

TESIS DOCTORAL

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE VIGAS AL CÁLCULO DE LA
DISTORSIÓN EN PUENTES MIXTOS DE SECCIÓN CAJÓN
CURVOS EN PLANTA Y CRITERIOS PARA EL
DIMENSIONAMIENTO DE DIAFRAGMAS ANTIDISTORSIÓN

AUTOR

IVÁN CAMPO RUMOROSO

DIRECTOR

ÓSCAR RAMÓN RAMOS GUTIÉRREZ

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

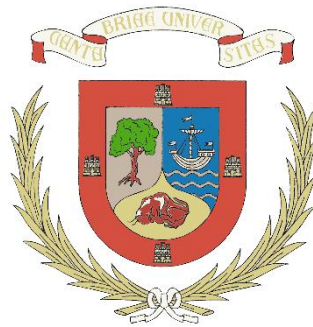
Escuela de Doctorado de la Universidad de Cantabria

Santander 2023

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA
ESTRUCTURAL Y MECÁNICA**



TESIS DOCTORAL

**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE VIGAS AL CÁLCULO DE LA
DISTORSIÓN EN PUENTES MIXTOS DE SECCIÓN CAJÓN
CURVOS EN PLANTA Y CRITERIOS PARA EL
DIMENSIONAMIENTO DE DIAFRAGMAS ANTIDISTORSIÓN**

Autor: IVÁN CAMPO RUMOROSO
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Director: ÓSCAR RAMÓN RAMOS GUTIÉRREZ
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

MARZO DE 2023

A mi familia.

*Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.*

Antonio Machado

Agradecimientos

Me gustaría empezar los agradecimientos por el director de la tesis, Óscar Ramón Ramos Gutiérrez. Fue quien me dio la oportunidad en 2012 de iniciarme en el mundo de los puentes en APIA XXI, y durante los 8 años que fue mi jefe me formó cómo el ingeniero que he llegado a ser. De él aprendí como afrontar los proyectos, teniendo en cuenta lo que es un problema, lo que es importante y lo que es accesorio. Además, ha guiado esta investigación a buen puerto, a pesar de que no ha sido una tarea fácil, y ha contribuido a la financiación de actividades formativas vinculadas a este doctorado.

En APIA tuve la oportunidad de trabajar con compañeros y compañeras brillantes de los que tanto pude aprender. Fueron muchos, así que no puedo nombrar a todos, pero me gustaría agradecer en especial a Ricardo por todo lo que me explicó, a Jorge y Guillermo por guiarme en los inicios, a Jose Manuel por su confianza cuando pasó a ser jefe, a Javier Sánchez por explicarme que la respuesta está siempre en los modelos más simples y a Andrea por todo lo que he aprendido de su forma de trabajar. Tampoco me quiero olvidar de Ángela, Roberto, Luis, Cristina, Manuel Ángel, David, Haritz, Juan, Zhang, Wojciech y mi tocayo. Gracias por haberme ayudado a entender el mundo de la ingeniería de puentes un poco mejor.

Desde 2021 tengo la oportunidad de trabajar en Pedelta. Quiero agradecer especialmente a su director técnico, Javier Jordán, la oportunidad que me dio de trabajar en la empresa, y cómo desde entonces me ha permitido participar en proyectos cuyas enseñanzas se han visto reflejadas en esta tesis. Tampoco me quiero olvidar de los compañeros, en especial de Jose y Jorge, de quien siempre se puede seguir aprendiendo. También agradezco a la empresa el haber financiado las actividades vinculadas al doctorado durante este periodo.

No me puedo olvidar del tutor de la tesis, Valen Gómez Jáuregui. Gracias por esa ingrata labor de recordarme año tras año los trámites burocráticos y por ayudarme siempre que lo he necesitado.

Gracias a mis padres y abuelos por haber estado siempre ahí y por inculcarme que sin trabajo no se llega a ningún sitio. También a mis tíos y primos, en especial a mi tía Carmen, que hace 20 años defendió en esta misma escuela su tesis, y cuyos consejos han sido fundamentales durante toda mi carrera.

Agradezco a mis amigos su paciencia durante todo este periodo. Y también los consejos de las que ya habían pasado por esto anteriormente.

Por último, no me puedo olvidar de Laura. Gracias por tu apoyo, por guiarme en este camino que tú antes habías recorrido, por tu paciencia infinita y porque esta tesis no hubiera sido lo mismo sin ti.

A todos ellos, y a cualquiera que se moleste en leer este trabajo, gracias.

Barcelona, 27 de marzo de 2023

Resumen

Los puentes mixtos de sección cajón constituyen una solución competitiva en el rango de las luces medias-altas en la que España está a la vanguardia. El motivo fundamental se debe a la eficiencia en el uso de materiales, que hacen de esta tipología una opción versátil y estética, a la par que sostenible.

Sin embargo, esta tipología presenta numerosos detalles estructurales que encarecen su coste de fabricación. Entre ellos, destacan los diafragmas antidistorsión, cuyo cálculo riguroso ha sido históricamente relegado por las normativas en detrimento de fórmulas simplificadas que en muchas ocasiones llevan a diseños poco eficientes.

Otro de los motivos que ha llevado históricamente a la simplificación en el diseño de dichos diafragmas ha sido la ausencia de herramientas eficientes para su cálculo. Por ese motivo, en esta tesis se ha desarrollado un elemento finito que permite el cálculo de la distorsión y los diafragmas necesarios para su control en puentes mixtos de sección cajón unicelulares y curvos en planta.

También se revisan en esta tesis los criterios para la modelización, el cálculo y la verificación de algunos de los diafragmas antidistorsión más comunes como son los diafragmas de alma llena, Cruz de San Andrés, V, K y marcos abiertos y cerrados.

Por último, se han propuesto unas recomendaciones para el control de la distorsión que tienen como objetivo definir el espaciamiento máximo entre diafragmas en función de diferentes parámetros, tales como la anchura, la curvatura en planta o el canto, y dotar a los diafragmas dispuestos de unas determinadas características. Asimismo, se han estudiado las tipologías más adecuadas de diafragmas en función de la geometría de la sección y como afecta la distorsión al cálculo de fatiga.

Abstract

Box-girder composite bridges are a competitive solution in the medium-high span range in which Spain is at the forefront. The fundamental reason is the efficiency in the use of materials, which makes this typology a versatile, aesthetically pleasant, and sustainable option for bridge design.

However, this typology presents numerous structural details that increase its manufacturing cost. These include cross-frames, whose rigorous calculation has historically been relegated by regulations to the detriment of simplified formulas that often lead to inefficient designs.

Another reason that has historically led to the simplification in the design of cross-frames has been the absence of efficient tools for their calculation. For this reason, a finite element has been developed in this thesis that allows the analysis of distortion and the cross-frames necessary for its control in single-cell box-girder composite bridges.

The criteria for the modeling, calculation and verification of cross-frames is also reviewed in this thesis. It has been done for some of the most common types cross-frames such as welded plate diaphragms, X type, V type, K type and frames.

Finally, recommendations for distortion control have been proposed. They consist of defining a maximum spacing between cross-frames according to different parameters, and providing the cross-frames with specific characteristics. The most suitable types of cross-frames have also been studied depending on the geometry of the section, as well as how distortion affects the fatigue calculation.

Índice general

Agradecimientos	V
Resumen	VII
Abstract	VIII
Listado de acrónimos	XIX
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objeto de la investigación	3
1.3. Objetivos de la investigación	6
1.4. Metodología de la investigación	7
1.5. Estructura de la tesis	9
2. Estado de la cuestión	11
2.1. Introducción	11
2.2. Cálculo de la distorsión	12
2.2.1. Introducción	12
2.2.2. Teoría de vigas	13
2.2.2.1. Introducción	13
2.2.2.2. Descomposición en modos resistentes de un tablero de sección cajón	13
2.2.2.3. Cortante-Flexión	18
2.2.2.4. Torsión	20
2.2.2.5. Distorsión	22
2.2.2.6. Interacción Torsión-Distorsión	28
2.2.2.7. Propiedades de la sección	29

2.2.2.8.	Generalización	30
2.2.2.9.	Otros desarrollos	31
2.2.3.	Método de los Elementos Finitos	32
2.2.3.1.	Introducción	32
2.2.3.2.	Elementos tipo viga	33
2.2.3.3.	Elementos multidimensionales	38
2.2.4.	Resumen	40
2.3.	Criterios para el control de la distorsión	41
2.3.1.	Introducción	41
2.3.2.	Umbral de distorsión	42
2.3.3.	Criterios académicos	44
2.3.4.	Criterios normativos	48
2.3.5.	Revisión crítica de los criterios para el control de la distorsión . .	50
2.3.6.	Resumen	52
3.	Definición del elemento finito	55
3.1.	Introducción	55
3.2.	Convenio de signos y nomenclatura	57
3.3.	Estudio de un elemento de pared	59
3.3.1.	Introducción	59
3.3.2.	Equilibrio	59
3.3.3.	Deformaciones	61
3.3.4.	Energía de deformación	65
3.4.	Modos de deformación	67
3.4.1.	Introducción	67
3.4.2.	Axil	68
3.4.3.	Cortante-Flexión	70
3.4.4.	Torsión	76
3.4.5.	Distorsión	81
3.4.6.	Resumen	89
3.5.	Cálculo de la viga	91
3.5.1.	Introducción	91
3.5.2.	Deformaciones en la viga	92
3.5.3.	Características de la viga y resultantes	94
3.5.4.	Trabajo virtual de deformación de la viga	102
3.5.5.	Trabajo virtual potencial de las acciones exteriores	102
3.5.6.	Ecuaciones de la viga	105
3.6.	Elemento finito	107

3.6.1.	Introducción	107
3.6.2.	Grados de libertad y funciones de forma	109
3.6.3.	Matriz de rigidez	113
3.6.3.1.	Introducción	113
3.6.3.2.	Deformación longitudinal	113
3.6.3.3.	Deformación angular	118
3.6.3.4.	Deformación transversal	120
3.6.3.5.	Matriz de rigidez	122
3.6.4.	Vector de cargas	124
3.6.5.	Cálculo de esfuerzos	125
3.7.	Cálculo de rigidez de diafragmas antidistorsión	128
4.	Comportamiento y modelización de diafragmas	131
4.1.	Introducción	131
4.2.	Consideraciones generales	133
4.2.1.	Funciones de los diafragmas	133
4.2.2.	Movimientos de la sección	136
4.2.3.	Cálculo de rigidez empleando modelos de contraste	137
4.2.4.	Geometría y materiales de referencia	138
4.3.	Diafragmas de alma llena	140
4.3.1.	Introducción	140
4.3.2.	Modelo de contraste	141
4.3.3.	Rigidez del diafragma	143
4.3.3.1.	Matriz de rigidez	143
4.3.3.2.	Cálculo aproximado	145
4.3.3.3.	Cálculo comparativo	145
4.3.4.	Cálculo de tensiones debidas a la distorsión	147
4.3.4.1.	Introducción	147
4.3.4.2.	Cálculo analítico aproximado de tensiones tangenciales	150
4.3.4.3.	Cálculo de tensiones tangenciales empleando un elemento finito	152
4.3.5.	Cálculo de esfuerzos verticales	154
4.3.5.1.	Introducción	154
4.3.5.2.	Modelo de cálculo	155
4.3.5.3.	Vehículos pesados	158
4.3.5.4.	Sobrecarga	161
4.3.6.	Criterios de dimensionamiento	163
4.3.6.1.	Introducción	163

4.3.6.2.	Carga crítica tangencial	165
4.3.6.3.	Carga crítica vertical	167
4.3.6.4.	Carga crítica total	170
4.3.6.5.	Carga crítica considerando empotramiento	172
4.3.6.6.	Estado Límite Último	173
4.3.6.7.	Limitación respecto la carga crítica	179
4.3.6.8.	Estado Límite de Servicio y Fatiga	181
4.3.7.	Resumen	181
4.4.	Cruz de San Andrés	183
4.4.1.	Introducción	183
4.4.2.	Modelo de contraste	184
4.4.3.	Rigidez del diafragma	185
4.4.3.1.	Matriz de rigidez	185
4.4.3.2.	Cálculo aproximado	186
4.4.3.3.	Cálculo comparativo	186
4.4.4.	Cálculo de esfuerzos debidos a la distorsión	187
4.4.4.1.	Cálculo matricial de esfuerzos	187
4.4.4.2.	Cálculo aproximado de esfuerzos	188
4.4.4.3.	Cálculo comparativo	188
4.4.5.	Criterio de dimensionamiento	189
4.5.	Diafragma en V	190
4.5.1.	Introducción	190
4.5.2.	Modelo de contraste	191
4.5.3.	Rigidez del diafragma	191
4.5.3.1.	Matriz de rigidez	191
4.5.3.2.	Cálculo aproximado	192
4.5.3.3.	Cálculo comparativo	192
4.5.4.	Cálculo de esfuerzos debidos a la distorsión	193
4.5.4.1.	Cálculo matricial de esfuerzos	193
4.5.4.2.	Cálculo aproximado de esfuerzos	194
4.5.4.3.	Cálculo comparativo	194
4.5.5.	Criterio de dimensionamiento	194
4.6.	Diafragma en K	195
4.6.1.	Introducción	195
4.6.2.	Modelo de contraste	196
4.6.3.	Rigidez del diafragma	196
4.6.3.1.	Matriz de rigidez	196

4.6.3.2.	Cálculo aproximado	197
4.6.3.3.	Cálculo comparativo	197
4.6.4.	Cálculo de esfuerzos debidos a la distorsión	199
4.6.4.1.	Cálculo matricial de esfuerzos	199
4.6.4.2.	Cálculo aproximado de esfuerzos	199
4.6.4.3.	Cálculo comparativo	199
4.6.5.	Criterio de dimensionamiento	200
4.7.	Marcos abiertos y cerrados	201
4.7.1.	Introducción	201
4.7.2.	Modelo de contraste	202
4.7.3.	Rigidez del diafragma	203
4.7.3.1.	Matriz de rigidez	203
4.7.3.2.	Cálculo aproximado	204
4.7.3.3.	Contribución de las chapas	205
4.7.4.	Cálculo de esfuerzos debidos a la distorsión	207
4.7.4.1.	Cálculo matricial de esfuerzos	207
4.7.4.2.	Cálculo aproximado de esfuerzos	207
4.7.4.3.	Cálculo comparativo	208
4.7.5.	Criterios de dimensionamiento	208
5.	Aplicación del elemento finito	211
5.1.	Introducción	211
5.2.	Metodología	212
5.2.1.	Introducción	212
5.2.2.	Teoría clásica	212
5.2.3.	Modelo de láminas	213
5.2.4.	Materiales	216
5.3.	Ejemplo de verificación 1	217
5.3.1.	Descripción de la estructura	217
5.3.2.	Propiedades de la sección	218
5.3.3.	Acciones	221
5.3.4.	Estudio de convergencia	222
5.3.5.	Movimientos	222
5.3.6.	Esfuerzos	227
5.3.7.	Tensiones	230
5.3.8.	Reacciones en diafragmas	234
5.3.9.	Conclusión	238
5.4.	Ejemplo de verificación 2	238

5.4.1.	Descripción de la estructura	238
5.4.2.	Propiedades de la sección	239
5.4.3.	Acciones	241
5.4.4.	Estudio de convergencia	241
5.4.5.	Movimientos	242
5.4.6.	Esfuerzos	246
5.4.7.	Tensiones	249
5.4.8.	Reacciones en diafragmas	252
5.4.9.	Conclusión	254
5.5.	Ejemplo de verificación 3	255
5.5.1.	Descripción de la estructura	255
5.5.2.	Propiedades de la sección	256
5.5.3.	Acciones	261
5.5.4.	Movimientos	262
5.5.5.	Esfuerzos	265
5.5.6.	Tensiones	268
5.5.7.	Reacciones en diafragmas	271
5.5.8.	Conclusión	275
6.	Recomendaciones para el control de la distorsión	277
6.1.	Introducción	277
6.2.	Criterios generales	279
6.3.	Tablero recto	280
6.3.1.	Introducción	280
6.3.2.	Metodología	281
6.3.2.1.	Definición de las geometrías objeto de estudio	281
6.3.2.2.	Cálculo y dimensionamiento de las secciones del puente	284
6.3.2.3.	Cálculo y dimensionamiento de diafragmas interiores .	286
6.3.2.4.	Cálculo iterativo y obtención de resultados	289
6.3.3.	Resultados	292
6.3.3.1.	Vano de 30 m y canto constante	292
6.3.3.2.	Vano de 45 m y canto constante	294
6.3.3.3.	Vano de 60 m y canto constante	295
6.3.3.4.	Vano de 60 m y canto variable	297
6.3.3.5.	Vano de 75 m y canto constante	299
6.3.3.6.	Vano de 75 m y canto variable	300
6.3.3.7.	Vano de 90 m y canto constante	301
6.3.3.8.	Vano de 90 m y canto variable	303

6.3.4.	Análisis de resultados	304
6.3.4.1.	Introducción	304
6.3.4.2.	Dimensionamiento por resistencia	305
6.3.4.3.	Dimensionamiento por rigidez	309
6.3.4.4.	Dimensionamiento flexible	310
6.4.	Tablero curvo	313
6.4.1.	Introducción	313
6.4.2.	Metodología	313
6.4.2.1.	Definición de las geometrías objeto de estudio	314
6.4.2.2.	Cálculo y dimensionamiento de las secciones del puente	314
6.4.2.3.	Cálculo y dimensionamiento de diafragmas interiores	316
6.4.2.4.	Cálculo iterativo y obtención de resultados	316
6.4.3.	Resultados	317
6.4.3.1.	Vano de 30 m	318
6.4.3.2.	Vano de 45 m	320
6.4.3.3.	Vano de 60 m	322
6.4.3.4.	Vano de 75 m	324
6.4.3.5.	Vano de 90 m	326
6.4.4.	Análisis de resultados	328
6.4.4.1.	Introducción	328
6.4.4.2.	Análisis de las cargas	328
6.4.4.3.	Dimensionamiento por resistencia	331
6.4.4.4.	Dimensionamiento flexible	333
6.5.	Tableros anchos	335
6.5.1.	Introducción	335
6.5.2.	Tableros de 12.8 m de ancho	336
6.5.2.1.	Introducción	336
6.5.2.2.	Metodología y geometrías	337
6.5.2.3.	Resultados y análisis de dimensionamiento por resistencia	338
6.5.2.4.	Resultados y análisis de dimensionamiento flexible	340
6.5.3.	Puente de 75 m de luz	341
6.5.3.1.	Introducción	341
6.5.3.2.	Metodología y geometrías	342
6.5.3.3.	Resultados y análisis de tableros rectos	344
6.5.3.4.	Resultados y análisis de tableros curvos	347
6.5.4.	Puente de 90 m de luz	349

6.5.4.1.	Introducción	349
6.5.4.2.	Metodología y geometrías	351
6.5.4.3.	Resultados y análisis de tableros rectos	352
6.5.4.4.	Resultados y análisis de tableros curvos	355
6.5.5.	Resumen	355
6.6.	Criterios complementarios	357
6.6.1.	Introducción	357
6.6.2.	Fatiga	357
6.6.2.1.	Introducción	357
6.6.2.2.	Metodología y geometrías	358
6.6.2.3.	Resultados	359
6.6.2.4.	Resumen	362
6.6.3.	Rigidizadores	362
6.6.3.1.	Introducción	362
6.6.3.2.	Metodología y geometrías	362
6.6.3.3.	Resultados	364
6.7.	Tipología de diafragmas	366
6.7.1.	Introducción	366
6.7.2.	Metodología y geometrías	366
6.7.3.	Resultados	369
6.7.3.1.	Canto 1.5 m	370
6.7.3.2.	Canto 1.75 m	371
6.7.3.3.	Canto 2.4 m	372
6.7.3.4.	Canto 3 m	374
6.7.3.5.	Canto 3.6 m	376
6.7.4.	Análisis de resultados	378
6.8.	Resumen	380
7.	Resumen y conclusiones	385
7.1.	Resumen	385
7.2.	Conclusiones	388
7.3.	Futuras líneas de investigación	393
A.	Listado de símbolos	395
B.	Revisión del cálculo de distorsión en puentes mixtos	405
B.1.	Introducción	405
B.2.	Cálculo de parámetros de la viga sobre lecho elástico	405

B.2.1.	Geometría y materiales de la sección	405
B.2.2.	Planteamiento de la ecuación	407
B.2.3.	Cálculo de alabeos	411
B.2.4.	Movimientos	414
B.2.5.	Cargas externas	418
B.2.6.	Cargas debidas a la curvatura en planta	420
B.2.7.	Rigidez de Marco	422
B.2.8.	Inercia a distorsión	424
B.2.9.	Tensiones	424
B.2.10.	Momentos transversales	425
B.3.	Diafragmas antidistorsión	426
B.3.1.	Introducción	426
B.3.2.	Diafragma de alma llena	429
B.3.3.	Diafragma en X o Cruz de San Andrés	430
B.3.4.	Diafragma en K	430
B.3.5.	Diafragma en V	431
B.3.6.	Otros diafragmas	432
B.4.	Viga sobre lecho elástico	432
B.5.	Cálculo comparativo	433
B.5.1.	Introducción	433
B.5.2.	Geometría y propiedades de la sección	434
B.5.3.	Cargas	437
B.5.4.	Diafragmas	437
B.5.5.	Resultados	439
B.6.	Conclusión	442
C.	Integrales	443
C.1.	Funciones de forma de la viga	443
C.2.	Alabeos	445
C.3.	Deformación angular	446
C.4.	Movimientos	446
D.	Ejemplo de cálculo de propiedades de secciones	449
D.1.	Introducción	449
D.2.	Materiales y geometría de la sección	449
D.3.	Cálculo de propiedades en viga recta	452
D.3.1.	Introducción	452
D.3.2.	Propiedades de las paredes	452

D.3.3. Flexocompresión	453
D.3.4. Torsión	458
D.3.5. Distorsión	467
D.4. Cálculo de propiedades en viga curva	483
D.4.1. Introducción	483
D.4.2. Cálculo de alabeos	483
D.4.3. Cálculo de deformación angular	491
D.4.4. Cálculo de propiedades	493
E. Geometrías consideradas en el cálculo paramétrico	497
E.1. Introducción	497
E.2. Tablero recto	497
E.2.1. Espaciamientos entre diafragmas y rigidizadores	497
E.2.2. Secciones	499
E.2.2.1. Vano principal de 30 m	499
E.2.2.2. Vano principal de 45 m	501
E.2.2.3. Vano principal de 60 m y canto constante	503
E.2.2.4. Vano principal de 60 m y canto variable	506
E.2.2.5. Vano principal de 75 m y canto constante	508
E.2.2.6. Vano principal de 75 m y canto variable	511
E.2.2.7. Vano principal de 90 m y canto constante	513
E.2.2.8. Vano principal de 90 m y canto variable	516
E.3. Tablero curvo	518
E.3.1. Espesor equivalente de chapa de cierre	518
E.3.2. Espesor equivalente de diafragmas	520
E.4. Tableros anchos	521
E.4.1. Secciones para ancho de 12.8 m	521
E.4.2. Secciones para puente de 75 m de luz	525
Bibliografía	527
Índice de figuras	541
Índice de tablas	551

Listado de acrónimos

ELS Estado Límite de Servicio 181

ELU Estado Límite Último 1

FLM Fatigue Load Model 357

GBT Generalized Beam Theory 30

LM1 Load Model 1 153

MEF Método de los Elementos Finitos 32

SETRA Service d'études sur les transports, les routes et leurs aménagements 133

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Introducción

Los puentes mixtos de sección cajón constituyen una solución competitiva en el rango de las luces medias-altas debido a sus múltiples ventajas. Entre otras, se puede destacar la eficiencia en el uso de los materiales, lo que permite lograr diseños esbeltos que se adaptan a requerimientos geométricos o estéticos. Dicha eficiencia también posibilita que se trate de una tipología competitiva cuando las luces oscilan entre los 90 y los 130 m de acuerdo con los estudios realizados en Francia [1]. Además, su elevada rigidez torsional consigue un mejor reparto de las cargas excéntricas en la sección [2], lo cual resulta conveniente cuando los tableros son anchos o cuando los tableros presentan curvaturas en planta notables. Por último, su prefabricación también redunda que esta tipología resulte adecuada para trabajos en entornos urbanos o periurbanos con una alta densidad de tráfico.

En España son numerosas las realizaciones de tableros mixtos que se han construido desde el siglo pasado, siendo la sección tipo cajón la tipología preferente frente a los tableros bijácena o multijácena [3]. Dicha preferencia se debe en parte a las contribuciones realizadas por ingenieros nacionales a esta tipología, tales como la doble acción mixta o el cajón estricto [4], que han permitido que los tableros de sección cajón también resulten competitivos en luces inferiores a las indicadas anteriormente en Francia. Además, algunas de estas innovaciones han sido exportadas a otros países con éxito por los participantes en el presente trabajo [5][6] y otros muchos proyectistas. Es decir, se trata de una tipología en la que España está a la vanguardia [7], por lo que profundizar en su conocimiento suscita interés tanto en el ámbito académico como en el empresarial.

Uno de los aspectos susceptibles de optimización dentro de esta tipología es el coste de mano de obra asociado a su fabricación. El motivo es que, en ciertos casos y para un mismo puente, el tablero de sección cajón puede resultar más ligero que otro compuesto por secciones abiertas tipo vigas doble T. Sin embargo, y a pesar del ahorro en el material,

los costes asociados a la mano de obra pueden llevar a que el precio final del tablero sea mayor en el caso de la sección cajón.

El coste en la mano de obra está fundamentalmente asociado a la rigidización de los tableros [3]. Los elementos que componen dicha rigidización incluyen múltiples detalles de soldadura que es necesario ejecutar y verificar, como se puede observar en la figura 1.1. Por lo tanto, el objetivo final de esta investigación es contribuir al diseño de tableros de sección cajón en los que, preservando la eficiencia de la sección, se consigan optimizar los elementos de rigidización transversal.



FIGURA 1.1 Viaducto de acceso al Puerto de Vigo
Cortesía de Óscar Ramón Ramos

Como es sabido, los elementos de rigidización tienen múltiples funciones. Una de las más importantes, y que se encuentra ampliamente abordada en la normativa vigente, es la de controlar el comportamiento frente a la abolladura de los paneles que componen la sección. Con el propósito de optimizar dicha rigidización se han realizado numerosas investigaciones, siendo destacable el proyecto europeo COMBRI [8]. Dicho proyecto resultó en la creación de un extenso manual para el diseño de tableros mixtos tanto de vigas doble T como de sección cajón.

Otra de las funciones principales de la rigidización es controlar la deformación transversal de la sección frente a cargas excéntricas, también conocida como distorsión de la sección. Dicho control se realiza por medio de diafragmas antidistorsión, y su implementación es necesaria para evitar que un exceso de deformación de la sección pueda causar sobretensiones inadmisibles tanto en dirección longitudinal como transversal.

No obstante, y a pesar de la importancia que tiene la distorsión de la sección en tableros

mixtos de sección cajón, destaca la limitada atención que se presta a este fenómeno tanto en la normativa vigente como en la literatura especializada. Por ejemplo, los Eurocódigos vigentes apenas dedican una línea a mencionar la distorsión en Estado Límite Último (ELU) [9]. Y el proyecto europeo COMBRI, anteriormente citado, dedica dos párrafos a los diafragmas de tableros de sección cajón para justificar que no se han estudiado debido a las múltiples variables involucradas en su diseño. En cuanto al cálculo, existen distintas metodologías disponibles. Sin embargo, estas pueden resultar excesivamente simplificadas o complejas, o requerir un cálculo independiente que conlleve múltiples iteraciones, como se explicará más adelante. En resumen, no existe una metodología eficiente para el cálculo de la distorsión en tableros de sección cajón, y la literatura asociada a su control es insuficiente.

1.2 Objeto de la investigación

El objeto de la investigación es el cálculo y control de la distorsión en tableros mixtos de sección cajón unicelulares. Por lo tanto, se dividirá la investigación en dos grandes bloques. En el primero se investigarán las metodologías existentes para el cálculo de la distorsión, destacando aquellas que tienen en cuenta la presencia de diafragmas. En el segundo bloque, se revisarán los criterios de disposición de diafragmas para el control de la distorsión, así como las características que deben de cumplir dichos diafragmas.

Para entender la necesidad de investigar las metodologías de cálculo es necesario partir del marco normativo vigente. La mayor parte de las normativas se basan la teoría de vigas para la verificación de puentes, y por esa razón lo habitual es desarrollar modelos de cálculo de tableros de sección cajón utilizando elementos tipo viga. Para desarrollar tales modelos, lo más común es recurrir a software comerciales, pero ninguno de los más populares incluye el cálculo de la distorsión. Por lo tanto, si se desea calcular la distorsión es necesario recurrir a modelos o metodologías complementarios. Según la bibliografía consultada, las tres opciones más comunes son las siguientes:

- La primera opción consiste en utilizar los cálculos simplificados de las recomendaciones establecidas en la literatura, en lugar de realizar un cálculo preciso de la distorsión. Esta metodología se considera adecuada durante la fase de diseño conceptual, pero su ámbito de aplicación debe estar claramente acotado. Por lo tanto los criterios para el control de la distorsión que se elaboren en esta tesis irán en esta línea. Sin embargo, las recomendaciones de la literatura vigente llevan a sobredimensionamientos en muchos casos, por lo que esta no es una metodología eficiente desde el punto de vista del coste final de la estructura.

- La segunda opción consiste en desarrollar un modelo de cálculo refinado con elementos finitos multidimensionales. Esta metodología es la más precisa, ya que múltiples autores han logrado correlacionar exitosamente modelos de elementos finitos multidimensionales con ensayos de laboratorio [10]. Sin embargo, se trata de una metodología que requiere un tiempo considerable para preparar y calcular el modelo, así como para procesar los resultados, por lo que no se puede considerar eficiente.
- Existe una tercera opción, contemplada en las normativas, que consiste en calcular la distorsión utilizando la teoría de vigas. Esta metodología cuenta con distintos niveles de desarrollo, siendo el método más popular la analogía de la viga sobre lecho elástico [11][12]. Sin embargo, esta analogía implica el desarrollo de un modelo de cálculo de viga Winkler independiente del modelo principal. Además, en el caso de las vigas curvas, dicho modelo interactúa con el modelo global, por lo que no se puede considerar integrado y tampoco alcanza la eficiencia deseada. Por último, algunos autores han indicado que en puentes curvos se debe tener en cuenta la interacción entre la distorsión y la torsión [13], lo que implica que pueda existir falta de precisión en ciertos casos.

En resumen, ninguna de las metodologías anteriores es eficiente desde un punto de vista de tiempo y resultado. Sin embargo, de las opciones anteriormente expuestas la que más se acerca a la pretendida eficiencia es el empleo de la teoría de vigas, ya que sus resultados son compatibles con el marco normativo vigente, lo que simplifica las labores de procesamiento y verificación por parte del diseñador. Además, el tiempo computacional, aunque es ligeramente superior al de los elementos tipo viga convencionales, es mucho menor que el de cualquier otra metodología refinada.

Debido a las ventajas anteriormente expuestas, varios autores han propuesto en el ámbito académico elementos finitos tipo unidimensionales que permiten integrar el cálculo de la distorsión con el resto de los esfuerzos. Sin embargo, este tipo de elementos no están implementados en los software de cálculo más populares, lo que limita su uso en oficinas de proyectos. Además, los elementos revisados también presentan una serie de limitaciones que varían según el autor. Algunos ejemplos de estas limitaciones son la restricción a unas secciones tipo, la necesidad de iteraciones, las interacciones limitadas entre esfuerzos, o la posibilidad de que únicamente se apliquen a alineaciones rectas. En resumen, no se ha encontrado en la literatura un elemento adecuado para el diseño de puentes mixtos curvos.

Otra gran carencia observada en los elementos finitos analizados es el tratamiento de los diafragmas intermedios antidistorsión. Apenas existen publicaciones que consideren di-

chos diafragmas, y las que se han podido consultar se limitan al empleo de formulaciones simplificadas basadas en la literatura clásica sobre distorsión. De esta forma, aunque cada vez son más los elementos finitos que incorporan formulaciones propias para el cálculo de la distorsión, ninguno de ellos contempla la posibilidad de considerar diafragmas intermedios antidistorsión. En consecuencia, existe un vacío en la literatura sobre este tema.

En lo que respecta al control de la distorsión, las estrategias más comunes consisten en limitar el espaciamiento entre diafragmas antidistorsión y asignar a dichos diafragmas una rigidez mínima. No obstante, la literatura existente al respecto es escasa, esta limitada a geometrías específicas y en ocasiones parte de hipótesis muy conservadoras.

Por ejemplo, Javier Pascual en su tesis de 2004 [3] acierta al cuestionar la necesidad de imponer un valor numérico a la rigidez que deben adoptar los diafragmas, y opta por basar la rigidez en la propia resistencia de los diafragmas. Esta propuesta supone, en muchos casos, una reducción sustancial en la cuantía de acero en diafragmas interiores respecto a otros autores. Además, adquirió rango normativo en la EAE-11 [14]. Desafortunadamente, y a pesar de sus ventajas, esta propuesta solo ha sido empleada por su autor, por lo que el resto de publicaciones se siguen basando en criterios de rigidez mínima que se puede considerar muy conservadores.

Para justificar la propuesta anteriormente indicada, Pascual realiza un estudio muy extenso, pero limitado a puentes rectos de hasta 14 m de ancho de tablero. Sin embargo, son numerosas investigaciones que demuestran el incremento de la distorsión que se produce al aumentar la curvatura. Además, existen realizaciones en Cantabria que llegan a los 30 m [15] de ancho de tablero con un único cajón. Por ello, se considera que la propuesta de Pascual debe ser extendida a puentes curvos y de gran anchura.

Precisamente la anchura, y más concretamente el estudio de los puentes de gran anchura, es una de las carencias más comunes observadas en la literatura. La mayor parte de publicaciones consultadas son asiáticas o americanas, por lo que limitan el estudio a anchos de cajón inferiores a 4 m. Tendiendo en cuenta que la relación entre el ancho del cajón y el ancho del tablero en puentes convencionales oscila alrededor del 50 % [1], 4 m de ancho de cajón se traducen 8 m de ancho total aproximadamente. Sin embargo, en Europa son muy frecuentes los tableros de cajón único con anchuras de tablero superiores a los 8 m, por lo que se trata de una variable que debe ser estudiada.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, se considera necesario ampliar la literatura sobre el control de la distorsión, ya que las publicaciones existentes son contradictorias e incompletas.

1.3 Objetivos de la investigación

Una vez expuestas las principales carencias relativas al cálculo de la distorsión en puentes mixtos de sección cajón, así como en los criterios de disposición de diafragmas intermedios, se plantean los siguientes objetivos para la presente investigación:

- 1) **Desarrollo de un elemento finito unidimensional curvo que integre el cálculo de la distorsión.** El elemento deberá tener al menos las siguientes características:
 - Debe permitir la curvatura en planta, ya que los puentes mixtos de sección cajón resultan muy habituales en trazados curvos debido a su elevada rigidez torsional.
 - Se debe permitir cualquier sección simétrica, abierta o cerrada, ya que durante la fase de construcción los tableros pueden comportarse parcialmente como secciones abiertas. También los cajones estrictos durante la fase final pueden tener este comportamiento.
 - Se debe considerar la interacción de la distorsión con el resto de esfuerzos. En el caso de la interacción con la flexión esto permite eliminar las iteraciones en los puentes curvos en planta. Y en el caso de la torsión varios autores [13] señalan que esta interacción puede ser especialmente relevante en puentes curvos. Además, en el caso de secciones abiertas y semiabiertas, la torsión puede llegar a resultar más relevante que la distorsión en términos de tensiones longitudinales.
 - Debe ser compatible con el cálculo de diafragmas, ya que son elementos indispensables en los puentes mixtos.
 - Por último, los resultados obtenidos deben ser compatibles con las verificaciones normativas.
- 2) **Implementación del cálculo de diafragmas dentro de un modelo de elementos finitos monodimensionales.** Se realizará para algunos de los tipos de diafragmas más comunes, que se muestran en la figura 1.2. Además, se revisarán los criterios para el dimensionamiento de los diafragmas para que los resultados obtenidos del cálculo permitan el dimensionamiento de estos elementos según la normativa.
- 3) **Redacción de recomendaciones sobre el control de la distorsión con el objetivo de completar la literatura existente.** Con este fin se realizará un cálculo paramétrico empleando el nuevo elemento finito desarrollado. Para ello se utilizarán casos reales de tableros de puentes que ha proyectado, o en los que ha participado, el director de la investigación, y se modificarán sus características con el fin de estudiar

las disposiciones más adecuadas de diafragmas para el control de la distorsión dentro del rango habitual de aplicación de los tableros mixtos. Además, se estudiarán tableros de gran anchura que aún no han sido abordados en la literatura.

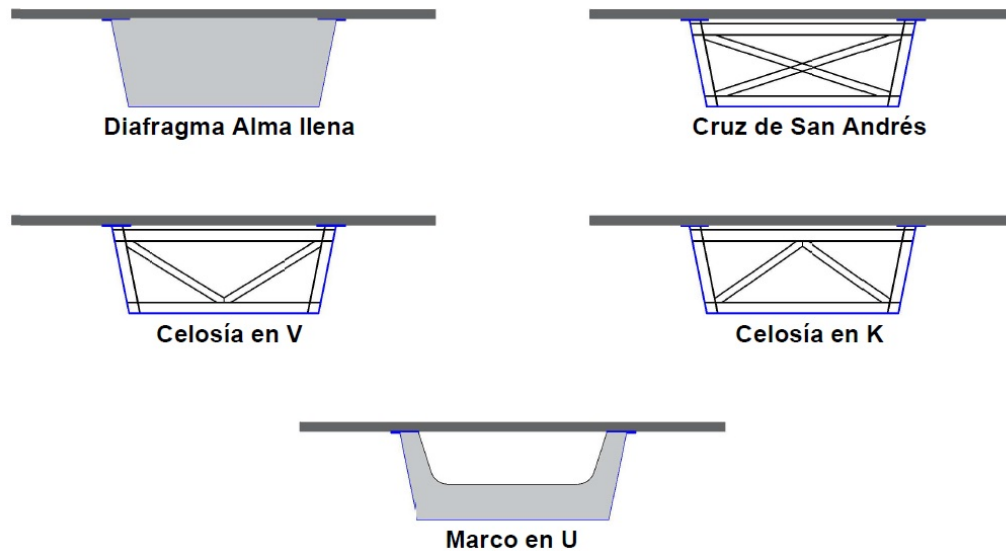


FIGURA 1.2 Tipos de diafragma a considerar

La suma de todos los objetivos anteriores permitirá mejorar la eficiencia del diseño de puentes mixtos de sección cajón en todas sus fases. Durante la fase de diseño conceptual, se espera que las recomendaciones para el control de la distorsión permitan estimar un número de diafragmas y características más ajustadas al diseño final. En la fase de cálculo de detalle, el elemento finito propuesto supondrá una metodología eficiente y refinada para el cálculo de la distorsión. Además, esta facilidad para el cálculo de la distorsión permitirá optimizar el diseño final de los diafragmas, contribuyendo así a diseños más competitivos, ligeros y sostenibles.

1.4 Metodología de la investigación

En el apartado anterior se ha indicado que el objetivo de la investigación es doble. Por una parte, se busca desarrollar un elemento finito que integre el cálculo de la distorsión y los diafragmas, y por otra parte, elaborar unas recomendaciones para el control de la distorsión. Para lograr estos objetivos, se seguirán los siguientes pasos:

- 1) En primer lugar se realizará un estudio bibliográfico para analizar las distintas metodologías sobre el cálculo de la distorsión, incluyendo los elementos finitos propuestos por los distintos autores.

- 2) En segundo lugar se desarrollará un elemento finito aplicable a puentes curvos que integre el cálculo de la distorsión y permita el dimensionamiento longitudinal de tableros de puentes. Para ello, se considerarán los siguientes pasos:
 - Obtención de los modos de deformación del tablero y propiedades de la sección mediante el método de los elementos finitos.
 - Formulación de las ecuaciones que rigen el comportamiento de las vigas curvas, integrando la distorsión con el resto de esfuerzos.
 - Formulación del elemento finito empleando elementos binodales y funciones de forma convencionales.
- 3) En tercer lugar, se llevará a cabo un estudio bibliográfico sobre el cálculo de diafragmas intermedios antidistorsión.
- 4) A continuación se desarrollará la formulación necesaria para el cálculo de algunos de los tipos de diafragmas más comunes, de manera que resulte compatible con el elemento finito propuesto. Asimismo, se propondrán fórmulas simplificadas para el cálculo de dichos diafragmas.
- 5) Se realizará una revisión crítica de los criterios para el dimensionamiento estructural de diafragmas intermedios antidistorsión. Para ello se analizará tanto la literatura técnica existente como la normativa vigente y derogada más relevante. En aquellos aspectos susceptibles de mejora se propondrá una revisión de dichos criterios.
- 6) A continuación se procederá a validar el elemento finito y la formulación de diafragmas mediante la comparación con modelos de elementos finitos tipo lámina. También se compararán los resultados obtenidos a partir del elemento finito con las metodologías clásicas. Además, el proceso de validación se se llevará a cabo para tres geometrías diferentes de puentes.
- 7) Seguidamente se realizará una revisión bibliográfica de los criterios propuestos para el control de la distorsión. En relación con esto se revisarán tanto los límites de la distorsión, que son principalmente las tensiones por debajo de las cuales se puede ignorar la distorsión, como los criterios de espaciamiento y rigidez de diafragmas. Para ello se consultará tanto literatura técnica como normativas.
- 8) Finalmente se realizará un estudio paramétrico variando las dimensiones más relevantes del tablero de un puente. El objetivo es validar las recomendaciones propuestas por los distintos autores para el control de la distorsión y elaborar recomendaciones propias. Los principales parámetros que se pretenden estudiar son la luz, el canto, el ancho del tablero y la curvatura en planta.

1.5 Estructura de la tesis

La metodología descrita en el punto anterior se reflejará en este documento a través de los siguientes capítulos:

- 1) **Introducción.** Este capítulo explica el objetivo de la investigación, enumera los objetivos marcados, describe la metodología que se va a emplear y presenta la estructura del documento.
- 2) **Estado de la cuestión.** En este segundo capítulo se examinan las principales investigaciones y documentos relacionados con los dos objetos de la investigación. En la primera parte se aborda el cálculo de la distorsión, incluyendo las distintas metodologías y una revisión general de estas. En la segunda parte se revisan los criterios académicos y normativos para el control de la distorsión, así como los umbrales de aceptación de dicho fenómeno.
- 3) **Definición del elemento finito.** En el siguiente capítulo se describe la formulación del elemento finito propuesto. En primer lugar se identifican los modos resistentes y su campo de movimientos asociado utilizando las ecuaciones generales que se habrán planteado previamente. Posteriormente se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento de las vigas curvas, incluyendo la distorsión. A partir del campo de movimientos anterior se realiza la formulación del elemento finito. Para ello se emplean los grados de libertad y las funciones de forma que se indican en el apartado correspondiente. Además, se muestra la formulación para la obtención de los resultados y el cálculo de las cargas. Por último se incluye la forma genérica de considerar los diafragmas dentro del elemento finito.
- 4) **Comportamiento y modelización de diafragmas.** El cuarto capítulo se dedica a revisar el cálculo de la rigidez de los diafragmas indicados en la figura 1.2, tanto de manera integrada a partir del elemento finito, como de manera aproximada a partir de fórmulas. También incluye la revisión de los criterios para el dimensionamiento de los diafragmas indicados anteriormente, y la formulación necesaria para obtener los resultados requeridos para el dimensionamiento de dichos diafragmas conforme a las normativas más comunes.
- 5) **Aplicación del elemento finito.** En esta sección se verifica la validez del elemento finito propuesto y la formulación de los diafragmas. Para ello se comparan los resultados obtenidos mediante el uso del elemento finito con formulaciones clásicas y modelos refinados de elementos finitos tipo lámina.

- 6) **Recomendaciones para el control de la distorsión.** En esta sección se presenta el estudio paramétrico, donde se analizan los criterios para la disposición de diafragmas y las características de estos en función de la luz, el canto, el ancho del tablero y la curvatura en planta. Además, se estudia cómo afecta la distorsión al cálculo de fatiga y de los rigidizadores transversales. Por último se indican las tipologías más adecuadas de diafragmas según la geometría de los tableros.
- 7) **Resumen y conclusiones.** El último capítulo de la tesis resume el trabajo realizado y expone las conclusiones más relevantes tanto de los desarrollos teóricos realizados como del cálculo paramétrico. También se incluyen aquellos aspectos susceptibles de revisión y ampliación en futuras investigaciones.

Además de los capítulos principales se han incluido cinco apéndices con el fin de ampliar algunos conceptos desarrollados en el documento principal o proporcionar información complementaria. Estos apéndices son:

- A **Listado de símbolos.** En este apéndice se incluye el listado de acrónimos y símbolos empleados en este documento.
- B **Revisión del cálculo de distorsión en puentes mixtos.** En este apéndice se revisa la formulación para el cálculo de la distorsión empleando la analogía de la viga sobre lecho elástico.
- C **Integrales.** En este apéndice se resumen algunas fórmulas necesarias para el cálculo de las integrales utilizadas en el presente documento.
- D **Ejemplo de cálculo de propiedades de secciones.** En este apéndice se ilustra paso a paso el procedimiento para obtener las propiedades de la sección en el caso de un puente curvo.
- E **Geometrías consideradas en el cálculo paramétrico.** En este último apéndice se recopilan las características geométricas detalladas de los puentes empleados en el estudio paramétrico con el fin de favorecer la reproducibilidad de dicho estudio.

CAPÍTULO 2

Estado de la cuestión

2.1 Introducción

El propósito del presente trabajo es, en última instancia, establecer recomendaciones para el control de la distorsión en puentes mixtos de sección cajón. Para ello, es necesario disponer de una metodología de cálculo adecuada y tener en cuenta el marco normativo vigente. Por lo tanto, en este capítulo revisarán las bases para el cálculo de la distorsión, la evolución del marco normativo relativo a la distorsión y los estudios realizados por los autores para llegar a dicho marco normativo o cumplir con sus requerimientos.

En primer lugar, se realizará una revisión del cálculo de la distorsión y las principales metodologías existentes para su cálculo. Estas metodologías han evolucionado a lo largo de los años, y, de acuerdo con la investigación realizada, las más populares en la actualidad son las basadas en la teoría de vigas y las basadas en elementos finitos. Por esa razón, ambas metodologías se revisarán en detalle. Otras metodologías, tales como los métodos armónicos o las bandas finitas, tuvieron su popularidad en el pasado, pero han quedado en desuso debido al avance de la capacidad de cálculo en los ordenadores y los desarrollos en elementos finitos. Para obtener más información sobre otras metodologías posibles, se recomienda consultar el estado del arte de Khaled M. Sennah [16].

A partir de los métodos de cálculo descritos anteriormente, numerosos investigadores han realizado sus propuestas para el control de la distorsión. Estas propuestas se basan en determinar el espaciamiento máximo entre diafragmas antidistorsión y las condiciones que deben cumplir dichos diafragmas. En la segunda parte del capítulo se recopilarán algunas de estas propuestas. Sin embargo, como paso previo a las propuestas, es necesario definir los límites que permitan determinar cuándo la distorsión está controlada. Por lo tanto, antes de revisar los criterios de espaciamiento, se abordarán los límites de la distorsión.

Finalmente, una vez establecido el marco teórico, se explicará cómo las investigacio-

nes anteriores se han reflejado en las distintas normativas. Para ello se estudiarán desde normativas vigentes, como los Eurocódigos o la AASHTO LRFD, hasta normativas derogadas, que han sido importantes en el pasado y cuyos efectos aún perduran, como la RPX-95 o la EAE-11.

2.2 Cálculo de la distorsión

2.2.1 Introducción

Las características geométricas de los tableros mixtos de sección cajón se adaptan perfectamente a dos de los tipos más frecuentes de cálculos en las oficinas de proyectos hoy en día: los cálculos de acuerdo con la teoría de vigas y el método de los elementos finitos.

Actualmente, la teoría de vigas es una herramienta fundamental para el dimensionamiento de tableros de puentes, ya que la mayoría de las normativas están orientadas a ella. Entre sus principales ventajas se encuentran la rápida implementación, la velocidad de cálculo, la facilidad de procesamiento y la facilidad para las verificaciones de control. Sin embargo, no se puede obviar que la teoría de vigas es una simplificación de la realidad, por lo que son multitud los autores que han propuesto modificaciones con el fin de permitir un mayor grado de precisión. Gracias a estas modificaciones, en la actualidad es posible dimensionar algunos de los puentes más frecuentes utilizando principalmente esta teoría.

Una de las formas más comunes en la actualidad para resolver las ecuaciones de la teoría de vigas, y en general cualquier problema elástico, es mediante el método de los elementos finitos. Este método permite resolver ecuaciones diferenciales mediante la segmentación del elemento o entorno objeto de estudio en elementos de dimensión reducida, también conocidos como elementos finitos. Los elementos finitos pueden ser de tipo viga, bidimensionales o volumétricos. Todos ellos se explicarán en la segunda parte de este apartado.

Finalmente, se realizará un resumen de los distintos métodos de cálculo, donde se compararán las ventajas e inconvenientes de cada uno, y se expondrá el criterio que se va a adoptar para la realización del presente trabajo.

2.2.2 Teoría de vigas

2.2.2.1 Introducción

El objetivo de este apartado es describir la evolución de la teoría de vigas aplicada principalmente al cálculo de la distorsión y de tableros curvos.

En primer lugar, se definirá lo que es un *modo resistente* y su aplicación a tableros de puentes. La definición se realizará de manera muy similar a lo expuesto por autores como Jörg Schlaich [17] o Francisco Cambronero [18]. En este caso, y al ser el objeto principal de esta investigación los tableros de sección cajón, se particularizará su aplicación para este tipo de tableros.

Posteriormente, se explicarán las investigaciones más relevantes relativas a los modos descritos anteriormente. Dichos modos son el cortante-flexión, que se tratará de manera breve ya que no es el objeto principal de la investigación; la torsión; y la distorsión, incluyendo su interacción con la torsión.

Por último, se explicarán otros aspectos vinculados a la teoría de vigas que se consideran de interés, como el cálculo automatizado de propiedades de la sección, la generalización de la teoría de vigas y desarrollos alternativos relacionados con dicha teoría.

2.2.2.2 Descomposición en modos resistentes de un tablero de sección cajón

Antes de exponer los desarrollos realizados en la teoría de vigas, se explicará la respuesta de un tablero de sección cajón sometido a una carga vertical excéntrica. Para ello, se descompondrá dicha respuesta en modos resistentes.

Un *modo resistente* [18] es la relación que existe entre un sistema de fuerzas y/o momentos aplicados sobre la sección y las tensiones normales y/o tangenciales que genera en la misma. Para poder establecer esa relación, es necesario que exista un campo de movimientos asociado. La relación entre el campo de movimientos y los esfuerzos y tensiones que se generan en la viga es lo que se conoce como *modo de deformación*.

Para identificar los modos resistentes que intervienen en la respuesta de un tablero de sección cajón, se tomará como referencia la explicación mostrada en el libro de *Concrete Box-Girder Bridges* de J. Schlaich [17], aunque se modificará ligeramente la forma de describirlo. No obstante, el citado libro es una referencia fundamental si se desea profundizar en la materia.

Como punto de partida, se considerará un cajón rectangular de ancho b_0 y altura h some-

tido a una carga vertical P aplicada a una distancia del centro de giro de la sección e . Esto se puede observar en la figura 2.1.

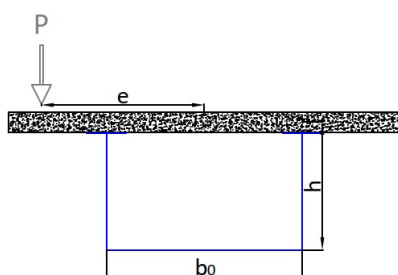


FIGURA 2.1 Estado inicial

La primera hipótesis que se considerará es la de sección indeformable. Bajo esta hipótesis, se debe cumplir que exista equilibrio de fuerzas y equilibrio de momentos. Si se consideran las fuerzas y los momentos independientes entre sí, es posible descomponer el estado inicial en dos estados: uno simétrico donde las fuerzas no generan momento torsor (a.1), y otro antisimétrico donde la suma de fuerzas es cero pero existe un momento torsor equivalente al del estado inicial (a.2). Dicha descomposición se muestra en la figura 2.2.

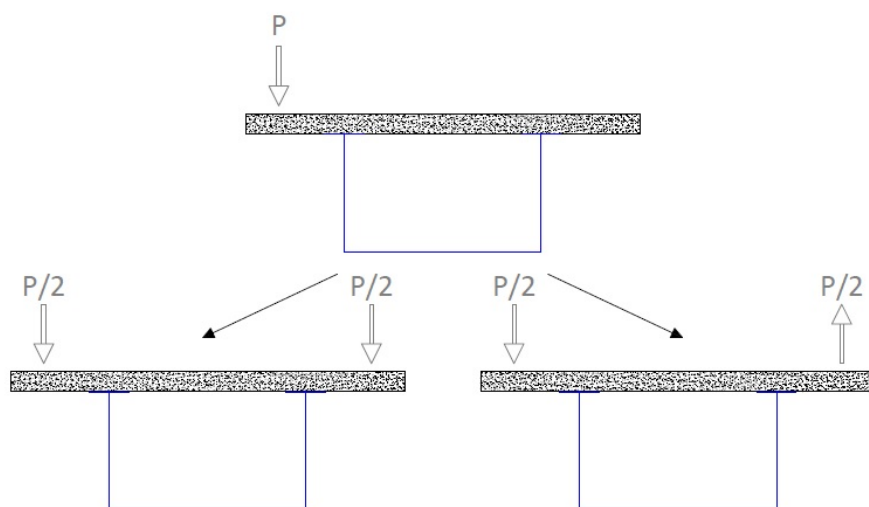


FIGURA 2.2 Estado simétrico (a.1) y estado antisimétrico (a.2)

El estado simétrico está relacionado con el modo resistente de cortante-flexión. En el caso de los cajones, las tensiones tangenciales en las alas son las que equilibran principalmente la fuerza vertical aplicada. Por lo tanto, para poder introducir la carga en las alas, el estado simétrico se descompone en un cortante aplicado directamente en las alas, que se corresponde con el modo resistente de cortante-flexión (b.2), y un estado de flexión transversal resultante de la transferencia de la carga aplicada desde un punto cualquiera de la tabla superior a las alas (b.1). Lo anterior se ilustra en la figura 2.3.

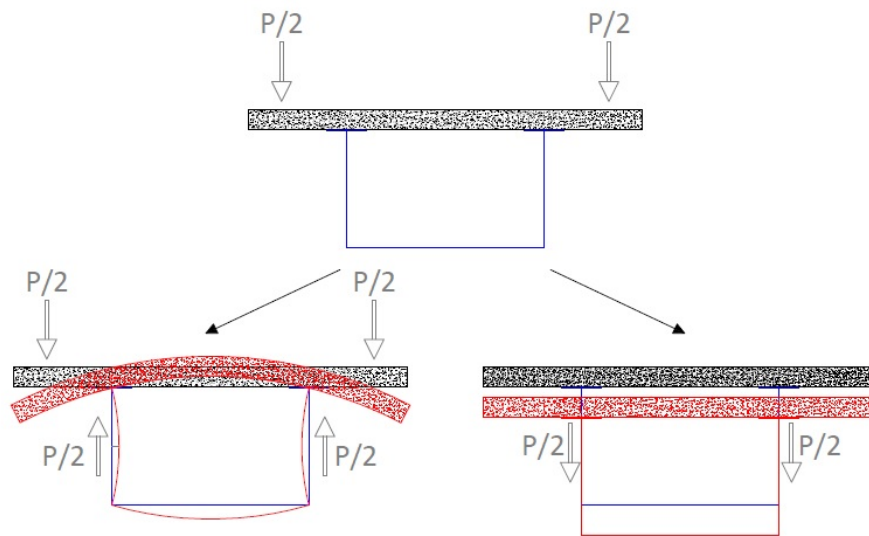


FIGURA 2.3 Flexión transversal (b.1) y cortante-flexión (b.2)

El estado antisimétrico está relacionado con la torsión. En primer lugar, se realiza la hipótesis de sección rígida, según la cual el momento torsor aplicado queda principalmente equilibrado por una distribución de tensiones tangenciales a lo largo del perímetro del área encerrada por el cajón. En consecuencia, el estado asimétrico se descompone en dos estados: una distribución de tensiones tangenciales en el perímetro, cuya resultante de fuerzas es nula pero cuya resultante de momentos es el momento torsor, y que es lo que se conoce como torsión (c.2), y otro estado auto-equilibrado (c.1) tanto a nivel de fuerzas como de momentos. Todo ello se ha representado en la figura 2.4.

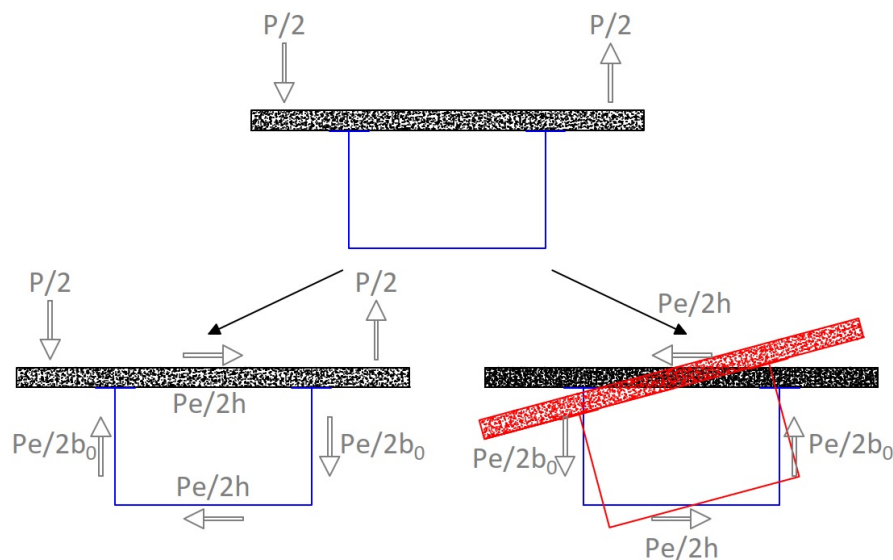


FIGURA 2.4 Estado auto-equilibrado (c.1) y torsión (c.2)

Si se analiza el estado autoequilibrado c.1 como un pórtico en el plano de la sección, se puede observar cómo la sección se deforma transversalmente. Es decir, este estado es la

suma de un estado de flexión transversal y otro que se denomina distorsión. Para separar ambos modos resistentes es necesario bloquear los desplazamientos de las paredes en la dirección de la pared para obtener el estado de flexión transversal (d.1). Luego, se deben aplicar en la sección las reacciones S debidas a los bloqueos del estado d.1 para movilizar las paredes en su dirección y obtener el estado de distorsión (d.2), como se muestra en la figura 2.5.

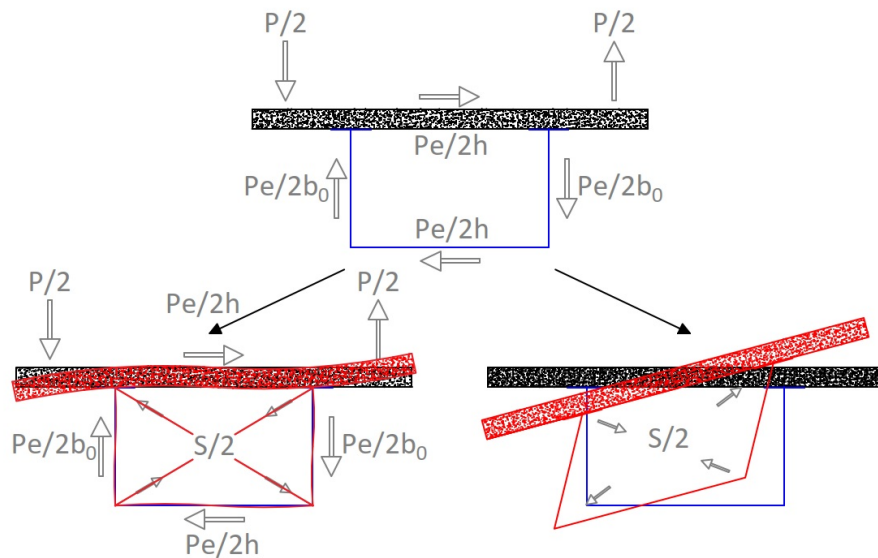


FIGURA 2.5 Flexión transversal (d.1) y distorsión (d.2)

Para entender las reacciones del estado de flexión transversal d.1 que provocan las fuerzas de distorsión en el estado d.2, se descompone el estado d.1 como se indica en la figura 2.6.

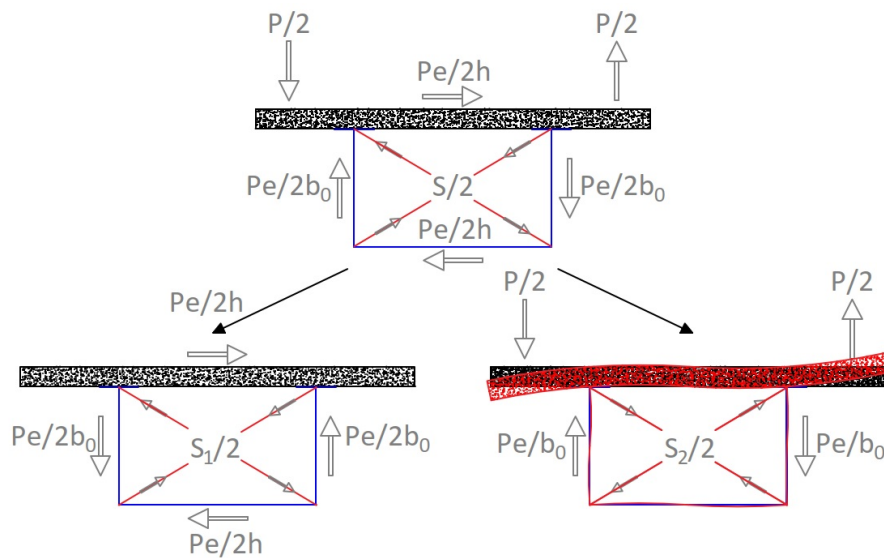


FIGURA 2.6 Torsión en almas (e.1) y torsión en voladizo (e.2)

La descomposición se realiza de manera similar al estado simétrico. El primer paso es

transferir la carga aplicada en cualquier punto de la tabla superior a las almas. Para ello, se supone que la tabla superior está simplemente apoyada sobre las almas y se obtienen las reacciones que genera la carga torsora aplicada. Tomando dichas reacciones, se define un estado donde se aplican directamente las reacciones sobre las almas y se suma al flujo de torsión (e.1). También se define otro estado donde únicamente aparecen las fuerzas externas aplicadas y su reacción en las almas (e.2).

En el primer estado e.1 resulta evidente que, al no existir fuerzas perpendiculares al alma ni momentos, se pueden obtener las reacciones sumando tributariamente las fuerzas en los nodos. El resultado son las fuerzas de distorsión S_1 .

En el segundo estado e.2 domina principalmente la flexión transversal. Sin embargo, también aparecen reacciones en los bloqueos de los nodos que generan fuerzas de distorsión S_2 de sentido opuesto a las fuerzas S_1 . Dependiendo de la flexibilidad de la sección analizada como pórtico, especialmente del alma, estas pueden resultar relevantes o no. Por ejemplo, en el caso de los cajones metálicos, objeto de este trabajo, debido a la gran flexibilidad de las almas, estas reacciones se pueden considerar despreciables.

En resumen, las fuerzas S de distorsión del estado d.2 son el resultado de aplicar las fuerzas transformadas (reacción equivalente en las almas del momento torsor aplicado) sobre las almas S_1 y descontar, cuando la rigidez de marco sea importante, la parte debida a la excentricidad de la carga respecto a las almas S_2 . Nótese que, al ser las fuerzas S_2 de signo contrario a las S_1 , el no considerarlas resulta del lado de la seguridad.

Resumiendo, los modos resistentes de un cajón sometido a una carga vertical excéntrica son la suma de los siguientes estados:

- Cortante-Flexión: b.2.
- Torsión: c.2.
- Distorsión: d.2.
- Flexión transversal: b.1+d.1.

Si añadimos el modo axial a los modos anteriores, se obtienen todos los modos de respuesta de un tablero de un puente.

A continuación, se explicará cada uno de los modos anteriores, a excepción del modo axial y la flexión transversal. Se excluyen estos dos modos debido a su escasa influencia en el cálculo de la distorsión.

2.2.2.3 Cortante-Flexión

Las primeras investigaciones con vigas se remontan a Leonardo Da Vinci y Galileo [19]. Sin embargo no fue hasta el siglo XVIII, con las investigaciones de Leonhard Euler y James Bernoulli [20], y principios del siglo XIX, con el trabajo de Navier, cuando comenzó a establecerse la teoría de vigas [19]. La teoría quedó reflejada en el libro de Navier [21], que resume las lecciones de resistencia de materiales impartidas en L'École de Ponts. En el libro, se establece la conocida como hipótesis de Navier, según la cual todas las secciones planas perpendiculares a las fibras antes de la deformación permanecen planas y perpendiculares a las fibras después de la deformación. Esta hipótesis, junto con la de comportamiento elástico, permite expresar las tensiones en una viga respecto a sus ejes principales de inercia como:

$$\sigma_z = \frac{F_z}{A} - x \cdot \frac{M_y}{I_y} + y \cdot \frac{M_x}{I_x} \quad (2.1)$$

Además, la hipótesis anterior permite calcular la flecha en una viga (u_y) aplicando la relación entre el momento (M_x) y la variación del giro (θ_x), que se asume inverso a la curvatura de la viga, de acuerdo con la hipótesis de Euler-Bernouilli.

$$M_x = EI_x \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial z} = EI_x \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

Lo expuesto anteriormente permite el cálculo de vigas esbeltas. Sin embargo, en vigas de gran canto es necesario considerar el cortante. Por ese motivo, el siguiente gran avance en el cálculo de la flexión y el cortante se produjo a principios del siglo XX, cuando Stephen Timoshenko [22] incorporó la deformación por cortante al cálculo de flechas. Esto supone que la variación de la flecha ya no depende únicamente del giro, sino también de la deformación por cortante (γ_{yz}).

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \theta_x + \gamma_{yz} \quad (2.3)$$

En la ecuación anterior, el giro y la deformación por cortante se relacionan con el momento (M_x) y el cortante (V_y) en la viga del siguiente modo:

$$M_x = -EI_x \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial z}, \quad V_y = GA_y \cdot \gamma_{yz} \quad (2.4)$$

Donde A_y es el área de cortante.

La implementación de la deformación por cortante dentro del cálculo con elementos finitos plantea una problemática específica relacionada fundamentalmente con lo que se cono-

ce como *bloqueo por cortante*¹. Este fenómeno consiste en que en elementos muy esbeltos la flecha tiende a ser nula, en lugar de converger con la hipótesis de Euler-Bernoulli. Sin embargo, esto no impide que algunos de los software mas populares en el cálculo de puentes, como Sofistik [24], Midas [25] o SAP 2000 [26], incorporen dicha deformación.

Uno de los últimos de los grandes desarrollos en el cálculo de cortante y flexión en tableros de sección cajón se dio en 1946, cuando Eric Reissner [27] sentó las bases para el cálculo del arrastre por cortante en vigas de sección cajón. Para ello, incorporó al cálculo de la viga un alabeo longitudinal proporcional al cortante en la sección.

La solución analítica del arrastre por cortante se obtuvo desde un principio. Sin embargo, su resolución empleando el método de los elementos finitos no es posible para la mayoría de los casos. Los motivos los explica F. Cambroner en detalle en su tesis [18], pero de manera muy resumida, la complejidad radica en que la resolución de la ecuación diferencial empleando el método de los elementos finitos requiere que haya continuidad en las derivadas primeras de la flecha. Sin embargo, esta continuidad no puede existir cuando existen apoyos intermedios o cargas puntuales. La razón de dicha falta de continuidad está en que si se sustituye la relación entre el cortante y su deformación de la ecuación 2.4 en la ecuación 2.3, se observa que la relación entre la derivada primera de la flecha y el cortante es proporcional. Por lo tanto, las discontinuidades en el cortante que introducen tanto los apoyos intermedios como las cargas puntuales suponen discontinuidades en la variación de la flecha.

Esta complejidad para implementar el arrastre por cortante en elementos finitos ha llevado a que, actualmente, no se encuentre implementado su cálculo directo en la mayoría de software comerciales mas populares. Sin embargo, son varios los autores que han propuesto elementos que incorporan el arrastre por cortante de manera simplificada, para lo cual emplean distintas hipótesis. Por ejemplo F. Cambroner en su elemento B3N [18] incorpora el arrastre por cortante como una función de intensidad, basado en el trabajo de Laudiero y Savoia [28]. Otros autores, como Razaqpur y Li [29] o más recientemente Luigino Dezi *et al* [30], han optado por incorporar grados de libertad adicionales asociados a la deformación por cortante.

