morse; hasta entonces, ya había presentado grandes resultados relativos a geodésicas. Lo que en el presente conocemos como funciones de Morse, eran denotadas por él mismo como funciones no degeneradas, a partir de las cuales desarrolla toda su teoría. La comunidad matemática continúa fascinada con las desigualdades planteadas por Morse en su trabajo, actualmente conocidas como desigualdades de Morse, y que relacionan los números de Betti con la cantidad de puntos críticos y sus índices. Gran parte de los resultados geométricos necesarios para demostrarlas están incluidos² en este escrito, aunque se ha preferido centrar la atención en las funciones de Morse. Las personas familiarizadas con la teoría de Morse notarán que la que aquí se presenta es una versión reducida a espacios de dimensión finita, y es que la fuerza motriz de Morse a partir de [17] fue ampliar todo este conocimiento a casos infinito-dimensionales, tarea que realizó de manera realmente fructífera.

Contenido

A continuación, un breve resumen de cada uno de los capítulos que componen este trabajo.

- **Capítulo 1:** En primer lugar, veremos algunas definiciones básicas e indispensables para el posterior contenido. Empezando por concretar qué es una variedad diferenciable, esta es la primera gran bifurcación con respecto a la mayor parte de la bibliografía proporcionada, en este trabajo manejaremos variedades diferenciables abstractas, en las cuales es característica la ausencia de restricción sobre la procedencia de los puntos de la misma. Los siguientes conceptos de geometría diferencial, serán definidos con un enfoque principalmente intrínseco, y acompañados con algunas observaciones para observar su comportamiento en las distintas

¹Véase [17].

²Los teoremas fundamentales juegan un papel esencial, véase la sección 3.3. La formulación de los teoremas fundamentales aquí expuesta, en categoría de difeomorfismos, no se presenta hasta los años 60 de mano de Smale, tal y como indica R. Bott [4] pág 924.

cartas. Por último, se hará una breve introducción de las herramientas topológicas necesarias para el estudio de funciones de Morse.

- **Capítulo 2:** En este capítulo analizaremos extensamente las funciones de Morse, sus puntos críticos y su existencia. Empezaremos con una breve definición de qué es una función de Morse y algunos ejemplos. Seguidamente, enunciaremos y demostraremos varios lemas previos y necesarios al lema de Morse, entre los cuales destaca el lema de Hadamard. A continuación, veremos qué son los conjuntos de medida cero en una variedad diferenciable, siendo estos el eje central del teorema de Sard, el cual se demostrará con todo lujo de detalle. Para culminar la sección, estudiaremos en profundidad la existencia de funciones de Morse.
- **Capítulo 3:** Llegando al final de este trabajo, se presentarán las nociones de campo vectorial gradiente, curva integral y sección de una variedad diferenciable. La divergencia más grande con respecto a la literatura tradicional se encuentra en la definición de campo vectorial gradiente, evitando añadir más complejidad de la necesaria. Todo lo visto hasta ahora convergerá en dos teoremas que relacionan las distintas secciones de una variedad diferenciable, para juntos formar el corolario de descomposición, que asegura que cualquier variedad diferenciable compacta es difeomorfa a un complejo de asas.

Convenios y notación

Es posible que el lector esté acostumbrado a ciertas convenciones y notación, a continuación, exponemos algunos de los más relevantes en el escrito.

- Durante todo el escrito se asume que trabajamos con espacios topológicos conexos³, Hausdorff y que verifican el segundo axioma de numerabilidad.
- Cuando se hable de aplicación o función diferenciable, siempre será de clase C^∞ .
- Siempre que no se diga lo contrario, variedad diferenciable se referirá a variedad diferenciable sin borde.
- A no ser que se diga lo contrario, la estructura de variedad diferenciable de un abierto será la heredada.
- Nos referimos a $\mathbb{R}^n$ como el espacio euclídeo real de dimensión n , siendo esta dimensión arbitraria en caso de no especificarse lo contrario.
- Por último, cabe destacar el desuso del criterio de Einstein⁴, esto es debido a la inexistencia de largas y recurrentes expresiones que lo requieran.

³No es absolutamente necesario disponer de la conectividad para definir correctamente una variedad diferenciable, sin embargo, habría que ser mucho más cuidadoso en todas las definiciones ligadas a la misma. Lo mismo ocurre con la condición de ser Hausdorff y cumplir el segundo axioma de numerabilidad. La razón para tales imposiciones se debe a su uso en multitud de demostraciones.

⁴Véase [10] pág 18.

Capítulo 1

Definiciones Básicas

A continuación presentamos algunas definiciones básicas; las acompañarán algunas observaciones que el autor ha considerado necesarias para la comprensión de este y posteriores capítulos.

1.1 Geometría diferencial de una variedad

En primer lugar y como es evidente, se dará una definición formal de variedad diferenciable y aplicación diferenciable, siendo conveniente advertir al lector sobre los muchos cambios¹ que sufren según la bibliografía consultada, en nuestro caso, el punto de partida son las variedades diferenciables abstractas. Seguidamente precisaremos algunos conceptos esenciales ligados a estas, para los cuales se ha decidido tomar un enfoque principalmente intrínseco. Las referencias más utilizadas serán los libros de J.M. Lee [10] y F.W. Warner [22] aunque, hacia el final del capítulo haremos referencia a otros como el de J.W. Milnor [14].

1.1.1 Variedades diferenciables

Definición 1.1.1. (*Variedad diferenciable*) Dado M un espacio topológico Hausdorff verificando el segundo axioma de numerabilidad.

- (1) Sea U un abierto de M , se llama **carta** a cualquier aplicación $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, de manera que, $x(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y x es un homeomorfismo de U en su imagen. A U se le llama **dominio de carta** y al par (U, x) **entorno coordinado**.
- (2) Dos entornos coordinados (U, x) y (V, y) se dicen **compatibles** si los subconjuntos $x(U \cap V)$ e $y(U \cap V)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y la aplicación

$$x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n,$$

es un difeomorfismo.

¹El famoso teorema de inmersión de Whitney es el encargado de unificar la gran mayoría de estos cambios, véase [10] Theorem 6.15.

- (3) Un conjunto de entornos coordenados $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ se llama **atlas** sobre M , si cualesquiera dos cartas coordenadas de $\mathcal{A}$ son compatibles, y además, $\cup_{i \in I} U_i = M$
- (4) Dos atlas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, son **atlas equivalentes** si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es también un atlas sobre M .
- (5) Un atlas $\mathcal{A}$ se dice **atlas maximal** si no puede incluirse en ningún otro.
- (6) Se dice que M tiene estructura de variedad diferenciable, si se le puede² dotar de un atlas maximal $\mathcal{A}$. De esta manera, se denomina **variedad diferenciable** al par $(M, \mathcal{A})$, y n a su **dimensión**.

Observación 1.1.1. Tanto en esta definición como en el resto del escrito, se hablará de funciones diferenciables y difeomorfismos para referirse, a funciones diferenciables y difeomorfismos de clase C^∞ .

Observación 1.1.2. Si imponemos el conjunto $\mathbb{H}^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_n \leq 0\}$ en vez de $\mathbb{R}^n$ como el codominio de las cartas de una variedad diferenciable, obtenemos las **variedades diferenciables con borde**. El borde de dicha variedad ∂M corresponde al conjunto de puntos de $\partial \mathbb{H}^n$ a través de cualquier carta, siendo sencillo comprobar³ que, ∂M tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $n - 1$. Llamamos interior⁴ de una variedad diferenciable con borde a $M \setminus \partial M$, que tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión n .

Siempre que no se especifique, se hablará de variedades diferenciables sin borde, aunque, muchas de las construcciones que hacemos a continuación pueden ser ampliadas a variedades diferenciables con borde.

Observación 1.1.3. Dada una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$, la definición de atlas maximal nos invita a pensar en él, como el conjunto de todos los entornos coordenados compatibles entre sí. Es decir⁵, cualquier entorno coordenado (V, y) compatible con todos los de $\mathcal{A}$, pertenece a $\mathcal{A}$. Este resultado es inmediato, aplicando los apartados (3), (4) y (5) de la definición 1.1.1. De esta interpretación se desprende que, cualquier atlas de M esta contenido en un único atlas maximal.

Observación 1.1.4. Dada una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$, cualquier abierto U puede dotarse con estructura de variedad diferenciable, con la topología heredada y el atlas maximal

$$\mathcal{A}' = \{((U \cap U_i), x_i|_{(U \cap U_i)}) : (U_i, x_i) \in \mathcal{A}\}. \quad (1.1)$$

Al hablar de $(U, \mathcal{A}')$ diremos que tiene la **estructura de variedad diferenciable heredada**⁶ de $(M, \mathcal{A})$, y en caso de no especificar lo contrario, se supondrá que cualquier abierto está equipado con dicha estructura.

²Esta tarea no siempre es posible, véase [9]. En algunas ocasiones, al mismo espacio topológico se le puede dotar de varias estructuras de variedad diferenciable, véase [12].

³Véase [10] Proposition 1.38.

⁴También denotado por M°

⁵Véase [10] pág 13.

⁶Véase [22] 1.5 Examples, (e).

Observación 1.1.5. Consideremos una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ y un entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ en p , entonces

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x(q) = (x_1(q), x_2(q), \dots, x_n(q)).$$

Denotamos **sistema de coordenadas local**⁷ a la n -tupla de funciones $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, siendo evidente que cada una de ellas es continua en U . En el caso de los espacios euclídeos, es posible definir una única carta global, la identidad, para la que reservamos la letra t . Al entorno coordenado $(\mathbb{R}, t)$ lo llamaremos **canónico**⁸.

1.1.2 Aplicaciones y funciones diferenciables

Definición 1.1.2. (Aplicación diferenciable) Sean $(M_1, \mathcal{A}_1)$ y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ dos variedades diferenciables de dimensiones n y m respectivamente. Una aplicación $f : M_1 \rightarrow M_2$ se dice diferenciable en un punto $p \in M_1$, si para todo entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}_1$ en p , y todo entorno coordenado (V, y) de $\mathcal{A}_2$ en $f(p)$, resulta que la aplicación

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^m,$$

es diferenciable. De esta manera, f será diferenciable en M_1 si lo es para todo $p \in M_1$. Al conjunto de aplicaciones diferenciables de M_1 en M_2 se le denota $C^\infty(M_1, M_2)$.

Observación 1.1.6. Con la misma notación que en la definición 1.1.2, el conjunto $C^\infty(M_1, M_2)$ tiene estructura de anillo para la suma y el producto de funciones⁹.

Observación 1.1.7. Sea $(M_1, \mathcal{A}_1)$ una variedad diferenciable. Se reservará la palabra función para designar a las aplicaciones $f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y, al conjunto de funciones diferenciables se le denotará por $C^\infty(M_1)$.

Definición 1.1.3. (Difeomorfismo) Sean $(M_1, \mathcal{A}_1)$ y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ dos variedades diferenciables y $f : M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación entre ambas. Diremos que f es un difeomorfismo, si es una aplicación diferenciable, biyectiva y de inversa también diferenciable.

Observación 1.1.8. En inmediato¹⁰ comprobar que, cualquier carta del atlas maximal de una variedad diferenciable, es un difeomorfismo sobre su imagen.

1.1.3 Vectores y espacios tangentes

Definición 1.1.4. (Derivadas parciales) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable, $p \in M$ y (U, x) un entorno coordenado de $\mathcal{A}$ en p . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se llama derivada parcial i -ésima al operador

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U),$$

⁷Véase [10] pág 15.

⁸Véase [22] 1.5 Examples, (a).

⁹Véase [10] Exercise 2.1.

¹⁰Véase [10] Example 2.14, (b).

que queda definido por

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f),$$

siendo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : C^\infty(U) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f) &= \left. \frac{d(f \circ x^{-1})}{dt_i} \right|_{x(p)}. \end{aligned}$$

Definición 1.1.5. (Vector tangente) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable y $p \in M$. Denotamos $\mathcal{D}$ al conjunto de funciones diferenciables en un entorno de p , y definamos la siguiente clase de equivalencia para cualesquiera $f, g \in \mathcal{D}$

$$f \sim g \iff \exists W : f|_W = g|_W,$$

donde W es un entorno de p . Cada clase de equivalencia se conoce como **germen**. Un vector tangente en p es una derivación lineal de $\mathcal{D}/\sim$ en $\mathbb{R}$, es decir, cualquier operador que cumpla

$$(1) \ v([f + \lambda g]) = v([f]) + \lambda v([g]).$$

$$(2) \ v([fg]) = f(p)v([g]) + g(p)v([f]).$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{D}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observación 1.1.9. El conjunto de gérmenes $\mathcal{D}/\sim$ forma un álgebra sobre $\mathbb{R}$ para la suma y producto de funciones, siendo esta una de las muchas ventajas que $\mathcal{D}$ no posee, y por lo cual se ha decidido hacer uso de ellos para la definición de vector tangente¹¹.

Cabe destacar una segunda forma intrínseca de definir los vectores tangentes, la cual será útil a lo largo del escrito¹². Recuperando las notación de la definición 1.1.5 y dado $\epsilon > 0$, cada vector tangente en p está definido por una curva $\alpha \in C^\infty(I, M)$ con $\alpha(0) = p$ e $I = (-\epsilon, \epsilon)$, en concreto, por un operador

$$\begin{aligned} \alpha'(0) : \mathcal{D}/\sim &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha'(0)([f]) &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_0, \end{aligned}$$

siendo sencillo comprobar que está bien definido y no depende del representante del germen. Esta definición tiene como principal ventaja, el ser geoméricamente mas intuitiva, sin embargo, es.

Por último, a menudo los vectores tangentes actuarán sobre $f \in \mathcal{D}$ refiriéndose a $[f] \in \mathcal{D}/\sim$, con el fin de aliviar la notación.

¹¹Para una discusión más detallada sobre el uso de los gérmenes, véase [10] pág 71 y [22] pág 12.

¹²Sobre la equivalencia de las definiciones, véase [10] Proposition 3.23.

Observación 1.1.10. *Partiendo de las mismas hipótesis de la definición 1.1.5 y dado un entorno coordinado (U, x) de $\mathcal{A}$ en p . Cada vector tangente¹³ $\alpha'(0)$, admite una definición local como*

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_0,$$

siendo $x_i \circ \alpha = \alpha_i$. Haciendo uso de la observación 1.1.9, un cálculo directo muestra la equivalencia entre esta y la definición 1.1.5 en U .

Definición 1.1.6. (Espacio tangente) Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable y $p \in M$. El espacio tangente $T_p M$, se define como el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de vectores tangentes en p .

Observación 1.1.11. *Partiendo de la misma notación que en la definición 1.1.5. Definimos $\mathcal{K}$ como el conjunto de curvas $\alpha \in C^\infty(I, M)$ tales que $\alpha(0) = p$. Ahora definimos la siguiente relación de equivalencia*

$$\alpha \sim \beta \iff \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_0 = \frac{d(f \circ \beta)}{dt} \Big|_0$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ y $f \in \mathcal{D}$. Entonces, y de manera alternativa, el espacio tangente $T_p M$ se define como el conjunto de vectores tangentes generados por los representantes de $\mathcal{K}/\sim$. Como hemos dicho en la observación 1.1.9, no es fácil comprobar que esta definición es equivalente¹⁴ a 1.1.6.

Para terminar y al igual que con los gérmenes de la definición 1.1.5, se usará $\alpha'(0) \in T_p M$ para referirse a la clase de equivalencia $[\alpha]'(0) \in T_p M$ y así, aliviar la notación.

