

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



Trabajo de Fin de Máster

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS
EN EL BALANCEO DE CARGA Y
ASIGNACIÓN DE PRECIOS EN REDES DE
ACCESO HETEROGÉNEAS
(ON THE USE OF GAME THEORY
TECHNIQUES FOR LOAD BALANCING AND
PRICE ASSIGNMENT WITHIN
HETEROGENEOUS ACCESS NETWORKS)**

Para acceder al Título de

**Máster en Tecnologías de la Información y
Comunicaciones en Redes Móviles (TICRM)**

Autor: Carmen López de la Torre

Julio - 2013

Resumen

El balanceo de carga es un problema de gran importancia dentro de los entornos de comunicaciones inalámbricas ya que es el proceso mediante el cual se administran correctamente los recursos disponibles, con el fin de ofrecer un servicio adecuado a los usuarios, y de que el reparto resulte eficiente para la red. En un entorno competitivo, en el que los operadores tienen que dedicar mayores esfuerzos para evitar que sus clientes abandonen la compañía (*churn rate*), la gestión de las políticas de precios es asimismo un problema importante. Unas políticas de precios adecuadas permitirán ofrecer precios más competitivos a los usuarios, además de hacer sostenibles a los operadores. Por otro lado, la Teoría de Juegos es una herramienta matemática en auge, y que también se está comenzando a aplicar en el entorno de las comunicaciones.

El objetivo de este proyecto es el de estudiar, de forma analítica, cuáles son las mejores estrategias de asignación de recursos y de precios para, por un lado, cursar una mayor carga de tráfico y, además, obtener el máximo beneficio posible en redes inalámbricas heterogéneas. Para solventar estos problemas se hará uso de la Teoría de Juegos. Las estrategias óptimas obtenidas serán comparadas con soluciones menos inteligentes, para poder analizar el beneficio real de las mismas.

Palabras clave — *Teoría de Juegos, Balanceo de Carga, Asignación de Precios, Redes Heterogéneas.*

Abstract

Load balancing is one of the key aspects in wireless communications systems. This is mostly because it defines how resources management is done, both in terms of user's quality of service and network's efficient resource distribution. On the other hand, in a competitive environment, in which all network operators need to make an effort in order to maintain a low customer churn rate, pricing policy management is a big problem as well. An adequate pricing policy will allow operators to offer better prices to its customers and, at the same time, will provide a good sustainability model to the operator itself. Besides, during the latest years, Game Theory has emerged as a very useful mathematic tool to be applied in the network communications field.

The objective of this project is to study, in an analytical way, which are the best resource and price assignment strategies to ensure a better resource exploitation, maximizing traffic load and benefits in heterogeneous wireless networks. In order to ease the resolution of these problems, Game Theory will be used to derive different strategies. The obtained optimal ones will then be compared with some traditional less intelligent solutions to analyze the real benefits of this work.

Key words — *Game Theory, Load Balancing, Price Assignment, Heterogeneous Networks.*

Índice general

	Página
Índice general	II
Índice de tablas	IV
1 Introducción y Objetivos	1
1.1. Objetivos	2
1.2. Estructura de la memoria	2
2 Estado del arte	4
2.1. Introducción a la Teoría de Juegos	4
2.1.1. Definición de Juego	4
2.1.2. Elementos del Juego	4
2.1.3. Tipos de Juego	5
2.1.4. Supuestos básicos	5
2.1.5. Notación y Definiciones	6
2.1.6. Representación	7
2.2. Análisis del comportamiento en configuraciones estáticas	7
2.2.1. Funciones Best Response	8
2.2.2. Estrategias dominantes	8
2.2.3. Dominancia débil	9
2.2.4. Concepto de Eficiencia: Eficiencia de Pareto	9
2.2.5. Conjuntos coherentes	10
2.2.6. Relación entre dominancia y mejor respuesta	11
2.3. Equilibrio de Nash	12
2.3.1. Diferencia entre Equilibrio de Nash y Óptimo de Pareto	13
2.3.2. Best Responses para definir el Equilibrio de Nash	14
2.3.3. Best Responses para encontrar el Equilibrio de Nash	15
2.4. Optimización No Lineal	16
2.5. Estudios previos	19
2.5.1. Asignación de recursos	19
2.5.2. Asignación de precios	22
3 Planteamiento del Problema	25
3.1. Modelo de Red	25
3.1.1. Modelado del escenario	25
3.1.2. Selección de Acceso	26
3.1.3. Análisis de esquemas de tarificación dinámica	27
3.2. Beneficios de los AEs	32
3.2.1. Beneficios en la asignación de recursos	32
3.2.2. Beneficios en la asignación de precios	33
3.3. Planteamiento del problema	34
3.3.1. JAR: Juego de Asignación de Recursos	34
3.3.2. JAP: Juego de Asignación de Precios	37

4	Implementación	39
4.1.	Introducción	39
4.2.	Gambit	40
4.3.	Recogida de datos y configuraciones	44
4.4.	Despliegue del escenario, establecimiento de conectividad y procesado de áreas	45
4.5.	Obtención de estrategias	48
4.5.1.	Obtención de estrategias - Asignación de Recursos	48
4.5.2.	Obtención de estrategias - Asignación de Precios	54
4.6.	Beneficios y Óptimo de Pareto	55
4.6.1.	Cálculo de los beneficios - Asignación de recursos	55
4.6.2.	Cálculo de los beneficios - Asignación de precios	57
4.6.3.	Óptimo de Pareto	59
4.7.	Comparación de estregias	59
5	Resultados	61
5.1.	Descripción de escenarios	61
5.2.	Estadísticas sobre estrategias y áreas	63
5.2.1.	Existencia Equilibrios de Nash	67
5.3.	Conectividad de los usuarios	68
5.4.	Resultados generales del escenario	70
5.4.1.	Problema asignación de recursos - Carga relativa total	70
5.4.2.	Problema asignación de precios - Beneficio medio total	72
5.5.	Resultados relativos al tipo de AE	74
5.5.1.	Problema asignación de recursos - Carga relativa respecto al tipo de AE	75
5.5.2.	Problema asignación de precios - Beneficio medio respecto al tipo de AE	78
6	Conclusiones y líneas futuras	82
A	Anexo.	85
A.1.	Escenario 2	85
A.2.	Escenario 3	88
A.3.	Escenario 6	91
A.4.	Escenario 7	94
A.5.	Ejemplo fichero de configuración - Asignación de Recursos	97
A.6.	Ejemplo fichero de configuración - Asignación de Precios	99
	Referencias	101

Índice de tablas

Tabla	Página
2.1. Ejemplo comparación dominancia y mejor respuesta.	11
2.2. Dilema del prisionero.	14
2.3. Utilización de las funciones de mejor respuesta para encontrar el Equilibrio de Nash en un juego de dos participantes con 3 posibles estrategias cada uno. . .	16
4.1. Áreas, conectividad y número de usuarios.	47
4.2. Áreas <i>single</i> y áreas <i>overlap</i>	48
4.3. Información de los AEs.	48
4.4. Información y particiones del AE1.	49
4.5. Información y particiones del AE2.	50
4.6. Información y particiones del AE3.	50
4.7. Resultado de la permutación en el AE1.	51
4.8. Resultado de la permutación en el AE3.	51
4.9. Limitación de recursos en el AE1.	52
4.10. Limitación de recursos en el AE3.	52
4.11. Estrategias factibles para el AE1.	53
4.12. Estrategias factibles para el AE3.	53
4.13. Resultado del producto cartesiano.	54
4.14. Estrategias de los AEs.	54
4.15. Resultado del producto cartesiano.	55
4.16. Ejemplo de obtención de beneficios - asignación de recursos.	56
4.17. Beneficio total AEs.	57
4.18. Ejemplo de obtención de beneficios - asignación de precios.	58
4.19. Beneficio total AEs.	58
5.1. Especificaciones AEs.	62
5.2. Características de los escenarios analizados.	62
5.3. Estadísticas 1-determinista.	64
5.4. Estadísticas 1-aleatorio.	64
5.5. Estadísticas 4-determinista.	65
5.6. Estadísticas 4-aleatorio.	65
5.7. Estadísticas 1-determinista en el problema asignación de precios.	66
5.8. Estadísticas 4-determinista en el problema asignación de precios.	66
A.1. Estadísticas 2-determinista.	86
A.2. Estadísticas 2-aleatorio.	86
A.3. Estadísticas 3-determinista.	88
A.4. Estadísticas 3-aleatorio.	88
A.5. Estadísticas 6-determinista.	91
A.6. Estadísticas 6-aleatorio.	91
A.7. Estadísticas 7-determinista.	94
A.8. Estadísticas 7-aleatorio.	94

Índice de figuras

Figura	Página
2.1. Ejemplo Pareto.	10
2.2. Representación gráfica del juego mostrado en la Tabla 2.1.	11
2.3. Áreas de cobertura en un escenario de acceso inalámbrico heterogéneo en [1].	20
2.4. Áreas de cobertura en un escenario de acceso inalámbrico heterogéneo en [2].	24
3.1. Ejemplo de escenario aleatorio.	26
3.2. Ejemplo de los recursos de un usuario en un área con tres elementos de acceso a los que poder conectarse.	27
3.3. Ejemplo de áreas de cobertura en un escenario de acceso inalámbrico heterogéneo.	28
3.4. Beneficio obtenido por el operador no convencional respecto del número de usuarios en el área solapada para los diferentes casos.	30
3.5. Beneficio total para los operadores AE1 y AE2. Los marcadores sólidos se refieren al AE1 y los vacíos al AE2.	31
4.1. Diagrama de bloques del programa.	41
4.2. Diagrama de bloques del script Perl.	42
4.3. Diagrama de bloques de la ejecución de la obtención de estrategias y de la comparación de estrategias.	43
4.4. Escenario ejemplo	46
5.1. Escenarios: 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.	63
5.2. Equilibrios de Nash para los tres escenarios deterministas.	67
5.3. Equilibrios de Nash para los tres escenarios aleatorios.	68
5.4. Conectividad en los despliegues tipo 1.	69
5.5. Conectividad en los despliegues tipo 4.	69
5.6. Carga relativa para los escenarios 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.	71
5.7. Carga relativa para los escenarios 1 aleatorio, 4 aleatorio y 5 aleatorio.	72
5.8. Beneficio medio total en los escenarios 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.	73
5.9. Beneficio medio total en los escenarios 1 aleatorio, 4 aleatorio y 5 aleatorio.	74
5.10. Carga relativa respecto al tipo de AE en los escenarios 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.	76
5.11. Carga relativa total y por tipo de estación para los modelos de operador preferido y calidad.	77
5.12. Carga relativa respecto al tipo de AE en los escenarios 1 aleatorio, 4 aleatorio y 5 aleatorio.	78
5.13. Beneficio medio respecto al tipo de AE en los escenarios 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.	79
5.14. Beneficio medio respecto al tipo de AE en los escenarios 1 aleatorio, 4 aleatorio y 5 aleatorio.	81

A.1. Carga Relativa Total para los escenarios 2.	86
A.2. Carga Relativa por tipo de AE para los escenarios 2.	87
A.3. Beneficio medio para los escenarios 2.	87
A.4. Beneficio medio por tipo de AE para los escenarios 2.	87
A.5. Carga Relativa Total para los escenarios 3.	89
A.6. Carga Relativa por tipo de AE para los escenarios 3.	89
A.7. Beneficio medio para los escenarios 3.	89
A.8. Beneficio medio por tipo de AE para los escenarios 3.	90
A.9. Carga Relativa Total para los escenarios 6.	92
A.10. Carga Relativa por tipo de AE para los escenarios 6.	92
A.11. Beneficio medio para los escenarios 6.	92
A.12. Beneficio medio por tipo de AE para los escenarios 6.	93
A.13. Carga Relativa Total para los escenarios 7.	95
A.14. Carga Relativa por tipo de AE para los escenarios 7.	95
A.15. Beneficio medio para los escenarios 7.	95
A.16. Beneficio medio por tipo de AE para los escenarios 7.	96

Introducción y Objetivos

El entorno de las comunicaciones inalámbricas ha seguido una continua evolución en los últimos años. Esto ha sido posible gracias a los incesantes avances desde los primeros sistemas en forma de redes móviles privadas *trunking* hasta los sistemas más recientes como son los estudios en el ámbito de la cuarta generación. Una de las características más importantes de estos últimos sistemas es el acceso inalámbrico heterogéneo. Esto permite ofrecer a los usuarios el acceso a diferentes redes desde sus dispositivos, dando lugar a un mercado más competitivo donde los operadores podrán ofrecer a los usuarios más servicios con una mejor calidad. Por otro lado, para que los operadores puedan ofrecer sus servicios de forma competente deberán de llevar a cabo, entre otras tareas, una gestión adecuada de sus recursos además de utilizar una política de precios que les haga sostenibles. Además, también será necesario cierto grado de cooperación entre dichos operadores ya que en ciertos casos en los que acciones conjuntas podrían aportarles a ellos y a los usuarios mayores beneficios.

La Teoría de Juegos nació como resultado de la simple interacción entre individuos para la resolución de problemas y conflictos. El juego está presente en el ser humano desde su más temprana infancia y no deja de estar presente en toda su vida, siendo el juego un modelo de situaciones conflictivas y cooperativas en las que aparecen situaciones que pueden mapearse en el mundo real, dando como resultado un conjunto de soluciones fruto de las distintas decisiones tomadas por los agentes implicados. En algunos casos, la Teoría de Juegos puede confundirse con la estadística, sin embargo, aunque la Teoría de Juegos utiliza herramientas estadísticas (probabilidad, media ponderada, distribución, etc.) el propósito de la Teoría de Juegos es diferente, ya que no pretende analizar el juego de azar si no que su objetivo es el estudio del comportamiento estratégico racional de los diferentes agentes implicados en él.

La Teoría de Juegos ha inspirado a cientos de especialistas en diferentes ámbitos para el desarrollo de teorías y modelos para sus problemas. Éstas teorías han

sido utilizadas en campos tan dispares como el militar, biología, política, psicología, etc. Sin embargo, el área en el que más éxito ha cosechado es en el económico, dando lugar a un fructífero conjunto de estudios y trabajos. En los últimos tiempos, las telecomunicaciones están siendo un nuevo campo de estudio para estas técnicas, presentándose como una herramienta útil para la resolución de problemas como los presentados en este proyecto.

Este proyecto se enmarca en una línea de investigación del Grupo de Ingeniería Telemática que ha formado parte del proyecto europeo *SAIL (Scalable and Adaptive Internet Solutions)* [3] y del proyecto nacional *C3SEM (Comunicaciones cognitivas y cooperativas en entornos heterogéneos)* [4]; concretamente en la selección de acceso y los algoritmos de decisión correspondientes. Por otro lado, este proyecto a dado lugar a dos publicaciones [5] [6].

1.1. Objetivos

En este proyecto Fin de Máster se pretende analizar diferentes comportamientos que puede tomar una red a la hora de, por un lado, asignar sus recursos entre las diferentes áreas en las que ofrece cobertura y, por otro lado, realizar una asignación de precios entre los que tiene disponibles, con el fin de obtener un mayor beneficio sin que el servicio se vea afectado. Para ello se utilizarán las herramientas proporcionadas por la Teoría de Juegos, analizando las situaciones como juegos no cooperativos con el objetivo de obtener el mayor beneficio posible, es decir, en el primer caso cada operador buscará el mayor número de usuarios posibles conectados a sus estaciones base, y en el segundo que el beneficio económico obtenido con los usuarios conectados sea máximo. Además, se realizará una comparativa para ambos problemas. En el problema de asignación de recursos se compararán los resultados obtenidos cuando se utiliza la estrategia óptima y cuando no se aplica ninguna restricción. En el problema de asignación de precios, se compararán los resultados obtenidos utilizando la estrategia óptima correspondiente y los resultados adquiridos cuando las estaciones ofrecen un único precio medio.

1.2. Estructura de la memoria

Para analizar adecuadamente los problemas presentados anteriormente, esta memoria se ha estructurado en varios capítulos que se describen brevemente a continuación.

- **Capítulo 2.** Estado del Arte.
En este capítulo se explicarán los conceptos básicos que deben conocerse para la completa comprensión de este proyecto además de exponer un conjunto de trabajos en los que también se llevan a cabo estudios similares y que sirven como motivación del proyecto realizado.
- **Capítulo 3.** Planteamiento del Problema.
En el Capítulo 3 se expondrá el planteamiento de los dos problemas objetivo de este proyecto con los diferentes enfoques abordados hasta seleccionar las opciones más correctas para obtener las respectivas soluciones.

- **Capítulo 4.** Implementación.

En este Capítulo se plantea detalladamente la implementación del problema así como los diferentes métodos, modelos y algoritmos utilizados para llegar a su solución óptima.

- **Capítulo 5.** Pruebas y resultados.

El Capítulo 5 tiene como objetivo exponer las diferentes medidas realizadas y los resultados obtenidos, así como una comparación entre los diferentes escenarios utilizados con el objetivo de evidenciar los beneficios que los operadores pueden obtener con la utilización de la estrategia óptima en ambos problemas.

- **Capítulo 6.** Conclusiones.

En este último capítulo se presentarán un conjunto de conclusiones sobre el trabajo realizado, y se expondrán diferentes vías para posibles líneas futuras.

Estado del arte

En este capítulo plantea una breve introducción a la Teoría de Juegos, profundizando en aquellos términos que serán fundamentales para una correcta comprensión de este proyecto [7] [8].

2.1. Introducción a la Teoría de Juegos

2.1.1. Definición de Juego

Un juego puede definirse como cualquier situación de decisión caracterizada por una interdependencia estratégica, gobernada por reglas y con un resultado definido.

La teoría de juegos modela y analiza, formalmente, las situaciones en las que los participantes tendrán que tomar decisiones que darán lugar a unas consecuencias mutuas, posiblemente conflictivas. Con el término “formalmente” se pretende poner de manifiesto el uso de una base lógica y matemática.

2.1.2. Elementos del Juego

- **Participantes.** Son los jugadores que toman parte en el juego, a los que se consideran racionales.
- **Acciones disponibles de cada participante.** Es el conjunto de decisiones (estrategias) que pueden ser tomadas en el transcurso del juego.
- **Objetivos de cada jugador.** Se corresponde con la función de beneficio de cada jugador, que responde a la pregunta ¿qué quiere conseguir y en cuánto lo valora?.
- **Orden de las acciones.** En general se tienen dos formas de ejecutar el juego. La primera es aquella en la que los jugadores pueden realizar un único movimiento y todos lo hacen de forma simultánea (o de forma secuencial, pero

sin que ningún jugador tenga conocimiento de los movimientos realizados por los otros jugadores). La segunda forma de juego es aquella en la que hay varios periodos y, por lo menos, algún jugador tiene la posibilidad de observar lo que otros jugadores hacen antes de tomar su propia decisión.

- **Información disponible.** La información disponible está relacionada con el conocimiento que los participantes tienen sobre las funciones objetivo del resto de jugadores. Se dice que el juego es de información completa cuando todos los jugadores conocen las funciones objetivo del resto. Por el contrario, se dice que el juego es de información incompleta cuando al menos un jugador tiene información imperfecta sobre las funciones objetivo, de al menos, otro jugador.

2.1.3. Tipos de Juego

Se pueden distinguir dos grandes ramas de Juegos, los **cooperativos** y los **no cooperativos**. Los primeros son aquellos en los que los jugadores toman decisiones de tal forma que los resultados obtenidos sean favorables a todos; es decir, habrá un consenso en utilizar aquellas estrategias que reporten un beneficio global mayor. Los últimos son aquellos juegos en los que se toman decisiones más egoístas, con las que se pretende obtener los resultados más favorables para cada jugador, sin tener en cuenta los beneficios del resto.

Los juegos pueden ser clasificados teniendo en cuenta diferentes aspectos: según la *forma de representación* (extensiva y estratégica o normal), según el *número de participantes* (unipersonal, bipersonal o n-personal), según el *orden de las acciones* (juegos estáticos o juegos dinámicos) o según la *información disponible* por los participantes (información completa o incompleta).

Algunos autores utilizan la forma de representación como método para la clasificación de los juegos. Sin embargo, se ha comprobado (a partir de la observación de los elementos de cualquier juego) que el método de representación no es inherente a la naturaleza del juego, por lo que, en este proyecto se ha utilizado el resto de formas de clasificación para definir el juego a utilizar.

En particular, los juegos implementados en este proyecto para los dos problemas pueden definirse como **Juego no cooperativo estático n-personal de información completa**. Se dice que es un juego estático porque los jugadores deciden solamente una vez y de forma simultánea; además aparecerán diferentes jugadores (en general el mínimo será de dos) por lo tanto se puede decir que el juego será n-personal; por último, se dice que es de información completa, porque todos los jugadores conocen las funciones objetivo (o de beneficio) del resto de participantes.

2.1.4. Supuestos básicos

Para que se produzca un situación de juego se tienen que dar los supuestos básicos que se enumeran a continuación:

- **Racionalidad.** Una vez que el juego ha sido especificado, el siguiente paso es analizar el comportamiento de los participantes. El análisis en la Teoría de Juegos se apoya en la premisa de que el comportamiento de cada jugador se

corresponderá con sus preferencias. Más concretamente se asume que, si las acciones de un jugador van a determinar cuáles serán sus ganancias, entonces escogerá aquella acción en la que la ganancia le favorezca más. La ventaja que ofrece el expresar los beneficios de forma numérica (además de ser más realista) es que, al representar preferencias, la racionalidad simplemente se corresponde con la maximización de la expectativa de pago. Por lo tanto, se debe asumir que cada jugador actúa para lograr la mayor expectativa de pago posible. En general, el objetivo fundamental es el de maximizar el beneficio propio. Sin embargo, no en todos los juegos ocurre así. Por ejemplo, pueden darse situaciones de juegos altruistas, en los que se podría querer maximizar el beneficio de otros jugadores. Sin embargo, en los juegos que se tratan en este proyecto se considerará el caso de la maximización del beneficio propio.

- **Common Knowledge.** A la hora de definir un juego, es de suma importancia precisar el modelo de información de los participantes en el juego. Un hecho fundamental es que los usuarios tengan total comprensión del juego completo. También debe darse el concepto *Common Knowledge*, que se define como: “Un hecho particular F se dice que es un *Common Knowledge* entre los jugadores si cada jugador conoce F , cada jugador sabe que el resto conoce F , que cada jugador sabe que todos los jugadores saben que cada jugador conoce F , etc.”

2.1.5. Notación y Definiciones

A continuación se revisa la notación que se utilizará a lo largo de la memoria para describir formalmente los juegos que se plantean en el marco de este proyecto. Además se presentan las definiciones básicas a conocer para la correcta comprensión de los problemas y las soluciones propuestas.

Notación

- Participantes. Los diferentes participantes se diferenciarán entre sí con un índice i , donde $i=1,2,\dots,N$.
- Acciones disponibles. El conjunto total de estrategias de cada jugador se denota como S_i . Cada estrategia individual perteneciente al conjunto S_i será denominada como s_i . Por lo tanto $s_i \in S_i$.
- Intereses de los jugadores. Cada jugador i tiene una función objetivo u_i , que depende de las acciones elegidas por todos los jugadores $u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ó $u_i(s_i, s_{-i})$ donde $s_{-i} = s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$.
- Orden de las acciones, reglas. Aunque no exista una notación específica debe de estar bien claro en la descripción de cada juego.

Definiciones

- Estrategia. Una estrategia es una acción concreta de un participante en un juego. Se trata de un plan “completo contingente”, en tanto en cuenta implica la completa especificación del comportamiento del jugador describiendo las acciones que éste podría tomar en cada momento.

Las estrategias pueden ser puras o mixtas; para explicar la diferencia entre ambas se debe de introducir el concepto de “*Belief*”¹ (creencia) que se refiere a las suposiciones que puedan tener los jugadores sobre las decisiones que pueden tomar el resto. Las estrategias mixtas están estrechamente relacionadas con el concepto anterior, ya que se trata de una selección de estrategias de acuerdo a una distribución de probabilidad. Por ejemplo, si un jugador puede escoger entre las estrategias U y D , una alternativa mixta implicaría que elegirá U con cierta probabilidad y D con otra.

Para evitar confusiones, a las estrategias regulares se las denomina estrategias puras, que son las que se han considerado en este proyecto.

- **Beneficio.** Para cada jugador i , se puede definir una función $u_i : S \rightarrow \mathfrak{R}$ (su dominio es el conjunto de perfiles estratégicos, y su rango son los números reales) tal que, para cada perfil de estrategias $s_i \in S_i$, $u_i(s_i)$ es el beneficio del jugador i . Esta función u_i se denomina *función beneficio o de utilidad* del jugador i .
- **Solución.** Una solución al juego siempre toma la forma de un conjunto de estrategias, una para cada jugador. Cada solución está asociada a un resultado, que es un conjunto de acciones, una para cada participante, con sus respectivos beneficios.

2.1.6. Representación

A lo largo de esta memoria se ofrecerán diferentes ejemplos que serán representados en *forma normal*, que es la alternativa de representación clásica utilizada en la Teoría de Juegos para juegos bipersonales.

Se trata de una representación en forma matricial, lo que no puede utilizarse para juegos de más de dos participantes. Las filas representan las estrategias posibles de uno de los jugadores, y las columnas representan las del otro jugador. Las casillas de la matriz contendrán dos valores, que se corresponden con los beneficios de los jugadores, habitualmente el primero para el jugador que está en las filas.

El tipo de juego en el que se centra este proyecto es n-personal, pero para ejemplificar ciertos conceptos será suficiente la utilización de juegos bipersonales.

2.2. Análisis del comportamiento en configuraciones estáticas

A continuación se describirán los conceptos más básicos en la teoría de interacción estratégica que se manejan en este proyecto, como son: la Dominancia, la Eficiencia (donde se explicará la Eficiencia de Pareto) y la Mejor Respuesta (*Best Response Functions*), que servirán como introducción al Equilibrio de Nash.

¹“Belief”, creer que el resto de jugadores va a utilizar una determinada estrategia.

2.2.1. Funciones Best Response

En juegos en los que cada participante tiene un conjunto finito y reducido de estrategias se pueden encontrar Equilibrios de Nash, término que se explicará en secciones posteriores, examinando individualmente cada perfil de estrategias para ver si se satisfacen las condiciones de equilibrio. En juegos más complejos resulta razonable trabajar con las funciones *Best Response* de los jugadores.

Considérese a un jugador, jugador i . Para cualesquiera estrategias escogidas por el resto de jugadores, las acciones del jugador i le proporcionarán diferentes beneficios. Teniendo en cuenta que se supone racional, escogerá aquellas que le brinden mayor beneficio.

Para establecer las mejores estrategias del jugador i , se utiliza la función B_i en función de las estrategias del resto de jugadores (s_{-i}).

De manera más precisa, se define la función B_i como,

$$B_i(s_{-i}) = \{s_i \text{ en } S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \text{ para todo } s'_i \text{ en } S_i\} \quad (2.1)$$

Se puede llamar B_i , **función de mejor respuesta del jugador i** , a cualquier estrategia en $B_i(s_{-i})$ que sea al menos tan buena para el jugador i como cualquier otra estrategia del mismo cuando las estrategias del resto de jugadores vienen dadas por s_{-i} .

Una característica de la función B_i es que asocia un conjunto de estrategias del jugador i a una lista de acciones del resto de jugadores. Cada miembro del conjunto $B_i(s_{-i})$ es una mejor respuesta del jugador i a s_{-i} : si cada uno del resto de jugadores están en el conjunto de s_{-i} , entonces el jugador i no puede escoger una opción mejor que una estrategia de $B_i(s_{-i})$.

Como se acaba de comentar, en algunos juegos, el conjunto $B_i(s_{-i})$ está formado por un conjunto de estrategias. Sin embargo, en otros, el conjunto $B_i(s_{-i})$ consiste en una única estrategia para las (s_{-i}) del resto de jugadores, esto es, no importa lo que el resto de jugadores hagan, el jugador i tiene una única estrategia óptima.

2.2.2. Estrategias dominantes

Imáginese la situación de conducir por una carretera con dos carriles en el sentido de conducción y encontrarse con un semáforo en rojo. El carril izquierdo está libre, mientras que en el carril derecho hay un coche que podría girar a la derecha cuando el semáforo se ponga en verde, en cuyo caso tendrá que esperar si algún peatón cruza la carretera. Asumiendo que se desea continuar el camino de la forma más rápida posible, la estrategia de permanecer en el carril izquierdo “domina estrictamente” a la estrategia de situarse en el lado derecho. Si el coche en el lado derecho tuerce a la derecha, entonces se perderá menos tiempo si el coche está en el carril izquierdo ya que el camino no se verá obstaculizado si algún peatón decide cruzar; y en el caso de que el coche no decida torcer a la derecha seguirá siendo una mejor estrategia situarse a la izquierda, ya que no se circulará detrás de ningún coche.

En cualquier juego, la estrategia de un jugador “domina estrictamente” a otra estrategia si ésta es superior, sin importar lo que hagan el resto de jugadores. Se

define formalmente la dominancia estricta tal y como sigue. En un juego estratégico con preferencias ordinales, la estrategia del jugador i denominada s_i'' domina estrictamente a su estrategia s_i' si:

$$u_i(s_i'', s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \text{ para cada } s_{-i} \text{ del resto de estrategias de los jugadores} \quad (2.2)$$

donde u_i es la función de utilidad del jugador i . La estrategia s_i' se dice, por tanto, que está estrictamente dominada.

Una estrategia estrictamente dominada no puede ser nunca una mejor respuesta para ningún conjunto de estrategias del resto de jugadores: no importa lo que éstos hagan ya que existirá alguna estrategia mejor.

Se debe resaltar que el hecho de que s_i'' domine estrictamente a la estrategia s_i' no implica que haga lo mismo con el resto de estrategias.

El uso de una estrategia estrictamente dominada es incompatible con un comportamiento racional de un jugador.

2.2.3. Dominancia débil

En un juego, la estrategia de un jugador “domina débilmente” a otra estrategia si la primera es al menos tan buena como la segunda, sin importar cuáles son las estrategias tomadas por el resto de los jugadores, y es mejor que la segunda estrategia para alguna combinación de estrategias del resto de los jugadores. Más estrictamente se define la dominancia débil como sigue:

En un juego estratégico con preferencias ordinales, la estrategia del jugador i , s_i'' , domina débilmente a su estrategia s_i' si:

$$u_i(s_i'', s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \quad (2.3)$$

para todas las combinaciones s_i de las estrategias del resto de jugadores y además

$$u_i(s_i'', s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \quad (2.4)$$

para alguna combinación s_i de las estrategias del resto de jugadores.

2.2.4. Concepto de Eficiencia: Eficiencia de Pareto

El concepto de eficiencia se basa en un criterio de bienestar con el que se puede juzgar el comportamiento en un juego. Supóngase que se quieren comparar los beneficios producidos por dos estrategias, s y s' . Se dice que s es más eficiente que s' , si todos los jugadores prefieren el beneficio de s al beneficio de s' , o si ambos son iguales, y el de s es estrictamente mayor para, al menos, uno de los jugadores. En términos matemáticos, s es más eficiente que s' si

$$u_i(s) \geq u_i(s') \quad (2.5)$$

para cada jugador i y la inecuación es estricta para, al menos, un jugador.

Una estrategia s se denomina “eficiente” si no hay otra estrategia que sea más eficaz; esto es, no hay otra estrategia s' tal que $u_i(s') \geq u_i(s)$ para todos los jugadores i y

$u_j(s') > u_j(s)$ para cualquier jugador j .

El concepto de eficiencia en Teoría de Juegos se denomina **Eficiencia de Pareto**, que toma nombre del sociólogo, economista, y filósofo italiano Wilfredo Pareto. Para entender mejor este concepto, se aplicará a un pequeño ejemplo: supóngase que los beneficios de dos jugadores A y B vienen descritos por la Figura 2.1. De ella se pueden obtener las siguientes conclusiones:

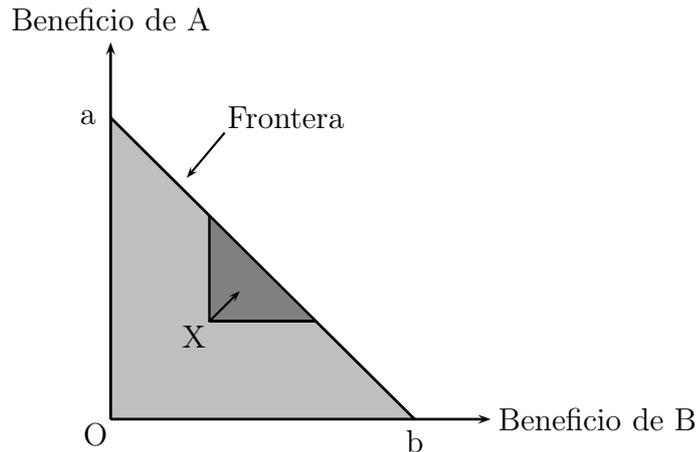


Fig. 2.1: Ejemplo Pareto.

- Cualquier punto dentro del triángulo limitado por los puntos a , b y O no es óptimo de Pareto, ya que cada jugador puede mejorar su beneficio realizando un movimiento. Véase como ejemplo el punto X .
- Los movimientos dentro del triángulo hacia la frontera son mejoras de Pareto, ya que mejoran en ambos beneficios.
- Sólo los puntos de la frontera son óptimos de Pareto.

2.2.5. Conjuntos coherentes

El concepto de coherencia implica que los jugadores no tienen razón alguna para desviarse de sus acciones en el juego. En otras palabras, cada jugador selecciona la mejor respuesta. Se puede pensar en un conjunto de estrategias como coherente si la estrategia correspondiente a cada jugador dado es mejor respuesta para algún *belief* sobre las estrategias del resto.

Considérese, por ejemplo, un conjunto de perfiles de estrategias $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, donde $X_i \subset S_i$ para cada jugador i . El conjunto X es denominado débilmente coherente si, para cada jugador i y cada estrategia $s_i \in X_i$, hay un un *belief* $\Theta_{-i} \in \Delta X_{-i}$ (poniendo probabilidad sólo en las estrategias en X_i) tal que $s_i \in BR_i(\Theta_{-i})$. El conjunto X se denomina **mejor respuesta completa** si, para cada jugador i y cada *belief* $\Theta_i \in \Delta X_i$, este es el caso que $BR_i(\Theta_{-i}) \subset X_i$.

Tabla 2.1: Ejemplo comparación dominancia y mejor respuesta.

	$L(p)$	$R(1-p)$
U	(6,3)	(0,1)
M	(2,1)	(5,0)
D	(3,2)	(3,1)

Finalmente, se puede decir que X es **coherente** si es débilmente coherente y mejor respuesta completa.

2.2.6. Relación entre dominancia y mejor respuesta

Hay una relación precisa entre dominancia y mejor respuesta. Para un juego dado, supóngase UD_i el conjunto de estrategias para un jugador i que no están estrictamente dominadas, y supóngase B_i el conjunto de estrategias del jugador i que son mejor respuesta, bajo todas los posibles *beliefs* de un jugador i . Matemáticamente:

$$B_i = \{s_i \mid \text{hay un belief } \theta_{-i} \in \Delta S_{-i} \text{ tal que } s_i \Delta BR_i(\theta_{-i})\} \quad (2.6)$$

Esto es, si una estrategia s_i es una mejor respuesta a algún posible *belief* del jugador i , entonces s_i está contenida en B_i .