La complejidad anterior sin embargo no impide que el arrastre por cortante sea considerado en el diseño. Para lograr esto, las normativas utilizan el concepto de ancho efectivo, que consiste en dividir el tablero en zonas en función de su proximidad al apoyo y reducir

¹Si se desea profundizar en esta materia, en el libro de E. Oñate [23] se encuentra ampliamente desarrollada esta problemática, así como diferentes aproximaciones que se pueden realizar para compensar dicho problema

el área de las alas con el fin de igualar la tensión máxima en la viga. Para obtener dicha reducción, el Eurocódigo EN1993-1-5 [31], por ejemplo, se basa en el trabajo de Gerhard Sedlacek [32], que realizó un cálculo paramétrico para distintos casos de carga típicos [33].

En cuanto al arrastre por cortante en vigas curvas, Hiroshi Nakai, en su libro de 1988 [34], se basa en trabajos desarrollados en Japón para concluir que se puede asumir que el ancho eficaz en una viga curva se puede aproximar al de una viga recta.

2.2.2.4 Torsión

Uno de los pioneros en el cálculo de la torsión y de las vigas curvas fue Barré de Saint-Venant, quien en 1853 [19] estableció las bases del cálculo a torsión en su libro *Mémoire sur la torsion des prismes* [35]. En dicho libro se planteó, en primer lugar, el campo de movimientos asociado a la torsión, donde se incluyó el concepto de alabeo como una función dependiente de la sección multiplicada por una función de intensidad, la cual a su vez depende de la variación del giro. Posteriormente, y aplicando las ecuaciones de la elasticidad que se habían desarrollado unos años antes en Francia, derivó la rigidez a giro de la sección para algunas secciones típicas.

En lo que se refiere a la torsión mixta, no fue hasta principios del siglo XX cuando S. Timoshenko aparentemente [36] resolvió por primera vez el problema de dicha torsión, aunque al estar estudiando secciones doble T, lo llamó «torsión con flexión de alas».

Sin embargo, el desarrollo de la teoría de la torsión mixta aplicada a cualquier sección abierta de paredes delgadas no se dio hasta mediados del siglo XX, cuando Vasily Zacharovich Vlasov [37] desarrolló la teoría de secciones de pared delgada, que ha supuesto uno de los últimos grandes desarrollos en la teoría de vigas. En dicha teoría se introducen conceptos como las coordenadas sectoriales, que aún se usan en el cálculo de torsión, y también se incluyen las ecuaciones que rigen el comportamiento de las vigas curvas. Además, la premisa de la que parte, que consiste en que una de las dimensiones del elemento es muy inferior al resto, se ajusta en la mayoría de los casos a lo observado en los puentes de sección cajón.

Aplicando la teoría de Vlasov, la ecuación diferencial que rige la torsión en una viga recta tanto abierta como cerrada es:

$$EI_t \cdot \theta_z^{IV} - GJ_t \cdot \theta_z^{II} = m_t \quad (2.5)$$

Donde el término I_t se refiere a la inercia al alabeo de la sección, el término J_t se refiere módulo torsional y el término m_t a la carga torsora.

Usando los términos anteriores, las tensiones longitudinales debidas a la torsión no uniforme se pueden expresar como:

$$\sigma_z = E \cdot w_t \cdot \theta_z^{II} = \frac{B_t}{I_t} \cdot w_t \quad (2.6)$$

Donde se introducen los conceptos de bimomento (B_t) y alabeo (w_t), que resultan análogos al momento para el cálculo de la flexión y a la distancia a la fibra neutra respectivamente.

En cuanto a las vigas curvas, el libro de H. Nakai [34] detalla cómo afecta la curvatura en planta de las vigas a la torsión, incluyendo la torsión alabeada, y proporciona fórmulas para su cálculo.

El libro de H. Nakai también incluye una investigación previa realizada en 1977 junto con Conrad P. Heins [38] que define el umbral a partir del cual se pueden ignorar las tensiones longitudinales debidas a la torsión. Este umbral se define como:

$$\kappa = L \cdot \sqrt{\frac{GJ_t}{EI_t}} > \min(10 + 40 \cdot \frac{R}{L}, 30) \quad (2.7)$$

Donde κ adopta los siguientes valores aproximados según los autores:

- Tableros de vigas doble T: $\kappa \approx 0.5 - 3$
- Tableros de múltiples vigas cajón: $\kappa \approx 3 - 10$
- Tableros de sección cajón multicelulares: $\kappa \approx 10 - 30$
- Tableros de sección cajón unicelulares: $\kappa \geq 30$

Es decir, en tableros unicelulares de sección cajón no se debería considerar la torsión no uniforme. No obstante, esto se discute en el apartado 2.2.2.6.

En cuanto a la implementación dentro de elementos finitos, cualquier elemento de viga tridimensional incorpora al menos la torsión de Saint-Venant. Algunos software comerciales como Sofistik o Midas también incorporan la posibilidad de un séptimo grado de libertad opcional correspondiente a la torsión alabeada, pero, al menos en el caso de Sofistik, este no se puede activar en el caso de vigas curvas. Sin embargo, la mayoría de los autores citados en el presente trabajo que han desarrollado elementos finitos curvos incorporan la torsión alabeada.

2.2.2.5 Distorsión

La deformabilidad de la sección es un fenómeno que se ha estudiado desde el siglo XX. Una revisión histórica de este fenómeno se puede encontrar en detalle en la tesis de Javier Pascual [3]. Sin embargo, se resumirán a continuación alguno de los hitos más importantes.

Los primeros estudios que tuvieron en cuenta la deformabilidad de la sección se remontan a los años 30, y se realizaron en el ámbito aeronáutico. Concretamente, Hans Ebner [39] en 1934 propuso un método para el cálculo de tensiones en alas de aviones donde emplea vigas equivalentes con el fin de calcular las tensiones por distorsión de la sección. El método fue extendido a puentes por F. Resinger en 1959 y B. Richmond en 1966 [40]. Esta última constituye una de las primeras aproximaciones rigurosas al cálculo de la torsión alabeada y la distorsión en puentes mixtos con diafragmas. En 1968, D. C. Dalton junto con B. Richmond aplicaron el método anterior a secciones trapezoidales [41].

Sin embargo, los métodos anteriores han quedado en desuso en detrimento de la ecuación general de la distorsión en tableros de sección cajón. Dicha ecuación fue propuesta prácticamente en paralelo, pero de forma independiente, por Richard N. Wright [11] y Ryszard Dabrowski [12] a finales de los años 60.

La ecuación general de la distorsión se puede expresar de manera genérica en función de la intensidad de la distorsión (ξ) como:

$$EI_d \cdot \xi^{IV} + E_s K_d \cdot \xi = m_d - \eta \cdot \frac{M_x}{R} \quad (2.8)$$

Donde EI_d es la rigidez debida al alabeo de la viga, $E_s K_d$ es la rigidez de marco de la sección, m_d es la carga distorsora aplicada y η es un coeficiente que relaciona el momento flector M_x en la sección con la carga distorsora para una viga de radio en planta R .

Se puede observar claramente cómo la ecuación diferencial de la distorsión se corresponde con la de la viga sobre lecho elástico. Por lo tanto, el cálculo de la distorsión empleando su ecuación también se conoce como la analogía de la viga sobre lecho elástico. Comparando con dicha viga sobre lecho elástico, se puede identificar que la flexión en la viga se asimila al alabeo debido a la distorsión, el propio lecho elástico a la rigidez de marco de la sección, y tanto la carga distorsora como la carga debida a la curvatura son las cargas que se aplican en la viga. Además, en el caso de emplearse diafragmas antidistorsión, estos se asimilan a apoyos elásticos puntuales en la viga de rigidez K_D . Todo ello se ilustra en la figura 2.7.

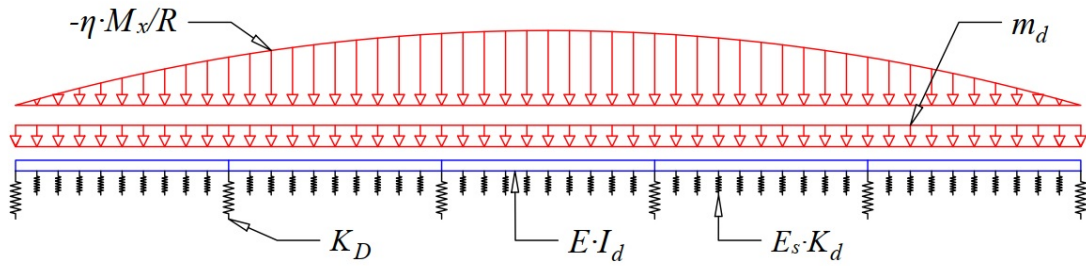


FIGURA 2.7 Viga sobre lecho elástico

Para caracterizar la viga sobre lecho elástico, los autores han empleado diversas formulaciones. Estas permiten obtener los parámetros de rigidez en un puente de sección cajón que se asignan tanto a la viga como al lecho elástico, así como a los diafragmas si los hubiera. La principal diferencia entre formulaciones es el movimiento que se toma como referencia. Las formulaciones más populares utilizan la deformación angular unitaria (γ_d), el movimiento vertical en el vértice superior del alma (ψ_d) o el movimiento en la dirección del alma (V_s). Las tres se ilustran en la figura 2.8.

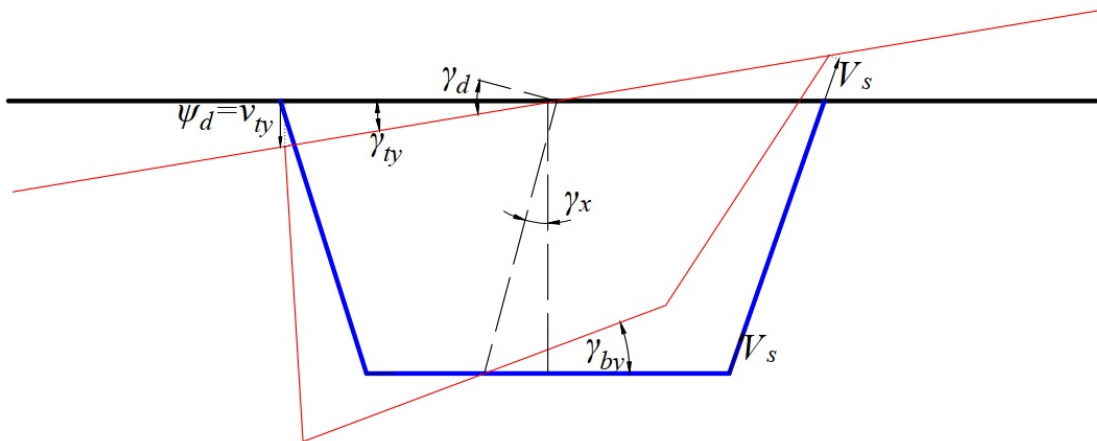


FIGURA 2.8 Movimientos de referencia para la distorsión

Los autores vinculados a cada formulación, así como sus limitaciones, se explican a continuación. Sin embargo, si se desea profundizar en mayor detalle, en el apéndice B se explica la relación entre formulaciones y se aclaran algunos de los comentarios realizados.

■ Deformación angular unitaria (γ_d)

Esta formulación fue originalmente propuesta por R. Dabrowski en su libro *Curved Thin-Walled Girders. Theory and Analysis* [12]. En dicho libro se define la ecuación general de la distorsión para una viga curva, incluyendo todos los términos de la ecuación 2.8. El alabeo y la carga distorsora aplicada se definen en dicho libro

tanto para secciones rectangulares como para secciones trapezoidales, mientras que la rigidez de marco y el coeficiente que relaciona el momento flector con la curvatura, que en adelante también denominará coeficiente de Dabrowsky, se definen solo para secciones rectangulares. No se han identificado fórmulas para la obtención de la rigidez de los diafragmas.

L. F. Boswell y S. H. Zhang completaron en 1984 [42] la formulación anterior añadiendo algunas consideraciones. En primer lugar, diferencian entre cargas de distorsión verticales y horizontales, ya que, aunque ambas son momentos torsores en última instancia, en el caso de las secciones trapezoidales el equilibrio entre las fuerzas internas y externas en los nodos varía. También extienden la formulación a cajones multicelulares, si bien la rigidez de marco indican que debe calcularse mediante un cálculo por ordenador, ya que no proporcionan ninguna fórmula². Por último, también S. H. Zhang propone una aproximación del coeficiente de Dabrowsky en un artículo posterior [44], que define como:

$$\eta = \frac{0.5}{I_x} \cdot \frac{b_b}{b_s} \int_A y \cdot (y - y_t) \cdot dA \approx \frac{0.5}{\omega} \cdot \frac{b_b}{b_s} \quad (2.9)$$

Donde y_t es el centro de esfuerzos cortantes relativo al centro de gravedad de la sección y ω es la relación entre la inercia eficaz y la inercia completa de la sección.

El cálculo del coeficiente η mostrado anteriormente asume un comportamiento lineal de la deformación de las paredes, lo cual no se corresponde con las pruebas realizadas y no queda del lado de la seguridad en ciertos casos. Además, en el apéndice B se demuestra que el ratio entre anchura inferior y superior del cajón debería haberse tomado a la inversa ($b_b/b_s \rightarrow b_s/b_b$).

Posteriormente, la formulación de Dabrowsky ha sido ampliamente empleada por autores asiáticos. H. Nakai y Chai Hong Yoo en su libro de 1988 *Analysis and Design of Curved Steel Bridges* [34] recogen toda la formulación de Dabrowsky y lo completan con fórmulas para algunas de las tipologías de diafragmas más comunes en secciones rectangulares, como son el diafragma de alma llena, el diafragma en Cruz de San Andrés, el diafragma en V o el diafragma en K, aunque en este último se considera únicamente que el perfil superior es infinitamente rígido. Además, C. H. Yoo publicó un artículo en 2015 [2] donde, a pesar de estar enfocado a secciones trapezoidales, se mantienen las limitaciones a secciones rectangulares tanto del coeficiente de Dabrowsky como de la rigidez de marco, si bien esta última lo justifica

²En el caso de secciones multicelulares rectangulares Nam-Hoi Park en 2005 [43] propuso una fórmula para su cálculo

alegando que su influencia en el caso de los puentes mixtos resulta despreciable. Sin embargo, en dicho artículo se incorpora la influencia de las platabandas superiores en el alabeo de la sección y también se proporcionan fórmulas para el cálculo de la rigidez de los diafragmas en secciones trapezoidales, aunque estas últimas infravaloran la rigidez de acuerdo a las pruebas realizadas (B.5.4). El motivo de dicha infravaloración aparentemente está en que el autor parece asumir que la deformación angular en la losa superior es igual a la del ala inferior, cosa que no sucede en las secciones trapezoidales, y por lo tanto el trabajo que desarrollan los diafragmas antidistorsión, para cualquiera de las tipologías, es mayor, lo que redundaría en una mayor rigidez real de los diafragmas.

En resumen, de acuerdo con la bibliografía consultada, la formulación propuesta por R. Dabrowsky es una de las más populares. Sin embargo, no se ha encontrado un cálculo refinado en secciones trapezoidales ni de la rigidez de marco, ni el coeficiente de Dabrowsky, ni la rigidez de los diafragmas.

■ **Deformación vertical unitaria (ψ_d)**

Esta es la formulación propuesta originalmente por R. Wright [11] para vigas rectas de sección trapezoidal. Aunque la formulación es completa y contiene todos los parámetros necesarios para el cálculo según la analogía de la viga sobre lecho elástico, resulta compleja y difícil de seguir [2]. Por esta razón, C. P. Heins y Dann H. Hall elaboraron la Guía de Aplicación de Bethlehem para el Diseño de Puentes de Acero [45]. Sin embargo, a pesar de la guía, la formulación sigue resultando confusa, ya que en lugar de dejar claros los distintos parámetros que intervienen en la ecuación, define varios parámetros auxiliares orientados al empleo de ábacos para la resolución de la ecuación que él mismo define. Esto se traduce, por ejemplo, en que en las pruebas realizadas para esta formulación la rigidez de marco calculada es la mitad que la obtenida empleando el método energético para el mismo grado de libertad, por lo que no está claro que carga está adoptando al emplear la analogía, ya que los ábacos conectan directamente el torsor con la solución. La respuesta, y de acuerdo con Colin J. Billington [46], es que R. Wright considera únicamente media sección en su cálculo.

La formulación anterior fue completada por Vladimír Kristek en 1970 [47], cuando extendió su aplicación a puentes de canto variable. Además, en su tesis [46], C.J. Billington propuso un coeficiente aproximado para tener en cuenta la distorsión causada por el momento flector cuando el puente es curvo en planta.

En el artículo de R. Wright se incluyeron las rigideces de los diafragmas para las mismas tipologías que se indican en el caso de H. Nakai. Aunque su formulación es clara, la tesis C.J. Billington demuestra con mayor nitidez algunas de las fórmulas que propuso R. Wright. Para obtener la rigidez de los diafragmas de alma llena se basó su rigidez en una sección rectangular, donde actúa a cortante puro, con la de un diafragma en cruz. Por lo tanto, la rigidez de los diafragmas de alma llena en secciones trapezoidales es una simplificación. Las demás fórmulas se consideran precisas. No obstante, aún no se han actualizado las formulaciones de rigidez de diafragmas antidistorsión con el fin de simplificarlas.

A pesar de ser una formulación más completa que la de R. Dabrowsky, su popularidad ha sido menor en parte debido a su complejidad inicial. Además, no se ha definido un coeficiente de Dabrowsky refinado para ninguno de los tipos de sección.

■ **Deformación unitaria en el alma (V_s)**

Los orígenes de esta formulación no están claros, ya que se recogen en libros que no indican claramente la bibliografía empleada. En cualquier caso, esta formulación se encuentra extensamente explicada para el caso de tableros de hormigón sin diafragmas en el libro de J. Schlaich *Concrete Box-girder Bridges* [17]. En este libro, al igual que en el caso de R. Wright, se recogen todos los parámetros necesarios para el cálculo de una viga recta.

Luis Viñuela recogió esta formulación en 1992 En su libro [48], adaptándola a los puentes metálicos y mixtos. También completó la formulación proporcionando fórmulas para calcular la rigidez de los diafragmas. Estas fórmulas parecen haber sido adaptadas de la formulación de R. Wright anteriormente descritas, ya que emplean los mismos parámetros. Sin embargo, el factor que aplica para pasar de una formulación a otra es exacto para secciones rectangulares, pero, debido a una simplificación realizada, tiende a sobrevalorar la rigidez conforme la forma trapezoidal del cajón se hace más acusada.

Sin embargo, el mayor problema que plantea esta formulación es que no se puede aplicar a puentes curvos, ya que no se ha encontrado en la literatura un parámetro que relacione la carga distorsora a aplicar debida a la curvatura en planta con el momento flector actuante en la sección.

En resumen, ninguna de las formulaciones revisadas se puede considerar cerrada para secciones trapezoidales. Por esta razón, en el apéndice B se ha desarrollado una formu-

lación que engloba todas las anteriores y que permite el cálculo de todos los parámetros con precisión.

No obstante, las formulaciones anteriores comparten algunas hipótesis idénticas para la obtención de las funciones de alabeo, lo que implica que las formulaciones son proporcionales entre sí. Estas hipótesis son:

- La resultante de tensiones longitudinales debidas al alabeo (w_d) y momentos en la sección es nula:

$$\iint E \cdot w_d \cdot dA = \iint E \cdot w_d \cdot x \cdot dA = \iint E \cdot w_d \cdot y \cdot dA = 0$$

- Cuando el alabeo es libre, no existe deformación tangencial en la sección:

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w_d}{\partial s} - u_{ds} = 0$$

Además, al igual que sucedía en el caso de la torsión alabeada, la tensión debida a la distorsión también se puede expresar a partir de la función de alabeo como:

$$\sigma_z = E \cdot w_d \cdot \xi^{II} = -\frac{B_d}{I_d} \cdot w_d \quad (2.10)$$

Donde también se emplea el concepto de bimomento (B_d).

La deformación por cortante vinculada a la distorsión fue planteada por el propio R. Dabrowsky en su libro original [12]. Sin embargo, según indica J. Pascual [3], varios autores coinciden en señalar que su influencia en el caso tableros de sección cajón mixtos es escasa. Además, investigaciones más recientes [49] llegan a la misma conclusión.

En cuanto a la implementación de la distorsión dentro de elementos finitos, la mayoría de los software comerciales no lo incluyen como grados de libertad adicionales dentro de elementos tipo viga. Sin embargo, sí incluyen elementos tipo viga sobre lecho elástico, por lo que el cálculo de la distorsión empleando la analogía de la viga sobre lecho elástico es sencillo empleando software comerciales. A nivel académico, sin embargo, existen varios elementos finitos tipo viga que incorporan la distorsión, como se verá en el apartado 2.2.3.2.

Además de los elementos finitos, existen autores que han propuesto algoritmos de cálculo que incorporan la distorsión. Por ejemplo, en 1976 C. P. Heins y James C. Oleink [50] propusieron un programa para el cálculo de puentes curvos de sección cajón que incorpora la distorsión empleando la formulación de Dabrowsky, y que resolvía la

ecuación diferencial de la distorsión empleando diferencias finitas. Más recientemente, en 1993, B. Kermani y P. Waldron propusieron otro algoritmo [51] basado en el método matricial de estructuras, que también resuelve la ecuación de R. Dabrowsky, pero solo para vigas rectas.

2.2.2.6 Interacción Torsión-Distorsión

En la literatura referente a la distorsión expuesta en el apartado anterior, esta se trata de manera desacoplada con el resto de esfuerzos, con la única excepción de los momentos flectores en vigas curvas, que se tratan como una carga externa. Sin embargo, las funciones de alabeo de torsión y distorsión, de acuerdo a las teorías anteriormente indicadas, no son ortogonales entre sí, por lo que existe cierta interacción entre ambas.

En los tableros de sección cajón, lo habitual es asumir que las tensiones causadas por el alabeo debido a la torsión son despreciables. Por esta razón, las tensiones causadas por el alabeo antimétrico de la sección se las conoce como distorsión. La hipótesis anterior ha sido corroborada por autores como H. Nakai, como se expuso en el apartado 2.2.2.4. No obstante, en ciertos casos, especialmente en puentes de canto reducido, despreciar las tensiones por torsión alabeada no es adecuado. Por ejemplo, si se considera un tablero recto de sección rectangular con un ancho de 12 m, una luz de 30 m, esbeltez de $L/25$ y espesores de 25 cm en la losa y 12 mm en las chapas, la tensión por torsión alabeada puede llegar a los 20 MPa, lo cual no es despreciable en absoluto. Sin embargo, también es cierto que conforme aumenta el canto disminuye dicha tensión, y para luces de 50 m, manteniendo las dimensiones anteriores, la tensión ya decae a la mitad. En cuanto al efecto de la curvatura en planta Li Guohao [13] indica que la influencia en puentes rectos de la torsión no uniforme llega al 5 % según sus cálculos, por lo que se puede ignorar. Sin embargo, en puentes curvos se puede llegar al 20 %, por lo que se debe considerar la torsión no uniforme.

Sin embargo, al considerar las tensiones longitudinales debidas a la torsión, es importante tener en cuenta que sumar las tensiones debidas a la torsión alabeada a las debidas a la distorsión puede llevar a errores. Según las pruebas realizadas, la suma de ambas tensiones sin tener en cuenta la interacción puede llevar a sobrevalorar o infravalorar las tensiones finales. Por lo tanto, si se desean considerar ambos alabeos se debe considerar su interacción.

Varios autores han revisado de la teoría de la distorsión considerando su acoplamiento con la torsión. En 1983, S. H. Zhang [42] propuso aplicar un coeficiente calculado iterativamente a la rigidez de la sección a torsión. Por su parte, L. Guohao [13], en 1987, planteó

la ecuación diferencial teniendo en cuenta la interacción entre alabeos, aunque para su resolución analítica desacopló ambos efectos. Asimismo, tanto Lando Menastri [52] en 1991 como Jeppe Jönsson [53] en 1999 propusieron formulaciones que consideran dicha interacción.

Tomando como referencia el trabajo de F. Cambroner [18], la interacción entre torsión y distorsión en una viga recta se define de manera genérica como:

$$\begin{aligned} EI_t \cdot \theta_z^{IV} - EI_{td} \cdot \xi^{IV} - GJ_t \cdot \theta_z^{II} - GJ_{td} \cdot \xi^{II} &= m_t \\ E_t \cdot K_d \cdot \xi - EI_{td} \cdot \theta_z^{IV} + EI_d \cdot \xi^{IV} - GJ_{td} \cdot \theta_z^{II} - GJ_d \cdot \xi^{II} &= m_d \end{aligned} \quad (2.11)$$

Donde I_{td} representa la interacción entre alabeos y J_{td} la interacción entre tensiones tangenciales. También J_d representa la rigidez debida a la deformación tangencial por distorsión.

Si se siguiera la teoría clásica de la distorsión, no existiría deformación tangencial vinculada al alabeo libre por distorsión, y por lo tanto $J_d = J_{td} = 0$. Sin embargo, tanto J. Jönsson como F. Cambroner replazan la hipótesis de deformación tangencial nula en la obtención de las propiedades de distorsión por la hipótesis de interacción entre alabeos nula, que se traduce en $I_{td} = 0$. La principal ventaja de este cambio es que permite la resolución analítica del sistema de ecuaciones que define la interacción entre torsión y distorsión, pero su principal inconveniente es que los parámetros obtenidos no permiten el cálculo aproximado de la distorsión de manera independiente, ya que se alejan totalmente de la teoría clásica.

De acuerdo con la bibliografía consultada, los únicos autores que han implementado la interacción entre torsión y distorsión dentro de su elemento finito han sido L. Guohao [13] y F. Cambroner [18].

2.2.2.7 Propiedades de la sección

Los cálculos descritos anteriormente requieren la obtención de las propiedades de las secciones, lo cual puede ser una tarea costosa. Por esta razón, varios autores han propuesto algoritmos que permiten el cálculo de dichas propiedades.

Uno de los primeros autores en proponer un método para obtener las propiedades de distorsión en una sección de manera automática fue B. I. Maisel en 1985 [54]. Este autor definió una metodología que, mediante ortogonalización, obtenía la función de alabeo de la sección debida a la distorsión, así como su rigidez de marco. Dicha metodología se puede aplicar tanto a secciones unicelulares como multicelulares.

En 1986 C. H. Yoo junto con Samir V. Acra [55] publicaron un algoritmo que permite el cálculo de las propiedades torsionales de vigas multicelulares. Además el propio C. H. Yoo, en el libro que publica junto con H. Nakai [34] en 1988, explica detalladamente la aplicación del cálculo matricial a la obtención de propiedades de las secciones de vigas curvas, aunque se limita al cortante y la torsión. También en dicho libro se realiza una revisión de los programas existentes en Japón para el cálculo de puentes metálicos y mixtos curvos, incluyendo aquellos orientados al cálculo de propiedades.

A finales de los años 80, específicamente en 1989, Steen Krenk junto con Bo Jeppensen publicó un artículo [56] en el que aplicaron el método de los elementos finitos para obtener las propiedades seccionales, y también la distribución de tensiones, en los cálculos de cortante y torsión. La extensión de este método al cálculo de la torsión alabeada y la distorsión fue realizada por J. Jönsson en 1998 [57][58]. Sin embargo, no se ha encontrado ninguna aplicación del método de los elementos finitos al cálculo de propiedades en puentes curvos.

Si se desea profundizar en este apartado, se recomienda al lector a la tesis de F. Cambroneiro [18]. En ella se detallan los pasos para obtener las propiedades de cálculo de secciones aplicando el método de los elementos finitos, así como las distribuciones de tensiones para los modos de cortante-flexión, torsión y distorsión.

2.2.2.8 Generalización

La teoría de vigas generalizada, también conocida como Generalized Beam Theory (GBT), fue presentada por Richard Schardt en 1989 en su libro *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie* [59]. Esta teoría se basa en la discretización de la sección en nodos, el establecimiento de las ecuaciones constitutivas, de equilibrio, y de compatibilidad, y la resolución del problema de autovalores. Las soluciones de este problema son los modos de deformación y alabeos de la sección, que posteriormente se emplean para obtener esfuerzos y tensiones en la viga.

La teoría de vigas generalizada (GBT) ha servido como base para numerosas publicaciones. En particular, cabe destacar el trabajo de Dinar Camotín *et al* en Lisboa que en este siglo han producido numerosas publicaciones relacionadas con la GBT. Estas publicaciones se centran tanto en el cálculo de inestabilidades en perfiles metálicos [60], donde la GBT se ha convertido en una metodología muy empleada, como en el cálculo de estructuras. Por ejemplo, se han desarrollado métodos para considerar la deformación por cortante [61] o la curvatura de las vigas [62]. Además, J. Jönsson, previamente mencionado, junto con otros autores, ha contribuido recientemente al desarrollo de GBT [63][64] partiendo

de los desarrollos anteriormente indicados para torsión y distorsión.

En cuanto a la implementación de este método en software, cabe destacar el elemento desarrollado por Mohammed K. Ferradi y Xavier Cespedes [65] en 2014. Este elemento está implementado dentro del software Pytagore, que, aunque es propiedad de la ingeniería francesa SETEC, se ha comercializado al público general al menos en el pasado. Además, los propios autores de este elemento lo han extendido recientemente a vigas curvas [66].

La principal desventaja de la GBT es que requiere un alto grado de continuidad, lo que dificulta las transiciones entre secciones. Además, la identificación de los modos resistentes que afectan al diseño de la estructura se diluye en aras de una teórica mayor precisión, lo cual dificulta la ingeniería de diseño. Por estas razones, esta metodología apenas se encuentra implementada en software utilizados en oficinas de proyectos, aunque no se puede descartar su uso en el futuro debido a su creciente popularidad.

2.2.2.9 Otros desarrollos

Además los desarrollos anteriormente mencionados, y del método de los elementos finitos que se expone en el apartado 2.2.3, existen otros desarrollos recientes para el cálculo de vigas que merece la pena indicar.

Uno de ellos es la Teoría Unificada de Vigas (UBT), desarrollada en la Universidad Politécnica de Valencia [67]. Aunque en la actualidad solo considera la torsión alabeada, según sus autores, también puede incorporar la distorsión. Otro desarrollo es el Método de Análisis Estructural Hamiltoniano (HSA method) [68][69], desarrollado por Marcello Arici y Michele Fabio Granata, que permite calcular vigas curvas teniendo en cuenta tanto el arrastre por cortante como la distorsión de la sección y la presencia de diafragmas. Para ello, se basan en el artículo de C. H. Yoo de 2015 [2], anteriormente descrito. El principal problema que plantean los métodos anteriores es que son muy teóricos y apenas se han extendido más allá de sus autores.

Por último, cabe destacar las interesantes aportaciones de E. J. Sapountzakis y sus colaboradores, quienes han realizado aportaciones muy interesantes empleando el Método de los Elementos de Frontera (BEM). No obstante también lo combinan con el MEF para compensar la pérdida de eficiencia que en los cálculos de viga tiene el BEM. En 2014 publicaron la obtención de propiedades de la sección mediante BEM [70][71]. Sapountzakis extendió dicho método al cálculo de vigas curvas [72], y, aplicando métodos isogeométricos [73] ha generalizado su aplicación a cualquier curva plana [74]. Este último punto es

de sumo interés, ya que los programas de dibujo basados en herramientas isogeométricas se están popularizando dentro de las oficinas de ingeniería.

Es posible que existan otros desarrollos dentro del ámbito académico además de los aquí indicados, pero se han expuesto aquellos que se consideran más relevantes.

2.2.3 Método de los Elementos Finitos

2.2.3.1 Introducción

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método general para el cálculo de desplazamientos, tensiones y deformaciones en una estructura sometida a cualquier tipo de carga [23]. En este método, la estructura se discretiza en una malla compuesta por elementos unidimensionales -o tipo viga-, bidimensionales, tridimensionales o una combinación de los anteriores, dependiendo del tipo de estructura. En el caso de una estructura elástica sin efectos de segundo orden y sometida a una sollicitación estática, se calcula la estructura empleando un sistema de ecuaciones que relaciona los desplazamientos en los nodos de la malla $\bar{u}$ con las fuerzas aplicadas $\bar{f}$ mediante una matriz de rigidez $\bar{K}$ de la siguiente manera:

$$\bar{f} = \bar{K} \cdot \bar{u} \quad (2.12)$$

Los orígenes del método se remontan a los años 40, y surgió como una extrapolación del método matricial de barras a estructuras continuas. Sin embargo, su gran impulso se dio en los años 60, con la aparición de los ordenadores digitales. Fue también en el año 60 cuando Clough acuñó el término *elemento finito*. Desde entonces, su popularidad no ha dejado de crecer, hasta convertirse hoy en día en una herramienta fundamental para el cálculo de cualquier tipo de estructura, además de resolver otros muchos problemas en el ámbito científico y tecnológico. Si se desea obtener más detalles sobre la historia del MEF y sus capacidades, se recomienda la lectura de libros clásicos como los de O. C. Zienkiewicz [75] o E. Oñate [23].

El objetivo de esta sección es revisar algunos de los elementos finitos más relevantes aplicables al diseño de puentes. En primer lugar, se revisarán los elementos tipo viga, enfatizando en los elementos curvos que incorporan la distorsión de la sección. Posteriormente, se revisará el modelado, las aplicaciones y los inconvenientes al emplear elementos multidimensionales. La formulación de este tipo de elementos excede el alcance del presente trabajo, y además su implementación en software comerciales resulta suficiente para el cálculo de la distorsión según la literatura consultada.

2.2.3.2 Elementos tipo viga

Dentro de los programas comerciales de cálculo de estructuras, los elementos tipo viga más frecuentes se basan en la teoría de vigas de Timoshenko y en la hipótesis de torsión de Saint-Venant. Estos elementos consideran tres grados de libertad asociados a los movimientos y tres grados de libertad asociados a los giros en cada nudo, lo que suma un total de 6 grados de libertad por nudo. Además, dichos elementos son muy similares a los empleados en el método matricial de estructuras.

Aparte de los 6 grados de libertad anteriores, algunos software comerciales incorporan la opción de considerar un séptimo grado de libertad asociado a la torsión no uniforme en ciertos casos. Esto sucede tanto en software más genéricos para el cálculo mediante elementos finitos, como Ansys o Abaqus, como en software orientados al diseño de estructuras de ingeniería civil, como Sofistik, Midas, Lusas o Larsa4D.

No obstante, los programas mencionados anteriormente, que son algunos de los más populares actualmente en el diseño de estructuras según las presentaciones en congresos [76][77], no cuentan con elementos tipo viga con capacidades adicionales a las mencionadas. De los programas consultados, solo Vettone incorpora el alabeo de la sección y la distorsión en vigas rectas, gracias a que su desarrollador F. Cambronero propuso en 2013 un elemento finito que incluía estas capacidades.

En el ámbito académico, son varios los autores que han propuesto elementos finitos con capacidades adicionales a las convencionales. Algunas de estas se orientan al cálculo del alabeo por cortante en tableros rectos [78][79][80], pero en este caso se revisarán aquellos que incluyen la distorsión de la sección, especialmente en vigas curvas.

Aunque en los años 70 ya hubo autores [81][82] que propusieron elementos que incorporaban la distorsión de la sección en tableros curvos, el primer elemento finito considerado relevante en el ámbito de los puentes curvos es el propuesto por **S.H. Zhang en 1983**. Al principio, este elemento lo publicó junto con L. F. Boswell aplicado a tableros de sección cajón unicelulares [83], y posteriormente lo extendió en 1984 junto con L. P. R. Lyons a secciones multicelulares [44]. A continuación, se indican sus principales características:

- **Sección:** Cajón unicelular y multicelular simétrico. Sus propiedades se calculan según la tesis del propio S. H. Zhang.
- **Alineación:** Curva.
- **Cortante y flexión:** Movimientos en las tres dimensiones. Admite deformación por cortante. El arrastre por cortante se considera en las tensiones de flexión median-

te funciones polinómicas de interpolación dependientes del coeficiente de ancho eficaz.

- **Torsión:** Considera la torsión no uniforme
- **Distorsión:** Según formulación de R. Dabrowsky. La rigidez de marco se calcula internamente mediante un modelo de barras de la sección [42]. El coeficiente de R. Dabrowsky se aproxima según Ec. 2.9, y la carga de distorsión debida a los momentos flectores en puentes curvos se calcula de manera iterativa.
- **Diafragmas:** Se deben considerar infinitamente rígidos.
- **Interacción torsión-distorsión:** Proceso iterativo. Se reduce la rigidez a torsión de la sección. Sin embargo, las ecuaciones están desacopladas, y se suman las tensiones debidas a la torsión alabeada y a la distorsión.
- **Grados de libertad:** Movimientos en las tres direcciones, giros en las tres direcciones, variación del giro longitudinal y distorsión y su variación. En total 9 por nodo.
- **Nodos y funciones de forma:** El elemento es trinodal y se interpola mediante funciones de forma polinómicas de grado 5.

Como se puede apreciar, el elemento incorpora todos los elementos necesarios para el cálculo de tableros de sección cajón. Sin embargo, este elemento requiere cálculos iterativos para tener en cuenta la interacción entre la distorsión y el resto de esfuerzos.

En 1987, L. Guohao publicó el libro *Analysis of Box Girder and Truss Bridges* [13], en el que presentó su elemento finito aplicable a una sección cajón con voladizos cualquiera. A continuación se resumen sus principales características:

- **Sección:** Cajón unicelular.
- **Alineación:** Curva.
- **Cortante y flexión:** Movimientos en las tres dimensiones. El arrastre por cortante no se considera.
- **Torsión:** Considera la torsión no uniforme
- **Distorsión:** Según formulación propia.
- **Diafragmas:** Se deben considerar infinitamente rígidos.

- **Interacción torsión-distorsión:** Sí.
- **Grados de libertad:** Movimientos en las tres direcciones, giro en la dirección del eje y distorsión. Derivadas primeras y segundas de los movimientos anteriores. En total 15 por nodo.
- **Nodos y funciones de forma:** El elemento es binodal y se interpola mediante funciones de forma polinómicas de grado 5.

Aunque es un elemento que incluye la torsión y la distorsión acopladas y que no requiere de cálculos iterativos, de acuerdo con Cambroner [18], al incluir las derivadas segundas de todos los movimientos, este elemento tiene un exceso de continuidad, lo cual se desaconseja en el método de los elementos finitos.

El primer elemento que incorporó el cálculo de la distorsión junto con el arrastre por cortante fue el propuesto por **A. G. Razaqpur y H. G. Li en 1994** [84]. Sus principales características son:

- **Sección:** Secciones tipo de una, dos o tres células.
- **Alineación:** Curva.
- **Cortante y flexión:** Movimientos en las tres dimensiones. Se considera deformación y arrastre por cortante mediante grados de libertad adicionales según lo descrito en un artículo anterior [29] de los mismos autores.
- **Torsión:** Considera la torsión no uniforme
- **Distorsión:** Según formulación propia. Admite varios modos de deformación.
- **Diafragmas:** Se deben considerar infinitamente rígidos.
- **Interacción torsión-distorsión:** No. Tampoco los modos de deformación se consideran acoplados entre sí.
- **Grados de libertad:** Movimientos en las tres direcciones, giros en las tres direcciones y variación del giro longitudinal. Para cada modo de distorsión se considera la propia distorsión y su variación. Para el arrastre por cortante se considera el alabeo correspondiente a los voladizos de la sección, el ala superior y el ala inferior. Esto supone que en los cajones unicelulares los grados de libertad son tres. Además, aplicando la condición de simetría en los cajones bicelulares los grados de libertad también son tres, mientras que en cajones tricelulares se requieren de cinco grados de libertad. En total, son 7 grados de libertad por nodo, a los que se han de sumar dos por modo de deformación y entre tres y cinco por arrastre por cortante.

- **Nodos y funciones de forma:** El elemento es binodal, aunque se obtiene por condensación a partir de un elemento trinodal que se interpola mediante funciones de forma polinómicas de grado 5.

A pesar de ser un elemento completo, el hecho de que los modos estén desacoplados entre sí plantea dudas en cuanto a su precisión.

Uno de los primeros autores en considerar la rigidez de los diafragmas combinada con el cálculo con elementos finitos en puentes curvos fue **N. H. Park en 2005** [85]. Este elemento se puede considerar una extensión del elemento recto que propuso en 2003 [86]. Las principales características del elemento son:

- **Sección:** Cajón unicelular simétrico rectangular.
- **Alineación:** Curva.
- **Cortante y flexión:** Movimientos en las tres dimensiones. No se considera deformación por cortante ni arrastre por cortante.
- **Torsión:** Considera la torsión no uniforme
- **Distorsión:** Se emplea la formulación de R. Dabrowsky completa, incluyendo su coeficiente, lo que limita su aplicación a secciones rectangulares. Algunas de las propiedades se obtienen empleando la metodología de Maisel [54][87]. No queda claro como se trata la carga distorsora debida a la curvatura, ya que en la formulación se muestra M_x como una carga.
- **Diafragmas:** Según Nakai y Yoo [34].
- **Interacción torsión-distorsión:** No.
- **Grados de libertad:** Movimientos en las tres direcciones, giros en las tres direcciones, variación del giro longitudinal y distorsión y su variación. En total 9 por nodo.
- **Nodos y funciones de forma:** El elemento es binodal. Al estar desacoplada la distorsión del resto de esfuerzos, el autor emplea funciones de forma basadas en el trabajo de Kang [88] para la flexión y la torsión, y la solución de la ecuación de la viga sobre lecho elástico para la distorsión.

El elemento anteriormente descrito se puede emplear para el cálculo de la distorsión en puentes curvos. No obstante, su autor fundamentalmente lo empleó para el cálculo de fórmulas simplificadas que permitieran aproximar la distorsión, por lo que omite algunos

aspectos relevantes como aclarar como se realiza el cálculo de tensiones. Además, según L. Guohao [13] no se puede omitir el acoplamiento entre torsión y distorsión en puentes curvos.

Por último, si bien se trata de un elemento recto, merece la pena describir las características del elemento propuesto por **F. Cambroner en 2013** [18][89], ya que se considera uno de los más completos. Estas características son:

- **Sección:** Cualquiera
- **Alineación:** Recta.
- **Cortante y flexión:** Movimientos en las tres dimensiones. Se considera deformación por cortante. El arrastre por cortante se tiene en cuenta mediante una función de intensidad.
- **Torsión:** Considera la torsión no uniforme
- **Distorsión:** Sus propiedades se calculan internamente aplicando el procedimiento descrito por J. Jönsson [58] y desarrollos propios.
- **Diafragmas:** No.
- **Interacción torsión-distorsión:** Según J. Jönsson [58].
- **Grados de libertad:** Movimientos en las tres direcciones, giros en las tres direcciones, variación del giro longitudinal, alabeo por cortante en las dos direcciones y distorsión y su variación. En total 11 por nodo.
- **Nodos y funciones de forma:** El elemento es trinodal y se interpola mediante funciones de forma polinómicas de grado 3.

A pesar de las ventajas, que han sido ensayadas con éxito recientemente [90], la falta de desarrollo en la formulación de diafragmas y la falta de extensión a vigas curvas dificultan su aplicación. Además, la ortogonalización de la distorsión respecto del alabeo por torsión puede generar falta de precisión en ciertos casos, como se mostrará en la sección 3.4.5.

Existen elementos más recientes, como el propuesto por V. Verma en 2020 [91]. Sin embargo, no se ha considerado que aporten algo nuevo a lo que se ha expuesto anteriormente.

2.2.3.3 Elementos multidimensionales

Los elementos finitos multidimensionales son actualmente una de las herramientas más potentes y precisas para el cálculo de puentes. Permiten el cálculo tanto lineal como no lineal de estructuras sometidas a fuerzas externas y deformaciones internas. Dichos elementos pueden ser bidimensionales, que en adelante también se denominarán tipo lámina, o tridimensionales, que también se podrán denominar volumétricos.

Su desarrollo, así como su implantación, se encuentra directamente ligado al desarrollo de la computación personal. En la década de los 70 surgieron los primeros modelos de elementos finitos multidimensionales relacionados con tableros de puentes [16]. Estos modelos discretizaban la estructura en unos pocos elementos tipo lámina debido a las limitaciones de cálculo. Conforme las capacidades de cálculo fueron avanzando, las mallas se fueron refinando y se empezaron a emplear elementos volumétricos. Actualmente, gran parte de las investigaciones relacionadas con el comportamiento de tableros incluyen modelos de elementos multidimensionales con un alto grado de discretización. Según las publicaciones consultadas, el objetivo de estos modelos es servir como modelo principal del cálculo, o para contrastar resultados cuando se proponen metodologías simplificadas o ensayos.

Como se ha indicado anteriormente, los elementos finitos que se emplean en el **modelado** de los tableros pueden ser tipo viga, tipo lámina o tipo volumétrico, además de tipo muelle. Lo habitual en modelos refinados, y debido a las características propias de los cajones, es modelar este tipo de estructuras empleando elementos tipo lámina, aunque pueden emplearse otros elementos como se indica a continuación.

Los elementos tipo viga se emplean fundamentalmente para modelar elementos transversales. Por ejemplo, autores como Frank Schanack [92] han empleado elementos tipo viga para modelar las vigas transversales en tableros de sección cajón, y otros como Alejandro Giraldo [10] para el modelado de diafragmas tipo celosía. Sin embargo, no se han encontrado publicaciones recientes donde se modelen las losas y chapas de la sección cajón mediante elementos tipo viga.

Los elementos volumétricos tienen un alto coste computacional, por lo que su uso ha sido limitado históricamente. Además, no han mostrado una ventaja evidente sobre el empleo de elementos tipo lámina en el modelado de chapas metálicas. De hecho, hay numerosas publicaciones [93][94][95][10] que demuestran una buena correlación entre modelos de láminas y ensayos experimentales en chapas metálicas. No obstante, gracias a los avances en computación, en los últimos años se han publicado trabajos donde la losa se ha mode-

lado empleando elementos volumétricos [96]. Incluso se han modelado chapas metálicas con elementos volumétricos [97].

Por último, existen múltiples formas de conectar la losa y el cajón metálico. La manera más simple es prescindir de las platabandas superiores y conectar directamente la losa con el alma metálica [98][99]. Otros autores representan la platabanda superior y la conectan a la losa mediante ligaduras rígidas [95] asumiendo una conexión total. Cuando se desea tener en cuenta la plastificación de los conectadores [10] o el deslizamiento en el interfaz hormigón-acero [100], otra posibilidad es emplear elementos tipo muelle.

En cuanto a sus **aplicaciones**, los elementos finitos multidimensionales se han empleado tanto en el rango elástico como el rango elastoplástico para análisis en rotura.

Dentro de los problemas elásticos, R. S. Nicoletti en 2021 [97] o L. Zhu en 2015 [100] han aplicado estos elementos al estudio del arrastre por cortante. También F. Schanack en 2011 [92] ha estudiado la rigidización transversal, el arrastre por cortante y otros fenómenos locales en tableros de sección cajón empleando elementos tipo viga y tipo lámina. Respecto a la distorsión, destacan las recientes publicaciones de Jeong-Hwa Lee en 2019 [98] y 2021 [99]. En ellas, se realiza un estudio paramétrico de las tensiones por distorsión empleando modelos de láminas, ya que gracias a las capacidades de parametrización y cálculo actuales, se puede abordar dicho estudio en un plazo de tiempo razonable.

Los estudios de rotura de elementos de metálicos también se pueden realizar empleando elementos finitos. Ya en los años 70, y a raíz del colapso del puente Milford Haven durante su construcción, se realizaron varias publicaciones en el Reino Unido sobre el comportamiento de los diafragmas de pila, estudiándolos tanto de manera experimental como mediante el uso de elementos finitos. Un artículo de B. Einarsson de 1982 [101] recopiló un resumen de dichos estudios junto con uno nuevo. Además, los estudios sobre colapso de diafragmas de pila han proseguido con publicaciones como la de T. H. G. Megson en 1995 [93] o Shervin Maleki en 2016 [102].

El colapso de tableros completos también se ha analizado mediante el uso de elementos finitos. En 2002, Praween Chulsilp estudió [94] experimentalmente el colapso de cajones metálicos sometidos a cortante, y cotejó sus resultados con elementos finitos. Además, en 2004, Hyung Keun Ryu [95] estudió un cajón mixto con losas prefabricadas y lo comparó con un modelo de elementos finitos tipo lámina. Más recientemente, en 2017, A. Giraldo defendió una tesis [10] en la UPM donde ensayó a rotura cajones sometidos a flexión, cortante y torsión, y lo comparó con un modelo de elementos finitos realizado en Sofistik. Sin embargo, en dicho estudio no se consideró la distorsión, cosa que sí hizo Quang V.

Vu en 2018 [96], aunque en este último caso no se realizó una campaña experimental.

Finalmente, aunque se han explicado las características y ventajas que ofrecen los elementos finitos multidimensionales, también tienen una serie de **desventajas** que es importante mencionar y que han sido señaladas por autores como Cambronero [18] o Pascual [3].

La primera desventaja es que los resultados son la suma de todos los fenómenos resistentes. Aunque esto aporta una mayor precisión, dificulta la necesaria labor de compresión del funcionamiento de la estructura durante la fase de diseño. Además, a pesar de que cada vez más normativas evolucionan hacia el cálculo con modelos de elementos finitos multidimensionales [103], la mayoría de las normativas en la actualidad están orientadas a elementos tipo viga. Por lo tanto, los resultados deben ser procesados para su tratamiento normativo, con el coste en tiempo que eso implica. Por otra parte, la suma de todos los fenómenos resistentes también incluye efectos locales, que a menudo se omiten en las normativas ya que se tienen en consideración mediante el empleo de detalles constructivos adecuados o cuantías mínimas.

La otra desventaja es que el tiempo de computación, revisión y procesado de resultados es muy superior al de los modelos tipo viga. Para capturar todos los efectos, es necesario recurrir a mallas tupidas, lo cual se traduce en la necesidad de un gran número de grados de libertad que alargan el tiempo de cálculo. Además, durante las fases de diseño, se suelen realizar iteraciones habitualmente, lo que hace que este tipo de modelos sean poco prácticos durante la fase de dimensionamiento. Por otra parte, tal y como se ha indicado anteriormente, es necesario procesar los resultados para su tratamiento normativo, lo que añade una complejidad adicional al proceso, y por ende, más tiempo de cálculo.

2.2.4 Resumen

Los elementos finitos tipo lámina son una herramienta precisa para el diseño de puentes, lo cual ha sido corroborado mediante ensayos experimentales. Sin embargo, su aplicación dentro de oficinas de proyectos no resulta práctica para geometrías convencionales debido al coste en tiempo que implica el modelado, el cálculo y el post-procesado. Por ese motivo, y por el marco normativo vigente, las herramientas más populares dentro de las oficinas de proyectos son las basadas en la teoría de vigas.

Dicha teoría ha experimentado una evolución muy notable desde sus inicios, y en la actualidad la mayor parte de normativas admiten el cálculo de puentes empleando los métodos simplificados de dicha teoría. Una de esas metodologías simplificadas es la analogía de la viga sobre lecho elástico, y permite el cálculo de la distorsión en tableros de sección ca-

jón. No obstante, varios los autores han indicado que en este tipo de tableros la distorsión interacciona con la torsión, y que además la torsión debe tenerse en cuenta en el cálculo de cajones de luces cortas o en tableros con curvatura en planta.

Desafortunadamente, son muy pocos los autores que han propuesto elementos curvos que consideren la interacción entre los modos de flexión, torsión y distorsión en puentes curvos de manera integrada, o dicho de otro modo, sin recurrir a iteraciones. Por ese motivo, uno de los objetivos del presente trabajo es definir un elemento finito que permita considerar la interacción entre todos los modos anteriores de manera directa.

Además, también se ha expuesto que el cálculo del arrastre por cortante plantea una problemática específica en elementos finitos que no ha sido resuelta. Por esta razón, se considera más adecuado emplear la formulación simplificada de la normativa si se desea realizar un cálculo general fuera del ámbito académico.

2.3 Criterios para el control de la distorsión

2.3.1 Introducción

La mayoría de las normativas de puentes mixtos incluyen criterios relativos control de la distorsión. No obstante, dependiendo de la normativa los criterios pueden tener varios enfoques como se explica a continuación.

El criterio más flexible desde un punto de vista del diseño final es fijar un umbral por debajo del cual las tensiones por distorsión se pueden ignorar, pero permitiendo que si el proyectista lo desea, los tableros se puedan dimensionar por encima de dicho umbral considerando la distorsión. Una evolución más restrictiva del criterio anterior consiste en fijar el límite en dicho umbral, e impedir que el proyectista rebase dicho límite. En ambos casos, el proyectista tiene la libertad para adoptar la estrategia para el control de la distorsión que considere más conveniente.

El siguiente paso en restricciones consiste en imponer, además de un límite, un espaciamiento máximo entre diafragmas. Por último, algunas normativas han remplazado el límite por características que deben cumplir los diafragmas antidistorsión, tanto a nivel de resistencia como a nivel de espaciamiento y rigidez. No obstante, dichas características se han obtenido a partir de estudios dentro del ámbito académico, donde se han tomado los umbrales de distorsión como referencia en muchos casos.

Debido a la importancia que tienen los umbrales de distorsión, la primera parte de este

apartado se centrará en el estudio de los mecanismos resistentes involucrados en la distorsión, y cómo dichos mecanismos se han reflejado en forma de umbrales o límites que, en muchos casos, permiten ignorar los efectos de la distorsión. A continuación, se explicarán algunas de las propuestas relativas al espaciamiento máximo y rigidez que deben cumplir los diafragmas antidistorsión, y que se han realizado dentro del ámbito académico. Por último, se resumirá como se han reflejado las propuestas anteriores relativas tanto a umbrales de distorsión, como a características y espaciamiento de los diafragmas, dentro de algunas de las normativas vigentes y derogadas más relevantes.

2.3.2 Umbrales de distorsión

El umbral de distorsión se define como el límite por debajo del cual los efectos debidos a la distorsión se pueden ignorar cuando la sección se calcula empleando los resultados de un análisis elástico.

Antes de explicar dichos umbrales, es necesario explicar los mecanismos resistentes propios de la distorsión. Para ello se realizarán las siguientes hipótesis:

- La distorsión se calcula empleando la analogía de la viga sobre lecho elástico, sin tener en cuenta su interacción con la torsión.
- Los esfuerzos debidos a la distorsión equivalen a un momento flector que causa igual tensión en el ala inferior.
- Los esfuerzos debidos a la flexión son iguales o inferiores a la capacidad de la sección a flexión.

Aplicando estas hipótesis, V. Kristek definió en 1978 [104] los mecanismos resistentes propios de la distorsión. A continuación, se exponen estos mecanismos, suponiendo que la aplicación de la carga de distorsión se realiza de manera progresiva:

- En primer lugar, se realiza un análisis elástico de la viga Winkler para calcular los esfuerzos de distorsión. Dichos esfuerzos se transforman en momentos flectores equivalentes y se suman a los momentos flectores del modelo global. Cuando la suma de ambos esfuerzos da como resultado la capacidad de la sección se considera que ese es el límite elástico de distorsión.
- El siguiente paso consiste en suponer la formación de una rótula plástica en la sección donde se haya alcanzado la capacidad última. Esta rótula se introduce únicamente en el modelo de viga Winkler para el cálculo de la distorsión, y el valor que adopta es el correspondiente al bimomento elástico calculado en el paso anterior. El

resultado esperado es un aumento de los esfuerzos negativos en las inmediaciones de la sección crítica en comparación con el análisis puramente elástico. Además, debido a la antimetría en las tensiones de distorsión, los esfuerzos negativos debidos a la distorsión también se traducen en positivos, por lo que los momentos totales aumentarán en el entorno de la sección. En el límite, el aumento en la carga implicará la formación de sendas rótulas plásticas a cada lado, pero a cierta distancia, de la sección crítica.

- Luego se realiza un análisis plástico siguiendo el mismo procedimiento del paso anterior, pero considerando la formación de tres rótulas: una en la sección crítica y dos a cada lado. Debido a estas rótulas, la deformación de la sección por distorsión aumentará, por lo que también se podrá contar con la capacidad plástica debida al efecto marco de la sección.

En resumen, existen tres mecanismos resistentes involucrados en la distorsión: capacidad de la sección crítica, capacidad de las secciones ubicadas a una determinada distancia de la sección crítica, y capacidad debida al efecto marco. Es decir, incluso si se supone que la capacidad de la sección crítica esta agotada totalmente por la flexión, todavía existen dos mecanismos resistentes adicionales que permiten que el tablero resista la distorsión. Por lo tanto, los esfuerzos de distorsión en la sección crítica calculados elásticamente pueden ser superiores a la capacidad última de la sección.

El planteamiento anterior se llevó a cabo para puentes de hormigón y a nivel teórico. Sin embargo, T. Yabuki en 1995 [105] lo aplicó también a cajones metálicos, proponiendo una metodología para obtener la rigidez en las rótulas plásticas de manera progresiva. Además, dicho autor validó la metodología propuesta con una campaña experimental, siendo uno de los pocos autores que ha llevado a cabo ensayos teniendo en cuenta la distorsión.

Otro de los autores que ha llevado a cabo una campaña experimental es Y. Arizumi, que en 1988 [106] analizó los esfuerzos de distorsión en puentes curvos. Además, Y. Arizumi también participó en los ensayos de T. Yabuki. Desafortunadamente no se han encontrado más ensayos relevantes en la literatura que tengan en cuenta la distorsión. Por ejemplo, en 2017 A. Giraldo [10] llevó a cabo una campaña experimental donde se consideraron cargas excéntricas, pero asumió que las secciones estaban suficientemente rigidizadas frente a la distorsión.

La forma en la que la mayoría de autores y normativas consultadas han tenido en cuenta la redistribución explicada anteriormente ha sido fijar un umbral de tensiones de distorsión. Cuando las tensiones están por debajo de dicho umbral, se considera que los efectos debidos a la distorsión se pueden ignorar. Además, dichas tensiones pueden ser longitudinales

o transversales, siendo más común el primer caso.

En cuanto al límite de tensión longitudinal, la mayoría de los autores y las normativas limitan las tensiones de distorsión (σ_d) a entre un 5 % y un 10 % de las tensiones debidas a la flexión (σ_f). La justificación del límite del 10 % no se ha encontrado en la literatura consultada, aunque C. P. Heins ya lo mencionaba en 1978 [107]. En cuanto al límite del 5 %, T. Yabuki en 1989 lo justifica basándose en que la tensión secundaria máxima admisible en acero son 210 kg/cm² y la tensión de plastificación 2520 kg/cm². Como se aplica el método de las tensiones admisibles, los factores de seguridad que aplica son 2 a la distorsión y 1.67 a la plastificación, por lo que $(210/2)/(2520/1.67)=0.07 \rightarrow 5\%$. Además, las investigaciones empíricas de Arizumi [106] y Yabuki [105] corroboraron que por debajo del límite del 5 % los modelos existentes y las predicciones de tensión de distorsión se comportaban según lo esperado. No obstante, cabe indicar que la explicación de Yabuki es posterior a la implantación de dicho límite en Japón.

La limitación de las tensiones transversales es mucho menos frecuente. Solo la AASHTO LRFD 9 Ed. [108] impone la condición de que la tensión debida a la flexión transversal debe ser inferior a 20 ksi (≈ 138 MPa) en combinación de Resistencia. No obstante, conviene aclarar que dicha condición no se aplica a cajones unicelulares, ya que asume que se cumple con el criterio de espaciamiento máximo entre diafragmas que fija.

Como alternativa a los umbrales anteriormente definidos, existen autores y normativas que consideran que no se debe hacer una interpretación estricta de los límites indicados anteriormente en ELU. Por ejemplo, en su tesis de 2004 [3], J. Pascual señala que basar los diseños en límites tensionales conduce a diseños muy sensibles. Por lo tanto, lo más adecuado es, preservando en todo caso la indeformabilidad de la sección, proponer un detallamiento adecuado del tablero que conduzca a diseños estables y poco susceptibles de fenómenos de fatiga. Para ello, fija límites de espaciamiento y rigidez que se expondrán en el siguiente apartado, pero que en la mayoría de los casos cumplen con límite de tensiones longitudinales del 10 %. Este mismo enfoque es adoptado por la AASHTO LRFD 9 Edition, que define que, para cajones unicelulares, se debe cumplir únicamente una condición de espaciamiento máximo entre diafragmas.

2.3.3 Criterios académicos

Han sido numerosos los criterios propuestos en el ámbito académico para el control de la distorsión. Por ese motivo, a continuación se explicarán solamente aquellos que se consideren más relevantes.

Uno de los primeros autores en establecer unas recomendaciones para el control de la distorsión fue **C. P. Heins**. En su estado del arte de 1978 [107], se recogen los criterios para el espaciamiento máximo de diafragmas en puentes curvos y la rigidez que deben tener dichos diafragmas. Para el espaciamiento, Heins utiliza una fórmula simplificada para el cálculo de la distorsión que estableció junto con J. Oleinik en 1975 [109]. Esta fórmula permiten calcular el ratio entre la tensión por distorsión y la tensión por flexión, y se obtuvo a partir de la resolución de la ecuación de Dabrowsky empleando diferencias finitas. De acuerdo con Heins, cuando se impone el límite de distorsión del 10 %, esta fórmula da como resultado el siguiente espaciamiento máximo entre diafragmas (S_D) en pies:

$$S_D \leq L \cdot \left(\frac{R}{200 \cdot L - 7500} \right)^{1/2} \leq 25 \text{ [ft]} \quad (2.13)$$

Donde tanto la luz (L) como el radio en planta (R) se introducen en pies.

En cuanto a la rigidez de los diafragmas, Heins hace referencia una tesis de 1974 de D. M. Williamson, que no ha podido ser consultada, donde se calcula la relación entre la rigidez del diafragma distribuida y la rigidez de marco a partir de la cual se puede considerar que la distorsión es estable. En este caso define el valor como $Q = 100$, y se sustituye en la siguiente fórmula:

$$A_b \geq \frac{Q \cdot b_b \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot E \cdot h^2} \cdot K_d \cdot S_D \approx 750 \cdot \frac{S_D \cdot b_b}{h^2} \cdot \frac{t_w^3}{h + b_b} \text{ [in}^2\text{]} \quad (2.14)$$

Donde todas las dimensiones anteriores están en pulgadas y A_b se refiere al área de un perfil de una celosía en Cruz de San Andrés. También es importante destacar que la segunda fórmula se ha tomado de un documento posterior del propio Heins, basado en sus clases impartidas, donde se indica 750 en lugar de 75 como en el documento citado. Esto se debe a que se ha comprobado que el valor de 750 se ajusta mejor a la relación esperada entre la rigidez de la sección y la rigidez del diafragma distribuida de 100.

Un autor que trabajó con Heins durante los años 70 en el comportamiento de puentes curvos fue **H. Nakai**. Este autor publicó un artículo en 1982 [110] donde estableció que la relación entre la rigidez del diafragma distribuida y la rigidez de marco de la sección (K_d) debía ser de al menos 1500 para que el diafragma se pudiera considerar rígido.

$$\frac{K_D}{K_d \cdot S_D} \geq 1500 \quad (2.15)$$

Un año antes de esto **F. Sakai y M. Nagai** [111] publicaron sus recomendaciones para el espaciamiento máximo de diafragmas, que se resumen en la siguiente fórmula aplicable a puentes rectos:

$$S_D \leq \begin{cases} 6 & \rightarrow L < 60m \\ 0.14 \cdot L - 2.4 & \rightarrow 60m \leq L \leq 160m \\ 20 & \rightarrow L > 160m \end{cases} \quad (2.16)$$

En el caso de los puentes curvos, los mismos autores proponen aplicar el siguiente factor al espaciamiento anterior en función del ángulo central en planta ($\phi = R/L$):

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \rightarrow L < 60m \\ 1 - \frac{\sqrt{\phi \cdot (L-60)}}{100 \cdot \sqrt{2}} & \rightarrow 60m \leq L \leq 200m \end{cases} \quad (2.17)$$

Tanto los criterios de Nakai como los de Sakai y Nagai cumplen con el límite de tensiones longitudinales de distorsión del 5 % vigente en ese momento en Japón. Ambos artículos fueron publicados originalmente en japonés, pero H. Nakai los tradujo y resumió en su libro de 1988 [34], que publicó junto con C. H. Yoo.

Uno de los autores que trabajó con C. H. Yoo fue Young Jong Kang. Si bien su trabajo inicial se centró en la estabilidad de vigas curvas, posteriormente dirigió varias investigaciones relativas al espaciamiento de diafragmas en Corea del Sur. Las primeras de dichas investigaciones fueron en los años 2000 y realizadas principalmente por **N. H. Park**. En concreto, en una publicación de 2004 [112] fijaron los criterios de dimensionamiento de diafragmas antidistorsión para tableros rectos. Los criterios en cuanto a número de diafragmas intermedios requeridos se muestran en la tabla 2.1.

σ_d/σ_f	Vano isostático	Vano continuo
5 %	4	5
10 %	3	3
15 %	2	2
20 %	2	2

TABLA 2.1 Número de diafragmas intermedios requeridos según Park

En lo referente a la rigidez que deben tener los diafragmas, Park fijó dicha rigidez en al menos un 20 % de la rigidez de un diafragma sólido. No obstante, en dicha publicación no indicaron las características que debía cumplir el diafragma sólido, por lo que fue otro autor llamado J. P. Lebet el que en su libro [113] indicó que se puede denominar diafragma sólido a un diafragma de alma llena de 20 mm de espesor. Esto implica que los

diafragmas intermedios deben tener un espesor equivalente de al menos 4 mm según esta indicación.

Un año después [85], N. H. Park publicó la extensión de su trabajo a la viga curva. Para esto, desarrolló un elemento finito y lo utilizó posteriormente para obtener fórmulas aproximadas que permitieran calcular los esfuerzos debidos a la distorsión. Usando dichas fórmulas simplificadas, Park elaboró tres gráficas que permiten obtener el número de diafragmas en función de un parámetro ζ/S , que incluye la geometría de la sección y la tensión longitudinal admisible, y la luz. Las tres gráficas se corresponden con una para vanos isostáticos, otra para puentes de dos vanos y una última para puentes de tres vanos.

Más recientemente, en 2015, **J. H. Lee** junto con Y. J. Kang [114] revisaron el criterio para el espaciamiento de diafragmas en puentes curvos haciendo uso de modelos de láminas. Este criterio se resume en la tabla 2.2.

σ_d/σ_f	$\phi = 0^\circ$	$\phi = 5^\circ$	$\phi = 10^\circ$	$\phi = 20^\circ$	$\phi = 30^\circ$
5 %	$L/5$	$L/6$	$L/7$	-	-
10 %	$L/4$	$L/5$	$L/5$	$L/7$	-
15 %	$L/3$	$L/4$	$L/4$	$L/6$	$L/6$
20 %	$L/3$	$L/4$	$L/4$	$L/6$	$L/6$

TABLA 2.2 Espaciamiento máximo de diafragmas intermedios requeridos según Lee 2015

Los trabajos posteriores de J. H. Lee se centraron en puentes rectos, y más específicamente en la relación canto-ancho de los cajones. En 2019 [98] propuso una fórmula para determinar el espaciamiento máximo en función de la relación altura-ancho (h/b) del cajón y la luz. Dicha fórmula contiene a su vez cuatro parámetros que se ajustan en función de si el límite es el 5 % o el 10 %. Posteriormente, en 2021 [99], publicó una revisión de los espaciamientos anteriores en forma de tabla, donde se tuvieron en cuenta los factores de combinación con otras cargas como son el peso propio y las cargas muertas. En cuanto a la rigidez de los diafragmas, en las dos últimas publicaciones el criterio adoptado fue el de Nakai (Ec. 2.15).

Además de los autores mencionados anteriormente, ha habido otras propuestas de espaciamiento y rigidez. Por ejemplo, en los años 80 en Japón, T. Yoda en 1984 [115] propuso una formulación bastante compleja para determinar el espaciamiento máximo y la rigidez en función de la mayor parte de parámetros involucrados en el cálculo de distorsión. Por otro lado, T. Yabuki en 1989 [116] elaboró unas tablas donde se establecía el número de diafragmas mínimo en función de la relación luz-ancho (L/b) del cajón y el ángulo (ϕ) que forma el vano en planta, todo ello para el límite del 5 %.

Una de las publicaciones más completas sobre el control de la distorsión en España es la tesis de **J. Pascual** en 2004 [3]. La metodología que empleó fue la analogía de la viga sobre lecho elástico, sin fijar un límite específico como se explicó en el apartado anterior, aunque en casi todos los casos cumple con el 10 %. Concluyó para tableros rectos se deben disponer al menos cuatro diafragmas por vano, y con un espaciamiento máximo de cuatro veces el canto del tablero. Además, la rigidez de los diafragmas debe ser, al menos, la que aporte un diafragma en celosía dimensionado por resistencia.

Por último, otra posible forma de calcular el número de diafragmas requeridos es la empleada por **Q. V. Vu** en 2018 [96]. En su estudio sobre la capacidad de un tablero sometido a solicitaciones excéntricas y la influencia de los diafragmas, utilizó elementos tipo lámina y análisis no lineales en rotura. Su conclusión fue que con un diafragma en centro de luz es suficiente.

2.3.4 Criterios normativos

A continuación, se revisarán los criterios relacionados con la distorsión que aparecen en dos de las normativas vigentes más relevantes, los Eurocódigos y la AASHTO LRFD. Además, se examinarán los criterios recogidos en normativas derogadas como son la British Standard, la RPX o la EAE debido a la importancia que estas han tenido en el diseño de puentes en España.

Los **Eurocódigos** son un conjunto normativo compuesto por 10 normas que en 2023 totalizarán 58 partes. En concreto, las estructuras metálicas se recogen en la norma EN1993 y las estructuras mixtas en la EN1994. La parte 2 de ambas normas está orientada al diseño de puentes.