Observación 1.1.12. *Haciendo uso de las premisas de la definición 1.1.6. Una definición local y un tanto más algebraica de $T_p M$, es el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial real generado por la base*

$$B = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\},$$

a la cual denotaremos **base canónica** de (U, x) en $T_p M$. Probar que la definición 1.1.5 y esta son equivalentes¹⁵, no es un trabajo trivial.

Definición 1.1.7. (La diferencial) Sean $(M_1, \mathcal{A}_1)$ y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ dos variedades diferenciables y $p \in M_1$. La diferencial en p de cualquier aplicación $f \in C^\infty(M_1, M_2)$, se define como la aplicación lineal¹⁶

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ df_p(\alpha'(0)) &= (f \circ \alpha)'(0). \end{aligned}$$

¹³No es necesario restringir los elementos de $\mathcal{D}$ a únicamente las funciones diferenciables en un entorno que contenga a U , esto se debe a que siempre es posible escoger un representante de $\mathcal{D}/\sim$ que cumpla dicha condición, véase [22] pág 11.

¹⁴Para una idea sobre la demostración véase [10] pág 72.

¹⁵Véase [10] Proposition 3.15.

¹⁶Véase [10] Proposition 3.6 para estudiar esta y otras propiedades de la diferencial.

Observación 1.1.13. Al igual que con los conceptos anteriores, existe una definición local de la diferencial, con los mismos supuestos de la definición 1.1.7 y suponiendo que las dimensiones de las variedades diferenciables son n y m respectivamente, tomemos un entorno coordinado (U, x) de $\mathcal{A}_1$ en p y otro (V, y) de $\mathcal{A}_2$ en $f(p)$. Sea $v \in T_p M$, debido a la observación 1.1.12, éste puede definirse localmente como

$$v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p v_i,$$

con $v_i \in \mathbb{R}$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, es un mero ejercicio de cálculo observar que en U y V , la diferencial de f en p es

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ df_p(v) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_p v_i, \end{aligned}$$

donde $f_j = y_j \circ f$. Ahora, un concepto estrechamente relacionado con la diferencial de manera local es la **jacobiana**, en los entornos coordinados (U, x) y (V, y) , la definimos como

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : C^\infty(M_1, M_2) &\rightarrow C^\infty(M_1, M_2)^{mn} \\ \mathcal{J}(f) &= \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n}, \end{aligned}$$

que en caso de tomar como bases de $T_p M$ y $T_{f(p)} N$ las canónicas, se verifica que

$$\mathcal{J}(f)|_p v = df_p(v).$$

Por último, en el caso particular $M_2 = \mathbb{R}$, la diferencial queda equivalentemente¹⁷ definida como

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ df_p(v) &= v(f). \end{aligned}$$

1.1.4 Campos vectoriales y 1-formas diferenciales

Definición 1.1.8. (Campo vectorial) Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable. Al conjunto $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ lo denominamos **fibrado tangente de la variedad** y de modo natural definimos la proyección $\pi : TM \rightarrow M$ que hace corresponder a cada vector tangente, el punto al que es tangente. Se define una **sección del fibrado tangente** como cualquier aplicación $X : M \rightarrow TM$ que verifica $\pi \circ X = Id_M$. Si la aplicación X es diferenciable¹⁸, la llamaremos **campo vectorial**, y al conjunto de estos, lo denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$

¹⁷Véanse [10] pág 284 y [22] pág 16.

¹⁸Véase [10] Proposition 3.18 para dotar a TM de estructura de variedad diferenciable de dimensión el doble de $(M, \mathcal{A})$.

Observación 1.1.14. Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n y (U, x) un entorno coordenado de $\mathcal{A}$. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se puede definir localmente en U como

$$X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} X_i,$$

donde $X_i \in C^\infty(U)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Basta usar la observación 1.1.12 para demostrar que la definición 1.1.9 y esta son equivalentes.

La siguiente, es una operación recurrente entre campos vectoriales.

Definición 1.1.9. (Corchete de Lie) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos el campo vectorial $[X, Y]$ que llamaremos corchete de Lie de X e Y por

$$[X, Y]|_p(f) = X|_p(Y(f)) - Y|_p(X(f)),$$

donde $p \in M$ y $f \in C^\infty(M)$.

Observación 1.1.15. Con la misma notación de la definición 1.1.9, es común ver campos vectoriales actuando sobre funciones diferenciables, dicha operación se caracteriza por

$$X(f)|_p = X|_p(f).$$

Sabiendo esto, es sencillo comprobar que el corchete de Lie de cualesquiera dos campos vectoriales, es efectivamente, un campo vectorial.

Pasamos a presentar las 1-formas diferenciales, un concepto estrechamente ligado a los campos vectoriales.

Definición 1.1.10. (1-forma diferencial) Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable, denotamos **espacio cotangente** de la variedad en el punto p a T_p^*M , el espacio vectorial dual de T_pM . Los elementos de T_p^*M se denominan **covectores**, y al conjunto $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M$ lo llamamos **fibrado cotangente de la variedad**. Si definimos la proyección $\pi : T^*M \rightarrow M$ que hace corresponder a cada covector, el punto en el que se aplica, entonces, se define una **sección del fibrado cotangente** como cualquier aplicación $\omega : M \rightarrow T^*M$ que verifica $\pi \circ \omega = Id_M$. Si la aplicación ω es diferenciable¹⁹, la llamaremos **1-forma diferencial**, y al conjunto de estos, lo denotaremos por $\Lambda_1(M)$

Observación 1.1.16. Dada una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ de dimensión n , $p \in M$ y un entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ en p . En primer lugar observamos que $\{dx_{i_p}\}_{i=1}^n$ es una base dual²⁰ de T_p^*M y por tanto cualquier covector $z \in T_p^*M$ puede escribirse en U como

$$z = \sum_{i=1}^n dx_{i_p} z_i, \tag{1.2}$$

¹⁹Véase [10] Proposition 11.9 para dotar a T^*M de estructura de variedad diferenciable de dimensión el doble de $(M, \mathcal{A})$.

²⁰Nótese que, por la observación 1.1.12 dicha construcción tiene sentido.

con $z_i \in \mathbb{R}$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$. Ahora, sea $f \in C^\infty(M)$, el estudio de las 1-formas diferenciales localmente, se basa en el operador

$$df : M \rightarrow T^*M$$

$$df(q) = df_q,$$

siendo sencillo²¹, por la observación 1.1.13 y teniendo en cuenta que los campos vectoriales son aplicaciones diferenciables, comprobar que $df \in \Lambda_1(M)$. Como consecuencia directa de este hecho y recordando (1.2), cualquier 1-forma diferencial actúa en U como

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \omega_i,$$

donde $\omega_i \in C^\infty(U)$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$.

Observación 1.1.17. Con las mismas premisas que en las observaciones 1.1.16 y 1.1.14, los conjuntos $\mathfrak{X}(M)$ y $\Lambda_1(M)$ pueden definirse localmente como $C^\infty(U)$ -espacios vectoriales de bases

$$B_1 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \quad y \quad B_2 = \{dx_1, \dots, dx_n\}$$

respectivamente. Denotaremos a dichas bases las canónicas del entorno coordenado (U, x) . A diferencia de la observación 1.1.12 y haciendo uso de la misma, es un ejercicio rutinario demostrar la equivalencia de esta definición y las dadas anteriormente.

1.1.5 Hessiana y puntos críticos

Definición 1.1.11. (Operador hessiano) Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n . Para cualquier $p \in M$ y (U, x) entorno coordenado de $\mathcal{A}$ en p . Dada cualquier función $f \in C^\infty(M)$.

- (1) El punto p se dice **punto crítico** de f , si df_p no es sobreyectiva, o lo que es equivalente, la 1-forma diferencial df es nula en p , en caso de no ser un punto crítico se dice **punto regular**. $q \in \mathbb{R}$ se dice **valor crítico** si existe $r \in M$ punto crítico con $f(r) = q$, cualquier q que no es valor crítico se dice **valor regular**.
- (2) Suponiendo que p es un punto crítico de f . Definimos el **operador hessiano** como la siguiente aplicación bilineal y simétrica

$$d^2 f_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d^2 f_p(v, w) = V(W(f))|_p,$$

donde V y W representan extensiones de los vectores tangentes a campos vectoriales, en los que $V|_p = v$ y $W|_p = w$.

²¹Véase [10] Proposition 11.18.

(3) Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de subespacios de $T_p M$ en los cuales $d^2 f_p$ es definida negativa. Definimos el **índice** de $d^2 f_p$ en p como

$$\max\{\dim(K) : K \in \mathcal{G}\} .$$

(4) Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de $v \in T_p M$, para los que $d^2 f_p(v, w) = 0$ para cualquier $w \in T_p M$. Se define la **nulidad** de $d^2 f_p$ en p como la dimensión de $\mathcal{W}$.

(5) Suponiendo que el punto p es un punto crítico de f , diremos que además es **no degenerado**, si la nulidad de $d^2 f_p$ en p es 0.

Observación 1.1.18. Normalmente denotaremos al índice y la nulidad de $d^2 f_p$ en p , simplemente por el índice y la nulidad de f en p .

Observación 1.1.19. Con las mismas premisas de la definición 1.1.11, demostraremos que la definición dada en (2) es coherente consigo misma. Es decir, que $d^2 f_p$ está bien definida y es simétrica, empecemos notando que

$$V(W(f))|_p - W(V(f))|_p + [V, W]|_p(f) = 0 ,$$

donde $[V, W]$ es el corchete de Lie de V y W . Ahora, al ser p un punto crítico de f se verifica (1), y en consecuencia $df_p([V, W]|_p) = [V, W]|_p(f) = 0$, lo que implica

$$V(W(f))|_p = W(V(f))|_p ,$$

dejando en evidencia que $d^2 f_p$ es simétrica y lo que es más importante, no depende de la extensión escogida para los vectores tangentes, y por tanto está bien definida. Si ahora tenemos en cuenta la observación 1.1.12

$$v = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p v_i \quad y \quad w = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p w_i$$

y por ejemplo, tomando las extensiones

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} V_i \quad y \quad W = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} W_i$$

donde para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, W_i denota la función constantemente w_i , al igual que V_i denota la función constantemente v_i . Se tiene que

$$d^2 f_p(v, w) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_p .$$

De este modo, definimos la **hessiana** en el entorno coordenado (U, x) como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M)^{n^2} \\ \mathcal{H}(f) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} . \end{aligned}$$

Tomando como base de $T_p M$ la canónica, se verifica que

$$w \mathcal{H}(f)|_p v = d^2 f_p(v, w).$$

Nótese que para definir correctamente $d^2 f_p$, hemos hecho uso de la condición de p como punto crítico de f , es por eso, que la hessiana solo está definida en estos²².

Observación 1.1.20. Con las mismas hipótesis de la definición 1.1.11 y, junto a la observación 1.1.13, es un mero ejercicio de cálculo demostrar que ser punto crítico de f es equivalente a

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p = \dots = \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p = 0, \quad (1.3)$$

en el entorno coordenado (U, x) . A continuación, mostraremos las definiciones locales de índice, nulidad y no degeneración; probar que son equivalentes a las dadas es inmediato si elegimos una base adecuada de $T_p M$ para expresar $d^2 f_p$. En primer lugar, en el entorno coordenado (U, x) , el índice de f es equivalente a la cantidad de autovalores negativos de $\mathcal{H}(f)|_p$ y la nulidad de f es equivalente a la cantidad de autovalores nulos de la misma matriz. Por último, en el mismo entorno coordenado, f es no degenerada si y solo si la matriz $\mathcal{H}(f)|_p$ es no singular.

Observación 1.1.21. Sean $(M_1, \mathcal{A}_1)$ y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ dos variedades diferenciables de dimensiones n y m respectivamente. Existe la posibilidad de extender el concepto de punto crítico a cualquier aplicación $f \in C^\infty(M_1, M_2)$. Esto nos será de gran utilidad en futuras secciones, en particular para el teorema de Sard²³. De manera similar a (1), diremos que un punto $p \in M$ es un punto crítico de f , si df_p no es sobreyectiva. Ahora, existe un caso local de especial interés²⁴, si $m = n$, entonces

$$p \text{ es punto crítico de } f \iff \det(\mathcal{J}(f)) = 0,$$

donde la jacobiana se ha tomado con respecto a dos entornos coordenados cualesquiera (U, x) de $\mathcal{A}_1$ en p y (V, y) de $\mathcal{A}_2$ en $f(p)$. Los términos punto regular, valor regular y valor crítico, se usan de manera análoga a (1).

Para finalizar, el conjunto de puntos críticos es cerrado, esto se debe a que la función

$$\begin{aligned} h : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ h(p) &= \det(J(f)|_p (J(f)|_p)^t), \end{aligned}$$

es continua, independientemente de los entornos coordenados con los que se construya la jacobiana, y los ceros de la misma son los puntos críticos de f .

1.2 Topología de una variedad

Esta sección es una breve introducción a algunas de las típicas herramientas topológicas, para el estudio de las funciones de Morse. Seguiremos esencialmente el libro de Y. Matsumoto [11].

²²Véanse [14] pág 4 y [11] pág 42.

²³Véase la sección 2.4.

²⁴Véase [11] pág 48.

Definición 1.2.1. (*Adhesión de una λ -asa*²⁵) Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable con borde de dimensión n . Denotamos por disco de dimensión $k \in \mathbb{N}$ y radio $r \in \mathbb{R}$ al subespacio topológico de $\mathbb{R}^k$

$$D_r^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq r\},$$

y λ -asa, con $\lambda \leq n$ al subespacio topológico de $\mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$

$$e^\lambda = D_1^\lambda \times D_1^{n-\lambda}.$$

Llamamos λ al **índice** de la asa. La acción de adherir una λ -asa a $(M, \mathcal{A})$ consiste en definir una aplicación diferenciable

$$\varphi : \partial D_1^\lambda \times D_1^{n-\lambda} \rightarrow \partial M.$$

e identificar, en la unión disjunta $M \cup e^\lambda$, los puntos de $\partial D_1^\lambda \times D_1^{n-\lambda}$ con los de su imagen a través de h . A la variedad diferenciable con borde resultante de esta acción la denotamos por $M \cup_\varphi e^\lambda$.

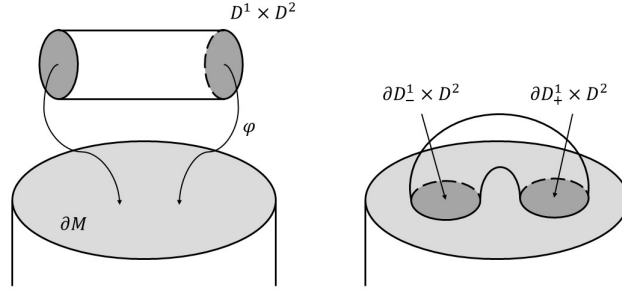


Figura 1.1: Adhesión de una 1-Célula²⁶.

Observación 1.2.1. Son varias las observaciones que debemos hacer de la definición 1.2.1, con la misma notación:

- (1) Para aliviar la notación, en caso de referirnos a un disco de radio 1 y dimensión λ , lo haremos por simplemente D^λ .
- (2) En el caso $\lambda = 0$, fijamos D_r^0 como un punto y ∂D_r^0 como el vacío.