Para explicar la diferencia entre ambos términos, se utilizará el ejemplo mostrado en la Tabla 2.1

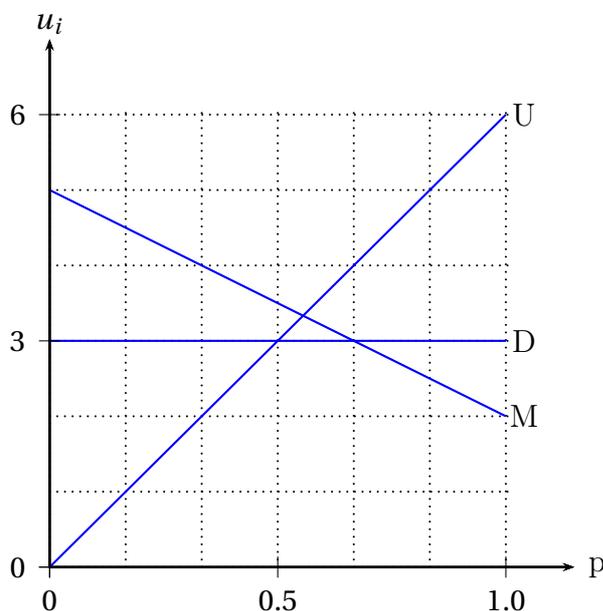


Fig. 2.2: Representación gráfica del juego mostrado en la Tabla 2.1.

En primer lugar, observar que R es una estrategia dominada para el jugador 2. Así, $ND_2 = L$ en este juego. Observar también, que la estrategia R no puede ser nunca una mejor respuesta del jugador 2, ya que L ofrece un beneficio mayor para cualquier elección del jugador 1, es decir, la mejor respuesta del jugador 2 será siempre seleccionar L . Por tanto, $B_2 = L$. Obviamente, $B_2 = ND_2$ y, para este juego,

dominancia y mejor respuesta tienen la misma solución a raíz del comportamiento racional del jugador 2.

Para continuar con el ejemplo, considerar las estrategias del jugador 1. Como puede observarse ni U ni M están dominadas. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el caso de D, no está dominada como estrategia pura, pero sí está dominada por la estrategia mixta con 1/3 de probabilidad en U, 2/3 en M y 0 en D. Por tanto, el conjunto de estrategias no dominadas para el jugador 1 es $ND_1 = \{U, M\}$. Para encontrar el conjunto de mejores respuestas, es preciso observar la figura ??, en la que los beneficios del jugador 1 están expuestos en función de la probabilidad (p) de que el jugador 1 crea que el jugador 2 escogerá L. Hay valores de p que hacen que U y M sean mejor respuesta, pero ninguno que haga que D lo sea. Por lo tanto, en este juego se tiene $B_1 = \{U, M\}$ y además $B_1 = ND_1$.

Hasta ahora se puede concluir que las estrategias son mejor respuesta si y sólo si no están estrictamente dominadas. Para un juego de dos jugadores puede determinarse que,

$$\text{En un juego finito de dos jugadores, } B_1 = ND_1 \text{ y } B_2 = ND_2 \quad (2.7)$$

Para juegos con más de dos jugadores, la relación entre dominancia y mejor respuesta es algo más complicada y requiere de una mejor comprensión de los tipos de “beliefs” que tienen los jugadores. Explicar este punto sería algo que se sale de los propósitos de este proyecto, pudiendo consultar para más información [8]. La clave está en si los “beliefs” de un jugador muestran correlación con las estrategias de jugadores oponentes. Supóngase B_i tal que no existe correlación, y B_i^c que sí la permite. El resultado general es:

$$\text{Para un juego finito, } B_i \subset ND_i \text{ y } B_i^c = ND_i \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

Esto es, si los jugadores toman sólo “beliefs” incorrelados, entonces las estrategias estrictamente dominadas nunca son mejor respuesta. Si los jugadores toman “beliefs” correlados, entonces una estrategia es no dominada, si y sólo si es mejor respuesta a algún *belief*.

2.3. Equilibrio de Nash

¿Qué estrategias escogerán los jugadores en un juego? Se debe asumir, partiendo de la teoría del jugador racional, que cada jugador escoge la alternativa que le reporte un mayor beneficio. En un juego, la mejor táctica para cualquier jugador depende, en general, de las estrategias del resto de participantes. Por lo tanto, cuando un jugador escoja su estrategia debe tener en mente las acciones del resto de jugadores. Esto es, debe establecer un *belief* sobre las estrategias del resto.

Para ello el jugador se basa en los supuestos básicos de cualquier juego, de tal manera que todos los jugadores saben que el resto se comporta de forma racional y todos conocen que el resto es consciente de que su comportamiento será racional.

Una forma adecuada para reflejar la idea de estrategia segura es asumir que los jugadores se han coordinado en un perfil de estrategias único. Desde esta perspectiva, la coherencia hasta ahora esbozada verbalmente tiene una interpretación sencilla e intuitiva. Por ejemplo, un acuerdo entre personas sobre cómo jugar un

juego suele tomarse como un simple acuerdo para seleccionar una estrategia determinada. Combinando la coordinación en un perfil de estrategia, con el concepto de coherencia débil, permite una sencilla, pero extremadamente poderosa, teoría de comportamiento.

Esta es una de las muchas contribuciones del Nobel John Nash al campo de la Teoría de Juegos. Nash definió un concepto de equilibrio para juegos - ahora conocido como Equilibrio de Nash- que se corresponde, precisamente, con una estrategia débilmente coherente. Dicho de otra forma, un Equilibrio de Nash no tiene estrategias no seguras: el *belief* de cada jugador sobre el resto de estrategias está reflejada en el conjunto de acciones tomadas por el resto de jugadores. Más formalmente:

Un perfil de estrategia $s \in S$ es un **Equilibrio de Nash** si y sólo si $s_i \in BR_i(s_{-i})$ para cada jugador i . Esto es, $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ para cada $s'_i \in S_i$ y cada jugador i .

Una versión más precisa del concepto de equilibrio es el *Equilibrio de Nash estricto*. Un perfil de estrategia s se llama *Equilibrio de Nash estricto* si y sólo si $\{s_i\} = BR_i(s_{-i})$ para cada jugador i . En otras palabras, s es un equilibrio de Nash estricto si y sólo si $\{s\}$ (el conjunto de estrategias que comprende sólo al perfil s) es coherente.

Llegados a este punto se deben tener en cuenta un conjunto de aspectos adicionales. En primer lugar, cada equilibrio de Nash es una estrategia racional. En segundo lugar, la definición no implica la existencia de un equilibrio de Nash ni que si existe éste sea único. En el capítulo de resultados (Capítulo 5) se retomará este tema más profundamente.

Es importante destacar la característica de unilateralidad, ya que ello traduce el carácter no cooperativo de las elecciones individuales (el “cada cual para sí mismo”). Es por tanto plausible que en un equilibrio de Nash, el beneficio se pueda mejorar para todos tras un cambio simultáneo de estrategia por parte de varios jugadores.

El equilibrio de Nash ocupa un lugar central en la teoría de juegos; constituye de alguna manera una condición mínima de racionalidad individual ya que, si una combinación de estrategias no es un equilibrio de Nash, existe al menos un jugador que puede aumentar sus ganancias cambiando de estrategia y, en consecuencia, ésta difícilmente se puede considerar una “solución” del modelo en la medida en que el jugador interesado en cambiar descarta su elección, después de conocer la de los otros. Ahora bien, el recíproco de esta proposición no es generalmente cierto: si un juego admite un equilibrio de Nash, no existe una razón a priori para que éste aparezca como la “solución” evidente, la más lógica para todos los jugadores. De todo esto se deduce que los juegos admiten varios equilibrios de Nash.

2.3.1. Diferencia entre Equilibrio de Nash y Óptimo de Pareto

Se explicará la diferencia entre estos dos conceptos con la ayuda de uno de los juegos más estudiados en la Teoría de Juegos: “El dilema del prisionero”.

Dos sospechosos de un crimen son encerrados en celdas diferentes. Hay suficientes pruebas para declarar culpable a cada uno de ellos por delitos menores, pero

Tabla 2.2: Dilema del prisionero.

	<i>Sospechoso 2 Confiesa</i>	<i>Sospechoso 2 No Confiesa</i>
<i>Sospechoso 1 Confiesa</i>	(3,3)	(0,10)
<i>Sospechoso 1 No Confiesa</i>	(10,0)	(1,1)

no las suficientes para declararlos culpables de un crimen mayor, a no ser que uno de ellos confiese en contra del otro. Si ambos no confiesan, cada uno será condenado por el delito menor y tendrán un año de prisión. Si uno de ellos confiesa el crimen, entonces él será liberado y el otro tendrá una pena de diez años. Si ambos confiesan, cada uno tendrá tres años de cárcel. El juego se define como:

- Jugadores: los dos sospechosos.
- Estrategias: el conjunto de acciones de cada jugador es {No confiesa, Confiesa}.
- Preferencias: en la Tabla 2.2 se representa el juego en forma matricial, en ella se puede observar cuáles son las estrategias y sus respectivos beneficios.

Si 2 confiesa, 1 preferirá confesar, ya que si lo hace obtendrá una pena de tres años, y en caso contrario, sería de diez años. Si 2 no confiesa, 1 preferirá confesar, ya que de este modo será liberado, y obtendría una pena de un año. Por tanto, 1 va a confesar, independientemente de lo que haga 2. De la misma manera, 2 también va a confesar independientemente de lo que haga 1. Es decir, ambos sospechosos van a confesar, obteniendo entonces una pena de tres años de prisión cada uno. Este es el equilibrio del juego, que es ineficiente en el sentido de Pareto, ya que se podría reducir la condena de ambos si ninguno confesara.

Este es un ejemplo muy claro del hecho de que un Equilibrio de Nash no tiene que ser eficiente en términos de Pareto. Lo que marca la diferencia esencial entre estos dos conceptos es la unilateralidad en la definición del equilibrio. En el ejemplo anterior, la estrategia en la que los dos sospechosos confiesan no puede mejorarse unilateralmente, es decir, si uno de ellos mantiene su estrategia fija el otro jugador no podrá mejorar su beneficio si cambia de estrategia.

2.3.2. Best Responses para definir el Equilibrio de Nash

Un Equilibrio de Nash es un perfil de estrategias con la propiedad de que ningún jugador puede mejorar su beneficio cambiando su estrategia, permaneciendo fijas las acciones del resto de jugadores. Haciendo uso de la terminología introducida en la sección anterior, se puede definir, alternativamente, un Equilibrio de Nash como un perfil de estrategias, en las que cada acción de un jugador es una *Best Response* a las acciones del resto.

Proposición. La estrategia s^* es un Equilibrio de Nash de un juego con preferencias ordinales si y sólo si cualquier estrategia de un jugador es una mejor respuesta a las estrategias del resto:

$$s_i^* \in B_i(s_{-i}^*) \text{ para todos los jugadores } i \quad (2.9)$$

Si cada jugador i tiene una única mejor respuesta para cada conjunto s_{-i} de las estrategias del resto de jugadores, se puede escribir la condición de la ecuación 2.9 como un sistema de ecuaciones. En este caso, para cada jugador i y cada lista s_{-i} de las acciones del resto de jugadores, se denota a la estrategia $B_i(s_{-i})$ por $b_i(s_{-i})$ (esto es, $B_i(s_{-i}) = \{b_i(s_{-i})\}$). Por lo tanto, 2.9 es equivalente a

$$s_i^* = b_i(s_{-i}^*) \text{ para cada jugador } i, \quad (2.10)$$

que se corresponde con un conjunto de n ecuaciones con n incógnitas s_i^* , donde n es el número de jugadores en el juego. Por ejemplo, en un juego con sólo 2 participantes, 1 y 2, estas ecuaciones son

$$s_1^* = b_1(s_2^*) \quad s_2^* = b_2(s_1^*) \quad (2.11)$$

Esto es, en un juego bipersonal en el que los jugadores tienen una única Best Response para cualquier acción del resto de jugadores, (s_1^*, s_2^*) es un Equilibrio de Nash si y sólo si la estrategia del jugador 1, s_1^* , es su mejor respuesta a la estrategia del jugador 2, s_2^* , y la estrategia del jugador 2, s_2^* , es su *Best Response* a la estrategia del jugador 1, s_1^* .

2.3.3. Best Responses para encontrar el Equilibrio de Nash

La definición de Equilibrio de Nash en términos de las funciones *Best Response* lleva a un método para encontrar Equilibrios de Nash, que se describe a continuación,

- Encontrar la función de mejor respuesta para cada jugador.
- Encontrar los perfiles de estrategias que satisfagan la ecuación 2.9 (que se reduce a la ecuación 2.10, si cada jugador tiene una única *Best Response* para cada conjunto de estrategias del resto de jugadores).

Para ilustrar este método, considérese el juego de la Tabla 2.3. Primero, se debe encontrar la mejor respuesta del jugador 1 a cada estrategia del jugador 2. Si el jugador 2 escoge L, entonces la mejor respuesta del jugador 1 es M (2 es el mayor beneficio del jugador 1 en esta columna), se indica la mejor respuesta con un asterisco en el pago del jugador 1 para (M,L), si el jugador 2 escoge C, entonces la mejor respuesta del jugador 1 es T, marcando con un asterisco el pago del jugador 1 (T,C) y, si el jugador 2 escoge R, entonces, ambas T y B son mejores respuestas para el jugador 1; ambos están marcados con asterisco. En segundo lugar, se deben encontrar las mejores respuestas del jugador 2 para cada estrategia del jugador 1 (para cada fila, encontrar el mayor beneficio del jugador 2); estas mejores respuestas están indicadas con un asterisco en los pagos del jugador 2. Finalmente, se debe encontrar aquellas celdas de la matriz en la que los beneficios de ambos jugadores estén marcados con el asterisco. Cada una de esas posiciones serán un Equilibrio de Nash: el asterisco en el beneficio del jugador 1 indica que esa estrategia es la mejor respuesta a las del jugador 2, mientras que el asterisco en el beneficio del jugador 2 indica que esa estrategia es la mejor respuesta a las del jugador 1. Por ello, se puede concluir, que el juego propuesto tiene dos equilibrios de Nash: (M,L) y (B,R).

Tabla 2.3: Utilización de las funciones de mejor respuesta para encontrar el Equilibrio de Nash en un juego de dos participantes con 3 posibles estrategias cada uno.

	L	C	R
T	1,2*	2*,1	1*,0
M	2*,1*	0,1*	0,0
B	0,1	0,0	1*,2*

2.4. Optimización No Lineal

Los analistas de la investigación operativa (búsqueda de modelos y algoritmos para realizar un proceso de toma de decisiones), los ingenieros, los matemáticos, los administradores, etc. tienen que enfrentarse diariamente a problemas que necesitan ser resueltos. Estos problemas pueden ser: obtener un diseño óptimo, una asignación de recursos (en general escasos), una planificación de operaciones industriales, o determinar la trayectoria de un cohete.

Antiguamente, era aceptable obtener un amplio rango de soluciones. En diseño de ingeniería, por ejemplo, era común incluir un factor de seguridad que ofrecía cierto margen de seguridad. Sin embargo, debido a unos requerimientos cada vez más exigentes, no es adecuado simplemente llegar a soluciones aceptables sino que se demandan diseños mucho más precisos. Por lo tanto, hay una necesidad real de contestar a algunas preguntas como: ¿Se está haciendo un uso eficiente de los recursos? ¿Se pueden obtener diseños más eficientes? En respuesta a estas y otras preguntas, han aparecido una gran cantidad de estudios relacionados con modelos y técnicas de optimización. Afortunadamente, de forma paralela a estos estudios, se han ido desarrollando y mejorando diversas herramientas informáticas que han ayudado a mejorar el área de la optimización.

Si todas las funciones a optimizar son lineales, se habla entonces de Optimización o Programación Lineal; en caso contrario, el problema se denomina de Programación No Lineal.

El descubrimiento de algoritmos robustos y altamente eficientes, la cada vez más alta velocidad en la computación y las ventajas del modelado matemático han aportado importantes herramientas a la Programación Lineal (PL). Sin embargo, existen problemas más realistas que no pueden ser aproximados por modelos lineales, debido a la naturaleza no lineal de la función objetivo o de las restricciones (que son aquellas funciones que limitan el rango de los resultados posibles de la función objetivo). Durante las pasadas cuatro décadas se ha realizado un gran esfuerzo en resolver estos problemas lo que ha dado lugar a grandes avances en este área.

Volviendo al tema central del proyecto, en cualquier juego dado, el beneficio que obtiene cada participante está especificado por una función de beneficio, también llamada función de utilidad, que tiene que ser propuesta a la hora de definir el juego. En este proyecto, se estuvieron barajando diferentes funciones que podían adaptarse a los tipos de juego especificados, con ayuda de un escenario inicial simple, que más tarde podría generalizarse.

A la hora de obtener la función de utilidad se tiene que tener claro qué características se desean, para lo que se debe de tener en cuenta el resultado al que

se quiere llegar. **A partir de la función de utilidad se pretende encontrar los valores**, que representan los recursos o precios ofrecidos por cada operador en cuestión, **que maximicen su beneficio**. En un primer momento se comenzó analizando el problema de balanceo de carga, aunque las conclusiones obtenidas también se extrapolaron al problema de asignación de precios. Para ello en un principio se deriva la función de utilidad de cada operador respecto a los recursos ofrecidos por dicho operador, igualándola a 0.

A partir del resultado anterior, se pueden hacer dos observaciones. La primera, que las soluciones obtenidas a partir de derivar e igualar a 0 deben de ser cantidades enteras, ya que son recursos, capacidad de conexión de un usuario o no, que se han discretizado en el marco del proyecto (este aspecto se tratará con mayor nivel de detalle en apartados posteriores). Además, las funciones no pueden ser lineales, ya que de ser así no podrían encontrarse soluciones.

La Programación No Lineal (PNL) tiene como objetivo proporcionar un conjunto de resultados y técnicas orientadas a encontrar los puntos óptimos para una función entre un determinado conjunto de posibilidades, teniendo en cuenta que tanto la función a optimizar como las posibles restricciones existentes pueden ser no lineales.

La estructura puede ser muy diferente de un problema a otro, dependiendo de las funciones (objetivo y restricciones) que intervengan, por lo que su resolución es más complicada que en el caso lineal.

Si se toman como referencia de clasificación de los problemas de Programación No Lineal las restricciones, se encuentran tres tipos: problemas sin restricciones, problemas con restricciones de igualdad y problemas con restricciones de desigualdad. El tipo concreto que se define en el marco de este proyecto pertenece al último caso.

El problema puede definirse en lenguaje matemático como:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ & \text{Sujeto a: } \begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b_2 \\ \dots\dots \\ g_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b_n \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

o, de forma más compacta:

$$\begin{cases} \text{Max } f(x) \\ \text{s.a } g(x) \leq b \end{cases} \quad (2.13)$$

donde:

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ son las variables de decisión.
- $f : D \subseteq R^n \rightarrow R$ es la función que se desea optimizar, y D su dominio.
- $g : D \subseteq R^n \rightarrow R^m$ es una función vectorial $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ compuesta por las restricciones.
- $b \in R^m$ es el vector de términos independientes, o recursos. Cada expresión $g_i(x) \leq b_i$ determina una restricción sobre las variables.

Se denomina conjunto factible al conjunto de puntos D que satisfacen las restricciones del problema:

$$X = \{x \in D \mid g(x) \leq b\}$$

Se dice que una combinación de variables x es factible si pertenece a X .

El tipo de problemas expuestos es de mucha utilidad en actividades económicas. Normalmente, se dispone de cantidades limitadas de recursos, pero no es necesario emplear todos, sino sólo aquellos que sean estrictamente necesarios. Por lo tanto, es posible obtener soluciones óptimas que permiten no saturar la totalidad de los recursos.

En cuanto a la representación de los problemas de Programación No Lineal, existen varias alternativas. Al contrario que en la optimización lineal, en la que existe un algoritmo que resuelve muchos tipos de problemas, se han tenido que desarrollar diferentes algoritmos para algunos tipos especiales de PNL. En consecuencia, hay otras clasificaciones de problemas, además de los mencionados anteriormente. A continuación se nombran los más importantes:

- Programación cuadrática. La función objetivo $f(x)$ debe ser cuadrática, aunque las restricciones sean lineales. La única diferencia entre éstos y un problema lineal es que algunos términos de la función objetivo incluyen el cuadrado de una variable o el producto de dos variables.
- Programación convexa. Si la función objetivo es cóncava (problema de maximización) o convexa (problema de minimización) y el conjunto de restricciones es convexo, entonces se puede utilizar el método general de optimización convexa.
- Programación no convexa. La programación no convexa incluye todos los problemas de programación no lineal que no satisfacen las suposiciones de la programación convexa. En este caso, aun cuando se tenga éxito en encontrar un máximo local (punto de la función objetivo que toma el valor máximo de todos los puntos de su entorno), no hay garantía de que sea también un máximo global (punto de la función objetivo que toma el valor máximo de todos los puntos factibles). Por lo tanto, no existe un algoritmo que garantice encontrar una solución óptima para todos estos problemas, pero sí existen algunos algoritmos bastante adecuados para encontrar máximos locales.
- Programación separable. En este caso todas las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen que ser funciones separables, que son aquellas en las que cada término incluye una única variable, por lo que la función se puede separar como suma de funciones de variables individuales.
- Programación geométrica. Las funciones objetivo y de restricción toman la forma:

$$g(x) = \sum_{i=1}^N c_i P_i(x),$$

en donde

$$P_i(x) = x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_n^{a_{in}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N.$$

Estas funciones no son, por lo general, ni cóncavas ni convexas, por lo que las técnicas de programación convexa no pueden aplicarse directamente a estos problemas. Sin embargo, existe algún caso en el que se puede transformar en un problema de programación convexa equivalente, cuando todos los coeficientes c_i en cada función son estrictamente positivos, y la función objetivo se tiene que minimizar.

- Programación fraccional. En este caso la función objetivo es una fracción, es decir, la razón o cociente de dos funciones.

El problema de balanceo de carga que se plantea en este trabajo puede tener varias restricciones, como pueden ser que un operador no pueda asignar más recursos que los que tiene disponibles, o que los recursos en un área estén limitados por el número de usuarios en dicho área. En el problema de asignación de precios la restricción principal es que el precio a ofrecer debería ser uno de los disponibles en el vector de precios disponibles. En apartados posteriores se mostrará la función de utilidad finalmente utilizada que tiene ciertas características anteriormente comentadas.

2.5. Estudios previos

Ante el propósito de la aplicación de la Teoría de Juegos en Comunicaciones, se analizaron diferentes estudios centrados tanto en la asignación de recursos como en la asignación de precios que sirvieron como motivación y como base para la realización de este proyecto.

2.5.1. Asignación de recursos

Uno de los trabajos más destacados en la resolución del problema de asignación de recursos es el llevado a cabo por Niyato y Hossain [1]. Este trabajo está basado en la premisa de que una de las características más importantes de la cuarta generación (4G) de comunicaciones móviles será su elevada heterogeneidad, en la que un móvil podrá conectarse a varias redes. Éste hecho permitirá ofrecer una mayor calidad de servicio, habilitando múltiples servicios, como puede ser el streaming multimedia.

En estos escenarios de acceso heterogéneos los mecanismos de gestión de recursos radio (RRM, *Radio Resource Management*), con funciones como la asignación de recursos, control de congestión y el control de admisión, deben ser diseñados para satisfacer los requerimientos tanto de los usuarios como de los operadores. Niyato y Hossain presentan un marco RRM basado en Teoría de Juegos para accesos radio en escenarios de redes heterogéneas. El objetivo es maximizar el beneficio de las redes a partir de una asignación de recursos eficiente, dotando de diferentes niveles de prioridad entre diferentes tipos de conexiones: nuevas y provenientes de trasposos (vertical u horizontal) sin que se vean afectadas las que ya están en curso.

El marco RRM propuesto está compuesto por 4 elementos:

- Asignación de ancho de banda a nivel de red. El ancho de banda ofrecido por los diferentes accesos es asignado a las áreas de servicio, de forma que todos los proveedores queden satisfechos con dicho reparto.
- Reserva de capacidad. Basándose en la asignación de ancho de banda a nivel de red, se utiliza una capacidad de reserva como servicio diferenciador entre nuevas conexiones y las provenientes de traspaso, tanto vertical como horizontal.
- Asignación a nivel de conexión. El ancho de banda requerido es asignado a una conexión entrante en un área de servicio a partir de los recursos de las diferentes redes en el alcance del usuario.
- Control de admisión. Utiliza los resultados de la reserva de capacidad junto con la asignación a nivel de conexión para decidir si una llamada entrante es o no aceptada.

Para acometer el estudio llevado a cabo en [1], se ha tenido en cuenta un escenario muy concreto que se describe a continuación.

Se parte de una región que está totalmente cubierta por una estación WMAN y, parcialmente, por estaciones base celulares y otra parte más pequeña de ésta última por puntos de acceso WLAN (que son las que tienen una cobertura menor). Los usuarios tendrán acceso a diferentes redes, dependiendo del área en el que se encuentren. Como puede verse en la Figura 2.3 el área 1 sólo tiene el servicio WMAN disponible. En las áreas 2 y 4, están disponibles los recursos de la WMAN y de las redes celulares. En las áreas 3 y 5, los usuarios pueden conectarse a cualquiera de las redes mencionadas anteriormente.

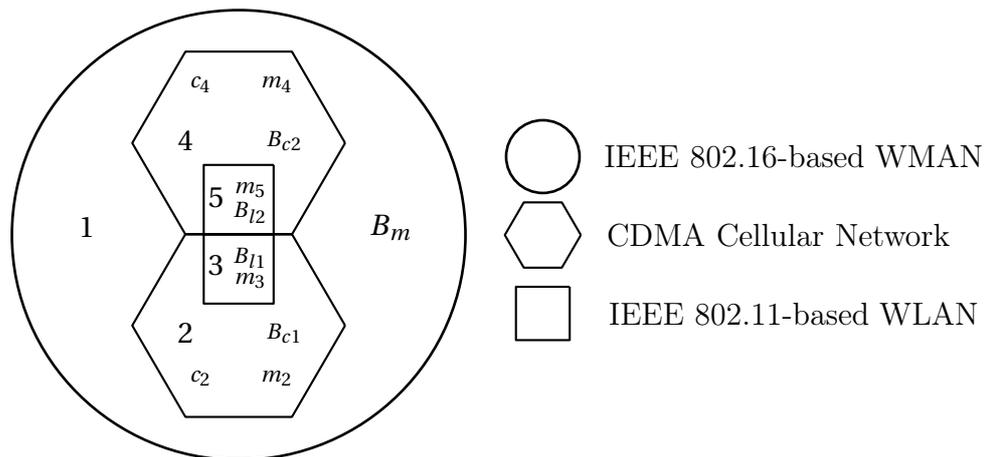


Fig. 2.3: Áreas de cobertura en un escenario de acceso inalámbrico heterogéneo en [1].

En el modelo de sistema bajo consideración, hay múltiples proveedores de servicio que ofrecen servicios de forma no cooperativa. En particular, los operadores apuestan para maximizar su beneficio ofreciendo diferentes anchos de banda a las conexiones. Dado que cada proveedor de servicio tiene interés en maximizar su beneficio, el problema de asignación de ancho de banda puede ser modelado como

un juego no cooperativo, en el que la solución satisfaga a todos los proveedores. Por lo tanto, para la asignación de ancho de banda a nivel de red, asumiendo a los proveedores racionales, se formula un juego no cooperativo, obteniendo su solución a partir del Equilibrio de Nash. Por otro lado, el problema de la reserva de capacidad para conexiones nuevas y de traspaso, puede ser formulado como un problema de uso compartido de recursos. En este caso, puede utilizarse una negociación entre jugadores para alcanzar un reparto justo y eficiente. Por tanto, se utiliza una formulación de juego de tipo “negociación” para obtener un reparto justo. En un juego de “negociación”, las conexiones nuevas, las de traspaso vertical y traspaso horizontal, negocian unas con otras para obtener los umbrales de reserva y así alcanzar los requerimientos de QoS (*Quality of Service*, calidad de servicio) del nivel de conexión para los diferentes tipos de conexión. En este caso, se considera de nuevo el equilibrio como la solución del juego.

Para la asignación de ancho de banda en el nivel de conexión, el problema es modelado como un *trading market*. En un área de servicio, cada red se asume racional y “egoísta”, en tanto en cuanto pretende maximizar su propio beneficio, por lo que las redes tratan de encontrar, de forma no cooperativa, la estrategia óptima (la que maximiza sus beneficios). Además, estas estrategias deben ser estables de tal manera que todos los proveedores estén satisfechos con las soluciones dadas por las estrategias de otros proveedores. Se establece una función de beneficio para una oferta de ancho de banda de una red a una conexión entrante, considerando la utilidad que obtiene la red al ofrecer dicha cantidad de ancho de banda, y el coste que le supone. Para resolver este juego no cooperativo se obtiene la solución del Equilibrio de Nash como la cantidad de ancho de banda ofrecida por cada red a una conexión entrante.

Ambas, la asignación a nivel de red y a nivel de conexión, son modeladas basándose en la media del número de conexiones entrantes en un área de servicio, que podría ser obtenida a partir de estadísticas de la red.

Niyato y Hossain presentan además dos algoritmos (búsqueda e iterativo) para obtener el equilibrio de Nash. Para el algoritmo de búsqueda, se formula un problema de optimización que es resuelto con un método directo de búsqueda estándar. De este método, del que se puede encontrar el resto de información en [1], se obtiene la siguiente observación: “El Equilibrio de Nash del juego no cooperativo tratado tiene solución única”. Por otro lado, el algoritmo iterativo toma ventaja de la estructura del problema para obtener la solución iterativamente. La observación a la que se llegó en el estudio de este algoritmo fue la siguiente: “A partir de un punto inicial, el algoritmo iterativo converge”. También se realizó una comparación en cuanto a eficiencia de ambos algoritmos, llegando al resultado de que el algoritmo iterativo puede alcanzar la solución final en menor tiempo que el algoritmo de búsqueda.

La principal diferencia entre el trabajo realizado en [1] y el expuesto en este proyecto, radica en el modelado de los recursos ofrecidos; en el caso de [1] son continuos, utilizando el ancho de banda. Sin embargo, en el caso de este proyecto, se utilizan recursos discretos. Este hecho, produce que a la hora de obtener las soluciones, aparezcan problemas diferentes, por lo que se planteó la programación no lineal entera, con la que se podrían obtener valores discretos como solución al problema y que, finalmente, como se comentará más adelante, se obtuvieron mediante algoritmos de búsqueda iterativa y el software Gambit. Además, la filosofía

de reparto es diferente; en [1], además de ofrecer ancho de banda a las distintas áreas, también se compite entre los diferentes elementos de acceso (AEs).

Otra diferencia sustancial viene dada por la forma en la que se limitan las zonas o áreas. En [1] se trata de áreas “geográficas”, zonas con cobertura de los mismos AEs, en las que se estima el número de usuarios como un valor medio, obtenido a partir de la tasa de llegadas medias en esa zona y el tiempo medio de cada llamada. Sin embargo, en este trabajo, las áreas, se establecen a partir de la existencia de usuarios en cada una de las zonas (los que haya en ese momento en el escenario); esto es, sólo se le asigna recursos a esas zonas si hay usuarios. Otra diferencia importante es que los autores de [1] únicamente consideran un despliegue determinista, mientras que en este trabajo los AEs también se situarán en el escenario manera aleatoria, lo que incrementa la complejidad del problema.

Otro trabajo que comparte alguna de las características de este proyecto es [9]. Los autores abordan los dos principales aspectos que se siguen en este proyecto: asignación de recursos por los AEs y la selección llevada a cabo por los usuarios. Cesana *et al* asumen que los recursos son discretos, pero abordan el problema como una aproximación en dos pasos; primero los usuarios finales juegan un juego para minimizar la interferencia y después, los AEs establecen el esquema de asignación de recursos que está fuertemente ligado al resultado anterior. Además, ellos asumen que toda la demanda de recursos es satisfecha (los AEs no tienen una capacidad límite). Además, los autores ofrecen resultados de un escenario particular de AEs y usuarios, mientras que en este trabajo el juego se repite para garantizar la validez estadística de los resultados. Además, ellos no consideran escenarios heterogéneos ya que todos los AEs tienen la misma cobertura.

Otro trabajo que utiliza la Teoría de Juegos es [10]. Los autores proponen un juego para reducir la sobrecarga que será llevado a cabo por la célula sobrecargada y la carga adicional que una célula con baja carga debería aceptar. Una de las diferencias con este proyecto es que ellos utilizan un escenario muy particular en el que no hay áreas solapadas entre la cobertura de las diferentes estaciones base. En este contexto, las contribuciones más relevantes de este proyecto se resumen a continuación:

- Despliegue de redes heterogéneas, integrando elementos de acceso con diferentes capacidades y coberturas.
- Utilización de unidades de carga discreta, limitando la capacidad de los elementos de acceso.
- Evaluación de los beneficios de la asignación óptima con varias estrategias de selección de acceso.
- Profundo análisis del comportamiento, integrando diferentes escenarios y diferentes instancias de ellos.

2.5.2. Asignación de precios

En los últimos años se ha podido observar una evolución muy significativa en las comunicaciones inalámbricas tanto en la tecnología como en su operación y

mantenimiento. Los primeros pasos de la telefonía se produjeron sobre un escenario monopolista, sin embargo, la situación ha cambiado drásticamente apareciendo multitud de nuevos operadores dando lugar a una fuerte competencia entre ellos. La competencia puede surgir en diferentes aspectos como pueden ser la cantidad de servicios, la calidad de los mismos y/o el precio al que los ofrecen. Al igual que la telefonía, el consumidor también ha evolucionado, gozando de un mayor conocimiento del mercado, conociendo las distintas opciones que éste le ofrece y, por supuesto, aumentando su preocupación por la obtención del precio más económico sin desestimar la calidad de los servicios. Como consecuencia de lo anterior, una de las grandes preocupaciones de los operadores en la actualidad es el *churning* (cambio de operador). Una solución a este problema puede encontrarse en el cambio de los modelos de tarificación utilizados en la actualidad. En el momento de la redacción de este proyecto la tarificación predominante es la tarifa plana, en la que se ofrece un paquete de servicios a un precio fijo (normalmente mensual) o políticas de tarificación que tienen en cuenta los horarios en los que el usuario podría utilizar los servicios contratados a un precio más económico. En el escenario actual de mercado, aparece la necesidad de modificar los modelos presentes de tarificación para adaptarla a la situación actual, buscando alcanzar el beneficio máximo para el operador manteniendo al usuario satisfecho ofreciéndole la mejor calidad en sus servicios al mejor precio. En la actualidad se está comenzando a pensar en la modulación del precio dependiendo del contexto. El concepto de contexto engloba diferentes aspectos como el número de operadores que ofrecen cobertura en un mismo área, su capacidad, el número de usuarios demandando conectividad, etc. Todo ello bajo diferentes asunciones como pueden ser que el usuario escoja la alternativa más económica.

Como motivación inicial para el trabajo realizado en este proyecto sobre la asignación de recursos se apuntó principalmente al trabajo de [2], en el campo de la utilización de Teoría de Juegos y la asignación de precios los mismos autores han propuesto un estudio sobre el escenario de la Figura 2.4 con tecnologías WMAN, WLAN y CDMA, pertenecientes cada tecnología a un operador diferente. Cada operador ofrece dos tipos de tarifas: *Premium* y *Best Effort*. El primero utiliza un modelo tradicional, normalmente vinculado a tarifas planas; el segundo sigue un modelo de precios dinámicos, es decir, los precios subirán o bajarán dependiendo del comportamiento de los proveedores. Como puede observarse en la Figura 2.4 las áreas están solapadas, es decir, los proveedores compiten por los usuarios en las zonas solapadas (sólo con el modelo *Best Effort*). Los autores presentan en este trabajo un modelo de precios dinámico basado en la formulación de un juego no cooperativo que puede dividirse (en lo que a este proyecto respecta) en dos ramas:

- Juego simultáneo en el que los operadores realizan propuestas de tarificación simultánea para cada usuario. El óptimo de este juego es el Equilibrio de Nash.
- Juego no simultáneo, en el que uno de los operadores puede establecer su precio antes de los demás. La solución a este juego será el Equilibrio de Stackelberg.