En primer lugar, es importante destacar que los Eurocódigos otorgan una gran libertad al diseñador en comparación con, por ejemplo, la AASHTO LRFD. En el caso de la distorsión, las indicaciones se orientan únicamente a los umbrales de tensión por distorsión, y no a criterios para la disposición de diafragmas. Específicamente, el punto 3 apartado 6.2.7.1 de la EN1993-2 [9] se indica que los efectos debidos a la distorsión pueden despreciarse cuando no superen un 10 % de los efectos de la flexión. Es decir, también permite diseñar por encima de dicho límite siempre y cuando se tenga en cuenta la distorsión.

El límite del 10 % se establece en el apartado de Estados Límites Últimos, por lo que no queda claro si se debe aplicarse también en Estado Límite de Servicio. Además, la única norma que menciona la distorsión en ELS es la EN1994-2 [117] en el punto uno del apartado 7.2.1, e indica que *se deben tener en cuenta, cuando proceda, los efectos del*

alabeo por torsión y distorsión, si se produce. Sin embargo, la indicación de considerar la distorsión es clara en el cálculo del Estado Límite de Fatiga, según el punto 1 del apartado 4 de la norma EN1993-1-9 [118].

La **AASHTO LRFD 9th Edition** [108], publicada en 2020, establece límites de espaciamiento de diafragmas. En concreto, el apartado 6.7.4.3 indica que el espaciamiento entre diafragmas intermedios en cajones unicelulares no puede exceder los 40 ft (≈ 12 m). Además, en el apartado 6.11.1.1 se indica claramente que se deben considerar las tensiones longitudinales debidas a la distorsión en el cálculo de fatiga, pero que se pueden ignorar en el cálculo de Resistencia (ELU) si se controla el espaciamiento. También en este último apartado se indica que se debe considerar la flexión transversal debida a la distorsión de la sección en el cálculo de Resistencia y de fatiga. La limitación relativa a la flexión transversal que establece son 20 ksi (≈ 138 MPa) en combinación de Resistencia, pero también indica que cumpliendo con el espaciamiento máximo de 40 ft en cajones unicelulares dicho límite se cumple.

La norma anterior representa una evolución de la guía para el diseño de puentes curvos elaborada por la AASHTO en 2003 [119]. En dicha guía se limitaban las tensiones por distorsión a un 10 % de las debidas a flexión en el apartado 10.2.2.3 y el espaciamiento entre diafragmas máximo era de 30 ft (≈ 9 m).

Entre la normativa derogada, una de las que más atención se aplicó históricamente al fenómeno de la distorsión ha sido la **British Standard 5400-3**. En su edición del año 2000 [120], dedica el Anexo B al cálculo de la distorsión en tablero mediante una formulación que toma como referencia la de R. Wright y ábacos. Además, obliga a considerar la distorsión en todos los cálculos e impone condiciones de rigidez a los diafragmas. Dichas condiciones de rigidez se basan en la relación entre la rigidez del diafragma distribuida en la longitud entre diafragmas y la rigidez de marco. Esta aproximación es igual a la empleada por Nakai o Williamson, con la diferencia de que en este caso el valor de la relación varía en función del tipo de carga y la longitud elástica de la analogía de la viga sobre lecho elástico. Dicho valor oscila entre 0 y 2000 para cargas puntuales.

En España, L. Viñuela presentó sus primeras recomendaciones para el proyecto de puentes metálicos y mixtos en 1992 [48]. Estas recomendaciones reflejaban muchas de las indicaciones de la British Standard. Sin embargo, la primera normativa relativa a puentes mixtos fue la **RPX-95** [121], que incluía las condiciones para el dimensionamiento de diafragmas en secciones cajón en el apartado 6.6.1. Estas condiciones, de obligado cumplimiento, limitaban el espaciamiento entre diafragmas a 4 veces el canto de la sección, incluían el criterio de Nakai de rigidez mínima de diafragmas (Ec. 2.15), y obligaban a

dimensionar los diafragmas por resistencia. La ventaja de estas condiciones era que se podía considerar la sección indeformable, ignorando así los efectos debidos a la distorsión. Sin embargo, esta normativa tenía la limitación de que no existía margen para optimizar los diafragmas, ya que no se definían criterios adicionales.

Por último, la **EAE-11** [14] en su Anejo 3 también realizó un extenso tratamiento del dimensionamiento de diafragmas. Por un lado, permitía su cálculo simplificado empleando los criterios de J. Pascual descritos anteriormente. Es decir, diafragmas dimensionados por resistencia y espaciados cada 4 veces el canto, habiendo al menos 4 diafragmas por vano. No obstante, también permitía optimizar el dimensionamiento de diafragmas tomando como referencia el límite del Eurocódigo EN1993-2 [9] y empleando la formulación de J. Schlaich [17] y L. Viñuela [48] que recoge la tesis de J. Pascual.

2.3.5 Revisión crítica de los criterios para el control de la distorsión

En este apartado se llevará a cabo una revisión conjunta de los criterios académicos y normativos para el control de la distorsión descritos anteriormente desde un punto de vista del ingeniero proyectista

En primer lugar, en el apartado 2.3.2 se explicó como los esfuerzos debidos a la distorsión pueden redistribuirse a lo largo de la viga mediante tres mecanismos resistentes. Es decir, la capacidad de la sección a distorsión es superior a la obtenida mediante un análisis elástico. Para tener en cuenta esta eventualidad, los enfoques más comunes en la actualidad son definir una tensión de distorsión crítica por debajo de la cual se pueden ignorar los efectos debidos a la distorsión, o bien disponer de un número mínimo de diafragmas de unas determinadas características por vano.

En cuanto al primer enfoque, lo más común es considerar que el umbral de tensión longitudinal de distorsión se sitúa entre un 5 y un 10 % de la tensión debida a la flexión. En este sentido, se considera que el enfoque del Eurocódigo EN1993-2 [9] es el más adecuado, ya que establece el límite en el 10 %, pero permite dimensionar por encima de dicho límite siempre y cuando se consideren los efectos debidos a la distorsión. Sin embargo, resulta sorprendente que haya habido tan pocas investigaciones sobre el tema, a pesar de que se considera un valor fundamental en el diseño de tableros mixtos. Además, no se ha conseguido determinar el origen de la limitación ni del 5 % ni del 10 %, que es anterior a los años 80. En la literatura consultada, solo se ha encontrado la revisión del criterio del 5 %. En cualquier caso, la revisión de estos límites excede el alcance del presente trabajo, por lo que se va a adoptar el criterio del 10 %, ya que es el fijado en la normativa vigente en España en el momento de la realización del presente trabajo.

En cuanto al segundo enfoque, debería considerarse un complemento que permita simplificar el cálculo de la distorsión. Esto se debe a que los estudios que han adoptado el número de diafragmas como criterio único son muy limitados y presentan una serie de limitaciones. De hecho, el único autor que no referencia límites de distorsión es Q. V. Vu [96], ya que emplea modelos de láminas para analizar el puente en rotura. No obstante dicho estudio es muy limitado, ya que a pesar de que el autor calcula 24 geometrías de vanos isostáticos rectos, carga siempre el centro del vano donde en todos los casos hay dispuesto un diafragma, y además emplea secciones constantes en todo el tablero, lo cual aumenta la posible redistribución de esfuerzos en comparación con un puente optimizado. Por lo tanto, no se considera aceptable la conclusión a la que llega Vu de que con un diafragma en el centro del vano es suficiente. Además, en lo que respecta a los estudios basados en límites tensionales, estos no dejarían de ser un complemento del primer enfoque.

Por lo tanto, desde el punto de vista del proyectista, se considera que lo más adecuado es el enfoque de la EAE-11 [14]. Este enfoque recoge una serie de criterios simplificados para el dimensionamiento de diafragmas, lo que permite omitir el cálculo riguroso de la distorsión. Sin embargo, también permite el cálculo refinado e indica los límites que debe cumplir la distorsión para considerarse controlada.

Sin embargo, las normativas también deberían dejar claros los límites de aplicación de los criterios simplificados. Por ejemplo, en investigaciones llevadas a cabo en Asia y América, los cajones estudiados son estrechos, con apenas 4 m de ancho los más grandes. Esto contrasta con los grandes tableros de sección cajón proyectados en Europa como el Viaducto Verrières [122] o el Viaducto del Regueirón [123], donde el ancho del cajón puede llegar a duplicar esa dimensión. Por lo tanto, no parece adecuado aplicar lo estudiado en tableros estrechos a este tipo de cajones.

Los grandes cajones mencionados anteriormente tienen el problema de que no se ha realizado ningún estudio hasta la fecha que proporcione criterios simplificados para su dimensionamiento. Por lo tanto, son uno de esos casos en los que la normativa no debiera extralimitarse en sus simplificaciones, sino fijar los límites distorsión que considere adecuados, y dejar libertad al proyectista para determinar la estrategia que considere más apropiada para el control de la distorsión. En otras palabras, una normativa basada únicamente en criterios simplificados no se considera adecuada.

En cuanto a las propuestas simplificadas para el dimensionamiento de diafragmas anti-distorsión, se considera la más apropiada la realizada por J. Pascual [3], por diversos motivos. El primero es que acierta al identificar que imponer una rigidez de diafragmas

interiores en función de la rigidez de marco de la sección carece de sentido, ya que la rigidez de marco en puentes metálicos es prácticamente despreciable a la par que muy susceptible a pequeñas variaciones. En ese sentido, la propuesta del autor de que la rigidez de diafragma sea similar a la de un diafragma en celosía dimensionado por resistencia se considera una aproximación adecuada y optimizada. Desafortunadamente, únicamente Pascual ha investigado adoptando este criterio, por lo que el resto de investigaciones realizadas se basan en diafragmas, en muchos casos, sobredimensionados. No obstante, también es cierto que la condición de resistencia se encuentra cercana en muchos casos al límite a partir del cual la influencia de la rigidez de los diafragmas se estabiliza, y por lo tanto ese sobredimensionamiento no debiera influir en exceso en las conclusiones de las otras investigaciones.

Sin embargo, la investigación de J. Pascual también tiene aspectos susceptibles de mejora. Por ejemplo, el autor no incorpora la torsión no uniforme, lo cual puede ser desfavorable en tableros anchos y luces cortas donde ya el propio autor había relajado el criterio de tensión del 10 %. Además, el autor limita su estudio a tableros rectos en planta. Sin embargo, son numerosos los trabajos expuestos en el apartado 2.3.3 que llegan a una conclusión similar a la de Pascual en tableros rectos, pero muestran que conforme aumenta la curvatura en planta es necesario aumentar el número de diafragmas.

En resumen, ninguna de las propuestas de criterios para el control de la distorsión se considera completa y optimizada, si bien la tesis de J. Pascual constituye el punto de partida más ajustado.

2.3.6 Resumen

En esta sección se han expuesto los umbrales por debajo de los cuales se pueden ignorar los efectos debidos a la distorsión, y se han justificado los mecanismos resistentes que permiten llegar a dichos umbrales. Sin embargo, su revisión numérica excede el alcance del presente trabajo, por lo que en adelante se va a adoptar el límite del 10 % en la tensión longitudinal fijado en la EN1993-2 [9].

También se han revisado los principales criterios normativos y académicos que permiten cumplir con los criterios mencionados anteriormente. En cuanto a la rigidez de los diafragmas, se considera que el criterio adoptado por J. Pascual, según el cual la rigidez mínima de los diafragmas sea equivalente a la que aporta un diafragma en celosía dimensionado por resistencia, es el más adecuado. Sin embargo, en lo que se refiere a número y espaciamiento de diafragmas, el estudio se limita únicamente a puentes rectos, y en el caso de luces cortas sobrepasa el límite del 10 % en ciertos casos. Por ese motivo,

se considera que se debe completar el estudio anterior teniendo en cuenta la interacción torsión-distorsión y la curvatura en planta.

Además, se comprobado que la mayoría de estudios se centra en tableros estrechos. Sin embargo, en los últimos años se han llevado a cabo varias realizaciones utilizando cajones unicelulares que han superado los 20 m de ancho de calzada, llegando incluso a los 30 m. Por ese motivo, se considera que se debe completar la bibliografía existente con recomendaciones relativas a tableros de gran anchura.

CAPÍTULO 3

Definición del elemento finito

3.1 Introducción

En este capítulo se presentará un elemento finito que permite el cálculo de la flexión, torsión y distorsión en puentes curvos de sección simétrica de manera integrada.

En la primera sección se explicará el convenio de signos utilizado, así como la nomenclatura empleada. Posteriormente, a partir de un elemento diferencial de pared curva, se explicarán las principales ecuaciones que rigen su comportamiento de acuerdo con la teoría de secciones de pared delgada. En este apartado se mostrarán las ecuaciones de equilibrio de un elemento, así como las ecuaciones necesarias para el cálculo de deformaciones en la viga y las relaciones constitutivas que permiten obtener las tensiones a partir de las deformaciones. A partir de estas tensiones y deformaciones se obtendrá la energía de deformación de un elemento diferencial.

Una vez definidas las ecuaciones de equilibrio y de deformación para un elemento diferencial de pared, se procederá a aplicarlas a cada uno de los modos resistentes explicados en la sección 2.2.2.2. El objetivo es obtener el campo de deformaciones asociado a cada modo resistente. Para ello, se realizarán hipótesis iniciales asociadas a cada modo resistente, a partir de las cuales se obtendrán los movimientos asociados a cada modo, incluyendo el movimiento longitudinal o alabeo

Una vez se han definido todos los movimientos de la viga, se pueden obtener las deformaciones en ella aplicando las ecuaciones de deformación previamente definidas. Además, aplicando las relaciones constitutivas propias de los materiales, se pueden obtener también las tensiones en la viga. Estas tensiones se sumarán en forma de resultantes que también serán definidas. Asimismo, haciendo uso de las resultantes anteriores, se obtendrá el trabajo virtual de deformación del elemento y el trabajo virtual debido a las acciones exteriores. Dichas ecuaciones del trabajo virtual permiten deducir las ecuaciones que ri-

gen el comportamiento de la viga curva, que dependerán de unas propiedades de la viga previamente definidas.

Por último, se aplicará el método de los elementos finitos para obtener la matriz de rigidez de un elemento curvo y el vector de cargas asociado. En primer lugar se explicará brevemente en que consiste el método de los elementos finitos. Posteriormente, se definirán los grados de libertad y las funciones de forma en el elemento. Utilizando estas funciones, se obtendrá la energía de deformación en el elemento y la energía potencial de las acciones exteriores. Esto permitirá obtener la matriz de rigidez y el vector de cargas asociado. Además, se explicará de manera genérica cómo modelar la rigidez correspondiente a un diafragma antidistorsión, aunque este modelado se abordará con más detalle en el capítulo 4. También se incluirá un breve resumen con las características del elemento.

En general, este capítulo supone una extensión del trabajo de F. Cambroner [18] a la viga curva, pero sin considerar el arrastre por cortante y convirtiendo el elemento en binodal. Para obtener los modos de deformación y sus alabeos asociados, se ha tomado como referencia el método propuesto en dicho trabajo, que a su vez está basado en un artículo de Jönsson [57]. No obstante, dicho método se ha adaptado para el caso de una viga curva en el plano horizontal y de sección simétrica respecto al eje vertical.

Además, se ha tomado como referencia el trabajo de N. H. Park [85], cuya formulación del elemento es similar a la aquí expuesta. Sin embargo, se han incorporado avances respecto a dicho trabajo. En concreto, se ha generalizado su aplicación para una viga de sección simétrica cualquiera y no únicamente una viga de sección cajón. Además, la distorsión se trata en el elemento propuesto como un modo resistente más, y no se calcula de manera independiente empleando una formulación mixta donde el momento flector se considera una carga. Por último, las funciones de alabeo empleadas en este trabajo consideran el efecto de la curvatura, y las funciones de forma se han simplificado a funciones polinómicas.

3.2 Convenio de signos y nomenclatura

A continuación, se explicará el convenio de signos adoptado, la denominación de algunas de las principales unidades y las hipótesis de partida.

Para explicar el sistema de referencia se va a considerar un tablero curvo en el plano horizontal como se muestra en la figura 3.1.

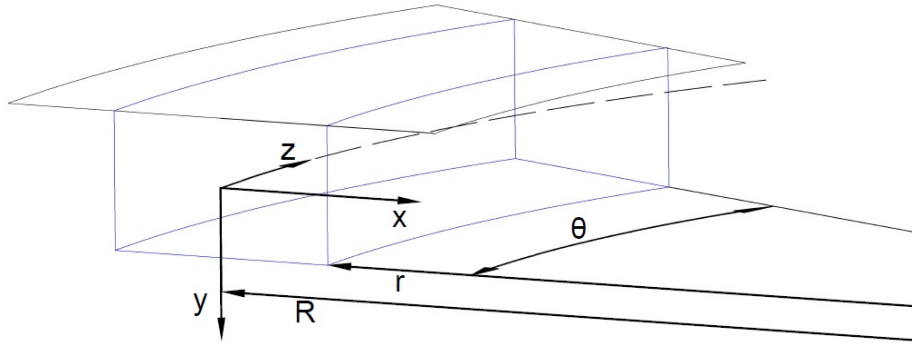


FIGURA 3.1 Sistema de referencia

Como se puede observar en la figura, la dirección z se corresponde con la dirección de avance del eje del tablero. La dirección x se considera positiva hacia el centro de giro del tablero, mientras que la dirección y se considera positivo en el sentido gravedad. Además, se indica que el radio del eje del tablero se denomina R , y el radio de un punto cualquiera r . En base a lo anterior, la relación entre ambos radios es $r = R - x$.

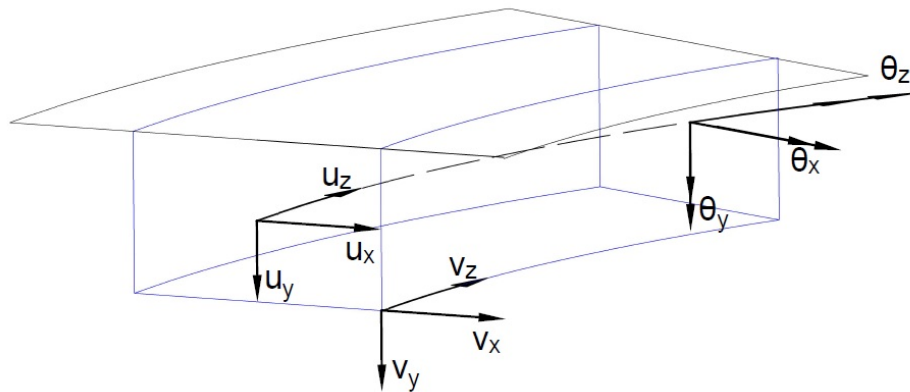


FIGURA 3.2 Movimientos en la viga

En cuanto a los movimientos globales, se representa como $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$ el movimiento de un punto cualquiera de la sección desde un origen O a un punto cualquiera A ($\overrightarrow{OA}$). Cuando esos movimientos se refieran al eje del tablero y dependan únicamente de z se denominan $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$. Los giros en el eje del tablero se indican como $\bar{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$.

Todos los movimientos anteriores se consideran positivos en la dirección de los ejes del sistema de coordenadas y se muestran en la figura 3.2.

La coordenada a lo largo de la pared se denomina s , la dirección de las paredes se indica con el vector unitario $\bar{t}=(t_x, t_y)$, y su vector perpendicular $\bar{n}=(-t_y, t_x)$. Los movimientos unitarios locales de un punto de la sección ($\bar{u}_s$) se pueden referir a las coordenadas globales de la sección $\bar{u}_s = (u_{sx}, u_{sy})$ o a las coordenadas locales de la pared $\bar{u}_s = (u_s, u_n)$. Todo lo anterior se muestra en la figura 3.3.

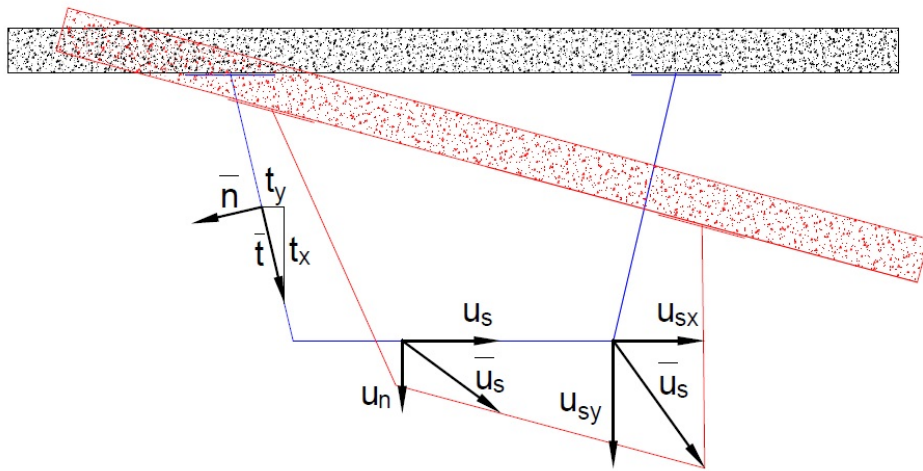


FIGURA 3.3 Referencial y movimientos locales

La relación entre las coordenadas locales y globales se establece mediante vector dirección paralelo a la pared ($\bar{t}$) y el vector perpendicular ($\bar{n}$) de la siguiente manera:

$$\bar{u}_s = \begin{cases} u_s &= t_x \cdot u_{sx} + t_y \cdot u_{sy} \\ u_n &= -t_y \cdot u_{sx} + t_x \cdot u_{sy} \end{cases} \quad (3.1)$$

Los movimientos globales en un punto cualquiera de la sección también se pueden expresar en el sistema de coordenadas local de las paredes $\bar{v}_s = (v_s, v_n, v_{sz})$.

Por último, se explica brevemente la notación matemática utilizada. Se emplea la barra superior para referirse a vectores y la doble barra superior para referirse a matrices. Además, en ciertas ocasiones la derivada respecto a z se indica mediante un superíndice con números romanos, de tal modo que el número romano se corresponde con el orden de la derivada respecto a z . Por ejemplo, $d^2\theta/dz^2$ se denota como θ^{II} .

3.3 Estudio de un elemento de pared

3.3.1 Introducción

En esta sección se explicará el comportamiento de un elemento diferencial de pared curvo y las ecuaciones que sirven para modelizarlo. Estas ecuaciones se utilizarán como base para el cálculo de los modos resistentes y de la viga que se realizará más adelante. En primer lugar se explica el equilibrio de tensiones. Posteriormente se aborda cómo se definen las deformaciones para un elemento curvo y, por último, se explica la energía de deformación de un elemento.

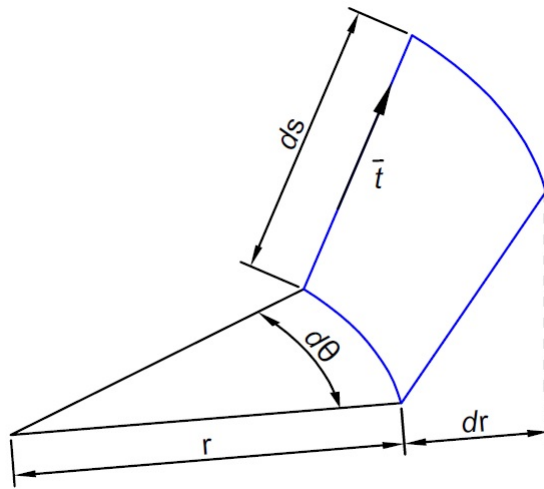


FIGURA 3.4 Elemento diferencial de pared

Para ello se considerará un elemento como el que se muestra en la figura 3.4. Se trata de un elemento de longitud ds a lo largo de la pared de la sección y $r \cdot d\theta$ en dirección paralela al eje de la viga en uno de sus lados. Al ser genérico, se considera que varía en dirección perpendicular al eje dr . Por lo tanto, la longitud en el otro lado paralelo al eje será $(r + dr) \cdot d\theta$.

3.3.2 Equilibrio

En este apartado se explicarán las distintas formas en que se puede expresar el equilibrio de un elemento diferencial de pared. Se partirá del elemento definido en la figura 3.4, y se establecerá su equilibrio en términos muy similares a los expuesto por Nakai en su libro [34]. Se supondrá que el elemento está sometido a una tensión longitudinal (σ_z) y que experimenta una variación de dicha tensión ($d\sigma_z$). En cuanto a las tensiones tangenciales, se asumirá que el elemento está sometido a una tensión de cizalladura (τ_{sz}) y que varía en dirección del eje de la viga y del eje de la pared ($d\tau_{sz}$). Las tensiones repre-

sentadas gráficamente se muestran en la figura 3.5.

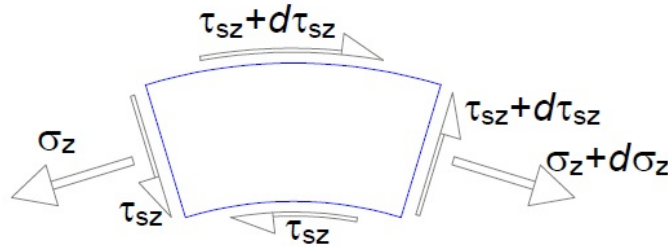


FIGURA 3.5 Equilibrio de elemento diferencial de pared

Para establecer el equilibrio de fuerzas en dirección longitudinal, se suman las tensiones longitudinales y tangenciales en la dirección de la viga. Si se omite el espesor, la fuerza en dirección longitudinal debida a las tensiones longitudinales (σ_z) y su variación se obtiene multiplicando esta por la longitud del elemento a lo largo de la pared. La fuerza longitudinal debida a las tensiones tangenciales (τ_{sz}) se obtiene multiplicando esta tensión por la longitud a lo largo del eje del elemento y también sumando la proyección en dirección longitudinal de la tensión tangencial en la dirección de la pared. Esta proyección solo se produce cuando existe una variación en el radio. Si se realiza la suma de todos los términos empezando de izquierda a derecha, y se prescinde del espesor de la pared, el resultado es el siguiente:

$$-\sigma_z \cdot ds + \tau_{sz} \cdot dr \cdot \frac{d\theta}{2} - \tau_{sz} \cdot r \cdot d\theta + (\tau_{sz} + d\tau_{sz}) \cdot (r + dr) \cdot d\theta + (\tau_{sz} + d\tau_{sz}) \cdot dr \cdot \frac{d\theta}{2} + (\sigma_z + d\sigma_z) \cdot ds = 0$$

Agrupando términos, despreciando las multiplicaciones de tres infinitésimos y dividiendo todo entre $ds \cdot d\theta \cdot r$, se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{d\sigma_z}{r \cdot d\theta} + \frac{2 \cdot \tau_{sz} \cdot dr}{r \cdot ds} + \frac{d\tau_{sz}}{ds} = 0 \quad (3.2)$$

Se puede observar que, si la ecuación 3.2 se lleva al límite para un radio infinito, y se considera $r \cdot d\theta = dz$, el resultado corresponde al equilibrio de un elemento recto.

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{d\tau_{sz}}{ds} = 0 \quad (3.3)$$

Retomando la ecuación 3.2, Nakai [34] la reescribe multiplicando por r^2 y refiriendo la longitud del elemento al eje del tablero ($d\theta = dz/R$). De esta manera, la ecuación 3.2

también se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dz}(\sigma_z) \cdot R \cdot r + \frac{d}{ds}(r^2 \cdot \tau_{sz}) = 0 \quad (3.4)$$

3.3.3 Deformaciones

Las deformaciones se dividirán en deformación longitudinal, deformación angular y deformaciones secundarias. Todas ellas serán calculadas empleando la **hipótesis de pequeñas deformaciones**.

La *deformación longitudinal* (ε_z) se refiere a la variación en la longitud que se produce en la dirección longitudinal de la viga.

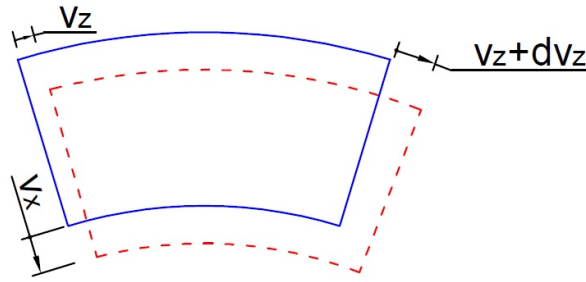


FIGURA 3.6 Deformación longitudinal de un elemento diferencial de pared

La deformación longitudinal es la relación entre variación de longitud de un elemento de dimensión $r \cdot d\theta$ y su longitud original. Tomando en cuenta los movimientos de la figura 3.6, que son el movimiento en dirección longitudinal de la viga (v_z) y el movimiento en la dirección radial (v_x), la deformación longitudinal se define como:

$$\varepsilon_z = \frac{r \cdot d\theta + v_z + dv_z - (r - v_x) \cdot d\theta - v_z}{r \cdot d\theta}$$

Operando, la ecuación anterior se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\varepsilon_z = \frac{dv_z}{r \cdot d\theta} - \frac{v_x}{r} \quad (3.5)$$

Es decir, la deformación longitudinal de un elemento curvo de pared es la suma de la deformación que se produce por la propia extensión en la dirección longitudinal de la viga, y la deformación que se produce cuando se desplaza el elemento en la dirección del radio a la viga.

Si la ecuación anterior se refiere al eje de la viga, y se aplica la misma transformación del

apartado anterior, esta se puede expresar como:

$$\varepsilon_z = \frac{R}{R-x} \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_x}{R} \right) \quad (3.6)$$

Donde se puede observar cómo, cuando el radio tiende a infinito, la ecuación se corresponde con la deformación de una viga recta.

La deformación que produce una variación en el ángulo que forman las paredes del elemento diferencial se denomina *deformación angular* (γ_{sz}). Para ilustrar dicha deformación, la figura 3.7 muestra un esquema muy similar al dibujado en el libro de Nakai [34], pero generalizado para un desplazamiento cualquiera en la dirección de la pared (v_s).

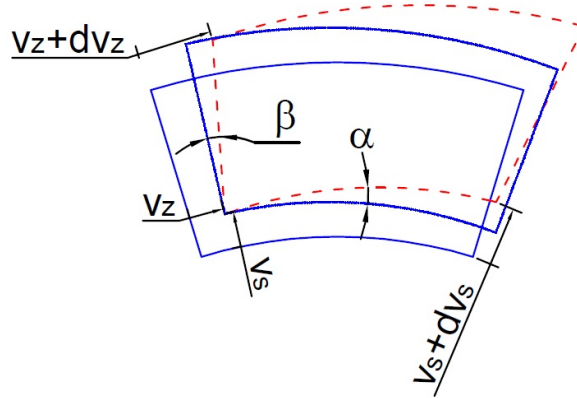


FIGURA 3.7 Deformación angular de un elemento diferencial de pared

La deformación angular (γ_{sz}) es el resultado de sumar la variación del ángulo en las dos lados perpendiculares de la pared α y β . El valor de α resulta más intuitivo, ya que se obtiene directamente al dividir la variación del movimiento en la dirección de la pared (dv_s) entre la longitud del elemento en la dirección de la viga ($r \cdot d\theta$). En cambio, en el valor de β se ve afectado por la variación en el radio del elemento. Es decir, al incremento en movimiento en dirección longitudinal (dv_z) que se produce en un elemento diferencial de pared, hay que restar una parte que se debe al incremento en el radio:

$$\gamma_{sz} = \alpha + \beta = \begin{cases} \alpha = \frac{dv_s}{r \cdot d\theta} \\ \beta = \left(v_z + dv_z - \frac{r+dr}{r} \cdot v_z \right) \cdot \frac{1}{ds} \end{cases}$$

Al sumar ambos términos, la deformación angular se puede expresar como:

$$\gamma_{sz} = \frac{dv_s}{r \cdot d\theta} + \frac{dv_z}{ds} - \frac{dr}{r \cdot ds} \cdot v_z \quad (3.7)$$

Procediendo de manera similar a la deformación longitudinal, se va a referir la deformación al eje de la viga. Además, se va a hacer uso de la relación entre la componente en x del vector unitario de dirección de la pared y la variación del radio en un elemento diferencial de pared, que es $t_x = dx/ds = -dr/ds$. De este modo, se puede reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\gamma_{sz} = \frac{R}{R-x} \cdot \left(\frac{dv_s}{dz} + t_x \cdot \frac{v_z}{R} \right) + \frac{dv_z}{ds} \quad (3.8)$$

Al igual que sucede en ecuaciones previas, cuando el radio tiende a infinito se observa que la ecuación es idéntica a la formulada para la deformación angular en la viga recta.

Además de las deformaciones anteriormente expuestas, se considerarán deformaciones adicionales que se clasificarán como secundarias. Se denominarán *deformaciones secundarias* a aquellas deformaciones que se producen adicionalmente a la deformación de la fibra media de la pared y también a las deformaciones longitudinales que se producen en la dirección de la pared. En la figura 3.8 se muestran los movimientos de giro secundarios.

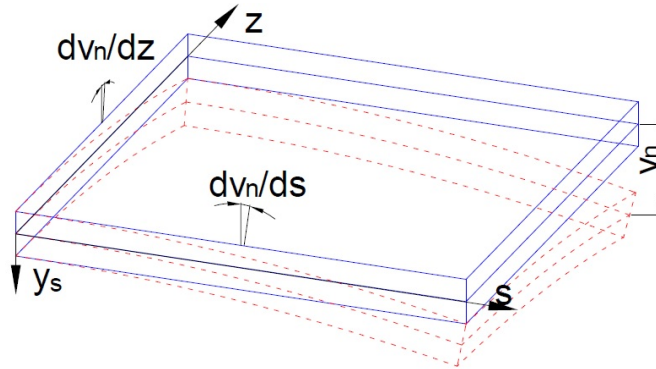


FIGURA 3.8 Deformación secundaria en una pared

En este caso, se asume la teoría de Euler-Bernoulli y se ha supuesto que el giro es proporcional a la variación del movimiento perpendicular. Esta hipótesis permite representar los movimientos secundarios de la siguiente manera:

$$v_z = -y_s \cdot \frac{dv_n}{dz} \quad (3.9a)$$

$$v_s = v_{s0} - y_s \cdot \frac{dv_n}{ds} \quad (3.9b)$$

El movimiento en la dirección del eje de la viga (v_z) es igual al giro de la pared multiplicado por la distancia a la fibra media (y_s). El movimiento en la dirección de la pared (v_s) es la suma del movimiento en la fibra media (v_{s0}) y el giro multiplicado por la distancia a la fibra media.

En este punto, se supondrá que la influencia de la curvatura en estas deformaciones es un efecto terciario, por lo que, como norma general, **no se considerará la influencia de la curvatura en las deformaciones secundarias**. Bajo esa hipótesis, las deformaciones longitudinales en cada una de las direcciones se obtienen derivando el campo de deformaciones respecto a la dirección longitudinal del movimiento:

$$\varepsilon_z = -y_s \cdot \frac{d^2 v_n}{dz^2} \quad (3.10a)$$

$$\varepsilon_s = \frac{dv_{s0}}{ds} - y_s \cdot \frac{d^2 v_n}{ds^2} \quad (3.10b)$$

Donde ε_s es la deformación longitudinal en la dirección de la pared.

La deformación angular en el plano de la pared se obtiene, de acuerdo con la teoría de la elasticidad [124], derivando el campo de movimientos respecto a la dirección perpendicular al movimiento:

$$\gamma_{sz} = -y_s \cdot \frac{d^2 v_n}{dz ds} - y_s \cdot \frac{d^2 v_n}{ds dz} = -2 \cdot y_s \cdot \frac{d^2 v_n}{dz ds} \quad (3.11)$$

Aunque es cierto que, como se ha explicado previamente, la influencia de la curvatura en las deformaciones secundarias no se considerará como norma general, en ciertos cálculos sí que se tendrá en cuenta este efecto. Por lo tanto, se definirá la deformación angular perpendicular al plano de la pared (γ_{nz}).

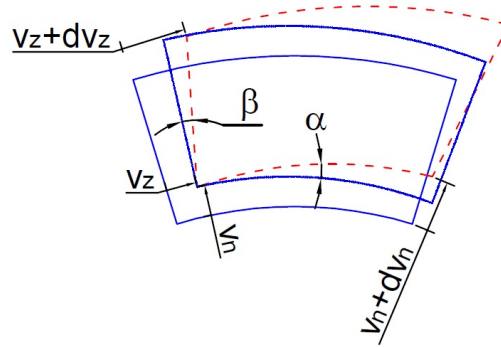


FIGURA 3.9 Deformación angular perpendicular a la pared de un elemento diferencial

Como se puede observar, la figura 3.9 es muy similar a la mostrada para la deformación angular, variando únicamente el desplazamiento en la dirección de la pared (v_s), que en este caso es el desplazamiento perpendicular (v_n). Es otras palabras, la deformación angular perpendicular a la pared se puede expresar como:

$$\gamma_{nz} = \frac{dv_n}{r \cdot d\theta} + \frac{dv_z}{dn} - \frac{dr}{r \cdot dn} \cdot v_z \quad (3.12)$$

En este caso, la variación del radio respecto a la perpendicular (dr/dn) es igual a la variación de x respecto a la perpendicular en sentido negativo ($-dx/dn$). Esta última, si se conserva el signo, es igual a la proyección en x del vector perpendicular a la pared ($-t_y$). Por lo tanto, la deformación angular perpendicular a la pared se puede expresar como:

$$\gamma_{nz} = \frac{R}{R-x} \cdot \left(\frac{dv_n}{dz} - t_y \cdot \frac{v_z}{R} \right) + \frac{dv_z}{dn} \quad (3.13)$$

Como se ha explicado anteriormente, la deformación angular anterior se considerará nula como norma general. Sin embargo, esta ecuación establece una relación entre el movimiento longitudinal y el movimiento perpendicular a nivel local que se empleará más adelante.

Una vez definida la forma de obtener las deformaciones en un elemento de pared a partir de un campo de movimientos cualquiera, se puede calcular la energía de deformación.

3.3.4 Energía de deformación

En este apartado se explicará la energía de deformación de un elemento diferencial de pared, con el objetivo de ilustrar cómo cada una de las deformaciones explicadas anteriormente contribuyen a la resistencia de la sección. Para ello, es necesario establecer las relaciones constitutivas en primer lugar.

Se supondrá que **los materiales son elásticos lineales**. En la dirección longitudinal, se empleará un módulo de elasticidad longitudinal (E). Para las tensiones tangenciales, se considerará un módulo de elasticidad transversal (G). En la dirección transversal, o dirección de la pared, se asumirá un comportamiento de placa [63] donde el módulo de elasticidad transversal (E_s) se tomará como:

$$E_s = E/(1 - \nu^2) \quad (3.14)$$

Donde ν es el módulo de Poisson del material.

Además, se supondrá que no existe deformación transversal debida a las tensiones longitudinales, y viceversa.

En resumen, las tensiones longitudinales (σ_z), transversales (σ_s) y tangenciales (τ_{sz}) se

pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \sigma_s \\ \tau_{sz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_s \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Como se puede observar, no existe relación cruzada entre deformaciones y tensiones. Esto se debe a que la influencia de las tensiones en dirección longitudinal en las tensiones perpendiculares a la pared se puede considerar despreciable, ya que generalmente no hay coacciones que limiten la deformación transversal en la fibra media de las paredes. Además, se tiene en cuenta la influencia de la restricción longitudinal en las tensiones transversales al considerar el comportamiento tipo placa.

Conocidas las relaciones constitutivas, la energía de deformación (U) se puede obtener directamente sumando la energía de deformación de todo el volumen de la pared. Este resultado se obtiene multiplicando las tensiones por las deformaciones y dividiendo entre dos. En este caso, al no existir términos cruzados, la energía de deformación se puede expresar como la suma de las deformaciones al cuadrado multiplicadas por su correspondiente módulo de elasticidad:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_V (E \cdot \varepsilon_z^2 + G \cdot \gamma_{sz}^2 + E_s \cdot \varepsilon_s^2) \cdot dV \quad (3.16)$$

Si se analiza la ecuación anterior, se puede ver que la energía de deformación total es la suma de la energía de deformación debida a las deformaciones longitudinales, angulares y transversales. Desarrollando un poco más cada uno de los términos e integrando para el espesor de la pared (t), se puede identificar la contribución de cada una de las deformaciones a la resistencia. El cálculo se muestra a continuación, suponiendo en este caso, por simplicidad, que la viga es recta.

En primer lugar se muestra cómo la energía de deformación longitudinal (U_ε) se puede descomponer en la energía de deformación debida a la deformación longitudinal de la sección en la fibra media de las paredes y la deformación debida a la flexión local de las paredes.

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left[\sum_p \left\{ \int_0^{l_s} \left(E \cdot t \cdot \left(\frac{dv_z}{dz} \right)^2 + \frac{E \cdot t^3}{12} \cdot \left(\frac{d^2v_n}{dz^2} \right)^2 \right) \cdot ds \right\} \right] dz \quad (3.17)$$

Como se puede observar, el primer término se corresponde con la deformación en la fibra media, mientras que el segundo término se corresponde con la deformación debida a la

flexión local de las paredes. Aplicado, por ejemplo, al caso de la flexión, el primer término equivale a la suma del área de la pared multiplicado por la distancia al cuadrado al centro de gravedad, mientras el segundo término equivale a la inercia local debida al espesor de la pared.

En el caso de la energía debida a la deformación angular (U_γ), también existen dos tipos de deformación angular: la que ocurre en la fibra media de la pared y la que varía a lo largo del espesor de la pared.

$$U_\gamma = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left[\sum_p \left\{ \int_0^{l_s} \left(G \cdot t \cdot \left(\frac{dv_z}{ds} + \frac{dv_s}{dz} \right)^2 + \frac{G \cdot t^3}{3} \cdot \left(\frac{d^2 v_n}{dz ds} \right)^2 \right) \cdot ds \right\} \right] dz \quad (3.18)$$

Utilizando el ejemplo de la torsión, el primer término se corresponde con la contribución debida a la deformación angular de las paredes en secciones cerradas, mientras que el segundo se refiere a la inercia a torsión local de las paredes, que aporta la rigidez a torsión uniforme en secciones abiertas.

El último de los términos de la energía de deformación se refiere a la energía de deformación transversal (U_s). En este caso, se pueden distinguir los términos debidos a la extensión de la pared y a la flexión de la pared.

$$U_s = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left[\sum_p \left\{ \int_0^{l_s} \left(E_s \cdot t \cdot \left(\frac{dv_s}{ds} \right)^2 + \frac{E_s \cdot t^3}{12} \cdot \left(\frac{d^2 v_n}{ds^2} \right)^2 \right) \cdot ds \right\} \right] dz \quad (3.19)$$

En resumen, los seis términos de la energía previamente expuestos resultan análogos al comportamiento de una placa: extensión en ambas direcciones (F_z, F_s), deformación angular (F_{sz}), flexión en ambas direcciones (M_{zz}, M_{ss}) y alabeo (M_{sz}). Por lo tanto, al considerar todos los términos de las ecuaciones energéticas anteriores se captura completamente el comportamiento de las estructuras de pared delgada.

3.4 Modos de deformación

3.4.1 Introducción

En este apartado se explicarán las características de los distintos modos de deformación y como se obtiene su campo de movimientos asociado.

En general, cualquier modo de deformación se puede representar como un desplazamiento unitario en la sección ($\overline{u_s(s)}$), que depende del punto de la sección, multiplicado por una función de intensidad ($\xi(z)$) que solo depende de la posición a lo largo de la viga. En el

caso del movimiento longitudinal, este se representa como un alabeo unitario ($w(s)$), que también depende solo de la posición en la sección, multiplicado por una función de intensidad ($\xi(z)$), que varía únicamente con la posición en la viga. Aunque se pueden vincular varias funciones de alabeo un determinado modo resistente, en este caso, **no se considera la influencia de las tensiones longitudinales en las tensiones tangenciales**, y, por lo tanto, se considerará un modo de alabeo solo por modo. Según lo expuesto anteriormente, los movimientos de un modo cualquiera se pueden representar como:

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = \xi(z) \cdot u_{sx}(s) \\ v_y = \xi(z) \cdot u_{sy}(s) \\ v_z = \zeta(z) \cdot w(s) \end{cases} \quad (3.20)$$

Para referirse a la función de alabeo correspondiente a la viga curva, esta se denotará con el superíndice c: w^c .

3.4.2 Axil

El modo de deformación de axil se define como un desplazamiento unitario longitudinal en el eje ($u_z(z)$). No tiene movimientos transversales asociados, por lo que el campo de movimientos depende únicamente de la dirección longitudinal z , y se puede expresar como el producto de la función de intensidad ($u_z(z)$) multiplicada por el alabeo curvo de axil ($w_n^c(s)$):

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = u_z(z) \cdot w_n^c(s) \end{cases} \quad (3.21)$$

Para obtener la función de alabeo w_n^c se hará la hipótesis, conocida para el caso de la viga recta, de que no existe deformación tangencial en la sección debido al axil. Además, al no existir movimientos transversales, el movimiento en la dirección de la pared es nulo ($u_s = 0$). Usando de la ecuación de la deformación tangencial 3.8, e imponiendo la condición de que no existe deformación angular, se puede obtener el alabeo a partir de la siguiente ecuación diferencial:

$$\gamma_{sz} = \frac{R}{R-x} \cdot \left(t_x \cdot \frac{u_z \cdot w_n^c}{R} \right) + u_z \cdot \frac{dw_n^c}{ds} = 0 \quad (3.22)$$

En la ecuación anterior aparece un término en función de x y otro en función de s . En este caso, se representará la derivada dependiente de s como dependiente de x e y . Para ello

se emplea la siguiente igualdad basada en el vector unitario de la sección:

$$\frac{df(s)}{ds} = t_x \cdot \frac{df(x)}{dx} + t_y \cdot \frac{df(y)}{dy} \quad (3.23)$$

De este modo, la ecuación 3.22 se puede reescribir como:

$$\frac{R}{R-x} \cdot \left(t_x \cdot \frac{u_z \cdot w_n^c}{R} \right) + u_z \cdot \left(t_x \cdot \frac{dw_n^c}{dx} + t_y \cdot \frac{dw_n^c}{dy} \right) = 0 \quad (3.24)$$

Si se supone una pared vertical donde el vector unitario sea $(t_x = 0, t_y = 1)$, se puede concluir que el alabeo debido al axil no depende de y . Además, al despejar la ecuación, se obtiene que la función de alabeo es el resultado de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dw_n^c}{w_n^c} = \frac{-1}{R-x}$$

La solución a esta ecuación es del tipo $w_n^c = k \cdot (R-x)$. Si se vuelve a la definición del modo axil como desplazamiento unitario longitudinal en el eje de la viga ($w_n^c(x=0) = 1$), se obtiene que $k = 1/R$, y en consecuencia, se puede definir el alabeo como:

$$w_n^c = \frac{R-x}{R} \quad (3.25)$$

En la figura 3.10 se muestra un ejemplo del alabeo en una sección cajón. En azul se representa el alabeo en la viga recta, en rojo el alabeo en la viga curva y en verde la diferencia entre ambos.

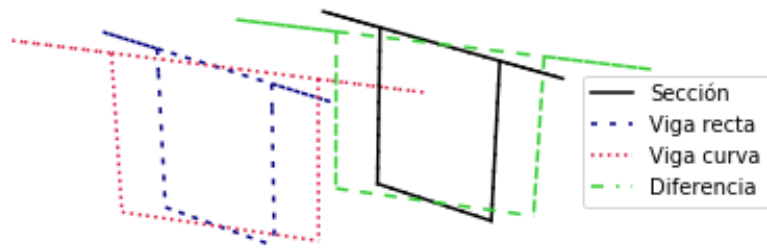


FIGURA 3.10 Alabeo axil

Conocido el alabeo, el campo de movimientos se define como:

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = u_z(z) \cdot \frac{R-x}{R} \end{cases} \quad (3.26)$$

En este caso, cuando el radio tiende hacia el infinito, el valor del alabeo tiende a uno, lo que se corresponde con el alabeo debido al axil para el caso de una viga recta.

Para obtener el alabeo local de las paredes se procederá de manera similar al alabeo global de la sección. Se partirá de la ecuación de la deformación transversal perpendicular a la pared 3.13, y se supondrá que esta es nula:

$$\gamma_{nz} = \frac{R}{R-x} \cdot \left(-t_y \cdot \frac{u_z \cdot w_n^c}{R} \right) + u_z \cdot \frac{dw_n^c}{dn} = 0 \quad (3.27)$$

En este caso, para expresar la variación del alabeo en la dirección perpendicular a la viga se va a hacer uso del vector unitario perpendicular ($\bar{n}$), en el cual se proyectará la variación del alabeo en coordenadas globales:

$$\frac{df(s)}{dn} = -t_y \cdot \frac{df(x)}{dx} + t_x \cdot \frac{df(y)}{dy} \quad (3.28)$$

Sustituyendo la igualdad anterior en la ecuación 3.27, la ecuación 3.28 se puede expresar como:

$$\frac{R}{R-x} \cdot \left(-t_y \cdot \frac{u_z \cdot w_n^c}{R} \right) + u_z \cdot \left(-t_y \cdot \frac{dw_n^c}{dx} + t_x \cdot \frac{dw_n^c}{dy} \right) = 0 \quad (3.29)$$

Como se puede observar, esta ecuación es idéntica a 3.24. La única diferencia es que los términos que dependían de t_x ahora dependen de t_y y viceversa. Por lo tanto, la solución de la ecuación es la misma, y el campo de movimientos en coordenadas locales se puede expresar como:

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = 0 \\ v_n = 0 \\ v_{sz} = v_z + u_z(z) \cdot \frac{t_y \cdot y_s}{R} \end{cases} \quad (3.30)$$

Donde el movimiento local es $x = -t_y \cdot y_s$.

3.4.3 Cortante-Flexión

En este apartado se estudiarán los movimientos perpendiculares al eje de la viga en dirección vertical y horizontal.

En primer lugar, se establecerán las hipótesis de cálculo. Se considerará que los **ejes principales de inercia de la sección se corresponden con los ejes X e Y de la viga**. Además,

al despreciar la influencia de las tensiones tangenciales en las tensiones longitudinales, se trabajará con la **hipótesis de Euler-Bernoulli**, y consecuentemente, se podrá expresar el giro como función de la derivada primera del movimiento perpendicular.

Una vez establecidas las hipótesis, el siguiente paso es definir las funciones de alabeo y los campos de movimientos.

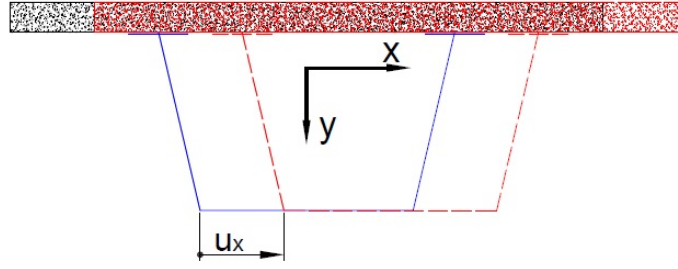


FIGURA 3.11 Movimiento en X

El movimiento horizontal se ha representado en la figura 3.11. Se define como un desplazamiento unitario 1 en la dirección del eje x multiplicado por una función de intensidad $u_x(z)$. La función de intensidad del alabeo se considerará proporcional a la variación del movimiento en x a lo largo de la viga:

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = u_x(z) \cdot 1 \\ v_y = 0 \\ v_z = \frac{d}{dz}(u_x(z)) \cdot w_x^c(s) \end{cases} \quad (3.31)$$

La función de alabeo curva debida a la flexión transversal (w_x^c) se obtiene de manera muy similar al caso del axil. Se considera que no existe deformación angular en la sección y se empleará de nuevo la ecuación 3.8. Además, el movimiento en la dirección del eje de la pared (v_s) se corresponde con la componente horizontal del vector unitario de dirección de la pared (t_x). Por lo tanto, la ecuación diferencial del alabeo curvo por flexión transversal (w_x^c) es la siguiente:

$$\gamma_{sz} = \frac{R}{R-x} \cdot \left(t_x \cdot \frac{du_x}{dz} + t_x \cdot \frac{du_x}{dz} \frac{w_x^c}{R} \right) + \frac{du_x}{dz} \cdot \frac{dw_x^c}{ds} = 0 \quad (3.32)$$

El término ds de la ecuación anterior se puede expresar en coordenadas globales mediante la ecuación 3.23. Además, en dicha transformación el término dependiente de y se va a considerar nulo. De este modo, la ecuación depende solamente de los términos

dependientes de t_x , y por lo tanto se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{R + w_x^c}{R - x} + \frac{dw_x^c}{dx} = 0 \quad (3.33)$$

Es bastante intuitivo observar como si se sustituye $w_x^c = -x$ en la ecuación anterior se obtiene la solución de la ecuación. No obstante, es importante recordar que esto solo se cumple si el centro de la viga se corresponde con el centro de gravedad de la sección. Además, este alabeo es coincidente con el alabeo de la viga recta, como se muestra en la figura 3.12.

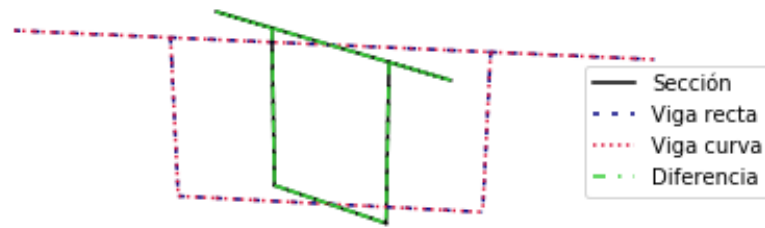


FIGURA 3.12 Alabeo movimiento en X

En resumen, el alabeo para un desplazamiento unitario del eje en sentido horizontal es el siguiente:

$$w_x^c = -x \quad (3.34)$$

Una vez conocido el alabeo, se puede expresar el campo de movimientos definitivo de la siguiente manera:

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = u_x(z) \cdot 1 \\ v_y = 0 \\ v_z = -\frac{d}{dz}(u_x(z)) \cdot x \end{cases} \quad (3.35)$$

El alabeo local de las paredes se obtiene a partir del movimiento perpendicular a la pared, que en este caso es $-u_x \cdot t_y$. Si se sustituye este movimiento en la ecuación de la deformación transversal perpendicular a la pared 3.13, se supone que no existe deformación transversal y se expresa el dn en coordenadas locales utilizando la ecuación 3.28, la ecuación diferencial del alabeo es la siguiente:

$$\gamma_n = \frac{R}{R - x} \cdot \left(-t_y \cdot \frac{du_x}{dz} - t_y \cdot \frac{du_x}{dz} \cdot \frac{w_x^c}{R} \right) - t_y \cdot \frac{du_x}{dz} \cdot \frac{dw_x^c}{dx} = 0 \quad (3.36)$$

Se puede observar que si se cambia t_x por $-t_y$ la ecuación es idéntica a la del alabeo de la fibra media. Por lo tanto, la función de alabeo es la misma que para el caso del alabeo global. En consecuencia, los movimientos se pueden representar en coordenadas locales del siguiente modo:

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = u_x(z) \cdot t_x \\ v_n = -u_x(z) \cdot t_y \\ v_{sz} = v_z + \frac{d}{dz}(u_x(z)) \cdot y_s \cdot t_y \end{cases} \quad (3.37)$$

Donde se ha expresado el alabeo como la suma del alabeo en la fibra media v_z y la coordenada local de x que es $-y_s \cdot t_y$.

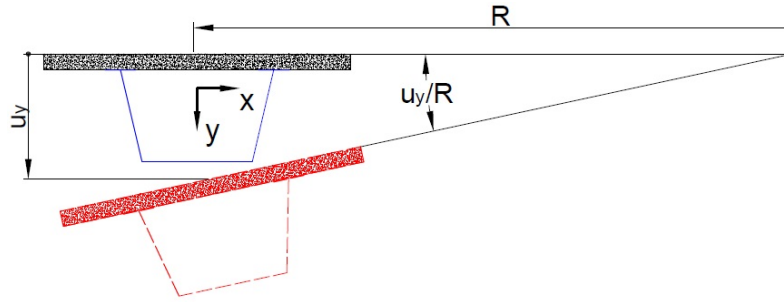


FIGURA 3.13 Movimiento en Y

En el caso del movimiento vertical, si se procediera de manera análoga al caso anterior, es decir, asumiendo un movimiento unitario en sentido vertical y suponiendo que no existe deformación angular, se llega a la conclusión de que la ecuación diferencial no tiene solución. Por lo tanto, es necesario redefinir el campo de movimientos asociado a un desplazamiento vertical en el eje. Siguiendo el ejemplo de Nakai [34], se define el campo de movimientos como la suma de un movimiento vertical unitario en el eje ($u_y(z)$) y un giro ¹ alrededor del centro de giro (x_t, y_t) de valor $-u_y(z)/R$. La figura 3.13 muestra el movimiento.

Se supone que la coordenada del centro de giro en x es coincidente con el centro de la sección. Esto, sumado a las hipótesis anteriores, implica que **la sección es simétrica respecto al eje vertical**. Además, se considera que la función de intensidad del alabeo es proporcional a la variación del movimiento en y a lo largo del eje de la viga.

En resumen, el campo de movimientos para un movimiento vertical unitario en el eje se

¹El campo de movimientos asociado al giro y la determinación del centro de giro se explica en el apartado 3.4.4.

define como:

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = u_y(z) \cdot \frac{y-y_t}{R} \\ v_y = u_y(z) \cdot \frac{R-x}{R} \\ v_z = \frac{d}{dz}(u_y(z)) \cdot w_y^c(s) \end{cases} \quad (3.38)$$

Para obtener la función de alabeo por flexión longitudinal (w_y^c) se procederá de manera análoga a los casos anteriores. Es decir, se sustituirá el campo de movimientos en la ecuación de la deformación angular 3.8 y esta se igualará a 0:

$$\gamma_{sz} = \frac{R}{R-x} \cdot \left(t_x \cdot \frac{y-y_t}{R} \cdot \frac{du_y}{dz} + t_y \cdot \frac{R-x}{R} \cdot \frac{du_y}{dz} + t_x \cdot \frac{du_y}{dz} \cdot \frac{w_y^c}{R} \right) + \frac{du_y}{dz} \cdot \left(\frac{dw_y^c}{ds} \right) = 0 \quad (3.39)$$

Usando la ecuación 3.23, se puede transformar la derivada respecto a s a coordenadas globales. Realizando este cambio, la ecuación anterior se puede reagrupar en torno a los vectores unitarios t_x y t_y . De esta manera, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$t_x \cdot \left(\frac{y-y_t}{R-x} + \frac{w_y^c}{R-x} + \frac{dw_y^c}{dx} \right) + t_y \cdot \left(1 + \frac{dw_y^c}{dy} \right) = 0$$

En este punto, se supondrá que la solución a la ecuación diferencial es del tipo $w_y^c = f(x) + g(y)$. Tomando el término de t_y e igualando a 0 resulta evidente que la solución para $g(y)$ es del tipo $g(y) = c - y$. Si se sustituye este término $g(y)$ en el alabeo que aparece en el término dependiente t_x , la ecuación diferencial queda de la siguiente forma:

$$\frac{c-y_t}{R-x} + \frac{f(x)}{R-x} + f'(x) = 0$$

Igualando c a y_t se obtiene una solución para $f(x)$ del tipo $f(x) = k \cdot (R-x)$. Por lo tanto, el alabeo se puede escribir como $w_y^c = k \cdot (R-x) + y_t - y$. Para despejar la constante, se impone la condición de que la suma de tensiones en longitudinal sea nula: $\int E \cdot w_y^c \cdot dA = 0$. Como la sección es referida al centro de gravedad y la suma de tensiones en x e y es nula, la condición resultante es:

$$\int E \cdot (k \cdot R + y_t) \cdot dA = 0$$

Dado que la integral anterior es la integral extendida al área de un valor constante $(k \cdot R + y_t)$, esta constante debe tener un valor nulo si la solución de la integral es nula. Por lo tanto, despejando el valor de k se obtiene $k = -y_t/R$. En resumen, el alabeo dependiente del movimiento vertical (w_y^c) se puede expresar como:

$$w_y^c = -y + \frac{x \cdot y_t}{R} \quad (3.40)$$

En la figura 3.14 se muestra un ejemplo de alabeo anterior para una sección cajón. En la figura, el azul se corresponde con la viga recta, el rojo con la viga curva y el verde con la diferencia entre ambos. Como se puede apreciar, la diferencia entre ambos alabeos es muy pequeña en este caso.

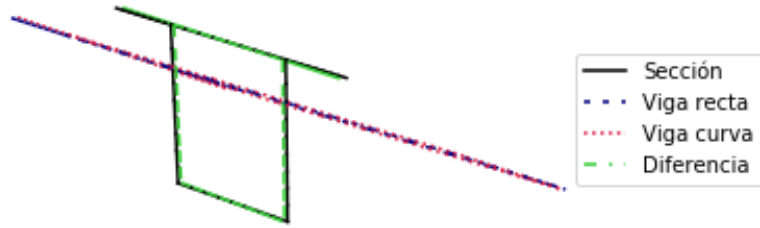


FIGURA 3.14 Alabeo movimiento en Y

En conclusión, el campo de movimientos asociado a un movimiento vertical en el eje se expresa como:

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = u_y(z) \cdot \frac{y - y_t}{R} \\ v_y = u_y(z) \cdot \frac{R - x}{R} \\ v_z = \frac{d}{dz}(u_y(z)) \cdot \left(-y + \frac{x \cdot y_t}{R}\right) \end{cases} \quad (3.41)$$

Para obtener el alabeo local, se partirá del movimiento de la sección perpendicular a la pared (v_n), que se define como:

$$v_n = u_y(z) \cdot \left(\frac{R - x}{R} \cdot t_x - \frac{y - y_t}{R} \cdot t_y \right) \quad (3.42)$$

Procediendo de manera análoga al movimiento en x , la ecuación diferencial del alabeo es:

$$\gamma_{nz} = \frac{R}{R-x} \cdot \left(-t_y \cdot \frac{y-y_t}{R} \cdot \frac{du_y}{dz} + t_x \cdot \frac{R-x}{R} \cdot \frac{du_y}{dz} - t_y \cdot \frac{du_y}{dz} \cdot \frac{w_y^c}{R} \right) + \frac{du_y}{dz} \cdot \left(\frac{dw_y^c}{ds} \right) = 0 \quad (3.43)$$

La ecuación vuelve a ser la misma que para la deformación angular en la fibra media 3.39, pero intercambiando los vectores unitarios. En consecuencia, la solución del alabeo es idéntica, y el campo de movimientos se puede expresar en coordenadas locales como:

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = u_y(z) \cdot \left(t_y + \frac{h_t + y_s}{R} \right) \\ v_n = u_y(z) \cdot \left(\frac{R-x}{R} \cdot t_x - \frac{y-y_t}{R} \cdot t_y \right) \\ v_{sz} = v_z - \frac{d}{dz}(u_y(z)) \cdot y_s \cdot \left(t_x + \frac{y_t}{R} \cdot t_y \right) \end{cases} \quad (3.44)$$

Donde h_t es la distancia de la pared al centro de giro que se explica en el siguiente apartado.

3.4.4 Torsión

La torsión se refiere al giro de sólido rígido de la sección alrededor un eje de giro paralelo al eje de la viga. El centro del eje de giro tiene por coordenadas (x_t, y_t) y el ángulo de giro se denomina θ_z . La distancia en perpendicular de la pared al centro de giro es h_t . En la figura 3.15 se muestra gráficamente lo anterior.

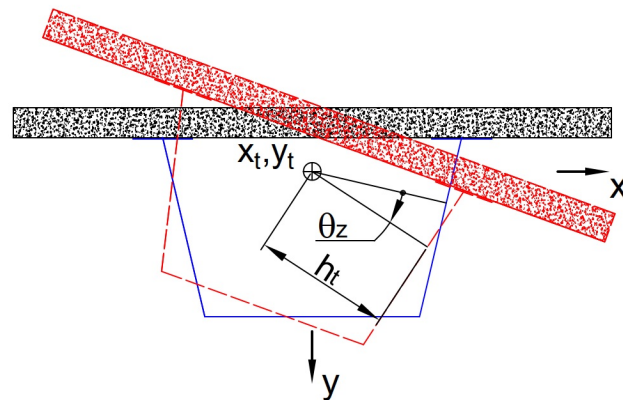


FIGURA 3.15 Giro de la sección

En este punto, es importante recordar que en apartado anterior se supuso que el movimiento vertical en el eje tenía asociado un giro de la sección $-u_y(z)/R$. Consecuentemente,

para estudiar la torsión, es necesario sumar el valor de ese giro al giro por torsión puro θ_z pero con sentido contrario. Además, se supone que el alabeo curvo por torsión (w_t^c) es proporcional a la variación del giro. Esto implica que el campo de movimientos asociado a la torsión se defina como:

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = - \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R} \right) \cdot (y - y_t) \\ v_y = \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R} \right) \cdot x \\ v_z = \frac{d}{dz} \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R} \right) \cdot w_t^c \end{cases} \quad (3.45)$$

El centro de giro (x_t, y_t) se puede obtener, a partir del procedimiento propuesto por Cambroner [18] en su trabajo, el cual se muestra en el apéndice D. En el caso de la viga curva **se considerará que el centro de giro es el mismo que en la viga recta**. Es decir, los movimientos en x e y van a ser los mismos y únicamente variará la función de alabeo w_t^c . Esta simplificación facilita la obtención de propiedades, y, sin embargo, no afecta a la precisión, ya que se tendrá en cuenta la interacción del alabeo por torsión con la flexión.

Para obtener la función de alabeo, no se puede suponer que la deformación angular sea nula en este caso, por lo que se debe comenzar con la ecuación de equilibrio 3.4. Al suponer que el alabeo es libre en longitudinal, no existen tensiones longitudinales, lo que permite expresar la ecuación diferencial 3.4 como:

$$\frac{d}{ds} (r^2 \cdot \tau_{sz}) = 0 \quad (3.46)$$

El procedimiento para resolver de esta ecuación es similar al empleado por Cambroner [18] en su trabajo. Se empleará el método de los residuos ponderados, utilizando una función de peso arbitraria ($\delta\chi$). De este modo, se puede expresar la ecuación en forma de ecuación integral del siguiente modo:

$$\int \left(\frac{\partial(r^2 \cdot \tau_{sz})}{\partial s} \cdot \delta\chi \right) dA = 0$$

Si se integra por partes, se obtiene por un lado, un término no integrable y por el otro, una integral donde la derivada se refiere ahora a la función de peso.

$$r^2 \cdot \tau_{sz} \cdot t \cdot \delta\chi \Big|_0^L - \int \left((r^2 \cdot \tau_{sz}) \cdot \frac{\partial(\delta\chi)}{\partial s} \right) dA = 0$$

En el caso de secciones abiertas, la tensión tangencial en el borde es nula, por lo que el término no integrable se anula. Si la sección es cerrada, el radio y la tensión en el punto de inicio y final son idénticos, lo que también anula el término no integrable. Esto permite

expresar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\int \left((r^2 \cdot \tau_{sz}) \cdot \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} \right) dA = 0 \quad (3.47)$$

La ecuación anterior se resolverá usando el método de Galerkin. **Se considerará una función de forma lineal**, aunque la solución del alabeo en una pared curva que varía en horizontal no es de tipo lineal. Se realiza esta aproximación por simplicidad, y se recomienda discretizar la pared en varios segmentos para favorecer el ajuste. La función de ponderación que se considera es el alabeo $\delta \chi = \delta w_t^c$. Por lo tanto, la solución del alabeo en una pared k de longitud L_p será del tipo:

$$w_t^c = [N_i] \cdot \{w_{tk}^c\} = w_{tk,1}^c \cdot \frac{L_p - s}{L_p} + w_{tk,2}^c \cdot \frac{s}{L_p}$$

Regresando a la ecuación 3.47, si se sustituye la tensión tangencial por la deformación angular multiplicada por el módulo de cortante G , la ecuación integral del alabeo en una viga curva que se obtiene es la siguiente:

$$\int \left((R - x)^2 \cdot G \cdot \left(\frac{R}{R - x} \cdot (-h_t + t_x \cdot \frac{w_t^c}{R}) + \frac{dw_t^c}{ds} \right) \cdot \left(\frac{\partial \delta w_t^c}{\partial s} \right) \right) dA = 0 \quad (3.48)$$

Donde el desplazamiento en la dirección de la pared adopta el valor de $-h_t$.

Existe una relación entre x y s del tipo $x = x_1 + s \cdot t_x$, donde x_1 es la coordenada x inicial de la pared. A partir de esta igualdad, se define R_1 como $R_1 = R - x_1$. Utilizando estos valores, la solución a la ecuación integral se puede expresar como un sistema de ecuaciones lineales del tipo

$$\overline{f}_t^c = \overline{K}_G^c \cdot \overline{w}_{t0}^c$$

Donde $\overline{K}_G^c$ se define como:

$$\overline{K}_G^c = \int G \cdot \left([\overline{N}_i']^t \cdot (R_1 - s \cdot t_x) \cdot t_x \cdot [\overline{N}_i] + [\overline{N}_i']^t \cdot (R_1 - s \cdot t_x)^2 \cdot [\overline{N}_i'] \right) dA \quad (3.49)$$

Que expresado de forma matricial resulta.

$$\overline{K}_G^c = G \cdot t \cdot (R_1 - \frac{L_p}{2} \cdot t_x) \cdot \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_p} - t_x & -\frac{R_1}{L_p} \\ t_x - \frac{R_1}{L_p} & \frac{R_1}{L_p} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Y el vector $\overline{f}_t^c$ se define como:

$$\overline{f}_t^c = \int G \cdot \left([\overline{N}_i^t]^t \cdot (R_1 - s \cdot t_x) \cdot R \cdot (-h_t) \right) dA \quad (3.51)$$

$$\overline{f}_t^c = G \cdot t \cdot \left(R_1 - \frac{L_p}{2} \cdot t_x \right) \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -h_t \\ h_t \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones anterior es necesario añadir una condición adicional. Concretamente, se va a imponer la condición de que la resultante de tensiones en la dirección del axil sea nula: $\int \sigma_z \cdot dA = 0$. Esto se consigue fijando el alabeo en uno de los nodos de la sección y, posteriormente, corrigiendo con el alabeo debido al axil en la viga curva. Se considera el alabeo debido al axil de la viga curva porque corregirlo, por ejemplo, utilizando un alabeo unitario, introduciría una deformación tangencial en los bordes de la sección que no es realista.