²⁵Es de suma importancia conocer la procedencia de este concepto; gran parte de la bibliografía presentada y disponible sobre teoría de Morse está escrita o traducida al inglés, cuando nos referimos a asa, hacemos alusión a *handle* o *thickened cell* pero en ningún caso a *cell*, para mas información véase [11] 4.2.a.

²⁶La adhesión se realiza sobre una variedad diferenciable de dimensión 3. Sobre la notación, véase [19]

- (3) D^λ tiene estructura de variedad diferenciable con borde. Hasta ahora no se ha usado ninguna aplicación diferenciable entre variedades diferenciales con borde, sin embargo, su definición²⁷ es análoga a la ya descrita para variedades diferenciales sin borde.
- (4) No es trivial el proceso seguido para dotar a $M \cup_\varphi e^\lambda$ de estructura de variedad diferenciable con borde, ya que a priori $M \cup_\varphi e^\lambda$ tiene esquinas²⁸ formadas al identificar los puntos con la aplicación φ .

Como extensión de esta definición tenemos los complejos de asas.

Definición 1.2.2. (Complejo de asas)

- (1) El disco D^m es un complejo de asas de dimensión m .
- (2) La variedad diferenciable con borde obtenida al adherir una λ -asa a D^m , mediante la aplicación

$$\varphi : \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial D^m,$$

es un complejo de asas de dimensión m . Nos referiremos a dicho complejo como $\mathcal{H}(D^m; \varphi)$

- (3) Sea $N = \mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ un complejo de asas de dimensión m . Entonces la variedad diferenciable con borde obtenida al adherir una λ_i -asa a N , mediante la aplicación

$$\varphi_i : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial N,$$

es un complejo de asas de dimensión m al que llamamos $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$

²⁷Véase [10] pág 32.

²⁸Este concepto es una traducción directa de la comunidad angloparlante, en la que se usa *smooth manifold with corners* para referirse a este tipo de variedades. Para una discusión más detallada véase [10] pág 415. Para investigar sobre el proceso para lidiar con estas esquinas se recomienda [19] Chapter 2 y [13] Appendix: Pasting and straightening. También es interesante mencionar [3] Lemma 4.3.

Capítulo 2

Funciones de Morse

2.1 Funciones de Morse

En pos de dar forma a las funciones encargadas de reportar valiosa información sobre la estructura de una variedad diferenciable, se presenta la siguiente definición.

Definición 2.1.1. (*Función de Morse*) Considerando una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$. Se dice función de Morse, a cualquier función $f \in C^\infty(M)$ en la que cualquier punto crítico $p \in M$ es no degenerado.

Observación 2.1.1. Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable. Un cálculo directo¹ muestra que los máximos y mínimos relativos de cualquier $f \in C^\infty(M)$ se corresponden con algún punto crítico. En consecuencia², si $(M, \mathcal{A})$ es compacta f debe tener al menos dos puntos críticos.

Ejemplo 2.1.1. Veamos algunos sencillos ejemplos³ de funciones de Morse

(1) Llamamos esfera unidad a $\partial D^3 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1\}$ con la topología hereda y cualquier⁴ estructura de variedad diferenciable. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} f : \partial D^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f((t_1, t_2, t_3)) &= t_3 \end{aligned}$$

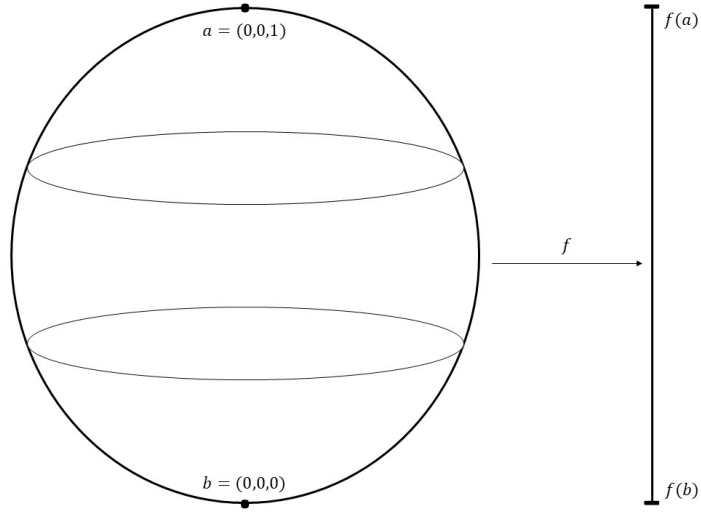
es una función de Morse. De hecho, f solo tiene dos puntos críticos, un máximo con índice 0 y un mínimo con índice 2.

¹Véase [1] Theorem 4.8.

²Véase [2] Theorem 9.9.

³Véanse [6] Example 1.1.3 y Example 1.1.4.

⁴Tal y como indica L.W. Tu [21] en la página 56 de su libro, cualesquiera dos variedades diferenciables homeomorfas y de dimensión menor que 4, son también difeomorfas.

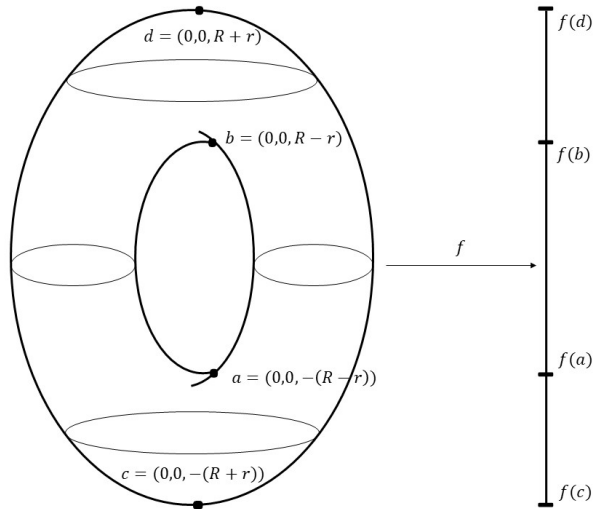

 Figura 2.1: Representación gráfica de f .

- (2) Definimos $T^2 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : t_1^2 + (\sqrt{t_2^2 + t_3^2} - R)^2 = r\}$ como el toro de radios $0 < r < R$. Con la topología heredada y cualquier estructura de variedad diferenciable, un cálculo directo muestra que

$$g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g((t_1, t_2, t_3)) = t_3$$

es una función de Morse. A diferencia de f en la esfera unidad, g posee cuatro puntos críticos de índices 0, 1, 1 y 2.


 Figura 2.2: Representación gráfica de g .

2.2 Lema de Morse

Esta sección está dedicada al lema de Morse y su demostración. Para ello, iniciaremos con algunos lemas previos y necesarios para este cometido, en concreto, enunciaremos tres lemas de localización contruidos por el autor, y continuaremos con el lema de Hadamard. Los libros que mayormente se siguen son el de J. Milnor [14] y Y. Matsumoto [11].

Los lemas de localización reciben su nombre por su gran utilidad para garantizar la existencia de entornos coordenados con ciertas características. En primer lugar, enunciamos el más general.

Lema 2.2.1. (*Lema de localización*) Considerando una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$. Sea (U, x) un entorno coordenado de $\mathcal{A}$ en p , W un abierto contenido en $x(U)$ y $x(p) \in W$, entonces se tiene que $(x^{-1}(W), x|_{x^{-1}(W)})$ también es un entorno coordenado de $\mathcal{A}$ en p .

Demostración. La prueba se compondrá de dos partes, en la primera parte veremos que efectivamente es un entorno coordenado en p . Y en la segunda comprobaremos que es compatible con el resto de entornos coordenados de $\mathcal{A}$, concluyendo así, por la observación 1.1.3, que también es un entorno coordenado del mismo.

- Al ser las cartas homeomorfismos, es inmediato ver que $x|_{x^{-1}(W)}$ es también un homeomorfismo de $x^{-1}(W)$ en W . Además, como $x(p) \in W$, se tiene que $p \in x^{-1}(W)$ y por tanto $(x^{-1}(W), x|_{x^{-1}(W)})$ es un entorno coordenado en p .
- Sea (K, z) un entorno coordenado de $\mathcal{A}$ verificando $K \cap x^{-1}(W) \neq \emptyset$, y como consecuencia $K \cap U \neq \emptyset$. Por consiguiente, la aplicación

$$z \circ x^{-1} : x(U \cap K) \rightarrow z(U \cap K),$$

es un difeomorfismo. A su vez, $K \cap x^{-1}(W) = K \cap (U \cap x^{-1}(W)) = (K \cap U) \cap x^{-1}(W)$, y por ende, $x|_{x^{-1}(W)}(x^{-1}(W) \cap K) = x(x^{-1}(W) \cap K) \cap x(U \cap K) = W \cap x(U \cap K)$ es abierto. Entonces, la aplicación

$$z \circ x|_{x^{-1}(W)}^{-1} : x|_{x^{-1}(W)}(x^{-1}(W) \cap K) \rightarrow z(x^{-1}(W) \cap K),$$

es la restricción de un difeomorfismo a un abierto, y por tanto, también difeomorfismo. Quedando probado que (K, z) es compatible con $(x^{-1}(W), x|_{x^{-1}(W)})$.

□

El siguiente, será el lema de localización que mas usaremos a lo largo de la demostración del lema de Morse, esto se debe a la afinidad que tiene con las restricciones del lema de Hadamard.

Lema 2.2.2. (*Lema de localización convexa*) Considerando una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ de dimensión n y un entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ en p . Entonces siempre existe otro entorno coordenado $(V, x|_V)$ de $\mathcal{A}$ en p , con $V \subset U$ y, de manera que $x|_V(V)$ es convexo en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. La prueba es, en esencia, una aplicación del lema de localización a un caso particular. Como $x(U) \in \mathbb{R}^n$, siempre podemos tomar $r > 0$ suficientemente pequeño, de manera que la bola abierta $B(x(p), r) \subset x(U)$. Ahora, aplicando el lema de localización a $W = B(x(p), r)$ y sabiendo que las bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$ son convexas, se obtiene el resultado. □

Continuamos con el último lema de localización, es probable que el lector note cierta similitud con el teorema de la función inversa para aplicaciones entre espacios euclídeos, y es que efectivamente, se hace uso del mismo para su demostración.

Lema 2.2.3. (*Lema de localización coordinada*) *Se consideran una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ de dimensión n , (U, x) un entorno coordinado de $\mathcal{A}$ en p y una aplicación diferenciable*

$$y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y(q) = (y_1(q), \dots, y_n(q)),$$

que en los entornos coordinados (U, x) y el canónico de $\mathbb{R}^n$, verifica $\det(\mathcal{J}(y)|_p) \neq 0$. Entonces, siempre existe $V \subset U$ suficientemente pequeño, de manera que $(V, y|_V)$ es entorno coordinado de $\mathcal{A}$ en p .

Demostración. Teniendo en cuenta que las cartas son difeomorfismos, observamos que

$$\mathcal{J}(y \circ x^{-1})|_{x(p)} = \mathcal{J}(y)|_p \mathcal{J}(x^{-1})|_{x(p)} \neq 0,$$

y en consecuencia, aplicando el teorema de la función inversa para aplicaciones entre espacios euclídeos, se tiene que existe un abierto V_1 en $x(p)$ de manera que

$$y \circ x^{-1} : V_1 \subset x(U) \rightarrow (y \circ x^{-1})(V_1) \subset \mathbb{R}^n,$$

es un difeomorfismo. Por tanto, si llamamos $V_2 = x^{-1}(V_1)$, es evidente que

$$y|_{V_2} : V_2 \subset U \rightarrow y(V_2) \subset \mathbb{R}^n,$$

también es un difeomorfismo, en definitiva, $(V_2, y|_{V_2})$ cumple las condiciones necesarias para ser entorno coordinado en p . Ahora comprobaremos que efectivamente $(V_2, y|_{V_2}) \in \mathcal{A}$, para ello hacemos uso de la observación 1.1.3.

- Sea (K, z) un entorno coordinado de $\mathcal{A}$ verificando $K \cap V_2 \neq \emptyset$, nos gustaría confirmar que la aplicación

$$y|_{V_2} \circ z^{-1} : z(V_2 \cap K) \rightarrow y|_{V_2}(V_2 \cap K),$$

es un difeomorfismo. Este hecho se sigue fácilmente ya que las siguientes aplicaciones lo son

$$y \circ x^{-1} : x(V_2 \cap K) \rightarrow y|_{V_2}(V_2 \cap K),$$

$$x \circ z^{-1} : z(V_2 \cap K) \rightarrow x(V_2 \cap K),$$

y por ende, su composición también, terminando así la prueba. □

El lema de Hadamard, en honor a Jacques Hadamard, es un perfecto ejemplo de cómo algunos resultados esenciales para funciones entre espacios euclídeos pueden ser aprovechados en lo referente a variedades diferenciables.

Lema 2.2.4. (*Lema de Hadamard*) Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un entorno convexo de 0 para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^\infty(V)$ y $f(0) = 0$, entonces

$$f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i g_i(t_1, \dots, t_n),$$

donde $g_i \in C^\infty(V)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y se verifica que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial t_i} \Big|_0$.

Demostración. Sea $(t_1, \dots, t_n) \in V$; al ser V un entorno convexo de 0, por definición se tiene que $p(t_1, \dots, t_n) + (1-p)0 = (pt_1, \dots, pt_n) \in V$ para cualquier $p \in [0, 1]$.

Ahora, podemos definir correctamente la función

$$\begin{aligned} F : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ F(p) &= f(pt_1, \dots, pt_n) \end{aligned}$$

que por el teorema fundamental⁵ del cálculo

$$\int_0^1 \frac{dF(p)}{dp} dp = F(1) - F(0) = f(t_1, \dots, t_n).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n) &= \int_0^1 \frac{df(pt_1, \dots, pt_n)}{dp} dp \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f(pt_1, \dots, pt_n)}{\partial t_1} t_1 + \dots + \frac{\partial f(pt_1, \dots, pt_n)}{\partial t_n} t_n \right) dp \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial f(pt_1, \dots, pt_n)}{\partial t_i} dp \\ &= \sum_{i=1}^n t_i \int_0^1 \frac{\partial f(pt_1, \dots, pt_n)}{\partial t_i} dp, \end{aligned}$$

siendo la segunda igualdad una implicación directa de la regla de la cadena⁶. Ahora, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos la función

$$\begin{aligned} g_i : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ g_i(t_1, \dots, t_n) &= \int_0^1 \frac{\partial f(pt_1, \dots, pt_n)}{\partial t_i} dp, \end{aligned}$$

pudiéndose comprobar fácilmente que $f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i g_i(t_1, \dots, t_n)$ y $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial t_i} \Big|_0$. Por último, como $f \in C^\infty(V)$, para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple⁷ que $g_i \in C^\infty(V)$. $\square$

⁵Véase [1] Theorem 5.3.

⁶Véase [2] Theorem 8.8.

⁷Véase [2] Teorema 10.8.

Finalmente llegamos al lema de Morse, sin duda alguna la piedra angular de este trabajo, siendo el punto de partida de gran mayoría de las demostraciones futuras. En esencia, el lema de Morse nos indica cómo se comporta cualquier función diferenciable en sus puntos críticos no degenerados. Es sencillo ver que si la función es de Morse, este lema se convierte en un gran aliado.

Lema 2.2.5. (*Lema de Morse*) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n y p un punto crítico y no degenerado de $f \in C^\infty(M)$. Entonces existe un sistema de coordenadas local $(x_1, \dots, x_n)$ de un entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ en p , de manera que, $x_i(p) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y verificando

$$f = f(p) - (x_1)^2 - \dots - (x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1})^2 + \dots + (x_n)^2$$

sobre el dominio de carta U , donde λ hace referencia al índice de f en p .