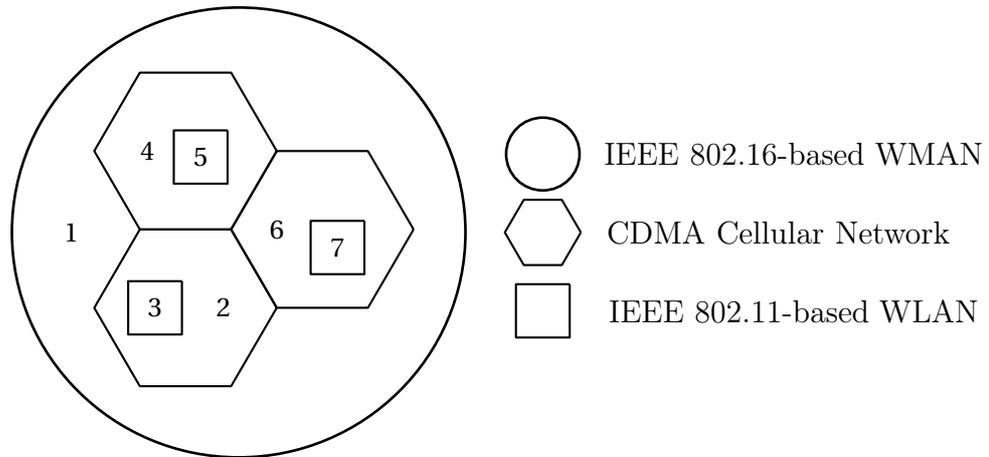


Fig. 2.4: Áreas de cobertura en un escenario de acceso inalámbrico heterogéneo en [2].

Otra aproximación al problema de precios es el de analizar las situaciones desde el punto de vista de los jugadores envueltos en el juego. Utilizando esta aproximación algunos trabajos consideran a ambos, operadores y usuarios, mientras que otros sólo se centran en los operadores. Ejemplos ilustrativos del primer ejemplo son [11] y [12]. El primero propone principalmente de forma teórica un juego no cooperativo para investigar el conflicto entre los proveedores de servicio y los usuarios para varios requerimientos de QoS. Por otro lado, los autores en [12] proponen un marco para analizar las estrategias de los proveedores de servicios para atraer usuarios, ofreciendo precios competitivos. Como una combinación de los trabajos anteriores, [13] presenta ambos, juegos cooperativos y no cooperativos, para abordar la selección de precios y red, respectivamente. También pueden destacarse otros trabajos sobre políticas de precio pero que no utilizan las herramientas ofrecidas por la Teoría de Juegos. Entre ellas pueden destacarse [14], donde los autores analizan de forma general políticas de gestión de servicios, incluyendo precio, utilizado por los operadores para maximizar su beneficio; además, los autores analizan varios procedimientos de selección de acceso, enfatizando el papel del precio a pagar por una conexión. Teniendo en cuenta lo anterior, las contribuciones más novedosas de este proyecto se pueden resumir en:

- Análisis de estrategias de precios donde los operadores pueden sólo establecer conjuntos de tarifas discretas y finitas.
- Despliegue de redes heterogéneas, comprendiendo elementos de acceso con diferentes capacidades y coberturas.
- Uso de unidades de carga discretas, limitando la capacidad de los elementos de acceso, los cuales no pueden aceptar más conexiones que la capacidad disponible.
- Un completo análisis del comportamiento, comprendiendo diferentes escenarios y múltiples instancias del mismo.

Planteamiento del Problema

3.1. Modelo de Red

A continuación se describirán diferentes particularidades sobre las que se desarrollarán las resoluciones a los problemas de asignación de recursos y de precios. Se explicarán el escenario base genérico, el método que siguen los usuarios a la hora de seleccionar los Elementos de Acceso (AEs) al que se van a conectar y por último, un estudio teórico del modelado de tarificación dinámico. Todo ello necesario para una mejor comprensión de los problemas a resolver.

3.1.1. Modelado del escenario

Los problemas a estudiar en este proyecto se llevan a cabo sobre un escenario genérico y que se modificará para estudiar las consecuencias de la utilización de un escenario u otro. El escenario consta de un área en el que son desplegados un conjunto de $|N|$ AEs $AE = \{1, 2, \dots, N\}$ caracterizados por su capacidad y por su cobertura. Se realizarán dos tipos de despliegues: un despliegue determinista, que se presenta como una variación del escenario utilizado en [1], en el que los elementos de acceso se sitúan en posiciones definidas en el área; y aleatorio, en el que la posición de los AEs es aleatoria, en este caso, los AEs del mismo tipo (misma tecnología, capacidad y cobertura) guardarán una distancia mínima entre ellas para evitar zonas de solapamiento demasiado grandes, lo que daría lugar a un elevado número de estrategias derivando en complicaciones a la hora de computarlas.

Como resultado del despliegue de los elementos de acceso, aparecerán zonas de solapamiento. Sobre dichas m zonas de solapamiento $\Gamma = \{1, 2, \dots, m\}$ se desplegarán los usuarios de forma aleatoria (aunque también podría realizarse a partir de un fichero con las posiciones). A partir de dichas áreas solapadas y de los elementos de acceso alcanzables por los usuarios, aparecen lo que en este proyecto se denominan áreas, esto es, un conjunto de usuarios que tienen cobertura del mismo conjunto de AEs. Los elementos de acceso se suponen con un patrón de radiación omnidireccional,

esto es, circular. En la figura 3.1 se muestra un ejemplo de escenario aleatorio en el que se representan las diferentes zonas que pueden formarse.

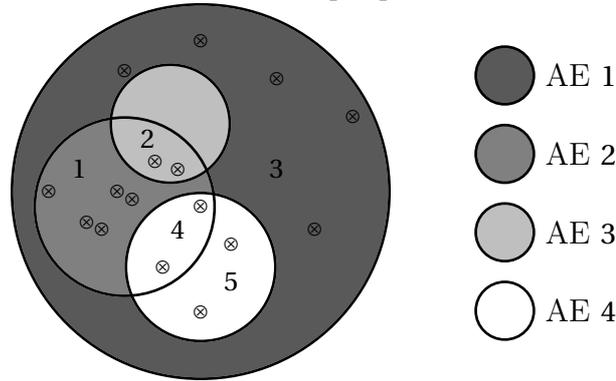


Fig. 3.1: Ejemplo de escenario aleatorio.

Como se ha dicho anteriormente, una característica de los AEs es su capacidad, que se asumirá genérica, tomando un valor discreto, sin importar el recurso concreto al que se refiera (códigos, sub-portadoras, ranuras TDM...).

3.1.2. Selección de Acceso

Cuando un usuario decida conectarse, escogerá un recurso de los disponibles que será eliminado de los que tuviera la red seleccionada. El usuario puede seleccionar recurso de diferentes formas, y cada una de ellas dará lugar a un beneficio distinto. En este proyecto se han propuesto principalmente dos formas de llevar a cabo la selección dependiendo del tipo de problema que se resuelva. En el problema de asignación de recursos el usuario seleccionará un recurso de manera aleatoria, sin tener en cuenta a qué AE pertenezca. El método de selección será similar a que el usuario tenga una caja en la que cada elemento de acceso alcanzable por él haya colocado un conjunto de recursos, la probabilidad de que un usuario escoja un recurso concreto dependerá únicamente del número de recursos que éste haya colocado dentro de la caja, esto es, cuanto mayor sea el número de recursos ofrecidos por el AE en esa zona (caja), mayor será la probabilidad de que el usuario escoja uno de sus recursos. En los resultados también se mostrarán dos ejemplos más de selección de acceso, ya que aunque no se ha querido ahondar en la implementación de diferentes métodos, sí se ha querido demostrar que la utilización del equilibrio de Nash seguía siendo válida para distintas aproximaciones. Por tanto, en el capítulo de resultados se mostrarán también los resultados cuando los usuarios seleccionan los recursos en función de operadores preferidos (*preferred operator*) o calidad (*quality*). En el caso de asignación de precios, el usuario seleccionará un recurso perteneciente al AE que ofrezca un precio menor, es decir, el más barato.

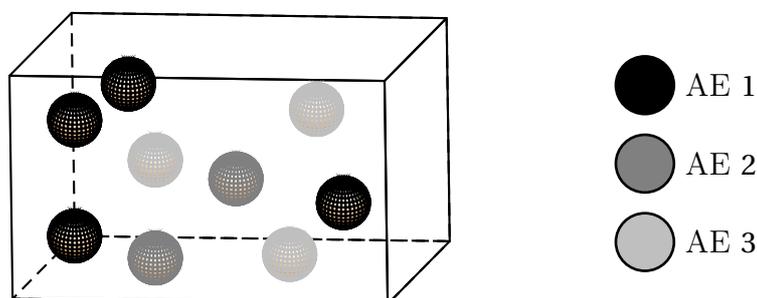


Fig. 3.2: Ejemplo de los recursos de un usuario en un área con tres elementos de acceso a los que poder conectarse.

3.1.3. Análisis de esquemas de tarificación dinámica

Antes de resolver el problema de asignación de precios propuesto en este proyecto es interesante estudiar previamente, de manera teórica, diferentes modelos de tarificación dinámica.

Como se ha explicado en los párrafos anteriores, el comportamiento de los usuarios a la hora de seleccionar el AE al que quieren conectarse seguirá la máxima de seleccionar el más barato, con lo que se pretende modelar el comportamiento que siguen los usuarios en la realidad. En el caso de que los operadores disponibles ofrezcan el mismo precio el usuario escogerá aleatoriamente. Por supuesto, el precio no es el único factor que tiene en cuenta el usuario, por ejemplo, el valor de QoS (*Quality of Service*) y el QoE (*Quality of Experience*) puede hacer que los usuarios quieran pagar un precio mayor por mantener dichos valores dentro del rango que ellos consideren óptimos; sin embargo, en el desarrollo teórico y en la posterior resolución del problema con las herramientas propias de la Teoría de Juegos se tendrá en cuenta que los valores de QoS y de QoE para los diferentes AEs son similares y el usuarios sólo considerará el precio.

Se estudiarán dos políticas de tarificación: tradicional y dinámica. En la primera, los AEs mantienen una tarifa fija, mientras que en la segunda los AEs tienen la capacidad de adaptar sus tarifas de acuerdo al contexto particular en el que estén trabajando, lo que implica que puedan implementar diferentes estrategias para atraer más usuarios. Para poder comparar de forma razonable ambas posturas, asumiremos en el estudio teórico dos escenarios particulares, uno en el que coexistan un operador tradicional con un operador con tarificación dinámica, y otro en el que los dos operadores trabajen con tarificación dinámica.

- **Política de tarificación dinámica Vs. Política de tarificación tradicional.**

En primer lugar, cabe especificar los precios que utilizarán tanto el AE que siga tarificación tradicional (operador tradicional) como el que siga una tari-

ficación dinámica (operador no convencional). El primero fijará un precio P_t fijo, mientras que el segundo puede seleccionar un precio dentro de un conjunto predefinido. Puede definirse un vector de precios, ordenado de forma ascendente, como $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{t-1}, p_t, \dots, p_m\}$ donde p_t es el precio fijo seleccionado por el operador tradicional y p_m es el precio máximo permitido por el mercado. Los precios expuestos serán por usuario y por conexión.

El análisis se lleva a cabo sobre el escenario mostrado en la Figura 3.3, en él, los dos operadores comparten una parte de su área de cobertura, es decir, sus coberturas están solapadas. Como puede verse en la figura, aparecen tres zonas claramente diferenciadas: área A, cubierta únicamente por el operador dinámico, área C cubierta por el operador tradicional y el área B cubierta por ambos operadores. Por otro lado, se definen u_A, u_C y u_B como el número de usuarios desplegados en las áreas correspondientes. Bajo estas condiciones, los usuarios de las áreas no solapadas son vistos como usuarios preferentes por sus respectivos operadores, ya que serán la única alternativa del usuario.

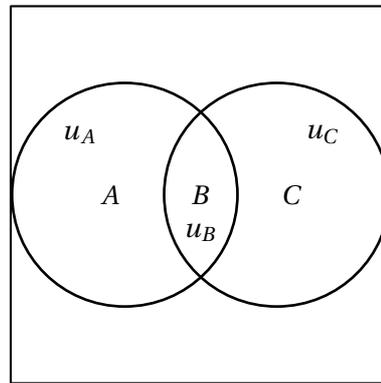


Fig. 3.3: Ejemplo de áreas de cobertura en un escenario de acceso inalámbrico heterogéneo.

Una vez que los operadores hayan cubierto las necesidades de los usuarios que se encuentran en sus zonas no solapadas, los recursos restantes podrán ser ofrecidos al área solapada. A raíz de esto, pueden darse tres situaciones que derivarán en fijar un precio u otro:

1. $C_t = C_{nc}$ En la Figura 3.4(a) se muestra el beneficio del operador no convencional en términos de número de usuarios dentro del área B (u_B). Se pueden distinguir dos posibilidades:
 - El operador no convencional puede asignar un precio más bajo que el que ofrece el operador tradicional (se asumirá que asigna el precio mayor del conjunto posible y menor que el tradicional, esto es, p_{t-1}). Como puede verse en la figura, los usuarios seleccionarán al operador no convencional ya que es el más barato, y por tanto, el beneficio obtenido por éste será igual a $(u_B \cdot p_{t-1})$ y tendrá como máximo, si la capacidad es menor que el número de usuario en el área, el valor de $(C_{nt} \cdot p_{t-1})$. En ese caso, el resto de usuarios que no puedan ser cubiertos por el operador no convencional serán cubiertos por el tradicional hasta que o bien no

queden usuarios sin cubrir o bien se supere la capacidad del operador.
- El operador no convencional establece un precio mayor que el del operador convencional (en este caso utilizará el precio máximo que puede ofrecer p_m). Los usuarios seleccionarán al operador tradicional ya que ofrece el precio más barato. Sin embargo, si el número de usuarios en el área solapada es mayor que la capacidad del operador tradicional, los usuarios no cubiertos por éste seleccionarán al operador no convencional pagando el precio máximo.

La línea más alta de la Figura 3.4(a) representa el beneficio máximo que puede alcanzar el operador no convencional para cada valor de número de usuarios en el área solapada. Destacar el valor u_x que marca el umbral de decisión, respecto al número de usuarios, para el cual el operador tomará la decisión de imponer un precio menor o mayor al precio fijado por el operador tradicional. Este valor se define como el punto en el que los dos beneficios descritos anteriormente son iguales, y se calcula como sigue:

$$(u_x - C_t) \cdot p_m = C_{nc} \cdot p_{t-1} \rightarrow u_x = \frac{p_{t-1}}{p_m} \cdot C_{nc} + C_t \quad (3.1)$$

Por lo tanto, los intervalos y los precios óptimos ofrecidos por el operador no convencional serán los siguientes:

$$\begin{aligned} u_B < u_x &\Rightarrow P = p_{t-1} \\ u_B > u_x &\Rightarrow P = p_m \end{aligned} \quad (3.2)$$

2. $C_t < C_{nc}$ Como ocurrió anteriormente, también se pueden distinguir dos casos dependiendo del punto donde las funciones beneficio toman el mismo valor.

- El caso en que $u_x > C_{nc}$, es decir, el número de usuarios supera la capacidad del operador no convencional, se muestra en la Figura 3.4(b). El análisis es similar al del caso descrito anteriormente y la intersección de las funciones se calcula de la siguiente forma:

$$(u_x - C_t) \cdot p_m = C_{nc} \cdot p_{t-1} \rightarrow u_x = \frac{p_{t-1}}{p_m} \cdot C_{nc} + C_t \quad (3.3)$$

- El caso en que $u_x < C_{nc}$, es decir, el operador no convencional tenga recursos suficientes para cubrir a los usuarios en el área solapada, se muestra en la Figura 3.4(c), y el punto de intersección se calcula como:

$$(u_x - C_t) \cdot p_m = u_x \cdot p_{t-1} \rightarrow u_x = \frac{C_t \cdot p_m}{p_m - p_{t-1}} \quad (3.4)$$

3. $C_t > C_{nc}$ Siguiendo el análisis llevado a cabo en los apartados anteriores se obtiene el beneficio mostrado en la Figura 3.4(d). El punto en el que el operador no convencional debe de cambiar su estrategia, el ya mencionado u_x , se calcula como sigue:

$$(u_x - C_t) \cdot p_m = C_{nc} \cdot p_{t-1} \Rightarrow u_x = \frac{p_{t-1}}{p_m} \cdot C_{nc} + C_t \quad (3.5)$$

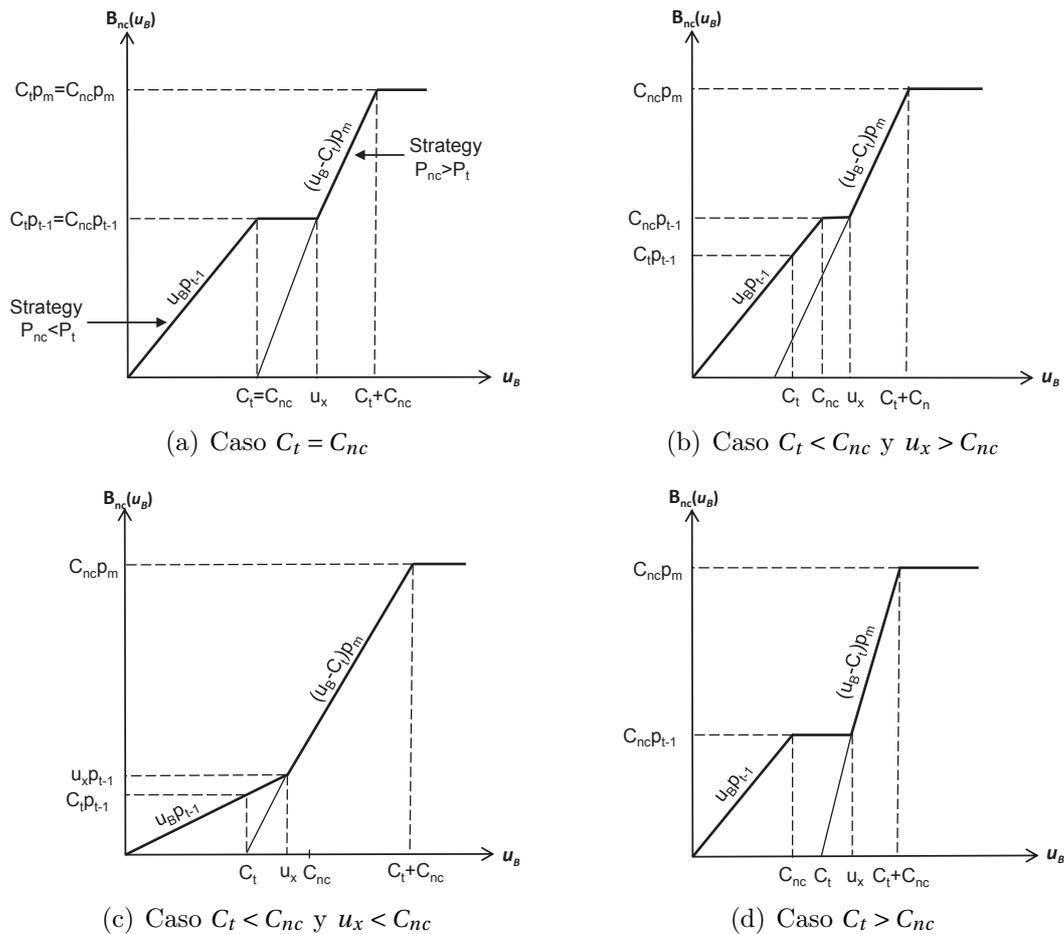


Fig. 3.4: Beneficio obtenido por el operador no convencional respecto del número de usuarios en el área solapada para los diferentes casos.

■ Política de tarificación dinámica

En esta parte del análisis ambos operadores utilizan el modelo de tarificación dinámica. Se parte de la premisa de que ninguno de los operadores conoce, *a priori*, el precio que va a fijar el otro operador. Para la realización de este análisis se enumeran todas las posibles combinaciones de precios posibles para seleccionar aquella que brinde un mayor beneficio. En este análisis se sigue trabajando sobre el escenario expuesto anteriormente aunque se tienen en cuenta dos suposiciones adicionales:

- Los dos elementos de acceso tienen la misma capacidad.
- Se desarrollarán tres casos de uso dependiendo del porcentaje de usuarios que estén desplegados dentro del área de solapamiento, esto es, se asumirán tres casos: 80%, 50% y 20% del número total de usuarios.

Para cada uno de los tres casos se muestran los resultados de beneficio obtenido para cada uno de los dos AEs incrementando paulatinamente los usuarios en el escenario. La Figura 3.5 muestra los beneficios obtenidos cuando los dos AEs utilizan tarificación dinámica pero priorizando al AE1, es decir, forzando al AE2 a establecer el precio que maximice el beneficio a obtener por el AE1.

A partir de la Figura 3.5(a) se pueden extraer conclusiones interesantes. En

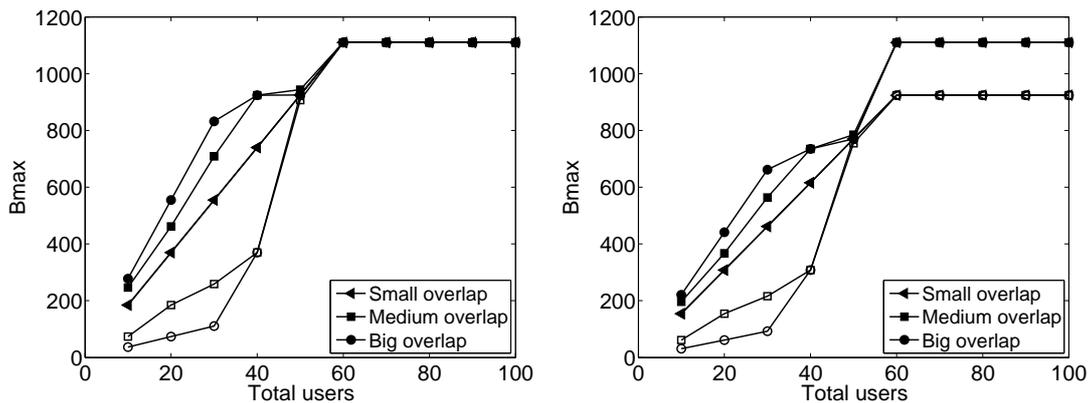


Fig. 3.5: Beneficio total para los operadores AE1 y AE2. Los marcadores sólidos se refieren al AE1 y los vacíos al AE2.

primer lugar, destacar que cuando el área de solapamiento es pequeña los beneficios alcanzados por ambos operadores son iguales. El motivo de este hecho es que es más lógico que en esta situación ambos operadores establezcan el precio medio y que compartan los usuarios. Si alguno de los operadores fijase el precio alto los usuarios escogerían conectarse al otro operador. Si al contrario decide fijar el precio más bajo atraería a los usuarios de la zona solapada pero tendría un menor beneficio debido a los usuarios que sólo pueden conectarse a ese operador en la zona no solapada correspondiente. Si se atiende a la situación de tener áreas solapadas más grandes puede observarse que el beneficio obtenido por el AE1 es mayor. Por último, destacar que ambos operadores obtienen igual beneficio cuando el número de usuarios es alto. Esto se debe a que el número de usuarios es suficiente para que los operadores impongan su precio máximo y que todos sus recursos se vean consumidos.

Para realizar una comparativa con la situación explicada en la subsección anterior, en la Figura 3.5(b) se muestra el beneficio obtenido en el escenario cuando el AE2 utiliza una tarifa fija mientras que el AE1 puede modular su precio. En la Figura puede observarse que, al igual que en el caso de que los dos sean operadores dinámicos, el beneficio obtenido por ambos operadores cuando el área de solapamiento es pequeña es el mismo. A medida que el área de solapamiento aumenta su tamaño, puede observarse que el operador que utiliza la estrategia óptima alcanza un mayor beneficio. En este caso, dado que el operador tradicional impone una tarifa fija (que se estableció como precio medio) no podrá establecer el precio más alto y por lo tanto el beneficio no podrá ser igual que el beneficio obtenido por el operador dinámico cuando el número de usuarios es superior, como ocurría en el caso anterior.

De todo lo anterior puede desprenderse como conclusión el hecho de que la utilización de una tarificación dinámica ofrece un mayor beneficio. Sin embargo, la realización de un análisis teórico más detallado en el que se estudien todas las situaciones posibles, con escenarios más completos, entraña un grado muy alto de complejidad (sobre todo si se incrementan las áreas solapadas, el número de AEs, etc.). Por ello, para resolver este tipo de situaciones, en este proyecto se propone la

utilización de las herramientas proporcionadas por la Teoría de Juegos.

3.2. Beneficios de los AEs

El análisis de los beneficios en este proyecto se trata de forma diferente dependiendo del problema a desarrollar. De forma general, en el problema de asignación de recursos el beneficio se cuenta como número de usuarios atraídos por el operador, en el caso del problema de asignación de precios se tendrá en cuenta el producto de los usuarios atraídos por el operador multiplicado el precio al que se les tarifica. Sin embargo aunque los beneficios se definen de forma diferente para cada problema, hay un hecho común aplicable a ambos: el beneficio obtenido por una estación base será la suma de todos los beneficios que obtenga en todas las zonas en las que ofrece cobertura.

$$B_i = \sum_{\forall k: i \in \Gamma_k} \overline{(b_i)_k} \quad (3.6)$$

Donde $\overline{(b_i)_k}$ es el beneficio medio esperado por la estación base i -ésima en el área k -ésima.

A continuación se presentarán, para ambos problemas, las funciones de utilidad de los elementos de acceso.

3.2.1. Beneficios en la asignación de recursos

Como se ha explicado anteriormente el objetivo de este problema es asignar los recursos de forma óptima en las diferentes áreas en las que las estaciones base ofrecen cobertura. No se ofrecerá en ningún caso más recursos que número de usuarios haya en la zona. Por otro lado, también se explicó en apartados anteriores que los usuarios seleccionarán sus recursos de forma aleatoria, sin tener en cuenta qué AE se los ofrece.

Siguiendo el método de selección de acceso ya presentado, el cálculo del beneficio medio esperado en la zona k -ésima estará determinado por la cantidad de recursos que el AE asigne a la zona, el número de usuarios en dicha zona y los recursos ofrecidos por el resto de AEs.

$$\overline{(b_i)_k} = \begin{cases} \frac{(x_i)_k}{\sum_{\forall j: j \in \Gamma_k} (x_j)_k} u_k & u_k < \sum_{\forall j: j \in \Gamma_k} (x_j)_k \\ (x_i)_k & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.7)$$

donde x_i son los recursos que ofrece el AE i -ésimo, u_k el número de usuarios en el área k -ésima y $(x_j)_k$ el conjunto de todos los recursos que ofrecen el resto de AEs presentes en ese mismo área. Como se observa en la expresión 3.2.1 se dan dos casos: el primero en el que el número de usuarios es menor que el conjunto de recursos ofrecidos por todos los AEs en el área; y el segundo en el que el número de usuarios es mayor que la cantidad de recursos, caso en el que el beneficio será directamente el número de recursos ofrecidos.

3.2.2. Beneficios en la asignación de precios

Recordar que el objetivo de este problema es el de obtener el mayor beneficio posible asignando un precio (de entre un conjunto a ofertar) en las diferentes áreas en las que cada AE ofrece cobertura. En este caso, como se explicó anteriormente, cada usuario escogerá el recurso más barato que se le ofrezca y si le ofrecen varios con el mismo precio escogerá aleatoriamente. En este último caso, el AE que ofrezca un mayor número de recursos en la zona será el que tenga una mayor probabilidad de ser seleccionado. Con lo anterior no se quiere decir que los AEs limiten sus recursos en las diferentes áreas, ya que esto cambiaría el espacio de estrategias añadiendo una nueva dimensión al perfil de estrategias, sino que dependerá del número de recursos restantes una vez que los usuarios cubiertos únicamente por un AE han establecido su conexión.

Para este modelo de selección, el beneficio obtenido por los AEs dependerá del precio ofrecido por él y del precio fijado por el resto de AEs en la zona.

En el estudio del beneficio en la asignación de precios aparecen tres situaciones que brindan diferentes utilidades:

1. Caso $p_i < p_t \forall AE_t \in k$

$$\overline{(b_i)_k} = \begin{cases} u_k \cdot p_i & \text{si } u_k < r_i \\ r_i \cdot p_i & \text{si } u_k > r_i \end{cases} \quad (3.8)$$

donde p_i y r_i son el precio y los recursos ofrecidos por el AE i -ésimo respectivamente y u_k el número de usuarios en el área k -ésima. Cuando el AE $_i$ tiene el precio más bajo de todas las alternativas disponibles en el área k -ésima los usuarios lo seleccionarán mientras tenga recursos disponibles para ellos.

2. Caso $p_i > p_t \forall AE_t \in k$

$$\overline{(b_i)_k} = \begin{cases} (u_k - r_j) \cdot p_i & \text{si } (u_k - r_j) < r_i, \sum_{\forall j \neq i: j \in k} r_j < u_k \\ r_i \cdot p_i & \text{si } (u_k - r_j) > r_i, \sum_{\forall j \neq i: j \in k} r_j < u_k \\ 0 & \text{si } \sum_{\forall j \neq i: j \in k} r_j > u_k \end{cases} \quad (3.9)$$

donde $\sum_{\forall j \neq i: j \in k} r_j$ es el conjunto de recursos ofrecidos por el resto de AEs presentes en el área k -ésima con un precio menor que el AE $_i$. En este caso, en el que el AE $_i$ ofrece un precio mayor que alguno o todos los AEs del área, los usuarios seleccionarán aquellas alternativas que les ofrezcan un precio menor hasta que agoten todos sus recursos y a partir de ese momento escojan al AE $_i$.

3. Caso $p_i = \min p_t \forall AE_t \in k$

$$\overline{(b_i)_k} = \begin{cases} \frac{r_i}{\sum_{\forall j: j \in k} r_j} \cdot u_k \cdot p_i & \text{si } u_k < \sum_{\forall j \neq i: j \in k} r_j \\ r_i \cdot p_i & \text{si } u_k > \sum_{\forall j: j \in k} r_j \end{cases} \quad (3.10)$$

En el caso de que el AE imponga el precio más bajo pero no sea el único, el usuario escogerá recursos aleatoriamente entre aquellos AEs con el precio más bajo, y la probabilidad de cada AE de ser elegido será proporcional al número de recursos que tenga disponibles para ofrecer.

Podría pensarse en una situación mixta de los casos 2 y 3, cuando dos o más AEs establecen el mismo precio pero éste no es el mínimo entre aquellos ofrecidos en ese área y la demanda no puede ser satisfecha por esas alternativas (los AEs más baratos).

3.3. Planteamiento del problema

Una vez se han establecido el modelo de red y los beneficios que obtendrían los AEs en cada caso, el siguiente paso es establecer los juegos no cooperativos objetivo de este proyecto. Lógicamente, ambos juegos serán distintos ya que tanto las estrategias como los beneficios son diferentes; sin embargo, tienen dos similitudes: en ambos juegos los jugadores serán los AEs distribuidos en el área bajo estudio y, además, para ambos se tomará el Equilibrio de Nash como solución.

3.3.1. JAR: Juego de Asignación de Recursos

Las estrategias vendrán dadas por las diferentes posibilidades que tienen los AEs a la hora de hacer el reparto de sus recursos en las zonas en las que ofrecen cobertura. En la expresión 3.11 se muestra el conjunto de estrategias pertenecientes a un AE, donde $(x_i)_k^j$ representa los recursos ofrecidos por el AE i -ésimo en el área k -ésima en su combinación j .

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} (x_i)_1^1 & (x_i)_2^1 & \cdots & (x_i)_k^1 & \cdots \\ (x_i)_1^2 & (x_i)_2^2 & \cdots & (x_i)_k^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ (x_i)_1^j & (x_i)_2^j & \cdots & (x_i)_k^j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{x}_i]^1 \\ [\mathbf{x}_i]^2 \\ \vdots \\ [\mathbf{x}_i]^j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

El número de filas de la matriz \mathbf{x}_i se corresponde con el número de estrategias de cada AE, valor denominado como s_i . A partir de todas las matrices \mathbf{x}_i se puede decir que el conjunto de estrategias para todos los AEs viene dado por el producto cartesiano que se muestra a continuación:

$$\mathbb{X} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \times \dots \times \mathbf{x}_n \quad (3.12)$$

siendo, por tanto, el conjunto total de estrategias $S = \prod s_i$.

Con las definiciones de jugadores, estrategias y beneficios se puede establecer completamente el juego, que para el caso de asignación de recursos se denominará **Juego de Asignación de Recursos (JAR)**, donde s es un perfil de estrategia:

$$JAR = \{N, \mathbb{X}, \{b_i(s)\}_{i \in N}\} \quad (3.13)$$

Como se ha comentado anteriormente, cada fila de la matriz x_i es una estrategia del AE i -ésimo. En el caso de que el número de áreas en las que el AE está presente sea grande y/o la cantidad de recursos de cada AE sea elevado, la matriz puede llegar a tener un gran número de estrategias. Por este motivo, el cálculo computacional puede ser inmanejable o consumir innecesariamente una gran cantidad de recursos. Para evitar, en parte, este problema se han implementado diversos procedimientos para descartar aquellas estrategias que no son significativas para el juego.

1. Reserva de recursos para las estrategias *naive*. Las estrategias *naive* son aquellas en las que se asignan recursos a aquellos usuarios que sólo tienen cobertura de un AE. Bajo esta circunstancias, el AE obtendrá el máximo beneficio en el área ya que verá consumidos tantos recursos como usuarios haya presentes en ese área o hasta que agote los que tenga disponibles si el número de usuarios es mayor. Por lo tanto, es razonable reservar esos recursos, reduciendo el número de recursos que el AE tendrá disponibles para asignar al resto de áreas, viéndose así disminuida la cantidad de estrategias resultantes.
2. Una vez eliminadas aquellas estrategias *naive* y consumidos los correspondientes recursos, se calcula si los recursos restantes son suficientes para cubrir a los usuarios presentes en el resto de áreas en las que se ofrece cobertura. Si el número de recursos es mayor a dicho número de usuarios no habrá estrategia ya que el AE sólo tendrá que repartir sus recursos en función del número de usuarios que haya en la zona. Cuando en secciones anteriores se explicó la de selección de recursos que realizan los usuarios se expuso que la probabilidad de que un AE fuese seleccionado era proporcional al número de recursos que ofreciese. Con esto, podría pensarse que si aún después de ofrecer tantos recursos como usuarios el AE todavía tiene recursos restantes, sería más eficiente ofrecer más recursos y así tener más posibilidades de ser escogido. Sin embargo, como también se expuso anteriormente, no se podrán ofrecer más recursos que usuarios.
3. Por último, se optimiza el caso contrario al anterior, es decir, el caso en el que después de haber cubierto las estrategias *naive* el número de recursos disponibles sea menor que el número de usuarios en el resto de áreas en las que ofrece cobertura. En este caso, se utilizará la restricción de no ofrecer un número de recursos mayor al número de usuarios para disminuir el número de estrategias. A partir de esta limitación se pueden eliminar aquellas combinaciones en las que hubiera que reducir los recursos en algún área, ya que la estrategia resultante quedaría *dominada* 2.2.2 por otra de las combinaciones, pudiendo así descartarla y simplificando el problema sin perder precisión en la resolución del problema.