Tomando en cuenta lo mencionado anteriormente, se puede expresar que el alabeo torsor definitivo (w_t^c) es la suma del alabeo que se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones (w_{t0}^c), y el alabeo debido al axil (w_n^c) multiplicado por una constante (C_N) a determinar:

$$w_t^c = w_{t0}^c + C_N \cdot w_n^c$$

Para obtener la resultante de las tensiones, es necesario obtener la deformación longitudinal utilizando la ecuación 3.6, pero sin tener en cuenta los movimientos transversales:

$$\int E \cdot w_t^c \cdot \frac{R}{R-x} \cdot dA = \int E \cdot w_{t0}^c \cdot \frac{R}{R-x} \cdot dA + C_N \cdot \int E \cdot w_n^c \cdot \frac{R}{R-x} \cdot dA = 0$$

Dado que $w_n^c = (R-x)/R$, el término C_N se obtiene directamente dividiendo la suma de tensiones en el alabeo inicial entre el área:

$$C_N = - \frac{\int E \cdot w_{t0}^c \cdot \frac{R}{R-x} \cdot dA}{\int E \cdot dA} \quad (3.53)$$

El cálculo de las integrales se encuentra en el apéndice C, para lo cual se ha realizado una aproximación. Siguiendo la simplificación que realizan autores como Y. J. Kang [88], la función $R/(R-x)$ se puede aproximar mediante el desarrollo en serie de Taylor como:

$$\frac{R}{R-x} = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{x}{R} \right)^i \approx \frac{R+x}{R} \quad (3.54)$$

Esta aproximación resulta válida cuando el radio de la viga es mucho mayor que el ancho de la sección. Para tener un orden de magnitud de cual tiene que ser la relación entre el radio en planta (R) y el ancho del tablero (b), el error se puede cuantificar como $(b/2R)^2$, donde se define el error como el cociente de la variación entre el resultado real y estimado y el resultado real. Por ejemplo, para una relación $R/b = 2$ el error es aproximadamente un 6 %, lo cual indica que para esta aproximación es aceptable para la mayoría de tableros de puentes.

En la figura 3.16 se muestra un ejemplo del alabeo por torsión en una sección cajón. En azul se muestra el alabeo en la viga recta, en rojo el alabeo en la viga curva y en verde la diferencia entre ambos.

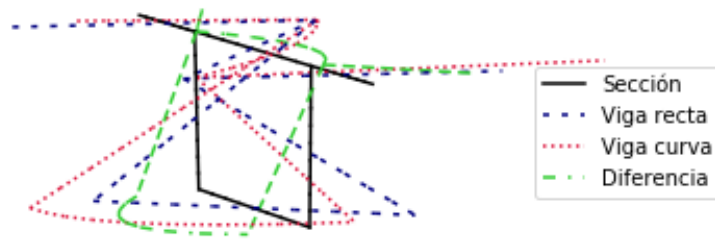


FIGURA 3.16 Alabeo torsión

Como se puede observar, la influencia de la curvatura se traduce principalmente en que el alabeo en los paneles horizontales deja de ser lineal. Sin embargo, al discretizar adecuadamente se consigue un ajuste aceptable mediante funciones de interpolación lineales.

En cuanto a los movimientos locales asociados a la torsión, en este caso se desprecia el efecto de la curvatura en el alabeo. Por lo tanto, se define el alabeo local como proporcional a la variación del movimiento perpendicular a la pared. Esta relación se estableció en la ecuación 3.9.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, los movimientos debidos a la torsión en coordenadas locales se pueden expresar como:

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R} \right) \cdot (-h_t - y_s) \\ v_n = \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R} \right) \cdot u_{tn} = \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R} \right) \cdot (x \cdot t_x + (y - y_t) \cdot t_y) \\ v_{sz} = v_z - \frac{d}{dz} \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R} \right) \cdot y_s \cdot u_{tn} = \\ v_z - \frac{d}{dz} \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R} \right) \cdot y_s \cdot (x \cdot t_x + (y - y_t) \cdot t_y) \end{cases} \quad (3.55)$$

Donde se ha introducido un término u_{tn} que sintetiza los movimientos en perpendicular a la pared y se define como:

$$u_{tn} = (x \cdot t_x + (y - y_t) \cdot t_y) \quad (3.56)$$

3.4.5 Distorsión

El concepto de distorsión se refiere a la deformación de la sección debido a un estado autoequilibrado de cargas que implica un movimiento en la dirección de alguna de las paredes de la sección. Estos movimientos se expresan como un movimiento unitario ($\bar{u}_d$) multiplicado por una función de intensidad (ψ_d) que depende de la posición a lo largo de la viga. Además, el alabeo (w_d^c) se representa como proporcional a la variación de la función de intensidad con signo negativo.

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = \psi_d(z) \cdot u_{dx} \\ v_y = \psi_d(z) \cdot u_{dy} \\ v_z = -\frac{d}{dz}(\psi_d(z)) \cdot w_d^c \end{cases} \quad (3.57)$$

En la figura 3.17 se muestra el campo de movimientos en transversal.

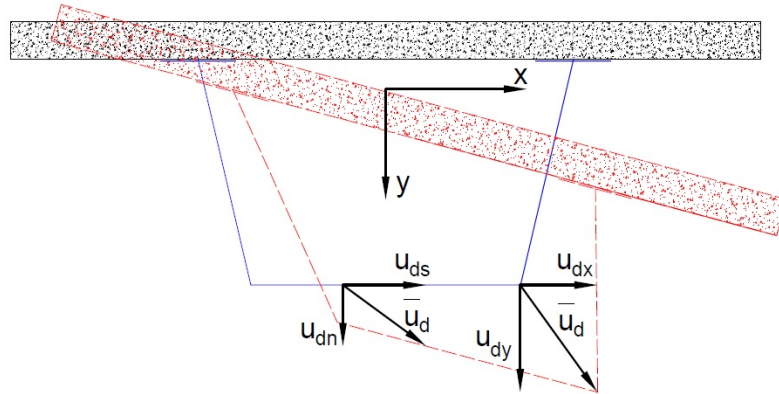


FIGURA 3.17 Movimientos

Se considera que los movimientos unitarios transversales de la sección son los mismos que en la viga recta. Es decir, solo va a variar la función de alabeo respecto a una viga recta. La determinación del campo de movimientos unitario se va a realizar de manera similar a Cambroner [18], pero variando la forma de ortogonalizar respecto a la torsión. Los principales pasos se describen a continuación.

En primer lugar, se parte de un estado autoequilibrado donde se aplican unas fuerzas exteriores ($\bar{P}$) que se equilibran con un flujo de cortante q_s en las paredes o con cualquier

otro sistema de fuerzas que se desee. En este caso, el flujo de cortante puede determinarse a partir de la distribución de rasantes generadas por los cortantes y la torsión, ya sea uniforme o alabeada. Específicamente, en el caso de una sección cajón, se omitirá la parte simétrica de las cargas, que se refiere a la flexión, y se supondrá que la carga externa queda equilibrada por el flujo de torsión uniforme, tal como se muestra en la figura 2.5 y como realizan numerosos autores. Además, se supondrá que las cargas actúan directamente sobre el alma, omitiendo la parte de torsión en voladizo que se muestra en la figura 2.6.

A partir del estado de cargas mencionado, se va a analizar la estructura como pórtico plano. Para resolver dicha estructura es necesario agregar tres condiciones de contorno, que pueden ser, por ejemplo, el empotramiento en uno de los nudos. La figura 3.18 muestra un ejemplo.

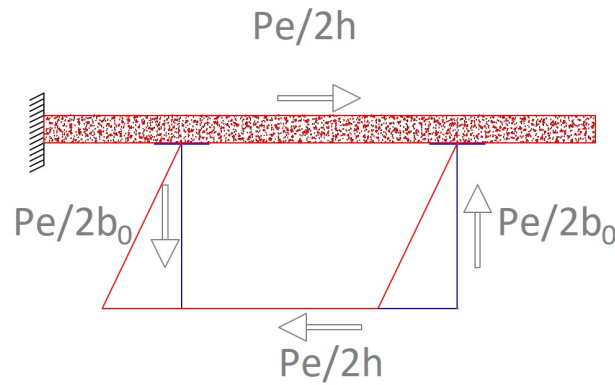


FIGURA 3.18 Ejemplo pórtico plano

Para resolver la estructura se aplica método matricial de rigidez $\bar{F}_d = \bar{K}_s \cdot \bar{u}_{d0}$. La matriz de rigidez de la sección ($\bar{K}_s$) está compuesta por barras de rigidez $E_s \cdot t^3/12$ y las fuerzas que actúan en la estructura ($\bar{F}_d$) se corresponden con el estado autoequilibrado de las cargas. La solución del pórtico anterior da como resultado unos movimientos u_{d0} .

En la ecuación de deformación angular 3.8, se observa que existe una relación entre el movimiento en la dirección de la pared (u_s) y el alabeo de la sección (w). Al aplicar la ecuación de equilibrio 3.3 y suponer que el alabeo es libre en longitudinal, se puede obtener la ecuación que relaciona el alabeo por distorsión w_d con un campo de movimientos cualquiera por distorsión ($\bar{u}_d$):

$$\frac{d\tau_{sz}}{ds} = G \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{d\psi_d}{dz} \cdot u_{ds} - \frac{d\psi_d}{dz} \cdot \frac{\partial w_d}{\partial s} \right) = 0 \quad (3.58)$$

La ecuación diferencial anterior puede resolverse utilizando el método de los residuos ponderados. La demostración se puede encontrar en el trabajo de Cambronero [18], y esta

conduce a resolver la ecuación mediante un sistema de ecuaciones del tipo $\overline{f_d} = \overline{K_G} \cdot \overline{w_{d0}}$. Dicha matriz $\overline{K_G}$ y vector de fuerzas $\overline{f_d}$ se definen como:

$$\overline{K_G} = \frac{G \cdot t}{L_p} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\overline{f_d} = G \cdot t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{u_{ds1} + u_{ds2}}{2} \quad (3.60)$$

En este caso, se ha empleado una función de interpolación lineal, que se corresponde con la solución de la ecuación diferencial:

$$w_d = [N_i] \cdot \{w_{dk}\} = w_{dk,1} \cdot \frac{L_p - s}{L_p} + w_{dk,2} \cdot \frac{s}{L_p}$$

Al igual que sucedió en el caso de la torsión, para resolver la ecuación se necesita imponer una condición adicional. Se considerará nuevamente la condición de que la resultante de tensiones en la dirección del axil sea nula: $\int \sigma_z \cdot dA = 0$.

Además de esta condición, se fijaron previamente tres condiciones para resolver el pórtico plano, lo que implica añadir otras tres condiciones adicionales para fijar el campo de deformaciones definitivo. Estas tres condiciones se refieren a la flexión, una por dirección, y a la torsión y se explicarán más adelante. Volviendo a la primera condición, si se le añade al alabeo resultante del sistema de ecuaciones w_{d0} un alabeo proporcional a la deformación por axil C_N , que en este caso es la unidad en toda la sección al tratarse de una viga recta, el alabeo resultante de suma de ambos es w_{d1} y se puede hacer nulo:

$$w_{d1} = w_{d0} + C_N \cdot 1$$

$$\int E \cdot w_{d1} \cdot dA = \int E \cdot w_{d0} \cdot dA + C_N \cdot \int E \cdot 1 \cdot dA = 0$$

Despejando en la ecuación anterior:

$$C_N = -\frac{\int E \cdot w_{d0} \cdot dA}{\int E \cdot dA} \quad (3.61)$$

Las dos siguientes condiciones que se van a imponer se refieren a la flexión, y significan que la suma de momentos flectores en la sección en ambos ejes debe ser nula:

$$\int y \cdot \sigma_z \cdot dA = 0 \text{ y } \int x \cdot \sigma_z \cdot dA = 0.$$

Si se supone que no existe deformación angular en el caso de la flexión, se puede obtener la relación entre un desplazamiento vertical en y y su correspondiente alabeo, y un desplazamiento horizontal en x y su alabeo a través de la ecuación 3.58. El movimiento en la pared asociado a un movimiento unitario en x es t_x , y el movimiento asociado a y es t_y . A partir de esto, se pueden obtener los alabeos asociados a los movimientos verticales y horizontales a través de dos ecuaciones diferenciales relativamente simples:

$$u_s - \frac{\partial w}{\partial s} = \begin{cases} t_x - t_x \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ t_y - t_y \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} = 0 \rightarrow \begin{cases} t_x \rightarrow w = x \\ t_y \rightarrow w = y \end{cases} \quad (3.62)$$

Esta relación permite obtener la correspondencia entre una variación del alabeo y una variación de movimientos. Por lo tanto, si se añade un alabeo proporcional a los movimientos en x (C_x) e y (C_y) a la función de alabeo w_{d1} , previamente corregida por el axil, se puede conseguir anular el momento en la función de alabeo:

$$w_{d2} = w_{d1} + C_x \cdot x + C_y \cdot y$$

En primer lugar, se procede respecto de x , despejando la constante de manera similar a como se realizó para el axil:

$$C_x = - \frac{\int E \cdot w_{d1} \cdot x \cdot dA}{\int E \cdot x^2 \cdot dA} \quad (3.63)$$

Posteriormente, con el alabeo corregido respecto a x , se procede a despejar la constante C_y :

$$C_y = - \frac{\int E \cdot (w_{d1} + C_x \cdot x) \cdot y \cdot dA}{\int E \cdot y^2 \cdot dA} \quad (3.64)$$

Una vez obtenidos los coeficientes, se le aplica la corrección correspondiente al campo de movimientos:

$$\overline{u_{d1}} = \begin{cases} u_{dx1} = u_{dx0} + C_x \\ u_{dy1} = u_{dy0} + C_y \end{cases}$$

El último paso para obtener el campo de movimientos consiste en establecer una condición respecto a la torsión. Cambronero [18] impone la condición de que la resultante de tensiones por distorsión no genere bimomento torsional ($\int w_t \cdot \sigma_z \cdot dA = 0$). Esta hipótesis se puede aplicar a todas las secciones, excepto aquellas cuyo alabeo por distorsión

(w_d) sea proporcional al alabeo por torsión (w_t) . Sin embargo, la función de alabeo en la teoría clásica de la distorsión aplicada a la sección cajón, que se puede encontrar en los libros de J.Schlaich [17] o C.Menn [125], impone la condición de que no hay rasantes en la sección. Aplicado a la sección cajón, esto se traduce en que la resultante de tensiones tangenciales debidas a la distorsión uniforme no genera torsión: $\int h_t \cdot \tau_{sz} \cdot dA = 0$.

Los cálculos realizados muestran que el modo de deformación resultante es mucho más estable en el caso de los cajones para la hipótesis de torsión uniforme que para el caso de bimomento torsor nulo. A título ilustrativo, se muestran a continuación los modos de deformación para una sección de 4 m de ancho de tablero, 2 m de ancho de cajón y 1 m de canto. En cada figura se muestran dos secciones. Ambas tienen una losa de 250 mm de hormigón y un alma de 20 mm. La única diferencia entre ellas es el espesor del ala inferior, que en una sección es de 20 mm y en la otra de 40 mm. En la figura 3.19 se muestra la comparativa de ambas secciones cuando se considera el bimomento torsional nulo, y en la figura 3.20 cuando se considera la torsión uniforme nula.

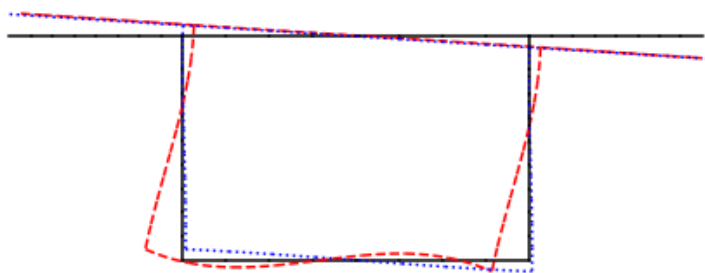


FIGURA 3.19 Condición bimomento nulo

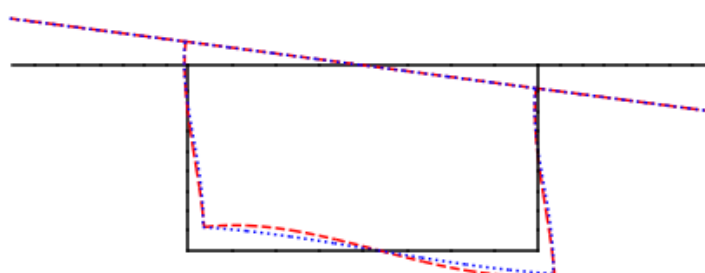


FIGURA 3.20 Condición torsión uniforme nula

Se puede observar que la variación que se produce en el modo de deformación es mucho más acusada en el caso del bimomento que en el caso de la torsión uniforme al variar el espesor del ala inferior. Por lo tanto, se considerará que las tensiones tangenciales debidas a la distorsión uniforme no generan momento torsor.

El factor de giro adicional se va a denominar C_t , y es proporcional al giro de la sección y

al alabeo. Por lo tanto, el alabeo corregido respecto a la torsión se puede expresar como:

$$w_{d3} = w_{d2} + C_t \cdot w_t$$

La deformación angular en la pared debida a la torsión se denomina t_t y se define como:

$$t_t = \frac{\partial w_t}{\partial s} - h_t \quad (3.65)$$

Y la deformación angular debida a la distorsión se denomina t_d y se define como:

$$t_d = u_{ds} - \frac{\partial w_d}{\partial s} \quad (3.66)$$

Para obtener la resultante de torsión uniforme, es equivalente calcular la tensión tangencial debida a la distorsión en una pared ($G \cdot t_d$) multiplicada por la distancia en perpendicular del centro de giro a la pared (h_t), que multiplicar la tensión tangencial debida a la distorsión por la tensión tangencial debida a la torsión con signo negativo ($-t_t$) (Véase Cambronero [18] pág. 65). Por lo tanto:

$$\int G \cdot t_d \cdot h_t \cdot dA = \int G \cdot t_d \cdot -t_t \cdot dA = 0$$

Si se suma a la deformación tangencial debida a distorsión sin corregir (t_{d0}) una deformación tangencial proporcional al torsor (t_t), y se sustituye en la ecuación anterior, es posible obtener el valor del coeficiente C_t de manera similar al caso de la flexión:

$$C_t = - \frac{\int G \cdot t_{d0} \cdot t_t \cdot dA}{\int G \cdot t_t \cdot t_t \cdot dA} \quad (3.67)$$

Si se hubiera planteado la resultante de bimomento nula, el coeficiente se obtendría de manera similar al caso de la flexión:

$$C_t = - \frac{\int E \cdot w_{d2} \cdot w_t \cdot dA}{\int E \cdot w_t \cdot w_t \cdot dA} \quad (3.68)$$

Obtenido el coeficiente C_t , el siguiente paso es modificar el campo de movimientos aplicando un giro proporcional a este valor:

$$\overline{u_{d2}} = \begin{cases} u_{dx2} = u_{dx1} - (y - y_t) \cdot C_t \\ u_{dy2} = u_{dy1} + x \cdot C_t \\ u_{d\theta2} = u_{d\theta0} + C_t \end{cases}$$

Donde se ha denominado $u_{d\theta}$ al giro en los nodos de la pared.

El último paso consiste en normalizar el campo de movimientos. Para ello, se elige un nodo cualquiera de la sección y una dirección, y se le asigna un valor determinado, que suele ser unitario. El cociente entre el valor deseado (u_d) y el valor sin corregir (u_{d2}) se denomina $C_d = u_d/u_{d2}$. El campo de movimientos definitivo es el resultado de multiplicar todos los movimientos por ese valor:

$$\overline{u_d} = \begin{cases} u_{dx} = C_d \cdot u_{dx2} \\ u_{dy} = C_d \cdot u_{dy2} \\ u_{d\theta} = C_d \cdot u_{d\theta2} \end{cases}$$

Este factor C_d también se aplica al alabeo:

$$w_d = C_d \cdot w_{d3}$$

Una vez definido el campo de movimientos, se puede obtener el alabeo debido a la distorsión para la viga curva (w_d^c) siguiendo un procedimiento similar al empleado para la torsión. La función de interpolación del alabeo que se empleará para la distorsión es lineal, al igual que en el caso de la torsión:

$$w_d^c = [N_i] \cdot \{w_{dk}^c\} = w_{dk,1}^c \cdot \frac{L_p - s}{L_p} + w_{dk,2}^c \cdot \frac{s}{L_p}$$

La ecuación integral resultante de sustituir en la ecuación 3.47 el campo de movimientos y las deformaciones angulares es la siguiente:

$$\int \left((R - x)^2 \cdot G \cdot \left(\frac{R}{R - x} \cdot (u_{ds} - t_x \cdot \frac{w_d^c}{R}) - \frac{dw_d^c}{ds} \right) \cdot \left(\frac{\partial \delta w_d^c}{\partial s} \right) \right) dA = 0 \quad (3.69)$$

La solución de la ecuación anterior se obtiene mediante un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\overline{f_d^c} = \overline{K_G^c} \cdot \overline{w_{d0}^c}$$

Donde $\overline{K_G^c}$ se define igual que en el caso de la torsión:

$$\overline{K_G^c} = \int G \cdot \left([\overline{N_i'}]^t \cdot (R_1 - s \cdot t_x) \cdot t_x \cdot [\overline{N_i}] + [\overline{N_i'}]^t \cdot (R_1 - s \cdot t_x)^2 \cdot [\overline{N_i'}] \right) dA \quad (3.70)$$

$$\overline{K_G^c} = G \cdot t \cdot \left(R_1 - \frac{L_p}{2} \cdot t_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_p} - t_x & -\frac{R_1}{L_p} \\ t_x - \frac{R_1}{L_p} & \frac{R_1}{L_p} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Y el vector $\overline{f}_d^c$ se define como:

$$\overline{f}_d^c = \int G \cdot \left([\overline{N}_i']^t \cdot (R_1 - s \cdot t_x) \cdot R \cdot (-u_{ds}) \right) dA \quad (3.72)$$

$$\overline{f}_d^c = G \cdot t \cdot \left(R_1 - \frac{L_p}{2} \cdot t_x \right) \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -u_{ds} \\ u_{ds} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

Nótese que se ha multiplicado toda la ecuación 3.69 por -1 para poder utilizar la misma matriz de rigidez que para el caso de la torsión.

Por las razones ya explicadas en el caso de la torsión, el alabeo definitivo debido a la distorsión (w_d^c) se obtiene como la suma del alabeo que se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones (w_{d0}^c) y un valor proporcional (C_N) al alabeo curvo debido al axil (w_n^c):

$$w_d^c = w_{d0}^c + C_N \cdot w_n^c \quad (3.74)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para el caso de la torsión, se puede obtener el valor del coeficiente C_N a partir de la siguiente ecuación:

$$C_N = - \frac{\int E \cdot w_{d0}^c \cdot \frac{R}{R-x} \cdot dA}{\int E \cdot dA} \quad (3.75)$$

Al igual que se explicó en el apartado de torsión, para resolver la integral del alabeo se pueden aproximar los efectos de la curvatura mediante el desarrollo en serie de Taylor. El cálculo de las integrales se detalla en el apéndice C.

Con el fin de ilustrar la influencia de la curvatura, la figura 3.21 muestra un ejemplo del alabeo por distorsión en una sección cajón. En azul se muestra el alabeo en la viga recta, en rojo el alabeo en la viga curva y en verde la diferencia entre ambos.

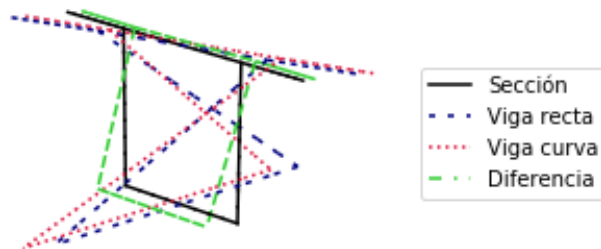


FIGURA 3.21 Alabeo distorsión

Los movimientos locales asociados a la distorsión se pueden expresar aplicando la relación de movimientos de la ecuación 3.1. En el alabeo local se despreciará el efecto de la curvatura, y se considerará proporcional a la variación de la distorsión, tal y como se hizo para el caso de la torsión:

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = \psi_d(z) \cdot (u_{ds} - y_s \cdot u_{d\theta}) = \psi_d(z) \cdot (t_x \cdot u_{dx} + t_y \cdot u_{dy} - y_s \cdot u_{d\theta}) \\ v_n = \psi_d(z) \cdot u_{dn} = \psi_d(z) \cdot (-t_y \cdot u_{dx} + t_x \cdot u_{dy}) \\ v_{sz} = v_z - \frac{d}{dz}(\psi_d(z)) \cdot y_s \cdot u_{dn} = \\ v_z - \frac{d}{dz}(\psi_d(z)) \cdot y_s \cdot (-t_y \cdot u_{dx} + t_x \cdot u_{dy}) \end{cases} \quad (3.76)$$

Donde $u_{d\theta}$ se define como la suma del giro de la pared ($u_{d\theta 0}$) y el giro debido a la flexión de la pared:

$$u_{d\theta} = u_{d\theta 0} + \frac{du_{dn}}{ds} \quad (3.77)$$

3.4.6 Resumen

A continuación se resumen los modos de deformación.

AXIL

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = u_z(z) \cdot \frac{R-x}{R} \end{cases}$$

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = 0 \\ v_n = 0 \\ v_{sz} = v_z + u_z(z) \cdot t_y \cdot \frac{y_s}{R} \end{cases}$$

FLEXIÓN

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = u_x(z) + u_y(z) \cdot \frac{y-y_t}{R} \\ v_y = u_y(z) \cdot \frac{R-x}{R} \\ v_z = -\frac{d}{dz}(u_x(z)) \cdot x + \frac{d}{dz}(u_y(z)) \cdot (-y + \frac{x \cdot y_t}{R}) \end{cases}$$

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = u_x(z) \cdot t_x + u_y(z) \cdot \left(t_y + \frac{h_t + y_s}{R}\right) \\ v_n = -u_x(z) \cdot t_y + u_y(z) \cdot \left(\frac{R-x}{R} \cdot t_x - \frac{y-y_t}{R} \cdot t_y\right) \\ v_{sz} = v_z + \frac{d}{dz}(u_x(z)) \cdot y_s \cdot t_y - \frac{d}{dz}(u_y(z)) \cdot y_s \cdot \left(t_x + \frac{y_t}{R} \cdot t_y\right) \end{cases}$$

TORSIÓN

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = -\left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R}\right) \cdot (y - y_t) \\ v_y = \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R}\right) \cdot x \\ v_z = \frac{d}{dz} \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R}\right) \cdot w_t^c \end{cases}$$

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R}\right) \cdot (-h_t - y_s) \\ v_n = \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R}\right) \cdot u_{tn} = \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R}\right) \cdot (x \cdot t_x + (y - y_t) \cdot t_y) \\ v_{sz} = v_z - \frac{d}{dz} \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R}\right) \cdot y_s \cdot u_{tn} = \\ v_z - \frac{d}{dz} \left(\theta_z(z) + \frac{u_y(z)}{R}\right) \cdot y_s \cdot (x \cdot t_x + (y - y_t) \cdot t_y) \end{cases}$$

DISTORSIÓN

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = \psi_d(z) \cdot u_{dx} \\ v_y = \psi_d(z) \cdot u_{dy} \\ v_z = -\frac{d}{dz}(\psi_d(z)) \cdot w_d^c \end{cases}$$

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = \psi_d(z) \cdot (u_{ds} - y_s \cdot u_{d\theta}) = \psi_d(z) \cdot (t_x \cdot u_{dx} + t_y \cdot u_{dy} - y_s \cdot u_{d\theta}) \\ v_n = \psi_d(z) \cdot u_{dn} = \psi_d(z) \cdot (-t_y \cdot u_{dx} + t_x \cdot u_{dy}) \\ v_{sz} = v_z - \frac{d}{dz}(\psi_d(z)) \cdot y_s \cdot u_{dn} = \\ v_z - \frac{d}{dz}(\psi_d(z)) \cdot y_s \cdot (-t_y \cdot u_{dx} + t_x \cdot u_{dy}) \end{cases}$$

TOTAL

$$\bar{v}(x, y, z) = \begin{cases} v_x = u_x - \theta_z \cdot (y - y_t) + \psi_d \cdot u_{dx} \\ v_y = u_y + \theta_z \cdot x + \psi_d \cdot u_{dy} \\ v_z = u_z \cdot \frac{R-x}{R} - \frac{du_x}{dz} \cdot x + \frac{du_y}{dz} \cdot (-y + \frac{x \cdot y_t}{R} + \frac{w_t^c}{R}) + \frac{d\theta_z}{dz} \cdot w_t^c - \frac{d\psi_d}{dz} \cdot w_d^c \end{cases} \quad (3.78)$$

$$\bar{v}_s(x, y, z) = \begin{cases} v_s = u_x \cdot t_x + u_y \cdot t_y + \theta_z \cdot (-h_t - y_s) + \psi_d \cdot (u_{ds} - y_s \cdot u_{d\theta}) \\ v_n = -u_x \cdot t_y + u_y \cdot t_x + \theta_z \cdot u_{tn} + \psi_d \cdot u_{dn} \\ v_{sz} = v_z + y_s \cdot \left(\left(\frac{u_z}{R} + \frac{du_x}{dz} \right) \cdot t_y - \frac{du_y}{dz} \cdot \left(t_x + \frac{t_y \cdot y_t}{R} + \frac{u_{tn}}{R} \right) - \frac{d\theta_z}{dz} \cdot u_{tn} - \frac{d\psi_d}{dz} \cdot u_{dn} \right) \end{cases} \quad (3.79)$$

El campo de movimientos final resulta, a excepción del signo del alabeo de torsión y la generalización del movimiento de distorsión, idéntico al propuesto por N.Park [85].

3.5 Cálculo de la viga

3.5.1 Introducción

En este apartado se explicarán las ecuaciones que rigen el comportamiento de la viga curva y los pasos necesarios para obtenerlas. Para ello se empleará el principio de la energía potencial mínima y el principio de los trabajos virtuales.

La energía total del sistema Π se puede expresar como la suma de la energía de deformación interna de la viga U y la energía potencial de las acciones exteriores W .

$$\Pi = U + W \quad (3.80)$$

Según Quiroga Sanmartín [126], un sistema estructural elástico, sometido a unas cargas exteriores cualesquiera, se deforma hasta obtener una posición en la cual su energía potencial es mínima. Es decir:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta W = 0 \quad (3.81)$$

Otra forma de llegar a la ecuación anterior es aplicando el principio de los trabajos virtuales [127]. En concreto, este principio permite expresar que la suma en todo el volumen de la viga del trabajo debido a la deformación longitudinal ($\sigma_z \cdot \delta \varepsilon_z$), la deformación angular ($\tau_{sz} \cdot \delta \gamma_{sz}$) y las deformaciones transversales ($\sigma_s \cdot \delta \varepsilon_s$) es igual, pero con signo contrario, al trabajo efectuado en el contorno de la pieza por las fuerzas exteriores ($\bar{P} \cdot \delta \bar{v}$):

$$\int_V \sigma_z \cdot \delta \varepsilon_z \cdot dV + \int_V \tau_{sz} \cdot \delta \gamma_{sz} \cdot dV + \int_V \sigma_s \cdot \delta \varepsilon_s \cdot dV = - \int_t \bar{P} \cdot \delta \bar{v} \cdot dA \quad (3.82)$$

Como se puede observar, esta ecuación se corresponde con variación de la energía de deformación mostrada en la ecuación 3.16. Por lo tanto, hablar de trabajos virtuales o principio de mínima energía es idéntico.

Para obtener la energía de deformación en la viga, primero se obtendrán las deformaciones en la viga curva a partir del campo de movimientos definido en el apartado 3.4 y las ecuaciones de deformación del apartado 3.3.3.

Posteriormente, se definirán una serie de resultantes y propiedades de la viga que se utilizarán para el cálculo de la viga. A partir de esas propiedades, y empleando los teoremas energéticos anteriores, se obtendrán las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la viga.

3.5.2 Deformaciones en la viga

En la sección 3.3.3 se han explicado las distintas deformaciones que puede haber en un elemento diferencial de pared. Estas se dividen en deformaciones longitudinales (ε_z), deformaciones angulares (γ_{sz}) y deformaciones transversales (ε_s).

Para obtener la deformación longitudinal, se sustituye en la ecuación de la deformación longitudinal 3.6 el campo de movimientos total (Ec. 3.78) obtenido previamente:

$$\varepsilon_z = \frac{R}{R-x} \left(u_z^I \cdot \frac{R-x}{R} - u_x^{II} \cdot x + u_y^{II} \cdot \left(-y + \frac{x \cdot y_t}{R} + \frac{w_t^c}{R} \right) + \theta_z^{II} \cdot w_t^c \right. \\ \left. - \psi_d^{II} \cdot w_d^c - \frac{u_x}{R} + \theta_z \cdot \frac{(y-y_t)}{R} - \psi_d \cdot \frac{u_{dx}}{R} \right) \quad (3.83)$$

Para obtener la deformación longitudinal local de las paredes se despreciará la influencia de la curvatura, excepto en la deformación local debida al giro de la sección. De este modo,

la deformación longitudinal adicional a la de la fibra media se puede expresar como:

$$\varepsilon_z = y_s \left(u_z^I \cdot \frac{t_y}{R} + u_x^{II} \cdot t_y - u_y^{II} \cdot \left(t_x + \frac{t_y \cdot y_t}{R} + \frac{u_{tn}}{R} \right) + \frac{\theta_z}{R} \cdot t_x - \theta_z^{II} \cdot u_{tn} - \psi_d^{II} \cdot u_{dn} \right) \quad (3.84)$$

Durante la obtención de los modos de deformación se explicó que solo se ha considerado deformación angular en la torsión y en la distorsión. Por lo tanto, la deformación angular total se expresa como la suma de la deformación angular debida a la torsión (t_t^c) y la deformación angular debida a la distorsión (t_d^c). Para obtener la deformación angular se emplea la ecuación 3.8 y se sustituyen los alabeos y movimientos en la dirección de la pared:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} = \frac{R}{R-x} \cdot \left(\left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \right) \cdot t_t^c + \psi_d^I \cdot t_d^c \right) = \\ \left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \right) \cdot \left(\frac{R}{R-x} \cdot \left(-h_t + t_x \cdot \frac{w_t^c}{R} \right) + \frac{dw_t^c}{ds} \right) \\ + \psi_d^I \cdot \left(\frac{R}{R-x} \cdot \left(u_{ds} - t_x \cdot \frac{w_d^c}{R} \right) - \frac{dw_d^c}{ds} \right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

De la ecuación anterior se puede obtener fácilmente la equivalencia de los términos t_t^c y t_d^c :

$$t_t^c = -h_t + t_x \cdot \frac{w_t^c}{R} + \frac{R-x}{R} \cdot \frac{dw_t^c}{ds} \quad (3.86)$$

$$t_d^c = u_{ds} - t_x \cdot \frac{w_d^c}{R} - \frac{R-x}{R} \cdot \frac{dw_d^c}{ds} \quad (3.87)$$

La deformación local angular de las paredes se puede obtener a partir de la ecuación 3.11 despreciando los efectos de la curvatura. Dicha deformación se puede expresar como:

$$\gamma_{sz} = -2 \cdot y_s \cdot \left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} + \psi_d^I \cdot u_{d\theta} \right) = -2 \cdot y_s \cdot \left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} + \psi_d^I \cdot \frac{du_{dn}}{ds} \right) \quad (3.88)$$

En cuanto a la deformación transversal, depende únicamente de la distorsión. Por lo tanto, se puede expresar en función del movimiento en la fibra media (u_{ds0}) y el giro ($u_{d\theta}$), que a su vez es proporcional la variación del movimiento en perpendicular a la pared (u_{dn}):

$$\varepsilon_s = \psi_d \cdot \left(\frac{du_{ds0}}{ds} - y_s \cdot \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right) \quad (3.89)$$

3.5.3 Características de la viga y resultantes

En este apartado se definirán los principales parámetros que permiten caracterizar el comportamiento de una viga curva, así como los esfuerzos resultantes que se emplearán más adelante.

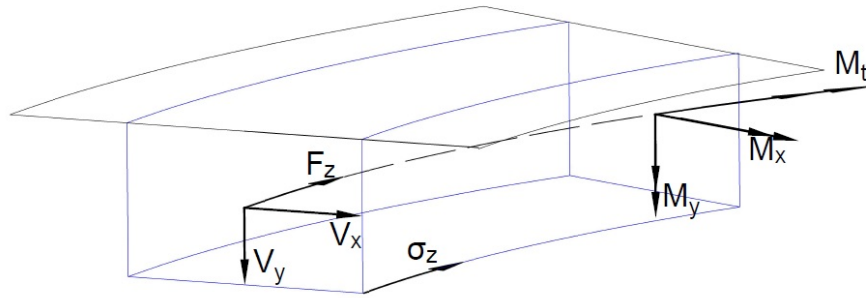


FIGURA 3.22 Resultantes

En primer lugar, y siguiendo el convenio de signos que se muestra en la figura 3.22, se definen las resultantes conocidas de fuerza axial (F_z), momentos flectores (M_x, M_y) y bimomentos (B_t, B_d). También se incluye la resultante de distorsión en x (F_{dx}):

$$F_z = \int \sigma_z \cdot dA \quad (3.90a)$$

$$M_x = \int \sigma_z \cdot (y + y_s \cdot t_x) \cdot dA \quad (3.90b)$$

$$M_y = - \int \sigma_z \cdot (x - y_s \cdot t_y) \cdot dA \quad (3.90c)$$

$$B_t = \int \sigma_z \cdot (w_t^c - y_s \cdot u_{tn}) \cdot dA \quad (3.90d)$$

$$B_d = \int \sigma_z \cdot (w_d^c + y_s \cdot u_{dn}) \cdot dA \quad (3.90e)$$

$$F_{dx} = \int \sigma_z \cdot u_{dx} \cdot dA \quad (3.90f)$$

Por otra parte, se define la resultante de torsión uniforme (M_{tu}) y distorsión uniforme (M_{du}):

$$M_{tu} = \int \tau_{sz} \cdot (t_t^c - 2 \cdot y_s) \cdot dA \quad (3.91a)$$

$$M_{du} = \int \tau_{sz} \cdot (t_d^c - 2 \cdot y_s \cdot u_{d\theta}) \cdot dA \quad (3.91b)$$

En este sentido, la resultante de deformación transversal (R_d) se define como la suma de las tensiones transversales (σ_s) multiplicadas por una deformación unitaria transversal

(ε_{su}) en toda la sección:

$$R_d = \int \sigma_s \cdot \varepsilon_{su} \cdot dA \quad (3.92)$$

Una que se han definido las resultantes, el siguiente paso es calcularlas. Para ello, se puede utilizar la ecuación constitutiva 3.15 para transformar las deformaciones calculadas en el apartado anterior en tensiones. En primer lugar, se procederá con las tensiones longitudinales en la fibra media, las cuales se expresarán en forma de multiplicación de vectores de la siguiente manera:

$$\sigma_z = E \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x & -y & w_t^c & -w_d^c & -u_{dx} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(u_z^I - \frac{u_x}{R} - \theta_z \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_x^{II} + \frac{u_z}{R} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_y^{II} - \frac{\theta_z}{R}\right) \\ \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R}\right) \\ \psi_d^{II} \\ \frac{\psi_d}{R} \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Las tensiones anteriores se pueden sustituir en las ecuaciones 3.90 previamente definidas. Es importante destacar que la parte dependiente del espesor de la pared y_s se anula cuando las tensiones se refieren a la fibra media debido a que estas son constantes para todo el espesor de la pared. Para referirse a estas nuevas resultantes en función de los movimientos, se empleará el superíndice L siguiendo el ejemplo de Kang [88]:

$$\begin{pmatrix} F_z^L \\ M_y^L \\ M_x^L \\ B_t^L \\ B_d^L \\ F_{dx}^L \end{pmatrix} = \int \frac{E \cdot R}{R-x} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & w_t^c & -w_d^c & -u_{dx} \\ -x & x^2 & y \cdot x & -w_t^c \cdot x & w_d^c \cdot x & u_{dx} \cdot x \\ y & -x \cdot y & -y^2 & w_t^c \cdot y & -w_d^c \cdot y & -u_{dx} \cdot y \\ w_t^c & -x \cdot w_t^c & -y \cdot w_t^c & (w_t^c)^2 & -w_d^c \cdot w_t^c & -u_{dx} \cdot w_t^c \\ w_d^c & -x \cdot w_d^c & -y \cdot w_d^c & w_t^c \cdot w_d^c & -(w_d^c)^2 & -u_{dx} \cdot w_d^c \\ u_{dx} & -x \cdot u_{dx} & -y \cdot u_{dx} & w_t^c \cdot u_{dx} & -w_d^c \cdot u_{dx} & -(u_{dx})^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(u_z^I - \frac{u_x}{R} - \theta_z \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_x^{II} + \frac{u_z}{R} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_y^{II} - \frac{\theta_z}{R}\right) \\ \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R}\right) \\ \psi_d^{II} \\ \frac{\psi_d}{R} \end{pmatrix}$$

Las tensiones correspondientes a la deformación local longitudinal de las paredes se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\sigma_z = E \cdot y_s \cdot \begin{pmatrix} t_y & -t_x & -u_{tn} & -u_{dn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(u_x^{II} + \frac{u_z^I}{R} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_y^{II} - \frac{\theta_z}{R}\right) \\ \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R}\right) \\ \psi_d^{II} \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Sustituyendo las tensiones anteriores en las resultantes definidas en la ecuación 3.90, se pueden definir las resultantes de tensiones locales como:

$$\begin{pmatrix} M_y^L \\ M_x^L \\ B_t^L \\ B_d^L \end{pmatrix} = \oint \frac{E \cdot t^3}{12} \cdot \begin{bmatrix} t_y^2 & -t_x \cdot t_y & -u_{tn} \cdot t_y & -u_{dn} \cdot t_y \\ t_y \cdot t_x & -t_x^2 & -u_{tn} \cdot t_x & -u_{dn} \cdot t_x \\ -t_y \cdot u_{tn} & t_x \cdot u_{tn} & u_{tn}^2 & u_{dn} \cdot u_{tn} \\ t_y \cdot u_{dn} & -t_x \cdot u_{dn} & -u_{tn} \cdot u_{dn} & -u_{dn}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(u_x^{II} + \frac{u_z^I}{R} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_y^{II} - \frac{\theta_z}{R}\right) \\ \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R}\right) \\ \psi_d^{II} \end{pmatrix}$$

Al integrar las tensiones, tanto globales como locales, de toda la sección, se pueden expresar las resultantes anteriores en forma de propiedades de la sección:

$$\begin{pmatrix} F_z^L \\ M_y^L \\ M_x^L \\ B_t^L \\ B_d^L \\ F_{dx}^L \end{pmatrix} = E_0 \cdot \begin{bmatrix} A^c & -Q_y^c & -Q_x^c & Q_t^c & -Q_d^c & -Q_u^c \\ -Q_y^c & I_y^c & I_{xy}^c & -I_{yw_t}^c & I_{yd}^c & I_{yu_{dx}}^c \\ Q_x^c & -I_{xy}^c & -I_x^c & I_{xw_t}^c & -I_{xd}^c & -I_{xu_{dx}}^c \\ Q_t^c & -I_{yw_t}^c & -I_{xw_t}^c & I_t^c & -I_{td}^c & -I_{tu_{dx}}^c \\ Q_d^c & -I_{yd}^c & -I_{xd}^c & I_{td}^c & -I_d^c & -I_{du}^c \\ Q_u^c & -I_{yu_{dx}}^c & -I_{xu_{dx}}^c & I_{tu_{dx}}^c & -I_{du}^c & -I_u^c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(u_z^I - \frac{u_x}{R} - \theta_z \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_x^{II} + \frac{u_z^I}{R} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_y^{II} - \frac{\theta_z}{R}\right) \\ \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R}\right) \\ \psi_d^{II} \\ \frac{\psi_d}{R} \end{pmatrix}$$

Para calcular las integrales anteriores se utilizará nuevamente la aproximación de los efectos de la curvatura mediante el desarrollo en serie de Taylor. En esta aproximación, se considera que $R/(R-x) \approx 1 + (x/R)$. Además, se considera la sección referida a los ejes principales de inercia, por lo que los momentos de primer orden de x e y son nulos así como el producto de $x \cdot y$.

En primer lugar se va a definir el área (A), los momentos de primer orden (Q_x, Q_y) y las inercias a flexión (I_x, I_y, I_{xy}) de la viga recta aplicando las simplificaciones previamente

expuestas:

$$\begin{aligned}
 A &= \int \frac{E}{E_0} \cdot dA \\
 Q_x &= \int \frac{E}{E_0} \cdot y \cdot dA = 0 \\
 Q_y &= \int \frac{E}{E_0} \cdot x \cdot dA = 0 \\
 I_x &= \int \frac{E}{E_0} \cdot y^2 \cdot dA \\
 I_y &= \int \frac{E}{E_0} \cdot x^2 \cdot dA \\
 I_{xy} &= \int \frac{E}{E_0} \cdot x \cdot y \cdot dA = 0
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

En base a las ecuaciones anteriores, el área curva (A^c) y los momentos de primer orden de flexión curvos (Q_x^c, Q_y^c) se pueden simplificar como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 A^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} dA \approx \int \frac{E}{E_0} \cdot \left(1 + \frac{x}{R}\right) dA = A \\
 Q_y^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot x \cdot dA \approx \int \frac{E}{E_0} \cdot \left(1 + \frac{x}{R}\right) \cdot x \cdot dA = \frac{I_y}{R} \\
 Q_x^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot y \cdot dA \approx \int \frac{E}{E_0} \cdot \left(1 + \frac{x}{R}\right) \cdot y \cdot dA = 0
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

El resto de los momentos de primer orden curvos (Q_t^c, Q_d^c, Q_u^c) que aparecen en la matriz se definen como:

$$\begin{aligned}
 Q_t^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_t^c \cdot dA = 0 \\
 Q_d^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_d^c \cdot dA = 0 \\
 Q_u^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot u_{dx} \cdot dA
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Es importante destacar que los momentos de primer orden de los alabeos de torsión y distorsión se anulan porque fue la condición que se impuso para su obtención.

Las inercias simples de la viga (I_i^c) se definen como:

$$\begin{aligned} I_x^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot y^2 \cdot dA + \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot t_x^2 \cdot ds \\ I_y^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot x^2 \cdot dA + \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot t_y^2 \cdot ds \\ I_t^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot (w_t^c)^2 \cdot dA + \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot u_{tn}^2 \cdot ds \\ I_d^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot (w_d^c)^2 \cdot dA + \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{Et^3}{12} \cdot u_{dn}^2 \cdot ds \\ I_u^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot (u_{dx})^2 \cdot dA \end{aligned} \quad (3.98)$$

Y las inercias compuestas (I_{ij}^c) se definen como:

$$\begin{aligned} I_{xy}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot x \cdot y \cdot dA - \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot t_x \cdot t_y \cdot ds \\ I_{xt}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_t^c \cdot y \cdot dA - \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot u_{tn} \cdot t_x \cdot ds \\ I_{xd}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_d^c \cdot y \cdot dA + \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot u_{dn} \cdot t_x \cdot ds \\ I_{xu}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot u_{dx} \cdot y \cdot dA \\ I_{yt}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_t^c \cdot x \cdot dA + \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot u_{tn} \cdot t_y \cdot ds \\ I_{yd}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_d^c \cdot x \cdot dA - \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot u_{dn} \cdot t_y \cdot ds \\ I_{yu}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot u_{dx} \cdot x \cdot dA \\ I_{td}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_d^c \cdot w_t^c \cdot dA - \oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot u_{tn} \cdot u_{dn} \cdot ds \\ I_{tu}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot u_{dx} \cdot w_t^c \cdot dA \\ I_{du}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot u_{dx} \cdot w_d^c \cdot dA \end{aligned} \quad (3.99)$$

En definitiva, las resultantes de tensiones se pueden expresar como:

$$\begin{pmatrix} F_z^L \\ M_y^L \\ M_x^L \\ B_t^L \\ B_d^L \\ F_{dx}^L \end{pmatrix} = E_0 \cdot \begin{bmatrix} A & -Q_y^c & 0 & 0 & 0 & -Q_u^c \\ -Q_y^c & I_y^c & I_{xy}^c & -I_{yt}^c & I_{yd}^c & I_{yu}^c \\ 0 & -I_{xy}^c & -I_x^c & I_{xt}^c & -I_{xd}^c & -I_{xu}^c \\ 0 & -I_{yt}^c & -I_{xt}^c & I_t^c & -I_{td}^c & -I_{tu}^c \\ 0 & -I_{yd}^c & -I_{xd}^c & I_{td}^c & -I_d^c & -I_{du}^c \\ Q_u^c & -I_{yu}^c & -I_{yu}^c & I_{tu}^c & -I_{du}^c & -I_u^c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(u_z^I - \frac{u_x}{R} - \theta_z \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_x^{II} + \frac{u_z^I}{R} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_y^{II} - \frac{\theta_z}{R}\right) \\ \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R}\right) \\ \psi_d^{II} \\ \frac{\psi_d}{R} \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

El sistema de ecuaciones planteado presenta un problema: prácticamente todos los esfuerzos están relacionados entre sí, lo que dificulta la obtención directa de las tensiones. No obstante, si se toman únicamente los elementos de la diagonal de la matriz anterior, se pueden obtener las resultantes que permiten el cálculo directo de las tensiones. Estas resultantes se designan con el superíndice T y se corresponden con el axil (F_z^T), los momentos flectores (M_x^T, M_y^T), los bimomentos (B_t^T, B_d^T) y la resultante de distorsión en x (F_{dx}^T):

$$\begin{pmatrix} F_z^T \\ M_y^T \\ M_x^T \\ B_t^T \\ B_d^T \\ F_{dx}^T \end{pmatrix} = E_0 \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_y^c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_x^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_d^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_u^c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(u_z^I - \frac{u_x}{R} - \theta_z \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_x^{II} + \frac{u_z^I}{R} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R}\right) \\ \left(u_y^{II} - \frac{\theta_z}{R}\right) \\ \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R}\right) \\ \psi_d^{II} \\ \frac{\psi_d}{R} \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

Mediante esta simplificación, la tensión longitudinal (σ_z) en la viga se puede expresar como:

$$\sigma_z = \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \left(\frac{F_z^T}{A} - x \cdot \frac{M_y^T}{I_y^c} + y \cdot \frac{M_x^T}{I_x^c} + w_t^c \cdot \frac{B_t^T}{I_t^c} + w_d^c \cdot \frac{B_d^T}{I_d^c} + u_{dx} \cdot \frac{F_{dx}^T}{I_u^c} \right) \quad (3.102)$$

La tensión tangencial en la fibra media se obtiene a partir de la ecuación constitutiva 3.15 y de la ecuación de deformación angular 3.85, y se expresa de manera vectorial como:

$$\tau_{sz} = G \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \begin{pmatrix} t_t^c & t_d^c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \right) \\ \psi_d^I \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

Siguiendo con la misma notación empleada en las tensiones longitudinales, las resultantes de momentos uniformes se pueden expresar del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} M_{tu}^L \\ M_{du}^L \end{pmatrix} = \int G \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \begin{bmatrix} (t_t^c)^2 & t_d^c \cdot t_t^c \\ t_t^c \cdot t_d^c & (t_d^c)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \right) \\ \psi_d^I \end{pmatrix}$$

En lo que respecta a la deformación angular local de las paredes, las tensiones se obtienen a partir de la ecuación de la deformación 3.88 y se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\tau_{sz} = G \cdot 2 \cdot y_s \cdot \begin{pmatrix} -1 & -u_{d\theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \right) \\ \psi_d^I \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

Por lo tanto, la resultante de las tensiones locales se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} M_{tu}^L \\ M_{du}^L \end{pmatrix} = \oint G \cdot \frac{t^3}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{d\theta} \\ u_{d\theta} & u_{d\theta}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \right) \\ \psi_d^I \end{pmatrix}$$

Integrando las tensiones para toda la sección, se pueden definir las resultantes en función de los parámetros de la sección y movimientos en el eje:

$$\begin{pmatrix} M_{tu}^L \\ M_{du}^L \end{pmatrix} = G_0 \cdot \begin{bmatrix} J_t^c & J_{td}^c \\ J_{td}^c & J_d^c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \right) \\ \psi_d^I \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

Donde la inercia de torsión uniforme (J_t^c), la inercia de distorsión uniforme (J_d^c) y la interacción entre torsión y distorsión uniforme (J_{td}^c) se definen como:

$$\begin{aligned} J_t^c &= \int \frac{G}{G_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot (t_t^c)^2 \cdot dA + \oint \frac{G}{G_0} \cdot \frac{t^3}{3} \cdot ds \\ J_d^c &= \int \frac{G}{G_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot (t_d^c)^2 \cdot dA + \oint \frac{G}{G_0} \cdot \frac{t^3}{3} \cdot u_{d\theta}^2 \cdot ds \\ J_{td}^c &= \int \frac{G}{G_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot t_t^c \cdot t_d^c \cdot dA + \oint \frac{G}{G_0} \cdot \frac{t^3}{3} \cdot u_{d\theta} \cdot ds \end{aligned} \quad (3.106)$$

También en este caso se van a definir las resultantes de torsión (M_{tu}^T) y distorsión (M_{du}^T) para el cálculo tensional, que se van a denotar con el superíndice T . Para ello se van a emplear una vez más los elementos de la diagonal:

$$\begin{pmatrix} M_{tu}^T \\ M_{du}^T \end{pmatrix} = G_0 \cdot \begin{bmatrix} J_t^c & 0 \\ 0 & J_d^c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \\ \psi_d^I \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

Esta simplificación permite expresar las tensiones tangenciales (τ_{sz}) como:

$$\tau_{sz} = \frac{G}{G_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \left(t_t^c \cdot \frac{M_{tu}^T}{J_t^c} + t_d^c \cdot \frac{M_{du}^T}{J_d^c} \right) \quad (3.108)$$

Finalmente, se definirán las tensiones transversales (σ_s). Para ello, se utilizarán una vez más las ecuaciones constitutivas 3.15 y la ecuación de la deformación transversal 3.89. De esta manera, se puede definir la tensión transversal como:

$$\sigma_s = E_s \cdot \psi_d \cdot \left(\frac{du_{ds0}}{ds} - y_s \cdot \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right) \quad (3.109)$$

Y la resultante de la deformación transversal se puede obtener de la siguiente manera:

$$R_d = \int E_s \cdot \psi_d \cdot \left(\frac{du_{ds0}}{ds} - y_s \cdot \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right)^2 \cdot dA \quad (3.110)$$

La resultante anterior también se puede expresar en función un parámetro K_d , el cual se corresponde con la rigidez de marco de la sección:

$$R_d = E_{s0} \cdot K_d \cdot \psi_d \quad (3.111)$$

La rigidez de marco (K_d) se puede obtener de dos maneras: integrando las deformaciones en toda la sección o, de manera más simplificada, a partir de las deformaciones de la sección ($\overline{u_d}$) y la matriz de rigidez la sección ($\overline{K_s}$):

$$K_d = \frac{\overline{u_d}^t \cdot \overline{K_s} \cdot \overline{u_d}}{E_{s0}} \quad (3.112)$$

Una vez que se han definido todas las resultantes y propiedades de la viga, se pueden obtener las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la viga curva.

3.5.4 Trabajo virtual de deformación de la viga

Una vez se ha definido la deformación, el siguiente paso consiste en obtener el trabajo virtual de la viga. Para ello, se expresará el diferencial de volumen dV como el producto de un diferencial de área de la sección dA multiplicado por la longitud a lo largo de la viga $(R - x)/R \cdot dz$. De esta manera, se puede expresar el trabajo como:

$$\delta U_\varepsilon = \int_l \int_A \sigma_z \cdot \delta \left(\left(u_z^I - \frac{u_x}{R} - \theta_z \cdot \frac{y_t}{R} \right) - x \cdot \left(u_x^{II} + \frac{u_z^I}{R} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R} \right) - y \cdot \left(u_y^{II} - \frac{\theta_z}{R} \right) + w_t^c \cdot \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R} \right) - w_d^c \cdot \psi_d^{II} - u_{dx} \cdot \frac{\psi_d}{R} \right) \cdot dA \cdot dz \quad (3.113a)$$

$$\delta U_\gamma = \int_l \int_A \tau_{sz} \cdot \delta \left(\left(\theta_z^I + \frac{u_y^I}{R} \right) \cdot t_t^c + \psi_d^I \cdot t_d^c \right) \cdot dA \cdot dz \quad (3.113b)$$

$$\delta U_s = \int_l \int_A \sigma_s \cdot \delta \left(\psi_d \cdot \left(\frac{du_{ds0}}{ds} - y_s \cdot \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right) \right) \cdot \frac{R - x}{R} \cdot dA \cdot ds \approx \int_l \int_A \sigma_s \cdot \delta \left(\psi_d \cdot \left(\frac{du_{ds0}}{ds} - y_s \cdot \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right) \right) \cdot dA \cdot dz \quad (3.113c)$$

Es importante señalar que en el último de los términos se ha despreciado la influencia de la curvatura en las tensiones tangenciales.

Sustituyendo las resultantes definidas en las ecuaciones 3.90, 3.91 y 3.92 en la ecuación del trabajo virtual, e integrando por partes, se puede expresar el trabajo virtual de la viga de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_l \left[\left(M_y^{II} - \frac{F_z}{R} \right) \delta u_x - \left(M_x^{II} + M_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R} - \frac{B_t^{II}}{R} + \frac{M_{tu}^I}{R} \right) \delta u_y \right. \\ \left. - \left(F_z^I + \frac{M_y^I}{R} \right) \delta u_z + \left(B_t^{II} + \frac{M_x}{R} - F_z \cdot \frac{y_t}{R} - M_{tu}^I \right) \delta \theta_z \right. \\ \left. - \left(B_d^{II} + \frac{F_{dx}}{R} + M_{du}^I - R_d \right) \delta \psi_d \right] dz \\ + \left[\left(-M_y^I \right) \delta u_x + (M_y) \delta u_x^I + \left(M_x^I + M_y^I \cdot \frac{y_t}{R} - \frac{B_t^I}{R} + \frac{M_{tu}}{R} \right) \delta u_y \right. \\ \left. - \left(M_x + M_y \cdot \frac{y_t}{R} - \frac{B_t}{R} \right) \delta u_y^I + \left(F_z + \frac{M_y}{R} \right) \delta u_z \right. \\ \left. + \left(M_{tu} - B_t^I \right) \delta \theta_z + (B_t) \delta \theta_z^I + \left(M_{du} + B_d^I \right) \delta \psi_d - (B_d) \delta \psi_d^I \right]_0^L \end{aligned} \quad (3.114)$$

3.5.5 Trabajo virtual potencial de las acciones exteriores

El trabajo virtual realizado por las acciones exteriores se obtiene al multiplicar las fuerzas que actúan en la estructura por el movimiento virtual de la viga.

Las fuerzas exteriores se clasifican en acciones puntuales $\bar{P}=(P_x, P_y, P_z)$ y acciones repartidas $\bar{p}=(p_x, p_y, p_z)$. A las resultantes en forma de fuerzas se les denomina $\bar{q}$ y a las resultantes en forma de momentos $\bar{m}$. Todo lo anterior se muestra en la figura 3.23.

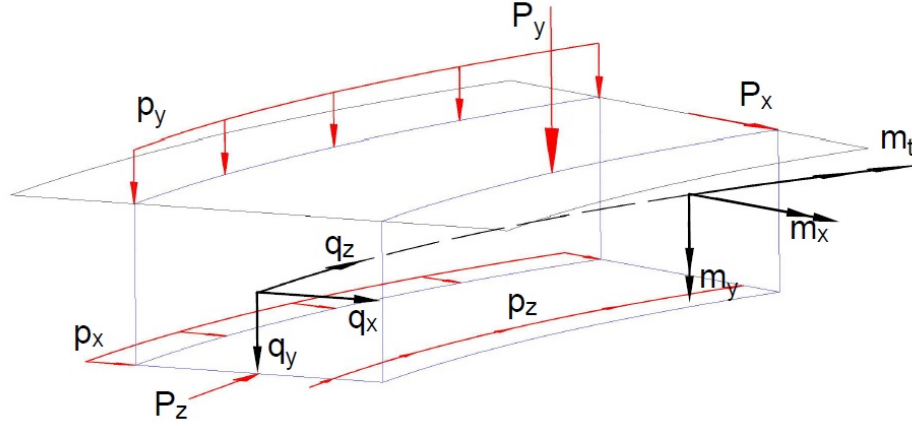


FIGURA 3.23 Fuerzas y resultantes

Si se denomina $\delta\bar{u}$ al desplazamiento virtual, el trabajo de las fuerzas exteriores se puede expresar como:

$$\delta W = \iint \bar{p} \cdot \delta\bar{u} \cdot dA \rightarrow \begin{cases} \delta W_x = \iint p_x \cdot \delta u_x \cdot dA \\ \delta W_y = \iint p_y \cdot \delta u_y \cdot dA \\ \delta W_z = \iint p_z \cdot \delta u_z \cdot dA \end{cases} \quad (3.115)$$

Remplazando los movimientos unitarios, que fueron definidos en la ecuación 3.78, la ecuación anterior se puede reescribir del siguiente modo:

$$\delta W_x = \iint p_x \cdot \delta (u_x - \theta_z \cdot (y - y_t) + \psi_d \cdot u_{dx}) \cdot dA \quad (3.116a)$$

$$\delta W_y = \iint p_y \cdot \delta (u_y + \theta_z \cdot x + \psi_d \cdot u_{dy}) \cdot dA \quad (3.116b)$$

$$\delta W_z = \iint p_z \cdot \delta \left(u_z \cdot \frac{R-x}{R} - u_x^I \cdot x + u_y^I \cdot \left(-y + \frac{x \cdot y_t}{R} + \frac{w_t^c}{R} \right) + \theta_z^I \cdot w_t^c - \psi_d^I \cdot w_d^c \right) \cdot dA \quad (3.116c)$$

El siguiente paso es obtener las resultantes de las acciones exteriores en el eje de la viga. Se distinguirá entre cargas puntuales ($\bar{P}$) y cargas distribuidas ($\bar{p}$), ya que, en un elemento diferencial de viga curva, la longitud del elemento en el eje de la viga no es la misma que en el resto del elemento. Por lo tanto, todas las resultantes de cargas distribuidas dependen

del radio donde se apliquen, cosa que no sucede con las puntuales al no tener longitud.

A continuación se definen las resultantes de fuerzas (q_x, q_y, q_z) debidas a las acciones exteriores en el eje de la viga:

$$q_x = \begin{cases} \int p_x \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ P_x \end{cases} \quad (3.117a)$$

$$q_y = \begin{cases} \int p_y \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ P_y \end{cases} \quad (3.117b)$$

$$q_z = \begin{cases} \int p_z \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ P_z \end{cases} \quad (3.117c)$$

Además, las resultantes de momentos flectores (m_x, m_y), momentos torsores (m_t), momentos distorsores (m_d) y bimomentos (b_t, b_d) en el eje de la viga se definen como:

$$m_x = \begin{cases} \int p_z \cdot y \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ y \cdot P_z \end{cases} \quad (3.118a)$$

$$m_y = \begin{cases} \int p_z \cdot -x \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ -x \cdot P_z \end{cases} \quad (3.118b)$$

$$m_t = \begin{cases} \int (-p_x \cdot y + p_y \cdot x) \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ -P_x \cdot y + P_y \cdot x \end{cases} \quad (3.118c)$$

$$m_d = \begin{cases} \int (p_x \cdot u_{dx} + p_y \cdot u_{dy}) \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ P_x \cdot u_{dx} + P_y \cdot u_{dy} \end{cases} \quad (3.118d)$$

$$b_t = \begin{cases} \int p_z \cdot w_t^c \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ w_t^c \cdot P_z \end{cases} \quad (3.118e)$$

$$b_d = \begin{cases} \int p_z \cdot w_d^c \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dx \\ w_d^c \cdot P_z \end{cases} \quad (3.118f)$$

Procediendo de manera análoga al cálculo de la energía de deformación en la viga, se sustituyen las resultantes de fuerzas 3.117 y momentos 3.118 en la ecuación del trabajo

virtual de las acciones exteriores 3.116, y se integran por partes. De este modo, se puede expresar el trabajo virtual de las acciones exteriores como:

$$\begin{aligned} \delta W = \int_l \left[(q_x - m_y^I) \delta u_x + \left(q_y + m_x^I + \frac{m_y^I \cdot y_t}{R} - \frac{b_t^I}{R} \right) \delta u_y + \left(q_z + \frac{m_y}{R} \right) \delta u_z \right. \\ \left. + (m_t - b_t^I + q_x \cdot y_t) \delta \theta_z + (m_d + b_d^I) \delta \psi_d \right] dz \\ + \left[(m_y) \delta u_x - \left(m_x + \frac{m_y \cdot y_t}{R} - \frac{b_t}{R} \right) \delta u_y + (b_t) \delta \theta_z - (b_d) \delta \psi_d \right]_0^L \end{aligned} \quad (3.119)$$

3.5.6 Ecuaciones de la viga

Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la viga curva se obtienen sumando el trabajo virtual de las acciones exteriores y el trabajo interno de deformación de la viga e igualando a cero, conforme a la ecuación 3.81. El trabajo virtual final debe ser nulo en cada uno de los movimientos virtuales. Por tanto, el resultado del cómputo del trabajo virtual es un sistema de ecuaciones diferenciales que permite modelar el comportamiento de la viga curva.