Demostración. En primera instancia, demostraremos que, dado un entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ en p , y por ende un sistema local de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ cumpliendo

$$f(q) = f(p) - (x_1(q))^2 - \dots - (x_\lambda(q))^2 + (x_{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (x_n(q))^2,$$

para cada $q \in U$, entonces λ debe ser el índice de f en el punto p . Es inmediato ver que

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right|_p = \begin{cases} -2, & \text{si } i = j \leq \lambda, \\ 2, & \text{si } i = j > \lambda, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

y por tanto, en el entorno coordenado (U, x)

$$\mathcal{H}(f)|_p = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por último, aplicando la observación 1.1.20, se tiene que λ debe ser el índice de f en p .

Ahora, demostraremos que dicho entorno coordenado existe. En pos de aliviar la notación $I = \{1, \dots, n\}$. Sea (V, z) un entorno coordenado de $\mathcal{A}$ en p , sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(p) = 0$ ya que en otro caso, podríamos remplazar f por $f - f(p)$ y continuar con el mismo razonamiento. De la misma forma, podemos dar un argumento por el cual es posible suponer que $z(p) = 0$ y $z(V)$ es convexo. Si $z(p) \neq 0$, basta definir la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{z} : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \bar{z}(s) &= z(s) - z(p), \end{aligned}$$

que de manera trivial cumple las condiciones del lema de localización coordinada, aplicando sobre el entorno coordinado resultante el lema de localización convexa, obtenemos un entorno coordinado de $\mathcal{A}$ en p con las características supuestas. Si en cambio, $z(p) = 0$, aplicamos el lema de localización convexa y concluimos de la misma forma. Una vez aseguradas las características del entorno coordinado, reformulamos la función f en el abierto V . Para cualquier $s \in V$

$$f(s) = (f \circ z^{-1} \circ z)(s) = (f \circ z^{-1})(z_1(s), \dots, z_n(s)),$$

de esta manera, la función $(f \circ z^{-1}) \in C^\infty(z(V))$ es adecuada para la aplicación del lema de Hadamard, ya que $(f \circ z^{-1})(0) = f(p) = 0$ y $z(V)$ es convexo. Por último, notar que si concluimos que, para cualquier $(t_1, \dots, t_n) \in z(V)$

$$(f \circ z^{-1})(t_1, \dots, t_n) = (t_1)^2 - \dots - (t_\lambda)^2 + (t_{\lambda+1})^2 + \dots + (t_n)^2,$$

habremos terminado la prueba. Entonces, aplicando dicho lema

$$(f \circ z^{-1})(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i g_i(t_1, \dots, t_n), \quad (2.1)$$

que, debido a su propia definición y la observación 1.1.20, para cada $i \in I$

$$g_i(0) = \left. \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial t_i} \right|_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial z_i} \right|_p = 0,$$

ya que por hipótesis p es un punto crítico de f . De manera natural, podemos aplicar de nuevo el lema de Hadamard sobre cada una de estas funciones y obtener, para cada $i \in I$

$$g_i(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=1}^n t_j h_{i,j}(t_1, \dots, t_n).$$

Ahora, si sustituimos y desarrollamos la expresión (2.1)

$$\begin{aligned} (f \circ z^{-1})(t_1, \dots, t_n) &= \sum_{i=1}^n t_i \left(\sum_{j=1}^n t_j h_{i,j}(t_1, \dots, t_n) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n t_i t_j h_{i,j}(t_1, \dots, t_n) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i^2 h_{i,i}(t_1, \dots, t_n) + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n t_i t_j (h_{i,j} + h_{j,i})(t_1, \dots, t_n) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i^2 H_{i,i}(t_1, \dots, t_n) + 2 \sum_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n t_i t_j H_{i,j}(t_1, \dots, t_n), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde, debido a la observación 1.1.6, $H_{i,j} = \frac{1}{2}(h_{i,j} + h_{j,i}) = H_{j,i} \in C^\infty(z(V))$ para cualesquiera $i, j \in I$. Conforme a (2.2)

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \Big|_p \right) = \left(\frac{\partial^2 (f \circ z^{-1})}{\partial t_i \partial t_j} \Big|_0 \right) = 2H_{i,j}(0),$$

además, como el punto p es no degenerado, tenemos que

$$\begin{aligned} \det \left((2H_{i,j}(0))_{i,j \geq 1} \right) &= \det \left(\left(\frac{\partial^2 (f \circ z^{-1})}{\partial t_i \partial t_j} \Big|_0 \right)_{i,j \geq 1} \right) \\ &= \det \left(\mathcal{H}(f)|_p \right) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

y por tanto, la matriz $(H_{i,j}(0))_{1 \leq i,j \leq n}$ es no singular. Esto se traduce en que, dado $j \in I$ siempre existe $i \in I$, de manera que $H_{i,j}(0) \neq 0$. Supongamos que $H_{r,r}(0) = 0$ para algún $r \in I$, entonces existe $i \in I$ de manera que $H_{i,r}(0) \neq 0$, y de este modo, si definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \hat{z} : V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \hat{z} &= (\hat{z}_1(p), \dots, \hat{z}_{r-1}(p), \hat{z}_r(p), \dots, \hat{z}_{i-1}(p), \hat{z}_i(p), \dots, \hat{z}_n(p)) \\ &= (z_1(p), \dots, z_{r-1}(p), \frac{z_r(p) + z_i(p)}{2}, \dots, z_{i-1}(p), \frac{z_r(p) - z_i(p)}{2}, \dots, z_n(p)), \end{aligned}$$

observamos que cumple las condiciones para el lema de localización coordenada de manera evidente, y en consecuencia, aplicando sobre el entorno coordinado resultante el lema de localización convexa, podemos asegurar que existe un entorno coordinado $(V_2, \hat{z}|_{V_2})$ de $\mathcal{A}$ en p , con las mismas características de (V, z) , y en el que por consiguiente es posible realizar un proceso análogo al seguido con el mismo, llegando a una expresión similar a (2.2), sin embargo $\hat{H}_{r,r}(0) = H_{r,r}(0) + H_{i,r}(0) \neq 0$. Es por eso que, podemos suponer que $H_{r,r}(0) \neq 0$ para todos los $r \in I$ y continuar con la demostración.

A partir de ahora procedemos por inducción. Debido a la continuidad de la función $H_{1,1}$, existe un abierto $V_3 \subset z(V)$ en 0 en el cual $H_{1,1}$ no es la función nula. Como las cartas son difeomorfismos, es posible definir un abierto $z^{-1}(V_3) = V_4 \subset V$ en p , y en él, la aplicación

$$\begin{aligned} y : V_4 &\subset V \rightarrow \mathbb{R}^n \\ y(s) &= (y_1(s), y_2(s), \dots, y_n(s)) \\ &= (\sqrt{H_{1,1}(z(s))} \left(z_1(s) + \sum_{j=1}^n z_j(s) \frac{H_{1,j}(z(s))}{H_{1,1}(z(s))} \right), z_2(s), \dots, z_n(s)), \end{aligned} \tag{2.3}$$

pudiéndose apreciar por la observación 1.1.6 que $y \in C^\infty(V_4)$. Con el objetivo de aplicar sobre ella el lema de localización coordenada, calculamos el determinante de su jacobiana en los entornos

coordenados (U, x) y el canónico de $\mathbb{R}^n$

$$\det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial y_1}{\partial z_1} \right|_p & \left. \frac{\partial y_1}{\partial z_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial y_1}{\partial z_n} \right|_p \\ \left. \frac{\partial y_2}{\partial z_1} \right|_p & \left. \frac{\partial y_2}{\partial z_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial y_2}{\partial z_n} \right|_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left. \frac{\partial y_n}{\partial z_1} \right|_p & \left. \frac{\partial y_n}{\partial z_2} \right|_p & \cdots & \left. \frac{\partial y_n}{\partial z_n} \right|_p \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sqrt{H_{1,1}(0)} & \frac{H_{1,2}(0)}{H_{1,1}(0)} & \cdots & \frac{H_{1,n}(0)}{H_{1,1}(0)} \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{H_{1,1}(0)} \neq 0,$$

y al ser no nulo, cumple las condiciones deseadas y procedemos aplicando el lema de localización coordenada, y sobre el entorno coordenado resultante el lema de localización convexa, obteniendo así un entorno coordenado $(V_5, y|_{V_5})$ de $\mathcal{A}$ en p . Ahora, abusando de la notación y con el propósito de aliviarla, fijamos para cada $s \in V_5$, $z(s) = t = (t_1, \dots, t_n)$ y $y(s) = (y_1, t_2, \dots, t_n)$, y aplicamos simplemente la definición de y para obtener

$$y_1^2 = |H_{1,1}(t)|t_1^2 + 2|H_{1,1}(t)| \sum_{j=2}^n t_1 t_j \frac{H_{1,j}(t)}{H_{1,1}(t)} + |H_{1,1}(t)| \left(\sum_{j=2}^n t_j \frac{H_{1,j}(t)}{H_{1,1}(t)} \right)^2$$

$$= \begin{cases} H_{1,1}(t)t_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n t_1 t_j H_{1,j}(t) + \frac{\left(\sum_{j=2}^n t_j H_{1,j}(t) \right)^2}{H_{1,1}(t)}, & \text{si } H_{1,1}(t) > 0, \\ -H_{1,1}(t)t_1^2 - 2 \sum_{j=2}^n t_1 t_j H_{1,j}(t) - \frac{\left(\sum_{j=2}^n t_j H_{1,j}(t) \right)^2}{H_{1,1}(t)}, & \text{si } H_{1,1}(t) < 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

que implica

$$H_{1,1}(t)t_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n t_1 t_j H_{1,j}(t) \stackrel{*}{=} y_1^2 - 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j \frac{H_{1,i}(t)H_{1,j}(t)}{H_{1,1}(t)} - \sum_{j=2}^n t_j^2 \frac{H_{1,j}(t)^2}{H_{1,1}(t)}, \quad \text{si } H_{1,1}(t) > 0,$$

$$\stackrel{*}{=} \begin{cases} y_1^2 - 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j \frac{H_{1,i}(t)H_{1,j}(t)}{H_{1,1}(t)} - \sum_{j=2}^n t_j^2 \frac{H_{1,j}(t)^2}{H_{1,1}(t)}, & \text{si } H_{1,1}(t) > 0, \\ -y_1^2 - 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j \frac{H_{1,i}(t)H_{1,j}(t)}{H_{1,1}(t)} - \sum_{j=2}^n t_j^2 \frac{H_{1,j}(t)^2}{H_{1,1}(t)}, & \text{si } H_{1,1}(t) < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Continuamos ahora recordando que $V_5 \subset V$, y por tanto, es posible sustituir (2.5) en (2.2) y

adquirir

$$\begin{aligned}
 (f \circ z^{-1})(t) &= \sum_{i=1}^n t_i^2 H_{i,i}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n t_i t_j H_{i,j}(t) \\
 &= t_1^2 H_{1,1}(t) + 2 \sum_{j=2}^n t_1 t_j H_{1,j}(t) + \sum_{i=2}^n t_i^2 H_{i,i}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_i t_j H_{i,j}(t) \\
 &= \begin{cases} y_1^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2 \left(H_{i,i}(t) - \frac{H_{1,i}(t)^2}{H_{1,1}(t)} \right) + 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j \left(H_{i,j}(t) - \frac{H_{1,i}(t) H_{1,j}(t)}{H_{1,1}(t)} \right), & \text{si } H_{1,1}(t) > 0, \\ -y_1^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2 \left(H_{i,i}(t) - \frac{H_{1,i}(t)^2}{H_{1,1}(t)} \right) + 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j \left(H_{i,j}(t) - \frac{H_{1,i}(t) H_{1,j}(t)}{H_{1,1}(t)} \right), & \text{si } H_{1,1}(t) < 0, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} y_1^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2 H_{i,i}^{(1)}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j H_{i,j}^{(1)}(t), & \text{si } H_{1,1}(t) > 0, \\ -y_1^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2 H_{i,i}^{(1)}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j H_{i,j}^{(1)}(t), & \text{si } H_{1,1}(t) < 0, \end{cases} \\
 &= \pm y_1^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2 H_{i,i}^{(1)}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j H_{i,j}^{(1)}(t),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde para cualesquiera $i, j \in I$ se define $H_{i,j}^{(1)} = \left(H_{i,j} - \frac{H_{1,i} H_{1,j}}{H_{1,1}} \right) \in C^\infty(y|_{V_5}(V_5))$. En conclusión, se ha encontrado un entorno coordinado $(V_5, y|_{V_5})$ en el que, para todo $t \in y|_{V_5}(V_5)$

$$(f \circ y|_{V_5}^{-1})(t) = \pm t_1^2 + \sum_{i=2}^n t_i^2 H_{i,i}^{(1)}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=2, \\ i < j}}^n t_1 t_j H_{i,j}^{(1)}(t). \tag{2.8}$$

Ahora, sea $r \in \mathbb{N}$ verificando $2 \leq r < n$ y (W, q) un entorno coordinado de $\mathcal{A}$ en p que cumple para cada $t \in q(W)$

$$(f \circ q^{-1})(t) = \pm t_1^2 \pm \dots \pm t_{r-1}^2 + \sum_{i=r}^n t_i^2 H_{i,i}^{(r)}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=r, \\ i < j}}^n t_i t_j H_{i,j}^{(r)}(t), \tag{2.9}$$

donde $H_{i,j}^{(r)} \in C^\infty(q(W))$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, n\}$. A continuación, demostraremos que la ecuación (2.9) sigue siendo cierta para $r+1$ en lugar de r . Al igual que con el entorno coordinado (V, z) , podemos asumir que existe un abierto $W_1 \subset W$ cumpliendo que $H_{r,r}^{(r)}$, no es la función nula

en $q(W_1)$. Repitiendo el proceso realizado con la función (2.3), definimos

$$\begin{aligned} l : W_1 \subset W &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ l(s) &= (l_1(s), \dots, l_r(s), \dots, l_n(s)) \\ &= (q_1(s), \dots, \sqrt{H_{r,r}^{(r)}(q(s))} \left(q_r(s) + \sum_{j=r+1}^n z_j \frac{H_{r,j}^{(r)}(q(s))}{H_{r,r}^{(r)}(q(s))} \right), \dots, q_n(s)) \end{aligned}$$

y de forma similar, puede comprobarse que cumple las condiciones necesarias para poder aplicar el lema de localización coordenada. En consecuencia existe un abierto $W_2 \subset W_1 \subset W$ de manera que $(W_2, l|_{W_2})$ es un entorno coordinado de $\mathcal{A}$ en p . De nuevo, realizamos el análogo a (2.4) con la función l y siendo $q(s) = t = (t_1, \dots, t_r, \dots, t_n)$ y $l(s) = (t_1, \dots, t_r, \dots, t_n)$ para cualquier $s \in W_2$