Una vez que se ha caracterizado completamente el problema y que se han llevado a cabo las optimizaciones pertinentes para simplificar el cómputo posterior, se ha de encontrar la solución al mismo, el Equilibrio de Nash, que recordando 2.3 se puede resumir como:

Un perfil de estrategia s es un Equilibrio de Nash puro si

$$b_i(s) \geq b_i(s') \quad \forall i \quad (3.14)$$

para todo $s'_i \in S$ y cada jugador i , donde $s_{-i} = s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$.

Para encontrar el Equilibrio de Nash se han buscado diferentes alternativas. Entre ellas estuvo la búsqueda de plataformas que permitiesen la resolución del problema de optimización no lineal mediante las herramientas adecuadas, recordando que el Equilibrio de Nash puede ser obtenido a partir de las funciones *Best Response*. Entre las posibles soluciones, la mayoría se trataban de herramientas que requerían licencia, destacando (entre las que no tuvieran esta limitación): NOMAD, GAMS, AIMMS y BONMIN.

- NOMAD. NOMAD [15] es un software que implementa un algoritmo de búsqueda mallada adaptativa directa (MADS, *Mesh Adaptive Direct Search*) para optimización “blackbox” bajo ciertas restricciones no lineales. La optimización “blackbox” trata de maximizar/minimizar funciones que normalmente vienen dadas como programas de coste (no se conoce su derivada) y que, además, no devuelven valores para un número significativo de ejecuciones. NOMAD está diseñado para dichos problemas, y busca la mejor solución posible con el menor número de ejecuciones.
- GAMS. El Sistema General de Modelado Algebraico (GAMS, *General Algebraic Modeling System*) [16] es un sistema de modelado de alto nivel para optimización y programación matemática. GAMS está especialmente diseñado para plantear problemas de optimización entera lineal, no lineal y mixtos. Está confeccionado para aplicaciones complejas a gran escala, y permite construir modelos que pueden ser rápidamente adaptados a nuevas situaciones.
- AIMMS. AIMMS [17] es un entorno de desarrollo avanzado para aplicaciones basadas en optimización, como pueden ser la planificación en sistemas de redes, los problemas en cadenas de suministro o las herramientas para optimizar diferentes tareas dentro de un proyecto. AIMMS se distingue de otros software de optimización por el gran número de conceptos de modelado avanzado que lo integran, así como por la completa interfaz gráfica que incorpora. AIMMS incluye herramientas de resolución para la gran mayoría de problemas de optimización, la programación lineal, la programación no lineal, la programación entera mixta, etc.
- BONMIN. (*Basic Open-source Nonlinear Mixed INteger programming*) [17] es una herramienta *open-source* experimental para resolver problemas del tipo MINLP (programación no lineal entera mixta), que tienen la forma :

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{dado} \quad & g_L \leq g(x) \leq g_U \\ & x_i \in Z \quad \forall i \in I \\ & x_i \in R \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

donde $f(x) : R^n \rightarrow R$, $g(x) : R^n \rightarrow R^n$ son funciones diferenciables dos veces y I es un subconjunto de $1, \dots, n$.

De las posibles soluciones barajadas BONMIN era la que teóricamente podría haber permitido resolver los escenarios concretos que se planteaban. Sin embargo, al final se decidió utilizar la herramienta GAMBIT. El software GAMBIT, que será explicado de manera más detallada en el siguiente capítulo, permite obtener el Equilibrio de Nash en juegos no cooperativos con un conjunto discreto de estrategias. El motivo de descartar BONMIN fue que aunque el conjunto de estrategias podía llegar a ser elevado dependiendo del escenario a tratar, siempre sería finito. Por otro lado, en un principio se barajó otro tipo de selección de acceso por parte del usuario (que finalmente no se decidió tratar en este proyecto) en el que no pudo encontrarse una expresión matemática cerrada para el beneficio y por lo tanto no podía utilizarse BONMIN.

3.3.2. JAP: Juego de Asignación de Precios

Las estrategias para este juego vendrán dadas por el precio que asignen los AEs en las zonas en las que ofrezcan cobertura. Siguiendo con la nomenclatura utilizada para el juego JAR explicado anteriormente, la expresión 3.15 muestra el conjunto de estrategias pertenecientes a un AE, donde p_i^j representa el precio ofrecido por el AE i -ésimo en todas las áreas en su combinación j .

$$\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} [\mathbf{p}_i]^1 \\ [\mathbf{p}_i]^2 \\ \vdots \\ [\mathbf{p}_i]^j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

El número de filas de la matriz \mathbf{p}_i se corresponde con el número de estrategias de cada AE, valor denominado como s_i . A partir de cada matriz \mathbf{p}_i se puede formar el conjunto de estrategias de todos los AEs como el producto cartesiano que se describe a continuación:

$$\mathbb{P} = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 \times \dots \times \mathbf{p}_n \quad (3.16)$$

siendo, por tanto, al igual que en el juego anterior, el conjunto total de estrategias $S = \prod s_i$.

Una vez que se tienen definidos quiénes son los jugadores, cuáles son las estrategias y los beneficios que éstas pueden reportar se puede establecer el juego, que para el caso de asignación de precios se denominará **Juego de Asignación de Precios (JAP)**, donde s se define como un perfil de estrategia:

$$JAP = \{N, \mathbb{P}, \{b_i(s)\}_{i \in N}\} \quad (3.17)$$

En este juego el número de estrategias dependerá de la longitud del vector de precios, es decir, de la cantidad de precios diferentes que un AE pueda asignar a las áreas en las que ofrezca cobertura. Sin embargo, al tener una dimensión menos

que el juego anterior (no se diferencia por áreas, sino que cada AE ofrecerá el mismo precio a todas las áreas en las que da cobertura), el número de estrategias será presumiblemente menor. Por este motivo, no será necesario implementar los procedimientos descritos en la sección anterior para disminuir el número de estrategias.

Finalmente, para la resolución del problema propuesto se determinará el Equilibrio de Nash e igual que en el caso anterior se utilizará la herramienta software GAMBIT.

Implementación

Una vez planteados los problemas objetivo de este proyecto, en esta sección se describen las diferentes rutinas en lenguaje C++ desarrolladas para resolver dichos problemas.

Para automatizar el proceso, permitiendo ejecutar varias simulaciones, se utiliza un script en lenguaje Perl, con el que se ejecutan todos los pasos sin que el usuario tenga la necesidad de intervenir.

4.1. Introducción

Aunque los dos problemas que trata de resolver este proyecto son distintos, los pasos generales en la implementación son iguales para los dos casos, diferenciándose aquellas rutinas enfocadas a la creación de las estrategias y a la definición de las expresiones de los beneficios.

La implementación está dividida en diferentes pasos, mostrados en la Figura 4.1. Los bloques en color verde describen la implementación en el script Perl, mientras que los bloques en color azul se corresponden con métodos en lenguaje C++. En este esquema puede observarse que se realizan dos tipos de análisis. En primer lugar se obtienen las estrategias, y a continuación se realiza una comparación para comprobar la bondad de la solución óptima obtenida en los pasos intermedios.

En la Figura 4.2 se muestra, de forma más específica, los pasos seguidos en el script Perl. Como se puede observar, se parte de dos ficheros (en tonos anaranjados): un fichero de configuración con parámetros generales del escenario (puede verse un ejemplo en el Anexo de este documento) y un fichero que contiene la situación de los AEs en caso de que sea necesario; la Figura también destaca, en tonos rosas, los ficheros de salida que se van generando durante la ejecución.

En la Figura 4.3 se detallan los diferentes pasos que sigue el programa C++ durante la realización de los dos tipos de análisis.

Antes de pasar a la descripción de los diferentes pasos y funciones que conforman el programa, se explicará su estructura de alto nivel. En este sentido, además

de los ficheros de configuración, se cuenta con un programa principal que genera objetos de la clase *network*, en el que se apoya el resto del código. La clase *network* está orientada a las funciones relacionadas con el escenario y el manejo de ficheros; además destacan la clase *strategies*, que maneja las funciones y atributos relacionados con las estrategias, las clases *basestation*, *users*, y *accessSelection*.

4.2. Gambit

Gambit [18] es la librería de software de Teoría de Juegos para la construcción y el análisis de juegos estratégicos que ha sido utilizada en este proyecto para la obtención de los equilibrios de Nash. A continuación se presentará una descripción general del programa.

Gambit se compone de un conjunto de herramientas para el análisis de juegos no cooperativos finitos. Comprende una interfaz gráfica para el análisis de juegos generales en forma extensiva, un conjunto de herramientas en línea de comandos para encontrar los equilibrios de Nash y soluciones correspondientes a otros conceptos de juegos; además dispone de un conjunto de formatos de fichero para el almacenamiento y comunicación con herramientas externas.

Todos los algoritmos en Gambit están empaquetados de forma individual, es decir son diferentes programas ejecutados en línea de comandos, cuyas operaciones y tipos de resultados son configurables. En el marco de este proyecto se ha utilizado la herramienta *enumpure*, que obtiene los equilibrios de Nash puros (Sección 2.1.5).

Otra de las grandes ventajas de Gambit es su interoperabilidad. Las diferentes herramientas que incorpora leen y escriben en formatos de ficheros, haciéndolos de esta forma exportables a otros sistemas. Además, resulta fácil ampliar las capacidades de Gambit, por ejemplo, implementando un nuevo método de computación de equilibrios, reimplementando uno ya existente de una forma más eficiente, o creando herramientas para programar la creación, manipulación y transformación de juegos.

El fichero de entrada comienza con la combinación “NFG 1 R”, seguido del nombre del juego, a continuación entre llaves y en orden correlativo se sitúan los jugadores (jugador 1, jugador 2...), seguido de una lista con enteros positivos, que especifica el número de estrategias disponibles para cada jugador, en el mismo orden en el que están los jugadores, por último se especifican los beneficios correspondientes a cada estrategia de cada jugador

En cuanto al fichero de salida, se tiene un conjunto de 0's y 1's, que coincide con el número de estrategias, indicando los 1's aquellas que son equilibrio de Nash.

A continuación se muestran un ejemplo de fichero de entrada y uno de salida.

- Fichero de entrada Gambit.

```
NFG 1 R "Prueba"
{ "BS09" "BS08" "BS07" "BS06" "BS05" "BS04" "BS03" "BS02"
  "BS01" }
{ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 }
0.500 0.667 1.500 0.000 2.667 0.000 0.000 1.000 9.667
```

- Fichero de salida Gambit.

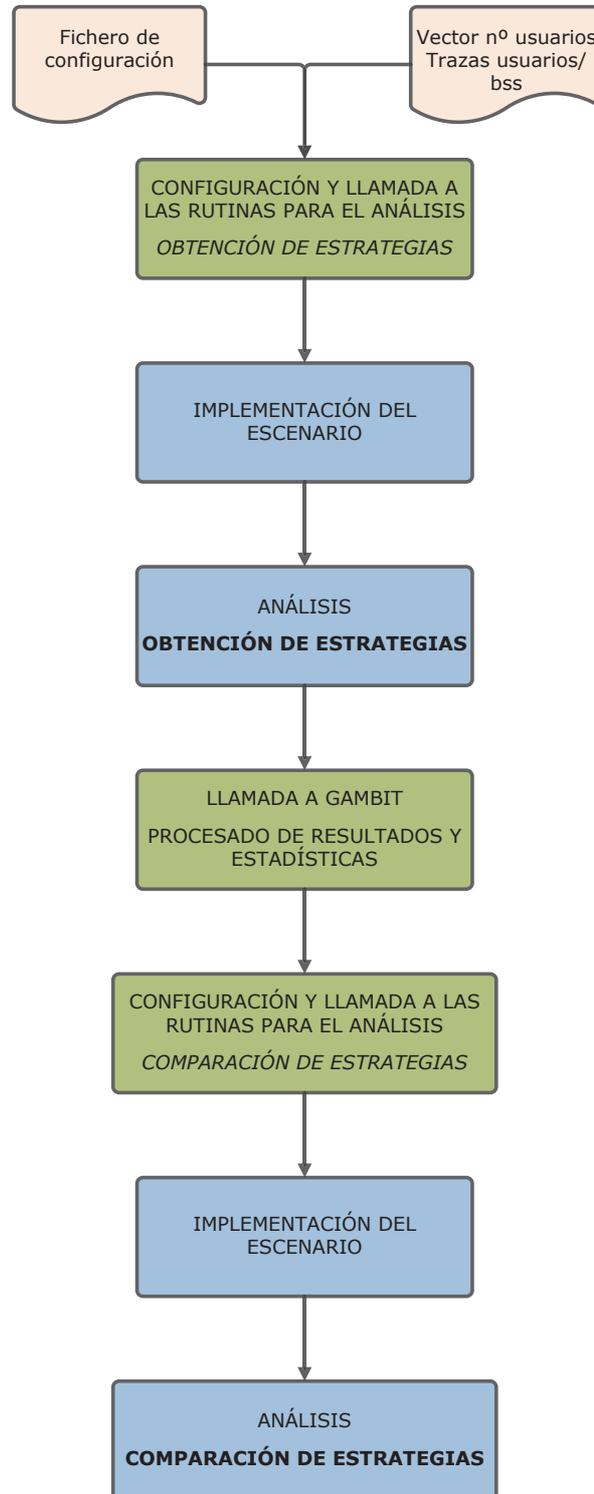


Fig. 4.1: Diagrama de bloques del programa.

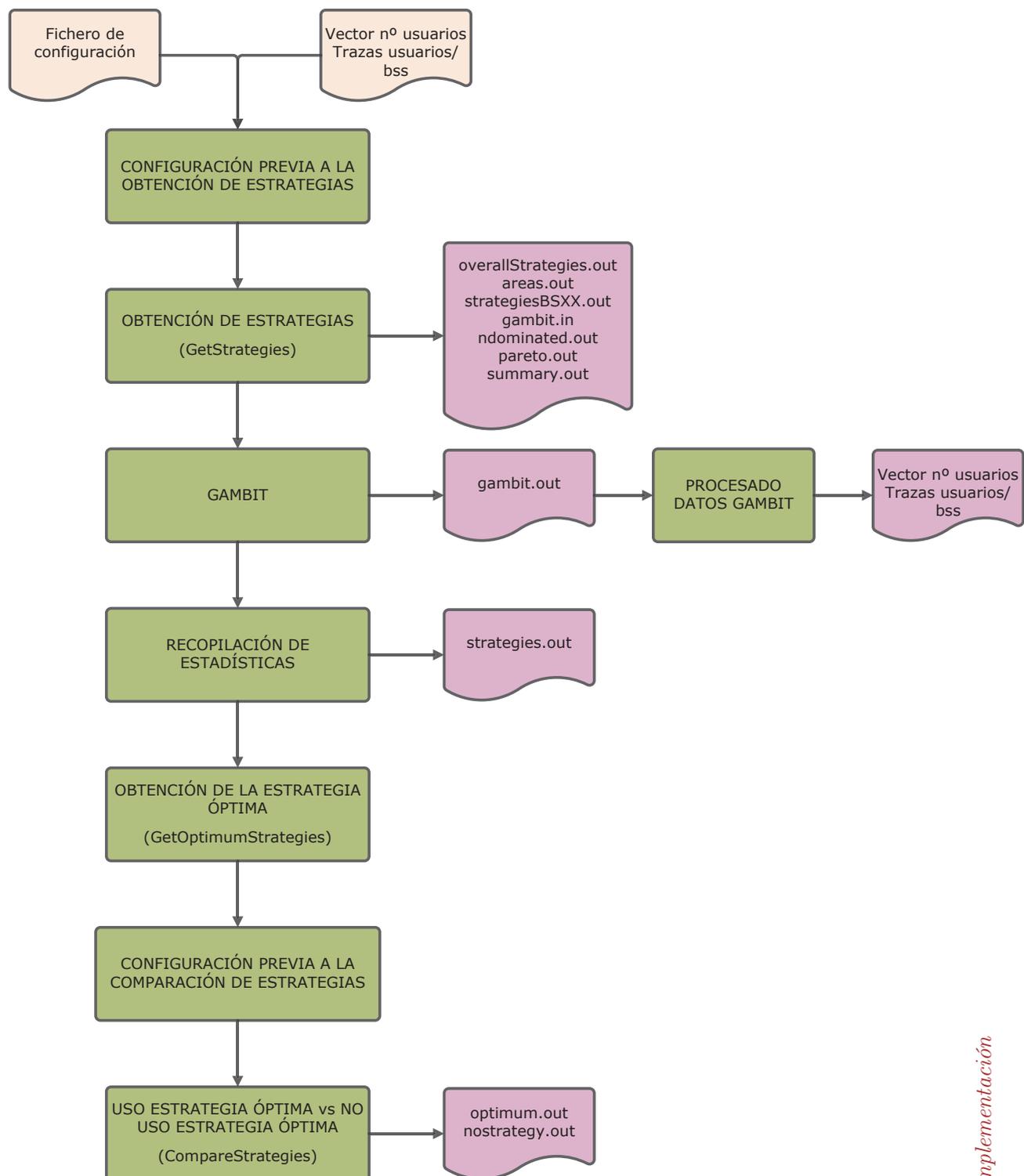


Fig. 4.2: Diagrama de bloques del script Perl.

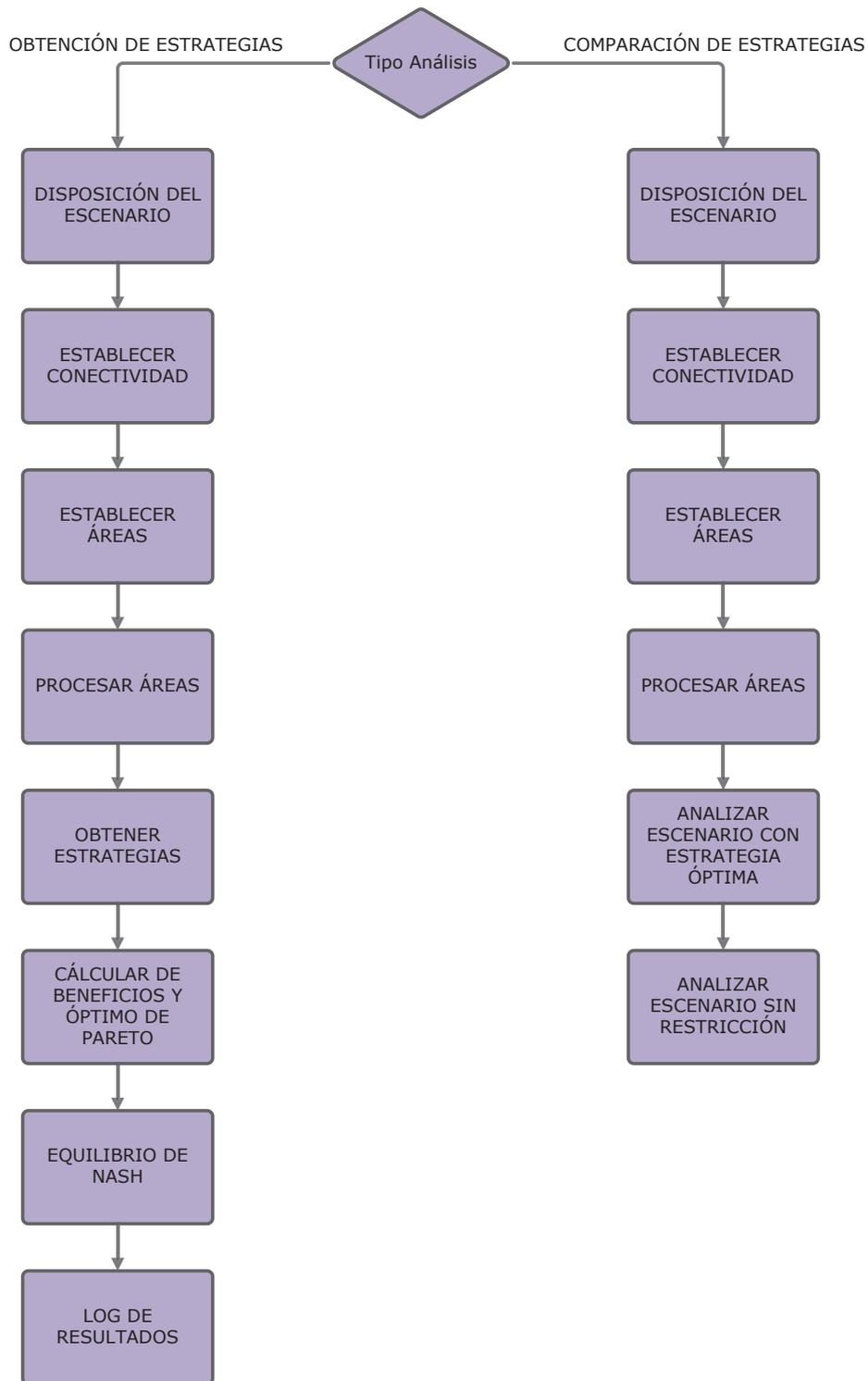


Fig. 4.3: Diagrama de bloques de la ejecución de la obtención de estrategias y de la comparación de estrategias.

NE,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1

En este ejemplo se tienen nueve jugadores, cada uno con una estrategia. En este caso sencillo, se tiene que la estrategia que utiliza cada jugador es equilibrio.

Aunque Gambit es una herramienta adecuada para el alcance y necesidades de este proyecto, se deben destacar dos limitaciones importantes, sobre todo con vistas a líneas futuras:

1. Gambit es sólo aplicable a juegos finitos. Dada la estructura matemática de los juegos finitos, es posible escribir rutinas de propósito general para analizarlos. De este modo, Gambit puede ser utilizado en una gran variedad de aplicaciones de Teoría de Juegos. Sin embargo, los juegos que no son finitos, es decir, aquellos en los que los jugadores forman sus estrategias a lo largo de una secuencia continua de acciones, no admiten los mismos métodos de propósito general.
2. Gambit sólo resuelve juegos no cooperativos. Gambit está centrado en la rama de la Teoría de Juegos en la que las reglas del juego están explícitas y cuando los jugadores escogen sus acciones de forma independiente, sin tener en cuenta las decisiones del resto. Gambit no está en estos momentos provisto de una representación de métodos para analizar juegos descritos en forma cooperativa.

4.3. Recogida de datos y configuraciones

Se tienen principalmente dos ejecuciones, en primer lugar la *obtención de estrategias* (*GetStrategies*) y, posteriormente, la *comparación de estrategias* (*CompareStrategies*). En este punto, las rutinas difieren en los dos casos objetivo de este proyecto. El propósito de la rutina *GetStrategies* es diferente para cada caso:

- En el estudio de la Asignación de Recursos la rutina *GetStrategies* trata de encontrar todas las posibles estrategias que surgen cuando los AEs quieren proporcionar sus recursos a las diferentes zonas en las que ofrecen cobertura.
- En el caso de la Asignación de Precios la rutina *GetStrategies* se encarga de establecer todas las estrategias que surgen a partir del vector de precios contemplado por los AEs bajo estudio.

Una vez encontradas las estrategias se implementa la conexión de usuarios con el método de selección correspondiente al problema. A continuación se calculan los beneficios asociados a cada estrategia siguiendo la formulación presentada en la sección ?? y, finalmente, se determinan aquellas estrategias que sean óptimas.

El segundo tipo de ejecución, llevado a cabo después del *GetStrategies*, es válido para ambos problemas y tiene como objetivo realizar una comparación de los beneficios en dos supuestos diferentes:

- Escenario en el que los AEs seleccionan la estrategia óptima; bien repartiéndolos sus recursos según marque la estrategia óptima en ese problema en las áreas en las que ofrecen cobertura, o bien fijando el precio óptimo a sus usuarios.

- Escenario en el que las estaciones base no utilicen la estrategia óptima y o bien no apliquen ninguna restricción a la hora de repartir sus recursos o bien fijen el precio medio del vector de precios contemplado.

Debido a que ambas ejecuciones son distintas y necesitan diferentes datos para implementar las correspondientes rutinas, antes de cada ejecución el script Perl ya mencionado modifica el fichero de configuración antes de cualquier ejecución. En este fichero se identifican diferentes datos que son descritos brevemente a continuación:

- Dimensiones del escenario. Que definen el tamaño del escenario a estudiar.
- Disposición de los elementos de acceso y usuarios. Las estaciones base pueden desplegarse tanto de forma determinista como de forma aleatoria. En este proyecto se estudian ambos escenarios. El despliegue de usuarios también puede realizarse tanto de forma aleatoria como determinista, aunque en este proyecto se ha realizado de forma aleatoria.
- Rutas de los ficheros de entrada y salida. En el caso de que el despliegue de estaciones base y/o usuarios sea determinista el programa necesitará saber dónde está el fichero que determina sus posiciones. Además, a lo largo de las ejecuciones se realizan diferentes rutinas que necesitan datos resultado de otras rutinas anteriores. En el fichero de configuración se especificará dónde se depositan los resultados y dónde pueden encontrarlo otras rutinas que las necesiten.
- Características de las estaciones base. En el fichero de configuración también se especifican las características de la estación base necesarias para determinar el escenario y para realizar los cálculos exigidos en las ejecuciones. Las características que se determinan son: el número de estaciones base, el rango (su radio de cobertura) y su capacidad (la cantidad de recursos que inicialmente tiene disponibles).
- Tipo de análisis a realizar. El fichero de configuración determina cuál es el tipo de análisis que tiene que realizarse en cada momento y que dará lugar a que se implementen unas rutinas u otras.

Por otro lado, con el objetivo de obtener unos resultados estadísticamente realistas y válidos se llevan a cabo (como se explicará más adelante) múltiples iteraciones de los algoritmos. Este valor también puede ser modificado en el fichero de configuración.

4.4. Despliegue del escenario, establecimiento de conectividad y procesamiento de áreas

Se ha implementado un conjunto de procedimientos que son aplicables a los dos problemas objetivo de este proyecto y a ambos análisis: el despliegue del escenario, el establecimiento de conectividad entre usuarios y las estaciones base, y el procesamiento de las áreas que aparecen como consecuencia.

Para poder seguir de forma más sencilla los diferentes pasos de la implementación se seguirá un ejemplo sencillo detallando en cada momento los resultados del proceso a explicar.

- **Establecer escenario**

La función encargada de crear el escenario es *SetScenario*. Esta función establece la posición de los AEs y de los usuarios. En primer lugar, en la ejecución *GetStrategies* los AEs pueden ser desplegados de manera deterministas o aleatoria, al igual que los usuarios (aunque en este proyecto se hace de forma aleatoria). Sin embargo, en la ejecución del *CompareStrategies* se desplegarán de forma determinista tanto AEs como usuarios ya que, para realizar una comparación justa y coherente con la primera ejecución, los escenarios deberán de ser los mismos en ambas ejecuciones. Para el despliegue determinista se dispondrá de un archivo en el que se especifique la posición de los AEs o de los usuarios según corresponda. Al contrario, en el caso aleatorio los AEs serán dispuestos aleatoriamente dentro del escenario, aunque se dejará una distancia mínima entre aquellas que sean del mismo tipo (radio de cobertura y número de recursos).

En la Figura 4.4 se muestra el ejemplo del escenario que servirá como guía para realizar sobre él todos los pasos para encontrar la solución a los problemas objetivo de este proyecto. Para este ejemplo se han desplegado tres AEs y un número total de 20 usuarios.

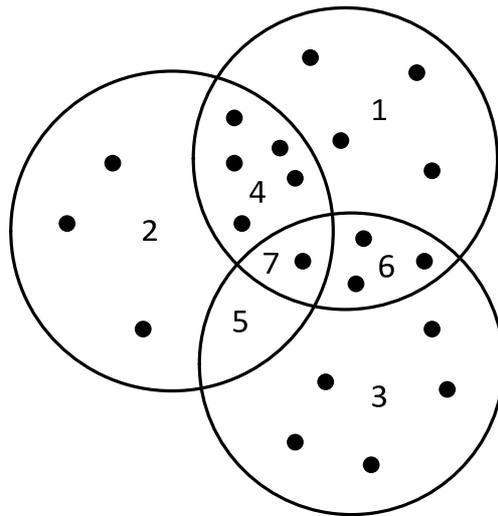


Fig. 4.4: Escenario ejemplo

- **Conectividad**

Una vez se tienen desplegados los AEs y los usuarios el siguiente paso es el de establecer la conectividad entre ambos. Para ello se recorren todos los usuarios y se calcula la distancia existente entre cada usuario y cada AE. Posteriormente se comprueba si dicha distancia es menor que el alcance que tiene el AE, caso en el que el usuario tendrá conectividad con ese AE. En este caso se incorporará el identificador (ID) del AE al conjunto de AEs alcanzables por ese usuario y, además, dicho usuario se añadirá a la lista de usuarios alcanzables que mantiene cada AE.

Continuando con el ejemplo iniciado en el paso anterior, puede verse que debido al solapamiento de las coberturas de los AEs aparecen diferentes zonas en las que los usuarios tienen conectividad con uno o varios AEs. Por ejemplo, el usuario presente en el área numerada como 7 tiene conectividad con los tres AEs, sin embargo, los usuarios en el área numerada como 2 tienen conectividad con un único AE.

■ Establecer áreas

La función encargada de establecer las áreas disponibles en el escenario se denomina *EstablishAreas*. En este proyecto se denomina área al conjunto de usuarios dentro del escenario que tengan la misma conectividad, es decir, que tienen a su alcance a los mismos AEs. Para establecer las áreas en el escenario se recorren los usuarios, identificando qué AEs son capaces de alcanzar y asignándole un *key*. El *key* será un número binario en el que cada bit se relaciona con cada uno de los AEs del escenario, si el usuario tiene conectividad con un AE se le asignará el bit 1, en caso contrario será un 0. Finalmente, aquellos usuarios que tengan asignado el mismo *key* formarán parte del mismo área. Siguiendo con el ejemplo anterior, en la Tabla 4.1 se muestra las áreas creadas a partir de la disposición de los usuarios con sus *key* correspondientes. Todas las zonas que aparecían numeradas forman un área ya que sus usuarios tienen la misma conectividad, salvo la zona numerada como 5, en la que, a pesar de existir conectividad con los AE 2 y 3, no hay usuarios desplegados.

Tabla 4.1: Áreas, conectividad y número de usuarios.

<i>Superficie</i>	[AE3 AE2 AE1]	<i>Key</i>
1	[0 0 1]	0x01
2	[0 1 0]	0x02
3	[1 0 0]	0x04
4	[0 1 1]	0x03
6	[1 0 1]	0x05
7	[1 1 1]	0x07

■ Procesado de áreas

El siguiente paso, una vez obtenidas las áreas, es procesarlas. La función encargada de realizar esta tarea es *processAreas*. Las áreas pueden ser de dos tipos, *singleArea* u *overlapArea*. Al primer grupo pertenecen aquellas áreas en las que sus usuarios sólo pueden acceder a un único AE, mientras que al segundo pertenecen aquellas áreas en las que haya cobertura de dos o más AEs, teniendo los usuarios más alternativas de conexión.

En la Tabla 4.2 se continúa con el ejemplo anterior y se distinguen las áreas que son *singleArea* y las que son *overlapArea*.

Una vez terminado el proceso, cada AE tendrá registradas todas las áreas (*single* y *overlap*) a las que pertenece y el número de usuarios en cada una de ellas. En la Tabla 4.3 se muestra la información que tendrían los AEs del ejemplo seguido a lo largo de esta sección.

Tabla 4.2: Áreas *single* y áreas *overlap*.

Áreas Single	0x1, 0x2, 0x4
Áreas Overlap	0x3, 0x5, 0x7

Tabla 4.3: Información de los AEs.

<i>AE</i>	<i>Áreas Single</i>	<i>Nº Usuarios</i>	<i>Áreas Overlap</i>	<i>Nº Usuarios</i>
1	0x01	4	0x03,0x05,0x07	5,3,1
2	0x02	3	0x03,0x07	5,1
3	0x04	5	0x05,0x07	3,1

4.5. Obtención de estrategias

Como se adelantó anteriormente, existen dos tipos de análisis principales: *GetStrategies* y *CompareStrategies*. En esta sección se profundiza en el primer análisis. Una vez desplegado el escenario, establecida la conectividad y procesadas las áreas emergentes, las funciones del análisis *GetStrategies* se encargan de identificar todas las posibles estrategias y de procesarlas para determinar el beneficio obtenido por cada AE con el fin de encontrar el resultado óptimo.

Hasta ahora los procesos que se han llevado a cabo eran iguales para los dos problemas expuestos en este proyecto. A partir de ahora las funciones serán diferentes ya que en un caso las estrategias estarán definidas por recursos que puedan ofrecer los AEs en las distintas áreas en las que ofrezcan cobertura, mientras que en el otro los precios que cada AE puede ofrecer a todas las áreas en las que ofrezca cobertura. A continuación se detallan las funciones principales para cada problema, mostrando las salidas que ofrecen a partir del escenario ejemplo.

4.5.1. Obtención de estrategias - Asignación de Recursos

A continuación se detallan las funciones principales para la obtención de todas las estrategias posibles en el problema de Asignación de Recursos en el análisis *GetStrategies*.

En primer lugar, con la función *bsfindStrategies*, cada AE determina sus estrategias, para lo que toma una serie de “decisiones”. Como primer paso el AE comprueba si da cobertura a una *SingleArea* y si, tras satisfacer la demanda en ella, tiene recursos suficientes para servir al resto de zonas. El motivo de servir en primer lugar a las *SingleAreas* es que al ser el único AE al que éstos usuarios pueden conectarse se convierten en un beneficio seguro. Si se diera el caso de que el AE no tiene más recursos disponibles una vez cubiertos los usuarios de la *SingleArea*, el AE no tendrá más estrategias. En caso contrario aparecen dos casos posibles: uno en el que el número de recursos es mayor que el número de usuarios bajo su cobertura, situación en la que no habría ninguna estrategia ya que su capacidad cubre toda la demanda; y otro en el que se tienen menos recursos que usuarios y se tienen que buscar todas las estrategias de reparto.

En las tablas mostradas a continuación se describen las distintas etapas del proceso de búsqueda de estrategias:

1. **Búsqueda de particiones de la capacidad disponible.** A partir de los recursos disponibles por el AE una vez haya servido la *SingleArea*, la función *findPartitions* hace una "partición" ¹ para calcular de qué forma se pueden repartir entre el resto de áreas en las que se ofrece cobertura. Siguiendo con el ejemplo anterior en las Tablas 4.4, 4.5 y 4.6 se muestran los cálculos seguidos para cada AE en función de los recursos disponibles, del número de áreas a las que ofrece cobertura y los usuarios en ellas.

Los AEs 1 y 3, después de cubrir las *SingleAreas* tienen recursos disponibles para las *OvererlapAreas*. Además, como el número de recursos restantes es menor que el número de usuarios en ellas tendrán que establecer todas las posibilidades de reparto. Sin embargo, una vez que el AE2 ha cubierto la *SingleArea* tiene un número de recursos restantes igual al número de usuarios en las *OverlapAreas*, por lo que tendrá una única estrategia.

Como puede observarse, no se han creado todas las combinaciones posibles sino sólo las particiones sin importar el orden. Por ejemplo, el valor 3 puede "partirse" en 3 y 0 ó 2 y 1. El método implementado para encontrar la partición se ha adaptado del algoritmo presentado en [20].