Para poder expresar el trabajo virtual interno de la viga en función de los movimientos en el eje se van a sustituir las resultantes que se calcularon en el apartado 3.5.3 en la ecuación del trabajo virtual de la viga 3.114. De este modo, el sistema de ecuaciones diferenciales queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -E_0 \cdot Q_y^c \cdot \left(u_z^{III} - 2 \cdot \frac{u_x^{II}}{R} - \theta_z^{II} \cdot \frac{y_t}{R} - \frac{u_z^I}{R^2} + u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R^2} \right) + \\ E_0 \cdot I_y^c \cdot \left(u_x^{IV} + \frac{u_z^{III}}{R} - u_y^{IV} \cdot \frac{y_t}{R} \right) + E_0 \cdot I_{xy}^c \cdot \left(u_y^{IV} - \frac{\theta_z^{II}}{R} \right) \\ - E_0 \cdot I_{yt}^c \cdot \left(\theta_z^{IV} + \frac{u_y^{IV}}{R} \right) + E_0 \cdot I_{yd}^c \cdot \psi_d^{IV} + E_0 \cdot I_{yu}^c \cdot \frac{\psi_d^{II}}{R} \\ - E_0 \cdot A \cdot \left(\frac{u_z^I}{R} - \frac{u_x}{R^2} - \theta_z \cdot \frac{y_t}{R^2} \right) + E_0 \cdot Q_u^c \cdot \frac{\psi_d}{R^2} = -q_x + m_y^I \end{aligned} \quad (3.120a)$$

$$\begin{aligned}
& -E_0 \cdot Q_y^c \cdot \left(u_z^{III} \cdot \frac{y_t}{R} - \frac{u_x^{II} \cdot y_t}{R^2} - \theta_z^{II} \cdot \left(\frac{y_t}{R} \right)^2 \right) - E_0 \cdot I_x^c \cdot \left(u_y^{IV} - \frac{\theta_z^{II}}{R} \right) \\
& + E_0 \cdot I_y^c \cdot \left(u_x^{IV} \cdot \frac{y_t}{R} + \frac{u_z^{III} \cdot y_t}{R^2} - u_y^{IV} \cdot \left(\frac{y_t}{R} \right)^2 \right) \\
& - E_0 \cdot I_{xy}^c \cdot \left(u_x^{IV} + \frac{u_z^{III}}{R} - 2 \cdot u_y^{IV} \cdot \frac{y_t}{R} + \frac{\theta_z^{II} \cdot y_t}{R^2} \right) \\
& + E_0 \cdot I_{xt}^c \cdot \left(\theta_z^{IV} + 2 \cdot \frac{u_y^{IV}}{R} - \frac{\theta_z^{II}}{R^2} \right) - E_0 \cdot I_{xd}^c \cdot \psi_d^{IV} - E_0 \cdot I_{xu}^c \cdot \frac{\psi_d^{II}}{R} \\
& - E_0 \cdot I_{yt}^c \cdot \left(\theta_z^{IV} \cdot \frac{y_t}{R} + 2 \cdot \frac{u_y^{IV} \cdot y_t}{R^2} - \frac{u_x^{IV}}{R} - \frac{u_z^{III}}{R^2} \right) + E_0 \cdot I_{yd}^c \cdot \psi_d^{IV} \cdot \frac{y_t}{R} \\
& + E_0 \cdot I_{yu}^c \cdot \frac{\psi_d^{II} \cdot y_t}{R^2} - E_0 \cdot I_t^c \cdot \left(\frac{\theta_z^{IV}}{R} + \frac{u_y^{IV}}{R^2} \right) + E_0 \cdot I_{td}^c \cdot \frac{\psi_d^{IV}}{R} + E_0 \cdot I_{tu}^c \cdot \frac{\psi_d^{II}}{R^2} \\
& + G_0 \cdot J_t^c \cdot \left(\frac{\theta_z^{II}}{R} + \frac{u_y^{II}}{R^2} \right) + G_0 \cdot J_{td}^c \cdot \frac{\psi_d^{II}}{R} = q_y + m_x^I + \frac{m_y^I \cdot y_t}{R} - \frac{b_t^I}{R}
\end{aligned} \tag{3.120b}$$

$$\begin{aligned}
& E_0 \cdot A \cdot \left(u_z^{II} - \frac{u_x^I}{R} - \theta_z^I \cdot \frac{y_t}{R} \right) + E_0 \cdot I_y^c \cdot \left(\frac{u_x^{III}}{R} + \frac{u_z^{II}}{R^2} - u_y^{III} \cdot \frac{y_t}{R^2} \right) \\
& - E_0 \cdot Q_y^c \cdot \left(2 \cdot \frac{u_z^{II}}{R} - \frac{u_x^I}{R^2} + u_x^{III} - \theta_z^I \cdot \frac{y_t}{R^2} - u_y^{III} \cdot \frac{y_t}{R} \right) \\
& + E_0 \cdot I_{xy}^c \cdot \left(\frac{u_y^{III}}{R} - \frac{\theta_z^I}{R^2} \right) - E_0 \cdot I_{yt}^c \cdot \left(\frac{\theta_z^{III}}{R} + \frac{u_y^{III}}{R^2} \right) + E_0 \cdot I_{yd}^c \cdot \frac{\psi_d^{III}}{R} \\
& + E_0 \cdot I_{yu}^c \cdot \frac{\psi_d^I}{R^2} - E_0 \cdot Q_u^c \cdot \frac{\psi_d^I}{R} = q_z + \frac{m_y}{R}
\end{aligned} \tag{3.120c}$$

$$\begin{aligned}
& -E_0 \cdot I_{yt}^c \cdot \left(u_x^{IV} + \frac{u_z^{III}}{R} - u_y^{IV} \cdot \frac{y_t}{R} \right) - E_0 \cdot I_{xt}^c \cdot \left(u_y^{IV} - 2 \cdot \frac{\theta_z^{II}}{R} - \frac{u_y^{II}}{R^2} \right) \\
& + E_0 \cdot I_t^c \cdot \left(\theta_z^{IV} + \frac{u_y^{IV}}{R} \right) - E_0 \cdot I_{td}^c \cdot \psi_d^{IV} - E_0 \cdot I_{tu}^c \cdot \frac{\psi_d^{II}}{R} - \\
& - E_0 \cdot I_{xy}^c \cdot \left(\frac{u_x^{II}}{R} + \frac{u_z^I}{R^2} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R^2} \right) - E_0 \cdot I_x^c \cdot \left(\frac{u_y^{II}}{R} - \frac{\theta_z^I}{R^2} \right) \\
& - E_0 \cdot I_{xd}^c \cdot \frac{\psi_d^{II}}{R} - E_0 \cdot I_{yu}^c \cdot \frac{\psi_d^I}{R^2} - E_0 \cdot A \cdot \left(u_z^I \cdot \frac{y_t}{R} - \frac{u_x^I \cdot y_t}{R^2} - \theta_z^I \cdot \left(\frac{y_t}{R} \right)^2 \right) \\
& + E_0 \cdot Q_y^c \cdot \left(\frac{u_x^{II} \cdot y_t}{R} + \frac{u_z^I \cdot y_t}{R^2} - u_y^{III} \cdot \left(\frac{y_t}{R} \right)^2 \right) + E_0 \cdot Q_u^c \cdot \frac{\psi_d \cdot y_t}{R^2} \\
& - G_0 \cdot J_t^c \cdot \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R} \right) - G_0 \cdot J_{td}^c \cdot \psi_d^{II} = -m_t + b_t^I - q_x \cdot y_t
\end{aligned} \tag{3.120d}$$

$$\begin{aligned}
& -E_0 \cdot I_{yd}^c \cdot \left(u_x^{IV} + \frac{u_z^{III}}{R} - u_y^{IV} \cdot \frac{y_t}{R} \right) - E_0 \cdot I_{xd}^c \cdot \left(u_y^{IV} - \frac{\theta_z^{II}}{R} \right) \\
& + E_0 \cdot I_{td}^c \cdot \left(\theta_z^{IV} + \frac{u_y^{IV}}{R} \right) - E_0 \cdot I_d^c \cdot \psi_d^{IV} - 2 \cdot E_0 \cdot I_{du}^c \cdot \frac{\psi_d^{II}}{R} \\
& E_0 \cdot Q_u^c \cdot \left(\frac{u_z^I}{R} - \frac{u_x}{R^2} - \theta_z \cdot \frac{y_t}{R^2} \right) - E_0 \cdot I_{yu}^c \cdot \left(\frac{u_x^{II}}{R} + \frac{u_z^I}{R^2} - u_y^{II} \cdot \frac{y_t}{R^2} \right) \\
& - E_0 \cdot I_{xu}^c \cdot \left(\frac{u_y^{II}}{R} - \frac{\theta_z}{R^2} \right) + E_0 \cdot I_{tu}^c \cdot \left(\frac{\theta_z^{II}}{R} + \frac{u_y^{II}}{R^2} \right) - E_0 \cdot I_u^c \cdot \frac{\psi_d}{R^2} \\
& + G_0 \cdot J_{td}^c \cdot \left(\theta_z^{II} + \frac{u_y^{II}}{R} \right) + G_0 \cdot J_d^c \cdot \psi_d^{II} - E_{s0} \cdot K_d \cdot \psi_d = m_d + b_d^I
\end{aligned} \tag{3.120e}$$

A partir de las condiciones de contorno de la ecuación del trabajo virtual de deformación de la viga (Ec. 3.114) se pueden deducir las siguientes igualdades:

$$M_{tw} = -B_t^I \tag{3.121a}$$

$$M_t = M_{tu} + M_{tw} \tag{3.121b}$$

$$M_{dw} = B_d^I \tag{3.121c}$$

$$M_d = M_{du} + M_{dw} \tag{3.121d}$$

$$V_x = -M_y^I \tag{3.121e}$$

$$V_y = M_x^I + M_y^I \cdot \frac{y_t}{R} + \frac{M_t}{R} \tag{3.121f}$$

Donde M_{tw} es el momento torsor no uniforme, M_t el momento torsor, M_{dw} el momento distorsor no uniforme, M_d el momento distorsor y V_x, V_y los esfuerzos cortantes.

3.6 Elemento finito

3.6.1 Introducción

En este apartado se definirá el elemento finito propuesto para el cálculo de vigas curvas.

El Método de los Elementos Finitos [75] permite aproximar el comportamiento de una viga continua mediante «elementos finitos» que se comportan de manera similar a los elementos reales «discretos». Este método relaciona los desplazamientos en los nodos ($\bar{u}$) con las fuerzas aplicadas ($\bar{f}$) mediante una matriz de rigidez ($\bar{K}$) del modo siguiente:

$$\bar{f} = \bar{K} \cdot \bar{u} \tag{3.122}$$

El fundamento del Método de los Elementos Finitos es el mismo que se empleó en el apartado anterior: minimización de la energía potencial en la estructura. En consecuencia, el primer paso es calcular la energía potencial de la estructura, y para ello se van a introducir algunos conceptos.

Los movimientos en los elementos finitos en un punto cualquiera de la viga ($\bar{u}$) se aproximan a partir de los movimientos ($\bar{u}_i$) en los n nodos que contiene el elemento mediante *funciones de forma* (N_i), también conocidas como funciones de interpolación.

$$\bar{u} = \sum_i^n \bar{N}_i \cdot \bar{u}_i \quad (3.123)$$

Una vez definidos los movimientos, es posible utilizar el operador $\bar{L}$ para relacionar las deformaciones en el eje de la viga, o deformaciones generalizadas, con las funciones de forma y los movimientos.

$$\begin{cases} \varepsilon_g = \sum_i^n \bar{L}_\varepsilon \cdot \bar{N}_i \cdot \bar{u}_i = \sum_i^n \bar{B}_{\varepsilon i} \cdot \bar{u}_i \\ \gamma_g = \sum_i^n \bar{L}_\gamma \cdot \bar{N}_i \cdot \bar{u}_i = \sum_i^n \bar{B}_{\gamma i} \cdot \bar{u}_i \\ \varepsilon_{sg} = \sum_i^n \bar{L}_s \cdot \bar{N}_i \cdot \bar{u}_i = \sum_i^n \bar{B}_{s i} \cdot \bar{u}_i \end{cases} \quad (3.124)$$

Donde la matriz $\bar{B}$ es el resultado de multiplicar $\bar{L}$ por $\bar{N}_i$, ε_g es la deformación generalizada longitudinal, γ_g es la deformación generalizada angular y ε_{sg} la deformación generalizada transversal.

En base a lo anterior, se puede expresar la energía potencial de la viga como:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \cdot (\bar{u}_i)^t \int \left(\left[\bar{B}_\varepsilon \right]^t \cdot \left[\bar{D}_\varepsilon \right] \cdot \left[\bar{B}_\varepsilon \right] + \left[\bar{B}_\gamma \right]^t \cdot \left[\bar{D}_\gamma \right] \cdot \left[\bar{B}_\gamma \right] \right. \\ \left. + \left[\bar{B}_s \right]^t \cdot \left[\bar{D}_s \right] \cdot \left[\bar{B}_s \right] \right) \cdot dz (\bar{u}_i) - (\bar{u}_i)^t \int \bar{N}_i \cdot \bar{q}_i \cdot dz \end{aligned} \quad (3.125)$$

Donde las matrices $\bar{D}$ representan las propiedades elásticas de la sección.

Al aplicar el principio de mínima energía potencial, que establece que la variación de la energía en el punto de equilibrio debe ser nula, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\bar{u}_i) = \Pi(\bar{u}_i + \delta \bar{u}_i) - \Pi(\bar{u}_i) = \\ (\delta \bar{u}_i)^t \int \left(\left[\bar{B} \right]^t \cdot \left[\bar{D} \right] \cdot \left[\bar{B} \right] \right) \cdot dz (\bar{u}_i) - (\delta \bar{u}_i)^t \int \bar{N}_i \cdot \bar{q}_i \cdot dz = 0 \end{aligned} \quad (3.126)$$

Dado que tanto las funciones de forma como las propiedades elásticas de la sección y las cargas son conocidas, las únicas incógnitas son los desplazamientos ($\bar{u}_i$). La ecuación anterior se puede resolver mediante un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\bar{f} = \bar{\bar{K}} \cdot \bar{u}_i \quad (3.127)$$

Donde $\bar{\bar{K}}$ y $\bar{f}$ se definen como:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{K}} = \int \left([\bar{B}]^t \cdot [\bar{D}] \cdot [\bar{B}] \right) \cdot dz = \\ \int \left([\bar{B}_\varepsilon]^t \cdot [\bar{D}_\varepsilon] \cdot [\bar{B}_\varepsilon] + [\bar{B}_\gamma]^t \cdot [\bar{D}_\gamma] \cdot [\bar{B}_\gamma] + [\bar{B}_s]^t \cdot [\bar{D}_s] \cdot [\bar{B}_s] \right) \cdot dz \end{aligned} \quad (3.128)$$

$$\bar{f} = \int \bar{N}_i \cdot \bar{q}_i \cdot dz \quad (3.129)$$

En los siguientes apartados se explicarán cada uno de los términos que componen la matriz de rigidez, los pasos para obtenerla y las funciones de forma que se emplearán.

3.6.2 Grados de libertad y funciones de forma

Los movimientos en los nodos ($\bar{u}_i$) explicados en el apartado anterior se denominan *grados de libertad*. A su vez, estos movimientos sirven como base para realizar la interpolación mediante las funciones de forma.

El elemento finito que se va a plantear es de tipo **binodal** y va de un nodo i a un nodo j . Esto significa que los grados de libertad se corresponden con los movimientos en los extremos del elemento. Dado que, en casi todos los casos, el alabeo se ha establecido como proporcional a la variación del movimiento, el grado de continuidad máximo requerido es C^1 . Por lo tanto, las incógnitas en los nodos son el movimiento y su variación, expresado como su derivada primera. Solo en el caso del axil se emplearán funciones con continuidad C^0 , donde el grado de libertad es solo el movimiento.

En concreto, los grados de libertad son los movimientos mencionados en el apartado 3.4: movimiento en horizontal (u_x) y su variación (u_x^I), movimiento en vertical (u_y) y su variación (u_y^I), movimiento en longitudinal (u_z), giro de la viga (θ_z) y su variación (θ_z^I) y distorsión de la sección (ψ_d) y su variación (ψ_d^I). Para un nodo, se expresan en forma de vector de la siguiente manera:

$$(\bar{u}_i)^t = (u_{xi}, u_{xi}^I, u_{yi}, u_{yi}^I, u_{zi}, \theta_{zi}, \theta_{zi}^I, \psi_{di}, \psi_{di}^I) \quad (3.130)$$

Los grados de libertad del elemento se muestran en la figura 3.24.

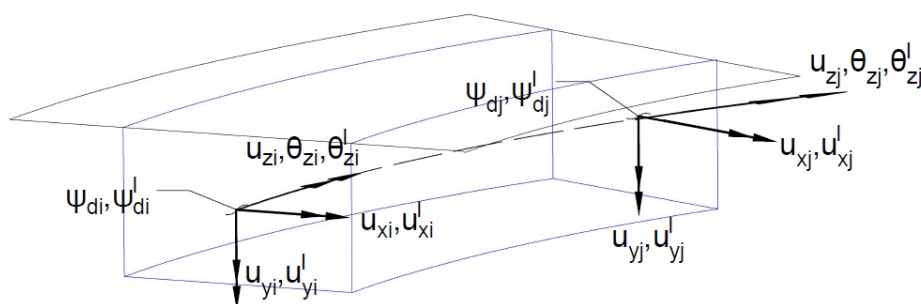


FIGURA 3.24 Grados de libertad

Para determinar las funciones de forma, se ha descartado el empleo de funciones de forma basadas en la solución exacta de las ecuaciones diferenciales, principalmente debido al alto nivel de acoplamiento entre los movimientos. Este acoplamiento requiere una resolución de las ecuaciones diferenciales deba ser numérica, lo que alarga significativamente los tiempos de cálculo. Por esta razón, autores como Park [85] han empleado funciones de forma basadas en soluciones exactas de vigas curvas doblemente simétricas. Sin embargo, estas funciones son menos intuitivas y no se considera que aporten una mejora significativa como se explicará en el siguiente párrafo. Por lo tanto, **se van a utilizar funciones de forma polinómicas**. En el caso del movimiento longitudinal se va a emplear una función de interpolación lineal, mientras que en el resto de casos se va a emplear una función de interpolación cúbica.

En el libro *El Método de los Elementos Finitos* [75], en el capítulo de barras curvas y láminas de revolución del Volumen 2, se utilizan funciones de interpolación polinómicas iguales a las que se emplearán en este caso. El libro se menciona que solo se han encontrado discrepancias en los casos donde predominan los esfuerzos de membrana, aunque estas discrepancias disminuyen a medida que se reduce el tamaño de los elementos. Esta conclusión también parece aplicable al caso del elemento finito propuesto, y coincide con las funciones empleadas por Park [85], que originalmente fueron obtenidas por Kang al estudiar efectos de segundo orden en vigas curvas, especialmente inestabilidades en arcos. Sin embargo, en el caso de los tableros de puente sometidos a cargas verticales, el movimiento longitudinal en el eje de la viga es muy pequeño en comparación con el resto de esfuerzos, por lo que esta interacción se puede considerar despreciable. Además, las pruebas realizadas demuestran que el empleo de funciones de forma polinómicas aporta suficiente precisión para el cálculo de tableros curvos convencionales.

Las funciones de forma $\overline{N}_i$ que se van a emplear para el movimiento longitudinal son las

siguientes:

$$\overline{N}_i = \begin{cases} N_1 = \frac{L-z}{L} \\ N_2 = \frac{z}{L} \end{cases} \quad (3.131)$$

Y se representan gráficamente a continuación junto a su derivada primera:

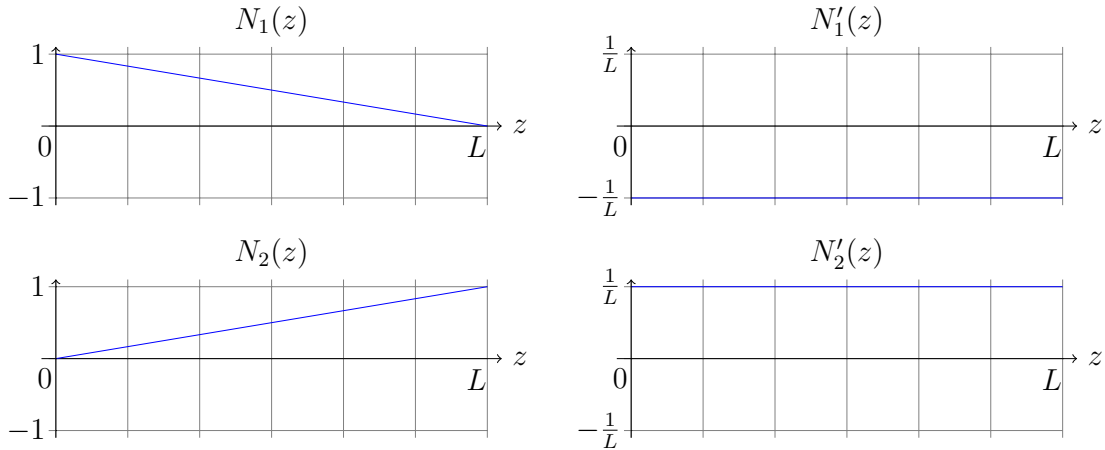


FIGURA 3.25 Funciones de forma lineales

Las funciones de forma cúbicas ($\overline{H}_{ij}$) que se usarán para los otros movimientos son funciones de interpolación polinómicas de Hermite. Se ha establecido la condición de que cada grado de libertad y su derivada asociada se corresponde con una de las funciones. En otras palabras, solo una función de las cuatro que forman cada movimiento tiene un valor distinto de 0 en los extremos.

Las funciones de forma cúbica que se van a emplear son las siguientes:

$$\overline{H}_{ij} = \begin{cases} H_{11} = 1 - 3 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^3 \\ H_{12} = L \cdot \left(1 \cdot \left(\frac{z}{L}\right) - 2 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^3\right) \\ H_{21} = 3 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^3 \\ H_{22} = L \cdot \left(-1 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{z}{L}\right)^3\right) \end{cases} \quad (3.132)$$

Y su representación gráfica se muestra en la figura 3.26:

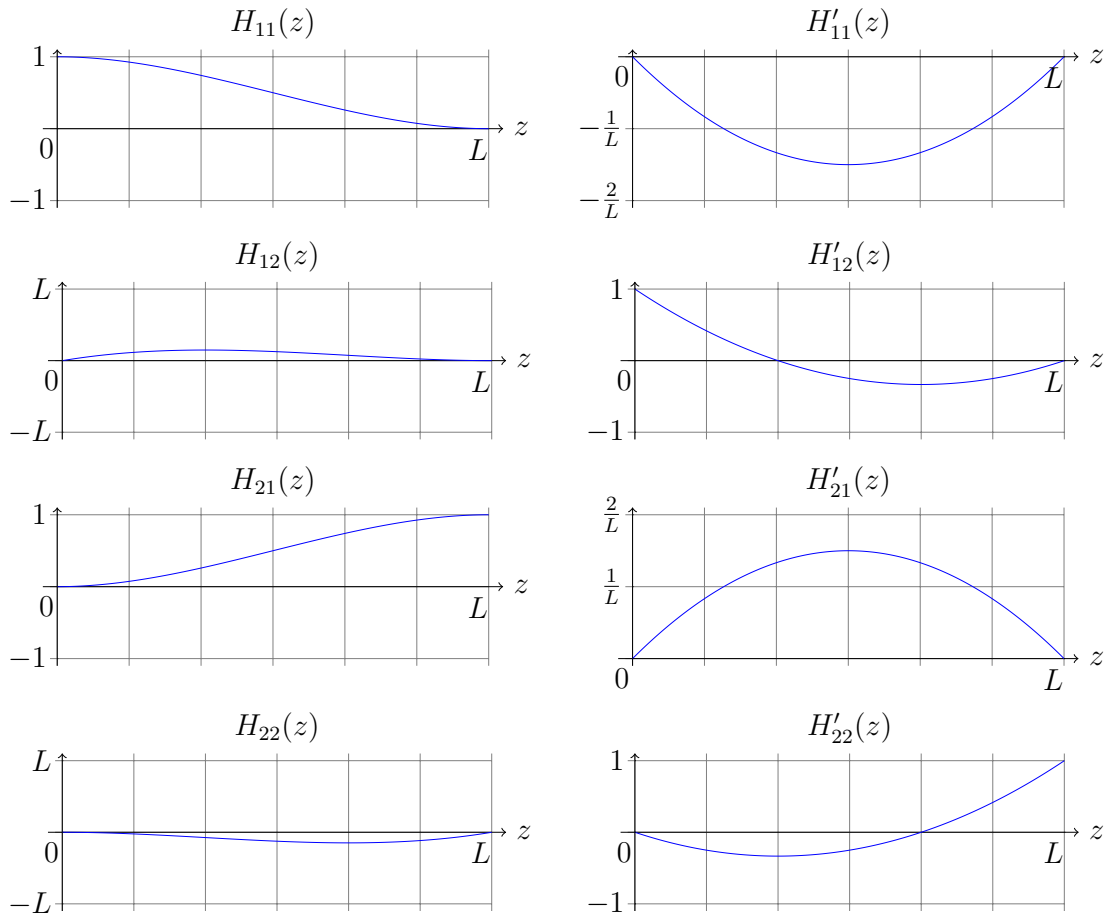


FIGURA 3.26 Funciones de forma cúbicas

En resumen, los movimientos en un punto cualquiera de la viga se pueden expresar como la suma de las funciones de forma de la siguiente manera:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_z \\ \psi_d \end{pmatrix} = \sum_i^2 \begin{bmatrix} H_{i1} & H_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & H_{i1} & H_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & N_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{i1} & H_{i2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{i1} & H_{i2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{xi}^I \\ u_{yi} \\ u_{yi}^I \\ u_{zi} \\ \theta_{zi} \\ \theta_{zi}^I \\ \psi_{di} \\ \psi_{di}^I \end{pmatrix} \quad (3.133)$$

3.6.3 Matriz de rigidez

3.6.3.1 Introducción

Como se ha explicado anteriormente, la matriz de rigidez se obtiene a partir de la energía de debida a tres deformaciones: longitudinal, angular y transversal. A continuación, se explicará cada una de las partes por separado y, por último, se sumarán todas para definir la matriz de rigidez de la sección.

3.6.3.2 Deformación longitudinal

Para obtener la parte de la matriz de rigidez debida a las tensiones longitudinales se calculará la variación de la energía de deformación longitudinal.

Para obtener la energía de deformación es necesario partir de las tensiones en la viga. Si se agrupan en torno a los movimientos en el eje y sus variaciones, las tensiones longitudinales se pueden expresar como:

$$\sigma_z = E \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \left(-\frac{1}{R} \quad -x \quad \left| \quad \left(-y + \frac{x \cdot y_t}{R} + \frac{w_t^c}{R} \right) \quad \left| \quad \frac{R-x}{R} \quad \left| \quad \frac{(y-y_t)}{R} \quad w_t^c \quad \left| \quad -\frac{u_{dx}}{R} \quad -w_d^c \right. \right. \right) \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_x^{II} \\ u_y^{II} \\ u_z^I \\ \theta_z \\ \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{pmatrix} \quad (3.134)$$

Para simplificar y ahorrar espacio, algunos de los términos anteriores se agruparán. Se utilizará el alabeo curvo por axil (w_n^c) que se definió en la ecuación 3.25, junto con la introducción de alabeos compuestos (w_a^c, w_θ^c), que se definen a continuación:

$$w_a^c = \left(-y + \frac{x \cdot y_t}{R} + \frac{w_t^c}{R} \right) \quad (3.135a)$$

$$w_\theta^c = \frac{(y - y_t)}{R} \quad (3.135b)$$

Aplicando estos cambios, la ecuación 3.134 se puede mostrar de la siguiente manera:

$$\sigma_z = E \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \left(-\frac{1}{R} \quad -x \quad \left| w_a^c \right| \left| w_n^c \right| \left| w_\theta^c \right| \left| w_t^c \right| -\frac{u_{dx}}{R} \quad -w_d^c \right) \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_x^{II} \\ u_y^{II} \\ u_z^I \\ \theta_z \\ \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{pmatrix} \quad (3.136)$$

El vector de deformaciones de la derecha de la ecuación se va a denominar vector de deformaciones generalizadas, y se define como:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_x^{II} \\ u_y^{II} \\ u_z^I \\ \theta_z \\ \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^2}{dz^2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{d^2}{dz^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d^2}{dz^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d^2}{dz^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_z \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

La matriz operadora, que permite pasar de movimientos en la viga a deformaciones generalizadas, es lo que previamente se denominó $\overline{\overline{L}}$. Por lo tanto, el vector de deformaciones generalizadas se puede expresar en forma matricial del siguiente modo:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_g = \overline{\overline{L}}_\varepsilon \cdot \overline{u} = \sum_i^2 \overline{\overline{L}}_\varepsilon \cdot \overline{N}_i \cdot \overline{u}_i = \sum_i^2 \overline{\overline{B}}_{\varepsilon i} \cdot \overline{u}_i \quad (3.138)$$

Donde se puede identificar como la matriz deformación-desplazamiento ($\overline{\overline{B}}$) para las tensiones longitudinales vinculada a un grado de libertad se define como:

$$\overline{\overline{B}}_{\varepsilon i} = \overline{\overline{L}}_\varepsilon \cdot \overline{N}_i \quad (3.139)$$

Volviendo a las tensiones, la energía de deformación por unidad de longitud debida a las tensiones longitudinales se obtiene sumando la energía de deformación de todas las tensiones longitudinales en el elemento diferencial de sección:

$$\frac{dU_\varepsilon}{dz} = \frac{1}{2} \cdot \int_A \left(E \cdot (\varepsilon_z)^2 \right) \cdot \left(\frac{R-x}{R} \right) \cdot dA \quad (3.140)$$

La ecuación anterior se puede expresar de forma matricial empleando el vector de deformaciones generalizadas previamente definido $(\overline{\varepsilon}_g)$, y una matriz constitutiva que se va a denominar $\overline{\overline{D}}_\varepsilon$:

$$\frac{dU_\varepsilon}{dz} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\varepsilon}_g)^t \cdot [\overline{\overline{D}}_\varepsilon] \cdot (\overline{\varepsilon}_g) = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\varepsilon}_g)^t \cdot E_0 \cdot [\overline{\overline{I}}_\varepsilon] \cdot (\overline{\varepsilon}_g) \quad (3.141)$$

En la ecuación anterior también se incluye la definición de la matriz constitutiva $(\overline{\overline{D}}_\varepsilon)$ como el producto del módulo de elasticidad de la viga (E_0) por una matriz de propiedades de la sección $(\overline{\overline{I}}_\varepsilon)$. Los términos que componen dicha matriz de propiedades se obtienen multiplicando e integrando los distintos términos que componen el vector en el que se encuentran los alabeos en la ecuación 3.134. La forma matricial de expresar la multiplicación de estos términos es la siguiente:

$$I_\varepsilon = \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \frac{1}{R^2} & \frac{x}{R} & -\frac{w_a^c}{R} & -\frac{w_n^c}{R} & -\frac{w_\theta^c}{R} & -\frac{w_t^c}{R} & \frac{u_{dx}}{R^2} & \frac{w_d^c}{R} \\ \frac{x}{R} & x^2 & -x \cdot w_a^c & -x \cdot w_n^c & -x \cdot w_\theta^c & -x \cdot w_t^c & x \cdot \frac{u_{dx}}{R} & x \cdot w_d^c \\ \hline -\frac{w_a^c}{R} & -w_a^c \cdot x & (w_a^c)^2 & w_a^c \cdot w_n^c & w_a^c \cdot w_\theta^c & w_a^c \cdot w_t^c & -w_a^c \cdot \frac{u_{dx}}{R} & -w_a^c \cdot w_d^c \\ -\frac{w_n^c}{R} & -w_n^c \cdot x & w_n^c \cdot w_a^c & (w_n^c)^2 & w_n^c \cdot w_\theta^c & w_n^c \cdot w_t^c & -w_n^c \cdot \frac{u_{dx}}{R} & -w_n^c \cdot w_d^c \\ \hline -\frac{w_\theta^c}{R} & -w_\theta^c \cdot x & w_\theta^c \cdot w_a^c & w_\theta^c \cdot w_n^c & (w_\theta^c)^2 & w_\theta^c \cdot w_t^c & -w_\theta^c \cdot \frac{u_{dx}}{R} & -w_\theta^c \cdot w_d^c \\ -\frac{w_t^c}{R} & -w_t^c \cdot x & w_t^c \cdot w_a^c & w_t^c \cdot w_n^c & w_t^c \cdot w_\theta^c & (w_t^c)^2 & -w_t^c \cdot \frac{u_{dx}}{R} & -w_t^c \cdot w_d^c \\ \hline \frac{u_{dx}}{R} & \frac{u_{dx}}{R} \cdot x & -\frac{u_{dx}}{R} \cdot w_a^c & -\frac{u_{dx}}{R} \cdot w_n^c & -\frac{u_{dx}}{R} \cdot w_\theta^c & -\frac{u_{dx}}{R} \cdot w_t^c & \left(\frac{u_{dx}}{R} \right)^2 & \frac{u_{dx}}{R} \cdot w_d^c \\ \frac{w_d^c}{R} & w_d^c \cdot x & -w_d^c \cdot w_a^c & -w_d^c \cdot w_n^c & -w_d^c \cdot w_\theta^c & -w_d^c \cdot w_t^c & w_d^c \cdot \frac{u_{dx}}{R} & (w_d^c)^2 \end{array} \right] \quad (3.142)$$

Las integrales contenidas en la matriz anterior pueden expresarse como propiedades de sección utilizando la siguiente notación:

$$I_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{A^c}{R^2} & \frac{Q_y^c}{R} & -\frac{Q_a^c}{R} & -\frac{Q_n^c}{R} & -\frac{Q_\theta^c}{R} & -\frac{Q_t^c}{R} & \frac{Q_{yu}^c}{R^2} & \frac{Q_d^c}{R} \\ \frac{Q_y^c}{R} & I_y^c & -I_{ya}^c & -I_{yn}^c & -I_{y\theta}^c & -I_{yt}^c & \frac{I_{yu}^c}{R} & I_{yd}^c \\ -\frac{Q_a^c}{R} & -I_{ya}^c & I_a^c & I_{an}^c & I_{a\theta}^c & I_{at}^c & -\frac{I_{au}^c}{R} & -I_{ad}^c \\ -\frac{Q_n^c}{R} & -I_{yn}^c & I_{an}^c & I_n^c & I_{n\theta}^c & I_{nt}^c & -\frac{I_{nu}^c}{R} & -I_{nd}^c \\ -\frac{Q_\theta^c}{R} & -I_{y\theta}^c & I_{a\theta}^c & I_{n\theta}^c & I_\theta^c & I_{t\theta}^c & -\frac{I_{\theta u}^c}{R} & -I_{d\theta}^c \\ -\frac{Q_t^c}{R} & -I_{yt}^c & I_{at}^c & I_{nt}^c & I_{t\theta}^c & I_t^c & -\frac{I_{tu}^c}{R} & -I_{td}^c \\ \frac{Q_{yu}^c}{R^2} & \frac{I_{yu}^c}{R} & -\frac{I_{au}^c}{R} & -\frac{I_{nu}^c}{R} & -\frac{I_{\theta u}^c}{R} & -\frac{I_{tu}^c}{R} & \frac{I_u^c}{R^2} & \frac{I_{du}^c}{R} \\ \frac{Q_d^c}{R} & I_{yd}^c & -I_{ad}^c & -I_{nd}^c & -I_{\theta d}^c & -I_{td}^c & \frac{I_{du}^c}{R} & I_d^c \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

En la matriz anterior se han incluido algunos términos que no estaban definidos en las propiedades de sección calculadas en el apartado 3.5.3. No obstante, todos estos nuevos términos se pueden definir a partir de las propiedades definidas en las ecuaciones 3.96, 3.97, 3.98 y 3.99. La definición de los nuevos términos se muestra a continuación.

Se definen los momentos compuestos de primer orden (Q_a^c, Q_n^c, Q_θ^c) como:

$$\begin{aligned} Q_a^c &= -Q_x^c + \frac{Q_y^c \cdot y_t}{R} + \frac{Q_t^c}{R} \approx \frac{I_y \cdot y_t}{R^2} \\ Q_n^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dA = A \\ Q_\theta^c &= \frac{Q_x^c}{R} - \frac{y_t \cdot A}{R} = -\frac{y_t \cdot A}{R} \end{aligned} \quad (3.144)$$

Las inercias simples de los alabeos compuestos (I_w^c) se definen como:

$$\begin{aligned} I_a^c &= I_x^c + I_y^c \cdot \left(\frac{y_t}{R}\right)^2 + \left(\frac{I_t^c}{R^2}\right) - 2 \cdot \frac{I_{xy}^c \cdot y_t}{R} - 2 \cdot \frac{I_{xt}^c}{R} + 2 \cdot \frac{I_{yt}^c \cdot y_t}{R^2} \\ I_n^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \left(\frac{R-x}{R}\right)^2 \cdot dA = A - \frac{Q_y}{R} = A \\ I_\theta^c &= \frac{I_x^c + A \cdot (y_t)^2 - 2 \cdot Q_x^c \cdot y_t}{R^2} = \frac{I_x^c + A \cdot (y_t)^2}{R^2} \end{aligned} \quad (3.145)$$

Y las inercias cruzadas de los alabeos compuestos (I_{ww}^c) se definen como:

$$\begin{aligned}
I_{ya}^c &= -I_{xy}^c + \frac{I_y^c \cdot y_t}{R} + \frac{I_{yt}^c}{R} \\
I_{yn}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{R-x}{R} \cdot x \cdot dA = 0 \\
I_{y\theta}^c &= \frac{I_{xy}^c - Q_y^c \cdot y_t}{R} \\
I_{an}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{R-x}{R} \cdot \left(-y + \frac{x \cdot y_t}{R} + \frac{w_t^c}{R}\right) \cdot dA \approx -\frac{I_{yt}^c}{R^2} \\
I_{a\theta}^c &= -\frac{I_x^c}{R} + \frac{I_{xy}^c \cdot y_t}{R^2} + \frac{I_{xt}^c}{R^2} + \frac{Q_x^c \cdot y_t}{R} - Q_y^c \cdot \left(\frac{y_t}{R}\right)^2 - \frac{Q_t^c \cdot y_t}{R^2} = \\
&\quad -\frac{I_x^c}{R} + \frac{I_{xy}^c \cdot y_t}{R^2} + \frac{I_{xt}^c}{R^2} - Q_y^c \cdot \left(\frac{y_t}{R}\right)^2 \\
I_{at}^c &= -I_{xt}^c + \frac{I_{yt}^c \cdot y_t}{R} + \frac{I_t^c}{R} \\
I_{au}^c &= -I_{xu}^c + \frac{I_{yu}^c \cdot y_t}{R} + \frac{I_{tu}^c}{R} \\
I_{ad}^c &= -I_{xd}^c + \frac{I_{yd}^c \cdot y_t}{R} + \frac{I_{td}^c}{R} \\
I_{n\theta}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{R-x}{R} \cdot \frac{y - y_t}{R} \cdot dA = -\frac{A \cdot y_t}{R} \\
I_{nt}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{R-x}{R} \cdot w_t^c \cdot dA \approx Q_t^c - \frac{I_{yt}^c}{R} = -\frac{I_{yt}^c}{R} \\
I_{nu}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{R-x}{R} \cdot u_{dx} \cdot dA = Q_u^c - \frac{I_{yu}^c}{R} \\
I_{nd}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{R-x}{R} \cdot w_d^c \cdot dA \approx Q_d^c - \frac{I_{yd}^c}{R} = -\frac{I_{yd}^c}{R} \\
I_{\theta t}^c &= \frac{I_{xt}^c - y_t \cdot Q_t^c}{R} = \frac{I_{xt}^c}{R} \\
I_{\theta u}^c &= \frac{I_{xu}^c - y_t \cdot Q_u^c}{R} \\
I_{\theta d}^c &= \frac{I_{xd}^c - y_t \cdot Q_d^c}{R} = \frac{I_{xd}^c}{R}
\end{aligned} \tag{3.146}$$

La forma genérica de calcular las integrales anteriores para una sección compuesta por paredes rectas se muestra en el apéndice C. Es importante destacar que, aunque no se ha hecho referencia en este apartado a la influencia de las deformaciones locales de las paredes, se han incluido en las propiedades de la sección correspondiente, tal y como se justifica en el apartado 3.5.

Al aplicar alguna de las simplificaciones mencionadas anteriormente, se puede expresar

la matriz de propiedades de la sección como:

$$I_\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{A}{R^2} & \frac{Q_y^c}{R} & -\frac{Q_a^c}{R} & -\frac{A}{R} & \frac{y_t \cdot A}{R^2} & 0 & \frac{Q_u^c}{R^2} & 0 \\ \frac{Q_y^c}{R} & I_y^c & -I_{ya}^c & 0 & -I_{y\theta}^c & -I_{yt}^c & \frac{I_{yu}^c}{R} & I_{yd}^c \\ -\frac{Q_a^c}{R} & -I_{ya}^c & I_a^c & -\frac{I_{yt}^c}{R^2} & I_{a\theta}^c & I_{at}^c & -\frac{I_{au}^c}{R} & -I_{ad}^c \\ -\frac{A}{R} & 0 & -\frac{I_{yt}^c}{R^2} & A & -\frac{y_t \cdot A}{R} & -\frac{I_{yt}^c}{R} & -\frac{I_{nu}^c}{R} & \frac{I_{yd}^c}{R} \\ \frac{y_t \cdot A}{R^2} & -I_{y\theta}^c & I_{a\theta}^c & -\frac{y_t \cdot A}{R} & I_\theta^c & \frac{I_{xt}^c}{R} & -\frac{I_{\theta u}^c}{R} & -\frac{I_{xd}^c}{R} \\ 0 & -I_{yt}^c & I_{at}^c & -\frac{I_{yt}^c}{R} & \frac{I_{xt}^c}{R} & I_t^c & -\frac{I_{tu}^c}{R} & -I_{td}^c \\ \frac{Q_u^c}{R^2} & \frac{I_{yu}^c}{R} & -\frac{I_{au}^c}{R} & -\frac{I_{nu}^c}{R} & -\frac{I_{\theta u}^c}{R} & -\frac{I_{tu}^c}{R} & \frac{I_u^c}{R^2} & \frac{I_{du}^c}{R} \\ 0 & I_{yd}^c & -I_{ad}^c & \frac{I_{yd}^c}{R} & -\frac{I_{xd}^c}{R} & -I_{td}^c & \frac{I_{du}^c}{R} & I_d^c \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

En resumen, la contribución de las tensiones longitudinales a la matriz de rigidez se puede expresar como:

$$\overline{\overline{K}}_{\epsilon,ij} = \int \left(\left[\overline{B}_{\epsilon,i} \right]^t \cdot E_0 \cdot \left[\overline{I}_\epsilon \right] \cdot \left[\overline{B}_{\epsilon,j} \right] \right) \cdot dz \quad (3.148)$$

En el apartado 3.6.3.5 se mostrará cómo se ensambla la matriz anterior dentro de la matriz global del elemento.

3.6.3.3 Deformación angular

El procedimiento para obtener la parte de la matriz de rigidez debida a la deformación angular es análogo al utilizado para la deformación longitudinal.

En primer lugar, se expresa la tensión tangencial como una multiplicación vectorial:

$$\tau_{sz} = G \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t_t^c}{R} & t_t^c & t_d^c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_y^I \\ \theta_z^I \\ \psi_d^I \end{pmatrix} \quad (3.149)$$

El vector de deformaciones angulares generalizadas se define como la multiplicación de la matriz operadora ($\overline{\overline{L_\gamma}}$) por el vector de movimientos ($\overline{\overline{u_i}}$):

$$\begin{pmatrix} u_y^I \\ \theta_z^I \\ \psi_d^I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_z \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad (3.150)$$

El vector de deformaciones generalizadas también puede ser definido a partir de la matriz deformación-desplazamiento ($\overline{\overline{B_\gamma}}$) del siguiente modo:

$$\overline{\overline{\gamma_g}} = \overline{\overline{L_\gamma}} \cdot \overline{\overline{u}} = \sum_i^2 \overline{\overline{L_\gamma}} \cdot \overline{\overline{N_i}} \cdot \overline{\overline{u_i}} = \sum_i^2 \overline{\overline{B_{\gamma i}}} \cdot \overline{\overline{u_i}} \quad (3.151)$$

Donde se puede observar que $\overline{\overline{B_\gamma}}$ se define como:

$$\overline{\overline{B_{\gamma i}}} = \overline{\overline{L_\gamma}} \cdot \overline{\overline{N_i}} \quad (3.152)$$

Siguiendo con el mismo proceso de las tensiones longitudinales, la energía de deformación por unidad de longitud debida a las tensiones tangenciales se obtiene integrando la energía de deformación para todo el volumen:

$$\frac{dU_\gamma}{dz} = \frac{1}{2} \cdot \int_A \left(G \cdot (\gamma_{sz})^2 \right) \cdot \left(\frac{R-x}{R} \right) \cdot dA \quad (3.153)$$

La ecuación anterior se puede expresar de forma matricial utilizando el vector de deformaciones generalizadas previamente definido ($\overline{\overline{\gamma_g}}$) y una matriz constitutiva que se va a denominar $\overline{\overline{D_\gamma}}$:

$$\frac{dU_\gamma}{dz} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\overline{\gamma_g}})^t \cdot [\overline{\overline{D_\gamma}}] \cdot (\overline{\overline{\gamma_g}}) = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\overline{\gamma_g}})^t \cdot G_0 \cdot [\overline{\overline{J_\gamma}}] \cdot (\overline{\overline{\gamma_g}}) \quad (3.154)$$

En la definición anterior se ha incluido también la matriz constitutiva $\overline{\overline{D_\gamma}}$. Esta se define como el producto del módulo de elasticidad transversal de la viga (G_0) multiplicado por una matriz de propiedades tangenciales de la sección ($\overline{\overline{J_\gamma}}$). Los términos que componen esta matriz de propiedades se obtienen de multiplicar e integrar los distintos términos que componen el vector de deformaciones angulares de la ecuación 3.6.3.3. La forma matricial

de expresar la multiplicación de estos términos es la siguiente:

$$\overline{\overline{J}}_\gamma = \int \frac{G}{G_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \begin{bmatrix} \frac{(t_t^c)^2}{R^2} & \frac{(t_t^c)^2}{R} & \frac{t_t^c \cdot t_d^c}{R} \\ \frac{(t_t^c)^2}{R} & (t_t^c)^2 & t_t^c \cdot t_d^c \\ \frac{t_t^c \cdot t_d^c}{R} & t_t^c \cdot t_d^c & (t_d^c)^2 \end{bmatrix} \cdot dA \quad (3.155)$$

Las integrales anteriores se pueden expresar en forma de parámetros de sección:

$$\overline{\overline{J}}_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{J_t^c}{R^2} & \frac{J_t^c}{R} & \frac{J_{td}^c}{R} \\ \frac{J_t^c}{R} & J_t^c & J_{td}^c \\ \frac{J_{td}^c}{R} & J_{td}^c & J_d^c \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

En este caso, todos los parámetros anteriores se definieron en el apartado 3.5.3, en las ecuaciones 3.106.

En resumen, se puede expresar la parte de la matriz de rigidez debida a las tensiones tangenciales como:

$$\overline{\overline{K}}_{\gamma,ij} = \int \left(\left[\overline{B}_{\gamma,i} \right]^t \cdot G_0 \cdot \left[\overline{J}_\gamma \right] \cdot \left[\overline{B}_{\gamma,j} \right] \right) \cdot dz \quad (3.157)$$

En la sección 3.6.3.5 se explicará cómo se ensambla la matriz anterior dentro de la matriz global del elemento.

3.6.3.4 Deformación transversal

Finalmente, se define la contribución de las tensiones transversales a la matriz de rigidez.

La tensión transversal (σ_s) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sigma_s = E_s \cdot \left(\frac{du_{ds0}}{ds} - y_s \cdot \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right) \cdot \psi_d \quad (3.158)$$

Donde el vector de deformaciones generalizadas es:

$$\begin{pmatrix} \psi_d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_z \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad (3.159)$$

En este caso, la matriz operadora es un vector $\overline{L}_s$. Por lo tanto, la deformación generalizada se expresa de forma matricial como:

$$\varepsilon_{sg} = \overline{L}_s \cdot \overline{u} = \sum_i^2 \overline{L}_s \cdot \overline{N}_i \cdot \overline{u}_i = \sum_i^2 \overline{B}_{si} \cdot \overline{u}_i \quad (3.160)$$

En secciones anteriores se mencionó que se despreciaría la parte debida a la curvatura en las tensiones transversales. Por lo tanto, la energía de deformación transversal por elemento diferencial se define como:

$$\frac{dU_s}{dz} = \frac{1}{2} \cdot \int_A \left(E_s \cdot (\varepsilon_s)^2 \right) \cdot dA \quad (3.161)$$

En este caso, la matriz constitutiva $\overline{\overline{D}}_s$ es de dimensión uno, y por lo tanto contiene únicamente una propiedad de la sección que se va a denominar K_d y que se corresponde con la rigidez de marco. En consecuencia, la forma matricial de representar la energía de deformación es la siguiente:

$$\frac{dU_s}{dz} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\varepsilon}_{sg})^t \cdot [\overline{\overline{D}}_s] \cdot (\overline{\varepsilon}_{sg}) = \frac{1}{2} \cdot (\overline{\varepsilon}_{sg})^t \cdot E_{s0} \cdot K_d \cdot (\overline{\varepsilon}_{sg}) \quad (3.162)$$

El valor de K_d se puede obtener de dos maneras: integrando las deformaciones en toda la sección, o, de manera más simplificada, a partir de las deformaciones de la sección y la matriz de rigidez la sección $\overline{\overline{K}}_s$ definida anteriormente:

$$K_d = \frac{\overline{u}_d^t \cdot \overline{\overline{K}}_s \cdot \overline{u}_d}{E_{s0}} \quad (3.163)$$

En resumen, la contribución de las tensiones transversales a la matriz de rigidez puede expresarse como:

$$\overline{\overline{K}}_{s,ij} = \int \left([\overline{\overline{B}}_{s,i}]^t \cdot E_{s0} \cdot K_d \cdot [\overline{\overline{B}}_{s,j}] \right) \cdot dz \quad (3.164)$$

3.6.3.5 Matriz de rigidez

El sistema de ecuaciones para un elemento que va de un nodo i a un nodo j se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} \overline{f_i} \\ \overline{f_j} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{K_{ii}}} & \overline{\overline{K_{ji}}} \\ \overline{\overline{K_{ij}}} & \overline{\overline{K_{jj}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u_i} \\ \overline{u_j} \end{pmatrix} \quad (3.165)$$

Cada uno de los cuadrantes que compone la matriz de rigidez y su vector de movimientos asociado pueden definirse de la siguiente manera:

$$\overline{\overline{K_{ij}}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{K_{ij,11}}} & \overline{\overline{K_{ij,12}}} & \overline{\overline{K_{ij,13}}} & \overline{\overline{K_{ij,14}}} & \overline{\overline{K_{ij,15}}} \\ \overline{\overline{K_{ij,21}}} & \overline{\overline{K_{ij,22}}} & \overline{\overline{K_{ij,23}}} & \overline{\overline{K_{ij,24}}} & \overline{\overline{K_{ij,25}}} \\ \overline{\overline{K_{ij,31}}} & \overline{\overline{K_{ij,32}}} & \overline{\overline{K_{ij,33}}} & \overline{\overline{K_{ij,34}}} & \overline{\overline{K_{ij,35}}} \\ \overline{\overline{K_{ij,41}}} & \overline{\overline{K_{ij,42}}} & \overline{\overline{K_{ij,43}}} & \overline{\overline{K_{ij,44}}} & \overline{\overline{K_{ij,45}}} \\ \overline{\overline{K_{ij,51}}} & \overline{\overline{K_{ij,52}}} & \overline{\overline{K_{ij,53}}} & \overline{\overline{K_{ij,54}}} & \overline{\overline{K_{ij,55}}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{xi}^I \\ u_{yi} \\ u_{yi}^I \\ u_{zi} \\ \theta_{zi} \\ \theta_{zi}^I \\ \psi_{di} \\ \psi_{di}^I \end{pmatrix} \quad (3.166)$$

Para expresar el valor de cada uno de los términos mencionados se emplearán matrices vinculadas a las integrales de las funciones de forma. Estas matrices se denotan como $\overline{\overline{K_{AB}}}$, donde A y B se corresponden con el tipo de función de forma, que podrá ser, bien lineal (N), o bien cúbica (H). Además, estos términos pueden incluir un superíndice que indica el orden de la derivada. Por ejemplo, $K_{H^I I N^I}$ es la multiplicación de la segunda derivada de las funciones de forma cúbicas H por la primera derivada de las funciones de forma lineales N . El desarrollo de todas las matrices vinculadas a las funciones de forma que se emplean en este apartado, así como la solución de las integrales, se encuentra en el apéndice C.1.

Utilizando la notación previamente explicada, se pueden definir los elementos de la matriz de rigidez global como:

$$\overline{\overline{K}}_{,11} = E_0 \cdot \left(\frac{A}{R^2} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{HH} + E_0 \cdot \left(\frac{Q_y^c}{R} \right) \cdot [\overline{\overline{K}}_{H^{II}H} + \overline{\overline{K}}_{HH^{II}}] + E_0 \cdot I_y^c \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} \quad (3.167a)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,12} = \overline{\overline{K}}_{,21}^t = -E_0 \cdot \frac{Q_y^c \cdot y_t}{R^2} \cdot \overline{\overline{K}}_{HH^{II}} + E_0 \cdot \left(I_{xy}^c - \frac{I_y^c \cdot y_t}{R} - \frac{I_{yt}^c}{R} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} \quad (3.167b)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,13} = \overline{\overline{K}}_{,31}^t = -E_0 \cdot \frac{A}{R} \cdot \overline{\overline{K}}_{N^I H} \quad (3.167c)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,14} = \overline{\overline{K}}_{,41}^t = E_0 \cdot \frac{A \cdot y_t}{R^2} \cdot \overline{\overline{K}}_{HH} + E_0 \cdot \frac{Q_y^c \cdot y_t - I_{xy}^c}{R} \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H} - E_0 \cdot I_{yt}^c \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} \quad (3.167d)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,15} = \overline{\overline{K}}_{,51}^t = E_0 \cdot \frac{Q_u^c}{R^2} \cdot \overline{\overline{K}}_{HH} + E_0 \cdot \frac{I_{yu}^c}{R} \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H} + E_0 \cdot I_{yd}^c \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} \quad (3.167e)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,22} = E_0 \cdot \left(I_x^c + I_y^c \cdot \left(\frac{y_t}{R} \right)^2 + \left(\frac{I_t^c}{R^2} \right) - 2 \cdot \frac{I_{xy}^c \cdot y_t}{R} - 2 \cdot \frac{I_{xt}^c}{R} + 2 \cdot \frac{I_{yt}^c \cdot y_t}{R^2} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} + G_0 \cdot \frac{J_t^c}{R^2} \cdot \overline{\overline{K}}_{H^I H^I} \quad (3.167f)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,23} = \overline{\overline{K}}_{,32}^t = -E_0 \cdot \frac{I_{yt}^c}{R^2} \cdot \overline{\overline{K}}_{N^I H^{II}} \quad (3.167g)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,24} = \overline{\overline{K}}_{,42}^t = E_0 \cdot \left(-\frac{I_x^c}{R} + \frac{I_{xy}^c \cdot y_t}{R^2} + \frac{I_{xt}^c}{R^2} - Q_y^c \cdot \left(\frac{y_t}{R} \right)^2 \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H} + E_0 \cdot \left(-I_{xt}^c + \frac{I_{yt}^c \cdot y_t}{R} + \frac{I_t^c}{R} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} + G_0 \cdot \frac{J_t^c}{R} \cdot \overline{\overline{K}}_{H^I H^I} \quad (3.167h)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,25} = \overline{\overline{K}}_{,52}^t = E_0 \cdot \left(\frac{I_{xu}^c}{R} - \frac{I_{yu}^c \cdot y_t}{R^2} - \frac{I_{tu}^c}{R^2} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H} + E_0 \cdot \left(I_{xd}^c - \frac{I_{yd}^c \cdot y_t}{R} - \frac{I_{td}^c}{R} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} + G_0 \cdot \frac{J_{td}^c}{R} \cdot \overline{\overline{K}}_{H^I H^I} \quad (3.167i)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,33} = E_0 \cdot A \cdot \overline{\overline{K}}_{N^I N^I} \quad (3.167j)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,34} = \overline{\overline{K}}_{,43}^t = -E_0 \cdot \frac{A \cdot y_t}{R} \cdot \overline{\overline{K}}_{N^I H} - E_0 \cdot \frac{I_{yt}^c}{R} \cdot \overline{\overline{K}}_{N^I H^{II}} \quad (3.167k)$$

$$\overline{\overline{K}}_{,35} = \overline{\overline{K}}_{,53}^t = E_0 \cdot \left(\frac{I_{yu}^c}{R^2} - \frac{Q_u^c}{R} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{N^I H} + E_0 \cdot \frac{I_{yd}^c}{R} \cdot \overline{\overline{K}}_{N^I H^{II}} \quad (3.167l)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{K}}_{,44} = E_0 \cdot \left(\frac{I_x^c + A \cdot (y_t)^2}{R^2} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{HH} + E_0 \cdot \frac{I_{xt}^c}{R} \cdot [\overline{\overline{K}}_{H^{II}H} + \overline{\overline{K}}_{HH^{II}}] \\ + E_0 \cdot I_t^c \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} + G_0 \cdot J_t^c \cdot \overline{\overline{K}}_{H^I H^I} \end{aligned} \quad (3.167m)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{K}}_{,45} = \overline{\overline{K}}_{,54}^t = E_0 \cdot \left(\frac{y_t \cdot Q_u^c - I_{xu}^c}{R^2} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{HH} - E_0 \cdot \left(\frac{I_{xd}^c}{R} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{HH^{II}} \\ - E_0 \cdot \left(\frac{I_{tu}^c}{R} \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H} - E_0 \cdot (I_{td}^c) \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} + G_0 \cdot J_{td}^c \cdot \overline{\overline{K}}_{H^I H^I} \end{aligned} \quad (3.167n)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{K}}_{,55} = \left(\frac{E_0 \cdot I_u^c}{R^2} + E_{s0} \cdot K_d \right) \cdot \overline{\overline{K}}_{HH} + E_0 \cdot \frac{I_{du}^c}{R} \cdot [\overline{\overline{K}}_{H^{II}H} + \overline{\overline{K}}_{HH^{II}}] \\ + E_0 \cdot I_d^c \cdot \overline{\overline{K}}_{H^{II}H^{II}} + G_0 \cdot J_d^c \cdot \overline{\overline{K}}_{H^I H^I} \end{aligned} \quad (3.167ñ)$$

3.6.4 Vector de cargas

El vector de cargas se obtiene a partir de la variación de la energía potencial de las acciones exteriores. Esta energía se define en la ecuación 3.129 como la suma del producto de las funciones de forma por las resultantes en el eje. Para obtener la correspondencia entre las funciones de forma y las resultantes se utilizará la ecuación 3.119, donde aparecen las resultantes vinculadas a la forma variacional de cada grado de libertad. Además, se van a tomar las mismas resultantes de la ecuación 3.119 y que se han calculado en las ecuaciones 3.117 y 3.118.

Por lo tanto, al desarrollar la ecuación 3.129 y sustituir las resultantes, el vector de cargas en un nodo $\overline{f}_i$ se puede expresar como:

$$\left(\overline{f}_i \right) = \oint_L \begin{pmatrix} H_{i1} \cdot (q_x - m_y^I) \\ H_{i2} \cdot (q_x - m_y^I) \\ \hline H_{i1} \cdot \left(q_y + m_x^I + \frac{m_y^I \cdot y_t}{R} - \frac{b_t^I}{R} \right) \\ H_{i2} \cdot \left(q_y + m_x^I + \frac{m_y^I \cdot y_t}{R} - \frac{b_t^I}{R} \right) \\ \hline N_i \cdot \left(q_z + \frac{m_y}{R} \right) \\ \hline H_{i1} \cdot (m_t - b_t^I + q_x \cdot y_t) \\ H_{i2} \cdot (m_t - b_t^I + q_x \cdot y_t) \\ \hline H_{i1} \cdot (m_d + b_d^I) \\ H_{i2} \cdot (m_d + b_d^I) \end{pmatrix} \cdot dz \quad (3.168)$$

Integrando por partes la ecuación anterior, se obtiene el vector de cargas:

$$\left(\overline{f}_i \right) = \oint_L \begin{pmatrix} H_{i1} \cdot q_x + H_{i1}^I \cdot m_y \\ H_{i2} \cdot q_x + H_{i2}^I \cdot m_y \\ \hline H_{i1} \cdot q_y - H_{i1}^I \cdot \left(m_x + \frac{m_y \cdot y_t}{R} - \frac{b_t}{R} \right) \\ H_{i2} \cdot q_y - H_{i2}^I \cdot \left(m_x + \frac{m_y \cdot y_t}{R} - \frac{b_t}{R} \right) \\ \hline N_i \cdot \left(q_z + \frac{m_y}{R} \right) \\ \hline H_{i1} \cdot (m_t + q_x \cdot y_t) + H_{i1}^I \cdot b_t \\ H_{i2} \cdot (m_t + q_x \cdot y_t) + H_{i2}^I \cdot b_t \\ \hline H_{i1} \cdot (m_d) - H_{i1}^I \cdot b_d \\ H_{i2} \cdot (m_d) - H_{i2}^I \cdot b_d \end{pmatrix} \cdot dz \quad (3.169)$$

Resolviendo las integrales, se pueden expresar los vectores de fuerzas del nodo i y el nodo j del elemento de la siguiente manera:

$$\left(\overline{f}_i \right) = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \cdot q_x + m_y \\ \frac{L^2}{12} \cdot q_x \\ \hline \frac{L}{2} \cdot q_y + \left(m_x + \frac{m_y \cdot y_t}{R} - \frac{b_t}{R} \right) \\ \frac{L^2}{12} \cdot q_y \\ \hline \frac{L}{2} \cdot \left(q_z + \frac{m_y}{R} \right) \\ \hline \frac{L}{2} \cdot (m_t + q_x \cdot y_t) - b_t \\ \frac{L^2}{12} \cdot (m_t + q_x \cdot y_t) \\ \hline \frac{L}{2} \cdot (m_d) + b_d \\ \frac{L^2}{12} \cdot (m_d) \end{pmatrix} ; \left(\overline{f}_j \right) = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \cdot q_x - m_y \\ -\frac{L^2}{12} \cdot q_x \\ \hline \frac{L}{2} \cdot q_y - \left(m_x + \frac{m_y \cdot y_t}{R} - \frac{b_t}{R} \right) \\ -\frac{L^2}{12} \cdot q_y \\ \hline \frac{L}{2} \cdot \left(q_z + \frac{m_y}{R} \right) \\ \hline \frac{L}{2} \cdot (m_t + q_x \cdot y_t) + b_t \\ -\frac{L^2}{12} \cdot (m_t + q_x \cdot y_t) \\ \hline \frac{L}{2} \cdot (m_d) - b_d \\ -\frac{L^2}{12} \cdot (m_d) \end{pmatrix} \quad (3.170)$$

3.6.5 Cálculo de esfuerzos

Las resultantes de los esfuerzos se definieron en las secciones 3.5.3 y 3.5.6 a partir de la integración de las tensiones en toda la sección. Estas resultantes se denotaron con el superíndice ^{L} , pero en esta ocasión se va a prescindir de él. También se definieron unas resultantes auxiliares, que se van a seguir denotando con el superíndice ^{T} , y que permiten el cálculo directo de las tensiones.

En primer lugar, se muestran las resultantes de las tensiones longitudinales definidas como axil (F_z), momentos flectores (M_x, M_y), bimomentos (B_t, B_d) y fuerza de distorsión en x (F_{dx}):

$$\begin{pmatrix} F_z \\ M_y \\ M_x \\ B_t \\ B_d \\ F_{dx} \end{pmatrix} = E_0 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{A^c}{R} & -Q_y^c & Q_a^c & Q_n^c & Q_\theta^c & Q_t^c & -\frac{Q_u^c}{R} & Q_d^c \\ \frac{Q_y^c}{R} & I_y^c & -I_{ya}^c & -I_{yn}^c & -I_{y\theta}^c & -I_{yt}^c & \frac{I_{yu}^c}{R} & I_{yd}^c \\ -\frac{Q_x^c}{R} & -I_{xy}^c & I_{xa}^c & I_{xn}^c & I_{x\theta}^c & I_{xt}^c & -\frac{I_{xu}^c}{R} & -I_{xd}^c \\ -\frac{Q_t^c}{R} & -I_{yt}^c & I_{at}^c & I_{nt}^c & I_{\theta t}^c & I_t^c & -\frac{I_{tu}^c}{R} & -I_{td}^c \\ -\frac{Q_d^c}{R} & -I_{yd}^c & I_{ad}^c & I_{nd}^c & I_{\theta d}^c & I_{td}^c & -\frac{I_{du}^c}{R} & -I_d^c \\ -\frac{Q_u^c}{R} & -I_{yu}^c & I_{au}^c & I_{nu}^c & I_{\theta u}^c & I_{tu}^c & -\frac{I_u^c}{R} & -I_{du}^c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_x^{II} \\ u_y^{II} \\ u_z^I \\ \theta_z \\ \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{pmatrix} \quad (3.171)$$

De las propiedades anteriores, solo tres no se han definido previamente, por lo que se definen a continuación:

$$\begin{aligned} I_{xa}^c &= -I_x^c + \frac{I_{xy}^c \cdot y_t}{R} + \frac{I_{xt}^c}{R} \\ I_{xn}^c &= \int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{R-x}{R} \cdot y \cdot dA = 0 \\ I_{x\theta}^c &= \frac{I_x^c - Q_x^c \cdot y_t}{R} = \frac{I_x^c}{R} \end{aligned} \quad (3.172)$$

Aplicando las simplificaciones pertinentes previamente expuestas, las resultantes de esfuerzos se pueden expresar como:

$$\begin{pmatrix} F_z \\ M_y \\ M_x \\ B_t \\ B_d \\ F_{dx} \end{pmatrix} = E_0 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{A}{R} & -Q_y^c & Q_a^c & A & -\frac{y_t \cdot A}{R} & 0 & -\frac{Q_u^c}{R} & 0 \\ \frac{Q_y^c}{R} & I_y^c & -I_{ya}^c & 0 & -I_{y\theta}^c & -I_{yt}^c & \frac{I_{yu}^c}{R} & I_{yd}^c \\ 0 & -I_{xy}^c & I_{xa}^c & 0 & \frac{I_x^c}{R} & I_{xt}^c & -\frac{I_{xu}^c}{R} & -I_{xd}^c \\ 0 & -I_{yt}^c & I_{at}^c & -\frac{I_{yt}^c}{R} & \frac{I_{xt}^c}{R} & I_t^c & -\frac{I_{tu}^c}{R} & -I_{td}^c \\ 0 & -I_{yd}^c & I_{ad}^c & -\frac{I_{yd}^c}{R} & \frac{I_{xd}^c}{R} & I_{td}^c & -\frac{I_{du}^c}{R} & -I_d^c \\ -\frac{Q_u^c}{R} & -I_{yu}^c & I_{au}^c & -\frac{I_{yu}^c}{R} & I_{\theta u}^c & I_{tu}^c & -\frac{I_u^c}{R} & -I_{du}^c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_x^{II} \\ u_y^{II} \\ u_z^I \\ \theta_z \\ \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{pmatrix} \quad (3.173)$$

Si se desean utilizar solo las resultantes para el cálculo tensional, se puede utilizar la ecuación 3.102. En este caso, los esfuerzos utilizados son distintos, ya que no están acoplados. Se denotan con el superíndice T y su definición es:

$$\begin{pmatrix} F_z^T \\ M_y^T \\ M_x^T \\ B_t^T \\ B_d^T \\ F_{dx}^T \end{pmatrix} = E_0 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{A}{R} & 0 & 0 & A & -\frac{y_t \cdot A}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_y^c & -\frac{I_y^c \cdot y_t}{R} & \frac{I_y^c}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_x^c & 0 & \frac{I_x^c}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_t^c}{R} & 0 & 0 & I_t^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_d^c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_u^c}{R} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_x^{II} \\ u_y^{II} \\ u_z^I \\ \theta_z \\ \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{pmatrix} \quad (3.174)$$

En cuanto a los esfuerzos totales, para obtener los esfuerzos cortantes V_x y V_y en la sección se hará uso de las ecuaciones 3.121. En el caso de una viga curva, los cortantes se definen como:

$$\begin{aligned} V_x &= -M_y^I \\ V_y &= M_x^I - V_x \cdot \frac{y_t}{R} + \frac{M_t}{R} \end{aligned} \quad (3.175)$$

Donde M_x^I y M_y^I se obtienen fácilmente derivando la ecuación 3.173 y M_t se va a definir a continuación.

El momento torsor uniforme (M_{tu}) y el momento distorsor uniforme (M_{du}) se definieron como:

$$\begin{pmatrix} M_{tu} \\ M_{du} \end{pmatrix} = G_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{J_t^c}{R} & J_t^c & J_{td}^c \\ \frac{J_{td}^c}{R} & J_{td}^c & J_d^c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_y^I \\ \theta_z^I \\ \psi_d^I \end{pmatrix} \quad (3.176)$$

Si se desean emplear los momentos uniformes para el cálculo tensional, estos se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} M_{tu}^T \\ M_{du}^T \end{pmatrix} = G_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{J_t^c}{R} & J_t^c & 0 \\ 0 & 0 & J_d^c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_y^I \\ \theta_z^I \\ \psi_d^I \end{pmatrix} \quad (3.177)$$

El momento de torsión no uniforme (M_{tw}) y el momento de distorsión no uniforme (M_{dw}) se obtienen a partir de las ecuaciones 3.121. Estos se definen como:

$$\begin{aligned} M_{tw} &= -B_t^I \\ M_{dw} &= B_d^I \end{aligned} \quad (3.178)$$

Donde la derivada de los bimomentos se obtiene derivando la ecuación 3.173.

Definidos los momentos uniformes y no uniformes, los momentos totales torsor (M_t) y distorsor (M_d) se pueden expresar como:

$$M_t = M_{tu} + M_{tw} \quad (3.179)$$

$$M_d = M_{du} + M_{dw} \quad (3.180)$$

Por último, se define la resultante de distorsión como:

$$R_d = K_d \cdot \psi_d \quad (3.181)$$

3.7 Cálculo de rigidez de diafragmas antidistorsión

El cálculo de la rigidez de los diafragmas frente a la distorsión es muy similar al cálculo de la rigidez de marco descrito en 3.5.3. Por ello, se define un parámetro K_D que corresponde a la rigidez del diafragma y que es equivalente al trabajo virtual de deformación realizado por todos los elementos que componen el diafragma.

Para calcular la rigidez del diafragma, se tomarán como referencia las coordenadas y los desplazamientos en los nodos más representativos de la sección, que se denominarán $\overline{u_D}$. Por ejemplo, en el caso de los diafragmas en celosía, estos nodos se corresponden con los puntos de unión entre la celosía y la sección. Para los diafragmas de alma llena se recomienda tomar los cuatro vértices de trapecio que forma el cajón metálico, y lo mismo sucede con los diafragmas en forma de marco. En cualquier caso, no se recomienda tomar los movimientos en los puntos interiores de los paneles ni considerar la rotación en los

nodos de la sección.

El motivo para omitir nodos interiores y rotaciones está en que la rigidez de la sección a flexión transversal es muy baja, y por lo tanto, los movimientos perpendiculares a los paneles pueden causar un trabajo de deformación muy elevado en el diafragma. Sin embargo, este trabajo de deformación no es realista por la escasa rigidez a flexión de los paneles. Por ejemplo, en el caso de una sección cajón rectangular mixta, el ala inferior, además de desplazarse horizontalmente, se deforma en forma de onda. Si se calcula el trabajo de deformación de dicha onda para un diafragma de alma llena se llegaría a una rigidez de diafragma muy elevada, y sin embargo, la influencia de dicha onda en la rigidez del diafragma es muy escasa, como se verá en el siguiente apartado. Para mayor información relativa a los movimientos en tableros de sección cajón se refiere al lector al apartado 4.2.2.

Una vez conocida la geometría y los movimientos, el siguiente paso es obtener la matriz de rigidez del diafragma antidistorsión, que se va a denominar $\overline{\overline{K_m}}$. Los grados de libertad de la matriz se corresponden con los grados de libertad considerados en los nodos representativos. En caso de introducir nodos intermedios, como por ejemplo el vértice central superior en un diafragma en K, se pueden eliminar mediante condensación de la matriz.