$$\begin{aligned} &H_{r,r}^{(r)}(t)t_r^2 + 2 \sum_{j=r+1}^n t_r t_j H_{r,j}^{(r)}(t) \stackrel{*}{=} \\ &\stackrel{*}{=} \begin{cases} l_r^2 - 2 \sum_{\substack{i,j=r+1, \\ i < j}}^n t_r t_j \frac{H_{r,i}^{(r)}(t)H_{r,j}^{(r)}(t)}{H_{r,r}^{(r)}(t)} - \sum_{j=r+1}^n t_j^2 \frac{H_{r,j}^{(r)}(t)^2}{H_{r,r}^{(r)}(t)}, & \text{si } H_{r,r}^{(r)}(t) > 0, \\ -l_r^2 - 2 \sum_{\substack{i,j=r+1, \\ i < j}}^n t_r t_j \frac{H_{r,i}^{(r)}(t)H_{r,j}^{(r)}(t)}{H_{r,r}^{(r)}(t)} - \sum_{j=r+1}^n t_j^2 \frac{H_{r,j}^{(r)}(t)^2}{H_{r,r}^{(r)}(t)}, & \text{si } H_{r,r}^{(r)}(t) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

efectuando un procedimiento similar al de las ecuaciones (2.6)-(2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} (f \circ q^{-1})(t) &= \pm t_1^2 \pm \dots \pm t_{r-1}^2 + \sum_{i=r}^n t_i^2 H_{i,i}^{(r)}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=r, \\ i < j}}^n t_i t_j H_{i,j}^{(r)}(t) \\ &= \pm t_1^2 \pm \dots \pm t_{r-1}^2 + \pm l_r^2 + \sum_{i=r+1}^n t_i^2 H_{i,i}^{(r+1)}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=r, \\ i < j}}^n t_i t_j H_{i,j}^{(r+1)}(t), \end{aligned}$$

donde para cualesquiera $i, j \in I$ se define $H_{i,j}^{(r+1)} = \left(H_{i,j}^{(r)} - \frac{H_{r,i}^{(r)} H_{r,j}^{(r)}}{H_{r,r}^{(r)}} \right) \in C^\infty(l|_{W_2}(W_2))$. En definitiva, se ha encontrado un entorno coordinado $(W_2, l|_{W_2})$ de $\mathcal{A}$ en p , en el que para todo $t \in l|_{W_2}(W_2)$

$$(f \circ l|_{W_2}^{-1})(t) = \pm t_1^2 \pm \dots \pm t_{r-1}^2 + \pm t_r^2 + \sum_{i=r+1}^n t_i^2 H_{i,i}^{(r+1)}(t) + 2 \sum_{\substack{i,j=r, \\ i < j}}^n t_i t_j H_{i,j}^{(r+1)}(t).$$

De esta manera, el lema de Morse queda probado por inducción. $\square$

A modo de conclusión, presentamos el siguiente corolario, cuya prueba es sencilla haciendo uso del lema de Morse.

Corolario 2.3. Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable, $f \in C^\infty(M)$ y C el conjunto de puntos críticos no degenerados de f . Entonces todos los puntos de C son aislados. Es más, si M es compacto y f una función de Morse, el conjunto C es finito.

Demostración. La primera afirmación, es una implicación directa del lema de Morse, cualquier punto p de C tiene asociado un entorno coordenado (U, x) en el que f tiene la forma

$$f = f(p) - (x_1)^2 - \dots - (x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1})^2 + \dots + (x_n)^2$$

y en consecuencia, para cualquier $q \in U$ e $i \in I$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_q = \pm 2x_i(q),$$

es decir, haciendo uso de la observación 1.1.20, $q \in C$ si y solo si $q = p$.

En cuanto a la segunda afirmación, supongamos que C no es finito, en ese caso y debido a la compacidad de M , debe haber un punto p de acumulación en C , lo cual es absurdo, ya que df es una 1-forma diferencial y p no sería aislado. $\square$

2.4 Teorema de Sard

En esta sección buscamos dos objetivos, el primero y más visible es demostrar el teorema de Sard, sin embargo, este no tiene sentido sin el segundo objetivo, introducir el concepto de conjuntos de medida cero en una variedad diferenciable. Para cumplir con éxito ambos, haremos uso de algunos conceptos ó resultados relacionados con teoría de la medida en $\mathbb{R}^n$, siendo necesario puntualizar, que el objetivo de este escrito no está puesto en la demostración de dichos resultados, sino en su uso de manera auxiliar. Las referencias principales que se seguirán serán los libros de J.M. Lee [10] y J.W. Milnor [15].

Definición 2.4.1. (*Conjuntos de medida cero*) Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n . Decimos que un subconjunto $A \subset M$ tiene medida cero en $(M, \mathcal{A})$ si para cualquier entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$, el subconjunto $x(A \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero.

Observación 2.4.1. Cuando se habla de medida cero en $\mathbb{R}^n$, es siempre referido a la medida de Lebesgue, en caso de ser necesaria una introducción a la misma, se recomienda la lectura de los primeros capítulos del libro de J.A.F Aguirre, F.J.F Ibañez [8]. La definición es coherente, es decir, las características de los conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^n$ para la unión e intersección, son heredadas por los de la variedad diferenciable.

Como consecuencia directa de la definición se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1. Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n y $A \subset M$ un subconjunto de medida cero. Entonces el conjunto $M \setminus A$ es denso en M .

Demostración. Supongamos que $M \setminus A$ no es denso en M , en ese caso A contiene un subconjunto B no vacío de M , y por extensión un entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ que verifica $U \cap B \neq \emptyset$. Entonces, teniendo en cuenta que la intersección finita de abiertos es abierta, que las cartas son homeomorfismos y que $(U \cap B) \subset (U \cap A)$ obtenemos un absurdo. En concreto, $x(U \cap B) \subset x(U \cap A)$ es un abierto no vacío y en consecuencia, cuya medida es no nula, contradiciendo que A tenga medida cero. $\square$

Sentadas las bases sobre los conjuntos de medida cero, pasamos a enunciar el teorema de Sard, demostrado primeramente por A. Sard⁸ en 1942. Este teorema es sumamente versátil ya que, aunque en este trabajo se ve relegado a una herramienta para el estudio de la existencia de funciones de Morse, también es empleado para demostrar otros grandes teoremas de la geometría diferencial, como el teorema de inmersión de Whitney⁹. En líneas generales y parafraseando a J.W. Milnor, es muy optimista pensar que, el conjunto de valores críticos de una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables es finito, sin embargo, es posible atribuirle medida cero como veremos a continuación.

Teorema 2.4.1. (Teorema de Sard) Sean $(M_1, \mathcal{A}_1)$ y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ dos variedades diferenciables y $f \in C^\infty(M_1, M_2)$. Entonces el conjunto de valores críticos¹⁰ de f tiene medida cero en $(M_2, \mathcal{A}_2)$.

Demostración. Supongamos que n y m son las dimensiones de $(M_1, \mathcal{A}_1)$ y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ respectivamente, si $n < m$ todo punto de $(M_1, \mathcal{A}_1)$ es crítico y el problema se resume en comprobar que $f(M_1)$ tiene medida cero en $(M_2, \mathcal{A}_2)$, por eso supondremos que $n \geq m$. Ahora, como M_1 verifica el segundo axioma de numerabilidad, siempre es posible encontrar un recubrimiento numerable de entornos coordenados $\{(U_i, x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}_1$, si tenemos en cuenta que la unión numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero, que las cartas son difeomorfismos y la observación 1.1.21, reducimos el problema a las aplicaciones $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ con $U \subset \mathbb{R}^n$. Con el fin de no llevar a confusiones, nos referiremos a $(\mathbb{R}^n, x)$ y $(\mathbb{R}^m, y)$ como los entornos coordenados canónicos de sus respectivos espacios euclídeos.

En primer lugar denotemos C al conjunto de puntos críticos de f y definimos para cada $k \in \mathbb{N}$

$$C_k = \{x \in C : \forall i \leq k, \text{ todas las derivadas parciales de orden } i \text{ son cero}\}.$$

Por continuidad C_k es cerrado y verifica la siguiente cadena de contenciones

$$C_k \subset C_{k-1} \subset \dots \subset C_1 \subset C.$$

Procedemos por inducción sobre n , el caso $n = 0$ es evidente ya que $\mathbb{R}^0$ es un único punto. El caso $m = 0$ tiene también solución trivial y quedará omitido en la prueba. Así, supondremos que el resultado es cierto para $n - 1$ y dividiremos la prueba en tres pasos.

- **Paso 1:** $f(C \setminus C_1)$ tiene medida cero. Sea $a \in C \setminus C_1$, bastará con demostrar que existe un abierto $V \subset U$ de manera que $f(V \cap C)$ tiene medida cero, ya que $\mathbb{R}^n$ verifica el segundo

⁸Véase [20].

⁹Véase [10] Theorem 6.15.

¹⁰Para comprender el significado de valor crítico en estas circunstancias es imprescindible la observación 1.1.21

axioma de numerabilidad, y en consecuencia $C \setminus C_1$ se puede recubrir con una cantidad numerable de estos abiertos.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$, ya que en caso contrario basta aplicar el lema de localización coordenada a las aplicaciones

$$\begin{aligned}\hat{x} : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \hat{x}(p) &= (\hat{x}_1(p), \dots, \hat{x}_{k-1}(p), \hat{x}_k(p), \dots, \hat{x}_n(p)) \\ &= (x_k(p), \dots, x_{k-1}(p), x_1(p), \dots, x_n(p))\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{y} : V &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \hat{y}(p) &= (\hat{y}_1(p), \dots, \hat{y}_{t-1}(p), \hat{y}_t(p), \dots, \hat{y}_n(p)) \\ &= (y_t(p), \dots, y_{t-1}(p), y_1(p), \dots, y_n(p))\end{aligned}$$

en sus respectivos entornos coordenados $(U, x|_U)$ y $(\mathbb{R}^m, y)$, y donde $\frac{\partial f_t}{\partial x_k} \neq 0$. Definamos ahora la aplicación

$$\begin{aligned}h : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ h(p) &= (f_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)),\end{aligned}$$

aplicando el teorema de la función inversa para aplicaciones entre espacios euclídeos, obtenemos que para algún abierto $V_1 \subset U$ la aplicación $h|_{V_1}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, a la cual llamaremos V_2 . Haciendo uso de la observación 1.1.21 se sigue que la aplicación

$$g = f \circ h|_{V_2}^{-1} : V_2 \subset \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

es diferenciable y tiene los mismos puntos críticos que $f|_{V_1}$, llamémoslos C' . Nótese que para cada $(t, u_2, \dots, u_n) \in V_2$ se tiene que, $g(t, u_2, \dots, u_n)$ pertenece al hiperplano $(t \times \mathbb{R}^m)$, es decir, g lleva hiperplanos en hiperplanos. En consecuencia, si para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos la restricción de g al hiperplano

$$g^t : (t \times \mathbb{R}^n) \cap V_2 \subset \rightarrow t \times \mathbb{R}^m,$$

y denotamos $A = \left(\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \right)_{i,j \geq 2}$, tenemos que

$$\mathcal{J}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & A \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

habiendo tomado la jacobiana con respecto a los entornos coordenados $(U, x|_U)$ y $(\mathbb{R}^m, y)$. En definitiva, haciendo uso de la observación 1.1.21 y la jacobiana (2.10), tenemos que para cualquier $t \in \mathbb{R}$, un punto de $(t \times \mathbb{R}^n)$ es punto crítico de g^t si y solo si lo es de g . Acorde a

la hipótesis de inducción, el conjunto de valores críticos de g^t tiene medida cero en $(t \times \mathbb{R}^m)$, y en consecuencia $g(C')$ interseca cada hiperplano $t \times \mathbb{R}^m$ en un conjunto de medida cero. Por continuidad y teniendo en cuenta $\mathbb{R}^m$ es unión numerable de compactos, tenemos que $g(C')$ es también unión numerable de compactos y por tanto medible. Por último, aplicando el teorema de Fubini¹¹ se tiene que $g(C') = f(V_1 \cap C)$ tiene medida cero.

- **Paso 2:** $f(C_k \setminus C_{k+1})$ tiene medida cero, con $k \geq 1$. De nuevo, bastará con demostrar que para cada $a \in C_k \setminus C_{k+1}$ existe un abierto $V \subset U$ de manera que $f(V \cap C_k)$ tiene medida cero.

Denotemos $I = \{1, \dots, n\}$, por definición existe $(s_1, \dots, s_{k+1}) \in I^{k+1}$ de manera que

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_{k+1}}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}} \neq 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $s_1 = 1$ ya que, en caso contrario, con un procedimiento similar al seguido en el paso 1, sería posible definir entornos coordenados en los que así sea. Definamos ahora la siguiente aplicación

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$h(p) = \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}} \Big|_p, x_2(p), \dots, x_n(p) \right),$$

aplicando el teorema de la función inversa para aplicaciones entre espacios euclídeos, tenemos que existe algún abierto V_3 para el que $h|_{V_3}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, al que denotaremos V_4 . Nótese que la aplicación h lleva $C_k \cap V_3$ en algún cerrado P del hiperplano $(0 \times \mathbb{R}^{n-1})$. De nuevo consideramos la aplicación

$$g = f \circ h|_{V_4}^{-1} : V_4 \subset \mathbb{R}^m$$

y su restricción al hiperplano

$$\hat{g} : (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V_4 \subset \mathbb{R}^m$$

Por hipótesis de inducción se verifica que, el conjunto de valores críticos de $\hat{g}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^m$. Además, los puntos de P son realmente puntos críticos de $\hat{g}$ ya que lo son de $f|_{V_3}$, y en consecuencia

$$\hat{g}(P) = \hat{g}(h(C_k \cap V_3)) = f(C_k \cap V_3)$$

tiene medida cero.

- **Paso 3:** $f(C_k)$ tiene medida cero para $k > \left(\frac{n}{m} - 1\right)$. Sea $S \subset U$ un cubo de lados $\epsilon > 0$, probaremos que $f(C_k \cap S)$ tiene medida cero, de esa manera y al verificar $\mathbb{R}^n$ el segundo axioma de numerabilidad, podremos recubrir U con dichos cubos y confirmar que $f(C_k)$ tiene medida cero.

¹¹Véase [8] Teorema 4.1.3.

Dado $a \in (C_k \cap S)$, del teorema de Taylor¹², la compacidad de S y la definición de C_k obtenemos que

$$f(a+h) = f(a) + R(a, h), \quad (2.11)$$

donde $a+h \in C_k \cap S$ y

$$\|R(a, h)\| \leq M\|h\|^{k+1}, \quad (2.12)$$

para M una constante que depende únicamente de f y S . Ahora subdividamos S en r^n cubos de lados $\frac{\epsilon}{r}$, y denotando S' a un cubo de esta subdivisión que contiene a a . Nótese que cualquier punto de S' puede escribirse como $a+h$ con

$$\|h\| \leq \sqrt{r} \left(\frac{\epsilon}{n} \right),$$

además, de (2.12) y (2.11) se sigue que

$$|f(a+h) - f(a)| \leq M(\sqrt{n} \left(\frac{\epsilon}{r} \right))^{k+1} = \frac{b}{r^{k+1}},$$

donde $b = M(\sqrt{n}\epsilon)^{k+1}$. Como consecuencia, $f(S')$ está contenido en un cubo de lados $\frac{2b}{r^{k+1}}$ y centrado en $f(a)$. Por tanto $f(C_k \cap S)$ está contenido en la unión de un máximo de r^n cubos con volumen total V verificando

$$V \leq r^n \left(\frac{2b}{r^{k+1}} \right)^m,$$

de donde se obtiene el resultado, ya que si $k > \left(\frac{n}{m} - 1 \right)$, V tenderá a 0 mientras r tienda a infinito.