Tabla 4.4: Información y particiones del AE1.

AE1	Recursos Totales = 8
	Usuarios en <i>SingleArea</i> = 4
	Usuarios en <i>OverlapAreas</i> = 9
	Recursos para <i>SingleArea</i> = 4
	Recursos para <i>OverlapAreas</i> = $8 - 4 = 4$
	Nº Recursos mayor o igual al nº usuarios en overlap = No
	Particiones de 4
	[0 0 4]
	[0 1 3]
	[0 2 2]
	[1 1 2]

¹Una partición de un número entero n es una representación de n como suma de enteros positivos, sin orden [19].

Tabla 4.5: Información y particiones del AE2.

AE2	Recursos Totales = 9
	Usuarios en <i>SingleArea</i> = 3
	Usuarios en <i>OverlapAreas</i> = 6
	Recursos para <i>SingleArea</i> = 3
	Recursos para <i>OverlapAreas</i> = $9 - 3 = 6$
	NºRecursos mayor o igual al nºusuarios en overlap = Sí
	Estrategia única
	[0x07 0x03]
	[1 5]

Tabla 4.6: Información y particiones del AE3.

AE3	Recursos Totales = 8
	Usuarios en <i>SingleArea</i> = 5
	Usuarios en <i>OverlapAreas</i> = 4
	Recursos para <i>SingleArea</i> = 5
	Recursos para <i>OverlapAreas</i> = $8 - 5 = 3$
	NºRecursos mayor o igual al nºusuarios en overlap= No
	Particiones de 3
	[0 3]
	[1 2]

2. **Permutaciones de cada combinación.** Una vez obtenidas las particiones, la función *permutation* es la encargada de crear todas las posibles combinaciones. Siguiendo con el ejemplo de esta sección en las Tablas 4.7 y 4.8 se muestran los resultados de la función *permutate*.

Tabla 4.7: Resultado de la permutación en el AE1.

0x07	0x05	0x03
[0	0	4]
[0	4	0]
[4	0	0]
[0	1	3]
[0	3	1]
[1	3	0]
[3	1	0]
[1	0	3]
[3	0	1]
[0	2	2]
[2	2	0]
[2	0	2]
[1	1	2]
[1	2	1]
[2	1	1]

Tabla 4.8: Resultado de la permutación en el AE3.

0x07	0x05
[0	3]
[3	0]
[1	2]
[2	1]

3. **Limitar recursos en una zona al número de usuarios.** En los pasos anteriores se han obtenido todas las combinaciones posibles de reparto sin analizar lo razonable que resulta la asignación. Como se ha dicho en ocasiones anteriores, no se permite ofrecer más recursos que número de usuarios y los AEs limitarán los recursos en cada área al número de usuarios presentes ya que, de lo contrario, se ofrecerían recursos que no iban a ser utilizados en ningún caso. Siguiendo con el ejemplo anterior, las Tablas 4.9 y 4.10 muestran la modificación de las estrategias. Cuando los recursos asignados en una zona son mayores que el número de usuarios en esa zona éstos se limitan al número de usuarios.

Tabla 4.9: Limitación de recursos en el AE1.

0x07	0x05	0x03	→	0x07	0x05	0x03
[0	0	4]	→	[0	0	4]
[0	4	0]	→	[0	3	0]
[4	0	0]	→	[1	0	0]
[0	1	3]	→	[0	1	3]
[0	3	1]	→	[0	3	1]
[1	3	0]	→	[1	3	0]
[3	1	0]	→	[1	1	0]
[1	0	3]	→	[1	0	3]
[3	0	1]	→	[1	0	1]
[0	2	2]	→	[0	2	2]
[2	2	0]	→	[1	2	0]
[2	0	2]	→	[1	0	2]
[1	1	2]	→	[1	1	2]
[1	2	1]	→	[1	2	1]
[2	1	1]	→	[1	1	1]

Tabla 4.10: Limitación de recursos en el AE3.

0x07	0x05	0x07	0x05	
[0	3]	→	[0	3]
[3	0]	→	[1	0]
[1	2]	→	[1	2]
[2	1]	→	[1	1]

4. **Creación de las estrategias de cada AE.** A partir de los resultados obtenidos en el paso anterior se procede a crear la estrategia en sí con la función *CreateStrategy*. En primer lugar se determina si la estrategia es factible o no, para a continuación ser registrada con un identificador único. De este modo, se eliminan aquellas estrategias en las que se ofrezca un número menor de recursos que la capacidad disponible ya que éstas estarán "dominadas" por aquellas que sí que lo hagan y no serán óptimas. En las Tablas 4.11 y 4.12 se muestran las estrategias definitivas para el AE1 y el AE3.

Tabla 4.11: Estrategias factibles para el AE1.

<i>ID</i>	<i>0x07</i>	<i>0x05</i>	<i>0x03</i>	
0	[0	0	4]	
-	[0	3	0]	Dominada
-	[1	0	0]	Dominada
1	[0	1	3]	
2	[0	3	1]	
3	[1	3	0]	
-	[1	1	0]	Dominada
4	[1	0	3]	
-	[1	0	1]	Dominada
5	[0	2	2]	
-	[1	2	0]	Dominada
-	[1	0	2]	Dominada
6	[1	1	2]	
7	[1	2	1]	
-	[1	1	1]	Dominada

Tabla 4.12: Estrategias factibles para el AE3.

<i>ID</i>	<i>0x07</i>	<i>0x05</i>	
0	[0	3]	
-	[1	0]	Dominada
1	[1	2]	
-	[1	1]	Dominada

5. **Combinaciones de estrategias.** Finalmente se obtienen las combinaciones globales que pueden establecerse a partir de las estrategias de todos los AEs. Partiendo del número de combinaciones de cada estación base se utiliza un producto cartesiano (*CartesianProduct*). En la Tabla 4.13 se muestra el resultado de esta función para el ejemplo que se está siguiendo en esta sección. Para cada estrategia se especifica la estrategia (índice) utilizada por cada AE.

Para entender mejor la notación y el significado de la Tabla 4.13 a continuación se desglosa, por ejemplo, la estrategia número 5. Ésta es la combinación de las estrategias 2, 0 y 1 de los AEs 1, 2 y 3 respectivamente. Esto significa que el AE1 utiliza su estrategia 2, que si nos remitimos a la Tabla 4.11 se traduce en que ofrece 0 recursos al área 0x07, 3 al área 0x5 y 1 al 0x03; el AE2 utiliza la única estrategia que tiene, que como puede recordarse en la Tabla 4.12 se trata de ofrecer 1 y 5 recursos a las áreas 0x07 y 0x03 respectivamente; por último, el AE3 utiliza su estrategia 1, en la que ofrece 1 recurso al área 0x07 y 2 recursos al área 0x05.

El tiempo necesario para procesar los escenarios puede resultar muy elevado si el número de estrategias es muy grande, por ello en el fichero de configuración se especifica el número máximo de estrategias a partir del cual se desplegaría un nuevo

Tabla 4.13: Resultado del producto cartesiano.

N° Estrategia	AE1	AE2	AE3	N° Estrategia	AE1	AE2	AE3
0	[0	0	0]	8	[4	0	0]
1	[0	0	1]	9	[4	0	1]
2	[1	0	0]	10	[5	0	0]
3	[1	0	1]	11	[5	0	1]
4	[2	0	0]	12	[6	0	0]
5	[2	0	1]	13	[6	0	1]
6	[3	0	0]	14	[7	0	0]
7	[3	0	1]	15	[7	0	1]

escenario. Esta funcionalidad puede eliminarse si se desea. Para los resultados de este proyecto se ha estipulado un límite de 10000 estrategias.

4.5.2. Obtención de estrategias - Asignación de Precios

La obtención de estrategias en este problema es más sencilla que en el caso anterior y el número de estrategias es menor.

1. **Creación de las estrategias de cada AE.** Para cada AE se definen las estrategias posibles en base al vector de precios establecido inicialmente (definido en el fichero de configuración). Cada estrategia consiste en asignar los distintos precios del vector a todas las áreas en las que ofrece cobertura. Al estar únicamente contemplado ofrecer el mismo precio a todas las áreas el número de estrategias de cada AE será igual a la longitud del vector de precios posibles a asignar. En la Tabla 4.14 se presenta el resultado de utilizar un vector de precios de longitud 3 con los precios [24.25, 30.8, 37]. Para establecer este vector de precios se realizó un cálculo promediado de los precios mínimo, medio y máximo de diferentes servicios de telecomunicación relacionados con tecnologías heterogéneas como son la telefonía móvil, SMS, datacards y terminales móviles. Los valores para realizar dicho cálculo fueron obtenidos a partir de los datos ofrecidos por la CMT en sus informes anuales.

Tabla 4.14: Estrategias de los AEs.

N° Estrategias	AE1				AE2			AE3		
	0x01	0x03	0x05	0x07	0x02	0x03	0x07	0x04	0x05	0x07
0	24.2	24.2	24.2	24.2	24.2	24.2	24.2	24.2	24.2	24.2
1	30.8	30.8	30.8	30.8	30.8	30.8	30.8	30.8	30.8	30.8
2	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37

2. **Combinaciones de estrategias.** Una vez se han definido las estrategias de cada AE individualmente el siguiente paso es el de establecer la combinación de estrategias global para todo el escenario. Para ello se utiliza la función *cartesianProduct* que para el ejemplo que se está siguiendo ofrece el resultado

mostrado en la Tabla 4.15. Para entender mejor el significado a continuación se desglosa, por ejemplo, la estrategia número 11. Ésta es la combinación de las estrategias 1, 0 y 2 de los AEs 1, 2 y 3 respectivamente. Esto significa que el AE1 utiliza la estrategia 1 que si nos remitimos a la Tabla 4.14 significa que asigna el precio medio, que el AE2 utiliza la estrategia 0 asignando el precio más bajo y que el AE3 utiliza la estrategia 2 asignando el precio más alto.

Tabla 4.15: Resultado del producto cartesiano.

<i>NºEstrategia</i>	<i>AE1</i>	<i>AE2</i>	<i>AE3</i>	<i>NºEstrategia</i>	<i>AE1</i>	<i>AE2</i>	<i>AE3</i>
0	[0	0	0]	14	[1	1	2]
1	[0	0	1]	15	[1	2	0]
2	[0	0	2]	16	[1	2	1]
3	[0	1	0]	17	[1	2	2]
4	[0	1	1]	18	[2	0	0]
5	[0	1	2]	19	[2	0	1]
6	[0	2	0]	20	[2	0	2]
7	[0	2	1]	21	[2	1	0]
8	[0	2	2]	22	[2	1	1]
9	[1	0	0]	23	[2	1	2]
10	[1	0	1]	24	[2	2	0]
11	[1	0	2]	25	[2	2	1]
12	[1	1	0]	26	[2	2	2]
13	[1	1	1]				

4.6. Beneficios y Óptimo de Pareto

Esta sección tiene como objetivo mostrar cómo se calculan los beneficios que ofrecen las estrategias anteriormente calculadas, el proceso general es diferente para ambos problemas, ya que las expresiones resultantes (ver Sección ??) para la obtención del beneficio fueron diferentes.

El proceso general que se sigue en ambos casos es el recorrido de las diferentes áreas calculando el beneficio a partir del modo de selección correspondiente para, a continuación, sumar el beneficio total de cada AE en todas las áreas en las que ofrecen cobertura. Para mostrar de manera más clara el proceso, en las siguientes líneas se continúa con el ejemplo del escenario que se está analizando a lo largo del capítulo.

4.6.1. Cálculo de los beneficios - Asignación de recursos

Una vez se ha obtenido todo el conjunto de estrategias, el siguiente paso es calcular el beneficio que cada una de ellas reporta. Es importante recordar el método de selección de acceso que se utiliza en este problema: el usuario escogerá recurso de forma aleatoria, esto es, seleccionará un recurso cualquiera de entre los que hayan ofrecido los AEs en la zona en la que se encuentre. Este hecho deriva en que un AE que haya ofrecido un mayor número de recursos que el resto en una zona tendrá una

probabilidad mayor de ser seleccionado. El proceso para cada estrategia es el mismo, se recorren todas las áreas calculando el beneficio de cada AE en ellas. Finalmente se obtendrá la suma total de todos los beneficios de cada AE en todas las áreas teniendo así el beneficio total.

En la Tabla 4.16 se muestra el resultado del proceso de obtención del beneficio para, por ejemplo, la estrategia número 5. Esta estrategia está definida como [2 0 1] lo que significa que el AE1 utiliza su estrategia 2, el AE2 su estrategia 0 y el AE3 su estrategia 1. Para identificar cuántos recursos ofrecen en esas estrategias sólo es necesario revisar la Tabla (REF), en la que puede observarse que el AE1 ofrece 0, 3 y 1 recursos en las áreas 0x07, 0x05 y 0x03 respectivamente; el AE2 ofrece 1 y 5 recursos en las áreas 0x07 y 0x03; y por último, el AE3 ofrece 1 y 2 en las áreas 0x07 y 0x05 respectivamente.

Tabla 4.16: Ejemplo de obtención de beneficios - asignación de recursos.

Área 0x01	Recursos totales = 8	$C_{AE1} = 8 - 4 = 4$
	Tipo de área = Single	$U_{0x01} = 0$
	Usuarios en área = 4	$\text{Beneficio}_{AE1} = 4$
Área 0x02	Recursos totales = 9	$C_{AE2} = 9 - 3 = 6$
	Tipo de área = Single	$U_{0x02} = 0$
	Usuarios en área = 3	$\text{Beneficio}_{AE2} = 3$
Área 0x04	Recursos totales = 8	$C_{AE3} = 8 - 5 = 3$
	Tipo de área = Single	$U_{0x04} = 0$
	Usuarios en área = 5	$\text{Beneficio}_{AE3} = 5$
Área 0x03	Recursos totales = 1 + 5 = 6	$C_{AE1} = 1 - 1 = 0$
	Tipo de área = Overlap	$C_{AE2} = 5 - 4 = 1$
	Usuarios en área = 5	$U_{0x03} = 0$
		$\text{Beneficio}_{AE1} = 1$ $\text{Beneficio}_{AE2} = 4$
Área 0x05	Recursos totales = 3 + 2 = 5	$C_{AE1} = 3 - 2 = 1$
	Tipo de área = Overlap	$C_{AE3} = 2 - 1 = 1$
	Usuarios en área = 3	$U_{0x05} = 0$
		$\text{Beneficio}_{AE1} = 2$ $\text{Beneficio}_{AE3} = 1$
Área 0x07	Recursos totales = 0 + 1 + 1 = 2	$C_{AE1} = 0$
	Tipo de área = Overlap	$C_{AE2} = 1 - 1 = 0$
	Usuarios en área = 1	$C_{AE3} = 1$
		$U_{0x01} = 0$
		$\text{Beneficio}_{AE1} = 0$
		$\text{Beneficio}_{AE2} = 1$ $\text{Beneficio}_{AE3} = 0$

A continuación se describe la tabla anterior explicando el proceso de obtención del beneficio de una estrategia, en este ejemplo la número 5. En las tres primeras filas se presenta el reparto de los recursos en las áreas *single*. A continuación se trabaja sobre las áreas *overlap* con los recursos establecidos por la estrategia número

5. La primer columna indica el área en el que se está calculando el beneficio. La segunda columna indica el número de recursos disponibles por los AEs presentes en el área, el tipo de área (*Single* u *Overlap*) y el número de usuarios en el área. Finalmente, en la tercera columna se muestran los resultados de los cálculos del beneficio, comenzando por la selección de recursos (aleatoriamente) por parte de los usuarios y los beneficios que esto reporta.

Finalmente en la Tabla 4.17 se refleja el resultado final del beneficio para cada AE con la estrategia 5 como suma del beneficio calculado en cada área del escenario.

Tabla 4.17: Beneficio total AEs.

	0x01	0x02	0x03	0x04	0x05	0x07	Beneficio
<i>AE1</i>	4	–	1	–	2	0	+ = 7
<i>AE2</i>	–	3	4	–	–	1	+ = 8
<i>AE3</i>	–	–	–	5	1	0	+ = 6

4.6.2. Cálculo de los beneficios - Asignación de precios

Simulando cómo un usuario tomaría la decisión en un escenario real en el que pudiese escoger el AE al que conectarse, la selección de acceso se realizará optando por el AE que ofrezca el menor precio. En el caso en el que dos o más AEs ofrezcan el precio más barato el usuario tomará la decisión de forma aleatoria.

Como ejemplo se analizará el cálculo para la estrategia 5 en la que el AE1 utiliza su estrategia 0, el AE2 la 1 y el AE3 la 2. Esto significa, traducido a precios, que el AE1 ofrece la tarifa más barata 24.2, el AE2 la tarifa media de 30.8 y el AE3 el precio más alto 37. Las capacidades de los tres AEs son, como se establece al principio del ejemplo, de 8, 9 y 8 respectivamente.

En la Tabla 4.19 se muestra el proceso seguido para el cálculo de los beneficios. En primer lugar (las tres primeras filas) se cubren las necesidades de las áreas *single*, y a continuación se cubre a las áreas *overlap*. La primera columna señala el área bajo análisis; la segunda columna indica el número total de recursos disponibles (suma de los recursos de todos los elementos de accesos en el área), el tipo de área (*Single* u *Overlap*) y el número de usuarios en el área; finalmente la última columna muestra el cálculo de los beneficios una vez los usuarios han ido seleccionando recurso de los AEs más baratos, la capacidad restante de cada AE, el número de usuarios que quedan sin cubrir y el beneficio de los AEs.

A partir de estos cálculos se puede obtener el beneficio final de cada AE con esta estrategia sumando los diferentes beneficios obtenidos por cada AE en cada área en la que ofrece cobertura. El beneficio total de los tres AEs a partir de los resultados anteriores se muestra en la Tabla 4.19.

Tabla 4.18: Ejemplo de obtención de beneficios - asignación de precios.

<i>Área 0x01</i>	Recursos totales = 8 Tipo de área = Single Usuarios en área = 4	$C_{AE1} = 8 - 4 = 4$ $U_{0x01} = 0$ $\text{Beneficio}_{AE1} = 4 \cdot 24.2$
<i>Área 0x02</i>	Recursos totales = 9 Tipo de área = Single Usuarios en área = 3	$C_{AE2} = 9 - 3 = 6$ $U_{0x02} = 3$ $\text{Beneficio}_{AE2} = 3 \cdot 30.8$
<i>Área 0x04</i>	Recursos totales = 8 Tipo de área = Single Usuarios en área = 5	$C_{AE3} = 8 - 5 = 3$ $U_{0x04} = 0$ $\text{Beneficio}_{AE3} = 5 \cdot 37$
<i>Área 0x03</i>	Recursos totales = $4 + 6 = 10$ Tipo de área = Overlap Usuarios en área = 5	$C_{AE1} = 4 - 4 = 0$ $C_{AE2} = 6 - 1 = 5$ $U_{0x03} = 0$ $\text{Beneficio}_{AE1} = 4 \cdot 24.2$ $\text{Beneficio}_{AE2} = 1 \cdot 30.8$
<i>Área 0x05</i>	Recursos totales = $0 + 3 = 3$ Tipo de área = Overlap Usuarios en área = 3	$C_{AE1} = 0$ $C_{AE3} = 3 - 3 = 0$ $U_{0x05} = 0$ $\text{Beneficio}_{AE3} = 3 \cdot 37$
<i>Área 0x07</i>	Recursos totales = $0 + 5 + 0 = 5$ Tipo de área = Overlap Usuarios en área = 1	$C_{AE1} = 0$ $C_{AE2} = 5 - 1 = 4$ $C_{AE3} = 0$ $U_{0x01} = 0$ $\text{Beneficio}_{AE1} = 1 \cdot 30.8$

Tabla 4.19: Beneficio total AEs.

	0x01	0x02	0x03	0x04	0x05	0x07	Recursos consumidos	Beneficio
<i>AE1</i>	4	-	4	-	0	0	$+ = 8$	$\cdot 24.2 = 193.6$
<i>AE2</i>	-	3	1	-	-	1	$+ = 5$	$\cdot 30.8 = 154$
<i>AE3</i>	-	-	-	5	3	0	$+ = 8$	$\cdot 37 = 296$

4.6.3. Óptimo de Pareto

Una vez obtenidas las estrategias y calculados los beneficios que derivan de éstas, se determinan las combinaciones óptimas. Para este objetivo se utiliza la función *paretoOptimal*, que es la encargada de encontrar las estrategias no dominadas (ver 2.2.2) para, a partir de éstas, aquellas que son óptimo de Pareto (ver 2.2.4). Para la implementación de este método se ha partido de [21].

Tras obtener el conjunto de resultados anteriores, el programa *Gambit* descrito de manera detallada en 4.2 es el encargado de encontrar los Equilibrios de Nash existentes en el conjunto de estrategias. Para ello se genera el fichero de entrada correspondiente, siguiendo el formato descrito anteriormente. Concretamente se utiliza el comando *enumpure*, que únicamente busca los Equilibrios de Nash puros (ver 2.1.5). A continuación la salida que ofrece Gambit es procesada para determinar los perfiles de estrategias que son equilibrios de Nash.

Finalmente, antes de comenzar con el análisis *CompareStrategies*, se genera un fichero con un resumen de los resultados más importantes: número de realización, número total de áreas, estrategias, estrategias no dominadas, estrategias pareto óptimas, y estrategias que son equilibrio de Nash.

4.7. Comparación de estregias

Una vez finalizado el análisis *GetStrategies* en el que se han obtenido las estrategias, calculado los beneficios y seleccionado aquellas que resultan equilibrio de Nash, el siguiente paso es realizar el análisis *CompareStrategies*. El objetivo de este análisis es el de comprobar la bondad de la solución óptima a la que se llegó previamente. Este procedimiento consta de dos partes: en primer lugar se hallará el beneficio de los AEs cuando utilizan la estrategia óptima obtenida en el análisis *GetStrategies*; en segundo lugar se calculará el beneficio de los AEs cuando éstos no imponen ninguna restricción. Esto último difiere en ambos problemas, en el problema de asignación de recursos significa que los AEs pondrán a disposición de los usuarios todos los recursos que se irán ocupando paulatinamente, mientras que en el problema de asignación de precios significa que los AEs impondrán la tarifa media.

A continuación se describen brevemente las funciones más importantes.

- **SetUsers, SetBS, SetAreas.** Estas funciones replican el escenario sobre el que se realizó el análisis *GetStrategies*. Para que la comprobación sea coherente el escenario tendrá que ser el mismo que se utilizó para encontrar la estrategia óptima. El despliegue se realizará en base a los ficheros almacenados en el análisis anterior que contienen las características fundamentales del escenario como son la localización de los usuarios, los AEs y las áreas.
- **SetResources/SetPrices.** En este punto las funciones difieren para ambos problemas. Ambos procedimientos utilizan los tres mismos parámetros de entrada *m_selectedStrategy*, *m_overallStrategyFile* y *m_BSStrategiesFile*, pero

el significado de las estrategias será diferente para cada problema. A continuación se expone el proceso para ambos casos.

SetResources

Con los parámetros de entrada expuestos anteriormente se recogen todos los resultados de la estrategia óptima que se obtuvo en los pasos anteriores, esto es, el número de estrategia utilizada por cada AE y la información sobre los recursos que ofrece cada AE en dicha estrategia.

SetPrices

Los parámetros de entrada que se han expuesto recogen los resultados de la estrategia óptima obtenida en los pasos anteriores. En este caso estos resultados incluyen el número de estrategia a utilizar por cada AE y la información sobre el precio vinculado a cada estrategia.

- **StartAnalysis.** Es el corazón del análisis *CompareStrategies* e implementa dos procesos diferentes: *AnalyzeStrategy* que analiza el resultado de aplicar la estrategia óptima y *WithoutStrategy*, que analiza el resultado de no aplicarla.
 - *AnalyzeStrategy.* En este proceso se analizan los resultados obtenidos al aplicar la estrategia óptima para cada problema, es decir, la asignación óptima de recursos en el problema de asignación de recursos y la asignación óptima de precios en el problema de asignación de precios. Teniendo en cuenta que el beneficio concreto en un escenario puede depender del orden en que son procesados los usuarios (a la hora de seleccionar AE), se obtiene el beneficio medio tras realizar N ejecuciones, variando el orden en el que los usuarios soliciten conexión. En el proceso se obtiene el beneficio total promedio (para las N realizaciones) y el beneficio individual de cada elemento de acceso. El valor de N utilizado en este proyecto es de 500 realizaciones, suficiente para alcanzar un valor medio fruto de la aleatorización del orden de petición de los usuarios.
 - *WithoutStrategy.* En este proceso se analizan los resultados obtenidos cuando los AEs no aplican ningún tipo de restricción. En el problema de asignación de recursos no aplicar ninguna restricción significa que los AEs ofrecen sus recursos y éstos se van consumiendo, mientras que en el problema de asignación de precios significa ofrecer siempre una tarifa fija, el precio medio. En el proceso *WithoutStrategies* se lleva a cabo la misma aleatorización con los usuarios que en el caso anterior.

Resultados

Una vez planteados con detalle los problemas objetivo de este proyecto y la implementación desarrollada para solucionarlos, a continuación se describen los principales resultados obtenidos. En primer lugar se describirán los escenarios utilizados, lo que permitirá analizar de una forma más apropiada los resultados.

Una vez se hayan descrito los escenarios, y antes de mostrar los beneficios que reporta la utilización de la estrategia óptima, se analizarán dichos escenarios estudiando diferentes aspectos como son el número de áreas, el número de estrategias que aparecen en función del número de AEs y de usuarios, y la conectividad de los diferentes despliegues analizando las posibilidades de conexión que tienen los usuarios en términos del número de AEs alcanzables.

Una vez caracterizado lo anterior se analizan los beneficios. Para el problema de asignación de recursos los beneficios serán analizados en primer lugar en términos de la carga que es capaz de soportar la red en su conjunto, y en segundo lugar la carga diferenciada por tipo de AE. En el caso del problema de asignación de precios los beneficios son analizados primero en términos de beneficio monetario alcanzado en la red en su conjunto, y en segundo lugar el beneficio monetario alcanzado diferenciando por tipo de AE.

5.1. Descripción de escenarios

Durante el planteamiento y solución de los problemas propuestos en este proyecto se ha hecho referencia en varias ocasiones los trabajos de Niyato y Hassain [1] y [2]. En este trabajo se parte de escenarios similares con la diferencia de que todos los radios de cobertura se mantienen circulares, mientras que en [1] y [2] se utilizaban diferentes formas geométricas.

Se parte de la utilización de tres tecnologías diferentes cuyas características se encuentran resumidas en la Tabla 5.1. A partir de dichas tecnologías se definen diferentes escenarios, todos ellos sobre un área de 200 metros de lado. Las características de los distintos escenarios analizados en este proyecto se muestran en la

Tabla 5.1: Especificaciones AEs.

<i>Tipo</i>	<i>Radio</i>	<i>Capacidad</i>
1	100	20
2	50	10
3	30	5

Tabla 5.2: Características de los escenarios analizados.

	Aleatorio	#	Tipo 1		Tipo 2		Tipo 3		Cap.
			<i>Distancia mínima</i>	#	<i>Distancia mínima</i>	#	<i>Distancia mínima</i>	#	
<i>1.det</i>	NO	1	-	1	-	1	-	35	
<i>1.ale</i>	SÍ	1	80	1	80	1	80		
<i>2.det</i>	NO	1	-	2	-	2	-	50	
<i>2.ale</i>	SÍ	1	80	2	80	2	80		
<i>3.det</i>	NO	1	-	3	-	3	-	65	
<i>3.ale</i>	SÍ	1	80	3	80	3	80		
<i>4.det</i>	NO	1	-	4	-	4	-	80	
<i>4.ale</i>	SÍ	1	80	4	80	4	80		
<i>5.det</i>	NO	1	-	4	-	0	-	60	
<i>5.ale</i>	SÍ	1	80	4	80	0	80		
<i>6.det</i>	NO	1	-	4	-	2	-	70	
<i>6.ale</i>	SÍ	1	80	4	80	2	80		
<i>7.det</i>	NO	1	-	4	-	3	-	75	
<i>7.ale</i>	SÍ	1	80	4	80	3	80		

Tabla 5.2.

Todos los escenarios son analizados en dos supuestos: un caso en el que las posiciones de los AEs son fijas a partir de las coordenadas en un fichero, y otro caso en el que las posiciones de los AEs son aleatorias. En este segundo caso, sólo se especifican el número de AEs de cada tipo (tecnología) y la distancia mínima que debe de guardarse entre el despliegue de dos AEs del mismo tipo, evitando así que estén muy cerca y aparezcan muchas áreas solapadas con AEs del mismo tipo.

Para el análisis de cada escenario se han realizado 100 simulaciones para diferentes porcentajes de usuarios desplegados, que van desde el 20% hasta el 200% de la capacidad total del escenario. La diferencia entre las 100 simulaciones es el orden en el que los usuarios realizan su elección de AE al que conectarse. En este capítulo se mostrarán los resultados de tres escenarios concretos (1, 4 y 5), ya que cubren un abanico amplio de posibilidades, incrementando la densidad de AEs, siendo interesante analizar la influencia de esta característica en el conjunto de estrategias. En el Anexo pueden encontrarse los resultados para el resto de escenarios descritos en la Tabla 5.2.

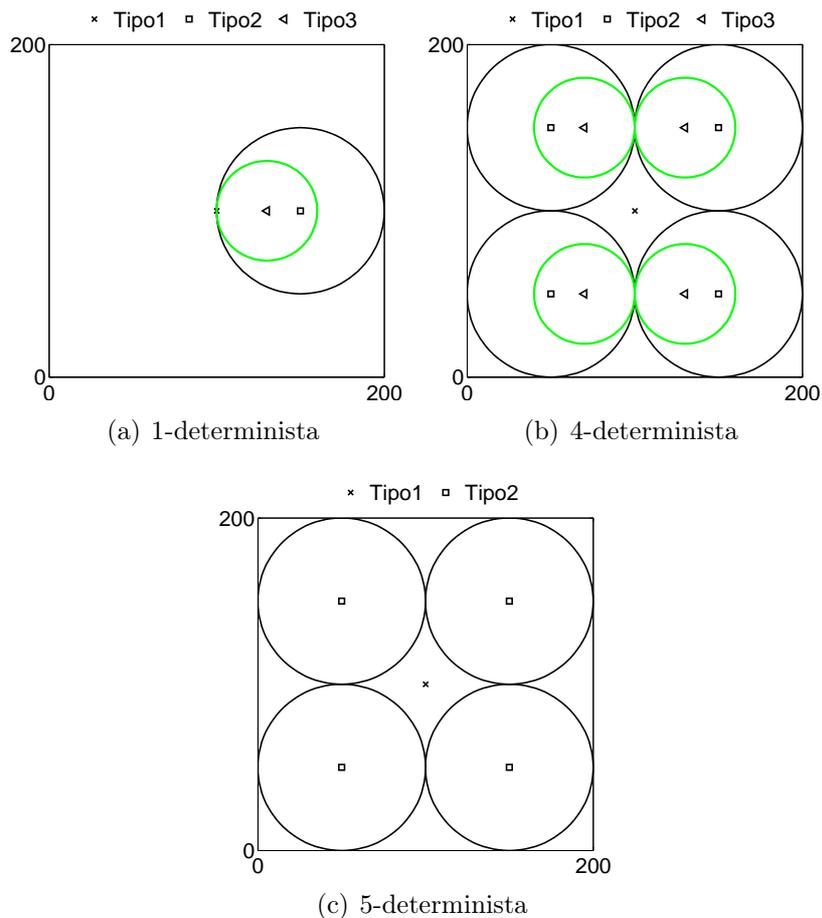


Fig. 5.1: Escenarios: 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.

5.2. Estadísticas sobre estrategias y áreas

Antes de exponer los beneficios obtenidos por la utilización de las estrategias óptimas se considera importante realizar un pequeño análisis sobre el número de estrategias y de áreas que aparecen en los diferentes escenarios. Para ello se presentará el valor medio de las 100 realizaciones y se calculará el coeficiente de variación que ofrecerá una visión sobre la variabilidad que ofrecen estos valores dentro del conjunto de las 100 realizaciones. Éste coeficiente se calculará como el cociente de la desviación típica del conjunto de muestras y su valor medio,

$$\text{Coef. Variación} = \frac{\text{Desviación Típica}}{\text{Media}} \quad (5.1)$$

Se analizarán los dos escenarios extremos, por un lado el 1-determinista y 1-aleatorio en el que están desplegadas el número mínimo de estaciones, y por otro lado el 4-determinista y 4-aleatorio donde están desplegado el mayor número de estaciones base. En primer lugar se realizará el análisis para el problema de asignación de recursos y a continuación para el de asignación de precios.

En la Tabla 5.3 se muestran los resultados para el escenario 1-determinista. Podría esperarse que al tener 3 estaciones base aparecerían 3 áreas diferentes, sin embargo, se debe recordar que las áreas no están definidas como zonas geográficas

con diferentes coberturas, si no que las áreas se refieren a grupos de usuarios con la cobertura de los mismos AEs. Por este motivo, cuando hay pocos usuarios el número de áreas es menor que tres, y cuando éstos aumentan aparecen las tres zonas esperadas. En cuanto al número de estrategias, éste no es muy alto ya que el número de AEs es pequeño, no hay muchas áreas solapadas y las opciones entre las que ofrecer recursos son pocas. Por último, destacar que la variabilidad de ambos valores es muy pequeña.

Tabla 5.3: Estadísticas 1-determinista.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20	1.00	0.00	2.12	0.29
40	1.00	0.00	2.41	0.26
60	1.75	0.25	2.73	0.18
80	1.20	0.74	2.90	0.11
100	1.17	0.40	2.96	0.07
120	1.52	0.74	2.95	0.07
140	1.79	0.70	2.98	0.05
160	2.54	0.76	2.99	0.03
180	3.06	0.67	2.99	0.03
200	4.51	0.55	3.00	0.00

En la Tabla 5.4 se muestran los resultados pertenecientes al escenario 1-aleatorio. En este caso puede observarse que el número de áreas es algo superior. Esto es debido a que al desplegarse de forma aleatoria pueden aparecer un mayor número de áreas solapadas lo que se traduce en un mayor número de áreas si hay usuarios en ellas. En cuanto al número de estrategias, éste al contrario que en el caso anterior y lo que cabría pensar, es menor. Si fuese el caso de que hubiese pocas zonas solapadas no habría muchas estrategias, y si hubiese más podría ocurrir que éstas sólo tuviesen 1 usuario y no aparecerían muchas estrategias.

Tabla 5.4: Estadísticas 1-aleatorio.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20	1.00	0.00	2.00	0.32
40	1.00	0.00	2.43	0.23
60	1.80	0.25	2.79	0.17
80	1.19	0.63	2.81	0.19
100	1.11	0.46	2.95	0.18
120	1.07	0.38	2.99	0.17
140	1.19	0.96	3.03	0.15
160	1.13	0.58	2.96	0.13
180	1.59	1.25	3.16	0.12
200	1.82	1.35	3.14	0.13

En la Tabla 5.5 se muestran los resultados obtenidos del escenario 4-determinista. Como era de esperar, el número medio de estrategias y áreas es superior que en los casos anteriores ya que el número de estaciones en el escenario es superior. Se puede observar que cuando el porcentaje de usuarios es pequeño los valores son más bajos pero cuando éste aumenta, los valores de número de estrategias y número de áreas aumentan notablemente.