La matriz de rigidez del diafragma ($\overline{\overline{K_m}}$) es el resultado de ensamblar los distintos elementos que componen el diafragma y condensar si procede. Estos elementos pueden ser de varios tipos. En el caso de los diafragmas en celosía, los elementos que componen el el diafragma se pueden representar con elementos tipo barra que solo trabajan a axil. En el caso de los diafragmas de alma llena, los elementos pueden ser de tipo lámina, mientras que el caso de los marcos lo elementos pueden ser tipo viga.

En el presente trabajo se ha estudiado la modelización los diafragmas de sección cajón unicelular, lo cual será desarrollado en el capítulo 4. Sin embargo, las principales conclusiones del estudio pueden resultar de aplicación a cualquier geometría, por lo que se explicarán a continuación.

La matriz de rigidez de los diafragmas en celosía, empleando elementos tipo barra, alcanza una excelente correlación con las rigideces calculadas mediante elementos finitos. Por lo tanto, este tipo de diafragmas se pueden modelar sin necesidad de realizar hipótesis adicionales.

En los diafragmas tipo marco, existe una contribución de las chapas de la sección que debe ser tomada en cuenta. Esto se debe a que el marco trabaja a flexión, y las chapas o

perfiles adicionales se encuentran soldados por el alma a la sección principal. La forma en la que calcula esa contribución varía en función de los autores. Por ejemplo Jean-Paul Lebet y Manfred A. Hirt [113] proponen calcular la inercia del marco respecto al punto de soldadura con la sección principal, Viñuela [48] sugiere considerar aproximadamente $16 \cdot t \cdot \epsilon$ a cada lado del marco, y Nakai [34] propone que la contribución total sea un tercio del mínimo entre el canto y el ancho del cajón. Dado que existen tantos puntos de vista, la contribución de las chapas de la sección debe ser objeto de estudio cuando se desee estudiar un tipo de sección nuevo.

Finalmente, las pruebas realizadas modelando diafragmas de alma llena mediante elementos finitos tipo lámina han requerido de hipótesis adicionales. Por ejemplo, en el caso de los diafragmas de cajones de sección trapezoidal se ha concluido que la mejor forma de modelar la rigidez es emplear un elemento de cuatro nodos que únicamente contenga los términos de deformación tangencial. Es decir, en función del modo de distorsión de la sección, se debe hacer un estudio específico para determinar cual es la mejor forma de modelar la rigidez del diafragma.

Una vez definida la matriz de rigidez del diafragma, el último paso es calcular la rigidez del diafragma (K_D). Esto se logra calculando el trabajo de deformación debido a los movimientos unitarios en los nodos representativos de la sección del siguiente modo:

$$K_D = \overline{u_D}^t \cdot \overline{\overline{K_m}} \cdot \overline{u_D} \quad (3.182)$$

La rigidez de los diafragmas se introduce en la matriz global de la viga como un elemento tipo muelle vinculado al grado de libertad de distorsión del nodo donde se dispone el diafragma.

La reacción en los diafragmas se denomina R_D y se obtiene multiplicando el movimiento por distorsión en el diafragma por su rigidez:

$$R_D = K_D \cdot \psi_d \quad (3.183)$$

CAPÍTULO 4

Comportamiento y modelización de diafragmas

4.1 Introducción

En este capítulo se analiza el comportamiento de algunos de los tipos de diafragmas antidistorsión más frecuentes en secciones cajón unicelulares. El objetivo es representar adecuadamente el comportamiento de dichos diafragmas en los cálculos efectuados con el elemento finito propuesto en el capítulo 3, y dimensionarlos conforme a la normativa vigente. Por lo tanto, también se revisarán los criterios de dimensionamiento resistente, haciendo especial énfasis en la distorsión.

Los diafragmas antidistorsión tienen como objetivo controlar la distorsión en los tableros de sección cajón. Para entender cómo actúan, se puede recurrir a la analogía de la viga sobre lecho elástico. En dicha analogía la rigidez de la viga se corresponde con la rigidez debida al alabeo de la sección, y el lecho elástico lo conforma la rigidez como marco. En el caso de los puentes mixtos, la rigidez de marco es muy baja, por lo que el mecanismo resistente fundamental frente a la distorsión es el alabeo de la sección, con las consiguientes tensiones longitudinales en el tablero. Para controlar dicho alabeo, la solución en la analogía es disponer de apoyos elásticos intermedios, que en los tableros se corresponden con los diafragmas antidistorsión. Dependiendo del número y rigidez de dichos diafragmas, se puede controlar en mayor o menor medida la distorsión.

Para caracterizar un diafragma, es necesario considerar dos parámetros fundamentales: rigidez y resistencia. Al igual que en la analogía de la viga sobre lecho elástico, la rigidez es un parámetro fundamental a la hora de controlar las tensiones por distorsión. En el apartado 3.7 se explicó cómo obtener la rigidez de cálculo a partir de la matriz de rigidez del diafragma ($\overline{K_m}$). En este apartado se explica el proceso para obtener esta matriz

de rigidez y los movimientos debidos a distorsión en la sección que se deben considerar. Además, los diafragmas también deben ser capaces de resistir los esfuerzos debidos a la distorsión. Por lo tanto, se analizará la capacidad última de un diafragma y su verificación partiendo de los resultados del cálculo empleando el elemento finito.

El estudio se realizará para algunos de los tipos de diafragmas más empleados actualmente. Concretamente, se considerarán las siguientes tipologías:

- Diafragma de alma llena.
- Celosía en X o Cruz de San Andrés.
- Celosía en V.
- Celosía en K.
- Marcos abiertos y cerrados.

En la figura 4.1 se han representado las tipologías de diafragmas anteriores.

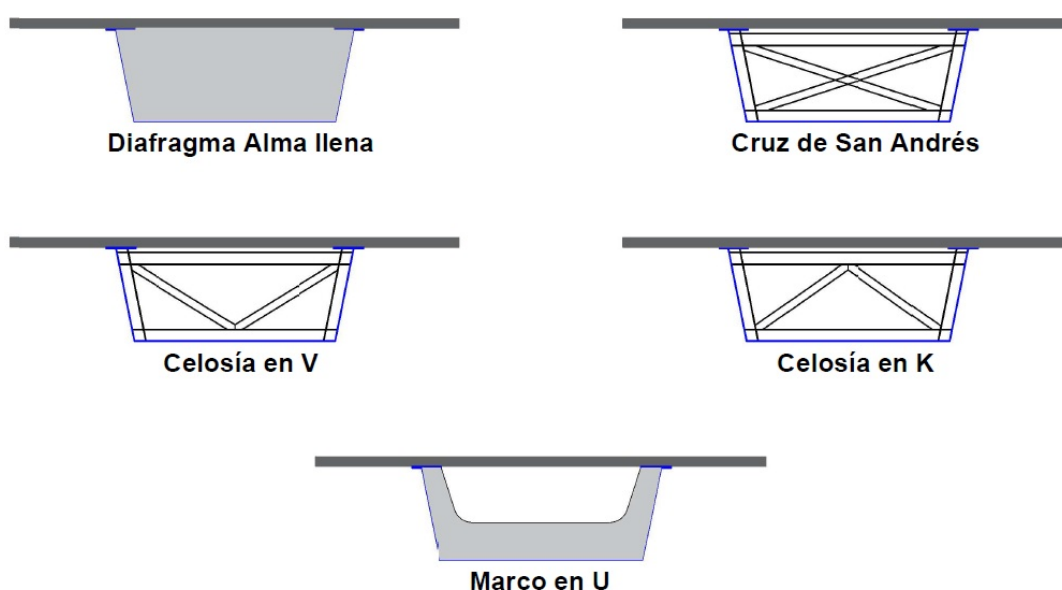


FIGURA 4.1 Tipos de diafragma considerados

El análisis se llevará a cabo de forma individualizada para cada tipo de diafragma, ya que cada uno presenta sus singularidades tanto a nivel de rigidez como a nivel resistente. Este análisis se dividirá en dos partes: el cálculo de la rigidez y el cálculo de la capacidad resistente. Además, el estudio se complementará revisando la formulación simplificada para el cálculo de rigidez y esfuerzos en dichos diafragmas.

No obstante, en primer lugar, se realizarán unas consideraciones generales aplicables a todos los diafragmas, y se describirá la metodología empleada en el presente capítulo.

4.2 Consideraciones generales

4.2.1 Funciones de los diafragmas

En este trabajo se estudia el comportamiento de los diafragmas intermedios frente a la distorsión. Sin embargo, los diafragmas intermedios en secciones cajón pueden cumplir otras funciones adicionales como se explica a continuación.

En su trabajo, Pascual [3] describe las principales funciones de los diafragmas intermedios. Estas se resumen a continuación, puntualizando y completando algunas de ellas:

- **Transmitir las cargas locales aplicadas en la plataforma a las almas.**

En ciertos casos, se puede diseñar el puente de manera que la losa quede soportada interiormente en el cajón. Esto se logra mediante costillas transversales o mediante un diafragma de alma llena. El objetivo es reducir el espesor de la losa y puede ser de utilidad por ejemplo en puentes de grandes luces o gran anchura. Para cumplir con este objetivo, el Service d'études sur les transports, les routes et leurs aménagements (SETRA)[1] recomienda que el espaciamiento oscile alrededor de los 4 m.

Las implicaciones que esto tiene a nivel de diseño son que las cargas verticales provenientes del tablero se deben sumar a las cargas debidas a la distorsión en el diafragma. Esto determina que, en muchos casos, se requieran diafragmas con mayor capacidad, y, por ende, más costosos. Además, el espaciamiento recomendado de 4 m es habitualmente inferior al requerido para controlar la distorsión, lo cual implica un mayor número de diafragmas. Por este motivo, en el presente trabajo, se adoptará como norma general que los diafragmas antidistorsión no tengan como función soportar la losa superior, ya que esta hipótesis queda del lado de la seguridad. Únicamente en el caso de los diafragmas de alma llena se considerará la influencia de las cargas locales.

- **Transmitir las cargas locales aplicadas en ménsulas o jabalcones en tableros de gran anchura.**

Se trata de una variante del caso anterior para puentes muy anchos. De acuerdo con el SETRA [1], cuando el ancho del tablero supera los 13 o 14 m se recomienda disponer ménsulas cada 4 m para soportar la losa superior con el fin de reducir su espesor. En tableros extremadamente anchos, dichas ménsulas pueden ser soportadas por jabalcones. Este es el caso, por ejemplo, de tableros de autovía que alojan los dos sentidos de circulación en un único tablero. Ejemplos de esta tipología son

el Viaducto del Regueirón [123], proyectado por Marcos Pantaleón y Óscar Ramón Ramos, o el Viaducto de Verrières [122], proyectado por Michel Virlogeux.



FIGURA 4.2 Viaducto del Regueirón
Cortesía de Óscar Ramón Ramos

Al igual que en el caso anterior, y por los mismos motivos, se va omitirá como norma general en este trabajo la presencia de ménsulas y jabalcones.

- **Transmitir las fuerzas de desviación del ala inferior al alma en puentes de canto variable.**

En los puentes de canto variable se producen fuerzas de desviación debido a la curvatura del ala inferior o a quiebros puntuales en el caso de los puentes acartelados. En cajones pequeños, esta fuerza puede ser transmitida por los propios rigidizadores transversales del ala inferior. Sin embargo, en puentes de mayor envergadura, puede ser necesario que el diafragma colabore con el fin de reducir las dimensiones del rigidizador transversal.

No se considerará este fenómeno en este trabajo, ya que es complementario a los requerimientos por distorsión.

- **Permitir la transferencia de esfuerzos en zonas singulares.**

En los puentes puede haber situaciones que produzcan una singularidad geométrica en el cajón. Por ejemplo, esto ocurre con intersecciones de tableros elevadas, desdoblamiento de cajones únicos en dos ramales, cambios bruscos de trazado en planta o alzado o cambios relevantes en la forma de la sección tipo.

Por lo general, este tipo de diafragmas requieren estudios específicos, por lo que quedan fuera del alcance del presente trabajo.

- **Recoger la componente horizontal en secciones trapezoidales.**

Cuando una carga vertical actúa sobre un alma inclinada, aparece una componente horizontal que permite equilibrar la transmisión de la fuerza en el nodo superior. Esta fuerza puede ser resistida bien por la losa o bien por el cordón superior del diafragma. En este trabajo se supondrá que dicha componente horizontal es resistida por el cordón superior del diafragma.

- **Evitar la deformación transversal de la sección durante el montaje e introducir acciones durante la construcción.**

Al igual que sucede durante el estado final, durante la construcción, incluso en puentes rectos, pueden aparecer solicitaciones excéntricas que produzcan deformaciones excesivas. Esto se debe a que la sección aún no se encuentra hormigonada y, por lo tanto, su rigidez a torsión es mucho menor. En estos casos, es común disponer una celosía superior que permita cerrar el circuito de torsión al menos temporalmente. Sin embargo, los diafragmas también deben ser capaces de resistir estas solicitaciones y controlar las deformaciones.

Durante la construcción, pueden surgir otros casos de cargas en diafragmas, como el empleo de apoyos temporales o la fuerza de desviación que se produce en el cordón superior durante el hormigonado de secciones trapezoidales. Sin embargo, estas y otras casuísticas similares durante la construcción no se han contemplado en este trabajo.

- **Funciones típicas de los rigidizadores.**

Los diafragmas suelen reemplazar a los rigidizadores en las secciones donde se instalan, y por tanto deben cumplir las mismas funciones de los rigidizadores, como controlar la abolladura de los paneles, limitar el pandeo de los rigidizadores, recoger las fuerzas de desviación debidas a la curvatura de los paneles o recoger las acciones

que actúan directamente sobre las chapas del cajón, como el viento.

Como norma general, en los diafragmas en celosía se supone que las funciones de rigidización las realiza el perímetro exterior, por lo que no se tienen en cuenta los esfuerzos de rigidización en los montantes. Sin embargo, los rigidizadores también pueden actuar como diafragmas antidistorsión, ya que su rigidez es superior a la del cajón y, por tanto, pueden estar sometidos a cargas de distorsión, aunque no estén concebidos para ello. Este hecho será objeto de estudio en la sección 6.6.3.

Lo descrito anteriormente se corresponde con las funciones más habituales de los diafragmas intermedios. Pueden existir funciones adicionales a las expuestas en este apartado, pero no serán tenidas en consideración.

4.2.2 Movimientos de la sección

En las secciones tipo cajón unicelular, se emplearán para el cálculo de la rigidez del diafragma los movimientos en los extremos superiores e inferiores del alma. En el extremo inferior, los nodos se corresponden con la intersección entre el alma y el ala inferior, mientras que en el extremo superior, los nodos se corresponden con la intersección entre el alma y la platabanda superior. Si la platabanda superior no está definida, los nodos se corresponden con la intersección entre el alma y la losa superior. La figura 4.3 muestra un esquema con estos nodos mencionados.

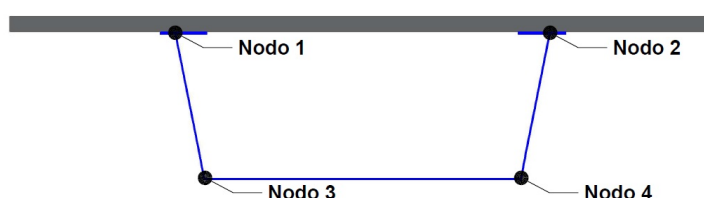


FIGURA 4.3 Nodos de referencia

Los movimientos que se han considerado en los nodos descritos anteriormente son únicamente los movimientos horizontales y verticales. Es decir, el vector de desplazamientos ($\overline{u_D}$) que se consideró en la ecuación 3.182, y que sirve para calcular la rigidez del diafragma, se define como:

$$\overline{u_D}^t = (u_{dx,1}, u_{dy,1}, u_{dx,2}, u_{dy,2}, u_{dx,3}, u_{dy,3}, u_{dx,4}, u_{dy,4}) \quad (4.1)$$

El motivo de considerar únicamente estos nodos y movimientos en los extremos radica en que la deformación a flexión de las paredes de la sección es muy baja en comparación con la rigidez de diafragma habitual. Esto implica que los movimientos que dependen

de dicha rigidez a flexión, como los giros en los nodos extremos y los movimientos de los nodos intermedios de las paredes, pueden variar en presencia del diafragma, y, en muchos casos, prácticamente a anularse. Por lo tanto, si se introdujeran estos movimientos dependientes de la flexión en el cálculo de rigidez del diafragma se estaría sobrestimando dicha rigidez, ya que la energía de deformación calculada sería mayor por la presencia de unas deformaciones que apenas se van a producir.

4.2.3 Cálculo de rigidez empleando modelos de contraste

La rigidez de los diafragmas se calculará a partir de los desplazamientos en la sección y de una matriz de rigidez del marco específica del diafragma, tal y como se describe en el apartado 3.7. Esta rigidez se comparará con la calculada siguiendo el procedimiento descrito por Viñuela en su libro *Proyecto y construcción de puentes metálicos y mixtos* [128]. Dicho procedimiento, así como la forma de comparar rigideces, se detallan en el apéndice B, aunque se resume a continuación para mayor comodidad del lector.

Se partirá de un modelo que representa una segmento de sección correspondiente a la distancia entre diafragmas empleando elementos tipo lámina. Esta sección se compone únicamente de una losa superior, un ala inferior y sendas almas. Además, en el centro de la sección se ha representado el diafragma empleando los elementos que se consideren más adecuados en función del tipo de diafragma. Ejemplos de dichos modelos serán representados con posterioridad. Cabe destacar que el modelo se ha realizado empleando el programa de elementos finitos Sofistik [129] [130], y que la longitud entre diafragmas considerada como norma general ha sido 4.5 m.

En el modelo descrito anteriormente se aplica una carga unitaria en el perímetro. Las cargas en el ala superior, inferior y almas se denominan respectivamente q_{ts} , q_{bs} , q_{ws} . El valor de dichas cargas por unidad de longitud es:

$$q_{ts} = \frac{M_T}{2 \cdot A_c} \cdot \beta^2 \quad (4.2a)$$

$$q_{ws} = \frac{M_T}{2 \cdot A_c} \cdot \beta \quad (4.2b)$$

$$q_{bs} = \frac{M_T}{2 \cdot A_c} \quad (4.2c)$$

Donde M_T es el momento torsor en el diafragma, A_c el área encerrada por el cajón y β es el ratio entre el ancho inferior del cajón (b_b) y el ancho superior del cajón (b_s). En la figura 4.4 se representa esquemáticamente el modelo de cálculo y las cargas aplicadas,

incluyendo su dirección y sentido.

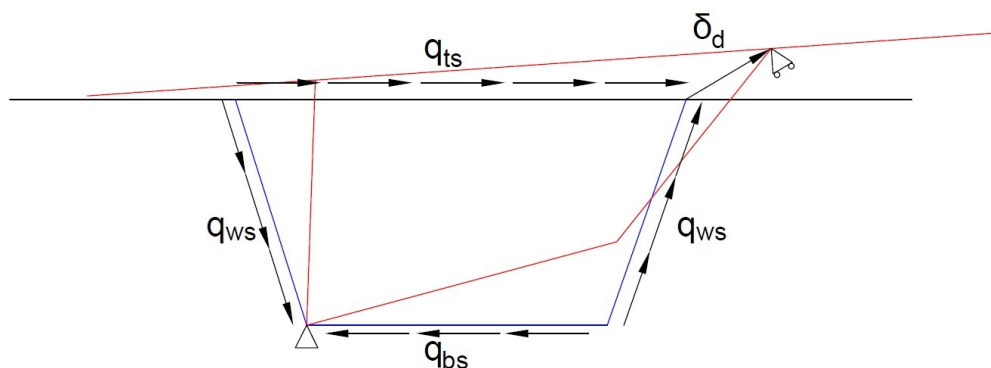


FIGURA 4.4 Modelo de cálculo de diafragma

Las condiciones de contorno del modelo de cálculo también se pueden apreciar en la figura 4.4. El vértice inferior izquierdo tiene impedido el desplazamiento en todas las direcciones, mientras que su vértice opuesto permite únicamente el desplazamiento en la dirección de la diagonal. Además, no se permiten desplazamientos perpendiculares al plano del diafragma en el contorno.

El resultado del modelo de cálculo es el movimiento en la diagonal (δ_d). La rigidez del diafragma se obtiene usando el desplazamiento anterior y las relaciones descritas en el apéndice B para la formulación de desplazamiento vertical unitario en el vértice superior del alma, que es el criterio de normalización empleado en el elemento finito. Su cálculo se muestra a continuación:

$$K_D = M_T \cdot \frac{8 \cdot A_c}{L_d \cdot b_b^2} \cdot \frac{\beta}{\delta_d} \quad (4.3)$$

Donde L_d es la longitud de la diagonal del cajón.

Por último, la relación entre el momento torsor en el diafragma (M_T) y la reacción en el diafragma (R_D) para la formulación de desplazamiento vertical unitario en el nodo superior del alma es la siguiente:

$$M_T = \frac{b_s}{2} \cdot R_D \quad (4.4)$$

4.2.4 Geometría y materiales de referencia

Como se ha explicado anteriormente, en este capítulo se elaborarán modelos de elementos finitos multidimensionales para estudiar las distintas tipologías de diafragma y calibrar el cálculo de rigidez. En concreto, se estudiarán para cada tipología al menos 20

secciones geométicamente distintas. Dichas secciones comparten espesores de paredes, pero difieren en las dimensiones principales.

En cuanto a los espesores y materiales, la losa superior es de hormigón y tiene un espesor de 250 mm, mientras que las almas y el ala inferior son de acero y tienen un espesor de 20 y 30 mm respectivamente. Además, las propiedades de los materiales se muestran en la tabla 4.1:

Material	E [MPa]	ν
Hormigón	30.000	0.2
Acero	210.000	0.235

TABLA 4.1 Propiedades elásticas de los materiales

Las características principales de la geometría de la sección se describen en la tabla 4.2. En dicha tabla, se utiliza la siguiente nomenclatura: b_s es el ancho superior del cajón, b_b es el ancho inferior del cajón y h es la altura de la sección medida de fibra media de la losa superior a fibra media del ala inferior.

Caso	b_s	b_b	h	Caso	b_s	b_b	h
1	4	4	1.5	11	6	6	1.5
2	4	3.2	1.5	12	6	4.8	1.5
3	4	2.67	1.5	13	6	4	1.5
4	4	2.29	1.5	14	6	3.43	1.5
5	4	2	1.5	15	6	3	1.5
6	4	4	3	16	6	6	3
7	4	3.2	3	17	6	4.8	3
8	4	2.67	3	18	6	4	3
9	4	2.29	3	19	6	3.43	3
10	4	2	3	20	6	3	3

TABLA 4.2 Geometría de las secciones consideradas

El ancho total de la losa (b) se corresponde con el doble del ancho superior del cajón ($b = 2 \cdot b_s$).

4.3 Diafragmas de alma llena

4.3.1 Introducción

Los diafragmas de alma llena son aquellos diafragmas compuestos por una placa metálica que se extiende toda la sección del cajón y que, en el caso de los cajones, está conectada en todo el perímetro. Esta placa suele presentar pasos para permitir el tránsito por el interior del cajón y rigidizadores para reforzar dicho paso o aumentar la resistencia del diafragma. Esto se puede apreciar en la figura 4.5. Sin embargo, en este trabajo se considerará que el diafragma está compuesto por una única placa sin aperturas ni rigidización con el fin de limitar la casuística.



FIGURA 4.5 Diafragma de alma llena en Viaducto de Escaleritas
Cortesía de O. R. Ramos

Como se ha descrito anteriormente, este tipo de diafragmas están en contacto con todo el perímetro, incluida la losa superior del tablero. Esto significa que, además de resistir los esfuerzos debidos a la distorsión, estos diafragmas también tienen que soportar los esfuerzos debidos a la carga vertical que actúa al paso del tráfico sobre el diafragma.

El proceso para obtener los esfuerzos anteriores se abordará de manera independiente. Los esfuerzos debidos a la distorsión se obtendrán mediante el elemento finito descrito en este trabajo, mientras que los esfuerzos debidos a la carga vertical se obtendrán de manera independiente. Es decir, para obtener los esfuerzos debidos a la distorsión, se definirá primero la rigidez del diafragma. Esta rigidez se incluirá en el cálculo de la viga empleando elementos finitos, y a partir de los resultados se calcularán las tensiones necesarias para el dimensionamiento de dicho diafragma. En cambio, para la carga vertical se utilizará un

cálculo simplificado.

Con el fin de poder justificar la carga vertical que se empleará en el cálculo simplificado, se estudiará la carga que actúa sobre un diafragma mediante un modelo independiente considerando distintas configuraciones geométricas. El objetivo es determinar la carga repartida equivalente que actúa verticalmente.

Por último, y una vez definidas las cargas de diseño, se van a revisar los criterios para el dimensionamiento en servicio y ELU de este tipo de diafragmas. Para ello, se van a estudiar tanto las cargas críticas como las cargas últimas.

4.3.2 Modelo de contraste

Para la mayor parte de los cálculos se empleará el modelo de cálculo de contraste descrito en el apartado anterior. En cuanto a la modelización específica del diafragma de alma llena, se ha supuesto que su espesor es de 10 mm. Es importante mencionar que, a menos que se indique lo contrario, se ha considerado que el diafragma se encuentra articulado en los bordes, evitando la transmisión de momentos a la sección principal. En la figura 4.6 se muestra un ejemplo de uno de los modelos de contraste realizados para el diafragma de alma llena.

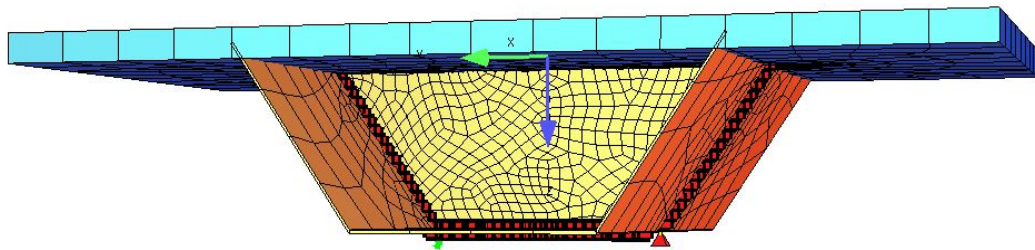


FIGURA 4.6 Modelo de contraste de diafragma de alma llena

En cuanto a la introducción de las cargas de distorsión, se han distribuido en el perímetro del diafragma, como se muestra en la figura 4.7. Esta figura corresponde a una carga torsora de 1000 kN.m. aplicada en el caso geométrico 4.

Las cargas verticales se han introducido como una carga lineal uniforme en el eje del diafragma, distribuidas en un ancho determinado. La componente vertical de dicha carga se ha equilibrado con una carga distribuida en ambas almas, mientras que la torsión resultante debida a las cargas se ha equilibrado con una carga uniforme distribuida en el perímetro del diafragma. Se muestra un ejemplo de carga vertical centrada en la figura 4.8.

El valor de la carga lineal vertical y su ancho se justificará en el apartado 4.3.5.

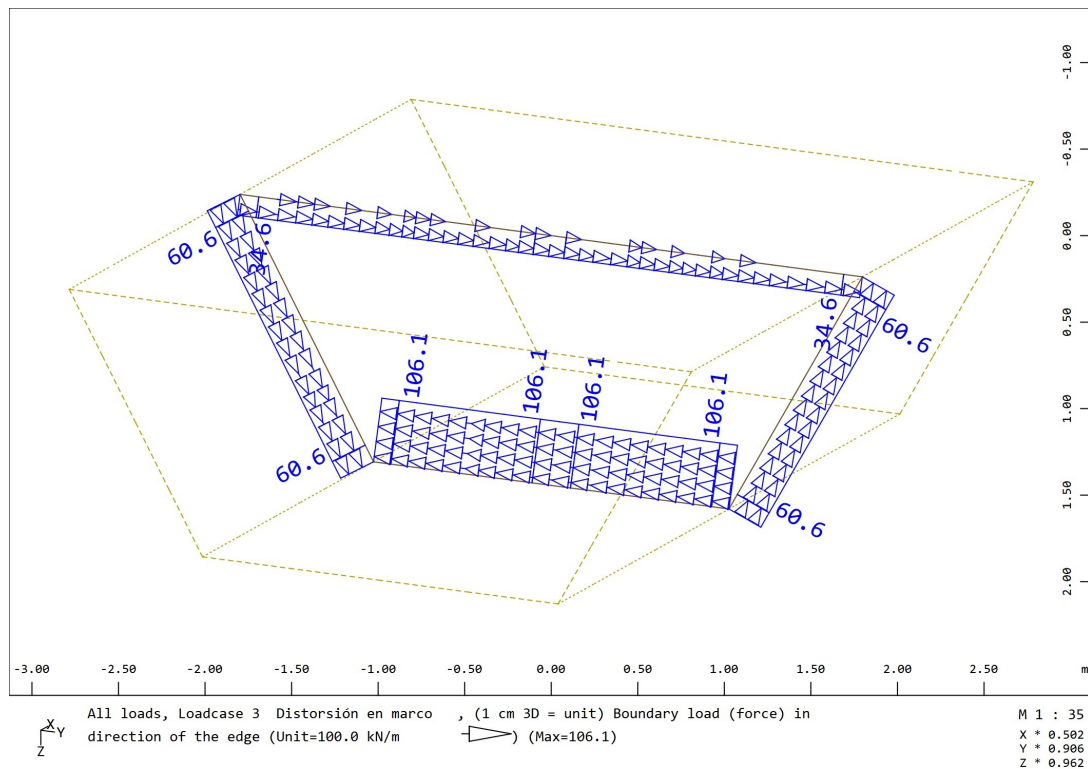


FIGURA 4.7 Carga de distorsión en el modelo

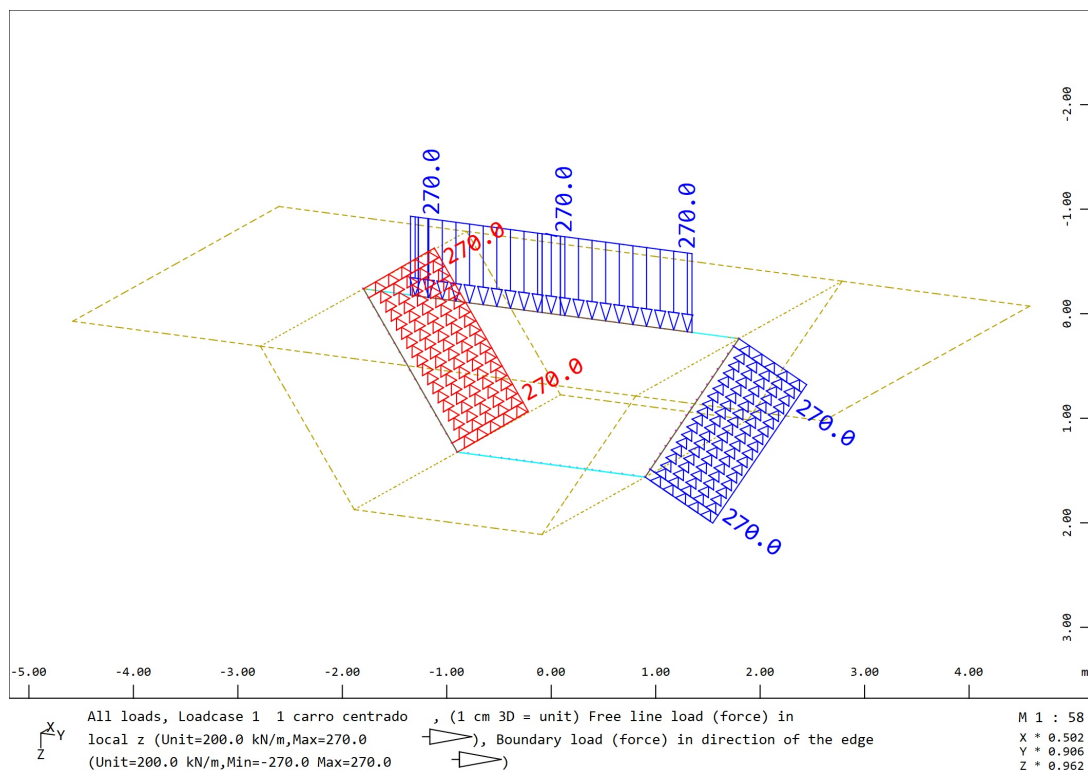


FIGURA 4.8 Carga vertical en el modelo

En cuanto al cálculo en sí, se realizarán análisis de dos formas: considerando únicamente el panel formado por el diafragma de alma llena, que se denominará en adelante «caso exento», o considerando también el comportamiento cuando se incluyen los paneles de la sección principal, que se denominará «caso completo». En este último caso se han considerado 2.25 m de tablero a cada lado del diafragma.

4.3.3 Rigidez del diafragma

4.3.3.1 Matriz de rigidez

La matriz de rigidez del diafragma ($\overline{\overline{K_m}}$) que se usará para el cálculo de la rigidez se corresponde con la de un elemento cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos. Las funciones de forma N_i que se emplearán son de tipo Lagrangiano y se definen como:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \quad (4.5)$$

Donde ξ y η son las coordenadas relativas horizontales y verticales del elemento respectivamente, y varían entre -1 y 1 . Los vértices en el alma izquierda se corresponden con $\xi_i = -1$, los vértices en el alma derecha con $\xi_i = 1$, los vértices en el ala inferior con $\eta_i = -1$ y los vértices superiores con $\eta_i = 1$.

La matriz de rigidez se obtiene integrando el trabajo de deformación calculado utilizando las funciones de interpolación mencionadas anteriormente:

$$\overline{\overline{K_m}} = \int \int_A \overline{\overline{B}}^T \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{B}} \cdot t_D \cdot dx \cdot dy \quad (4.6)$$

Donde $\overline{\overline{B}}$ es la matriz de deformación-desplazamiento, $\overline{\overline{D}}$ es la matriz constitutiva y t_D es el espesor del diafragma.

La matriz $\overline{\overline{B}}$ se define del siguiente modo:

$$\overline{\overline{B}} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{B}}_1 & \overline{\overline{B}}_2 & \overline{\overline{B}}_3 & \overline{\overline{B}}_4 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Y cada uno de los términos que componen la matriz anterior se definen como:

$$\overline{\overline{B}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Las derivadas empleadas en matriz anterior se pueden obtener, aprovechando que el elemento es isoparamétrico, como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\overline{J}^e|} \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\eta_j}{4} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_j) \cdot y_j & -\frac{\xi_j}{4} \cdot (1 + \eta \cdot \eta_j) \cdot y_j \\ -\frac{\eta_j}{4} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_j) \cdot x_j & \frac{\xi_j}{4} \cdot (1 + \eta \cdot \eta_j) \cdot x_j \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\xi_i}{4} \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \\ \frac{\eta_i}{4} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Donde $\overline{J}^e$ es el Jacobiano que se define como:

$$\overline{J}^e = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\xi_i}{4} \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot x_i & \frac{\xi_i}{4} \cdot (1 + \eta \cdot \eta_i) \cdot y_i \\ \frac{\eta_i}{4} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot x_i & \frac{\eta_i}{4} \cdot (1 + \xi \cdot \xi_i) \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

La matriz constitutiva ($\overline{D}$) se define de manera completa como:

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu \cdot E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu \cdot E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

No obstante, la rigidez de diafragma se ha calculado considerando únicamente los términos debidos a la deformación tangencial, por los motivos que se describirán en el apartado 4.3.3.3. Realizando esta hipótesis, la matriz constitutiva pasa a denominarse $\overline{D}_\gamma$ y se define como:

$$\overline{D}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Una vez que se han definido las matrices $\overline{B}$ y $\overline{D}_\gamma$ se puede calcular la matriz de rigidez $\overline{K}_m$. Para ello, se ha empleado una integración numérica. Denominando n_p y n_q al número de puntos de integración, $\overline{\xi}_p$ y $\overline{\eta}_q$ a las coordenadas de los de puntos de integración y $\overline{W}_p$ y $\overline{W}_q$ al peso de cada punto, se puede plantear la integral 4.6 de la siguiente manera:

$$\overline{K}_m = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} \overline{B}(\xi_p, \eta_q)^T \cdot \overline{D}_\gamma \cdot \overline{B}(\xi_p, \eta_q) \cdot t_D \cdot |\overline{J}(\xi_p, \eta_q)^e| \cdot W_p \cdot W_q \quad (4.13)$$

En este caso se han tomado cinco puntos de integración en cada dirección aplicando la cuadratura de Gauss-Legendre.

4.3.3.2 Cálculo aproximado

En el apéndice B se justifica que la rigidez aproximada de un diafragma de alma llena se puede obtener a partir de la deformación media del diafragma. Esta deformación se ha calculado a partir de la tensión en la fibra media, cuyo cálculo se muestra en el apartado 4.3.4.2, dividiendo dicha tensión entre el módulo de cizalla (G). Para obtener la rigidez del diafragma, se debe integrar el trabajo de deformación de todo el diafragma para una deformación unitaria.

Tomando como deformación unitaria aquella que provoca un movimiento vertical unitario en el vértice superior del alma, la rigidez del diafragma aproximada se define como:

$$K_D = \frac{16 \cdot G \cdot t_D \cdot A_c}{b_b^2} \quad (4.14)$$

En la figura 4.10 se va a mostrar como esta aproximación guarda una correlación muy buena con los cálculos comparativos realizados.

4.3.3.3 Cálculo comparativo

Como se explicó en el apartado 3.7, se puede obtener la rigidez del diafragma (K_D) a partir de la ya definida matriz de rigidez del diafragma ($\overline{\overline{K_m}}$). Para ello se multiplica dicha matriz por los desplazamientos en la sección ($\overline{u_D}$) siguiendo la ecuación 3.182.

Con el fin de identificar la forma más adecuada de representar la rigidez del diafragma se han realizado varias pruebas. La primera consistió en considerar el elemento finito de 4 nodos descrito anteriormente y su matriz constitutiva completa. Los resultados no fueron satisfactorios ya que mostraron que la rigidez del elemento era superior a la esperada. Para reducir dicha rigidez se intentaron algunas de las estrategias para eliminar bloqueos en elementos de 4 nodos descritas por E. Oñate en su libro *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos* [23]. Concretamente, se ha estudiado la estrategia de integrar únicamente los términos de deformación tangencial y la de añadir un quinto nodo central en el elemento.

Tomando el cálculo de rigidez realizado en el modelo de elementos finitos completo como referencia, se muestran en la figura 4.9 los resultados considerando la matriz constitutiva completa y los elementos de 4 y 5 nodos.

Se observa que la diferencia entre la rigidez de referencia y la rigidez calculada con el elemento finito crece conforme aumenta la inclinación de las almas. Esto sucede tanto para el elemento de 4 nodos como para el elemento de 5 nodos, por lo que la estrategia

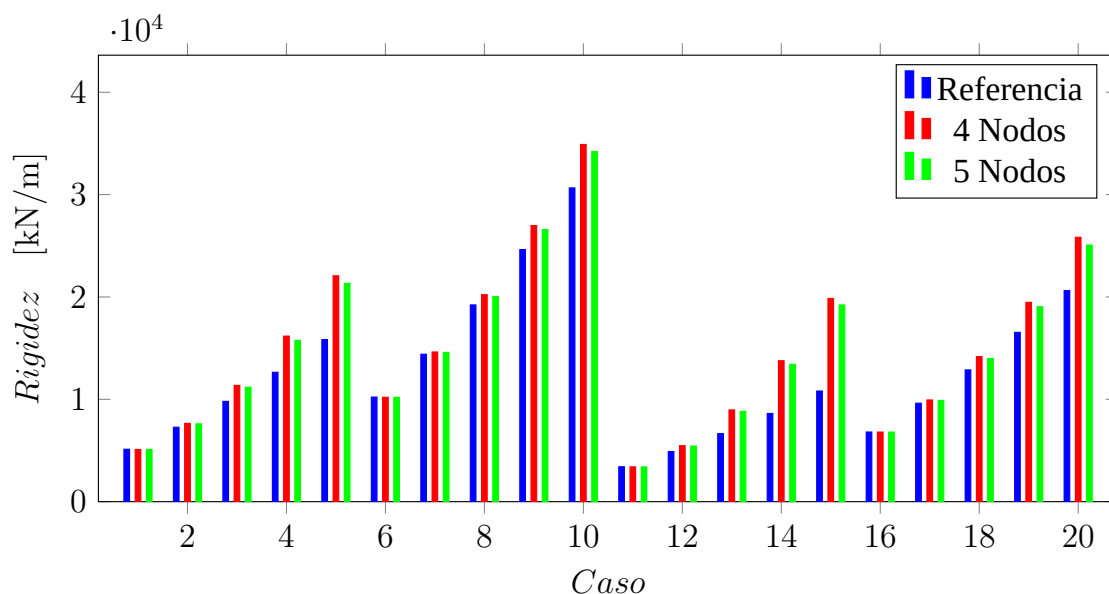


FIGURA 4.9 Rigidez considerando la matriz constitutiva completa

de un nodo adicional no es satisfactoria.

El crecimiento de las diferencias descrito anteriormente no es tan acusado cuando se integran únicamente las deformaciones tangenciales, como se muestra en la figura 4.10.

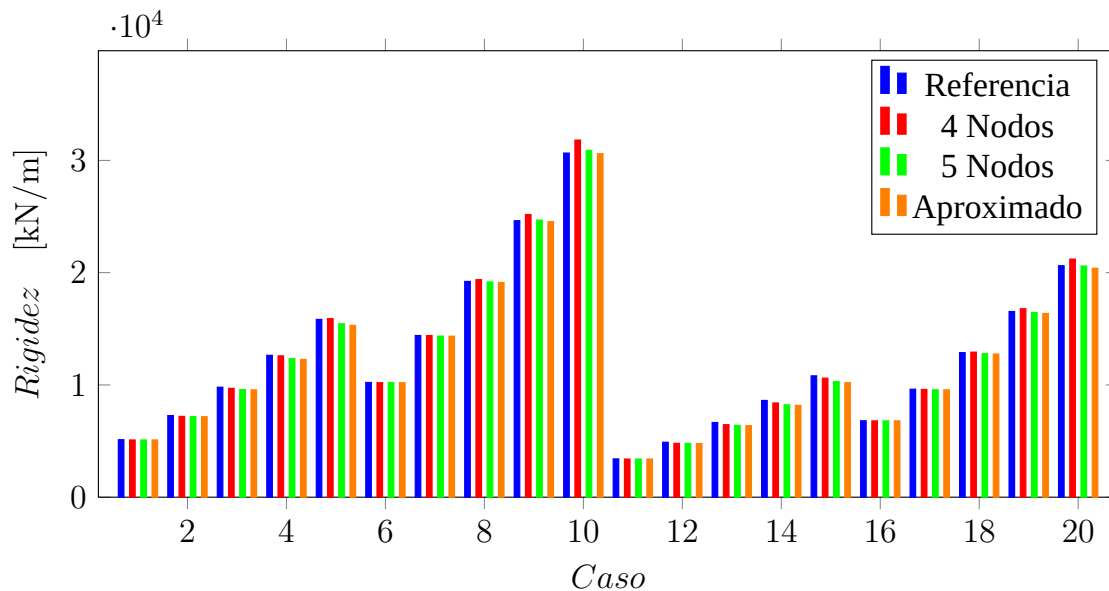


FIGURA 4.10 Rigidez considerando solo deformaciones tangenciales

En este caso, la correlación alcanzada a nivel de rigidez es buena tanto en el caso del elemento finito de 4 nodos como en el de 5 nodos. Sin embargo, como se expone en el siguiente subapartado, el elemento de 4 nodos presenta un comportamiento más preciso y conservador a nivel de tensiones en el diafragma. Por esta razón, se ha optado por

considerar dicho elemento en lugar del de 5 nodos.

4.3.4 Cálculo de tensiones debidas a la distorsión

4.3.4.1 Introducción

Conocer las tensiones en el diafragma es una condición necesaria para poder calcular la resistencia del diafragma de alma llena frente a la distorsión. Cuando el diafragma es rectangular el estado tensional se obtiene de manera inmediata. Sin embargo, cuando las almas de la sección dejan de ser verticales, el estado tensional del diafragma se vuelve más complejo. Para ilustrarlo se comparan los casos 1 y 5.

En el caso del diafragma rectangular, el estado tensional asociado a la distorsión consiste principalmente en una tensión tangencial uniforme en el diafragma. Esta tensión se obtiene fácilmente a partir de cualquiera de las ecuaciones 4.2, ya que β vale uno. Por lo tanto:

$$\tau_D = \frac{M_T}{2 \cdot A_c \cdot t} \quad (4.15)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior el torsor aplicado, que es 1000 kN.m, el área encerrada A_c que es 6 m² y el espesor de 10 mm, se llega a que la tensión es 8.33 MPa. Este valor se corresponde con lo mostrado en la figura 4.11, donde se observa claramente como al introducir las cargas en el perímetro en el modelo exento, la tensión tangencial que aparece es uniforme en todo el panel.

Cuando se realiza el mismo cálculo, pero considerando el modelo completo, el resultado es muy similar, como se aprecia en la figura 4.12. Únicamente las tensiones en las esquinas se ven ligeramente alteradas, aunque esto prácticamente no afecta a las tensiones de plastificación calculadas siguiendo el criterio de Von Mises y mostradas en la figura 4.13.

Sin embargo, cuando la sección pasa a ser trapezoidal, el estado de tensión uniforme descrito anteriormente no se cumple. En las ecuaciones 4.2 se puede observar que las cargas introducidas en la losa superior, ala inferior y almas son distintas. Dividiendo esta carga entre el espesor del diafragma se obtiene la tensión aplicada en los bordes. Específicamente, para un torsor de 1000 kN.m, la tensión aplicada en el borde superior es 2.77 MPa, y la tensión aplicada en el borde inferior 11.11 MPa. Estos valores se asemejan con lo mostrado en la figura 4.14 correspondiente al caso exento.

Además, en la figura 4.14 se puede observar cómo el hecho de que la carga aplicada no sea uniforme provoca discontinuidades en las tensiones de las esquinas del diafragma,

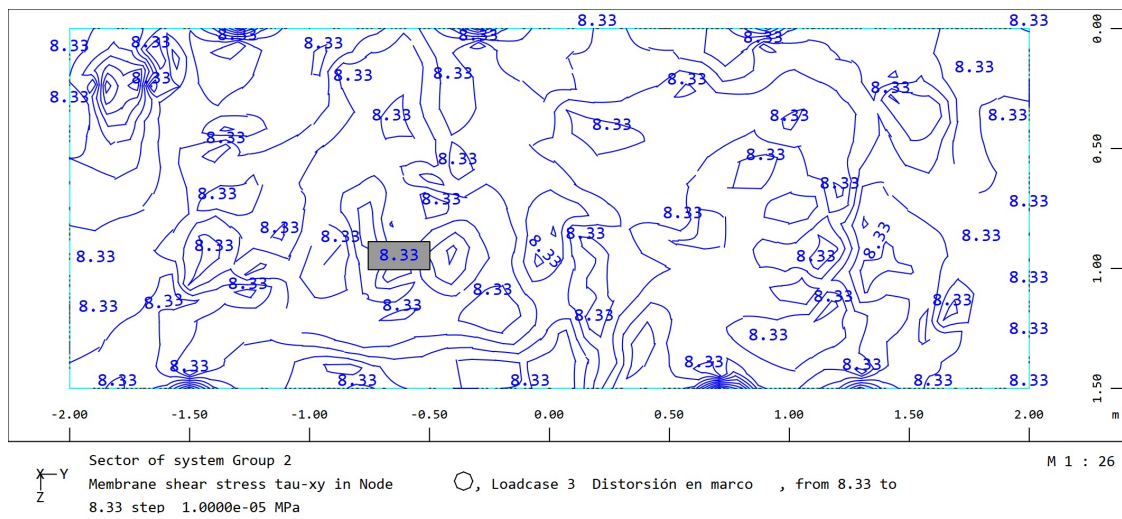


FIGURA 4.11 Tensión tangencial en modelo de diafragma rectangular exento

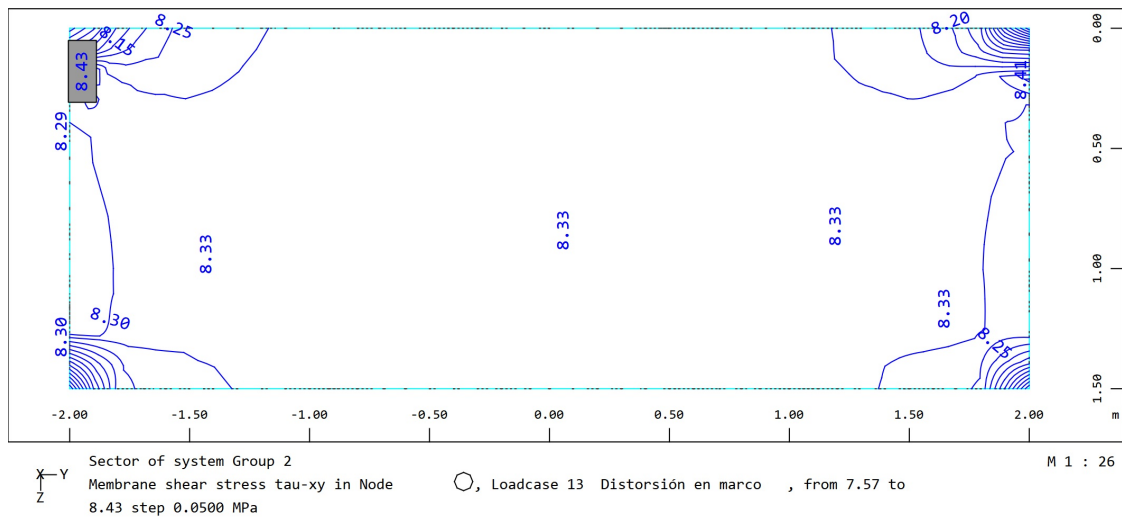


FIGURA 4.12 Tensión tangencial en modelo de diafragma rectangular completo

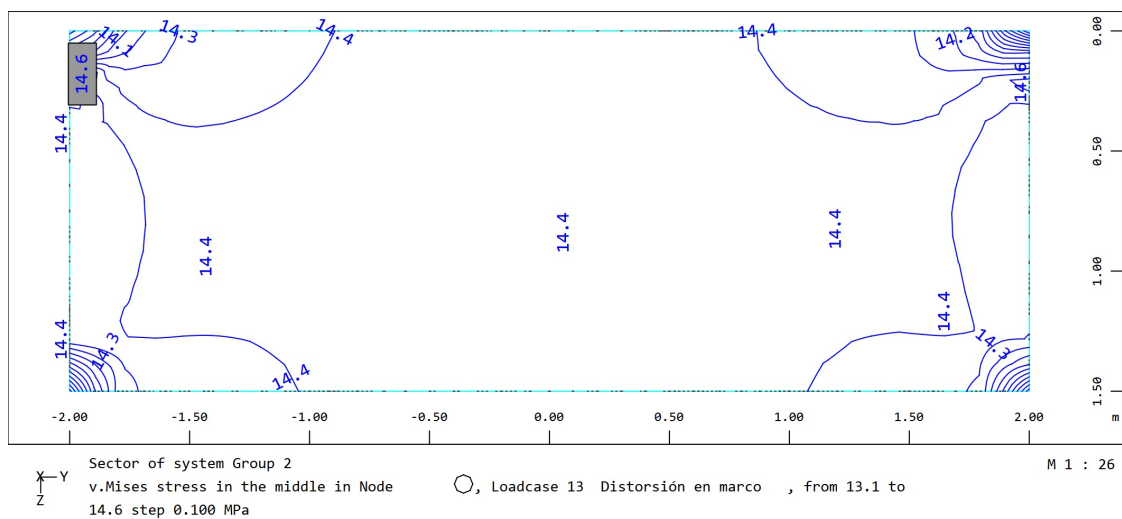


FIGURA 4.13 Tensión de Von Mises en modelo de diafragma rectangular completo

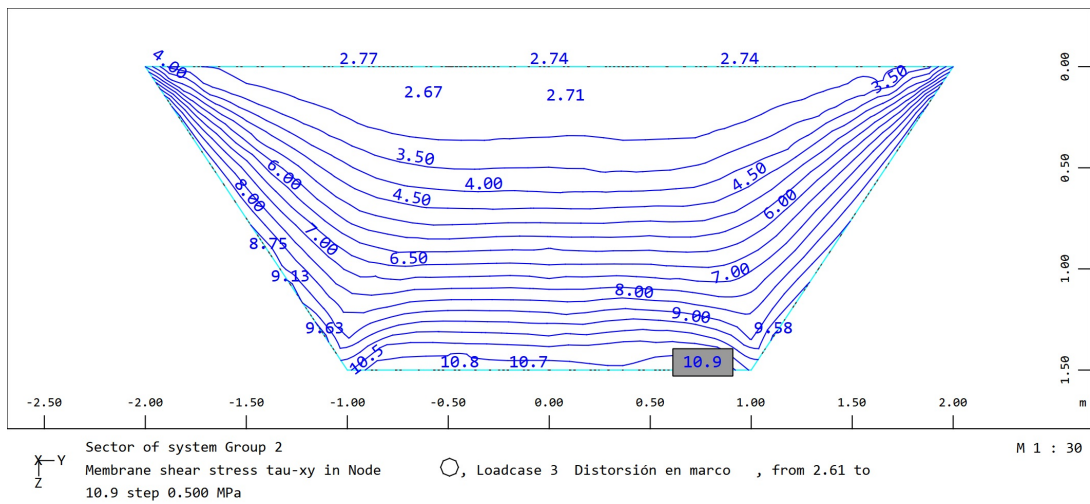


FIGURA 4.14 Tensión tangencial en modelo de diafragma trapezoidal exento

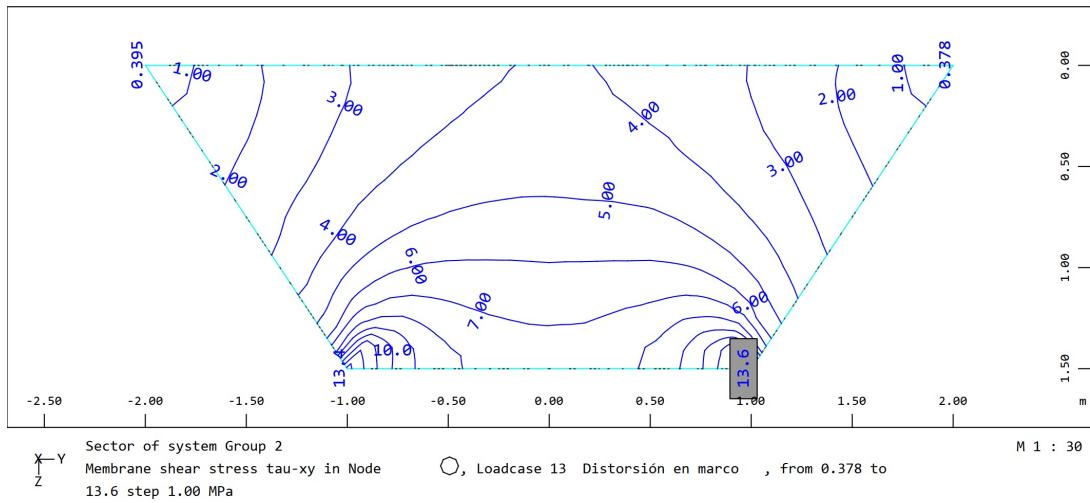


FIGURA 4.15 Tensión tangencial en modelo de diafragma trapezoidal completo

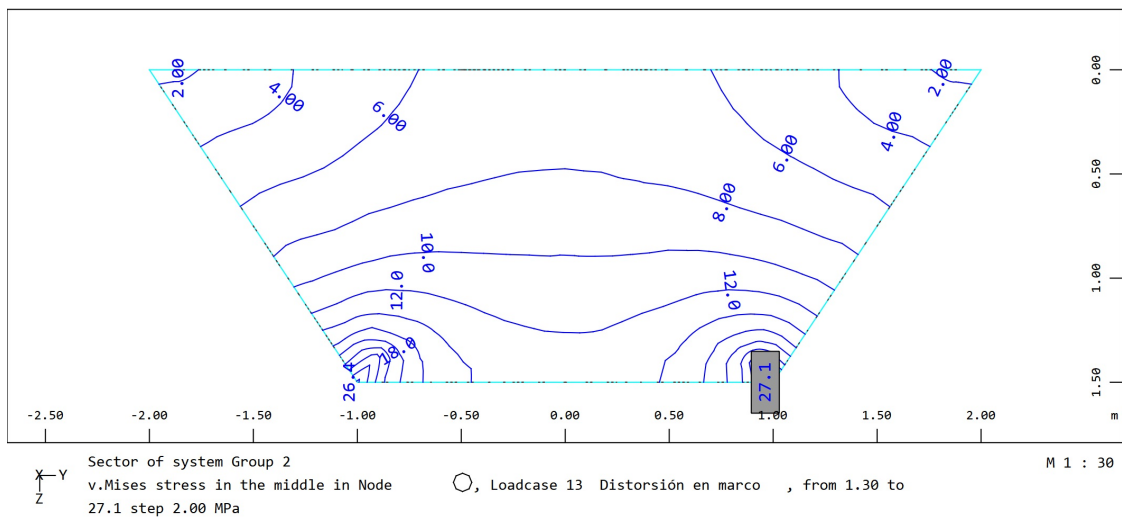


FIGURA 4.16 Tensión de Von Mises en modelo de diafragma trapezoidal completo

dando lugar a un estado tensional significativamente más complejo de modelar que en el caso de un diafragma rectangular.

No obstante, lo más relevante en el caso de los diafragmas trapezoidales es que el estado tensional se modifica significativamente cuando se considera el modelo completo. Esto se puede observar comparando las figuras 4.14 y 4.15. Mientras que en la primera de las figuras el estado tensional tiende a ser una interpolación de las cargas aplicadas, en el segundo de los casos se observa una variación menos pronunciada de las tensiones, aunque se producen mayores concentraciones de tensiones en las esquinas inferiores. Esta concentración de tensiones se produce no solo a nivel de tensiones tangenciales, sino que también aparecen tensiones axiales en el plano. El resultado de dicha concentración es que la tensión de Von Mises en las esquinas es muy superior a la tensión en el centro del diafragma, como se observa en la figura 4.16.

La complejidad del cálculo de tensiones descrito anteriormente hace que en este apartado se aborde únicamente el cálculo de tensiones en el diafragma con el objetivo de dimensionarlo frente al colapso. Es decir, se calcularán las tensiones necesarias para obtener la tensión crítica de abolladura y la capacidad del diafragma, pero no se incluirá la definición del estado tensional que permita estudiar plastificaciones o fenómenos de fatiga.

Específicamente, la tensión crítica que causa la abolladura por distorsión del diafragma es la tensión tangencial, por lo que esta sección se centrará en la obtención de las tensiones tangenciales en el diafragma.

4.3.4.2 Cálculo analítico aproximado de tensiones tangenciales

Las tensiones tangenciales en diafragmas trapezoidales se pueden obtener de manera aproximada y analítica cuando se emplea una sección simplificada. Esta simplificación consiste en que la intersección del alma con la losa superior y el ala inferior se realiza en la fibra media tanto de la losa como del alma.

Para realizar este cálculo utilizará la teoría clásica de la distorsión descrita en el apéndice B. Si se desea obtener más información sobre algún concepto, se remite al lector a dicho apéndice.

La tensión tangencial en un punto del eje de simetría del diafragma (τ_D) se puede expresar como la multiplicación de la distorsión en el diafragma (ψ_d) por el módulo de cortante (G) y por una deformación unitaria en un punto del diafragma que va a variar en función

de la altura ($\gamma_D(z)$).

$$\tau_D = \psi_d \cdot G \cdot \gamma_D(z) \quad (4.16)$$

En la ecuación anterior la distorsión en el diafragma se obtiene dividiendo la reacción en el diafragma (R_D) entre la rigidez del diafragma (K_D). Si se sustituye por la formulación de deformación angular unitaria, la distorsión ($\gamma_d = 1$) resulta:

$$\psi_d = \frac{R_D}{K_D} = M_T \cdot \frac{\beta}{1 + \beta} \cdot \frac{1 + \beta}{2 \cdot G \cdot b_s \cdot h \cdot t_D} = \frac{M_T \cdot \beta}{2 \cdot G \cdot b_s \cdot h \cdot t_D} \quad (4.17)$$

Por otra parte, la deformación angular unitaria en un punto cualquiera del diafragma (γ_D) es la suma de la deformación debida al movimiento horizontal (γ_{xD}) y la deformación debida al movimiento vertical (γ_{yD}):

$$\gamma_D(z) = \gamma_{xD} + \gamma_{yD}(z) \quad (4.18)$$

En la formulación de deformación angular unitaria la deformación angular horizontal del diafragma adopta el siguiente valor:

$$\gamma_{xD} = \frac{V_{tx} + V_{bx}}{h} = \frac{1}{1 + \beta} \quad (4.19)$$

Y la deformación angular vertical se obtiene a partir de:

$$\gamma_{yD} = \frac{2 \cdot V_{iy}(z)}{b_0(z)} \quad (4.20)$$

Donde $b_0(z)$ es el ancho del diafragma en función de la altura y $V_{iy}(z)$ es el movimiento vertical máximo en una determinada altura. Este último valor se puede obtener interpolando linealmente entre los valores V_{ty} y V_{by} .

Al sustituir los valores de $V_{iy}(z)$ y $b_0(z)$ se obtiene la deformación angular vertical del diafragma. Al sumarle la deformación horizontal, se obtienen los siguientes valores en el punto más alto del diafragma (γ_{tD}), el punto medio (γ_{mD}), el punto bajo (γ_{bD}) y el punto al 40 % de la altura (γ_{4D}) medida desde la fibra inferior:

$$\gamma_D(z) = \begin{cases} \gamma_{tD} = 1 \\ \gamma_{mD} = \frac{2}{1+\beta} \\ \gamma_{bD} = \frac{1}{\beta} \\ \gamma_{4D} = \frac{1}{0.6 \cdot \beta + 0.4} \end{cases} \quad (4.21)$$

En resumen, se puede obtener la tensión tangencial en el diafragma sustituyendo en la ecuación 4.16 los valores de la distorsión calculados en la ecuación 4.17 y la deformación angular mostrados en la ecuación 4.21:

$$\tau_D = \frac{M_T \cdot \beta}{2 \cdot b_s \cdot h \cdot t_D} \cdot \gamma_D(z) \quad (4.22)$$

El cálculo anterior, denominado analítico, se ha comparado con los resultados obtenidos en el modelo de elementos finitos (MEF) para el caso 5. En concreto, se han comparado las tensiones tangenciales en el eje vertical central del diafragma. Los resultados se muestran en la gráfica 4.17.

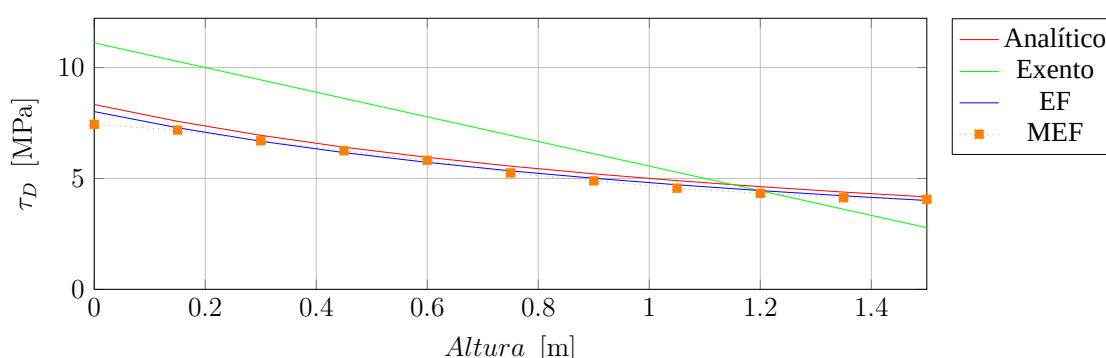


FIGURA 4.17 Tensión tangencial en el eje central vertical del diafragma

En la gráfica anterior, también se han comparado los resultados del diafragma exento, suponiendo una interpolación lineal, y el cálculo de tensiones tangenciales empleando el elemento finito de cuatro nodos que se describirá en el siguiente apartado.

Se observa una muy buena correlación entre el cálculo analítico, el elemento finito y el modelo de elementos finitos completo. Sin embargo, el diafragma supuesto exento no guarda esta correlación. Además, las tensiones obtenidas tanto en el cálculo analítico como en el elemento finito son ligeramente superiores a las del modelo de elementos finitos. Esto permite un dimensionamiento del lado de la seguridad.

En la misma gráfica se puede apreciar que el elemento finito de cuatro nodos es el que mejor correlación tiene con el cálculo en el modelo de elementos finitos completo. La metodología para la obtención de estas tensiones se muestra en la siguiente sección.

4.3.4.3 Cálculo de tensiones tangenciales empleando un elemento finito

El cálculo de tensiones en el diafragma parte de la misma base que el cálculo de la rigidez mostrado en el apartado 4.3.3.1. Se van a considerar las mismas funciones de forma y la misma matriz constitutiva, es decir, la matriz constitutiva que incluye únicamente

los términos debidos a la deformación tangencial ($\overline{\overline{D_\gamma}}$).

Para obtener el estado tensional completo en un punto del diafragma de coordenadas relativas ξ y η empleando elementos finitos, se utiliza la siguiente fórmula:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x(\xi, \eta) \\ \sigma_y(\xi, \eta) \\ \tau_{xy}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{B(\xi, \eta)}} \cdot \overline{u_D} \cdot \psi_d \quad (4.23)$$

Donde $\overline{\overline{B}}$ y $\overline{\overline{D}}$ se definieron en el apartado 4.3.3.1 y $\overline{u_D}$ son los movimientos unitarios.

La ecuación anterior se puede particularizar para una carga distorsora unitaria cuando se emplea únicamente la matriz constitutiva tangencial. El resultado es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy,0}(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \frac{\overline{\overline{D_\gamma}} \cdot \overline{\overline{B(\xi, \eta)}} \cdot \overline{u_D}}{K_D} \quad (4.24)$$

Tomando la tensión tangencial unitaria calculada en la ecuación anterior, se puede establecer una correlación directa entre la tensión tangencial final en el diafragma (τ_D) y la tensión tangencial unitaria ($\tau_{xy,0}$) en función de bien la carga (R_D) en el diafragma, o bien el momento torsor en el diafragma (M_T).

$$\tau_D = R_D \cdot \tau_{xy,0} = M_T \cdot \tau_{xy,0} \cdot \frac{2}{b_s} \quad (4.25)$$

El resultado de calcular las tensiones empleando este procedimiento ya se mostró en la gráfica 4.17, y se observó que guardaba una muy buena correlación para el elemento de cuatro nodos y el caso geométrico cinco. No obstante, se ha extendido la comparativa al resto de casos geométricos.

En la figura 4.18 se muestra la comparativa en todos los casos de la tensión en el centro del diafragma cuando se aplica un momento torsor de 1000 kN.m Se presentan los resultados tanto para un elemento de cuatro nodos como para un elemento de cinco nodos.

Se observa que, mientras el elemento de cuatro nodos conserva una buena correlación en la mayoría de los casos con la tensión de referencia, en el elemento de cinco nodos la tensión es inferior en la mayoría de los casos. Por este motivo, se ha optado por implementar el elemento de cuatro nodos para el cálculo de los diafragmas de alma llena.

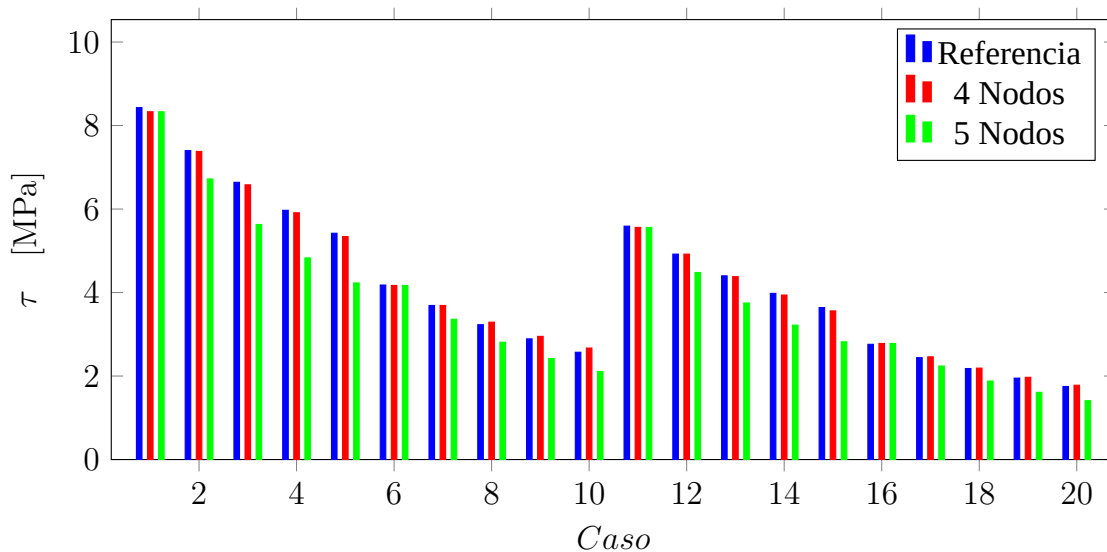


FIGURA 4.18 Tensión tangencial en el centro del diafragma

4.3.5 Cálculo de esfuerzos verticales

4.3.5.1 Introducción

El tratamiento de las cargas verticales se realiza de manera independiente al elemento finito propuesto, ya que su reacción en el diafragma depende del comportamiento como placa de la losa superior, y este no queda capturado en el elemento finito propuesto. Por lo tanto, la forma de proceder es mediante un cálculo independiente.