La prueba se deduce de los anteriores pasos ya que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$

$$f(C) = f(C \setminus C_1) \cup f(C_1 \setminus C_2) \cup \dots \cup f(C_{k-1} \setminus C_k) \cup f(C_k).$$

□

Para finalizar la sección, presentamos el siguiente corolario, primeramente demostrado por A.B. Brown¹³ en 1935.

Corolario 2.5. (*Corolario de Brown*) Sean $(M_1, \mathcal{A}_1)$ y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ dos variedades diferenciables y $f \in C^\infty(M_1, M_2)$. Entonces el conjunto de valores regulares de f es denso en N .

Demostración. Por el teorema de Sard, el conjunto de valores críticos de f , al que denotaremos C , tiene medida cero, en consecuencia, teniendo en cuenta la proposición 2.4, $M \setminus C$ es denso en N . Basta notar que $M \setminus C$ es el conjunto de valores regulares para terminar la prueba. □

¹²Véase [7] Theorem 7.1.

¹³Véase [5] Theorem 3-III.

2.6 Existencia de funciones de Morse

Para la elaboración de esta sección seguimos principalmente el enfoque tomado en el libro de Y. Matsumoto [11], ya mencionado como una de las principales referencias en varias de las anteriores secciones. Antes de pasar a la enunciación y posterior demostración del teorema de existencia de funciones de Morse, es necesario definir un nuevo concepto. Este sentará la idea de cercanía entre funciones diferenciables sobre un compacto de cualquier variedad diferenciable.

Definición 2.6.1. *$((C^2, \epsilon)$ -aproximación local)* Dados una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ de dimensión n , un entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$, un conjunto compacto $K \subset U$ y dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$. Fijado $\epsilon > 0$, diremos que f es una (C^2, ϵ) -aproximación de g en K si para cada punto $p \in K$ se verifica.

$$\begin{cases} |f(p) - g(p)| < \epsilon, \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p - \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_p \right| < \epsilon, & \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p \right| < \epsilon, & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Pudiendo ampliar esta definición a la variedad diferenciable en su integridad de la siguiente manera

Definición 2.6.2. *$((C^2, \epsilon)$ -aproximación global)* Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n , $f, g \in C^\infty(M)$ e $I = \{1, \dots, k\}$ con $k \in \mathbb{N}$. Fijado un recubrimiento finito de entornos coordenados $\{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ y un recubrimiento $\{K_i\}_{i \in I}$ finito, compacto y subordinado¹⁴ a este. Decimos que f es una (C^2, ϵ) -aproximación de g en $(M, \mathcal{A})$ si lo es para cada K_i , con $i \in I$.

Aunque no siempre es posible asegurar la existencia de un recubrimiento finito de entornos coordenados, sí que existe cierta condición suficiente para ello, la compacidad de la variedad diferenciable. Procedemos a demostrar la existencia de un recubrimiento finito, compacto y subordinado al mismo.

Lema 2.6.1. Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable compacta de dimensión n e $I = \{1, \dots, k\}$ con $k \in \mathbb{N}$. Dado un recubrimiento finito de entornos coordenados $\{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$, siempre existe un recubrimiento $\{K_i\}_{i \in I}$ finito, compacto y subordinado a este.

Demostración. Definamos D como el conjunto de bolas cerradas contenidas en algún abierto $x_k(U_k)$, con $k \in I$. Denotando los conjuntos $\text{int}(D) = \{x_k^{-1}(\text{int}(B)) : B \in D \wedge B \subset x_k(U_k) \text{ para algún } k \in I\}$ y $\text{cl}(D) = \{x_k^{-1}(B) : B \in D \wedge B \subset x_k(U_k) \text{ para algún } k \in I\}$ es evidente que al ser las cartas homeomorfismos, los elementos de $\text{cl}(D)$ son compactos, los de $\text{int}(D)$ son abiertos y cualquier elemento de $\text{int}(D)$ está contenido en alguno de $\text{cl}(D)$, que a su vez lo está en algún U_k con $k \in I$. Notar que $\text{int}(D)$ es un recubrimiento de M y que por tanto, al ser M compacto, existe un subconjunto finito $\{L_i\}_{i \in J} \subset \text{int}(D)$ que también recubre M , siendo $J = \{1, \dots, l\}$ y $l \in \mathbb{N}$. Continuamos

¹⁴Es decir, K_i compacto y $K_i \subset U_i$ para cualquier $i \in I$.

la prueba identificando¹⁵ los elementos de $\{L_i\}_{i \in J}$ con sus respectivos contenidos en $\text{cl}(D)$, obteniendo así un recubrimiento compacto $\{K'_i\}_{i \in J}$ de M , ahora solo queda modificarlo de manera que sea subordinado a $\{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$, este proceso es simple ya que se basa en añadir elementos de $\text{cl}(D)$ al recubrimiento y unir los ya presentes en el mismo, recordando que la unión finita de compactos también es compacta. Al recubrimiento resultante lo llamamos $\{K_i\}_{i \in I}$, terminando así la prueba. $\square$

Una herramienta recurrente de la geometría diferencial, que complementa perfectamente este lema, es la siguiente

Observación 2.6.1. *En las condiciones del lema 2.6.1, siempre es posible definir la función diferenciable*

$$H_i : U_i \rightarrow \mathbb{R},$$

a la que denotaremos **función meseta** asociada a (U_i, K_i) , y que cumplen lo siguiente

$$(1) \ H_i(q) \in [0, 1] \ \forall q \in U_i.$$

$$(2) \ H_i(q) = 1 \ \forall q \in K_i.$$

$$(3) \ H_i(q) = 0 \ \forall q \in M \setminus U_i.$$

La demostración¹⁶ de este resultado no es consecuencia directa del material visto hasta ahora, su eje principal son unas funciones conocidas como *particiones de la unidad*¹⁷. Las funciones meseta suelen presentarse para cualquier abierto $U \subset M$ y compacto $K \subset U$.

Volviendo al eje central de la sección, presentamos dos lemas de gran utilidad para demostrar el teorema de existencia de funciones de Morse.

Lema 2.6.2. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n y $g \in C^\infty(M)$. Entonces, para cada entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ y $\epsilon > 0$, existe una n -tupla real $(a_1, \dots, a_n)$, de manera que*

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(q) &= g(q) - (a_1 x_1(q) + \dots + a_n x_n(q)), \end{aligned}$$

es una función de Morse en U y $|a_i| < \epsilon$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. En primer lugar, definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} h : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ h(q) &= \mathcal{J}(g)|_q, \end{aligned}$$

¹⁵Esta identificación es la restricción de la biyección evidente entre $\text{int}(D)$ y $\text{cl}(D)$, que lleva $x_k^{-1}(\text{int}(B))$ en $x_k^{-1}(B)$, con $B \in D$ y $B \subset x_k(U_k)$ para algún $k \in I$.

¹⁶Véase [22] Pág 11

¹⁷Véase [22] Theorem 1.11.

donde $\mathcal{J}(g)|_q$ representa la jacobiana de g en el punto q . Es sencillo comprobar que, para cualquier $q \in U$

$$\mathcal{J}(h)|_q = \mathcal{H}(g)|_q,$$

donde $\mathcal{H}(g)|_q$ representa la hessiana de g en el punto q . Por tanto, y haciendo uso de la observación 1.1.21, se deduce que

$$q \text{ es punto crítico de } h \iff \det(\mathcal{H}(g)|_q) = 0. \quad (2.14)$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$, de acuerdo al corolario de Brown existen abundantes valores regulares $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ de h que verifican $|a_i| < \epsilon$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$. A continuación, definimos la función deseada

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(q) &= g(q) - (a_1 x_1(q) + \dots + a_n x_n(q)), \end{aligned}$$

comprobar que $f \in C^\infty(U)$ es trivial haciendo uso de la observación 1.1.6, por tanto, la prueba recae en demostrar que cualquier punto crítico $q \in U$ de f es no degenerado. Supongamos que $q \in U$ es efectivamente un punto crítico de f , entonces

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_q = \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_q - a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

y consecuentemente

$$h(q) = \mathcal{J}(g)|_q = (a_1, \dots, a_n),$$

lo que implica, a través de un sencillo cálculo y haciendo uso de (2.14), que

$$\det(\mathcal{H}(f)|_q) = \det(\mathcal{H}(g)|_q) \neq 0,$$

acabando así la prueba. □

Observación 2.6.2. *Una vez probado el lema 2.6.2, vemos que para casi cualquier n -tupla real se cumple dicho resultado, esto nos da una idea sobre la gran cantidad de funciones de Morse que existen.*

Lema 2.6.3. *Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n y $K \subset M$ un subconjunto compacto de M . Supongamos que una función $g \in C^\infty(M)$ no tiene puntos críticos no degenerados en K . Entonces para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, cualquier (C^2, ϵ) -aproximación f de g tampoco tiene puntos críticos degenerados en K .*

Demostración. Sea $I = \{1, \dots, k\}$ con $k \in \mathbb{N}$. Para poder hablar de (C^2, ϵ) -aproximaciones en $(M, \mathcal{A})$ es necesario fijar un recubrimiento finito de entornos coordenados $\{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ y un recubrimiento $\{K_i\}_{i \in I}$ finito, compacto y subordinado a este. Posterior a ello, y haciendo uso de la observación 1.1.20, es sencillo comprobar que g no posee puntos críticos degenerados en $(C \cap K_i)$ si y solo si para cualquier $q \in (C \cap K_i)$

$$\sum_{l=1}^n \left| \left. \frac{\partial g}{\partial x_l} \right|_q \right| + \left| \det(\mathcal{H}(g)|_q) \right| > 0,$$

siendo simple comprobar, haciendo uso de (2.13), que esta desigualdad sigue siendo cierta para f . Este hecho pone en evidencia la relación entre la no existencia de puntos críticos degenerados de g y f en $(C \cap K_i)$. Para terminar la prueba, recordamos que $\{K_i\}_{i \in I}$ recubre M y por consiguiente $C = \cup_{l=1}^k (C \cap K_l)$. $\square$

Finalizamos con el resultado más fuerte de la sección y sobre el cual se ha construido la misma.

Teorema 2.6.1. (Teorema de existencia de funciones de Morse) *Dados una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ compacta de dimensión n y $g \in C^\infty(M)$. Entonces, para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, siempre existe una función de Morse $f \in C^\infty(M)$ que es una (C^2, ϵ) -aproximación de g .*

Demostración. Empecemos notando que $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable compacta, y en consecuencia podemos suponer que nos encontramos en las conclusiones del lema 2.6.1, las cuales nos proporcionan ciertos recubrimientos para poder hablar de (C^2, ϵ) -aproximaciones en $(M, \mathcal{A})$, recuperamos además la notación del mismo. Con la notación de dicho lema, para cada $l \leq k$ definimos el conjunto $C_l = \cup_{i=1}^l K_i$ y la función diferenciable

$$f_l : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_l(q) = \begin{cases} f_{l-1}(q) - H_l(q)(a_{l1}x_{l1}(q) + \dots + a_{ln}x_{ln}(q)), & \text{si } q \in K_l, \\ f_{l-1}(q), & \text{si } q \in M \setminus K_l, \end{cases}$$

donde H_l hace referencia a una función meseta asociada¹⁸ a (U_l, K_l) y $(a_{l1}, \dots, a_{ln})$ a una n -tupla real, veremos ahora que podemos ajustar el valor de esta tupla para obtener el resultado. Procedemos por inducción fijando $C_0 = \emptyset$ y $f_0 = g$, de donde se deduce que g no tiene puntos críticos degenerados en C_0 . Entonces, supongamos que f_{l-1} no tiene puntos críticos degenerados en C_{l-1} y veamos que siempre es posible elegir $(a_{l1}, \dots, a_{ln})$ de manera que f_l es una (C^2, ϵ) -aproximación de f_{l-1} en $(M, \mathcal{A})$. Comprobemos que lo es en el compacto K_l , planteamos y desarrollamos la condición (2.13), para cada $i, j \in I$ y $p \in K_l$

$$\begin{cases} |f_{l-1}(p) - f_l(p)| = |(a_{l1}x_{l1}(p) + \dots + a_{ln}x_{ln}(p))H_l(p)|, \\ \left| \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial x_{li}} \right|_p - \left| \frac{\partial f_l}{\partial x_{li}} \right|_p \right| = \left| a_{li}H_l(p) + (a_{l1}x_{l1}(p) + \dots + a_{ln}x_{ln}(p)) \frac{\partial H_l}{\partial x_{li}} \right|_p, \\ \left| \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial x_{li} \partial x_{lj}} \right|_p - \left| \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_{li} \partial x_{lj}} \right|_p \right| = \left| a_{li} \frac{\partial H_l}{\partial x_{lj}} \right|_p + a_{lj} \frac{\partial H_l}{\partial x_{li}} \right|_p + (a_{l1}x_{l1}(p) + \dots + a_{ln}x_{ln}(p)) \frac{\partial^2 H_l}{\partial x_{li} \partial x_{lj}} \right|_p, \end{cases} \quad (2.15)$$

dado que las cartas son homeomorfismos, $H_l \in C^\infty(M)$ y K_l es compacto, para cualesquiera $i, j \in I$ tanto $\frac{\partial^2 H_l}{\partial x_i \partial x_j}$ como $\frac{\partial H_l}{\partial x_i}$ están acotadas¹⁹ en K_l . En consecuencia, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que $|a_{il}| < \delta$ para cualquier $i \in I$, y cada una de las igualdades de (2.15) es inferior a ϵ , verificando así que es (C^2, ϵ) -aproximación de f_{l-1} en K_l . Comprobar que también lo es en K_c , con $c \neq l$, da lugar a dos casos. En el primero suponemos que $K_l \cap K_c = \emptyset$, en cuyo caso, $f_{l-1}(q) = f_l(q)$ para todo $q \in K_c$, siguiéndose así el resultado de manera trivial. En el segundo,

¹⁸Véase la observación 2.6.1.

¹⁹Véase [2] Theorem 9.8.

suponemos que $K_l \cap K_c \neq \emptyset$, por tanto debemos comprobar que en los puntos de la intersección (2.13) se cumple, siendo esto evidente, ya que para cada $i, j \in I$ y $p \in K_l \cap K_c$

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial x_{ci}} \Big|_p - \frac{\partial f_l}{\partial x_{ci}} \Big|_p \right| = \left| \frac{\partial x_{li}}{\partial x_{ci}} \Big|_p \left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial x_{li}} \Big|_p - \frac{\partial f_l}{\partial x_{li}} \Big|_p \right|, \\ \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial x_{ci} \partial x_{cj}} \Big|_p - \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_{ci} \partial x_{cj}} \Big|_p \right| = \left| \frac{\partial x_{li}}{\partial x_{ci}} \Big|_p \frac{\partial x_{lj}}{\partial x_{cj}} \Big|_p \left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial x_{li} \partial x_{lj}} \Big|_p - \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_{li} \partial x_{lj}} \Big|_p \right|, \end{cases}$$

de nuevo, como las cartas son homeomorfismos y $\frac{\partial x_{li}}{\partial x_{ci}}$ es continua en el compacto $K_l \cap K_c$, se tiene que está acotada $K_l \cap K_c$, así pues haciendo uso de (2.15) obtenemos el resultado. Finalmente, aplicando los lemas 2.6.2 y 2.6.3, siempre es posible escoger $(a_{1l}, \dots, a_{nl})$ con $|a_{il}|$ suficientemente pequeño para cualquier $i \in I$, y de manera que f_l no tiene puntos críticos degenerados en $K_l \cup C_{l-1} = C_l$.