Tabla 5.5: Estadísticas 4-determinista.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20	1.00	0.00	7.30	0.14
40	4350.60	0.55	8.47	0.08
60	3896.17	0.70	8.89	0.04
80	2930.92	1.01	8.93	0.03
100	1758.72	1.46	8.99	0.01
120	1944.51	0.61	9.00	0.00
140	4231.55	0.43	9.00	0.00
160	6261.30	0.34	9.00	0.00
180	7338.44	0.25	9.00	0.00
200	7658.99	0.22	9.00	0.00

Por último en la asignación de recursos, en la Tabla 5.6 se detallan los resultados para el escenario 4-aleatorio. En este caso como ocurre en el 1-aleatorio, el número de estrategias es menor que en el caso determinista a pesar de que el número de áreas es mayor. Como se ha explicado anteriormente se debe a que aunque aparezcan más áreas éstas serán solapadas, posiblemente más pequeñas y eso se traducirá en que haya pocos usuarios en ellas y por lo tanto el número de estrategias sea menor. Sin embargo, cabe destacar que en este caso el coeficiente de variación es mayor, lo que indica que existe una mayor variación en cuanto al número de estrategias dentro de cada grupo de simulaciones.

Tabla 5.6: Estadísticas 4-aleatorio.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20	1.00	0.00	7.36	0.21
40	2518.58	0.98	9.84	0.16
60	958.75	2.15	11.42	0.14
80	644.53	2.56	12.40	0.14
100	1526.70	1.63	12.67	0.13
120	1842.31	1.27	12.64	0.11
140	2793.63	0.98	12.28	0.11
160	2900.24	0.93	12.13	0.08
180	3230.53	0.90	11.87	0.10
200	3366.14	0.90	11.68	0.10

En las Tablas 5.7 y 5.8 se muestran los resultados del análisis del número de estrategias y de áreas para los escenarios 1 y 4-deterministas en el problema de asignación de precios. En cuanto al número de áreas, los resultados no serán muy diferentes respecto a los del problema anterior, sin embargo, en el caso de las estrategias observamos que son las mismas para todos los porcentajes de usuarios y el coeficiente de variación es 0. Este resultado deriva de que el número de estrategias es directamente proporcional al número de estaciones base, es decir, cada estación puede ofrecer únicamente 3 precios por lo que el número de estrategias cumplirá siempre lo siguiente:

$$\text{Número de estrategias} = \text{Longitud vector de precios}^{\text{Número de AEs}} \quad (5.2)$$

Tabla 5.7: Estadísticas 1-determinista en el problema asignación de precios.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20	27.00	0.00	2.06	0.32
40	27.00	0.00	2.42	0.25
60	27.00	0.00	2.75	0.16
80	27.00	0.00	2.91	0.10
100	27.00	0.00	2.92	0.09
120	27.00	0.00	2.91	0.10
140	27.00	0.00	2.98	0.05
160	27.00	0.00	2.98	0.05
180	27.00	0.00	2.99	0.03
200	27.00	0.00	2.98	0.05

Tabla 5.8: Estadísticas 4-determinista en el problema asignación de precios.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.00	19683.00	0.00	7.39	0.12
40.00	19683.00	0.00	8.62	0.06
60.00	19683.00	0.00	8.85	0.04
80.00	19683.00	0.00	8.96	0.02
100.00	19683.00	0.00	8.98	0.01
120.00	19683.00	0.00	9.00	0.00
140.00	19683.00	0.00	9.00	0.00
160.00	19683.00	0.00	9.00	0.00
180.00	19683.00	0.00	9.00	0.00
200.00	19683.00	0.00	9.00	0.00

5.2.1. Existencia Equilibrios de Nash

Todos los resultados que se obtienen en este proyecto son fruto de un conjunto de simulaciones en las que se han buscado todas las posibles combinaciones razonables para formar las estrategias, y a partir de ellas se ha calculado la solución a cada problema como el punto equilibrio de Nash. Sin embargo, se verá que este hecho tiene un matiz diferente para ambos problemas.

La cuestión de la existencia de equilibrio de Nash no es algo trivial, es decir, no es algo sencillo de asegurar. Para que exista el equilibrio de Nash debe de asegurarse que el problema cumpla ciertas características. A continuación se enumeran las hipótesis que garantizan su existencia:

- $A_i \subset R^n$ es compacto y convexo para cada $i \in N$
- $P_i(a) \in R$ está definido, es continuo y acotado para todo $a \in A, i \in N$
- $P_i(a_i, a_{-i})$ es cóncavo con respecto a $a_i \in A_i$, para todo $a \in A, i \in N$

Estando el juego definido como $(N, \{A_i\}_{i=1}^n, P)$, siendo $N = \{1, \dots, N\}$ el conjunto de jugadores, A_i el conjunto de acciones posibles de ser elegidas para cada $i \in N$ y P la función de pagos.

Los problemas propuestos en este trabajo no cumplen las características anteriores, siendo problemas discretos y no convexos. Por lo tanto no puede asegurarse la existencia de equilibrio. Sin embargo, los problemas han presentado un comportamiento diferente si atendemos al número de equilibrios que surgían en las simulaciones. En el problema de asignación de recursos todas las simulaciones de todos los escenarios (sin excepción) presentaban equilibrio de Nash. Sin embargo, en el problema de asignación de precios no ocurre como en el problema anterior y durante las simulaciones no siempre se encontraba el Equilibrio. En las Figuras 5.2 (escenarios deterministas) y 5.3 (escenarios aleatorios) se presentan los porcentajes de equilibrios de Nash que se han obtenido para las diferentes densidades de usuarios en éste último problema.

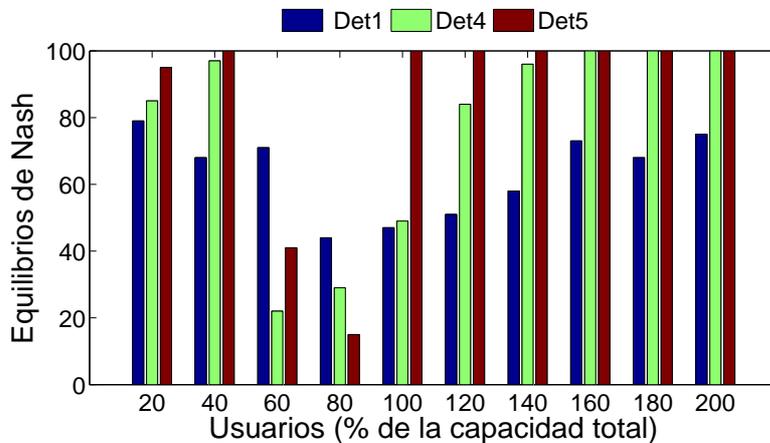


Fig. 5.2: Equilibrios de Nash para los tres escenarios deterministas.

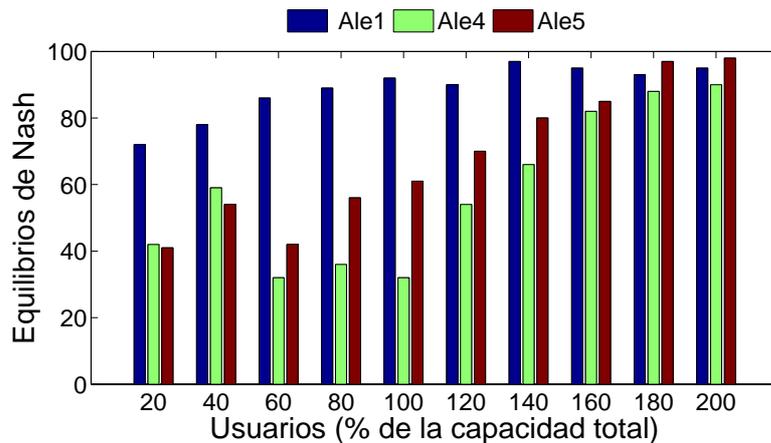


Fig. 5.3: Equilibrios de Nash para los tres escenarios aleatorios.

Como puede observarse en las gráficas no puede desprenderse un patrón de comportamiento. Aunque en muchos casos el porcentaje de equilibrios es alto.

5.3. Conectividad de los usuarios

En esta sección se analizará la conectividad de los usuarios en función de los AEs alcanzables por los mismos para ofrecer una visión más clara de la diferencia entre los distintos despliegues. Para ello se presentarán unos diagramas de barras en los que se muestra el porcentaje de usuarios que tienen conectividad con 1, 2, 3, etc. Destacar que todos los usuarios tendrán conectividad con al menos un AE ya que en todos los escenarios hay un AE que cubre todo el área.

En la Figura 5.4 se muestran los resultados para el escenario 1 en sus variantes determinista y aleatoria. El análisis se ha realizado para el caso en el que en el escenario hay desplegados el 100% de la capacidad total de la red, es decir 35 usuarios. En la Figura 5.4(a) puede observarse que casi un 80% de los usuarios tienen conectividad únicamente con un AE, algo más del 15% tienen conectividad con dos AEs y algo menos del 10% con tres AEs. En el caso aleatorio se obtiene la Figura 5.4(b). En este caso, el porcentaje de usuarios con conectividad a un único AE no varía con relación al caso determinista. Sin embargo, en el caso de la conectividad con dos o tres AEs cambia sustancialmente. El número de usuarios con conectividad a dos AEs supera el 20% mientras que el número de usuarios con conectividad a tres AEs se acerca al 0%.

Estos resultados se muestran totalmente coherentes si se recuerda el escenario en la Figura 5.1(a). El área que sólo está cubierta por un único AE es predominante, por lo que la mayoría de usuarios estarán desplegados sobre ella. La misma conclusión puede obtenerse con los usuarios que tienen conectividad con dos o tres AEs, el área cubierta por dos y tres AEs son similares por lo que no habrá mucha diferencia en cuanto al porcentaje de conectividad de usuarios.

En la Figura 5.5 se muestran los resultados obtenidos para el escenario 4. En el caso determinista mostrado en la Figura 5.5(a) se obtiene que la mayoría de los usuarios tienen conectividad con uno, dos (sobre todo) y tres AEs. Estos resultados

son coherentes si se recuerda el escenario 4-determinista donde la mayor parte del escenario está cubierta por dos AEs y el resto de extensión está dividida prácticamente de igual forma en área cubierta por un AE y área cubierta por tres AEs. En el caso aleatorio los resultados son bastante diferentes. Como puede observarse en la Figura 5.5(b) el porcentaje de usuarios con conectividad a uno o dos AEs rondan en ambos casos el 40%, en el caso de los usuarios con conectividad a tres AEs se tiene un 15%, mientras que prácticamente el resto tienen conectividad con 4 AEs. En el despliegue de escenarios aleatorio se establece la condición de que exista una distancia mínima entre estaciones base de la misma tecnología lo que no permite que aparezcan muchas zonas de solapamiento de más de 2 AEs. Sin embargo, se siguen produciendo más solapamientos que en el caso determinista, lo que permite porcentajes de usuarios con conexión a más de 4 AEs. El caso del aumento de porcentaje de usuarios con un único AE al que poder conectarse es debido a que al haber más áreas solapadas también aparecerán más zonas en las que no haya más AEs a los que conectarse que el que mayor cobertura ofrece.

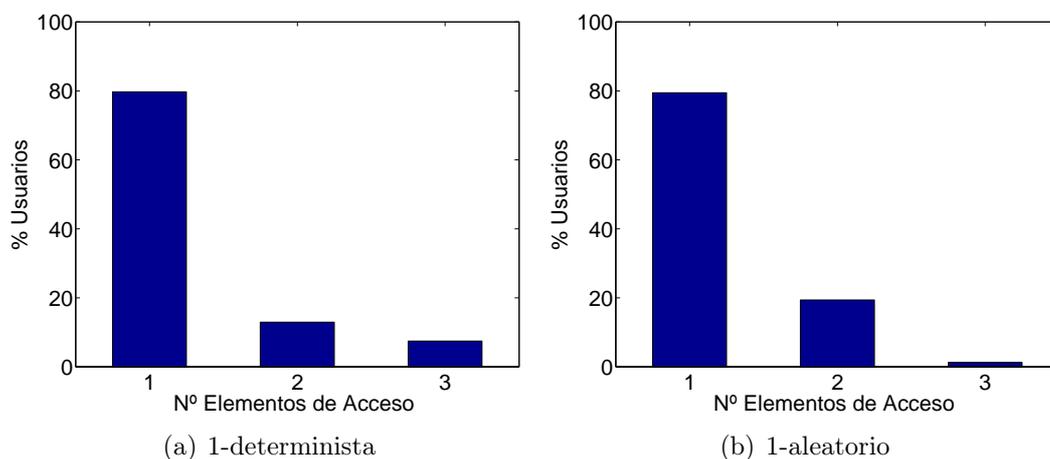


Fig. 5.4: Conectividad en los despliegues tipo 1.

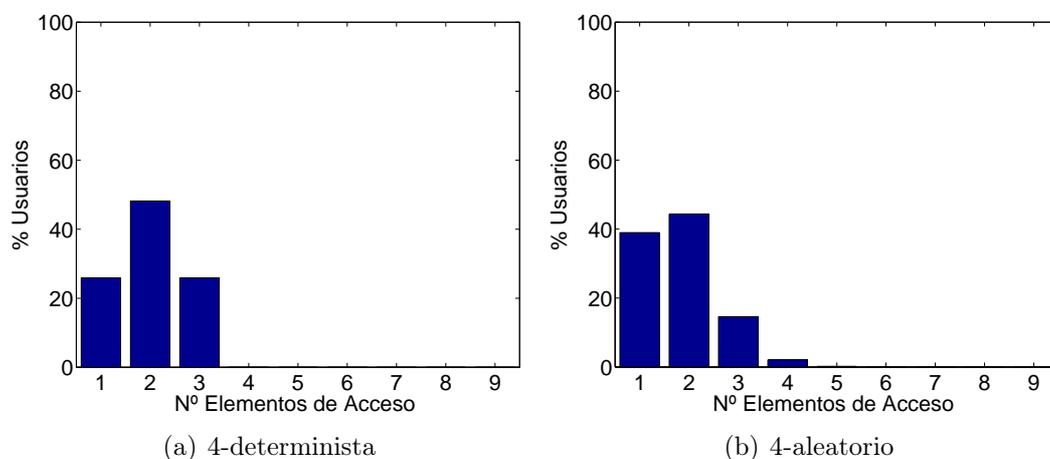


Fig. 5.5: Conectividad en los despliegues tipo 4.

5.4. Resultados generales del escenario

Esta sección tiene como objetivo mostrar los resultados generales de los escenarios para los dos problemas tratados en este proyecto. En primer lugar se mostrará la carga relativa total para el problema de asignación de recursos. En las Figuras 5.6 y 5.7 se mostrará la carga cursada global relativa a la capacidad del sistema para los despliegues 1-4-5-determinista y sus respectivos despliegues aleatorios. Los datos mostrados parten desde el 20% de la capacidad hasta el 200%. Después se presentarán los resultados generales para el problema de asignación de precios en las Figuras 5.8 y 5.9, donde se mostrarán los beneficios medios totales en el escenario, al igual que en el problema anterior, los datos parten desde el 20% de la capacidad hasta el 200%.

5.4.1. Problema asignación de recursos - Carga relativa total

En la Figura 5.6(a) se muestra la carga relativa total respecto al porcentaje de usuarios en el escenario 1-determinista. Los datos se obtienen para un número de usuarios desde el 20% hasta el 200%, esto es, siendo la capacidad del escenario 1-determinista/aleatorio de 35, el número de usuarios irá desde 7 hasta 70. La línea azul con triángulos muestra la solución utilizando la asignación de recursos establecida en la estrategia de Nash. En rojo y con cuadrados se representa la carga obtenida cuando los AEs no imponen ninguna restricción y ofrecen sus recursos a todas las zonas, sin diferencias por áreas. Se observa que cuando el número de usuarios es inferior al 60% de la capacidad total no se aprecian diferencias utilizando una u otra estrategia. Sin embargo, cuando el número de usuarios es superior al 60% se observa una clara mejoría en la carga del escenario cuando se utiliza la estrategia óptima.

En la Figura 5.6(b) se muestran los resultados de carga relativa para el escenario 4-determinista. En este caso el número de usuario va desde 16 hasta 160 ya que la capacidad total es de 80. El resultado obtenido ofrece valores distintos al caso anterior. En este caso, los valores para un número de usuarios menor o igual al 50% de la capacidad total son iguales en el caso de utilizar o no la estrategia óptima. Sin embargo, cuando el número de usuarios es mayor se observa una clara diferencia, aunque la ganancia es menor cuanto mayor es el número de usuarios. Destacar que se alcanza la carga máxima sólo para el caso de utilizar la estrategia óptima.

Finalmente, en la Figura 5.6(c) se muestran los resultados para el escenario 5-determinista. En este caso el número de usuarios va desde 12 hasta 120 ya que la capacidad es de 60. La utilización de la estrategia óptima comienza a reportar beneficios a partir de aproximadamente el 60% de usuarios hasta el 160% en el que se vuelven a igualar los resultados. Destacar que en este caso, tanto la utilización de la estrategia óptima de Nash, como el no utilizarla hacen que se llegue a la carga máxima de la red cuando el número de usuarios en el escenario es alto.

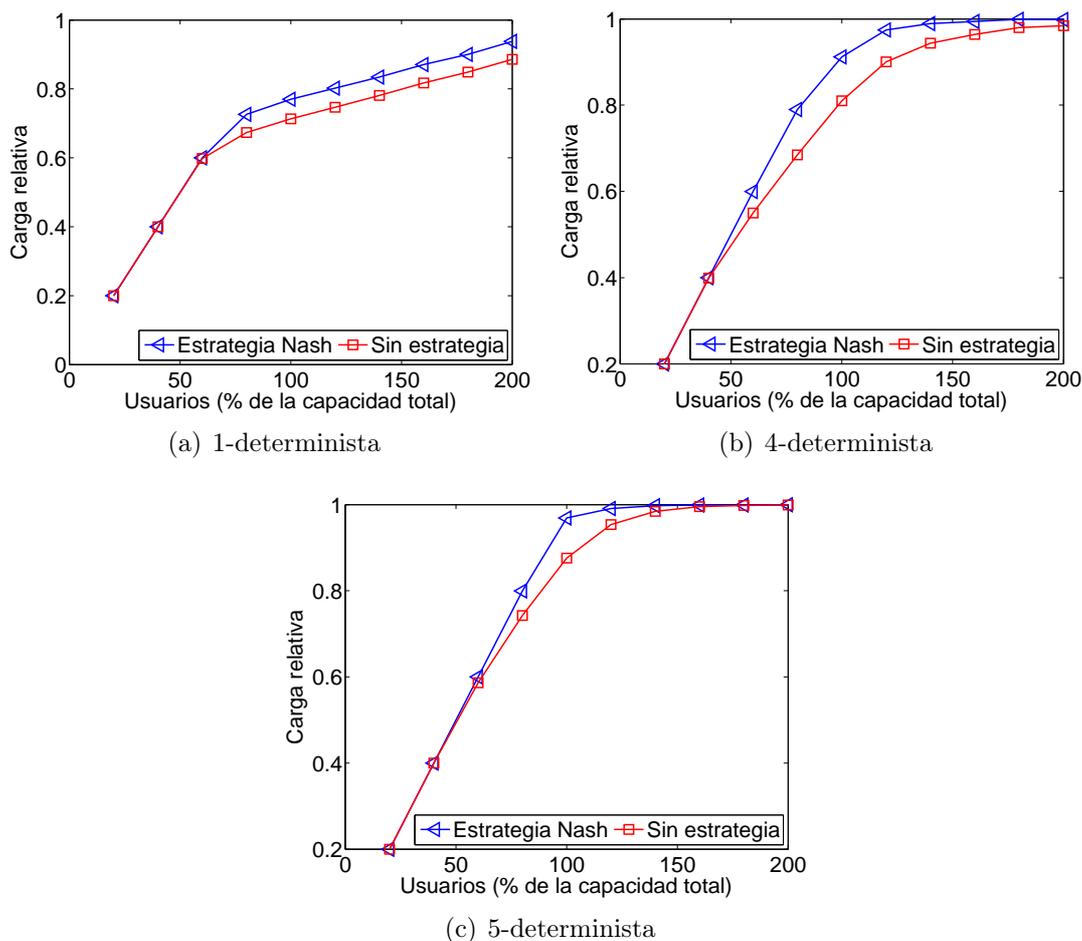


Fig. 5.6: Carga relativa para los escenarios 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.

En la Figura 5.7 se muestran los resultados de carga relativa total para los escenarios 1 – 4 – 5 – aleatorio, a continuación se realizará un análisis de las gráficas y una comparativa con los resultados deterministas.

La Figura 5.7(a) representa la carga relativa para el escenario 1-aleatorio. Como puede observarse los resultados son muy similares al caso determinista, salvo que en este caso se pierde algo de linealidad, aunque no es un hecho muy destacable. En el caso del escenario 4-aleatorio en la Figura 5.7(b) se observan dos diferencias fundamentales con el caso determinista. En primer lugar, la utilización de la estrategia Nash reporta beneficio desde un número de usuarios de prácticamente el 20% de la capacidad total del escenario. En segundo lugar, no se alcanza para ningún caso la carga relativa máxima.

Por último, en la Figura 5.7(c) se muestran los resultados del escenario 5-aleatorio que presenta diferencias con la su homónimo determinista. En primer lugar, la estrategia Nash concurre en un mayor beneficio desde un porcentaje de usuarios de 40% de la capacidad total del escenario, mientras que en el caso determinista esto ocurría alrededor del 60% de usuarios. También destacar que en el caso determinista se alcanzaba la carga relativa máxima en el escenario para un porcentaje de 160% para ambas estrategias, en el caso aleatorio se observa que no

ocurre este hecho, no alcanzando en ningún momento la carga máxima relativa.

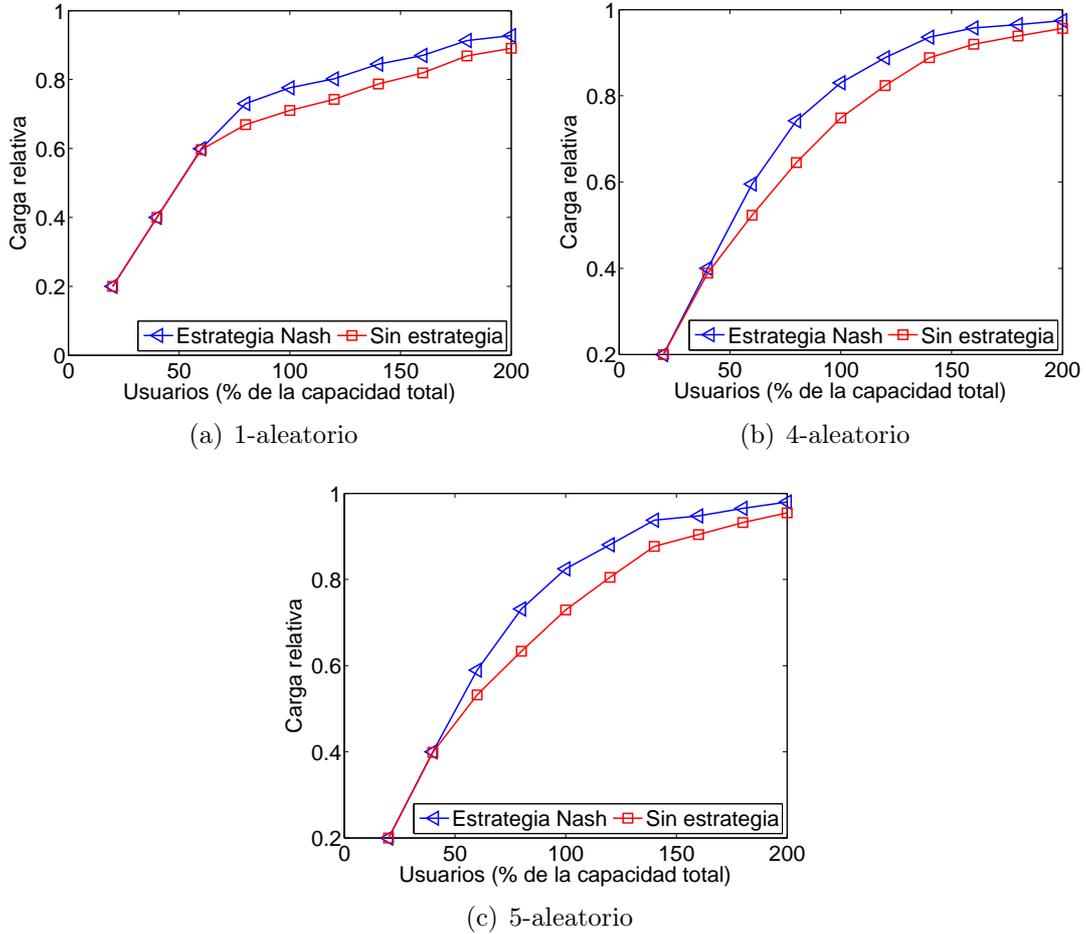


Fig. 5.7: Carga relativa para los escenarios 1 aleatorio, 4 aleatorio y 5 aleatorio.

5.4.2. Problema asignación de precios - Beneficio medio total

En la Figura 5.8 se muestran los resultados de beneficio medio total en el escenario para los escenarios 1 – 4 – 5–determinista.

La Figura 5.8(a) presenta los resultados para el escenario 1-determinista. Como puede observarse la utilización de la estrategia de Nash reporta beneficio para todo el porcentaje de usuarios, siendo mayor la ganancia cuanto mayor es el porcentaje de usuarios en el escenario.

Los resultados para el escenario 4-determinista se muestran en la Figura 5.8(b). En este caso la utilización de la estrategia Nash sólo aporta beneficio cuando el porcentaje de usuarios respecto de la capacidad total en el escenario es superior al 70%, en caso contrario no resultaría beneficioso. Destacar que la máxima ganancia se sitúa para el número máximo de usuarios en valores próximos al 17%.

En la Figura 5.8(c) se presentan los resultados para el escenario 5-determinista. Éstos son similares al escenario 4 ya que sólo ofrece beneficio utilizar la estrategia Nash para porcentajes de usuarios superior al 70%.

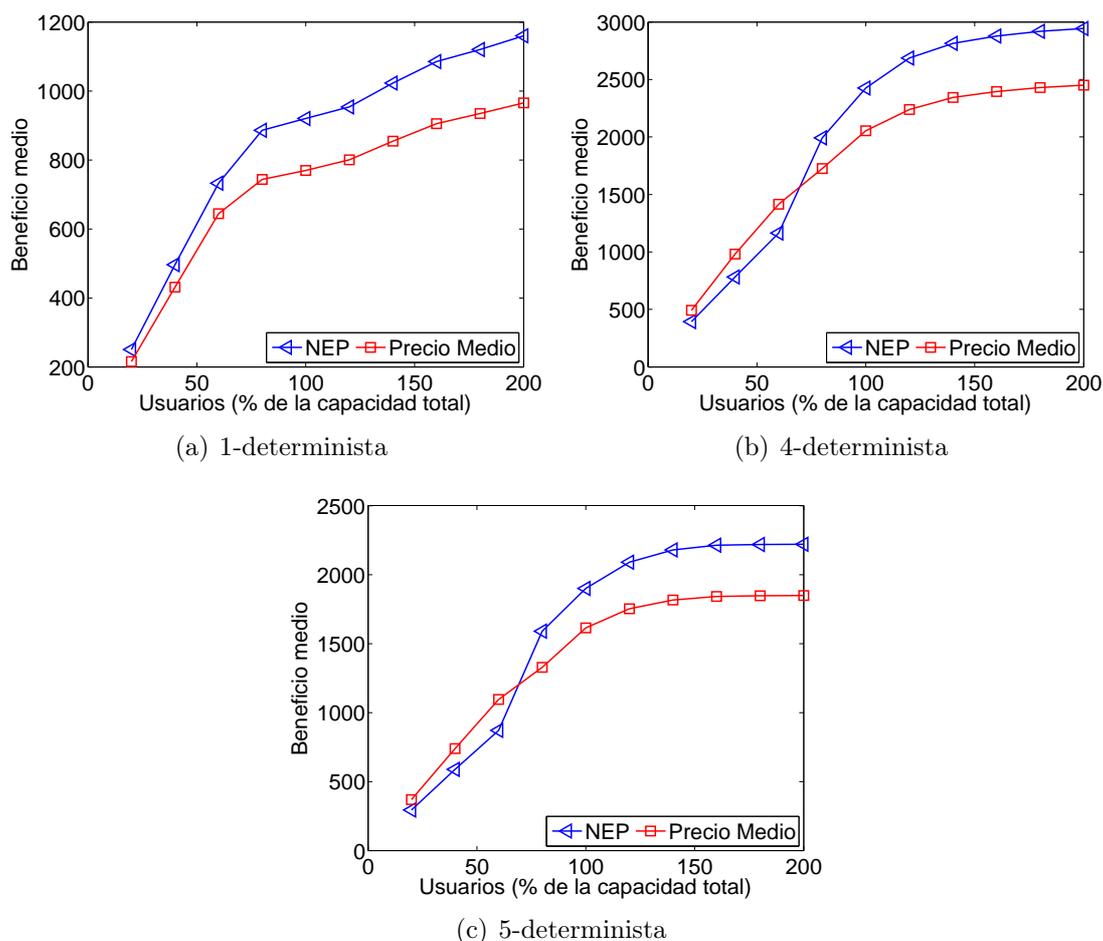


Fig. 5.8: Beneficio medio total en los escenarios 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.

En la Figura 5.9 se muestran los resultados para los escenarios 1 – 4 – 5–aleatorio. En general, en estos casos es beneficioso la utilización de la estrategia óptima.

La Figura 5.9(a) presenta los resultados para el escenario 1-aleatorio, aunque es bastante similar al caso determinista aunque con mayor linealidad en los resultados. Como en el proceso determinista la estrategia Nash reporta siempre beneficios.

Los resultados del escenario 4-aleatorio se presentan en la Figura 5.9(b). En este caso es destacable que la utilización de la estrategia Nash reporta beneficios cuando el porcentaje de usuarios respecto de la capacidad del escenario es superior al 50%. Al igual que en el caso determinista la ganancia se incrementa al aumentar el número de usuarios en el escenario y se llega a una ganancia entorno al 17%.

Por último, en la Figura 5.9(c) se muestran los resultados del escenario 5-aleatorio. En este caso los beneficios son algo superiores para ambas estrategias y además la utilización de la estrategia Nash reporta mayores beneficios a partir de aproximadamente el 50% de los usuarios.

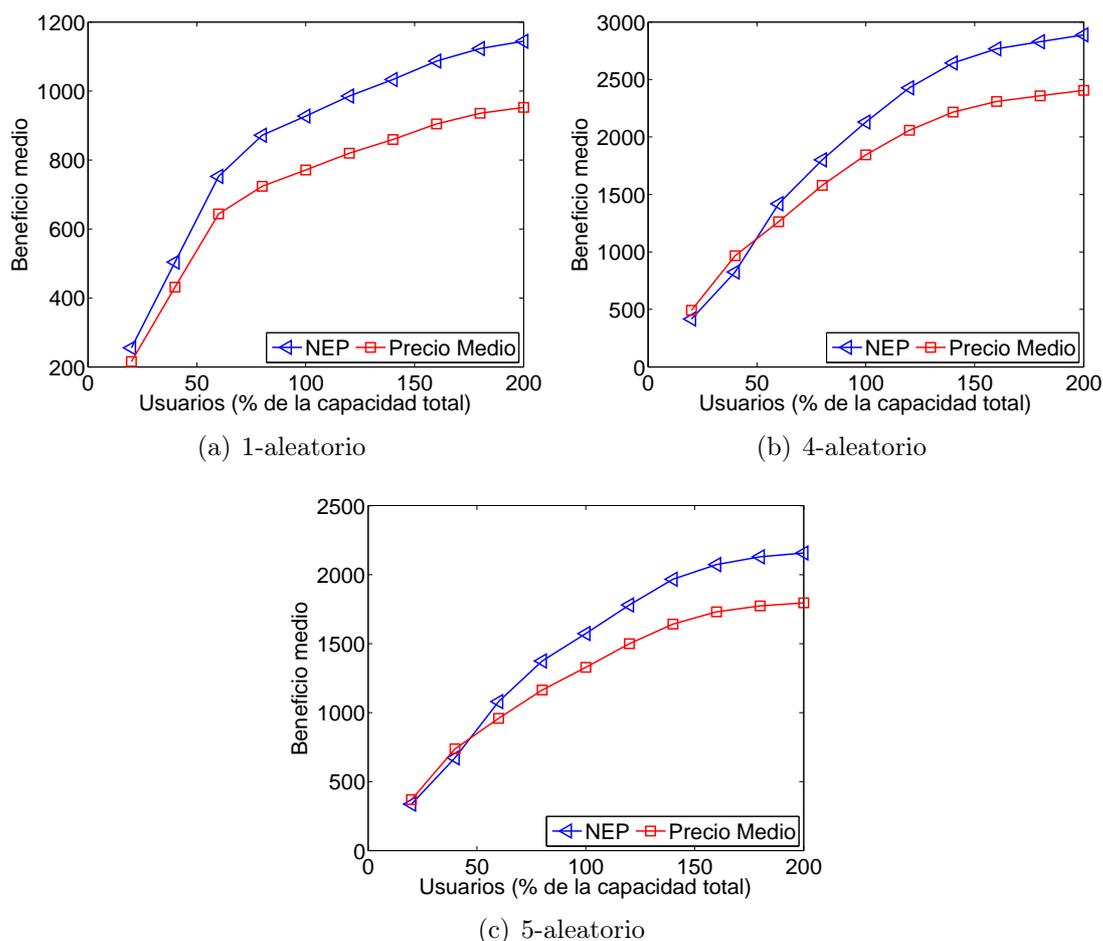


Fig. 5.9: Beneficio medio total en los escenarios 1 aleatorio, 4 aleatorio y 5 aleatorio.

5.5. Resultados relativos al tipo de AE

En esta sección se mostrará un conjunto de resultados que pretende analizar individualmente la carga o el beneficio de los AEs en función del tipo al que pertenezcan. Al igual que en la sección anterior, se mostrarán en primer lugar los resultados para el problema de asignación de recursos para a continuación presentar los resultados pertenecientes al problema de asignación de precios.

Al igual que en las gráficas anteriores los resultados se detallan para un amplio abanico de diferentes densidades de usuarios en el escenario. El número de usuarios seguirá describiéndose respecto a la capacidad total del escenario y se realizan los análisis desde un número de usuarios igual al 20% hasta el 200% de la capacidad total.

Para todas las gráficas las líneas azules con triángulos indicará tipo1, las líneas verdes con cuadrados tipo2 y las líneas rojas con círculos tipo3. Los resultados de las estrategias Nash se muestran con marcadores con relleno sólido mientras que el resto son los resultados de la carga obtenida sin aplicar ninguna estrategia de asignación.

5.5.1. Problema asignación de recursos - Carga relativa respecto al tipo de AE

En la Figura 5.10(a) se muestran los resultados para el escenario 1-determinista. Como puede observarse, para el tipo1 la utilización de la estrategia de Nash no reporta beneficios respecto a no aplicar ninguna estrategia de asignación. Además, a partir del 80% de usuarios se alcanza valores máximos de carga relativa en el escenario. En el resto de tipos de AEs se obtienen mayores beneficios con la utilización de la estrategia de Nash. Para el tipo2 la ganancia es pequeña para porcentajes inferiores al 60% de usuarios, sin embargo, cuando la densidad de usuarios aumenta la ganancia es superior. En el tipo3 la ganancia no es muy grande hasta aproximadamente el 50% de usuarios respecto de la capacidad del escenario, sin embargo la ganancia aumenta de forma considerable cuando el número de usuarios aumenta llegando a una ganancia de entorno al 30% cuando el porcentaje es del 200%.