El cálculo independiente de las cargas verticales se ha realizado empleando un modelo de elementos finitos tipo lámina que se describe en el apartado 4.3.5.2. En dicho apartado también se explicará que las cargas consideradas en el modelo han sido cargas de tráfico del Eurocódigo EN1991-2, y más específicamente el Load Model 1 (LM1). Han quedado por lo tanto fuera del análisis las cargas permanentes, aunque se pueden considerar aplicando las conclusiones relativas a la sobrecarga.

Dependiendo del enfoque que se quiera dar al dimensionamiento, los resultados obtenidos en el modelo pueden ser de dos tipos. Es posible dimensionar el diafragma empleando el método de las tensiones efectivas, para lo cual es útil conocer la carga distribuida máxima sobre el diafragma. También es posible dimensionar empleando la carga transversal o «Patch Loading», para lo cual es necesario conocer la carga total sobre el diafragma. En este caso se va a emplear el método de las tensiones efectivas, tal y como se justificará en el apartado 4.3.6. Por lo tanto, los resultados se van a orientar a conocer la carga vertical máxima distribuida sobre el diafragma debida al tráfico, que se va a denominar q_{ll} y se

define como:

$$q_u = q_v + q_{sc} \quad (4.26)$$

Donde q_v es la carga distribuida debida al vehículo pesado y q_{sc} es la carga distribuida debida a la sobrecarga.

También es importante señalar que la combinación entre el vehículo pesado y la sobrecarga depende del juicio del ingeniero proyectista. Se puede considerar la carga vertical sobre el diafragma como una verificación local, en cuyo caso se deben considerar únicamente los ejes de los vehículos pesados que actúen sobre el diafragma. O también se puede considerar como una verificación global, en cuyo caso se deben sumar a los ejes de los vehículos pesados que actúan sobre el diafragma la sobrecarga repartida tributaria. En este trabajo se han estudiado ambas posibilidades: una verificación local donde los ejes de los vehículos se encuentran lo más próximos posibles, y verificaciones globales donde los ejes se encuentran centrados en los carriles de diseño.

4.3.5.2 Modelo de cálculo

Para estudiar los esfuerzos verticales que actúan sobre el diafragma, se ha realizado un modelo de cálculo de láminas. Este modelo consiste en una losa de hormigón de 200 mm soportada por chapas metálicas verticales. Se ha tomado el espesor de 200 mm porque a menor espesor, menor apertura de carga, y por ende, mayor pico de carga repartida en el diafragma. Además, 200 mm se considera un espesor mínimo para esta tipología de puentes.

Las chapas metálicas que soportan la losa equivalen a un puente que contiene un único diafragma de alma llena interior. Las chapas inferiores representan las almas laterales y los tres diafragmas, siendo el objeto de estudio el diafragma central. La separación entre las almas y entre los diafragmas es variable para estudiar diversas casuísticas. Los espesores asignados han sido 15 mm a las almas y 10 mm a los diafragmas. La altura supuesta de estas chapas es de 1 m.

La losa se ha representado en el modelo de láminas en su centro de gravedad y la transición entre la chapa y la losa se ha modelado utilizando una lámina de hormigón con una altura equivalente a la mitad del espesor de la losa. Como condiciones de contorno se ha supuesto que todas las chapas se encuentran apoyadas verticalmente, considerándose esta hipótesis un umbral superior a efectos de carga. Sucede lo mismo al considerar únicamente un diafragma interior, ya que esta hipótesis es la que resulta en una mayor carga sobre dicho

diafragma. En la figura 4.19 se muestra el modelo descrito anteriormente.

SOFiSTIK

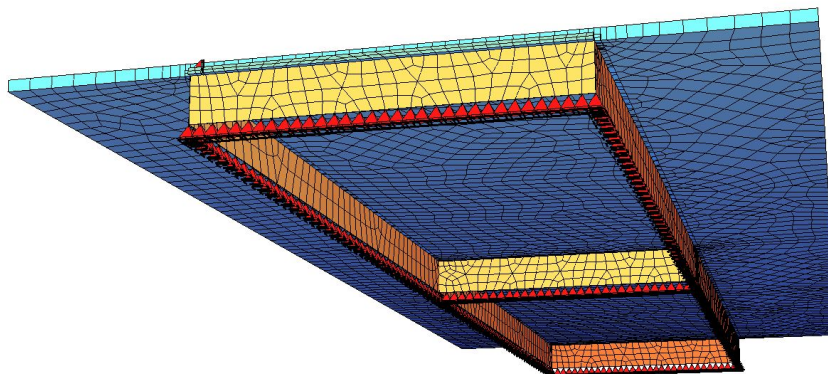


FIGURA 4.19 Modelo de reparto de cargas verticales

En el modelo anterior se han introducido 7 casos de carga (LC) basados en el LM1 del Eurocódigo EN1991-2 [131]:

- LC 1a: Vehículo de 600 kN centrado en el diafragma y en el tablero. Se supone que la huella de las ruedas es cuadrada, de 40 cm de lado y con una apertura a 45° hasta el centro de la losa, como indica el Eurocódigo. Para la apertura anterior se han tomado 5 cm de espesor de pavimento.
- LC 2a: Vehículo de 600 kN centrado longitudinalmente en el diafragma y a 1.25 m del eje del tablero y vehículo de 400 kN en la misma posición longitudinal, pero en la posición simétrica transversalmente. Las consideraciones respecto a huella y la apertura de la carga son iguales a las descritas en el caso anterior.
- LC 3a: Vehículo de 600 kN centrado longitudinalmente y transversalmente en el diafragma y vehículos de 400 kN y 200 kN posicionados a cada lado a 2.5 m del eje del tablero, pero en la misma posición longitudinal. También se mantienen los criterios de huella y apertura de la carga.
- LC 1b-3b: Los tres casos anteriores correspondientes a los vehículos pesados pero desplazado 60 cm longitudinalmente de manera que la rueda trasera queda posicionada sobre el diafragma. El resultado es la envolvente de ambos casos
- LC 4: Sobrecarga repartida centrada consistente en 9 kN/m² distribuidos en los 3 m centrales del modelo y 2.5 kN/m² distribuidos en el área entre almas remanente.

En la figura 4.20 se pueden observar algunas de las cargas anteriores.

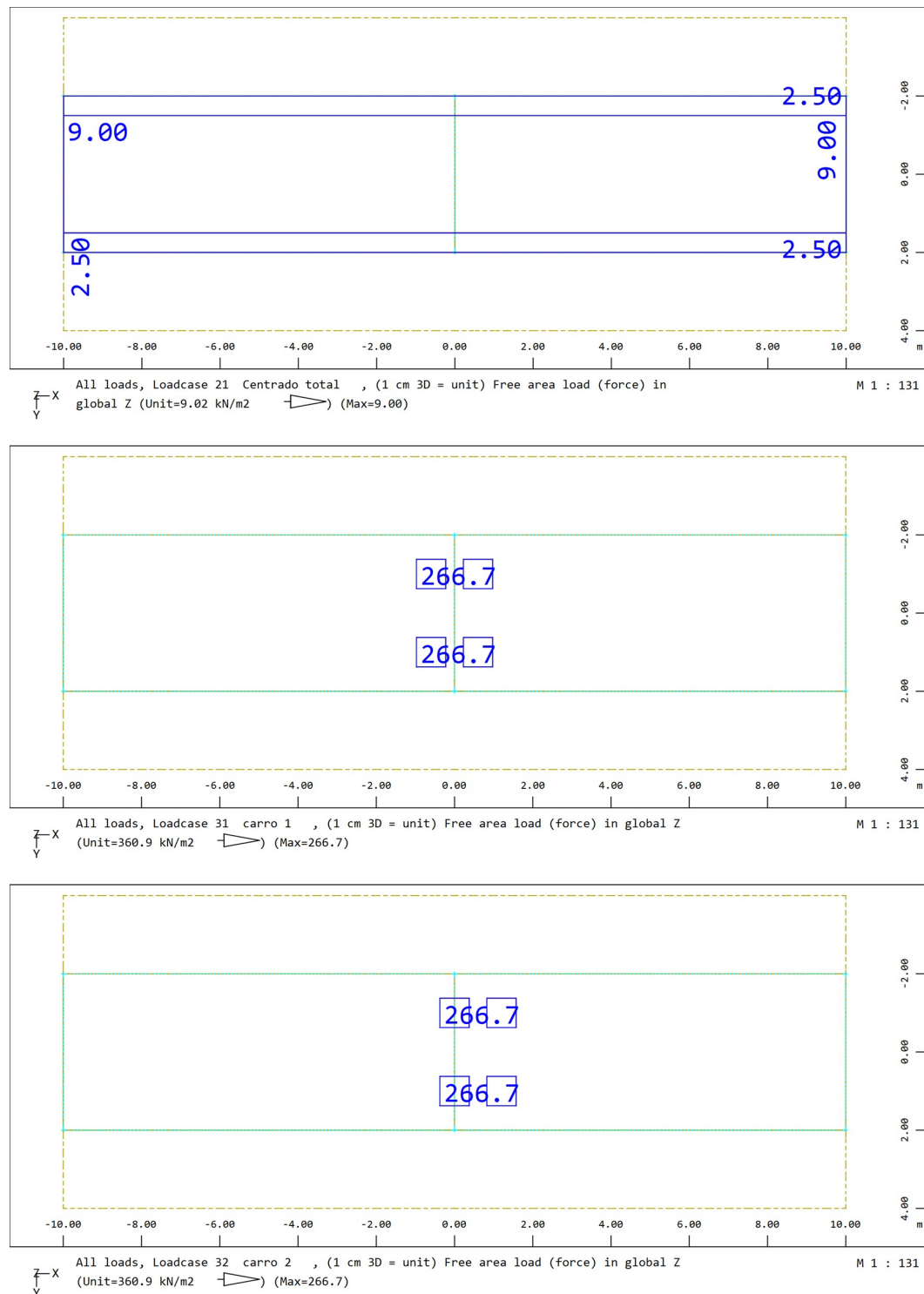


FIGURA 4.20 Cargas en modelo

Partiendo del modelo descrito anteriormente, se han estudiado las cargas que actúan sobre el diafragma interior. Concretamente, se ha calculado la carga distribuida máxima a través de un corte en el contacto entre la losa y el diafragma, con el fin de evaluar el diafragma utilizando el método de las tensiones efectivas. En la figura 4.21 se muestra un ejemplo de los resultados obtenidos del modelo descrito en el diafragma.

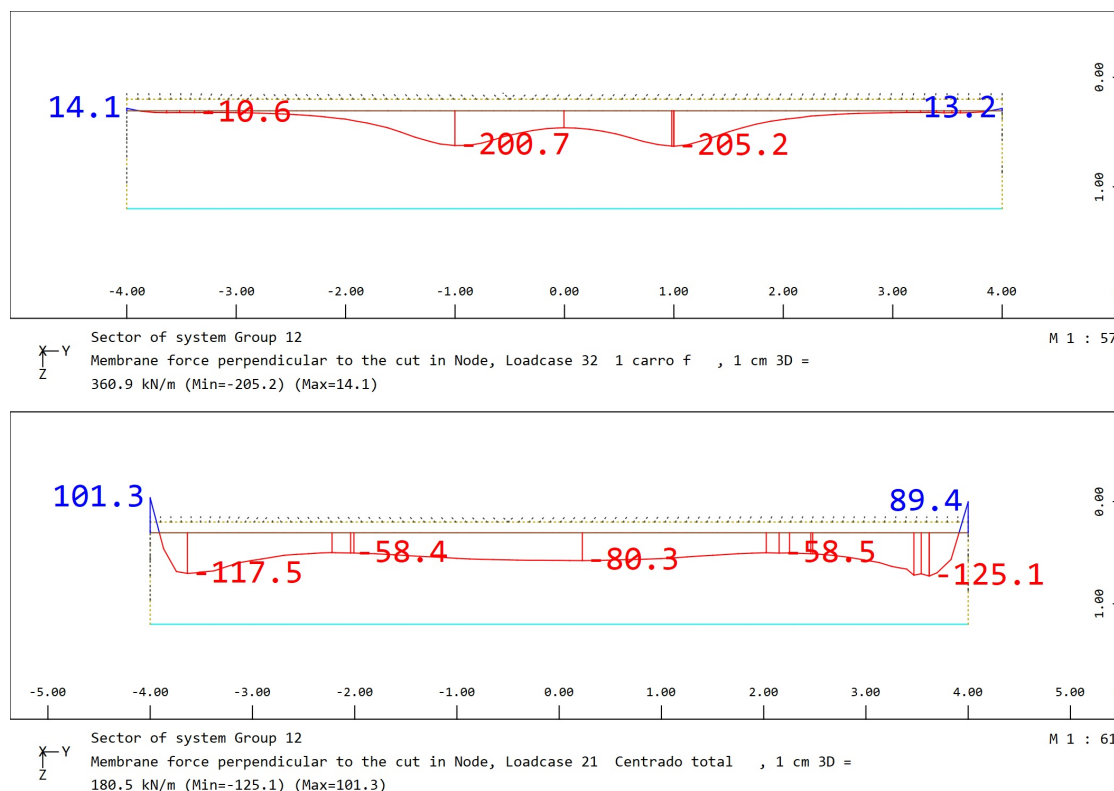


FIGURA 4.21 Ejemplo de resultados en modelo de reparto

En la imagen inferior de la figura anterior se puede observar que en las esquinas, en ciertos casos, se producen concentraciones de esfuerzos superiores a las del centro. Estos esfuerzos se han considerado un fenómeno local y se han despreciado en el presente trabajo.

4.3.5.3 Vehículos pesados

Para evaluar la carga debida a los vehículos pesados se ha estudiado la influencia de la separación entre almas en la losa (b_s) y de la distancia entre diafragmas (S_D).

La influencia de la distancia entre diafragmas se ha estudiado considerando el caso de carga de un vehículo de 600 kN centrado y variando dicha distancia para dos separaciones de almas. En la tabla 4.3 se muestran las cargas distribuidas debidas al vehículo pesado (q_v) calculadas en el modelo.

S_D [m]	b_s [m]	q_v [kN/m]
4	4	199.7
6	4	199.5
8	4	195.9
10	4	198.3
15	4	200.4
20	4	203.6
4	6	204.7
6	6	208.8
8	6	208.1
10	6	208.2
15	6	206.4
20	6	208.3

TABLA 4.3 Influencia de la separación entre diafragmas para vehículo 600 kN

De la observación de los resultados se deduce que la carga repartida apenas se ve afectada por la distancia entre diafragmas, por lo que este parámetro no se tendrá en cuenta y se asumirá que la carga actúa en su totalidad en el eje del diafragma.

Para evaluar la influencia de la separación entre almas, se ha fijado la distancia de 20 m entre diafragmas y se ha variado la distancia entre almas desde los 3 m hasta los 8 m. Es importante tener en cuenta que a medida que aumenta la distancia, aumenta el número de vehículos pesados que pueden coexistir sobre el diafragma. Por lo tanto, se han analizado los casos LC 1 a LC 3 descritos anteriormente en todas las geometrías, excepto aquellas geométricamente imposibles porque incumplen con el criterio de que el ancho de los carriles es mayor que el ancho del tablero. Los resultados se muestran en la tabla 4.4.

En la tabla 4.4 también se incluye la carga total (Q_v) que actúa sobre el diafragma. Dicha carga se obtiene integrando los esfuerzos en la interfaz entre el acero y el hormigón.

A partir de la tabla 4.4 se pueden extraer varias conclusiones. La primera es que la carga del vehículo pesado se puede asimilar a una carga distribuida uniformemente en el ancho del carril. Tomando el LC 1 como ejemplo, la carga repartida máxima coincide prácticamente con el resultado de dividir los 600 kN entre el ancho del carril de 3 m, que es 200 kN/m. Por lo tanto, para su aplicación en el diafragma, la carga de un vehículo pesado se puede considerar como la carga total del vehículo repartida uniformemente en un ancho de 3 m.

b_s [m]	LC 1		LC 2		LC 3	
	q_v [kN/m]	Q_v [kN]	q_v [kN/m]	Q_v [kN]	q_v [kN/m]	Q_v [kN]
3	164.6	345.1	242.2	110.8	-	-
4	203.6	506.1	277.1	399.1	-	-
5	206.4	580	297.7	673.6	247	572.7
6	208.3	602.7	296.3	876.3	290	760.9
7	204.7	607.2	308.8	968.8	296.2	927.6
8	209.7	609.3	303.6	1001	300.4	1084

TABLA 4.4 Influencia de la separación entre almas para vehículos pesados

La hipótesis anterior también se puede extender a cuando se ubican los vehículos de 600 kN y 400 kN a 50 cm para realizar verificaciones locales, ya que la suma de la carga repartida equivalente de ambos vehículos es 333 kN/m, lo cual es ligeramente superior a la carga repartida máxima del LC 2, que es donde se ha estudiado este caso.

Un último aspecto a señalar es la anchura que se debe considerar para un determinado número de vehículos. Observando la carga total, se puede concluir que para que un carro resulte condicionante, el centro de todos sus ejes debe ubicarse entre las almas. Es decir, si se consideran 2 vehículos pesados con una distancia entre ejes de 2 m y una distancia entre ejes extremos de 0.5 m el ancho total que conforman los dos vehículos pesados es de 4.5 m. Por lo tanto, la carga total de 2 vehículos pesados puede condicionar a partir de los 4.5 m de separación entre almas. Aplicando la misma lógica, a partir de los 7 m pueden condicionar los 3 vehículos pesados.

En resumen, la carga vertical debida a los vehículos pesados se define como el peso del vehículo distribuido en un ancho de 3 m. Expresado en forma de fórmula:

$$q_v = \frac{2 \cdot Q_{ik}}{3} \quad (4.27)$$

Donde Q_{ik} es el peso de un eje del vehículo pesado (300 kN, 200 kN o 100 kN según la definición del Eurocódigo).

A efectos de cálculo del diafragma, solo se deben considerar los vehículos cuyos ejes se ubiquen totalmente en la zona entre almas.

4.3.5.4 Sobrecarga

La sobrecarga uniforme en el LM1 está compuesta por un carril principal cargado con 9 kN/m^2 y una sobrecarga de 2.5 kN/m^2 distribuida en el resto del zonas, siendo en este caso el área comprendida entre almas.

El cálculo de la sobrecarga no es tan directo como en los vehículos pesados, ya que el comportamiento tipo placa es más acusado, y por lo tanto, se produce una mayor redistribución entre las distintas chapas sobre las que se apoya la losa. Sin embargo, en este apartado se busca identificar la longitud equivalente (L_{eq}) que produce la carga repartida máxima. Es decir, se supone que sobre el diafragma actúa una carga lineal uniforme cuyo valor es una longitud equivalente multiplicada por la sobrecarga, que puede ser 9 kN.m^2 o 2.5 kN.m^2 .

En base a los resultados observados, se identifican dos zonas de comportamiento. La primera ocurre cuando los espaciamientos entre diafragmas son cortos. En este caso, se puede suponer que la reacción vertical en el diafragma se corresponde con una viga continua de ancho igual a la distancia entre almas. Bajo esta hipótesis, la longitud equivalente se corresponde con la longitud que, multiplicada por una carga, produce la reacción equivalente en una viga continua. En el caso pésimo de una viga de 2 vanos, la longitud equivalente es $10/8$ de la separación entre diafragmas.

Cuando la distancia entre diafragmas supera cierta longitud, que se ha llamado L_{max} , el comportamiento pasa a ser de tipo placa. Por lo tanto, para representar la reacción en el diafragma se supondrá que la carga máxima la produce dicha longitud máxima multiplicada por la sobrecarga.

Para determinar la longitud máxima y el ancho equivalente se ha supuesto un espaciamiento entre diafragmas muy elevado, de 20 m, y se ha variado de metro en metro el ancho entre almas (b_s). Los resultados de carga repartida debida a la sobrecarga (q_{sc}) se muestran en la tabla 4.5.

A partir de estos resultados se ha identificado que la longitud máxima (L_{max}) en función de la separación entre almas (b_s) es:

$$L_{max} = \min \begin{cases} 1.5 \cdot b_s \\ 3.75 + b_s \cdot 2/3 \end{cases} \quad (4.28)$$

S_D [m]	b_s [m]	q_{sc} [kN/m]
20	3	41.2
20	4	52
20	5	61.8
20	6	67.8
20	7	75.5
20	8	80.3

TABLA 4.5 Sobrecarga máxima sobre diafragma

Definida la longitud máxima, la longitud equivalente final (L_{eq}) se define como:

$$L_{eq} = \min(1.25 \cdot S_D, L_{max}) \quad (4.29)$$

Donde S_D es el espaciamiento entre diafragmas.

Con esos datos, se puede calcular la carga lineal por metro en el diafragma debida a la sobrecarga (q_{sc}) multiplicando la longitud equivalente (L_{eq}) por la carga distribuida correspondiente:

$$q_{sc} = q_{ik} \cdot L_{eq} \quad (4.30)$$

Donde q_{ik} es la sobrecarga definida en la norma asociada al carril virtual (9 kN/m² o 2.5 kN/m² según corresponda).

Para comprobar el criterio anterior se han empleado las mismas geometrías que se consideraron en el vehículo de 600 kN. En la tabla 4.6 se muestra la comparativa entre la carga máxima repartida calculada en el modelo y la estimada.

En la tabla se observa como la aproximación es adecuada en prácticamente todos los casos, aunque puede resultar demasiado conservadora cerca de la longitud máxima (L_{max}). No obstante, debido a la multitud de parámetros que intervienen en la obtención de dicha carga distribuida, se ha optado por un criterio simplificado que también es conservador.

S_D [m]	b_s [m]	Modelo [kN/m]	Estimación [kN/m]
4	4	39.9	45
6	4	47.2	54
8	4	49	54
10	4	50.9	54
15	4	52.5	54
20	4	52	54
4	6	42.1	45
6	6	53.5	67.5
8	6	61.2	69.75
10	6	62.7	69.75
15	6	67.1	69.75
20	6	67.8	69.75

TABLA 4.6 Carga repartida en diafragma debida a la sobrecarga

4.3.6 Criterios de dimensionamiento

4.3.6.1 Introducción

Como es sabido, el dimensionamiento de diafragmas de alma llena presenta una singularidad que no se encuentra en otros tipos de diafragmas que se estudiarán, y es su comportamiento postcrítico. Es decir, mientras que en el resto de diafragmas la carga última es inferior su carga crítica, en los diafragmas de alma llena existe un comportamiento postcrítico que hace que su carga última pueda ser superior a la carga crítica, como se demostrará más adelante. Esto ha llevado a que ciertas normativas hayan realizado disposiciones adicionales para controlar este fenómeno.

En concreto, la norma más restrictiva que se ha consultado es la extinta RPX-95 [121], que exigía que la carga última del diafragma de alma llena intermedio fuera inferior a la carga crítica de este. Otra norma vigente que también impone restricciones es la AASHTO LRFD [108], pero solo se refiere a la limitación de la tensión tangencial, que se aproxima a la tensión crítica de abolladura. Por último, normas como los Eurocódigos [9] no hacen referencia específica a estos elementos, por lo que se sobrentiende pueden considerar como un panel convencional.

A nivel bibliográfico, los artículos que estudian los diafragmas de alma llena están se centran principalmente en los diafragmas de pila. Muchos de ellos surgieron de los estudios

encargados por el Gobierno Británico después del colapso del puente de Mildford Haven [132], en el que uno de los diafragmas de pila del puente pandeó durante la construcción, lo que causó el colapso del puente. Una de las principales conclusiones de estos trabajos fue conferir a los diafragmas de pila naturaleza crítica y, por lo tanto, limitar su carga última a la carga crítica. Esta conclusión sigue reflejada en la BS 5400 Parte 3[120]. Sin embargo, esta norma británica no extiende esta recomendación a los diafragmas intermedios, sino que menciona que deben ser objeto de un análisis especial si se quieren utilizar.

Por lo tanto, no existe consenso en lo referente a criterios de dimensionamiento de diafragmas intermedios de alma llena, y además no se encuentran abordados en la literatura mas allá de extrapolaciones relativas a los diafragmas de pila. Por este motivo en este capítulo se van a revisar algunos de los criterios relativos a su dimensionamiento.

La metodología que se empleará en todo el proceso de dimensionamiento está basada en el método de las tensiones efectivas descrito en el Eurocódigo EN1993-1-5 [31]. Esto se debe a que la otra metodología, también recogida en el Eurocódigo, basada en la carga total o «Patch Loading», no recoge hasta la fecha interacción entre esfuerzos transversales y esfuerzos tangenciales. Existen trabajos orientados a la nueva generación de Eurocódigos donde se calcula la interacción a nivel de cargas últimas, pero en ningún caso se realiza a nivel de cargas críticas. Por lo tanto, dada la especial importancia que cobra la carga crítica en este tipo de diafragmas, se ha optado por emplear el método de las tensiones efectivas, en cuyo cálculo el primer paso es calcular la carga crítica debida a la interacción de tensiones. Además, en el segundo paso permite calcular la carga última que resiste el diafragma con una interacción completa de esfuerzos.

Como se ha indicado previamente, el cálculo en tensiones efectivas requiere obtener en primer lugar la carga crítica de abolladura, tanto en su dirección vertical como horizontal, así como la interacción entre ambas. Por lo tanto, se revisarán las formulaciones que permiten obtener dichas cargas críticas de manera simplificada, y se compararán con los resultados obtenidos a través del modelo de elementos finitos.

A partir de las tensiones críticas, se revisará el criterio de resistencia de este tipo de diafragmas. En este punto, no se cuestionará la relación entre una determinada carga crítica y la capacidad en ELU de dicho panel, puesto que eso ha sido objeto de múltiples investigaciones y ha quedado debidamente recogido en la norma. Sin embargo, se cuestionará la necesidad de limitar la carga crítica, como plantean ciertas normativas. Esto se enfocará principalmente a nivel conceptual, aunque también se recurrirá a modelos de elementos finitos no lineales.

4.3.6.2 Carga crítica tangencial

La tensión tangencial crítica de dimensionamiento del diafragma ($\tau_{cr,D}$) se define, siguiendo una notación similar a la del Eurocódigo EN1993-1-5, como:

$$\tau_{cr,D} = \sigma_{E,\tau} \cdot k_{\tau,D} \quad (4.31)$$

Donde $\sigma_{E,\tau}$ se define en función del espesor del diafragma (t_D) y la altura del diafragma (h_D) de la siguiente manera:

$$\sigma_{E,\tau} = 190000 \cdot \left(\frac{t_D}{h_D} \right)^2 \quad (4.32)$$

Y $k_{\tau,D}$ es el coeficiente de abolladura tangencial del diafragma, que se define como:

$$k_{\tau,D} = \begin{cases} 5.34 + 4.00 \cdot \alpha^2 & \rightarrow \alpha \leq 1 \\ 4.00 + 5.34 \cdot \alpha^2 & \rightarrow \alpha > 1 \end{cases} \quad (4.33)$$

Donde α se refiere al cociente entre la altura del diafragma (h_D) y la distancia a entre rigidizadores transversales ($\alpha = h_D/a$). En el caso de diafragmas rectangulares, está claro que la distancia entre rigidizadores transversales es el ancho del diafragma. Sin embargo, en el caso de diafragmas trapezoidales, esa distancia depende de la cota a la que se calcule el diafragma, ya que tanto el ancho de cálculo como la tensión varía en función de esta.

Para evaluar que cota de dimensionamiento del diafragma se ha calculado el coeficiente de abolladura tangencial ($k_{\tau,D}$) para los 20 casos descritos en la tabla 4.2 y 4 alturas: fibra superior, fibra media, 40 % de la altura y fibra inferior. La metodología empleada ha sido la siguiente:

- 1) Se ha introducido en el modelo de cálculo de contraste completo un momento torsor de 2000 kN.m, conforme a lo descrito en el apartado 4.3.2.
- 2) Se ha obtenido el factor crítico o el factor por el que es necesario multiplicar el momento torsor para obtener la carga crítica, mediante un cálculo de modos de pandeo. Dicho factor se denomina $\alpha_{cr,\tau,mef}$.
- 3) Por otra parte, empleando la ecuación 4.22 se ha obtenido la tensión de referencia (τ_D) en la cota de cálculo.
- 4) Multiplicando la tensión de referencia (τ_D) por el factor crítico ($\alpha_{cr,\tau,mef}$), y dividiendo entre la tensión crítica del panel ($\sigma_{E,\tau}$), se ha obtenido el coeficiente de abolladura tangencial según el modelo de elementos finitos ($k_{\tau,D,mef}$).

En la figura 4.22 se presentan los resultados para las fibras inferior ($z = 0$), 40 % de la altura ($z = 0.4$), media ($z = 0.5$) y superior ($z = 1$). También se muestran los resultados para el caso exento.

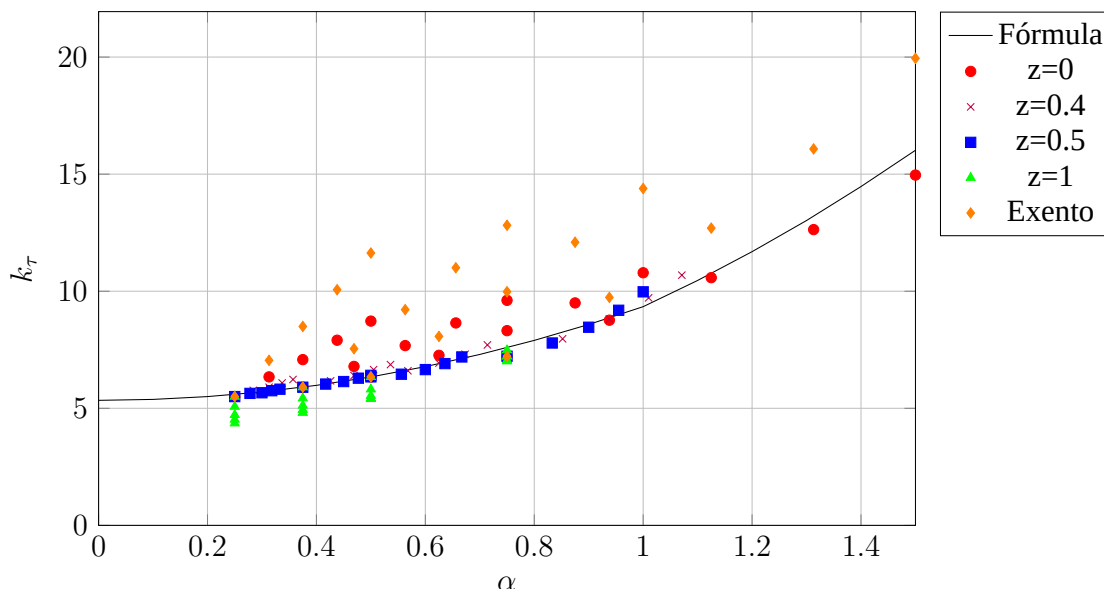


FIGURA 4.22 Coeficiente de abolladura tangencial

Para entender la gráfica, hay que tener en cuenta que los casos se agrupan de cinco en cinco, variando en cada grupo desde un panel rectangular hasta un panel donde el ancho inferior es la mitad del superior. Como hay veinte casos, existen cuatro grupos de resultados por fibra. Los resultados del panel rectangular coinciden en cualquier fibra y se corresponden con los cuatro puntos de la gráfica donde están superpuestos varios puntos, y que coinciden con la formulación. A partir de estos puntos, surgen haces con cuatro resultados adicionales en cada dirección. Cada haz se corresponde con un valor distinto de la relación entre el ancho inferior y el ancho superior, siendo mínimo para el punto más alejado del haz.

Comparando los distintos resultados mostrados en la figura 4.22 se observa que el mejor ajuste con la fórmula 4.33 se produce cuando se considera la fibra media. La fibra superior arroja resultados inferiores a la formulación y por lo tanto queda del lado de la inseguridad. La fibra inferior proporciona resultados conservadores, exceptuando en paneles altos y estrechos ($b_s=4, h=3$), donde los resultados también quedan del lado de la inseguridad. La fibra a un 40 % de la altura proporciona unos resultados no tan precisos como la fibra media, pero bastante ajustados y del lado de la seguridad.

Mención aparte merece el caso exento, donde se ha tomado la fibra inferior para el cálculo. Las tensiones se han calculado como $\tau_D = M_T/2 \cdot A_c \cdot t_D$ y la distancia a es el ancho in-

ferior del cajón (b_b). Siguiendo este criterio, se observa como el coeficiente de abolladura queda muy del lado de la seguridad. Por lo tanto, este método tradicionalmente utilizado es muy conservador.

En resumen, la localización más precisa para calcular la tensión crítica de abolladura tangencial es la fibra media. No obstante, el cálculo de la tensión crítica a un 40 % de la altura medido desde la fibra inferior también proporciona unos resultados aceptables. En ambos casos, se ha tomado como longitud del panel la anchura del diafragma correspondiente a la altura indicada.

4.3.6.3 Carga crítica vertical

La tensión longitudinal crítica de abolladura del diafragma como placa ($\sigma_{cr,p,D}$) se puede definir de manera análoga a la tensión crítica tangencial siguiendo también el Eurocódigo EN1993-1-5:

$$\sigma_{cr,p,D} = \sigma_{E,s} \cdot k_{\sigma,p,D} \quad (4.34)$$

En este caso $\sigma_{E,s}$ se define en función de la anchura superior del cajón:

$$\sigma_{E,s} = 190000 \cdot \left(\frac{t_D}{b_s} \right)^2 \quad (4.35)$$

El coeficiente de abolladura longitudinal del diafragma ($k_{\sigma,p,D}$) depende de las condiciones de contorno del panel y la forma en que se aplica la carga. Cuando el panel está articulado en todo su perímetro, y la carga se aplica en los lados opuestos del panel, $k_{\sigma,p,D}$ se define como:

$$k_{\sigma,p,D} = \begin{cases} \left(\alpha_s + \frac{1}{\alpha_s} \right)^2 & \alpha_s \leq 1 \\ 4.00 & \alpha_s > 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

Donde α_s para este caso es el cociente entre la altura y el ancho superior del diafragma ($\alpha_s = \alpha = h_D/b_s$).

Sin embargo, en el caso de un diafragma de alma llena, la carga se aplica en el lado superior, mientras que su lado opuesto, o lado inferior, está descargado, transmitiéndose la carga por los laterales. Este comportamiento, llevado al límite, es similar al pandeo de una columna sometida a una carga vertical distribuida en toda su altura. Si se calcula el pandeo de dicha columna y se compara con una columna de altura equivalente sometida a la misma carga pero aplicada en los extremos, se obtiene que la altura equivalente es un

73 % de su altura total.

En base a lo anterior se va a definir α_s como un 73 % de α :

$$\alpha_s = 0.73 \cdot \alpha = 0.73 \cdot \frac{h_D}{b_s} \quad (4.37)$$

Para verificar la validez de esta hipótesis se han analizado 18 casos complementarios a los 20 ya definidos anteriormente. En este caso, todas las secciones analizadas han sido rectangulares, a fin de evitar la influencia de la forma trapezoidal, que se estudiará más adelante. La geometría de estos casos complementarios se muestra en la tabla 4.7. Nótese que los espesores son los mismos ya definidos anteriormente en los casos generales.

Caso	B_{sup}	B_{inf}	H	Caso	B_{sup}	B_{inf}	H
1	3.00	3.00	1.00	10	6.00	6.00	2.00
2	4.00	4.00	1.00	11	7.00	7.00	2.00
3	5.00	5.00	1.00	12	8.00	8.00	2.00
4	6.00	6.00	1.00	13	3.00	3.00	3.00
5	7.00	7.00	1.00	14	4.00	4.00	3.00
6	8.00	8.00	1.00	15	5.00	5.00	3.00
7	3.00	3.00	2.00	16	6.00	6.00	3.00
8	4.00	4.00	2.00	17	7.00	7.00	3.00
9	5.00	5.00	2.00	18	8.00	8.00	3.00

TABLA 4.7 Casos complementarios

En las 18 geometrías anteriores se ha aplicado el vehículo de 600 kN distribuido en un ancho de 3 m sobre el eje del diafragma y en el centro del tablero. Además, dicha carga se ha multiplicado por un factor de 1.35 correspondiente al ELU.

Siguiendo la misma metodología que en el caso de la tensión tangencial se ha obtenido el coeficiente de abolladura $k_{\sigma,p,D,mef}$, y se ha comparado con la fórmula propuesta. Los resultados se muestran en la gráfica 4.23.

Observando la gráfica se aprecia como el ajuste para $\alpha_s = 0.73 \cdot \alpha$ es mucho mejor que para $\alpha_s = \alpha$. Además, dicho ajuste queda en todos los casos del lado de la seguridad, por lo que se considera una hipótesis válida.

Después de analizar el caso de una carga centrada y simétrica, se examina el solape entre vehículos cuando se efectúa una verificación local. Se han supuesto los vehículos se distribuyen en un ancho de 3 m y que su centro se ubica a 1.25 m del eje del tablero, creando una situación en la que ambos vehículos se solapan 50 cm. Esta hipótesis resulta en una

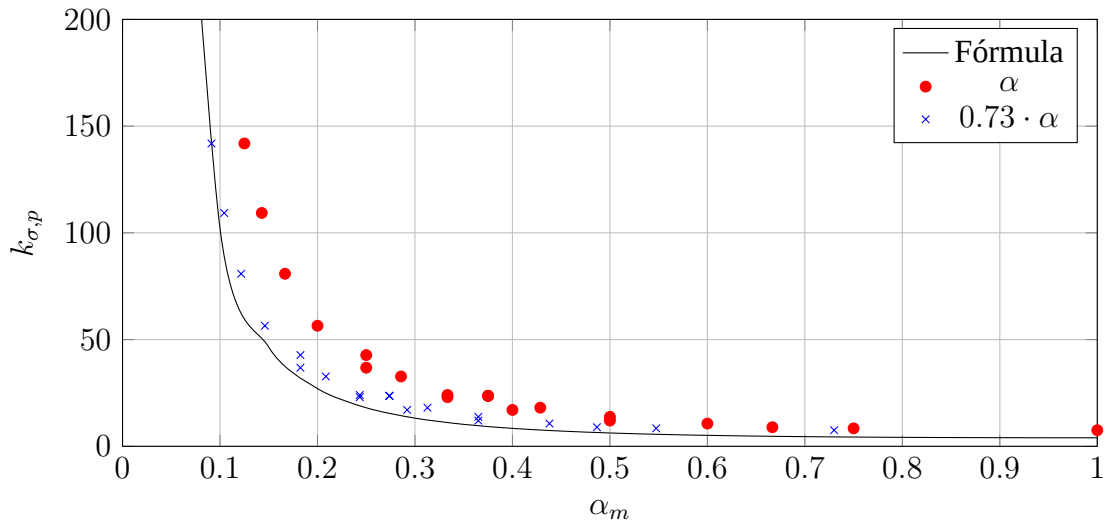


FIGURA 4.23 Coeficiente de abolladura vertical para un vehículo

concentración de cargas en el solape un 67 % superior al caso del vehículo aislado. Los resultados se muestran en la figura 4.24.

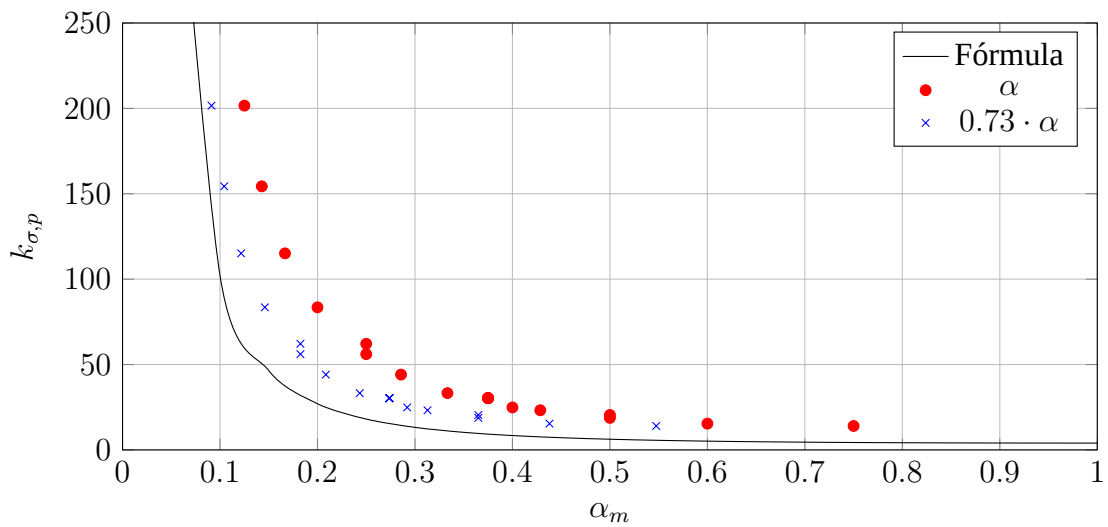


FIGURA 4.24 Coeficiente de abolladura vertical para dos vehículos solapados

Para esta combinación de cargas, al calcular la carga de diseño como la tensión pico en el solape, los resultados quedan del lado de la seguridad en todos los casos aplicando la reducción de $\alpha_s = 0.73 \cdot \alpha$. Además, si se calcula la carga necesaria para obtener el coeficiente de abolladura calculado en el programa de elementos finitos para el caso de dos vehículos solapados, se llega a que la carga es, en el peor de los casos, 274 kN/m, lo cual se corresponde con el caso de un único vehículo factorizado. Por lo tanto, el caso de verificación local con dos vehículos solapados se puede omitir.

Por último, se ha comprobado cuál es la influencia de inclinar las almas de la sección.

Para ello se ha vuelto a los 20 casos geométricos definidos en el apartado 4.2.4 y se ha obtenido su factor crítico $\alpha_{cr,\sigma,me f}$. Los resultados se muestran en la figura 4.25.

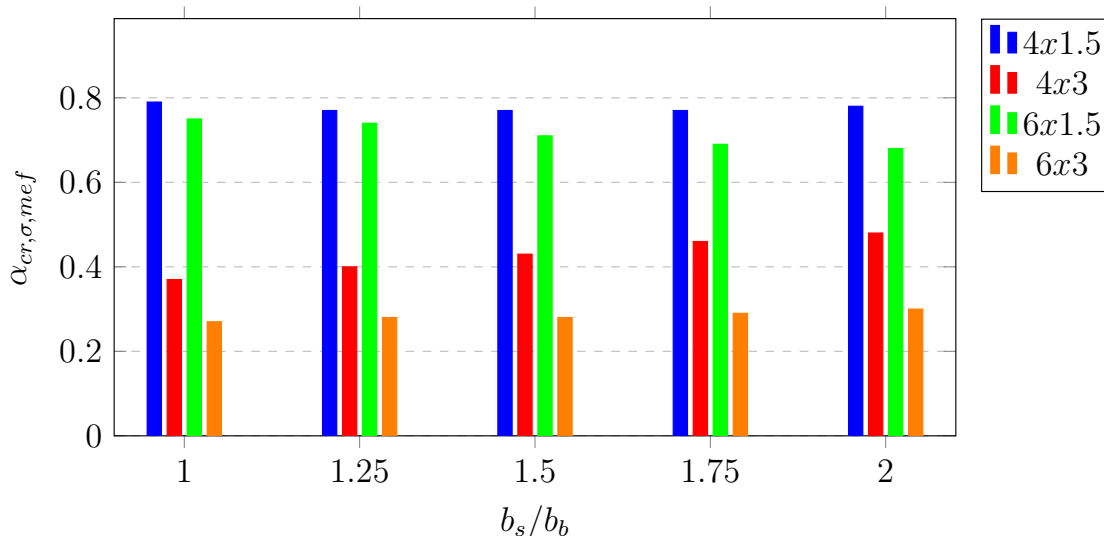


FIGURA 4.25 Factor crítico en función de la inclinación de las almas

Al observar la gráfica, se nota que al variar la inclinación de las almas, los resultados difieren ligeramente. En los casos con diafragmas de 1.5 m, el factor crítico disminuye ligeramente, mientras que en los casos con diafragmas de 3 m de alto el factor crítico aumenta. Sin embargo, dado que la metodología empleada para el cálculo de la resistencia final del diafragma es conservadora, se puede omitir la influencia.

En resumen, para calcular la tensión crítica de abolladura a efectos de cargas verticales, se debe considerar el 73 % de la altura del diafragma. Para el ancho del panel, se recomienda emplear el ancho superior del cajón independientemente de la forma del diafragma.

4.3.6.4 Carga crítica total

Una vez definida la carga crítica vertical y la carga crítica tangencial, el último paso es calcular la interacción entre ambas. Para ello, el Eurocódigo EN1993-1-5 propone una fórmula para obtener el factor crítico global (α_{cr}) a partir del factor crítico de las distintas tensiones. Esta fórmula se define para el caso de una tensión vertical ($\alpha_{cr,\sigma}$) y una tensión tangencial ($\alpha_{cr,\tau}$) como:

$$\frac{1}{\alpha_{cr}} = \frac{1}{2 \cdot \alpha_{cr,\sigma}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \alpha_{cr,\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_{cr,\tau}}\right)^2} \quad (4.38)$$

Por otra parte, el Eurocódigo EN1993-2 [9] establece la limitación de respiro del alma en servicio. Dicha limitación se basa en que no se superen las tensiones críticas de abolladura

en servicio en el alma para evitar que puedan darse fenómenos de fatiga. En este caso, la verificación es:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha_{cr,\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{1.1}{\alpha_{cr,\tau}}\right)^2} \leq 1.1 \quad (4.39)$$

En la figura 4.26 se compara la forma de ambas gráficas, observándose como la fórmula de respiro del alma resulta menos conservadora.

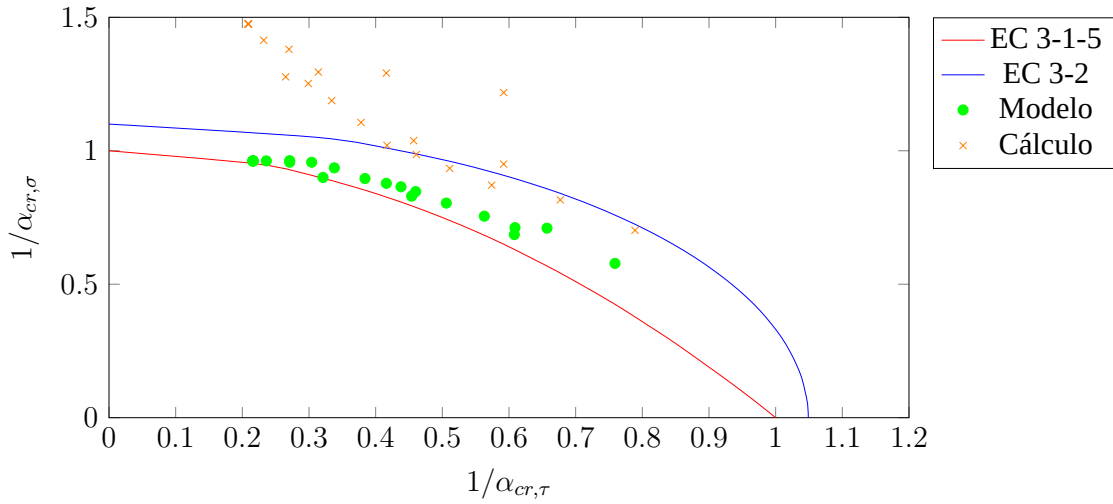


FIGURA 4.26 Interacción de cargas críticas en diafragmas rectangulares

Además, en la figura 4.26 se incluyen los resultados de interacción para el modelo de cálculo (Modelo) y el cálculo empleando la metodología descrita en este apartado (Cálculo). En primer lugar, se han considerado las 18 geometrías complementarias de diafragmas rectangulares. Las cargas utilizadas para obtener estos resultados han sido el vehículo de 600 kN, factorizado por 1.35 y centrado, como se describe en 4.3.6.3, y la carga de distorsión causada por un momento torsor de 2000 kN.m.

Los resultados del modelo de cálculo se obtienen directamente del modelo, ya que este permite obtener el factor crítico de las cargas por separado y combinando ambas cargas ($\alpha_{cr,mef}$). Sin embargo, para representar dichos resultados en la gráfica, es necesario normalizarlos para $\alpha_{cr} = 1$, por lo que las cargas críticas verticales y tangenciales se han factorizado por $1/\alpha_{cr,mef}$.

En el cálculo utilizando la metodología del presente apartado, los resultados también se han factorizado por $1/\alpha_{cr,mef}$, ya que se deben considerar las mismas cargas aplicadas. Además, es importante señalar que la tensión crítica tangencial se ha obtenido en la fibra media.

Los resultados de la interacción permiten apreciar cómo la curva de interacción del Eurocódigo EN1993-1-5 se ajusta mucho mejor al caso del modelo de cálculo. Sin embargo, cuando se realizan los cálculos empleando metodologías simplificadas para la obtención de la carga crítica, el factor de seguridad es mayor, y por lo tanto la curva basada en el respiro del alma del EN1993-2 [9] puede considerarse más ajustada.

Con el fin de valorar la influencia de la inclinación de las almas, el cálculo anterior se ha repetido para los 20 casos de referencia descritos en el apartado 4.2.4. Los resultados se muestran en la figura 4.27.

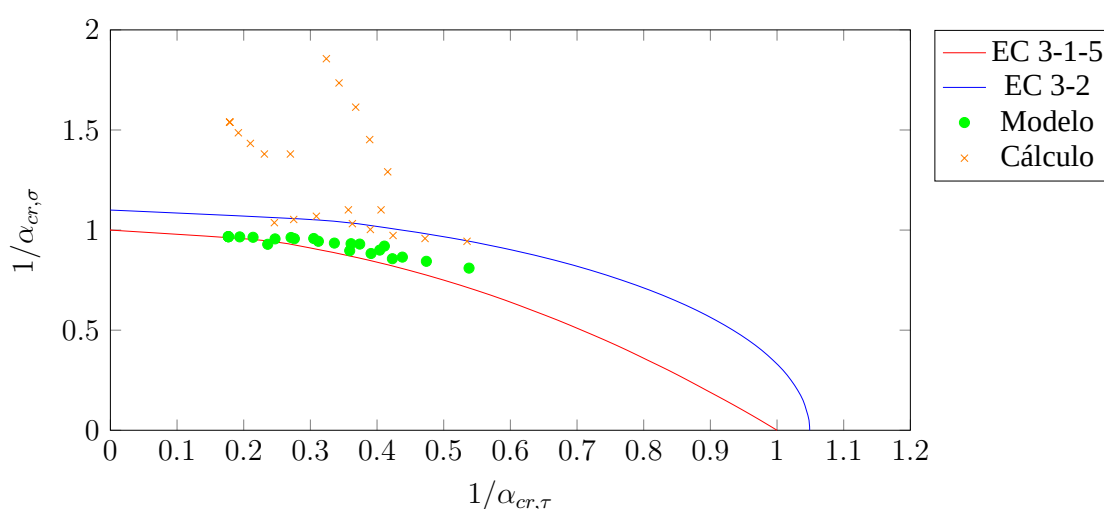


FIGURA 4.27 Interacción de cargas críticas en diafragmas trapezoidales

La principal conclusión que se puede extraer de la gráfica es que las conclusiones aplicables a diafragmas rectangulares pueden extrapolarse a diafragmas trapezoidales sin necesidad de realizar consideraciones adicionales.

4.3.6.5 Carga crítica considerando empotramiento

Hasta ahora se ha supuesto que el diafragma se encuentra articulado en los bordes. Sin embargo, formulaciones como por ejemplo la del Eurocódigo EN1993-1-5 para cargas transversales, basadas en el trabajo de Lagerqvist [133], consideran que el ala y el alma se encuentran unidos rígidamente también a giro.

Las pruebas realizadas sobre diafragmas rectangulares sugieren que la carga crítica tangencial puede aumentar entre un 10 % y un 37 %. Además, la carga crítica vertical puede duplicarse en la mayoría de los casos (Aproximadamente $\alpha_s = 0.44 \cdot \alpha$), aunque en este caso sí que habría que considerar el solape entre vehículos pesados.

Las pruebas anteriores mostraron una correlación bastante buena utilizando simplificaciones. Sin embargo, en ciertos casos, la interacción entre cargas críticas en no obedeció a ninguna de las formulaciones presentadas en el apartado 4.3.6.4, quedando del lado de la inseguridad. Este es uno de los motivos por los que se ha desechado considerar el empotramiento en este trabajo.

Otro motivo es la resistencia de la conexión. Si se confía en que la conexión es empotrada, se debe tener en cuenta la susceptibilidad ante fenómenos de fatiga. Estos fenómenos pueden ser causados, por ejemplo, por el paso de vehículos y el giro que dicho paso provoca en la losa, o por la existencia de imperfecciones en el diafragma. Limitando la carga crítica en el diafragma al caso articulado se consigue limitar los esfuerzos en la conexión, y por lo tanto hacerla menos susceptible a fenómenos de fatiga

Lo expuesto anteriormente no implica que en fase de proyecto no se pueda considerar el empotramiento en la conexión. De hecho, en la mayoría de los casos se obtendrán cargas críticas y últimas superiores. Sin embargo, es importante tener en cuenta consideraciones adicionales, como por ejemplo:

- Obtención de la carga crítica mediante un modelo de elementos finitos completo.
- Verificación local del caso de dos los vehículos pesados a 2.5 m entre ejes.
- Obtención de la carga última mediante un cálculo no lineal empleando elementos finitos e imperfecciones.
- Análisis de fatiga en las conexiones considerando imperfecciones.

Es importante destacar que los cálculos previos no son propios de un predimensionamiento. Por lo tanto, se considerarán los diafragmas articulados en los bordes en este trabajo.

4.3.6.6 Estado Límite Último

Como se ha explicado en la introducción de esta sección, se calculará el ELU del diafragma utilizando el método de las tensiones efectivas descrito en el Eurocódigo EN1993-1-5. Para verificar el diafragma, se deben seguir estos pasos:

- 1) **Obtención del coeficiente mínimo de amplificación de las cargas para alcanzar el valor característico de resistencia.**

Este coeficiente se denomina $\alpha_{ult,k}$ y se puede obtener mediante un criterio de plas-

tificación del siguiente modo:

$$\frac{1}{\alpha_{ult,k}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{f_y}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{Ed}}{f_y}\right)^2} \quad (4.40)$$

Donde σ_{Ed} y τ_{Ed} son las tensiones longitudinales y tangenciales de diseño respectivamente y f_y es el límite elástico del acero.

2) Obtención del coeficiente mínimo de amplificación de las cargas para alcanzar la carga crítica.

Este coeficiente se denomina α_{cr} y se ha explicado en el apartado 4.3.6.4. Específicamente, se puede obtener empleando la ecuación 4.38.

3) Cálculo de la esbeltez modificada de la chapa.

La esbeltez modificada de la chapa se denomina λ_p y se define del siguiente modo.

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr}}} \quad (4.41)$$

4) Obtención del coeficiente de reducción de la carga vertical.

El coeficiente de reducción de la carga vertical se denomina ρ_z y se obtiene teniendo en cuenta el comportamiento como panel y el comportamiento como columna cuando proceda. El coeficiente reductor como panel (ρ) se obtiene a partir de la esbeltez modificada de la chapa (λ_p) empleando bien el capítulo 4 del EN1993-1-5 o bien el Anexo B de la misma norma ¹. El coeficiente reductor como columna (χ_c) se debe calcular cuando la altura del diafragma sea inferior a su ancho. Dicho coeficiente se obtiene según lo indicado en el capítulo 4 de la norma, y en su cálculo se emplea la tensión crítica como columna del panel ($\sigma_{cr,c,D}$). La altura a considerar para el cálculo como columna es 0.73 veces la altura del diafragma por los motivos antedichos, por lo que la tensión crítica como columna se puede obtener como:

$$\sigma_{cr,c,D} = 190000 \cdot \left(\frac{t_D}{0.73 \cdot h_D}\right)^2 \quad (4.42)$$

El coeficiente de reducción final de la carga vertical se denomina ρ_z y se obtiene según lo indicado en el capítulo de abolladura debida a tensiones normales en ELU de la norma.

¹En este trabajo se va a considerar el Anexo B tanto para tensiones verticales como para tensiones tangenciales

5) **Obtención del coeficiente de reducción de tensiones tangenciales.**

El coeficiente de reducción de tensiones tangenciales se denomina χ_w y se obtiene también a partir de la esbeltez modificada de la chapa (λ_p). Al igual que ocurre con las tensiones verticales, este coeficiente se puede obtener utilizando el capítulo 5 de la norma EN1993-1-5 o bien el Anexo B de dicha norma.

6) **Verificación final.**

La verificación final conforme a la EN1993-1-5 se define del siguiente modo para un diafragma.

$$\left(\frac{\sigma_{Ed}}{\rho_z \cdot f_y / \gamma_{M1}} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\tau_{Ed}}{\chi_w \cdot f_y / \gamma_{M1}} \right)^2 \leq 1 \quad (4.43)$$

Donde γ_{M1} es el factor de seguridad.

En el procedimiento descrito anteriormente no se han citado expresamente las fórmulas para la obtención de los coeficientes reductores, ya que valorar su idoneidad excede el alcance del presente trabajo. Por lo tanto, se tomarán tal y como se reflejan en la norma. No obstante, se mostrarán a continuación a título ilustrativo.

En primer lugar, se muestran los factores de reducción para la tensión vertical en la figura 4.28.

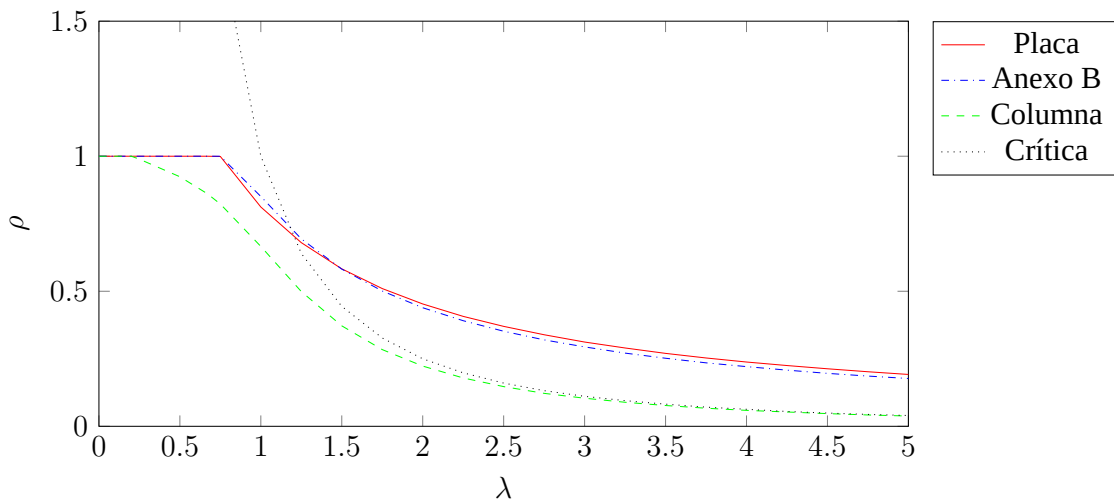


FIGURA 4.28 Coeficientes de reducción en ELU para tensiones normales

Observando la gráfica 4.28, se pueden extraer varias conclusiones. En primer lugar, se puede apreciar que las diferencias entre el cálculo conforme al capítulo 4 de la norma (Placa) y el Anexo B son mínimas. Esto implica que el método de cálculo para la reducción como placa se puede considerar indiferentemente. En el presente trabajo, se va a considerar el Anexo B.

Una segunda apreciación bien conocida es que el coeficiente reductor como columna (tomando $\alpha = 0.21$) queda siempre por debajo de la tensión crítica. Por esta razón, en los marcos en celosía no se realizan consideraciones adicionales acerca de la carga crítica, mientras que en los diafragmas de alma llena sí se tienen en cuenta.

Como última apreciación, la reserva postcrítica de los paneles esbeltos ($\lambda > 2$), como son la mayoría de los diafragmas intermedios de alma llena, es muy elevada en comparación con la carga crítica. Por ese motivo, limitar a la carga crítica puede suponer una penalización muy importante para este tipo de diafragmas. En concreto, cuando la relación h_D/b_s es superior a 0.8 el comportamiento como placa es dominante, mientras que cuando dicha relación es inferior a 0.2 el comportamiento como placa es despreciable.

En lo que respecta a las tensiones tangenciales, los factores de reducción se muestran en la figura 4.29.

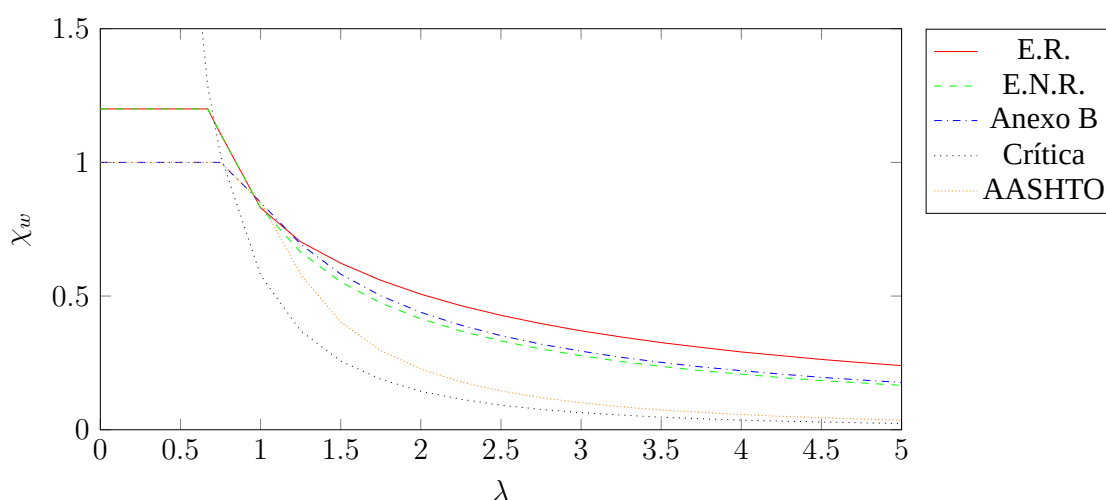


FIGURA 4.29 Coeficientes de reducción en ELU para tensiones tangenciales

La gráfica muestra las formulaciones para paneles con extremos rígidos (E.R.) y extremos no rígidos (E.N.R.). La formulación E.N.R. guarda una buena correlación con la formulación del Anexo B, aunque el factor $\eta = 1.2$ permite una mayor capacidad en paneles poco esbeltos.

También se puede observar en la gráfica como la limitación de tensión de la AASHTO LRFD se corresponde aproximadamente a la carga crítica tangencial. Sin embargo, esto no sucede en los Eurocódigos, que permiten una reserva postcrítica importante en paneles esbeltos, al igual que sucedía en el caso de las tensiones normales.

Otro aspecto que no se ha señalado en la metodología anterior son las tensiones de diseño a considerar. Para calcular la tensión vertical (σ_{Ed}), es evidente que se puede tomar la

carga vertical distribuida calculada en el apartado 4.3.5 y dividida entre el espesor del panel. Sin embargo, la carga tangencial (τ_{Ed}) no es tan evidente.

En la sección 4.3.6.2 se indica que la mejor correlación entre la tensión crítica y la formulación se da para la fibra media. Sin embargo, la norma EN1993-1-5 menciona que para el cálculo de tensiones normales se debe tomar el punto más desfavorable entre $0.5b$ y $0.4a$, donde b y a son el ancho y el largo del panel, respectivamente.

Aunque esto no es de aplicación propiamente, las pruebas realizadas sugieren que en paneles trapezoidales considerar las tensiones tangenciales a un 40 % de la altura aporta un nivel de seguridad ligeramente mayor que al considerar la fibra media. Para ilustrarlo se muestra la gráfica 4.30, donde se comparan los momentos resistentes de los diafragmas $M_{T,Rd}$ calculados según distintas metodologías:

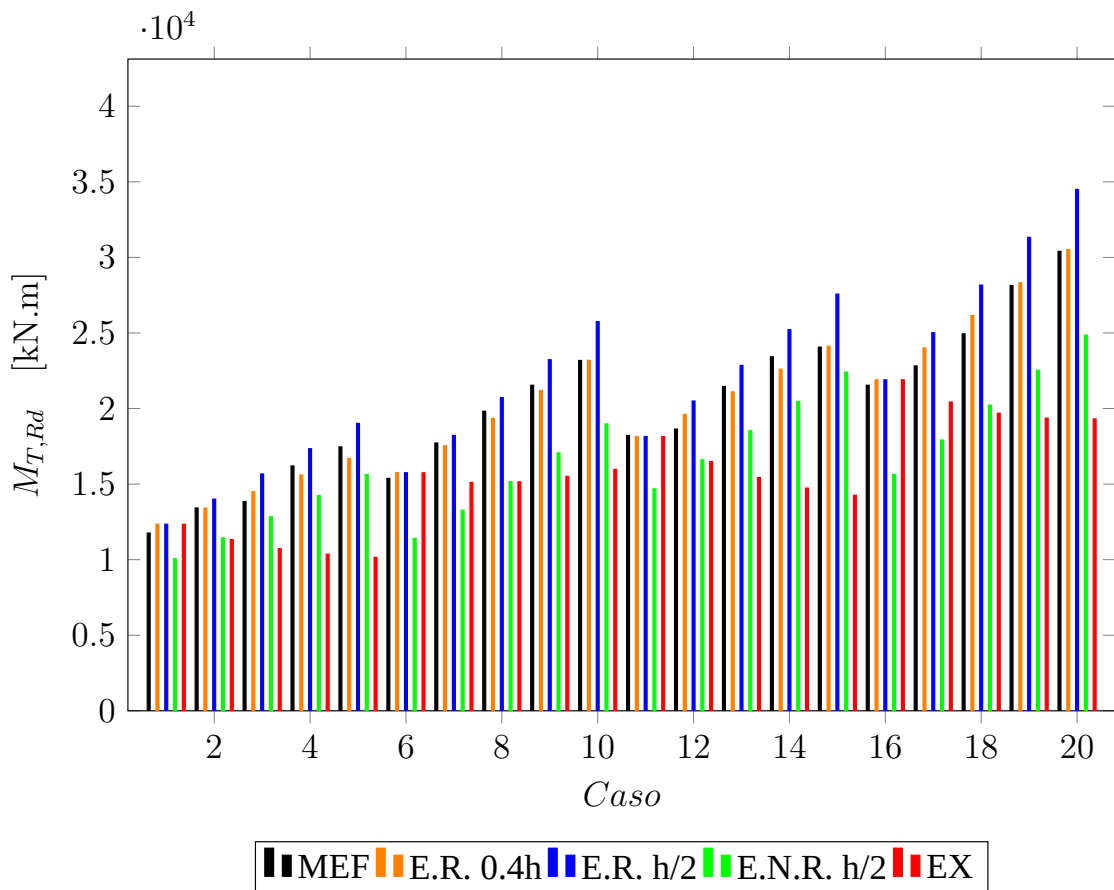


FIGURA 4.30 Torsor resistente calculado según distintas metodologías

En la gráfica anterior se comparan cinco metodologías de cálculo:

- MEF: Cálculo utilizando un modelo no lineal geométrico y material de elementos finitos. En este modelo, se ha introducido una imperfección proporcional al modo de pandeo, con una deformación máxima cuyo valor es el mínimo entre el ancho

superior y el alto dividido entre 200. Esta metodología se corresponde con el Anexo C de la norma EN1993-1-5.

- EX: Cálculo exento. Se considera la tensión máxima en la fibra inferior supuesto el diafragma exento y el ancho inferior a efectos de obtención de la tensión crítica de abolladura. El coeficiente de reducción se ha obtenido considerando el extremo rígido.
- E.R. $h/2$: Cálculo en la fibra media considerando extremo rígido. Se ha obtenido la tensión crítica en la fibra media del diafragma y se ha aplicado el coeficiente de reducción en ELU considerando extremo rígido.
- E.N.R. $h/2$: Cálculo en la fibra media considerando extremo no rígido. Idéntico al caso anterior, pero aplicando el coeficiente de reducción en ELU correspondiente a extremo no rígido.
- E.R. $0.4h$: Cálculo en $0.4 h_D$ considerando extremo rígido. La tensión crítica se obtiene a un 40 % de la altura del diafragma medida desde la fibra inferior y se ha aplicado el coeficiente de reducción en ELU considerando extremo rígido.

Las geometrías consideradas son los 20 casos explicados en el apartado 4.2.4.

Al analizar la gráfica 4.2.4 se pueden obtener varias conclusiones. En primer lugar, el modelo de elementos finitos se encuentra bien calibrado, ya que los resultados para los diafragmas rectangulares se aproximan para las formulaciones de extremos rígidos. En este punto indicar que se ha tomado una tensión de plastificación de 355 MPa y que la curva de comportamiento del material se extiende hasta una resistencia última de 490 MPa para una elongación del 10 %. Además, se ha limitado la deformación última del acero al 2.5 %, lo cual queda del lado de la seguridad para obtener conclusiones.

Otra conclusión que se puede obtener de la gráfica es que la formulación tradicionalmente empleada, que considera el diafragma exento, queda muy del lado de la seguridad. Lo mismo ocurre con el caso del extremo no rígido. En cambio, la formulación de extremo rígido, y la consideración de la fibra media, proporciona resistencias superiores a las calculadas con elementos finitos, y esto se agudiza conforme aumenta la inclinación de las almas. Por este motivo, no se considera adecuado calcular el diafragma tomando como referencia la fibra media.