Para completar la prueba, deben advertirse dos factores. El primero es que la inducción se puede realizar con $\epsilon > 0$ tan pequeño como se desee, en concreto, esto implica que f_k es una (C^2, ϵ) -aproximación de g en $(M, \mathcal{A})$. El segundo recae sobre el hecho de que $C_k = M$ y por tanto f_k es una función de Morse. Denotando $f = f_k$ se termina la prueba. □

Capítulo 3

Estructura de una variedad a través de funciones de Morse

Es importante advertir al lector de un hecho sobre esta sección, en muchos de los enunciados que veremos a continuación intervienen funciones de Morse, sin embargo, dicha caracterización no es absolutamente necesaria, la mayoría de ellos pueden expandirse a simples funciones diferenciables aunque añadiendo aún más complejidad. En caso de estar interesado en ese enfoque recomendamos encarecidamente el libro de J.Milnor [14].

3.1 Campo vectorial gradiente

El concepto de campo vectorial gradiente, tiene su origen en variedades diferenciables Riemannianas, es decir, para poder definirlo correctamente hemos de añadir otra capa de complejidad a nuestra construcción, un campo tensorial g de tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo. De esta forma, dada una variedad diferenciable Riemanniana¹ $(M, \mathcal{A}, g)$ y una función $f \in C^\infty(M)$, el campo vectorial gradiente $\text{grad } f \in \mathfrak{X}(M)$ se caracteriza por

$$g(\text{grad } f, X) = X(f), \quad (3.1)$$

para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$. En caso de disponer del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, es posible dotarlo de estructura de variedad diferenciable Riemanniana, para ello, tomamos el campo tensorial g definido en cada punto como el producto escalar euclídeo, así, si operamos en 3.1

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_i} \right)_{1 \leq i \leq n},$$

habiéndose tomando como base² la canónica. Como hemos dicho antes esta definición conlleva más complejidad, y presuponer que el lector conoce y maneja conceptos como campos tensoriales, nosotros sin embargo, tomaremos el enfoque de Y.Matsumoto [11]. Definiremos los campos vectoriales gradiente únicamente para funciones de Morse, e impondremos que se comporten de manera

¹Véase [10] pág 327.

²Véase la observación 1.1.17.

similar a (3.1) en los puntos críticos de f . Algunos escritos³ se refieren a dichos campos vectoriales como pseudo-gradientes.

Definición 3.1.1. (*Campo vectorial gradiente*) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n , f una función de Morse de la misma y C el conjunto de puntos críticos de f . Decimos que $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial gradiente de f si las siguientes dos condiciones se cumplen

$$(1) \quad X(f)|_p > 0 \quad \forall p \in M \setminus C.$$

(2) Para cada punto $p \in C$, con índice λ con respecto a f y entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ en p en el que f puede escribirse como

$$f = f(p) - (x_1)^2 - \dots - (x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1})^2 + \dots + (x_n)^2,$$

el campo vectorial X puede definirse en (U, x) como

$$X = -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + \dots + 2x_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Siguiendo la misma dinámica del capítulo dedicado a la existencia de funciones de Morse, fijamos una variedad diferenciable compacta, una función de Morse, y demostramos la existencia de campos vectoriales gradiente de f .

Teorema 3.1.1. Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable compacta y $f \in C^\infty(M)$ una función de Morse. Entonces siempre existe un campo vectorial gradiente $X \in \mathfrak{X}(M)$ de f

Demostración. Empecemos notando que al ser $(M, \mathcal{A})$ compacta, podemos situarnos en las conclusiones y notación del lema 2.6.1, pudiendo suponer que para cada punto crítico p de f existen $i \in I$ y (U_i, x_i) un entorno coordenado del recubrimiento, de manera que U_i es el único dominio de carta del recubrimiento en el que

$$f = f(p) - (x_1)^2 - \dots - (x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1})^2 + \dots + (x_n)^2. \quad (3.2)$$

Esta suposición es posible debido a dos factores, el primero es lema de Morse que nos dice que dicho entorno coordenado existe, el segundo es el corolario 2.3 que advierte sobre la finitud del conjunto de puntos críticos de f . Con todo ello, el procedimiento es sencillo, simplemente elegimos para cada punto crítico p de f un entorno coordenado adecuado, siendo esta colección finita, posteriormente añadimos tantos entornos coordenados, cuyas cartas no contengan a p , como sea necesario para recubrir M , terminando con la hipótesis de compacidad de $(M, \mathcal{A})$.

Ahora, habiendo elegido correctamente los entornos coordenados del recubrimiento, la prueba se hace muchos más sencilla, para cada $i \in I$ definimos los siguientes campos vectoriales

$$Y_i = H_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i1}} \frac{\partial}{\partial x_{i1}} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{in}} \frac{\partial}{\partial x_{in}} \right),$$

³Véase [16] sección 1.4.1.

3.1. Campo vectorial gradiente

donde H_i hace referencia a la función meseta asociada⁴, y siendo fácil comprobar que efectivamente Y_i define un campo vectorial. Siguiéndose, a través de un sencillo cálculo que el campo vectorial

$$X = \sum_{j=1}^n Y_j$$

cumple las condiciones de la definición 3.1.1, y en consecuencia, es un campo vectorial gradiente de f . $\square$

Teorema 3.1.2. Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable compacta de dimensión m , $I = \{1, \dots, k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $f \in C^\infty(M)$ una función de Morse con puntos críticos $\{p_i\}_{i \in I}$. Entonces existe otra función de Morse $g \in C^\infty(M)$ cuyos puntos críticos son exactamente $\{p_i\}_{i \in I}$ y verifica

$$g(p_j) \neq g(p_i) \text{ si } i \neq j, \quad \forall i, j \in I.$$

Además, para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, g es una (C^2, ϵ) -aproximación de f en $(M, \mathcal{A})$.

Demostración. Supongamos que $p_1 \neq p_2$ pero toman el mismo valor a través de f . Por el lema de Morse existe un entorno coordenado (U, x) de $\mathcal{A}$ en p_1 y de manera que

$$f = f(p) - (x_1)^2 - \dots - (x_\lambda)^2 + (x_{\lambda+1})^2 + \dots + (x_n)^2,$$

en el dominio de carta U . Además, debido al teorema 3.1.1, existe un campo vectorial gradiente de f para el cual

$$X(f) = -4(x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2). \quad (3.3)$$

Consideremos ahora los discos $D_{2\delta}^m$ y D_δ^m , siendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño para verificar que $x^{-1}(D_{2\delta}^m) \subset U$ y $p_j \notin x^{-1}(D_\delta^m)$ para cualquier $j \in I$. Definamos el abierto $V = x^{-1}(D_{2\delta}^m)^\circ$, el compacto $K = x^{-1}(D_\delta^m)$ y la función

$$g = f + aH$$

donde H es la función meseta asociada a (V, K) y $a \in \mathbb{R}$ una constante no nula, veamos que ajustando a podemos hacer de g la función que buscamos. En primer lugar, nótese que $g = f$ fuera del abierto V y $g = f + a$ en K , en consecuencia, es sencillo ver que g y f tienen los mismos puntos críticos en $M \setminus (V \setminus K)$. Veamos que para a con valor absoluto suficientemente pequeño g no tiene puntos críticos en $V \setminus K$, empecemos observando que para cada $i \in I$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| = \left| a \frac{\partial H}{\partial x_i} \right|,$$

siguiéndose⁵ que, al ser las cartas homeomorfismos, $H \in C^\infty(M)$ y K compacto, $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ esta acotada en K . Por tanto, para a con valor absoluto suficientemente pequeño tenemos que la diferencia

$$\left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \right|$$

⁴Véase la observación 2.6.1.

⁵Véase [2] Theorem 9.8.

es arbitrariamente pequeña. Además, de (3.3) se sigue que, para cualquier $q \in V \setminus K^\circ$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 = X(f)|_q \geq 4(\delta)^2 > 0.$$

Es decir, tomando a con valor absoluto suficientemente pequeño, g no tiene puntos críticos en $V \setminus K$, concluyendo así, que g y f tienen los mismos puntos críticos. Siguiendo un razonamiento similar al mostrado en la demostración del teorema de existencia de funciones de Morse, es sencillo comprobar que g es una función de Morse y una (C^2, ϵ) -aproximación de f en $(M, \mathcal{A})$. Por último $g(p_1) = f(p_1) + a \neq f(p_1) = f(p_2)$, terminando así la prueba. $\square$

3.2 Curvas integrales y secciones de una variedad

Dada una variedad diferenciable, las curvas definidas sobre la misma han estado presentes intermitentemente durante este escrito, y no hemos puesto especial interés en ellas. Esto cambia en esta sección y las posteriores, ya que ahora sabemos definir un campo vectorial gradiente de una función de Morse. Seguiremos los libros de Y. Matsumoto [11] y J. Milnor [15].

Definición 3.2.1. (Curva integral) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo vectorial cualquiera e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Una curva $c \in C^\infty(I, M)$ se dice curva integral de X si para todo $t \in I$

$$c'(t) = X|_{c(t)}.$$

Ejemplo 3.2.1. Hemos esperado hasta ahora para mostrar un ejemplo de campo vectorial gradiente, esto se debe a la definición de curva integral, una herramienta muy poderosa para visualizar campos vectoriales. Siguiendo con el ejemplo 2.1.1, tomamos la función f y calculamos⁶ las curvas integrales de su campo vectorial gradiente, obteniendo la curva constantemente⁷ el polo norte

$$\begin{aligned} \beta : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) &\rightarrow \partial D^2 \\ \beta(t) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

la curva constantemente el polo sur

$$\begin{aligned} \gamma : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) &\rightarrow \partial D^2 \\ \gamma(t) &= (0, 0, -1) \end{aligned}$$

y los meridianos, para cada $\theta \in (0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \alpha : \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) &\rightarrow \partial D^2 \\ \alpha(t) &= (\cos \theta \sin t, \sin \theta \sin t, \cos t), \end{aligned}$$

⁶En cuanto a cálculos se refiere, este proceso no es complicado. Sin embargo, hemos aprovechado la condición de la esfera como subvariedad Riemanniana de $\mathbb{R}^n$, un concepto hasta ahora desconocido para algunos de los lectores. Para investigar sobre la idea de subvariedad se recomienda el capítulo 9 del libro de L. Tu [21].

⁷Ninguna curva integral puede pasar por un punto crítico excepto la constantemente dicho punto, esta es una observación sencilla si tenemos en cuenta la definición de campo vectorial gradiente.

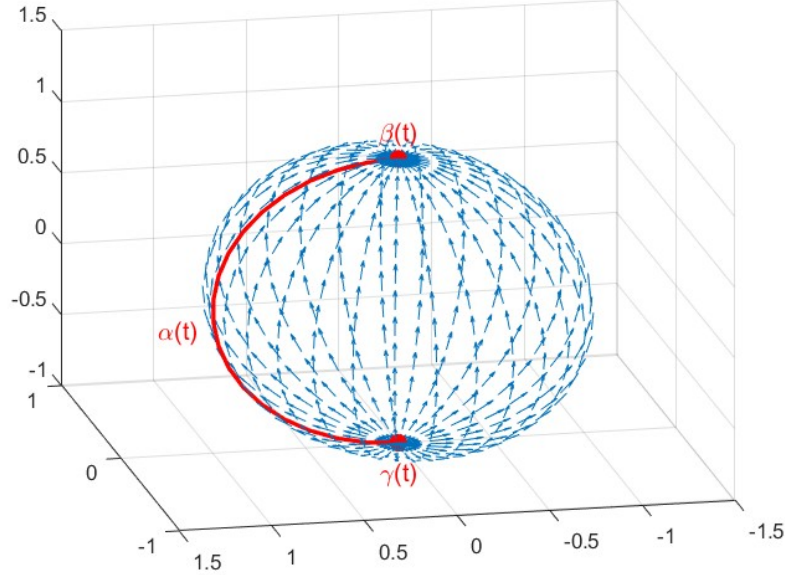


Figura 3.1: Campo vectorial gradiente y curvas integrales de f .

Observación 3.2.1. Con la misma notación que en la definición 3.2, si $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable compacta entonces, para cualquier punto $p \in M$ existe una única⁸ curva integral $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$ de X , de manera que $\alpha(0) = p$. La demostración no es trivial⁹ y es necesario estar familiarizado con conceptos como el flujo de un campo vectorial o la completitud de una variedad diferenciable.

Definición 3.2.2. (Sección de una variedad diferenciable) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable, $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{R}$. Denotamos por sección de $(M, \mathcal{A})$ a

$$M_{[a,b]} = \{p \in M : a \leq f(p) \leq b\} ,$$

ó

$$M_l = \{p \in M : -\infty \leq f(p) \leq l\} .$$

A partir de ahora hablaremos de difeomorfismos entre secciones de una misma variedad diferenciable, para ello, es necesario primero dotar a dichas secciones de estructura de variedad diferenciable, es por eso que advertimos al lector del siguiente resultado.

Lema 3.2.1. (Lema del valor regular) Sean $(M_1, \mathcal{A}_1)$ y $(M_2, \mathcal{A}_2)$ dos variedades diferenciables de dimensiones m y n respectivamente, $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ y p un valor regular de f . Entonces $f^{-1}(p)$ es una variedad diferenciable¹⁰ de dimensión $m - n$.

⁸Véase la figura 3.1

⁹Véase [10] Theorem 9.12.

¹⁰De hecho, la variedad diferenciable resultante es subvariedad de $(M_1, \mathcal{A}_1)$, este hecho es clave para el procedimiento seguido en el ejemplo 3.2.1.

Demostración. En primer lugar, dotamos a $f^{-1}(p)$ de la topología heredada y comprobamos que es Hausdorff, y verifica el segundo axioma de numerabilidad. Ahora, fijemos dos entornos coordinados (V, y) de $\mathcal{A}_2$ en p y (U, x) de $\mathcal{A}_1$ en $z \in f^{-1}(p)$. Como p es un valor regular de f se tiene que la diferencial de f es sobreyectiva para cualquier punto de $f^{-1}(p)$, es más, al ser las cartas difeomorfismos, se tiene que la diferencial de

$$h : y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$$

es también sobreyectiva en cualquier punto de $x(f^{-1}(p))$, y en consecuencia llamando $l = x(z)$, la dimensión de $\text{Ker}(dh_l) \in T_l \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m$ tendrá dimensión $m - n$. Sea

$$L : \mathbb{R}^m \rightarrow \text{Ker}(dh_l) \subset \mathbb{R}^{m-n}$$

cualquier aplicación lineal no singular restringida al subespacio $\text{Ker}(dh_l)$. Definimos

$$F : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

$$F(q) = (h(q), L(q)),$$

y supongamos que $\det(\mathcal{J}(F)|_l) = 0$, es decir, existe $v \in T_l \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m$ de manera que $dF_l(v) = (df_l(v), L(v)) = 0$, lo cual es absurdo, ya que si $dF_l(v) = 0$ entonces $v \in \text{Ker}(dh_l)$ y en consecuencia $L(v) \neq 0$, de la misma forma se ve el recíproco. Por tanto $\det(\mathcal{J}(F)|_l) \neq 0$ y por el teorema de la función inversa para espacios euclídeos, existe un abierto $U_1 \subset x(U)$ que contiene a l y es difeomorfo a un abierto $V_1 \subset (\{y(p)\} \times \mathbb{R}^{m-n})$, que contiene a $(y(p), L(z))$. Como las cartas son difeomorfismos concluimos que el abierto $(x^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(p))$ de z es difeomorfo a $V_1 \cap (\{y(p)\} \times \mathbb{R}^{m-n})$ que a su vez es difeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^{m-n}$, terminando la prueba con un procedimiento similar al seguido en la observación 1.1.4. □

Del cual se desprende la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1. Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable de dimensión n , $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Entonces tanto $M_{[a, b]}$ como $M_{(-\infty, b]}$ tienen estructura de variedad diferenciable con borde de dimensión n .