Los resultados del escenario 4-determinista se muestran en la Figura 5.10(b). En este caso la utilización de la estrategia de Nash no reporta beneficios para las estaciones de tipo1, siendo en los mejores casos igual que el no utilizar la estrategia Nash cuando el porcentaje de usuarios es superior al 60%. Además, a partir de este valor se alcanza la carga máxima. Para el resto de casos la utilización de la estrategia de Nash reporta siempre beneficios o en el peor de los casos no es perjudicial. En cuanto a los resultados del tipo2, puede observarse que la utilización de la estrategia Nash ofrece una ganancia respecto a ofrecer los recursos sin restricciones hasta el 140% en el que ambas estrategias se igualan, llegando además a valores de máxima carga relativa. Finalmente, en el caso de las estaciones tipo3 la utilización de la estrategia óptima siempre es beneficioso siendo notable en un gran rango de valores. En este caso se obtienen ganancias en torno al 30% cuando el número de usuarios es igual a la capacidad del escenario. Además, destacar que únicamente se alcanza la carga máxima cuando se utiliza la estrategia óptima Nash.

Finalmente, en la Figura 5.10(c) se muestran los resultados para el escenario 5-determinista. En este caso, sólo hay desplegadas estaciones del tipo1 y tipo2. Como ha ocurrido en los escenarios anteriores, la utilización de la estrategia Nash no aporta beneficio para las estaciones del tipo1, sin embargo en este caso sólo es perjudicial cuando el número de usuarios se sitúan entre el 40% y el 90%, en el resto se mantiene igual a la solución de ofrecer los recursos sin restricción. El máximo de carga se alcanza para valores cercanos al 100% de usuarios en el escenario. Por último, para las estaciones del tipo2 la utilización de la estrategia Nash aporta beneficios para valores de usuarios entre el 40% y el 160%, en el resto de casos los resultados son iguales para ambas estrategias.

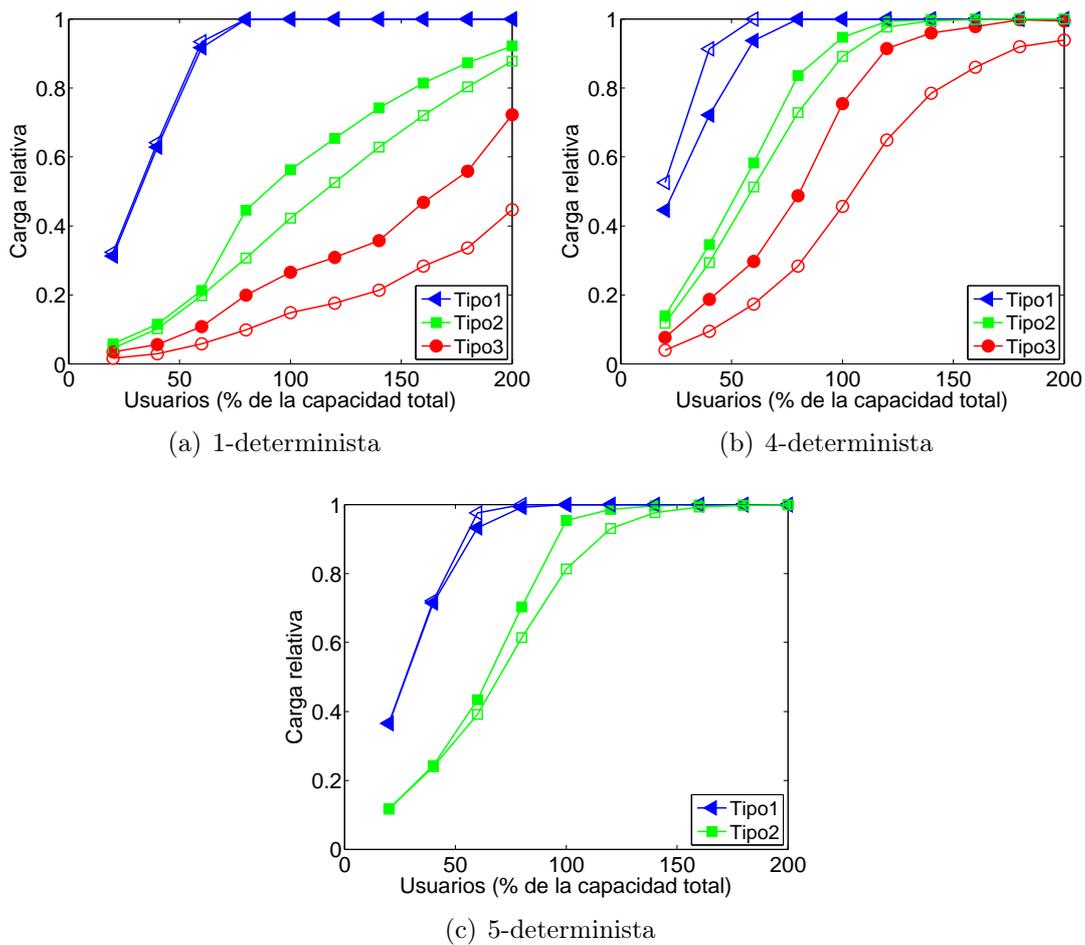


Fig. 5.10: Carga relativa respecto al tipo de AE en los escenarios 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.

En el planteamiento del problema de asignación de recursos la selección de acceso por parte del usuario se lleva a cabo de manera aleatoria. Sin embargo, como ya se adelantó en el Capítulo 3, en este proyecto se ha querido demostrar la bondad de la utilización de la estrategia Nash cuando la selección de acceso utiliza modelos diferentes. La Figura 5.11(a) muestra los resultados cuando se establecen niveles de preferencia en la selección, para este ejemplo los usuarios siguen el vector de preferencias $[RAT1 > RAT2 > RAT3]$, es decir, en primer lugar escogerán recursos del RAT1, si éste no tiene recursos disponibles seleccionarán el RAT2 y si tampoco, el RAT3. Como puede observarse, la estrategia Nash reporta beneficios para la carga relativa total del escenario y para los AEs tipo2 y tipo3, en el caso del RAT1 se obtienen los mismos resultados. En la Figura 5.11(b) se presentan los resultados cuando los usuarios seleccionan AE dependiendo de la calidad que éste le ofrezca. Se establece que la calidad de la comunicación será mejor cuanto menor sea la distancia del usuario al AE. Como puede observarse, los resultados son muy similares al modelo anterior, obteniendo mejores beneficios al utilizar la estrategia Nash para la carga total del escenario y los AEs tipo2 y tipo3, el AE tipo1 ofrece el mismo beneficio cuando se sigue la imposición marcada por la estrategia Nash que cuando no se aplica ninguna restricción.

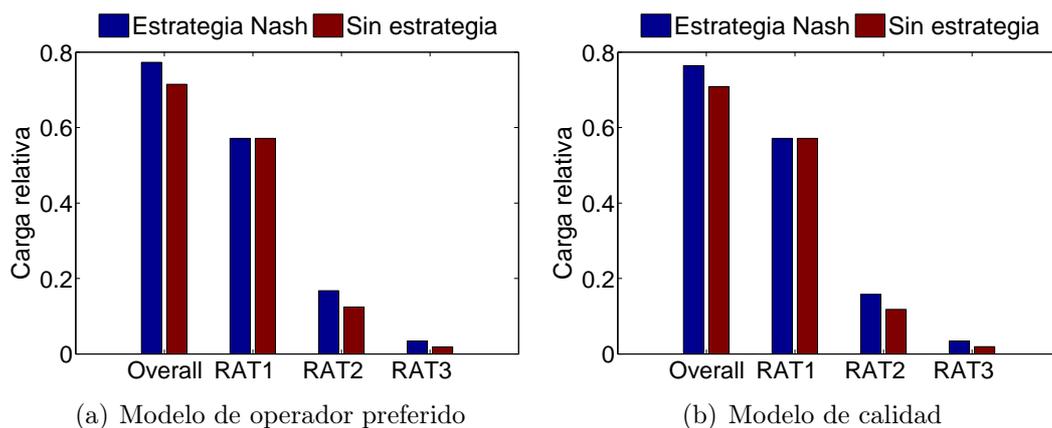


Fig. 5.11: Carga relativa total y por tipo de estación para los modelos de operador preferido y calidad.

Una vez se han interpretado los resultados para los escenarios deterministas, en la Figura 5.12 se muestran sus homólogos aleatorios. En la Figura 5.12(a) se presentan los resultados para el escenario 1-aleatorio. Las estaciones tipo1 presentan un comportamiento prácticamente idéntico al caso determinista, mientras que las gráficas para los otros dos tipos de estaciones presentan alguna variación. Los resultados de las estaciones del tipo2 no ofrecen tanta linealidad como el caso determinista, aunque se sigue manteniendo beneficio con la utilización de la estrategia Nash e incluso éste es algo mayor. En el caso del tipo3 los valores de carga son mayores para ambas estrategias en el caso determinista, aunque la ganancia se mantiene más o menos constante mientras que en el escenario determinista ésta se incrementaba según iba aumentando el número de usuarios.

La Figura 5.12(b) muestra los resultados obtenidos en el escenario 4-aleatorio. En el caso de las estaciones tipo1, los resultados son similares salvo que la carga para un número de usuarios inferior al 60% son superiores. En el caso de las estaciones del tipo2 éstas presentan el comportamiento contrario ya que la carga relativa para ambas estrategia es menor, aunque la utilización de la estrategia Nash sigue siendo superior. Las estaciones tipo3 también presentan el mismo comportamiento, con valores de carga inferiores a su homónimo determinista. Por otro lado, la ganancia también es algo menor aunque siga siendo notable.

Por último, la Figura 5.12(c) presenta los resultados para el escenario 5-aleatorio. Al igual que ocurría con el escenario anterior, los resultados de carga para las estaciones tipo1 son superiores, sin embargo para los del tipo2 ocurre lo contrario, la carga relativa para ambas estrategias es menor, no llegando a alcanzar valores máximos de carga como ocurría en el caso determinista.

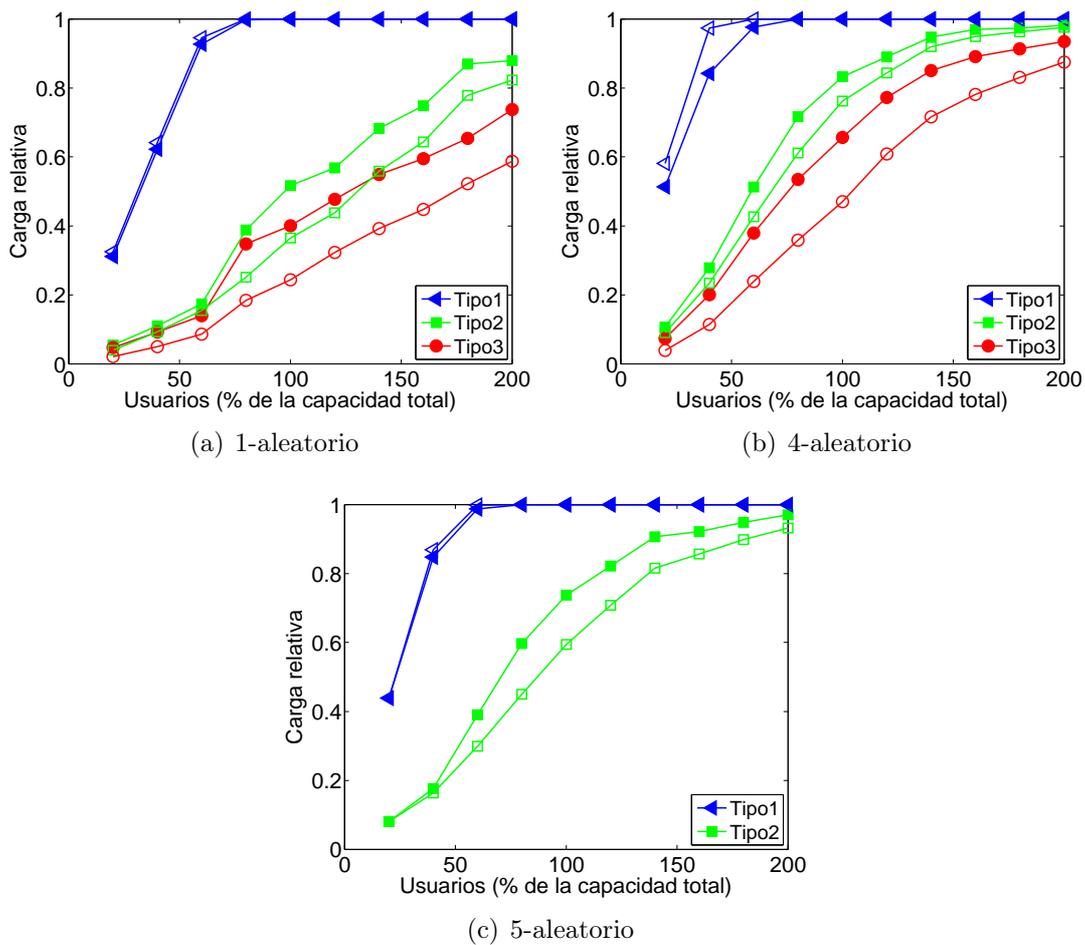


Fig. 5.12: Carga relativa respecto al tipo de AE en los escenarios 1 aleatorio, 4 aleatorio y 5 aleatorio.

5.5.2. Problema asignación de precios - Beneficio medio respecto al tipo de AE

En esta sección se mostrarán los beneficios medios diferenciando por tipo de estación para los escenarios 1 – 4 – 5-determinista y aleatorio para el problema de asignación de precios. En la Figura 5.13(a) se presentan los resultados obtenidos para el escenario 1-determinista. Respecto a las estaciones tipo1 puede observarse que la utilización de la estrategia Nash es beneficiosa para todo el abanico de número de usuarios, siendo la ganancia a partir de aproximadamente el 80% de usuarios de unas 150 unidades monetarias mayor hasta el 200% de usuarios. En el caso de las estaciones tipo2 y tipo3 estas ganancias son muy pequeñas, obteniéndose en algunos casos el mismo beneficio con ambas estrategias (utilizando la estrategia Nash o imponiendo el precio medio).

En la Figura 5.13(b) se muestran los resultados para el escenario 4-determinista. El uso de la estrategia Nash reportará beneficios para las estaciones de tipo1 cuando el número de usuarios se sitúe en torno al 70%. Como en el escenario anterior, la ganancia cuando el beneficio empieza a ser superior es bastante notable,

ganando en torno a un 20% más con la estrategia Nash. Respecto a las estaciones tipo2 y tipo3, éstas ven mejorado su beneficio al utilizar la estrategia Nash cuando el número de usuarios es mayor que aproximadamente el 70%.

Por último los resultados del escenario 5-determinista se muestran en la Figura 5.13(c). Puede observarse que la estrategia Nash reporta más beneficio cuando el porcentaje de usuarios en el escenario supera el 75%. Las estaciones tipo2 comienzan a tener beneficios con la estrategia Nash con un número de usuarios menor en el escenario, en torno al 65% de usuarios. Destacar por último que los valores máximos son alcanzados por la estrategia Nash para todos los escenarios por las estaciones tipo1.

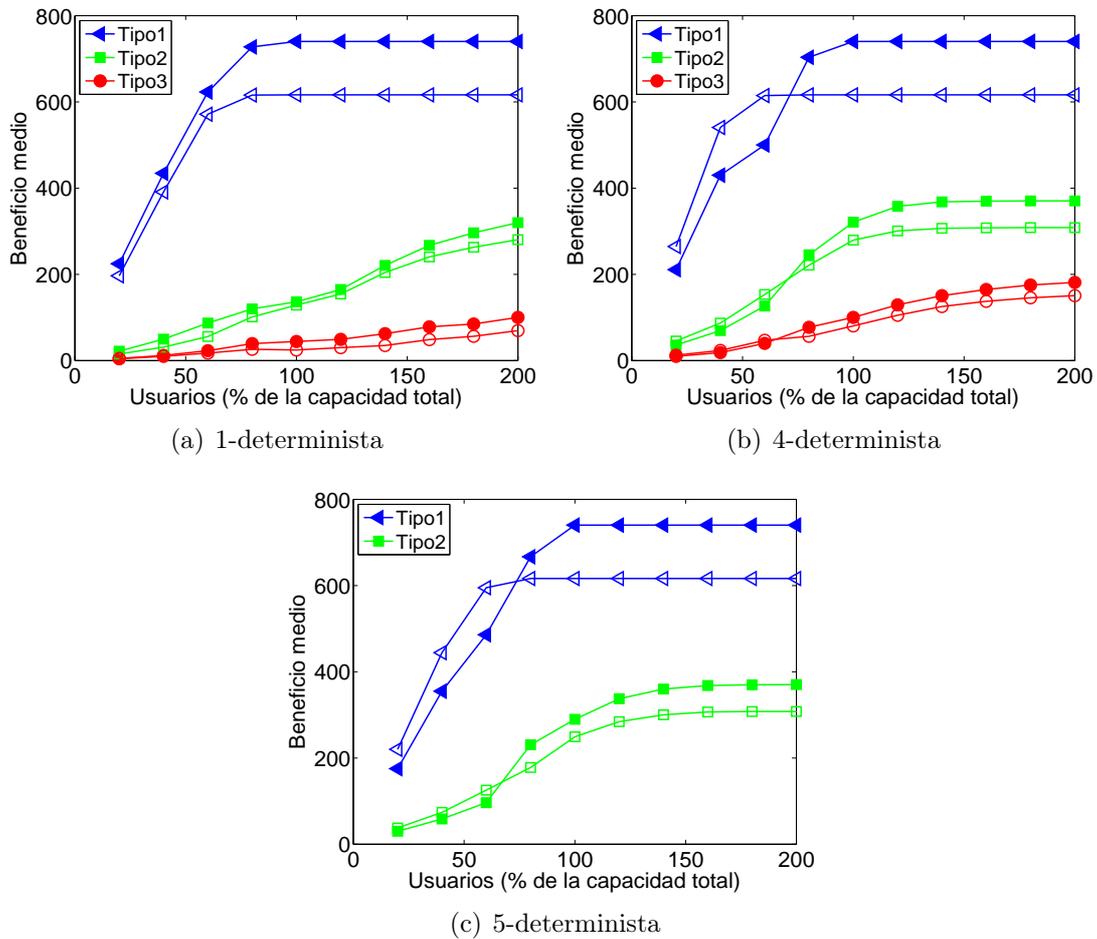


Fig. 5.13: Beneficio medio respecto al tipo de AE en los escenarios 1 determinista, 4 determinista y 5 determinista.

En la Figura 5.14 se presentan los resultados de los escenarios 1 – 4 – 5-aleatorios y se comparan con sus homólogos deterministas detallados anteriormente. Comenzando con la Figura 5.14(a) donde se muestran los resultados del escenario 1-aleatorio, puede observarse que no existen diferencias para las estaciones tipo1. Ocurre parecido con las estaciones tipo3 donde la diferencia radica en que la ganancia con la utilización de la estrategia Nash en el escenario aleatorio es algo menor. Las estaciones tipo2 presentan una ganancia un poco mayor en este caso

pero los valores son similares al caso determinista salvo una pequeña diferencia (un menor beneficio) para ambas estrategias cuando el número de usuarios es máximo en el escenario.

Los resultados del escenario 4-aleatorio se presentan en la Figura 5.14(b), en este caso las estaciones tipo1 comienzan a tener beneficio con la utilización de la estrategia Nash cuando el porcentaje de usuarios en el escenario es menor que en el caso determinista, en torno al 50%. Para las estaciones tipo2 el resultado es similar, sin embargo en este caso la estrategia Nash no aporta en ningún caso valores inferiores a la estrategia de precio medio, aportando en el peor de los casos el mismo beneficio. Por último, en las estaciones tipo3, los resultados son también similares a los de su homólogo determinista.

Los resultados del escenario 5-aleatorio en la Figura 5.14(c) son los que presentan un resultado más diferente respecto al caso determinista. Las estaciones tipo1 alcanzan el máximo más rápidamente que en el caso determinista. Además, la utilización de la estrategia Nash aporta beneficios con un número menor de usuarios en el escenario, a partir de aproximadamente el 50% de usuarios. Las estaciones tipo2 presentan un mejor resultado cuando se utilizan la estrategia Nash, ya que ofrece mejores valores (o iguales en el peor de los casos) para cualquier número de usuarios desplegados en el escenario.

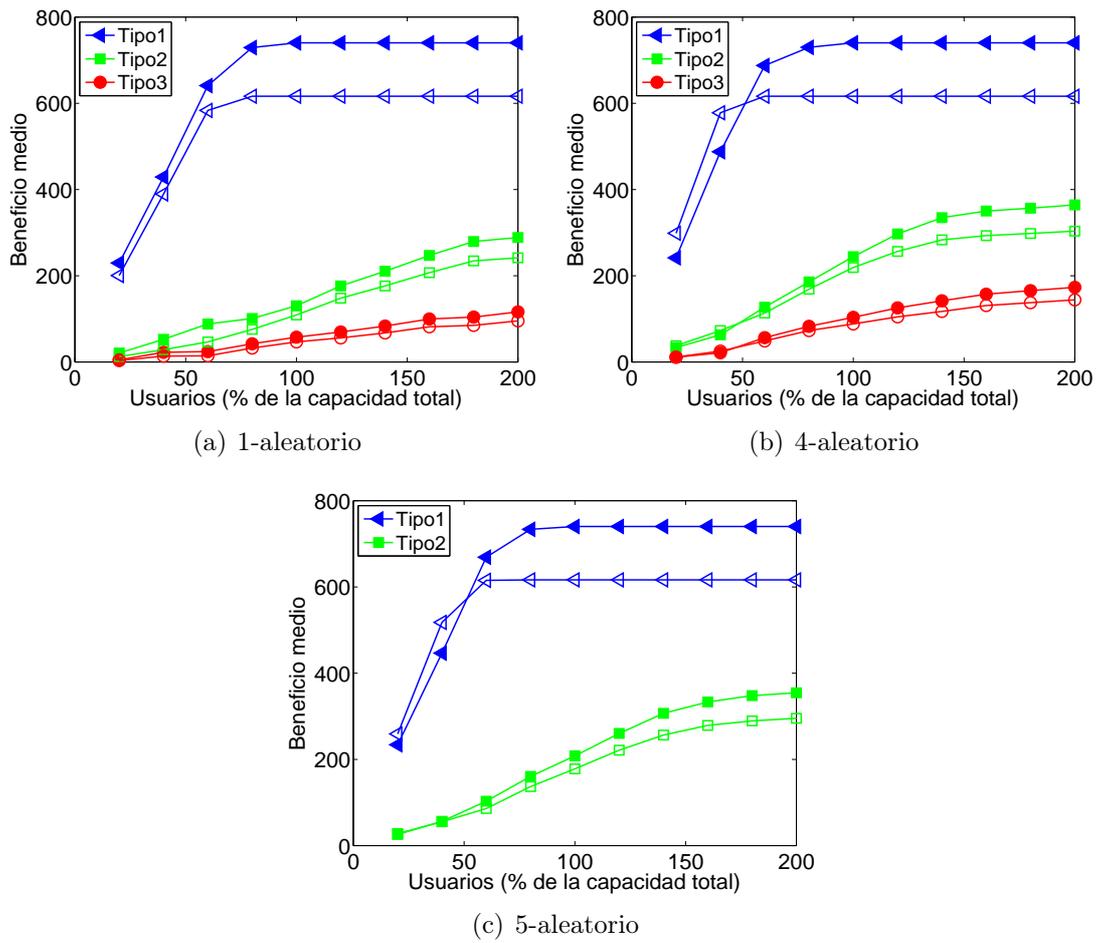


Fig. 5.14: Beneficio medio respecto al tipo de AE en los escenarios 1 aleatorio, 4 aleatorio y 5 aleatorio.

Conclusiones y líneas futuras

En las últimas décadas las comunicaciones han avanzado muy rápidamente, sobre todo las inalámbricas. Estos progresos han sido posibles, en parte, gracias a los avances relacionados con el despliegue de grandes redes de elevada heterogeneidad, que han permitido ofrecer más y mejores servicios al usuario. El balanceo de carga es uno de los problemas más importantes en este ámbito, ya que su objetivo es realizar una correcta distribución de los recursos de tal forma que se mantenga (o mejore) el servicio que se esté ofreciendo al usuario, al mismo tiempo que la oferta de recursos sea beneficiosa (técnica y económicamente) para los operadores. Además de realizar una gestión apropiada de los recursos, los operadores también deben considerar políticas de precios para garantizar su sostenibilidad, al mismo tiempo que presentarse competitivos respecto a otros operadores de cara al usuario. Por otro lado, la Teoría de Juegos es una herramienta matemática que en los últimos años está teniendo mucha aceptación con un abanico muy amplio de aplicaciones: militares, políticas, matemáticas, etc. pero sobre todo en el ámbito económico. Debido a su gran potencial, en la actualidad se está intentando aplicar a las comunicaciones en diferentes ámbitos. Este proyecto ha querido explotar las posibilidades de esta potente herramienta para proponer soluciones a los problemas de balanceo de carga y asignación de precios en redes inalámbricas heterogéneas.

Para finalizar, en este capítulo se presentan las conclusiones y líneas futuras que han derivado durante la realización de este proyecto.

En primer lugar se ha realizado un amplio estudio sobre la Teoría de Juegos profundizando en aquellos aspectos más relevantes para la solución de los problemas objetivo. Además, se analizó cómo afectaba la elección de unas u otras estrategias, y cómo esto se traducía en beneficios o pérdidas para los agentes implicados. Finalmente, se tomó la decisión de utilizar el equilibrio de Nash como estrategia óptima y solución a los problemas de balanceo de carga y asignación de precios.

Una vez realizado el análisis de la herramienta, la Teoría de Juegos, se establecieron los pasos para poder aplicarla. En primer lugar se realizó un estudio teórico sobre los escenarios a implementar, analizando los diferentes pasos para obtener la

estrategia óptima para cada problema. En un principio se consideraron diferentes estudios sobre optimización no lineal además de diferentes aplicaciones para poder resolver ambos problemas. Finalmente, teniendo en cuenta sus características y la gran dimensión que podían alcanzar dependiendo del escenario de aplicación, se tomó la decisión de utilizar el software Gambit. Este software permitía obtener el equilibrio de Nash en juegos no cooperativos a partir de un conjunto discreto de estrategias, lo cual encajaba perfectamente con los requerimientos de los problemas a solucionar en este trabajo.

Una vez estudiados los diferentes escenarios a desplegar, la solución a utilizar y la forma de obtenerla, se programaron todas las funciones necesarias para la búsqueda de todas las estrategias posibles. En el problema de balanceo de carga las estrategias surgen a medida que los elementos de acceso proporcionan recursos en las zonas en las que ofrecen cobertura. Por otro lado, en el problema de asignación de precios las estrategias surgen a partir de los diferentes precios que las estaciones pueden ofrecer a sus usuarios entre un conjunto discreto de precios. Una vez que se han obtenido todas las estrategias, se obtuvieron los beneficios que reportaban cada una de ellas. Finalmente, se hizo uso de la aplicación Gambit, para determinar en cada caso la estrategia óptima, esto es, el equilibrio de Nash.

Para comprobar la bondad de las estrategias óptimas obtenidas en los pasos anteriores se desplegaron los mismos escenarios y se realizó una comparación de beneficios en dos supuestos distintos. En el problema de balanceo de carga se compararon los resultados cuando las estaciones utilizan la estrategia óptima para asignar recursos en las zonas en las que ofrecen cobertura, con los resultados cuando éstos no imponen ninguna restricción y los AEs ofrecen sus recursos en todas las zonas hasta que éstos se agotan. Por otro lado, en el problema de asignación de precios se comparan los beneficios obtenidos cuando los AEs ofrecen los precios marcados por la estrategia óptima, con los beneficios alcanzados cuando las estaciones ofrecen el precio medio de los que tienen disponibles.

A partir de los resultados obtenidos puede concluirse que la utilización de la estrategia óptima ofrece, en general, mejores resultados llegando a obtener ganancias, respecto a no utilizar la estrategia óptima, de en torno al 30%. Puede destacarse además que no se aprecian grandes diferencias entre los resultados de los escenarios deterministas y sus homólogos aleatorios.

Para la realización de este proyecto se han tenido en cuenta un conjunto de características como son el tipo de juego, el planteamiento del problema o su resolución. Para contemplar otro tipo de situaciones o, incluso mejorar la solución obtenida podrían modificarse algunas de estas características. En cuanto al tipo de juego implementado, en este trabajo se ha utilizado un juego no cooperativo en donde los jugadores (en este caso los elementos de acceso) no disponen de información acerca del resto de jugadores y, por lo tanto, no cooperan entre ellos para obtener un beneficio común. Es decir, siguen un comportamiento “egoísta” intentando únicamente maximizar su beneficio particular. Por este motivo, sería interesante ampliar este trabajo incluyendo un modelo cooperativo en el que todos o algunos (por ejemplo los pertenecientes al mismo operador) elementos de acceso compartiesen información entre ellos, y así tomarasen las decisiones que más beneficiasen al conjunto y no al jugador en particular.

Desde el punto de vista del usuario, podría ser interesante implementar patro-

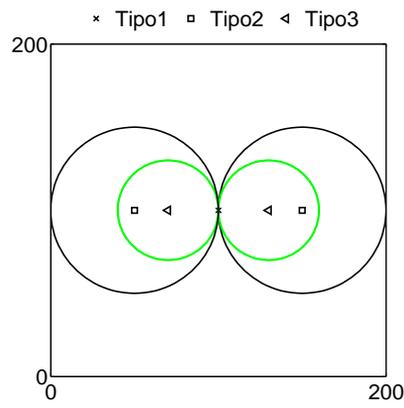
nes de tráfico valorando en cada momento si cada usuario necesita, o no, conexión, lo que daría lugar a otro conjunto de estrategias diferente. Por otro lado, también podría ser interesante introducir patrones de movilidad. Las situaciones analizadas pueden verse como “fotografías”, que presentan la situación del escenario en un momento preciso. En este proyecto, la disposición de los usuarios se ha llevado a cabo en cada ejecución de manera independiente; sin embargo, dicha implementación podría utilizarse para el estudio de situaciones en las que esas “fotografías” reflejasen patrones de movilidad, otorgando un mayor nivel de realidad al análisis, pudiendo incorporar situaciones como traspasos.

Este trabajo tiene mayormente un enfoque teórico, por ello y con el fin de comprobar la bondad del uso de estrategias óptimas en los mecanismos de selección de acceso en escenarios reales, sería interesante estudiar los diferentes protocolos que podrían implementarse para favorecer el uso de las estrategias analizadas en este proyecto. Para ello podría aprovecharse el marco OConS descrito en el proyecto europeo SAIL [3].

Por último, también podría ser interesante realizar una comparación de los resultados obtenidos con otros estudios mediante el simulador mCASE [22], desarrollado en el Grupo de Ingeniería Telemática.

Anexo.

A.1. Escenario 2



(a) 2-determinista

Tabla A.1: Estadísticas 2-determinista.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
40.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
60.000000	15.310000	1.877598	15.700000	1.941234
80.000000	5.510000	4.229609	14.880000	4.447537
100.000000	1.040000	0.301623	3.140000	1.001054
120.000000	1.400000	0.782461	8.610000	1.067501
140.000000	2.170000	0.839810	18.700000	0.701921
160.000000	3.320000	1.053683	30.040000	0.623542
180.000000	5.880000	1.332031	42.960000	0.558377
200.000000	10.410000	1.043592	59.580000	0.428829

Tabla A.2: Estadísticas 2-aleatorio.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
40.000000	1.010000	0.098514	1.010000	0.098514
60.000000	15.540000	2.545440	16.220000	2.822066
80.000000	3.770000	4.775251	20.370000	8.568585
100.000000	1.350000	0.891201	2.780000	1.746424
120.000000	1.580000	1.032946	19.200000	7.445553
140.000000	2.280000	1.587550	22.010000	3.347744
160.000000	5.610000	2.849586	65.720000	4.695728
180.000000	11.310000	2.233643	178.950000	3.754419
200.000000	40.690000	4.332392	303.440000	3.348100

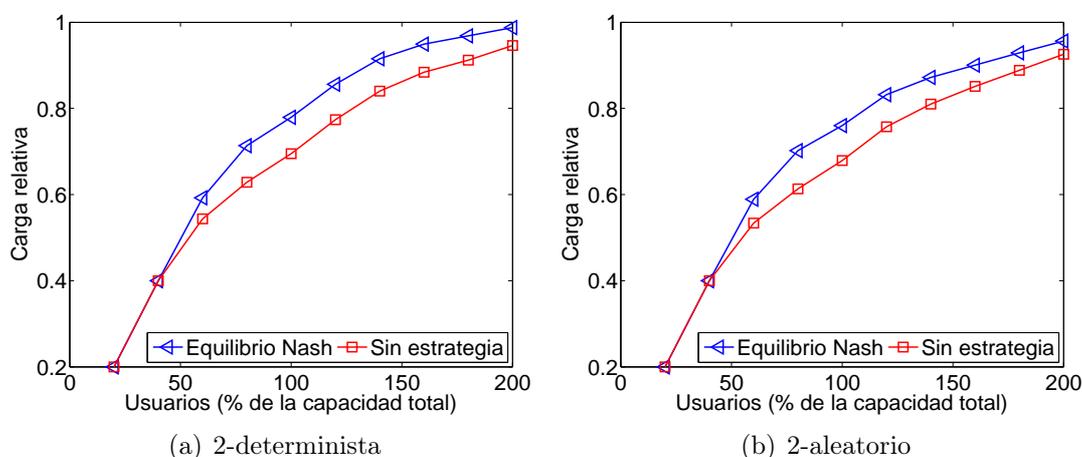
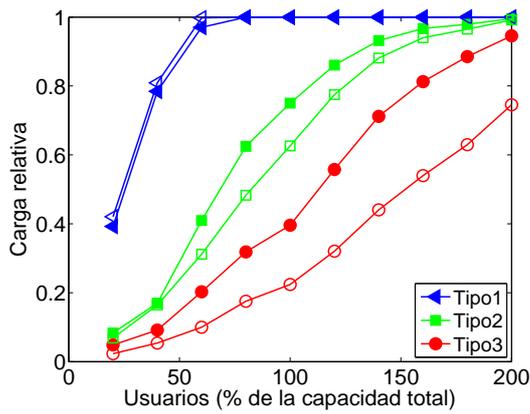
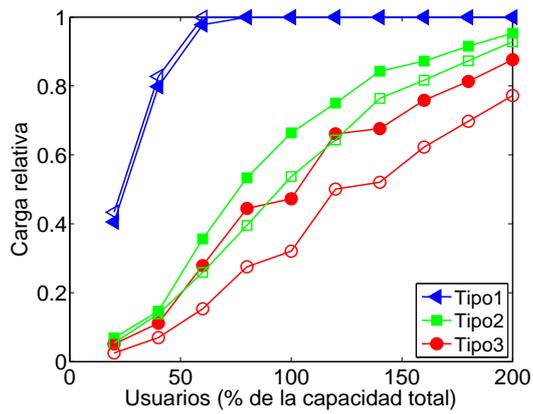


Fig. A.1: Carga Relativa Total para los escenarios 2.