Demostración. Atendamos primero el caso $M_{(-\infty, b]}$, el resultado se sigue de los siguientes factores

- (1) $M_{[-\infty, b]} = M_{(-\infty, b)} \cup f^{-1}(b)$ donde la unión es topológica.
- (2) Por el lema del valor regular $f^{-1}(b)$ tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $n - 1$, es decir, cumple con las condiciones para ser la frontera de $M_{(-\infty, b]}$.
- (3) $M_{(-\infty, b)}$ es un abierto de M y en consecuencia tiene estructura de variedad diferenciable heredada de dimensión n , además $M_{(-\infty, b)} = M_{(-\infty, b]} \setminus f^{-1}(b)$, cumpliendo las condiciones para ser el interior de $M_{(-\infty, b]}$.

El caso $M_{[a, b]}$ es similar, simplemente hay que tener en cuenta que en este caso la frontera está compuesta por las componentes $f^{-1}(b)$ y $f^{-1}(a)$. □

Todo lo visto hasta ahora en el capítulo converge en el siguiente lema, sobre el cual se cimientará la siguiente sección.

Lema 3.2.2. *Dadas una variedad diferenciable $(M, \mathcal{A})$ compacta y $f \in C^\infty(M)$ una función de Morse. Si f no posee valores críticos en un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, entonces la sección $M_{[a, b]}$ es difeomorfa a*

$$f^{-1}(a) \times [0, 1].$$

Demostración. Sea X el campo vectorial gradiente de f , cuya existencia está asegurada por el teorema 3.1.1, y C el conjunto de puntos críticos de f , el cual es finito por el corolario 2.3. Con la estructura de variedad diferenciable heredada, definimos el siguiente campo vectorial en $M \setminus C$

$$Y = \frac{1}{X(f)} X.$$

Por hipótesis, recordar que $M_{[a, b]}$ no contiene puntos y críticos y por tanto está dentro del dominio de Y , además, debido a la la observación 3.2.1 sabemos que existe una única curva integral c_p de X que verifica $c_p(0) = p$. Aplicando la definición de curva integral tenemos que, para todo $t \in [a, b]$

$$\left. \frac{d(f \circ c_p)}{dt} \right|_t = c'(t)(f) = Y_{c(t)}(f) = 1,$$

es decir, para todo $t \in [a, b]$ el valor de f aumenta con velocidad¹¹ constantemente 1 a través de la curva c_p . En consecuencia, la aplicación

$$\begin{aligned} h : f^{-1}(a) \times [0, b - a] &\rightarrow M_{[a, b]} \\ h(p, t) &= c_p(t) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo¹², para comprobarlo basta observar dos factores, el primero es que fijando cualquiera de las dos variables obtenemos una aplicación diferenciable, y el segundo está relacionado con la observación 3.2.1, que entre otras cosas implica que dos curvas integrales de un mismo campo vectorial no pueden ser concurrentes. Acabamos la prueba teniendo en cuenta que $f^{-1}(a) \times [0, b - a]$ es difeomorfo a $f^{-1}(a) \times [0, 1]$. □

3.3 Teoremas fundamentales

Finalmente llegamos a la última sección de este escrito, donde veremos como todas las herramientas adquiridas hasta ahora convergen para dar dos resultado, los denominados teoremas fundamentales, cruciales para relacionar las distintas secciones de cualquier variedad diferenciable compacta. Acabaremos con el corolario de descomposición, que asegura que cualquier variedad diferenciable

¹¹Nótese que este concepto es absolutamente intuitivo y el siguiente resultado se deriva a través del teorema del valor medio, véase [1] Teorema 4.5.

¹²Nótese que $[0, b - a]$ tiene estructura de variedad diferenciable con borde debido a la proposición 3.2.1 aplicada a la identidad en $\mathbb{R}$, lo que implica que el producto $f^{-1}(a) \times [0, b - a]$ también, véase [10] Proposition 1.45.

compacta es difeomorfa a un complejo de asas. Las referencias más notables son la tesis de R. Naim [18], el escrito de R. Bohm [3] y el libro de Y. Matsumoto [11].

Lo primero será definir una función de Morse y averiguar en que sección se encuentran sus puntos críticos, una vez hecho esto podemos enunciar el primer teorema fundamental.

Teorema 3.3.1. (*Primer teorema fundamental*) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable compacta y $f \in C^\infty(M)$ una función de Morse. Si f no posee valores críticos en un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, entonces M_a es difeomorfa a M_b .

Demostración. Por hipótesis $M_{[a,b]}$ no contiene puntos críticos de f , y debido al corolario 2.3 el conjunto de puntos críticos de f es finito, es decir, podemos suponer que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño $M_{[a-\epsilon, b]}$ tampoco posee puntos críticos de f . Por tanto y debido al teorema 3.2.2 tenemos que $M_{[a-\epsilon, b]}$ es difeomorfa a $f^{-1}(a) \times [0, 1]$, además como $M_{[a-\epsilon, a]} \subset M_{[a-\epsilon, b]}$ se tiene que $M_{[a-\epsilon, a]}$ también es difeomorfa a $f^{-1}(a) \times [0, 1]$. Es decir, tenemos un difeomorfismo

$$h : M_{[a-\epsilon, a]} \rightarrow M_{[a-\epsilon, b]},$$

del que podemos asumir que para todo $q \in f^{-1}(a - \epsilon)$ se tiene $h(q) = q$, esto siempre es posible ya que en caso contrario basta componer h con otro difeomorfismo. Solo queda definir el difeomorfismo¹³

$$\begin{aligned} \hat{h} : M_a &\rightarrow M_b \\ \hat{h}(q) &= \begin{cases} q, & \text{si } q \in M_{a-\epsilon}, \\ h(q), & \text{si } q \in M_{(a-\epsilon, a]}, \end{cases} \end{aligned}$$

y la prueba queda concluida. □

Conocer los índices de los puntos críticos nos permite enunciar el segundo teorema fundamental.

Teorema 3.3.2. (*Segundo teorema fundamental*) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable compacta, $f \in C^\infty(M)$ una función de Morse y p un punto crítico de f con índice λ . Entonces para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $M_{f(p)-\epsilon}$ es difeomorfa a $M_{f(p)+\epsilon}$ con una λ -asa adherida.

Demostración. Hasta ahora, hemos podido presentar pruebas detalladas y comprensibles para cada uno de los teoremas, lemas y corolarios enunciados, sin embargo, es realmente complicado realizar esta misma tarea en el caso que nos ocupa. Recomendamos encarecidamente al lector que revise la tesis de R. Naim¹⁴ [18] y el trabajo de R. Bohm¹⁵ [3]. En caso de estar interesados únicamente en el cambio topológico, es posible que sea de gran interés la lectura de los libros de J. Milnor¹⁶ [14] y L.I. Nicolaescu¹⁷ [19]. □

¹³Nótese que $M_{(a-\epsilon, a]} = \{p \in M : a - \epsilon < f(p) \leq a\}$.

¹⁴Theorem 4.0.35.

¹⁵Theorem 4.4.

¹⁶Theorem 3.2.

¹⁷Theorem 2.2.3, basada en la elegante prueba de J. Milnor, aunque más extensa y detallada.

Con el siguiente corolario concluimos el trabajo.

Corolario 3.4. (*Corolario de descomposición*) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable compacta de dimensión m y $f \in C^\infty(M)$ una función de Morse. Entonces, queda determinada una estructura de complejo de asas difeomorfa a $(M, \mathcal{A})$, coincidiendo el índice de las asas con el de los puntos críticos de f .

Demostración. Sea $I = \{1, \dots, k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, por el teorema 3.1.2 podemos suponer que todos los puntos críticos $\{p_i\}_{i \in I}$ de f toman valores distintos y ordenarlos de menor a mayor. Nótese que para cualquier $\delta > 0$, $M_{f(p_1)-\delta} = \emptyset$ y $M_{f(p_n)+\delta} = M$, por tanto si demostramos que para cualquier $i \in I$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño la sección $M_{f(p_i)+\epsilon}$ es difeomorfa a un complejo de asas, habremos terminado

Procedemos por inducción sobre los subíndices de los puntos críticos de f . Empecemos por el caso $i = 1$, tenemos que $(M, \mathcal{A})$ es compacta y en consecuencia p_1 debe ser el mínimo global de f , o lo que es equivalente, el índice de f en p_1 es 0. Entonces, haciendo uso del segundo teorema fundamental, obtenemos que $M_{f(p_1)+\epsilon}$ es difeomorfa a D^m para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, siendo este, un complejo de asas. Supongamos ahora que, $M_{f(p_{l-1})+\epsilon}$ es difeomorfa a algún complejo de asas $N = \mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{l-1})$ para algún $l \leq k$. Se sigue del primer y segundo teorema fundamental que $M_{f(p_l)+\epsilon'}$ es difeomorfa a un complejo de asas $\mathcal{H}(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{l-1}, \varphi_l)$ donde $\epsilon' > 0$ es suficientemente pequeño y

$$\varphi_l : \partial D^{\lambda_l} \times D^{m-\lambda_l} \rightarrow \partial N,$$

es una aplicación diferenciable con λ_l el índice de f en p_l . □

En este punto, el lector debe haberse dado cuenta de que la estructura de complejo de asas determinada en el corolario 3.4 no es única¹⁸, tanto el primer teorema fundamental como el segundo teorema fundamental están sujetos a la acción de un campo vectorial gradiente que, tiene una acción esencial en la aplicación diferenciable que adhiere cada célula. Las relaciones entre los distintos complejos de asas que define una misma función de Morse es el camino que toma el libro de Y. Matsumoto [11] tras probar este corolario. Otros textos como los de J. Milnor [14] y L. I. Nicolaescu [19] pasan a tratar las desigualdades de Morse. Por último, R. Bohm en su trabajo [3] prefiere pasar directamente a aplicaciones relacionadas con topología algebraica. En mi caso, me gustaría terminar enunciando un teorema que realmente compacta todo lo demostrado hasta el momento.

Teorema 3.4.1. (*Teorema de Reeb*¹⁹) Sean $(M, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable compacta de dimensión 2 y $f \in C^\infty(M)$ una función de Morse con exactamente dos puntos críticos. Entonces $(M, \mathcal{A})$ es difeomorfa a una esfera²⁰.

¹⁸También puede darse el caso en el que no solo varíe el campo vectorial gradiente si no el complejo de asas en su totalidad, es por eso que la descomposición que obtenemos del corolario de descomposición es solo una de todas las posibles formas de construir la variedad diferenciable. Véanse [3] Figure 5 y Figure 6.

¹⁹Realmente el teorema de Reeb es el indicado en [14] Theorem 4.1, sin embargo, dicha versión no admite difeomorfismo debido al trabajo de J. Milnor en [13]. Por todo ello, el autor considera que tanto el enunciado como la demostración presentada en este escrito del Teorema de Reeb, concilia mejor con el contenido estudiado. La generalización de este teorema, que abarca dimensiones menores o iguales a 6, se puede encontrar en libro de Y. Matsumoto [11] Theorem 3.6.

²⁰Al igual que en el ejemplo 2.1.1 podemos utilizar cualquier estructura de variedad diferenciable.

Demostración. Haciendo uso del corolario de descomposición, observamos que

$$M \cong D^2 \cup_{\varphi} D^2,$$

donde φ es la aplicación diferenciable encargada de la adhesión en el complejo de asas, y que además es un movimiento rígido²¹ de ∂D^2 .

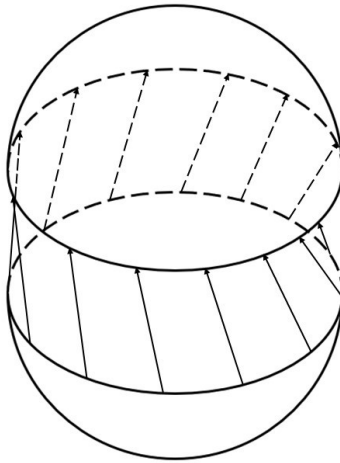


Figura 3.2: Interpretación gráfica del teorema de Reeb.

En consecuencia²²

$$\partial D^3 = D^2 \cup_{\text{Id}} D^2 \cong D^2 \cup_{\varphi} D^2,$$

terminando así la demostración. □

²¹Consecuencia de estar definida por un campo vectorial gradiente.

²²La clave de esta consecuencia reside en [11] Lemma 1.19. La extensión de la que se habla en dicho lema es muy útil para generalizar este resultado a mayores dimensiones, para obtener una referencia de cada una de las pruebas y una breve discusión sobre este tema véase [11] pág 84.

Bibliografía

- [1] T.M. Apostol. *Calculus Vol. I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Editorial Reverté, S. A, 1984.
- [2] T.M. Apostol. *Calculus Vol. II: Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades*. Editorial Reverté, S. A., 1985.
- [3] R. Bohm. *Morse theory and handle decompositions*. Mathematics Research Experience for Undergraduates program, 2019.
- [4] R. Bott. *Marston Morse and his mathematical works*. Bulletin of the American Mathematical Society 3, 907–950, 1980.
- [5] A.B. Brown. *Functional dependence*. Transactions of the American Mathematical Society 38, 2, 379-394, 1935.
- [6] R. Chhim. *Morse theory and applications*. Centro de investigación en matemáticas, A.C, 2017.
- [7] C.H. Edwards. *Advanced calculus of several variables*. Academic Press, 1973.
- [8] J.A.F Aguirre, F.J.F Ibañez. *Integración de funciones de varias variables*. Ediciones Pirámide, 2002.
- [9] M.A. Kervaire. *A manifold which does not admit any differentiable structure*. Commentarii Mathematici Helvetici 34, 257–270, 1960.
- [10] J.M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2000.
- [11] Y. Matsumoto. *An introduction to morse theory*. American Mathematical Society, 2002.
- [12] J. Milnor. *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*. Annals of Mathematics 64, 399-405, 1956.
- [13] J.W. Milnor. *Differentiable manifolds which are homotopy spheres*. Princeton University Press, 1959.
- [14] J.W. Milnor. *Morse theory*. Princeton University Press, 1963.

- [15] J.W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton University Press, 1965.
- [16] Joaquim Brugués Mora. *Morse Theory and Floer Homology*. Universitat Politècnica de Catalunya, Facultat de Matemàtiques i Estadística, 2019.
- [17] M. Morse. *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*. Transactions of the American Mathematical Society, 27, 3, 345-396, 1925.
- [18] R. Naim. *Morse theory*. Faculty of California State University, 2011.
- [19] L.I. Nicolaescu. *An invitation to morse Theory*. Springer, 2007.
- [20] A. Sard. *The measure of the critical values of differentiable maps of euclidean spaces*. Bulletin of the American Mathematical Society 48, 883-890, 1942.
- [21] L.W. Tu. *An introduction to manifolds*. Springer, 2011.
- [22] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and lie Groups*. Springer, 1983.