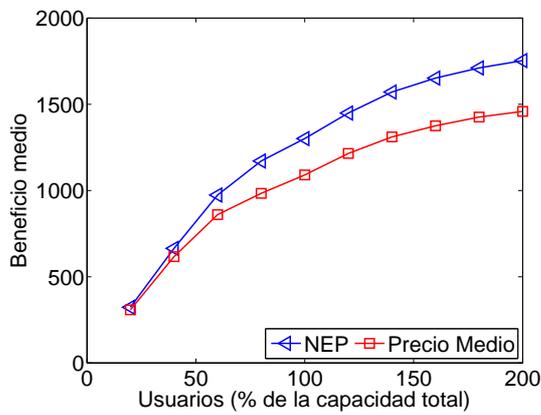


(a) 2-determinista

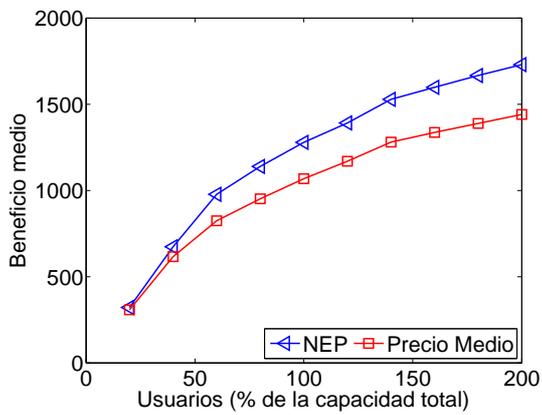


(b) 2-aleatorio

Fig. A.2: Carga Relativa por tipo de AE para los escenarios 2.

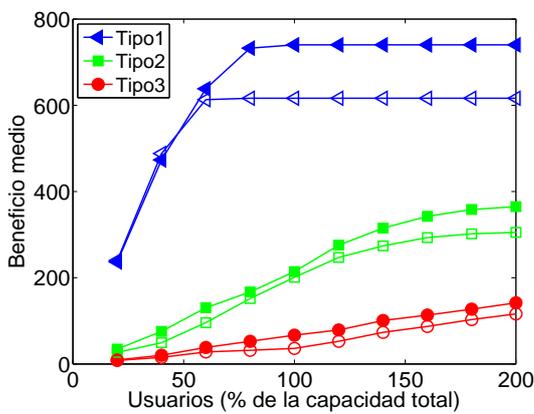


(a) 2-determinista

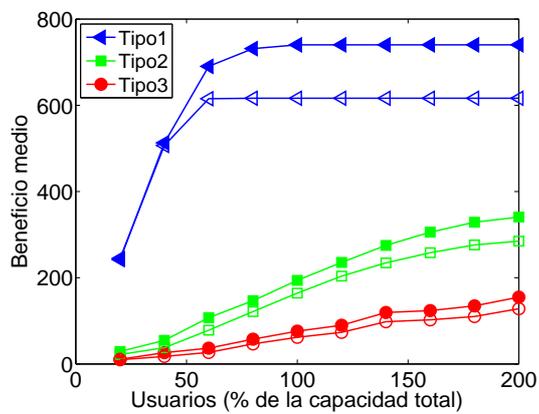


(b) 2-aleatorio

Fig. A.3: Beneficio medio para los escenarios 2.



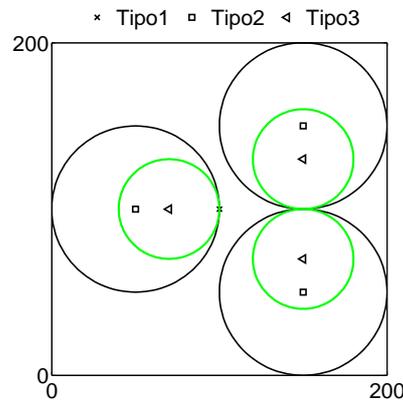
(a) 2-determinista



(b) 2-aleatorio

Fig. A.4: Beneficio medio por tipo de AE para los escenarios 2.

A.2. Escenario 3



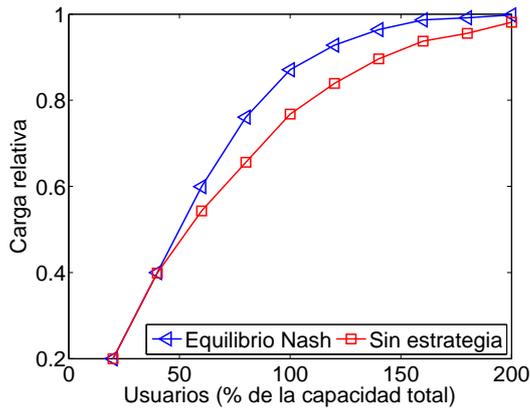
(a) 3-determinista

Tabla A.3: Estadísticas 3-determinista.

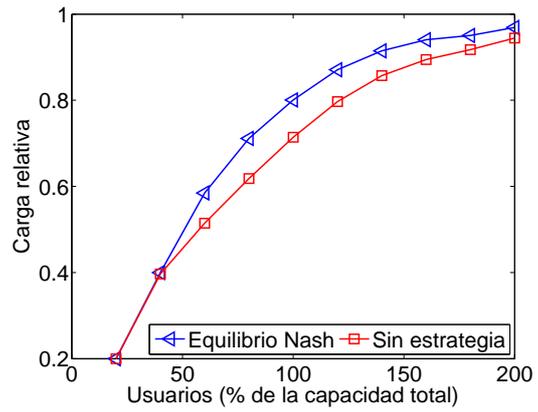
%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
40.000000	130.490000	0.556200	130.490000	0.556200
60.000000	392.650000	2.086213	526.820000	2.196121
80.000000	39.400000	4.022759	385.260000	3.279807
100.000000	2.160000	0.875282	62.060000	2.213690
120.000000	4.300000	1.502297	124.780000	0.896192
140.000000	11.700000	1.512579	262.540000	0.631524
160.000000	29.320000	0.929134	457.540000	0.433218
180.000000	53.210000	1.249346	568.830000	0.423158
200.000000	144.770000	0.822349	871.200000	0.327812

Tabla A.4: Estadísticas 3-aleatorio.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
40.000000	182.600000	0.829178	182.650000	0.829098
60.000000	360.340000	3.131595	419.670000	2.987976
80.000000	33.760000	5.773664	164.840000	6.006609
100.000000	9.590000	2.934274	309.020000	3.653872
120.000000	17.790000	4.208653	636.140000	2.477160
140.000000	42.580000	3.147857	793.180000	1.912081
160.000000	45.180000	2.650412	852.700000	1.636379
180.000000	89.800000	2.190459	1066.490000	1.598562
200.000000	144.040000	1.768333	1541.850000	1.401092

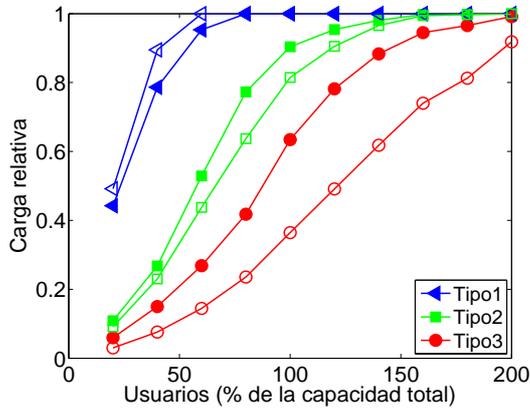


(a) 3-determinista

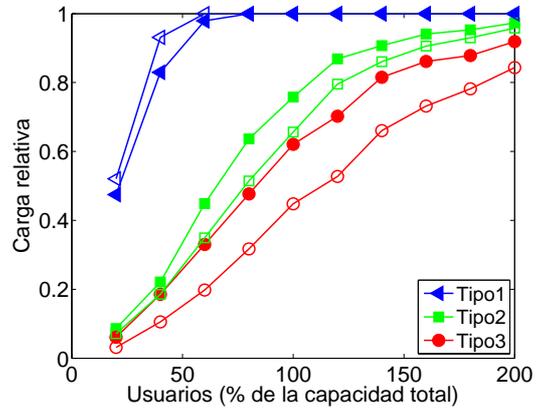


(b) 3-aleatorio

Fig. A.5: Carga Relativa Total para los escenarios 3.

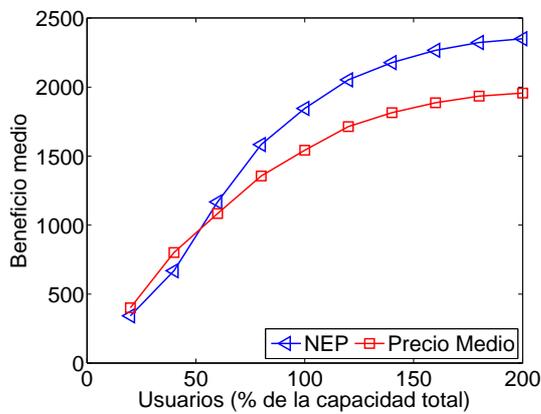


(a) 3-determinista

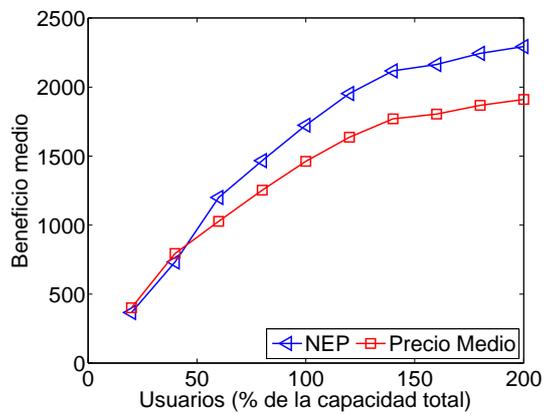


(b) 3-aleatorio

Fig. A.6: Carga Relativa por tipo de AE para los escenarios 3.

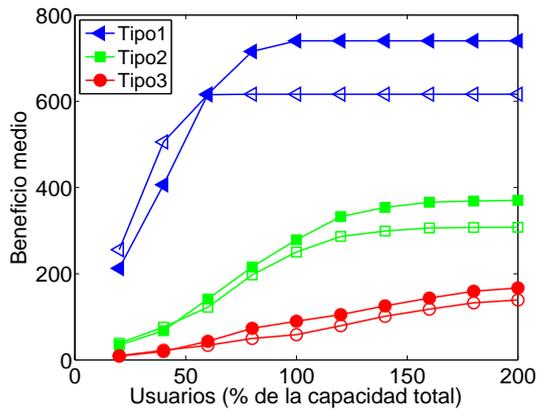


(a) 3-determinista

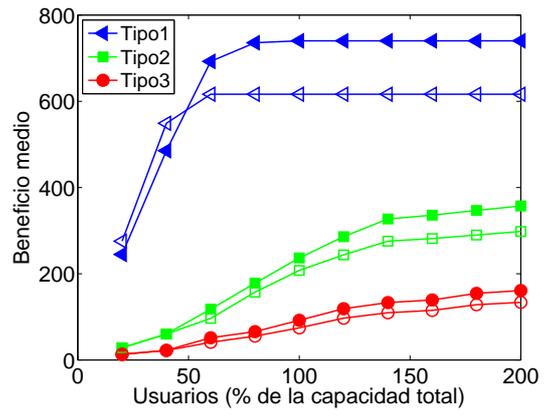


(b) 3-aleatorio

Fig. A.7: Beneficio medio para los escenarios 3.



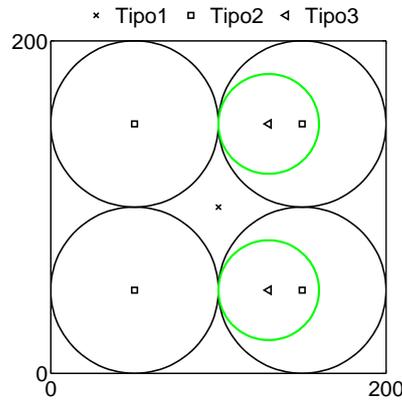
(a) 3-determinista



(b) 3-aleatorio

Fig. A.8: Beneficio medio por tipo de AE para los escenarios 3.

A.3. Escenario 6



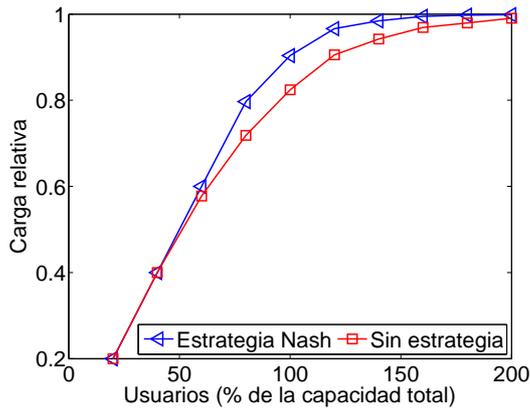
(a) 6-determinista

Tabla A.5: Estadísticas 6-determinista.

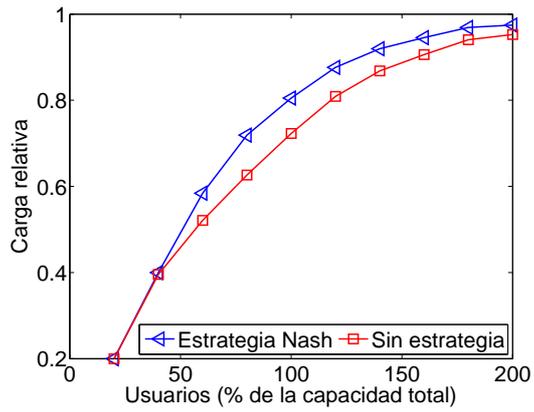
%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
40.000000	423.370000	0.494011	423.500000	0.494764
60.000000	2239.240000	0.784591	2776.870000	0.856682
80.000000	408.330000	1.325247	2643.260000	0.963536
100.000000	13.130000	1.280086	1981.190000	1.319355
120.000000	52.870000	2.261907	1430.730000	1.626176
140.000000	56.530000	3.086534	682.560000	2.220865
160.000000	35.660000	2.866947	169.990000	3.070393
180.000000	37.120000	3.343413	150.360000	3.360273
200.000000	46.240000	1.537486	122.520000	1.696160

Tabla A.6: Estadísticas 6-aleatorio.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
40.000000	517.080000	1.439053	517.160000	1.439904
60.000000	603.750000	2.165651	821.360000	2.090315
80.000000	23.030000	3.328802	266.350000	4.193128
100.000000	25.700000	4.599967	542.730000	2.794468
120.000000	34.910000	2.439153	1100.170000	1.721778
140.000000	57.700000	3.325627	1086.870000	1.748885
160.000000	88.550000	2.042699	1844.340000	1.326687
180.000000	186.920000	1.766739	2180.910000	1.254502
200.000000	293.780000	1.802760	1926.460000	1.280836

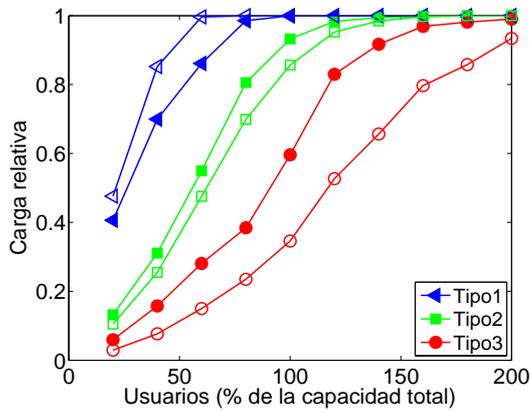


(a) 6-determinista

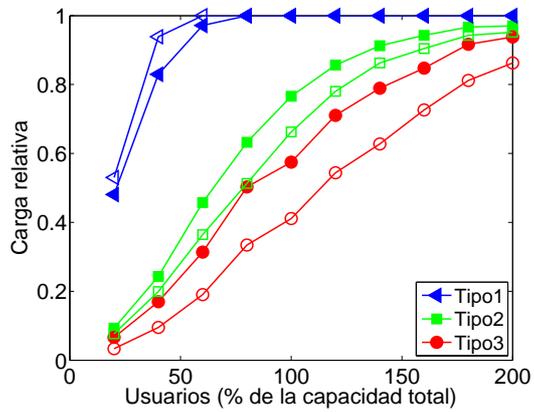


(b) 6-aleatorio

Fig. A.9: Carga Relativa Total para los escenarios 6.

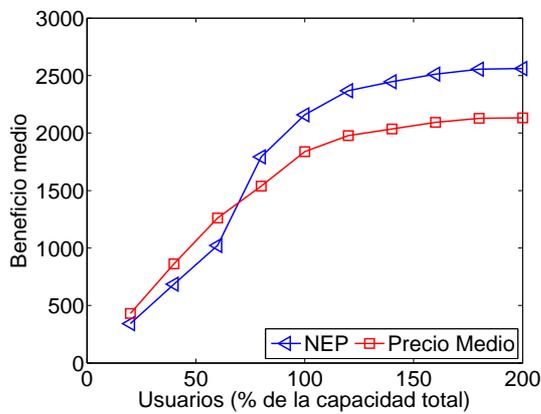


(a) 6-determinista

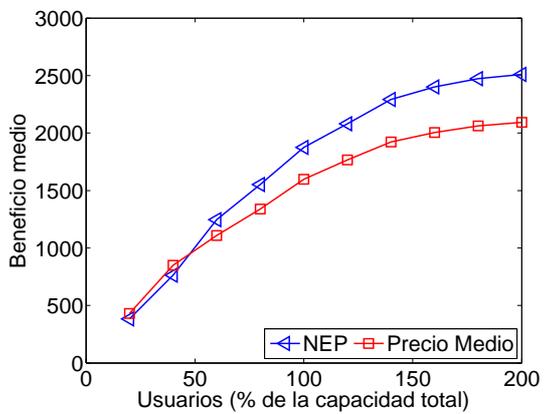


(b) 6-aleatorio

Fig. A.10: Carga Relativa por tipo de AE para los escenarios 6.

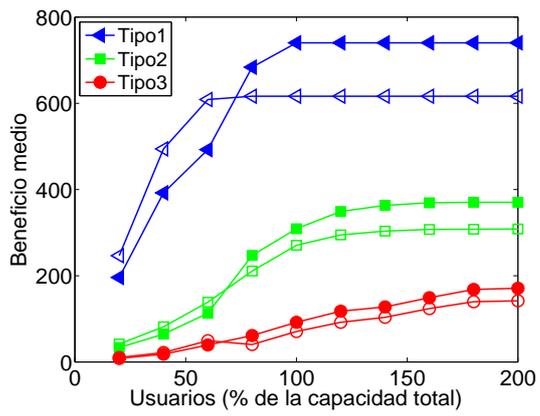


(a) 6-determinista

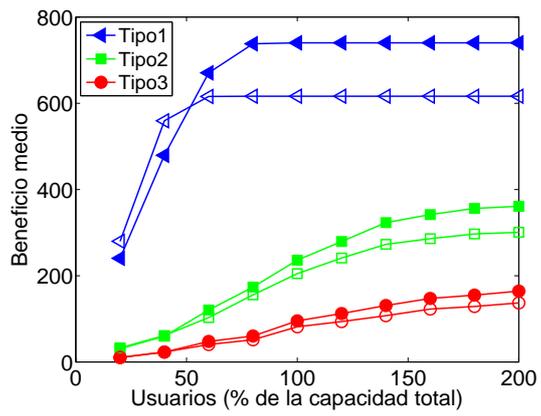


(b) 6-aleatorio

Fig. A.11: Beneficio medio para los escenarios 6.



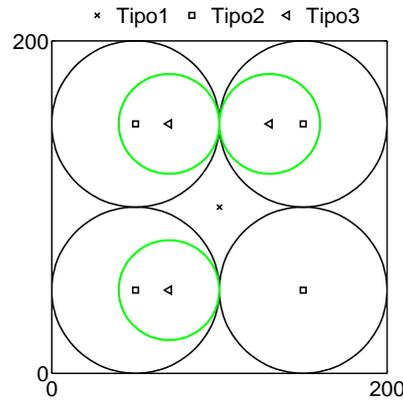
(a) 6-determinista



(b) 6-aleatorio

Fig. A.12: Beneficio medio por tipo de AE para los escenarios 6.

A.4. Escenario 7



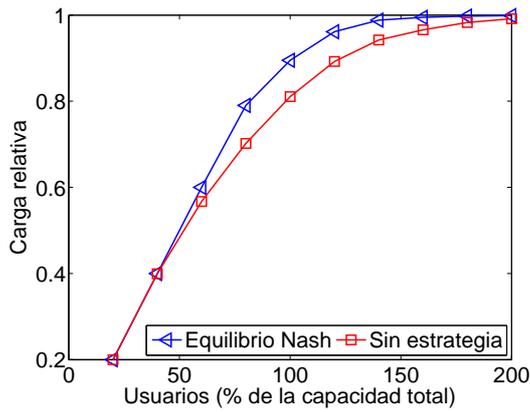
(a) 7-determinista

Tabla A.7: Estadísticas 7-determinista.

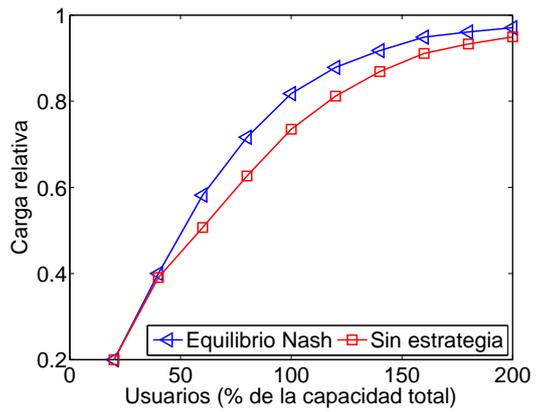
%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
40.000000	1319.620000	0.701781	1323.860000	0.709150
60.000000	2874.200000	0.724842	3930.520000	0.718940
80.000000	221.180000	1.404430	3183.320000	0.930284
100.000000	12.450000	1.145494	1959.310000	1.282898
120.000000	26.300000	1.827577	1578.350000	1.593160
140.000000	62.200000	2.176551	898.550000	1.717319
160.000000	118.390000	1.847412	877.460000	1.340667
180.000000	178.900000	0.947006	878.470000	0.334957
200.000000	310.900000	0.739179	1043.260000	0.249330

Tabla A.8: Estadísticas 7-aleatorio.

%Usuarios	NºEstrategias		Áreas	
	Media	Coef. Variación	Media	Coef. Variación
20.000000	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000
40.000000	1440.740000	1.200309	1456.450000	1.212720
60.000000	335.270000	2.442380	546.040000	2.325667
80.000000	27.210000	2.744250	351.150000	2.352506
100.000000	46.790000	3.130895	1354.670000	1.796561
120.000000	31.030000	1.790176	1590.140000	1.434860
140.000000	50.740000	1.850911	1782.260000	1.463853
160.000000	113.240000	1.813184	2235.680000	1.200665
180.000000	249.080000	1.810357	2227.680000	1.136459
200.000000	221.240000	1.474677	2237.830000	1.062239

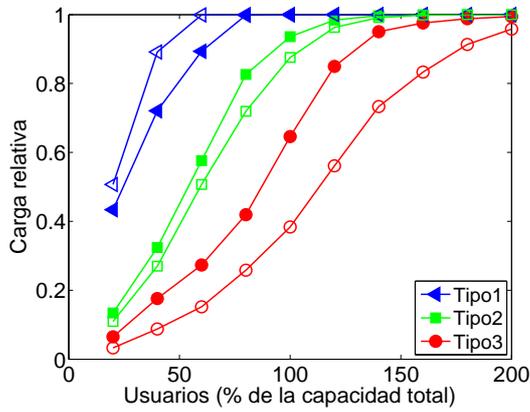


(a) 7-determinista

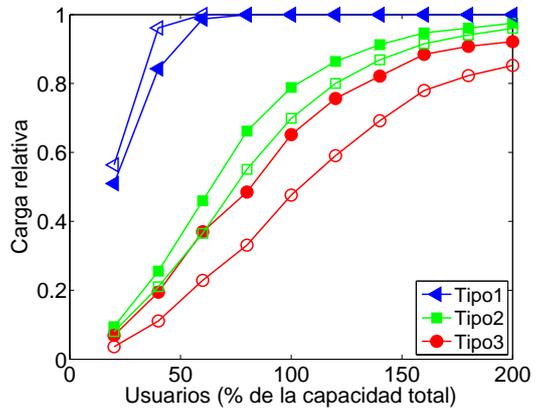


(b) 7-aleatorio

Fig. A.13: Carga Relativa Total para los escenarios 7.

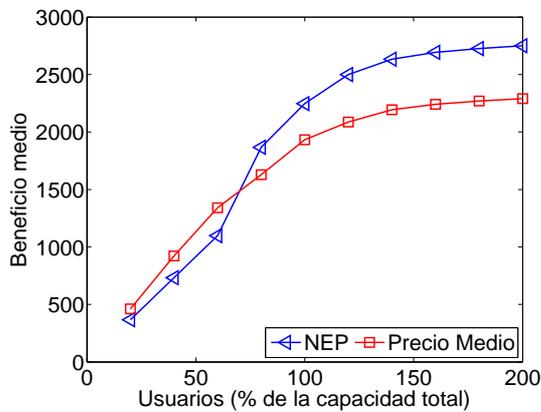


(a) 7-determinista

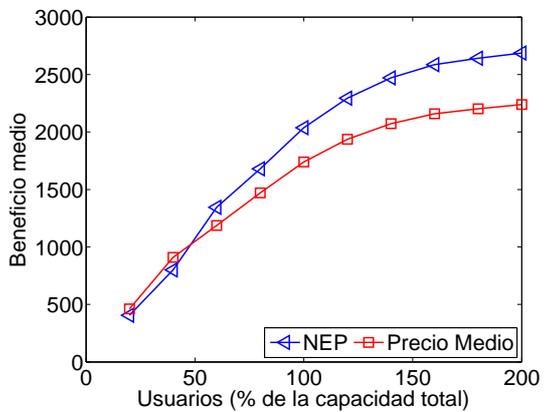


(b) 7-aleatorio

Fig. A.14: Carga Relativa por tipo de AE para los escenarios 7.

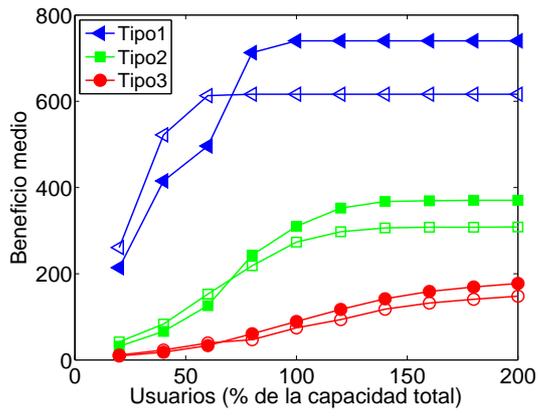


(a) 7-determinista

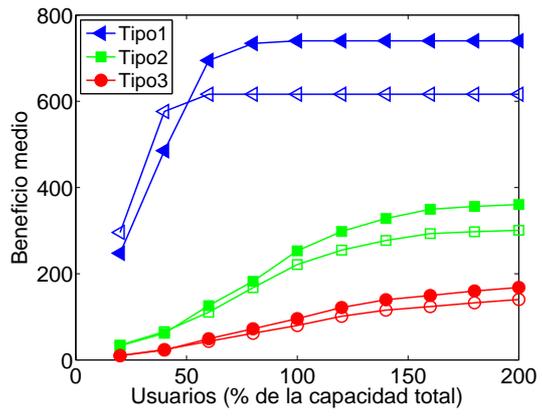


(b) 7-aleatorio

Fig. A.15: Beneficio medio para los escenarios 7.



(a) 7-determinista



(b) 7-aleatorio

Fig. A.16: Beneficio medio por tipo de AE para los escenarios 7.

A.5. Ejemplo fichero de configuración - Asignación de Recursos

```
[DIMENSION]
X=200
Y=200

[INPUT]
#FILE or RANDOM
USERS=FILE
BS=FILE

[USERS]
NUMBER=130
INPUTFILE=traces/130_100_users.tr
LOGOUTPUT=yes
OUTPUTFILE=traces/130_100_users.tr

[BASESTATIONS]
# For RANDOM, only TYPES is used
# For FILE, both NUMBER and FILE are used
TYPES=3
NUMBER=7
INPUTFILE=traces/bsNiyato3.tr
LOGOUTPUT=no
OUTPUTFILE=traces/010_001_bs.tr

#[BS0]
#RANGE=100
#CAPACITY=20
#OPERATOR=0
#MINDISTANCE=80
#NUMBER=1

#[BS1]
#RANGE=50
#CAPACITY=10
#OPERATOR=0
#MINDISTANCE=80
#NUMBER=2

#[BS2]
#RANGE=30
#CAPACITY=5
#OPERATOR=0
#MINDISTANCE=80
#NUMBER=2
```

[OPERATORS]

NUMBER=1

[OPERATOR0]

MARKETSHARE=1

[ANALYSIS]

#GET_STRATEGIES or COMPARE_STRATEGIES

TYPE=COMPARE_STRATEGIES

MAXIMUMSTRATEGIES=10000

RUNS=500

CURRENTRUN=100

STRATEGY=0

[FILES]

FILES PER SIMULATION RUN

OVERALLSTRATEGIES=results/130_100_overallStrategies.out

BSSTRATEGIES=results/130_100_strategiesBSXX.out

AREAS=results/130_100_areas.out

GAMBIT=results/130_100_gambit.in

NONDOMINATED=results/130_100_ndominated.out

PARETO=results/130_100_pareto.out

SUMMARY=results/130_100_summary.out

FILES TO APPEND OVERALL RESULTS

OPTIMUM=results/130_optimum.out

NOSTRATEGY=results/130_nostrategy.out

A.6. Ejemplo fichero de configuración - Asignación de Precios

```
[DIMENSION]
X=200
Y=200

[INPUT]
USERS=FILE
BS=FILE

[USERS]
NUMBER=80
INPUTFILE=traces/080_100_users.tr
LOGOUTPUT=yes
OUTPUTFILE=traces/080_100_users.tr

[BASESTATIONS]
# For RANDOM, only TYPES is used
# For FILE, both NUMBER and FILE are used
TYPES=1
NUMBER=3
INPUTFILE=traces/bsNiyato1.tr
LOGOUTPUT=no
OUTPUTFILE=traces/prueba_niyato.tr

#[BS0]
#RANGE=285
#CAPACITY=20
#OPERATOR=0
#MINDISTANCE=30
#NUMBER=0
#PRICES 24.5 30.8 37

#[BS1]
#RANGE=80
#CAPACITY=10
#OPERATOR=0
#MINDISTANCE=50
#NUMBER=3
#PRICES 24.5 30.8 37

[OPERATORS]
NUMBER=1

[OPERATOR0]
MARKETSHARE=1
```

```
[ANALYSIS]
#GET_STRATEGIES or COMPARE_STRATEGIES
TYPE=COMPARE_STRATEGIES
MAXIMUMSTRATEGIES=10000
RUNS=100
CURRENTRUN=100
STRATEGY=26
```

```
[FILES]
# FILES PER SIMULATION RUN
OVERALLSTRATEGIES=results/080_100_overallStrategies.out
BSSTRATEGIES=results/080_100_strategiesBSXX.out
AREAS=results/080_100_areas.out
GAMBIT=results/080_100_gambit.in
NONDOMINATED=results/080_100_ndominated.out
PARETO=results/080_100_pareto.out
SUMMARY=results/080_100_summary.out

# FILES TO APPEND OVERALL RESULTS
OPTIMUM=results/080_optimum.out
NOSTRATEGY=results/080_nostrategy.out
```

Referencias

- [1] D. Niyato and E. Hossain, “A noncooperative game-theoretic framework for radio resource management in 4g heterogeneous wireless access networks,” *Mobile Computing, IEEE Transactions on*, vol. 7, no. 3, pp. 332–345, march 2008.
- [2] D. Niyato and E. Hossain, “A game theoretic analysis of service competition and pricing in heterogeneous wireless access networks,” *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 7, no. 12, pp. 5150–5155, 2008.
- [3] L. Suciú *et al.*, “Architectural concepts of connectivity services,” EU-FP7 SAIL project, Deliverable DC.1, June 2011.
- [4] J. Baliosian *et al.*, “Gestión de políticas y precios en entornos de acceso heterogéneos.” Proyecto C3SEM (Comunicaciones Cognitivas, Cooperativas y Gestión Autónoma de Servicios), Tech. Rep.
- [5] C. Lopez, R. Agüero, J. Choque, and L. Muñoz, “On the equilibrium of resource allocation for heterogeneous wireless access networks,” in *Personal Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC), 2012 IEEE 23rd International Symposium on*, 2012, pp. 1049–1054.
- [6] C. Lopez, J. Choque, R. Agüero, J. Serrat, and L. Muñoz, “On the equilibrium of pricing assignment for heterogeneous wireless access networks,” in *MONAMI*, 2012, pp. 99–113.
- [7] M. J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, 2004.
- [8] J. Watson, *Strategy, An Introduction to Game Theory*, 2nd ed. W. W. Norton & Company, 2002.
- [9] M. Cesana, I. Malanchini, and A. Capone, “Modelling network selection and resource allocation in wireless access networks with non-cooperative games,” in *Mobile Ad Hoc and Sensor Systems, 2008. MASS 2008. 5th IEEE International Conference on*, 2008, pp. 404–409.
- [10] A. Awada, B. Wegmann, I. Viering, and A. Klein, “A game-theoretic approach to load balancing in cellular radio networks,” in *Personal Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC), 2010 IEEE 21st International Symposium on*, 2010, pp. 1184–1189.
- [11] S. Sengupta, S. Anand, M. Chatterjee, and R. Chandramouli, “Dynamic pricing for service provisioning and network selection in heterogeneous networks,” *Physical Communication*, vol. 2, pp. 138 – 150, 2009, cognitive

Radio Networks: Algorithms and System Design. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1874490709000251>

- [12] S. Sengupta, M. Chatterjee, and K. Kwiat, "Pricing-based service and network selection in overlaid access networks," in *Information, Communications Signal Processing, 2007 6th International Conference on*, 2007, pp. 1–5.
- [13] Q. B. Chen, W. G. Zhou, R. Chai, and L. Tang, "Game-theoretic approach for pricing strategy and network selection in heterogeneous wireless networks," *Communications, IET*, vol. 5, no. 5, pp. 676–682, 2011.
- [14] J. Baliosian, J. Rubio-Loyola, P. Salazar, and R. Agüero, "Gestión de políticas y precios en entornos de acceso heterogéneos," 2011.
- [15] M. Abramson *et al.*, *The NOMAD Project. A blackbox optimization software*. [Online]. Available: <http://www.gerad.ca/nomad/Project/Home.html>
- [16] G. D. Corporation, *GAMS. The General Algebraic Modeling System*. [Online]. Available: <http://www.gams.com/>
- [17] P. D. Technology, *AIMMS*. [Online]. Available: <http://www.aimms.com/>
- [18] McKelvey and others., *Gambit: Software Tools for Game Theory, Version 0.2010.09.01.*, 2010. [Online]. Available: <http://www.gambit-project.org>.
- [19] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. AddisonWesley, 1994.
- [20] K. Yamanaka, S. Kawano, Y. Kikuchi, and S. Nakano, "Constant time generation of integer partitions," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, May 2007.
- [21] L. Santana and A. López, *Algorithms to identified nondominated solutions in a multi-dimensional set*. [Online]. Available: <http://www.cs.cinvestav.mx/emoo-book/nodom/nondominated.html>
- [22] J. Choque, R. Agüero, and L. Muñoz, "Simulation framework for the evaluation of access selection algorithms over heterogeneous wireless networks," *MONAMI 2011*, 2011.