Finalmente, los cálculos realizados empleando la fibra a una altura del 40 % del diafragma son los que mejor correlación guardan con el modelo de elementos finitos, quedando del lado de la seguridad en la mayoría de los casos. Además, en aquellos casos donde los

resultados no quedan del lado de la seguridad, la diferencia no es significativa.

En resumen, para verificar los diafragmas en ELU se puede seguir la formulación de tensiones críticas del Eurocódigo EN1993-1-5. Para la carga vertical, se puede utilizar la carga distribuida calculada según el apartado 4.3.5, y se debe tener en cuenta el comportamiento tanto de placa como de columna. En el caso de la carga tangencial, se recomienda calcular tensiones y dimensiones a un 40 % de la altura del diafragma medido desde la fibra inferior. El procedimiento completo, incluyendo cargas y puntos de verificación se detallará en el apartado 4.3.7.

4.3.6.7 Limitación respecto la carga crítica

En la introducción de este apartado se explicó que, históricamente, un criterio de dimensionamiento de este tipo de diafragmas ha sido limitar la carga última a la carga crítica. El fundamento se puede tratar desde una perspectiva conceptual o cuantitativa.

Desde una perspectiva conceptual, la limitación de la carga crítica se entiende en el caso de los diafragmas de pila, ya que se trata de elementos críticos para la resistencia del puente, y que además carecen de redundancia. Sin embargo, los diafragmas interiores sí que se pueden considerar redundantes, ya que habitualmente son varios y sus funciones pueden ser reconducidas por otros mecanismos. No obstante, valorar cuantitativamente la capacidad de redistribución de un puente de sección cajón cuando el diafragma falla es algo que excede el alcance de este trabajo.

Un aspecto que si se puede valorar de manera cuantitativa y empleando modelos simples es la pérdida de rigidez que se produce cuando el diafragma excede su carga crítica. Este punto es importante, ya que una pérdida dramática de la rigidez al sobrepasar la carga crítica podría provocar que la rigidez con la que se ha calculado el diafragma no se corresponda con la rigidez real, y consecuentemente, el diseño no sea correcto.

Para ilustrar la evolución de la rigidez, se ha tomado el caso de una sección rectangular de 6 m de ancho de cajón y 2 m de canto. Se ha comparado el movimiento horizontal en el vértice superior del cajón conforme aumenta la carga torsora aplicada como distorsión. En el caso elástico, el movimiento se corresponde con un análisis elástico. En el caso no lineal, el resultado se corresponde con un análisis no lineal geométrico y material, donde se ha considerado una imperfección proporcional al primer modo de pandeo con una deformación inicial de 10 mm. El caso extrapolado es el resultado de tomar del modelo no lineal la carga crítica aproximadamente (se ha considerado como punto de paso 6000 kN.m cuando la carga crítica es 6480 kN.m) y su desplazamiento, y extrapolarlo lineal-

mente. Lo anterior se muestra en la figura 4.31.

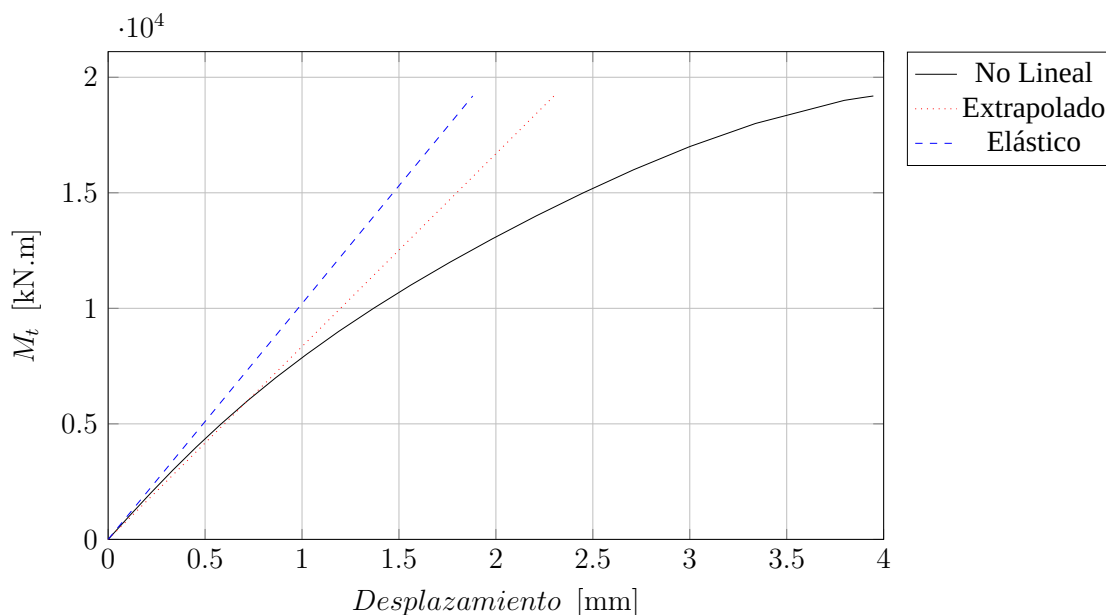


FIGURA 4.31 Relación momento torsor - desplazamiento en diafragma de alma llena

La principal conclusión que se extrae de la gráfica es que, efectivamente, existe una pérdida de rigidez al excederse la carga crítica, pero no es dramática. Además, el caso que se ha tomado es un caso extremo donde la diferencia entre la carga última y la carga crítica es de casi 3 veces.

Otro aspecto a reseñar es que la rigidez del diafragma disminuye aproximadamente a la mitad cuando se alcanza la capacidad última. Si se tiene en cuenta que este tipo de diafragmas tienen espesores mínimos en el entorno de los 8 mm, la mitad de su rigidez equivale a un espesor de 4 mm. Según Park [112] y Lebet [113], este espesor de 4 mm² es el mínimo a partir del cual son estables las tensiones debidas a la distorsión. Por lo tanto, aunque la rigidez se reduzca un 50 %, las consecuencias en el diseño deberían ser despreciables, siempre y cuando el espesor del diafragma sea superior a 8 mm.

Por último, y volviendo al terreno conceptual, se recomienda extender la limitación de respiro del alma en servicio al diafragma. Es decir:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{Ed}}{\sigma_{cr,D}}\right)^2 + 1.1 \cdot \left(\frac{\tau_{Ed}}{\tau_{cr,D}}\right)^2} \leq 1.1 \quad (4.44)$$

²En el capítulo 6 se demuestra que 4 mm es muy conservador, y que se puede reducir incluso a menos de 2 mm.

Esta limitación permite controlar, al igual que sucede en el alma, fenómenos de fatiga, mejorando así la durabilidad de los diafragmas. Además, esta limitación también sirve para controlar que la relación entre la rigidez final y la rigidez elástica no difiera significativamente. Aunque se ha estudiado que no debiera resultar importante, tampoco es conveniente que se pierda el control, ya que no se han estudiado todos los casos.

4.3.6.8 Estado Límite de Servicio y Fatiga

En este capítulo se ha explicado que se recomienda limitar las tensiones en diafragmas de alma llena a las tensiones críticas en Estado Límite de Servicio (ELS) y que el diafragma debe calcularse en ELU. Sin embargo, la norma EN1993-2 [9] impone otras limitaciones, como la tensión de plastificación en servicio o el rango de tensiones en el ELU de Fatiga.

Sin embargo, este trabajo no se enfocará en el estudio de las plastificaciones locales ni en el análisis de fenómenos de fatiga debidos a concentración de tensiones. Esto se debe a dos motivos principales. En primer lugar, los cálculos de predimensionamiento realizados muestran coeficientes de reducción en la tensión de plastificación bastante bajos, lo que significa que las tensiones en el diafragma en ELU están lejos de las tensiones de plastificación. Si estos coeficientes no fueran tan bajos, se necesitaría realizar un análisis completo para estudiar posibles plastificaciones. En segundo lugar, es posible controlar las concentraciones de tensiones que se forman principalmente en las esquinas mediante un detallamiento adecuado, sin incrementar significativamente el peso de los diafragmas.

El hecho de no considerar el estudio de las plastificaciones locales ni de la fatiga en este trabajo no es óbice para que en fase de proyecto no sea necesario realizar un cálculo completo del diafragma en elementos finitos con el fin de comprobar dichos fenómenos. Además, la necesidad de dejar un paso a través de los diafragmas intermedios también puede provocar concentraciones de tensiones que deben ser tenidas en consideración, y que en muchos casos se escapan a cálculos simplificados.

4.3.7 Resumen

Los pasos recomendados para el predimensionamiento de diafragmas interiores de alma llena son:

- 1) Determinar las tensiones verticales sobre el diafragma. Para ello es necesario:
 - a) Calcular la longitud tributaria (L_{eq}) de la sobrecarga según la ecuación 4.29.

- b) Determinar el carril de diseño que afecta al diafragma. Se considerará como carril de diseño aquel que se ubique en su totalidad entre las almas, con un margen de 0.5 m a cada lado (el borde del carril puede estar a una distancia máxima de 0.5 m en la dirección del voladizo). En cualquier caso, se aconseja tomar como mínimo el carril correspondiente al vehículo de 400 kN concomitante con la distorsión máxima, y otro caso con el vehículo de 600 kN entre las almas.
- c) Calcular la carga vertical de diseño del diafragma (q_D) como la suma de las cargas permanentes (q_G)³, la carga debida a la sobrecarga (q_{sc}), que se obtiene multiplicando la sobrecarga de diseño correspondiente al carril (q_{ik}) por la longitud equivalente (L_{eq}), y la carga correspondiente al vehículo pesado (Q_{ik}) dividido entre el ancho del carril (3 m). Además, las cargas se deberán factorizar para el cálculo en ELU por su factor γ_i correspondiente.

$$q_D = q_G \cdot (\gamma_G) + \left(\frac{2 \cdot Q_{ik}}{3} + q_{ik} \cdot L_{eq} \right) \cdot (\gamma_Q) \quad (4.45)$$

- d) Obtener la tensión de diseño vertical (σ_{Ed}) dividiendo la carga de diseño (q_D) entre el espesor del diafragma (t_D):

$$\sigma_{Ed} = \frac{q_D}{t_D} \quad (4.46)$$

- 2) Calcular la tensión tangencial de diseño (τ_{Ed}) en el diafragma. Esta se calcula a un 40 % de la altura medida desde la fibra inferior y puede obtener a partir del momento torsor de diseño empleando la siguiente fórmula:

$$\tau_{Ed} = \frac{M_{T,Ed} \cdot \beta}{2 \cdot h \cdot t_D \cdot b_s \cdot (0.6 \cdot \beta + 0.4)} \quad (4.47)$$

A efectos de cálculo de tensiones tangenciales, en adelante se tomará como ancho del diafragma:

$$a = b_s \cdot (0.6 \cdot \beta + 0.4) \quad (4.48)$$

- 3) Obtener las tensiones críticas.

- a) La tensión crítica vertical como panel se obtiene a partir de la ecuación 4.34. Se recomienda considerar como longitud de pandeo el 73 % de la altura del

³En un puente sin vigas transversales y donde el ancho superior del cajón es inferior al 60 % del ancho total la carga permanente sobre el diafragma es despreciable debido al flector negativo que introducen los voladizos

diafragma.

- b) Para calcular la tensión crítica vertical como columna, se emplea la ecuación 4.42. Se recomienda considerar el 73 % de la altura del diafragma como longitud de pandeo.
 - c) La tensión crítica tangencial se toma de la ecuación 4.31 empleando el ancho anteriormente indicado.
- 4) Dimensionar en ELU de acuerdo con el método de las tensiones efectivas. Los pasos se describen someramente en el apartado 4.3.6.6.
 - 5) Comprobar el respiro del diafragma en ELS siguiendo la ecuación 4.44.

Durante la fase de proyecto de detalle, se recomienda realizar un modelo de elementos finitos refinado con el fin de comprobar plastificaciones locales, especialmente si la forma trapezoidal del diafragma es acusada.

4.4 Cruz de San Andrés

4.4.1 Introducción

El diafragma en Cruz de San Andrés es un tipo de diafragma en celosía donde en el que los montantes se disponen en las diagonales del cajón formando una cruz. Este tipo de diafragmas se complementan habitualmente con un cordón superior y un refuerzo perimetral.

A diferencia del diafragma de alma llena, los diafragmas en Cruz de San Andrés, y, en general, cualquier tipología de diafragma en celosía, cuentan con un respaldo normativo claro. Además, las funciones de cada elemento se pueden descomponer fácilmente y sus criterios de dimensionamiento resultan claros en la mayoría de los casos.

En general, los esfuerzos en cada elemento del diafragma y los criterios de dimensionamiento son los siguientes:

- **Montantes.**

Los montantes, o diagonales, se dimensionan para soportar los esfuerzos debidos a la distorsión. En esta sección, se explica cómo obtener dichos esfuerzos, que se corresponden con una compresión y una tracción de idéntico valor en cada una de las diagonales. El perfil necesario para soportar el esfuerzo de compresión debe cumplir con la verificación de inestabilidad.

En este punto es importante destacar que si la pérdida de efectividad de la sección debido a la inestabilidad supera el 50 %, una solución es considerar que únicamente actúa el perfil traccionado, pero resistiendo el doble de esfuerzo. En este caso, también habría que tener en cuenta que la rigidez del diafragma es la mitad de la rigidez suponiendo ambos perfiles colaborantes. No obstante, este caso no se considerará en adelante.

■ **Cordón superior.**

En el apartado 4.2.1 se describen las funciones principales de los diafragmas, y en varias de dichas funciones el cordón superior es el elemento resistente principal. Resistir la distorsión no es una de esas funciones, ya que el cordón superior no actúa frente a la distorsión. Por lo tanto, en este apartado se omitirá la influencia del cordón superior.

■ **Refuerzo perimetral.**

El refuerzo perimetral se refiere a los rigidizadores tanto de ala inferior como de almas que se disponen en el diafragma. Estos se componen de chapas simples o pequeñas vigas en T, y sus funciones son las propias de los rigidizadores cuyos criterios de dimensionamiento tanto a nivel de rigidez mínima como de resistencia se encuentran ampliamente recogidos en la normativa vigente. Por lo general, la contribución que realizan a la rigidez a distorsión se considera despreciable frente a la rigidez que proporciona la celosía principal. Por esta razón no se va a considerar en este apartado la influencia del refuerzo perimetral.

Este apartado se centrará en la distorsión en los montantes. En primer lugar, se va a describir el modelo de contraste desarrollado en elementos finitos, que servirá de comparación para la obtención de rigideces y esfuerzos. Posteriormente, se determinará la rigidez del diafragma y los esfuerzos debidos a la distorsión en él empleando cálculos simplificados y un cálculo automatizado, el cual partirá de los desplazamientos de la sección. Por último, se revisarán los criterios de dimensionamiento, centrándose principalmente en determinar la longitud crítica de pandeo.

4.4.2 Modelo de contraste

Las características del modelo de contraste siguen siendo las mismas descritas en el apartado 4.2.4. La particularidad de este tipo de diafragmas es que la celosía está compuesta por perfiles de acero. En este caso, se empleará un perfil SHS 100x10, cuya área es 3492 mm², en los montantes, y se omitirá el cordón superior debido a que no influye a

efectos de distorsión. Además, se supone que los montantes se intersectan compartiendo un nodo y que su unión con la sección del cajón está articulada.

En la figura 4.32 se muestra una imagen del modelo.

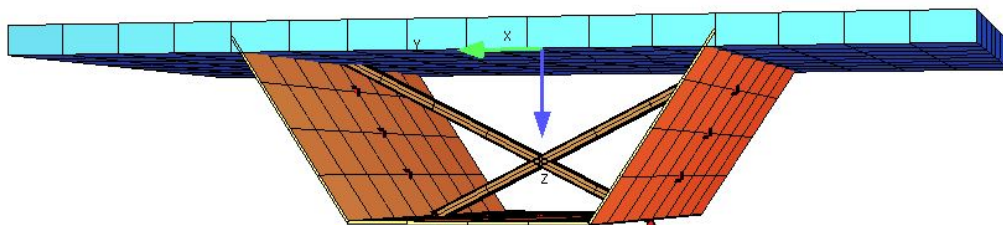


FIGURA 4.32 Modelo de contraste de Cruz de San Andrés

En este caso, se ha considerado únicamente la carga debida a la distorsión, la cual se ha introducido en el modelo conforme a lo descrito en el apartado 4.2.3 y representado en la figura 4.7.

4.4.3 Rigidez del diafragma

4.4.3.1 Matriz de rigidez

El cálculo de la rigidez del diafragma se obtiene a partir de la matriz de rigidez del diagrama ($\overline{\overline{K_m}}$). Para el cálculo de diafragmas en celosía, se considerará que dicha matriz está compuesta por elementos tipo barra articulada, también denominados tipo *truss*, centrados en el plano del diafragma⁴. La matriz de rigidez de cada uno de estos elementos tipo barra ($\overline{\overline{K_b}}$) es:

$$\overline{\overline{K_b}} = \frac{E \cdot A_b}{L_b} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Donde E es el módulo elástico longitudinal, A_b es el área del perfil y L_b es la longitud de la barra.

La matriz de transformación de una barra ($\overline{\overline{T_b}}$) que permite el paso de coordenadas locales

⁴Para consideraciones relativas al empleo de montantes excéntricos se recomienda el informe del TX-DOT Improved Cross Frame Details for Steel Bridges[134]

a coordenadas globales se define como:

$$\overline{\overline{T}}_b = \begin{bmatrix} \cos(\theta_b) & -\text{seno}(\theta_b) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_b) & \text{seno}(\theta_b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_b) & -\text{seno}(\theta_b) \\ 0 & 0 & \cos(\theta_b) & \text{seno}(\theta_b) \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Donde θ_b es el ángulo que forma la barra con la horizontal.

Empleando la notación anterior, la matriz de rigidez genérica para un diafragma en celosía se define como:

$$\overline{\overline{K}}_m = \sum_{b=1}^{n_b} \overline{\overline{T}}_b \cdot \overline{\overline{K}}_b \cdot \overline{\overline{T}}_b^T \quad (4.51)$$

Donde n_b es el número de barras.

Hasta este punto, la definición de la matriz de rigidez es aplicable a cualquier diafragma en celosía. La particularidad del diafragma en Cruz de San Andrés es que se compone de dos barras cuyos vértices son los nodos en las diagonales opuestas. Es decir, siguiendo la notación de la figura 4.3, las barras van de los nodos 1 a 4 y de 2 a 3. A diferencia del modelo refinado, donde también se estudia la capacidad resistente, se puede omitir su nodo de intersección, ya que los resultados no varían.

4.4.3.2 Cálculo aproximado

La rigidez del diafragma en Cruz de San Andrés se puede definir de manera aproximada para la formulación de movimiento vertical unitario como:

$$K_D = \frac{32 \cdot A_c^2 \cdot E \cdot A_b}{b_b^2 \cdot L_d^3} \quad (4.52)$$

La justificación del cálculo anterior se encuentra en el apéndice B.3.3, y en el siguiente apartado se muestra como guarda una correlación excelente con el resto de cálculos.

4.4.3.3 Cálculo comparativo

En este apartado se comparará el cálculo aproximado y el cálculo empleando la matriz de rigidez con el modelo de contraste. Para poder comparar el cálculo empleando la matriz de rigidez, se obtendrá la rigidez de diafragma (K_D) empleando el procedimiento ya descrito en el apartado 3.7.

A diferencia del diafragma de alma llena, este tipo de diafragmas, y en general todos los diafragmas en celosía, no presentan singularidades específicas. Por lo tanto, el cálculo de su rigidez es directo y se muestra a en la figura 4.33.

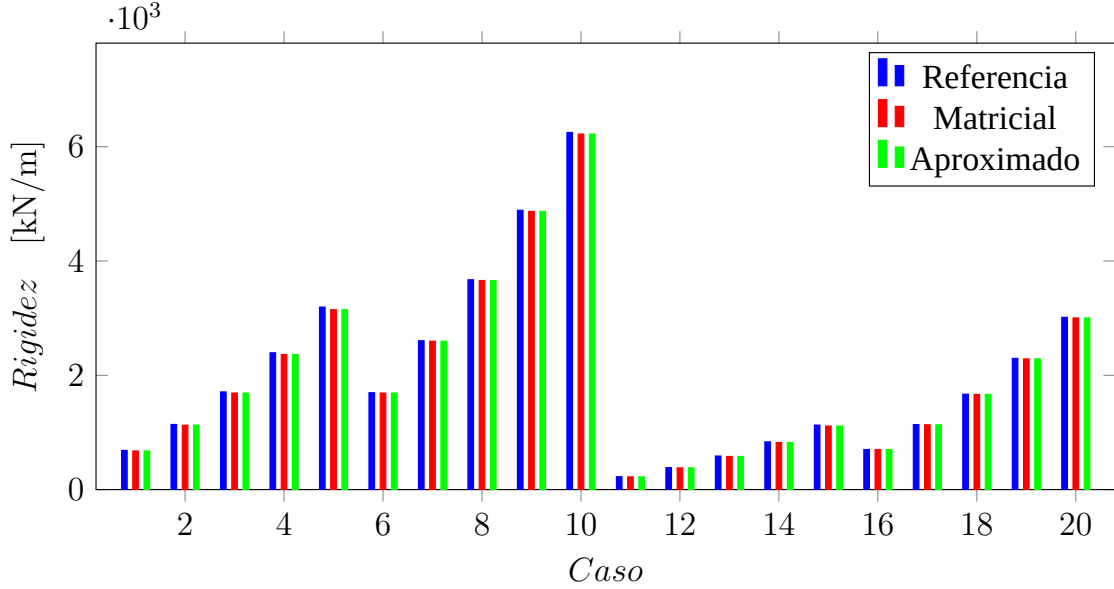


FIGURA 4.33 Rigidez en diafragmas en Cruz de San Andrés

En todos los casos, se puede observar una coincidencia prácticamente total entre los tres cálculos. Por lo tanto, se considera que tanto la fórmula simplificada propuesta como la metodología de cálculo matricial son adecuadas.

4.4.4 Cálculo de esfuerzos debidos a la distorsión

4.4.4.1 Cálculo matricial de esfuerzos

Los esfuerzos en cada una de las barras que componen los diafragmas en celosía se pueden obtener fácilmente empleando el cálculo matricial de estructuras.

Específicamente, los esfuerzos unitarios en cada uno de los perfiles ($\overline{N}_{b,0}$) se pueden obtener a partir de los desplazamientos unitarios de la sección en los vértices de la barra ($\overline{U}_{D,ij}$) empleando las matrices de rigidez de la barra ($\overline{K}_b$) y transformación ($\overline{T}_b$) ya definidas en el apartado 4.4.3.1.

$$\begin{pmatrix} N_{b,0} \\ 0 \\ -N_{b,0} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\overline{T}_b^T \cdot \overline{K}_b \cdot \overline{U}_{D,ij}}{K_D} \quad (4.53)$$

El esfuerzo axial final en la barra del diafragma (N_b) se obtiene multiplicando el esfuerzo unitario por la reacción en el diafragma.

$$N_b = N_{b,0} \cdot R_D = N_{b,0} \cdot \frac{2 \cdot M_T}{b_s} \quad (4.54)$$

En el caso concreto de los diafragmas en Cruz de San Andrés, los esfuerzos en las barras son idénticos pero de signo opuesto. Por lo tanto, es suficiente obtener el esfuerzo en una de las barras.

4.4.4.2 Cálculo aproximado de esfuerzos

Cuando se utiliza una sección simplificada, donde se supone que el alma llega hasta la fibra media de la losa superior y del ala inferior, el esfuerzo axial en la barra (N_b) se puede calcular a partir de un momento torsor (M_T) empleando la siguiente fórmula:

$$N_b = M_T \cdot \frac{L_d}{4 \cdot A_c} \cdot \beta \quad (4.55)$$

En la próxima sección de comparativa, se podrá observar cómo los resultados coinciden con el cálculo matricial para los casos estudiados. Esto se debe a que el valor obtenido refleja el equilibrio de fuerzas en los nodos, lo cual se puede considerar prácticamente isostático.

4.4.4.3 Cálculo comparativo

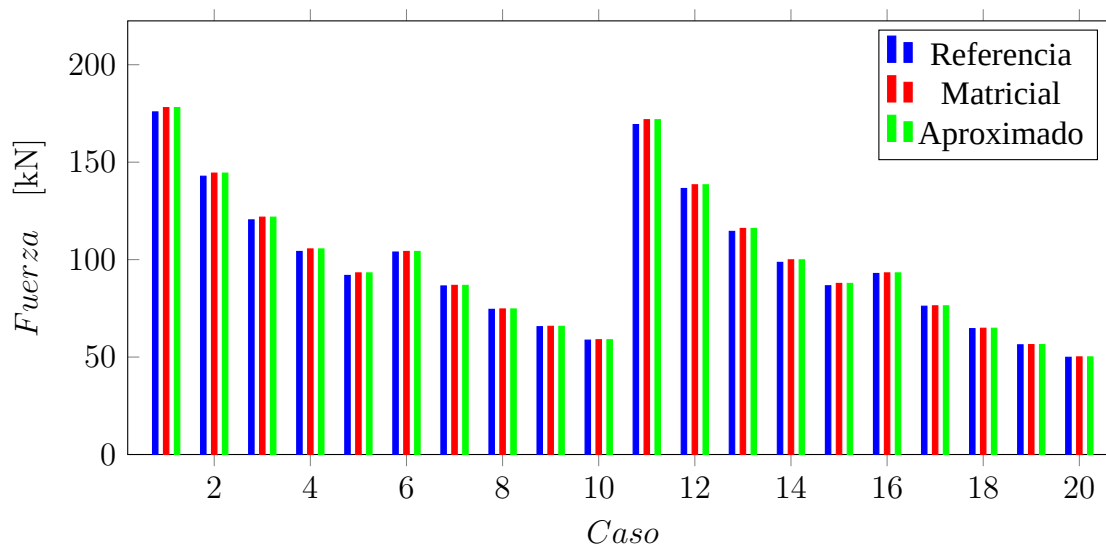


FIGURA 4.34 Esfuerzos en diafragmas en Cruz de San Andrés

En la figura 4.34 se comparan los esfuerzos obtenidos en una barra utilizando las dos

metodologías anteriores con los esfuerzos obtenidos en el modelo de contraste. Se considera como carga un momento torsor de 1000 kN.m.

Se puede apreciar que los resultados son prácticamente coincidentes en todas las metodologías. Las diferencias observadas son inferiores al 2 % entre el modelo de contraste y los otros cálculos realizados, lo cual se debe a que existe una ligera rigidez de marco que ha sido despreciada, pero que contribuye mínimamente a la resistencia de la sección.

4.4.5 Criterio de dimensionamiento

En este apartado se ha explicado que únicamente se considerarán esfuerzos axiles en los diafragmas en celosía. Por lo tanto, el criterio de comprobación de este tipo de diafragmas es el cálculo de inestabilidad de la barra, siendo la longitud de pandeo a considerar la única fuente de incertidumbre.

En cuanto a la verificación de los diafragmas en Cruz de San Andrés, se pueden considerar, compuestos por dos barras divididas en su intersección, es decir, cuatro barras en total. Las barras que se encuentran en la misma diagonal comparten axil, por lo que la verificación de la sección se realiza en la barra más larga de las dos. En secciones trapecoidales, esta es la barra superior que va de la intersección al vértice superior.

Para confirmar que la longitud de esa barra se corresponde con la longitud de pandeo, o longitud crítica, se han calculado los modos de pandeo para los 20 casos estudiados. A partir de la carga crítica obtenida, se ha determinado la longitud crítica.

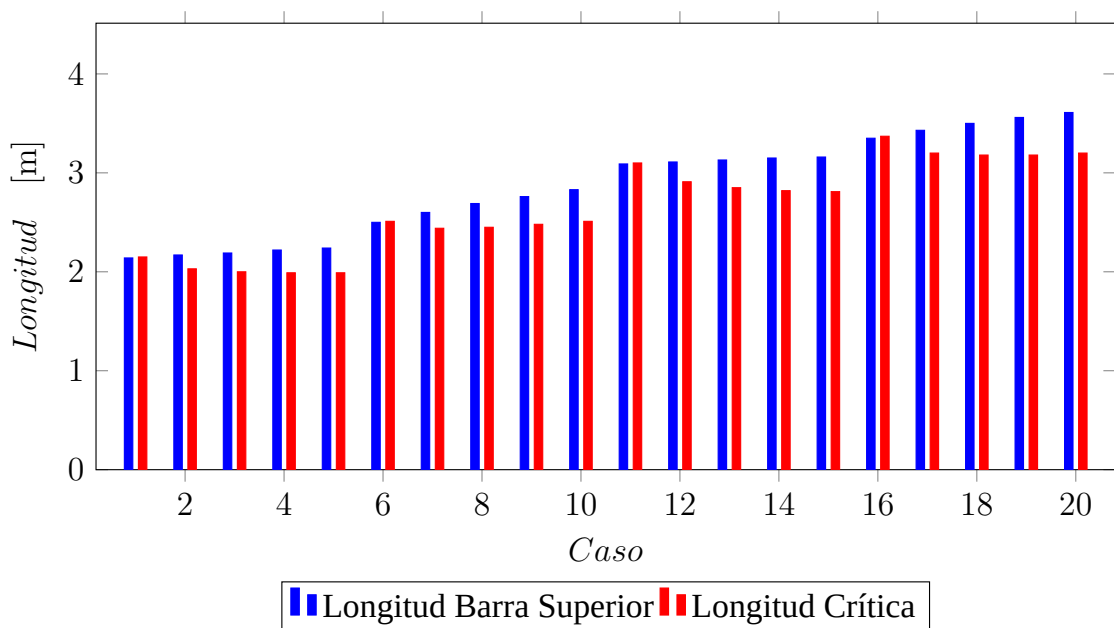


FIGURA 4.35 Longitud de pandeo en diafragmas en Cruz de San Andrés

Como era de esperar, los resultados de la figura 4.35 muestran que la longitud crítica es inferior a la longitud de la barra superior y, por lo tanto, se puede considerar que la longitud de la barra superior a efectos de verificación a pandeo queda del lado de la seguridad.

4.5 Diafragma en V

4.5.1 Introducción

El diafragma en V es otro tipo de diafragma en celosía donde los montantes se disponen en forma de V, uniéndose en el centro del ala inferior. Al igual en el diafragma en Cruz de San Andrés, el diafragma en V también se complementa habitualmente con un cordón superior y un refuerzo perimetral.

En el diafragma en Cruz de San Andrés se explicaron, en general, las funciones de los distintos elementos de los diafragmas en celosía, así como sus criterios de dimensionamiento. No obstante, cada tipo de diafragma presenta sus particularidades, por lo que a continuación se describen las relativas a los diafragmas en V:

- **Montantes.**

Los montantes de los diafragmas en V cumplen las mismas funciones que las diagonales en los diafragmas en Cruz de San Andrés, es decir, resistir fundamentalmente la distorsión. Por lo tanto, se dimensionan principalmente frente a los esfuerzos debidos a la distorsión. Además, estos esfuerzos producen una compresión y una tracción de igual magnitud en cada uno de los montantes. La principal diferencia radica en que en este caso no se puede omitir el montante a compresión y verificar únicamente el montante a tracción.

- **Cordón superior.**

El cordón superior no influye a distorsión, al igual que en el diafragma en Cruz de San Andrés, y por lo tanto se va a ignorar en este apartado.

- **Refuerzo perimetral.**

Además de actuar como rigidizador perimetral, hay que tener en cuenta que el refuerzo del ala inferior contribuye a la transmisión de la carga distorsora hacia los montantes. No obstante, en este apartado se ignorará su influencia.

En este apartado, se describirá el modelo de contraste y la metodología para la obtención de la rigidez y esfuerzos en el diafragma, tanto de manera simplificada como de gene-

ral. Por último, se explicará brevemente el criterio de dimensionamiento de este tipo de diafragmas.

4.5.2 Modelo de contraste

Una vez más, el modelo de contraste presenta las mismas características descritas en el apartado 4.2.4. En el caso del diafragma en V, se utilizarán perfiles de acero tipo SHS 100x10 para los montantes, cuyo área es 3492 mm^2 . Estos montantes se considerarán articulados en los extremos y se omitirá el cordón superior debido a su nula influencia en la distorsión.

El modelo se muestra en la figura 4.36.

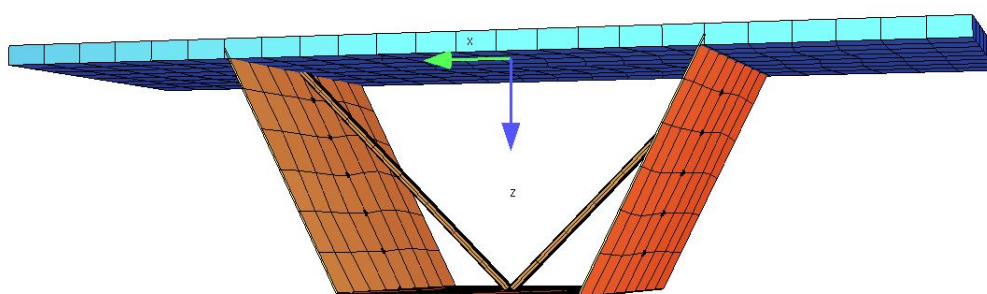


FIGURA 4.36 Modelo de contraste de diafragma en V

En este caso también se ha considerado solo la carga debida a la distorsión.

4.5.3 Rigidez del diafragma

4.5.3.1 Matriz de rigidez

En el apartado 4.4.3.1 se describe cómo obtener la matriz de rigidez de un entramado de barras articuladas. Sin embargo, el diafragma en forma de V presenta la particularidad de tener un nodo adicional en el vértice inferior de la V, lo que significa que se define empleando cinco nodos en vez de cuatro. Dado que solo se definen los desplazamientos en los cuatro nodos de los vértices del cajón, es necesario emplear la condensación estática para poder pasar de cinco nodos a cuatro nodos.

Si se denomina $\overline{\overline{K_{m5}}}$ a la matriz de rigidez considerando cinco nodos, esta se puede ex-

presar como:

$$\overline{\overline{K}}_{m5} = \begin{bmatrix} \overline{\overline{K}}_{8x8} & \overline{\overline{K}}_{8x2} \\ \overline{\overline{K}}_{2x8} & \overline{\overline{K}}_{2x2} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Donde ij denota las dimensiones de la matriz. Es decir, la matriz está compuesta por los ocho grados de libertad correspondientes a los cuatro vértices de la sección y dos grados de libertad adicionales debidos al quinto nodo.

Utilizando la notación anterior, se llega a la matriz condensada para los cuatro vértices de la sección del siguiente modo:

$$\overline{\overline{K}}_m = \overline{\overline{K}}_{8x8} - \overline{\overline{K}}_{8x2} \cdot \overline{\overline{K}}_{2x2}^{-1} \cdot \overline{\overline{K}}_{2x8} \quad (4.57)$$

Empleando la notación de la figura 4.3 se puede observar que las cuatro barras que forman el diafragma en V van desde todos los vértices al quinto nodo definido en el centro del ala inferior. En el caso particular de las barras que unen los vértices inferiores, correspondientes a la parte tributaria del ala inferior y el rigidizador, se les ha asignado un área de 10^6 mm^2 , lo que implica que se considera que la deformación en el ala inferior es prácticamente nula.

4.5.3.2 Cálculo aproximado

La rigidez de un diafragma en V para la formulación de movimiento vertical unitario se puede aproximar mediante la siguiente fórmula:

$$K_D = \frac{8 \cdot A_c^2 \cdot E \cdot A_b}{b_b^2 \cdot L_b^3} \quad (4.58)$$

Donde L_b es la longitud del montante.

Se refiere a lector al apéndice B.3.5 y para más información.

4.5.3.3 Cálculo comparativo

Se va a comparar nuevamente la rigidez de diafragma (K_D) calculada mediante las dos metodologías descritas anteriormente con el modelo de contraste. Los resultados se muestran en la figura 4.37.

Se puede observar como el cálculo aproximado y el cálculo matricial prácticamente obtienen resultados idénticos. Sin embargo, el cálculo en el modelo de contraste proporciona

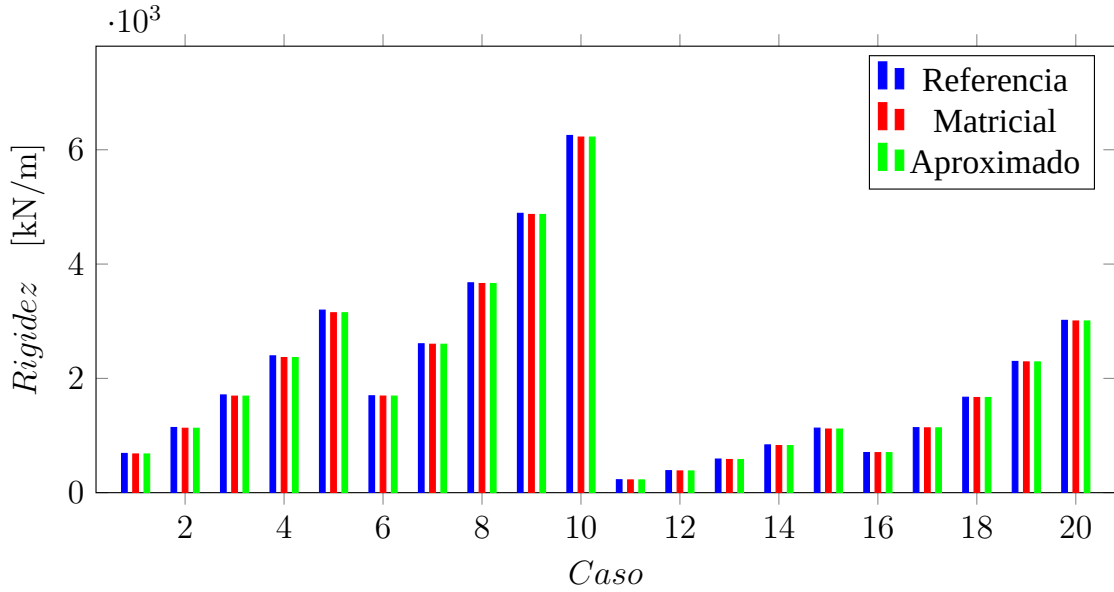


FIGURA 4.37 Rigidez en diafragmas en V

un resultado ligeramente inferior. Esto se debe a que la unión con el ala inferior se realiza en la lámina, y por lo tanto, esta aporta una ligera flexibilidad que no se ha tenido en cuenta. No obstante, si se introdujera un perfil de rigidización en el ala inferior, se observaría que la rigidez prácticamente sería convergente con el resto de resultados.

En cualquier caso, se considera que la diferencia observada entre el modelo de contraste y el resto de resultados no es relevante, por lo que se considera que la metodología propuesta es adecuada.

4.5.4 Cálculo de esfuerzos debidos a la distorsión

4.5.4.1 Cálculo matricial de esfuerzos

La metodología para obtener los esfuerzos a partir de los desplazamientos en los nodos se describe en el apartado 4.4.4.1. Sin embargo, los desplazamientos en el quinto nodo son desconocidos y deben deducirse a partir de los desplazamientos en los otros cuatro nodos.

Empleando la notación del apartado 4.5.3.1, se infiere que el desplazamiento en el quinto nodo ($\overline{U_{D,5}}$) se puede obtener a partir de los desplazamientos en los otros cuatro nodos ($\overline{U_D}$) del siguiente modo:

$$\overline{U_{D,5}} = -\overline{K_{2x2}^{-1}} \cdot \overline{K_{2x8}} \cdot \overline{U_D} \quad (4.59)$$

Añadiendo los resultados de este quinto nodo al vector de desplazamientos se pueden obtener los esfuerzos en todas las barras que componen el diafragma.

4.5.4.2 Cálculo aproximado de esfuerzos

El axil en el montante (N_b) se puede calcular de manera simplificada a partir de un momento torsor (M_T) empleando la siguiente fórmula:

$$N_b = M_T \cdot \frac{L_b}{2 \cdot A_c} \cdot \beta \quad (4.60)$$

4.5.4.3 Cálculo comparativo

Después de definir las dos metodologías para obtener los esfuerzos, se compararán los resultados con el modelo de contraste, considerando un momento torsor de 1000 kN.m.

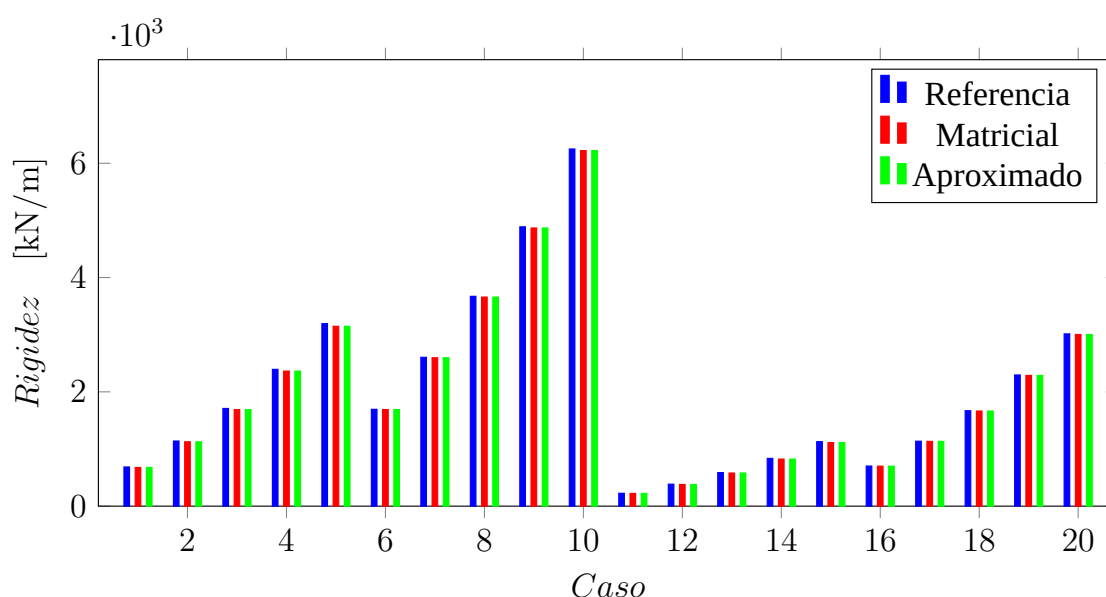


FIGURA 4.38 Esfuerzos en diafragmas en V

Una vez más, se observa que los resultados son muy similares.

4.5.5 Criterio de dimensionamiento

Como es sabido, el criterio de dimensionamiento de un diafragma en V consiste en verificar a compresión del montante considerando toda su longitud. Debido a lo obvio de esta afirmación, no es necesario realizar cálculos adicionales.

4.6 Diafragma en K

4.6.1 Introducción

El diafragma en K se puede considerar una variante del diafragma en V, donde los montantes confluyen en el punto medio del cordón superior en lugar de hacerlo en el centro del ala inferior. Esto significa que la mayoría de los comentarios aplicables al diafragma en V se pueden extender al diafragma en K, aunque se deben realizar algunas puntualizaciones.

- **Montantes.**

Al igual que en el resto de los diafragmas en celosía, los montantes tienen la función principal de resistir a la distorsión. Sin embargo, si se decide que el cordón superior debe soportar la losa por criterio de diseño, los montantes actuarían como apoyo intermedio del cordón superior. Esto implica que, además de resistir la distorsión, deben soportar las cargas verticales debidas principalmente a la carga vehicular.

En la sección 4.3.5 se desarrolló la metodología para obtener la carga vertical tributaria de un diafragma de alma llena, pero sus conclusiones se pueden extender a los diafragmas en K con losa apoyada en el cordón superior.

- **Cordón superior.**

El cordón superior del diafragma debe dimensionarse para resistir los esfuerzos habituales en los cordones superiores descritos en el apartado 4.4.1. Sin embargo, en el caso del diafragma en K, también debe resistir los esfuerzos debidos a la distorsión, ya que el cordón superior es el encargado de transmitir los esfuerzos de la sección a los montantes.

El criterio de dimensionamiento varía dependiendo de si el cordón superior se encuentra unido a la losa o no. Cuando el cordón superior está exento este debe verificarse a inestabilidad. Si está exento, debe verificarse a inestabilidad. Sin embargo, si dicho cordón se une a la losa superior, la verificación de inestabilidad por axil desaparece en la configuración de puente terminado, aunque aparecen los esfuerzos de flexión debidos a la carga viva.

- **Refuerzo perimetral.**

En los diafragmas en K, el refuerzo perimetral actúa únicamente como rigidizador.

Este apartado seguirá el mismo esquema de los anteriores. Cabe resaltar que se estudiarán tanto los casos de losa apoyada en el cordón superior, también denominado cordón superior mixto, como cordón superior exento.

4.6.2 Modelo de contraste

El modelo de contraste sigue la misma línea que los otros diafragmas en celosía, con una longitud de sección de 4.5 m y una geometría que se describe en el apartado 4.2.4.

Las barras que componen el diafragma en K son perfiles de acero tipo SHS 100x10 con un área de 3492 mm². Se ha supuesto que el nodo superior está en el centro de la losa superior, y dependiendo de si el cordón superior es mixto o no, se considera que dicho nodo pertenece a la losa o no. Esta condición de pertenencia a la losa también se extiende a los nodos que componen la malla de la barra del cordón superior.

En la figura 4.39 se muestra el modelo.

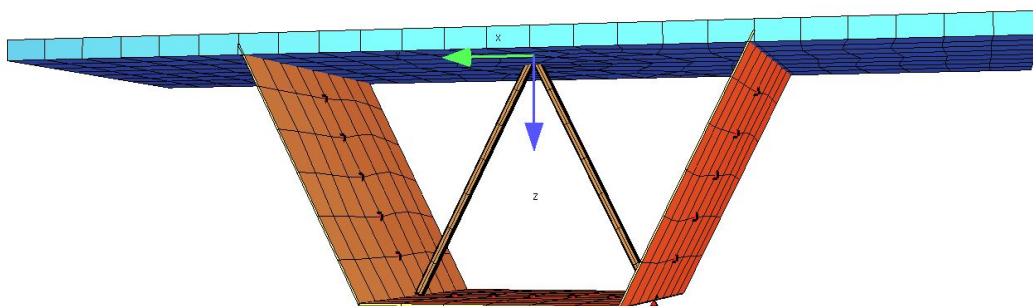


FIGURA 4.39 Modelo de contraste de diafragma en K

En cuanto a las cargas, se ha analizado únicamente la distorsión.

4.6.3 Rigidez del diafragma

4.6.3.1 Matriz de rigidez

La metodología para obtener la matriz de rigidez de un entramado de barras se describe en el apartado 4.4.3.1, y la metodología para condensar la matriz de rigidez cuando se incluye un quinto nodo en el apartado 4.5.3.1. Por lo tanto, no es necesario realizar explicaciones adicionales acerca del cálculo de la matriz de rigidez.

Únicamente merece la pena particularizar que, en el caso del diafragma en K, el cordón superior puede ser mixto. En este caso, en vez de asignar el valor del área del perfil como

sucede en el caso exento, se puede asignar un valor de 10^6 mm^2 al área. Esto equivale a asumir que apenas existe deformación en el cordón superior.

4.6.3.2 Cálculo aproximado

La rigidez de un diafragma en K depende del área del cordón superior (A_{tb}) y el área del montante (A_{db}). Utilizando la formulación de movimiento vertical unitario, la fórmula que estima la rigidez es:

$$K_D = \frac{64 \cdot A_c^2 \cdot E \cdot A_{tb} \cdot A_{db}}{b_b^2 \cdot (b_s \cdot b_b^2 \cdot A_{db} + 8 \cdot L_b^3 \cdot A_{tb})} \quad (4.61)$$

Donde L_b es la longitud del montante.

Si se supone que el cordón superior es mixto, se puede asumir que dicho cordón es infinitamente rígido. En tal caso, la rigidez aproximada del diafragma pasaría a calcularse del siguiente modo:

$$K_D = \frac{8 \cdot A_c^2 \cdot E \cdot A_{db}}{b_b^2 \cdot L_b^3} \quad (4.62)$$

Una vez más, en el apéndice B.3.4 se puede encontrar más información.

4.6.3.3 Cálculo comparativo

En el subapartado anterior se han propuesto las fórmulas para obtener la rigidez, tanto considerando el cordón superior mixto como exento. En este subapartado se compararán ambas formulaciones con el modelo de contraste y con el cálculo matricial.

En primer lugar, se muestran los resultados del modelo exento en la figura 4.40. 4.41.

En dicha figura se observa como las rigideces obtenidas son prácticamente coincidentes en todos los casos. Sin embargo, debido al «punzonamiento» que ejercen las barras en las láminas que definen la sección, en ciertos casos se puede apreciar que la rigidez del modelo de elementos finitos es ligeramente menor.

Este fenómeno de «punzonamiento», sumado a la flexibilidad real del cordón superior mixto, también hace que la rigidez del modelo de elementos finitos sea ligeramente menor, como se muestra en la figura 4.41.

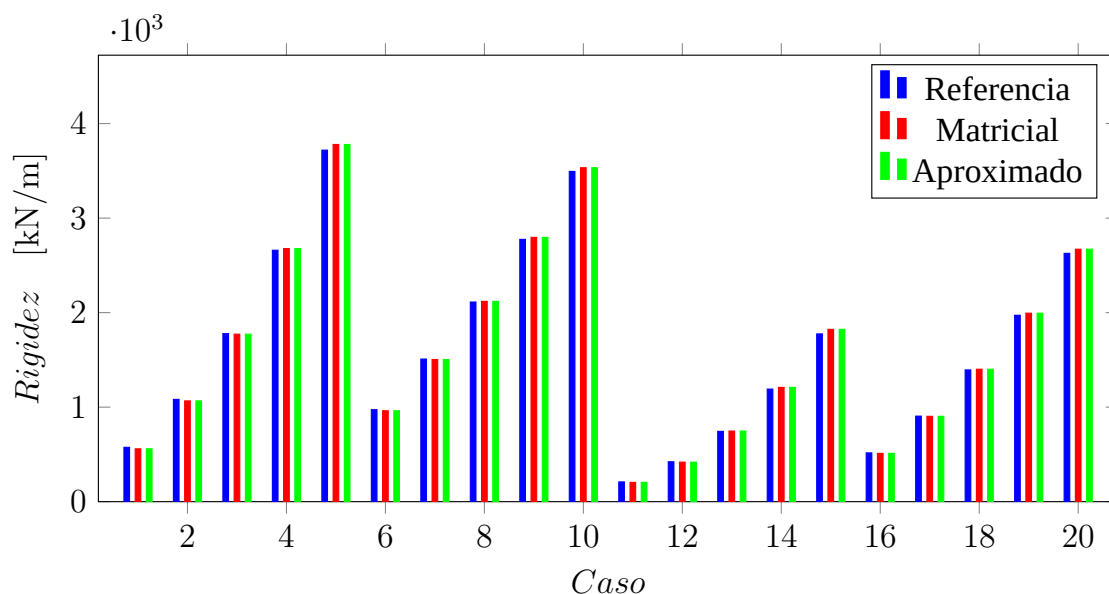


FIGURA 4.40 Rigidez en diafragmas en K exentos

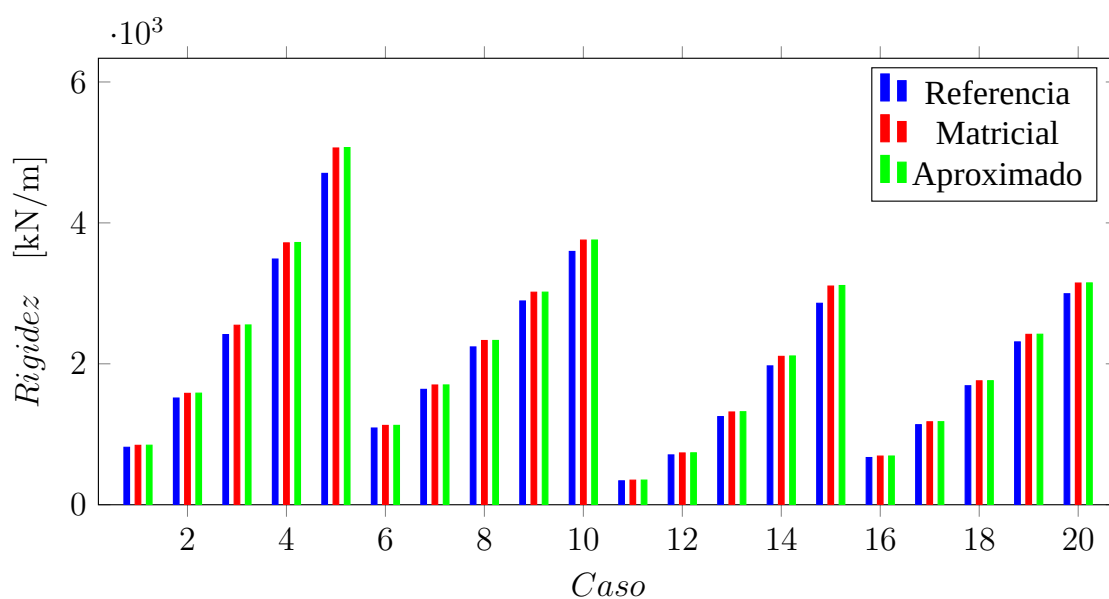


FIGURA 4.41 Rigidez en diafragmas en K con cordón superior mixto

Es importante destacar que el perfil considerado en el cordón superior es inferior al requerido cuando la losa es mixta. Por lo tanto, se considera que la rigidez real esperada en este tipo de diafragmas estará mucho más cercana al cálculo aproximado de lo que se muestra en la gráfica anterior. Por ese motivo, se considera que aproximar el cordón superior mixto a un cordón infinitamente rígido es una hipótesis adecuada. Además, esta es la hipótesis que establecen la mayor parte de las formulaciones aproximadas de rigidez consultadas [48][2].

4.6.4 Cálculo de esfuerzos debidos a la distorsión

4.6.4.1 Cálculo matricial de esfuerzos

La metodología para obtener los esfuerzos a partir de los desplazamientos en los nodos se describe en el apartado 4.4.4.1. Además, en el apartado 4.5.4.1 se describe cómo obtener los desplazamientos en los nodos interiores del diafragma a partir de los desplazamientos en los vértices exteriores. Por lo tanto, no se requieren aclaraciones adicionales para obtener de los esfuerzos en las barras de los diafragmas en K.

4.6.4.2 Cálculo aproximado de esfuerzos

El axil en el montante (N_{db}) y en el cordón superior (N_{tb}) se pueden calcular a partir de un momento torsor (M_T) empleando las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} N_{tb} &= M_T \cdot \frac{b_b \cdot \beta}{4 \cdot A_c} \\ N_{db} &= M_T \cdot \frac{L_b \cdot \beta}{2 \cdot A_c} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Es importante señalar que estos esfuerzos no dependen del área asignada a las secciones, por lo que se pueden aplicar tanto al caso de cordones superiores exentos como al de cordones superiores mixtos.

4.6.4.3 Cálculo comparativo

En este subapartado se calcularán los esfuerzos en las barras que componen el diafragma debido a la distorsión causada por un momento torsor de 1000 kN.m.

En primer lugar, en la figura 4.42, se comparan los esfuerzos en los montantes cuando el cordón superior es exento.

En esta figura también se observa cómo la rigidez de marco de la sección actúa ligeramente reduciendo los esfuerzos en el modelo de contraste. Sucede lo mismo en el cordón superior como se muestra en la figura 4.43.

Además, cuando la rigidez es mayor debido a la acción mixta del cordón superior, la diferencia en los esfuerzos en los montantes se reduce, como se muestra en la figura 4.44.

No obstante, en cualquiera de las figuras anteriores se observa como tanto el cálculo matricial como las fórmulas aproximadas constituyen aproximaciones excelentes.

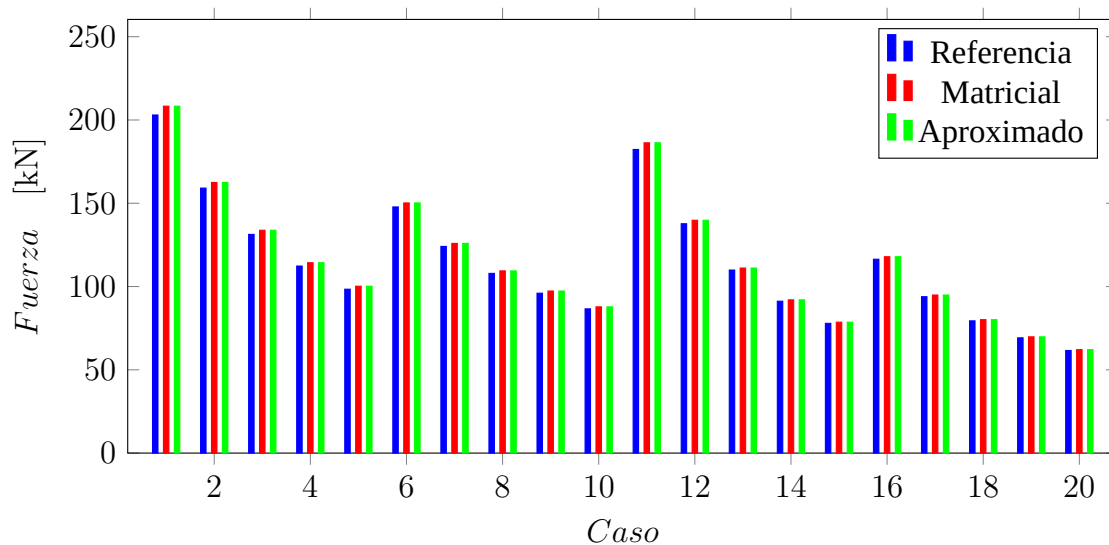


FIGURA 4.42 Esfuerzos en montantes de diafragmas en K exentos

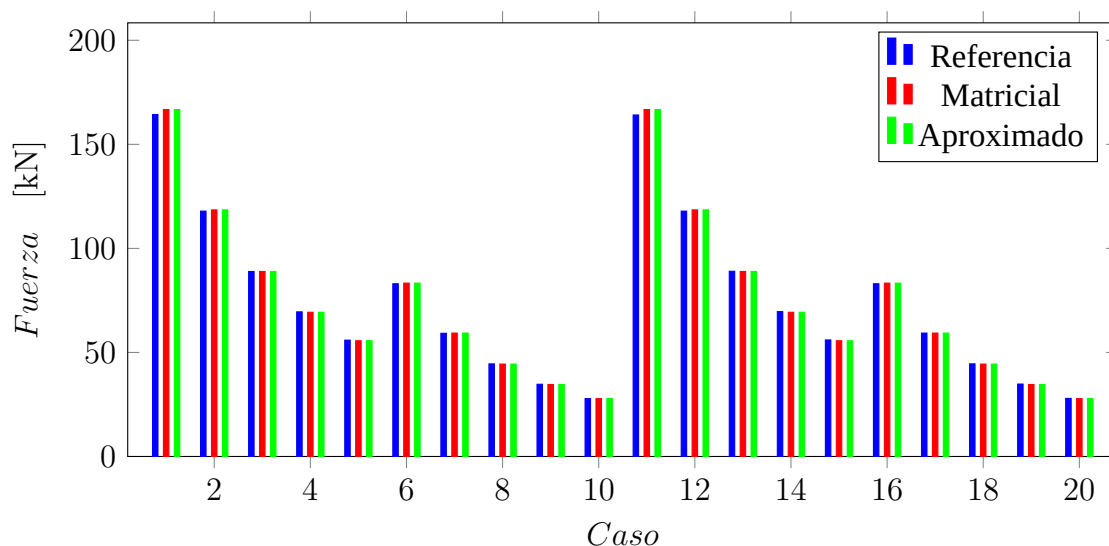


FIGURA 4.43 Esfuerzos en cordón superior de diafragmas en K exentos

4.6.5 Criterio de dimensionamiento

Como es conocido, el criterio de dimensionamiento de un diafragma en K consiste en verificar la inestabilidad de todas las barras exentas sometidas a compresión. Es decir, se deben verificar los montantes y, en el caso de que el cordón superior esté exento, dicho cordón superior. En ambos casos, se debe tomar como longitud crítica de pandeo la longitud completa de la barra hasta el nodo central. Nuevamente, se omiten cálculos adicionales por lo obvio de las afirmaciones.

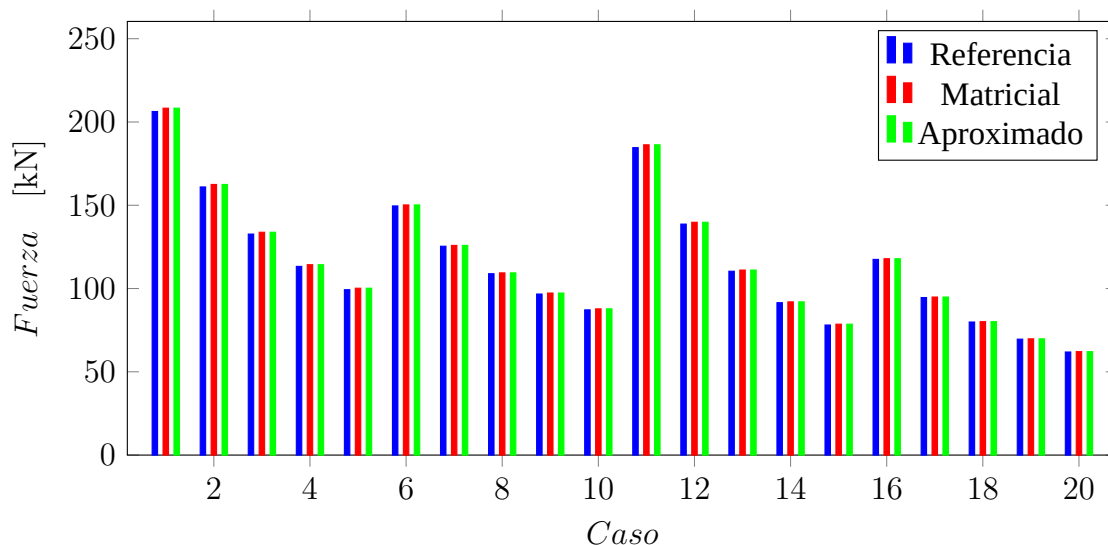


FIGURA 4.44 Esfuerzos en montantes de diafragmas en K mixtos

4.7 Marcos abiertos y cerrados

4.7.1 Introducción

Los marcos abiertos suelen consistir en una sección en T adherida al perímetro del cajón en su interior. Si dicha sección en T se adhiere también a la chapa de techo, o bien se dispone una sección doble T bajo la losa superior, el marco pasa a denominarse marco cerrado.

Utilizando la misma terminología que en los casos previos, este tipo de diafragmas están constituidos únicamente por un refuerzo perimetral y, en el caso de los marcos cerrados, un cordón superior. Es decir, no existen montantes que resistan la distorsión, y por lo tanto, es el propio refuerzo perimetral y cordón superior el que debe resistir por flexión la distorsión. Además, estos elementos cumplen todas las funciones descritas en el apartado 4.2.1.

Si se considera el marco estricto requerido por condiciones de rigidización frente a abolladura de las alas y almas, su capacidad y la rigidez que aporta frente a esfuerzos de distorsión por lo general es baja. Por lo tanto, habitualmente es necesario incrementar la robustez de dichos marcos. Las soluciones más habituales consisten en incorporar una rigidización mediante celosía, o bien incrementar las dimensiones de las T adheridas. La elección de una u otra estrategia será objeto de estudio en el capítulo 6.

A pesar de que los diafragmas de este tipo pueden tener ventajas desde un punto de vista constructivo, su modelado empleando elementos tipo viga presenta una fuente de incerti-

dumbre fundamental, que es la contribución de la chapa a la cual se encuentra adherida la T. Además, el centro de gravedad de las barras que componen el marco no se corresponde con el perímetro del cajón, y en el caso de vigas de gran canto, la deformación por cortante puede resultar significativa. Para resolver dichos problemas, se ha limitado la aplicación de la metodología descrita aquí a cierta altura máxima de los elementos que componen el marco, y también se han propuesto algunas simplificaciones. Sin embargo, a pesar de estas limitaciones, no se ha alcanzado el mismo nivel de precisión en cuanto a la rigidez y esfuerzos de los diafragmas anteriores.

Específicamente, **la metodología descrita aquí es válida cuando la altura máxima de los elementos del marco sea inferior al mínimo entre un cuarto del canto del tablero o un cuarto de la longitud del panel**. El panel puede ser el alma, el ala inferior o bien el ancho superior del cajón. Si el diafragma propuesto exceda los límites anteriores, se recomienda obtener su rigidez y resistencia mediante un modelo de elementos finitos tipo lámina similar al descrito en el apartado de modelo de contraste.

4.7.2 Modelo de contraste

En el modelo de contraste, se consideraron 20 geometrías de sección distintas, tal como se describe en el apartado 4.2.4. Debido a la incertidumbre en la contribución de las chapas de la sección, se optó por estudiar cuatro posibilidades en cada una de las 20 geometrías. En total se estudiaron 80 geometrías distintas. Las características adicionales de cada una de las geometrías se describen en la tabla 4.8, donde h se refiere a la altura de la sección.

Elemento	Caso A	Caso B	Caso C	Caso D
Altura T inferior [mm]	$h/4$	$h/5$	300	300
Altura T alma [mm]	400	400	300	300
Ancho ala T [mm]	250	200	200	200
Espesor ala T [mm]	20	20	20	20
Espesor alma T [mm]	10	10	10	15
Espesor ala inferior sección [mm]	30	15	30	15
Espesor alma sección [mm]	20	10	20	10

TABLA 4.8 Geometrías de los marcos abiertos estudiados

Cabe indicar que en todos los casos se han estudiado marcos abiertos.

En la figura 4.45 se muestra una imagen del modelo.

En este caso, también se ha considerado únicamente la carga debida a la distorsión.

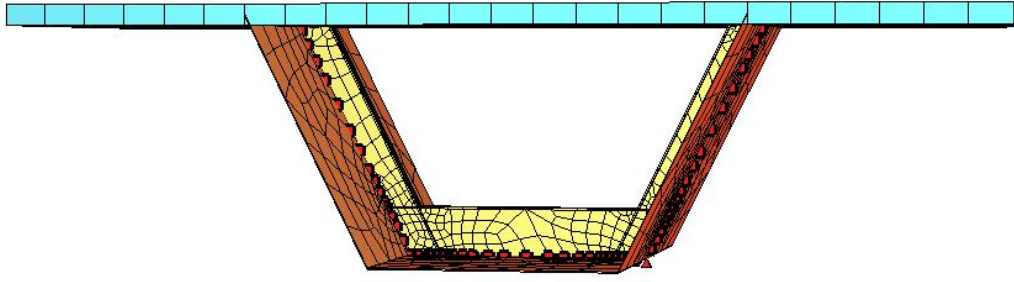


FIGURA 4.45 Modelo de contraste de marco abierto

4.7.3 Rigidez del diafragma

4.7.3.1 Matriz de rigidez

El cálculo de la rigidez del diafragma se va a realizar a partir de la matriz de rigidez del diafragma ($\overline{\overline{K_m}}$) empleando elementos tipo viga. La matriz de rigidez ($\overline{\overline{K_v}}$) de cada uno de estos elementos es:

$$\overline{\overline{K_v}} = E \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_v}{L_v} & 0 & 0 & -\frac{A_v}{L_v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot I_v}{L_v^3} & \frac{6 \cdot I_v}{L_v^2} & 0 & -\frac{12 \cdot I_v}{L_v^3} & \frac{6 \cdot I_v}{L_v^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot I_v}{L_v^2} & \frac{4 \cdot I_v}{L_v} & 0 & -\frac{6 \cdot I_v}{L_v^2} & \frac{2 \cdot I_v}{L_v} \\ -\frac{A_v}{L_v} & 0 & 0 & \frac{A_v}{L_v} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot I_v}{L_v^3} & -\frac{6 \cdot I_v}{L_v^2} & 0 & \frac{12 \cdot I_v}{L_v^3} & -\frac{6 \cdot I_v}{L_v^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot I_v}{L_v^2} & \frac{2 \cdot I_v}{L_v} & 0 & -\frac{6 \cdot I_v}{L_v^2} & \frac{4 \cdot I_v}{L_v} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Donde E es el módulo elástico longitudinal, A_v el área de la viga, I_v la inercia de la viga respecto a su centro y L_v la longitud de la viga medida en el perímetro del cajón.

La matriz de transformación de una viga ($\overline{\overline{T_v}}$) que permite el paso de coordenadas locales a coordenadas globales se define como:

$$\overline{\overline{T_v}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_v) & \text{seno}(\theta_v) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{seno}(\theta_v) & \cos(\theta_v) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_v) & \text{seno}(\theta_v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{seno}(\theta_v) & \cos(\theta_v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Donde θ_v es el ángulo que forma la viga con la horizontal.

De manera análoga al diafragma en celosía, la matriz de rigidez del marco se define como:

$$\overline{\overline{K}}_m = \sum_{b=1}^{n_b} \overline{\overline{T}}_v \cdot \overline{\overline{K}}_v \cdot \overline{\overline{T}}_v^T \quad (4.66)$$

Donde n_b es el número de vigas.

El procedimiento para obtener la matriz será similar al de un diafragma en celosía. Es decir, se tomarán como vértices los cuatro extremos del cajón y se considerarán los grados de libertad correspondientes a los movimientos horizontales y verticales. Debido al uso de elementos tipo viga, existen doce grados de libertad, por lo que se debe necesario aplicar una condensación estática para pasar a ocho grados de libertad.

De manera similar a lo descrito en 4.5.3.1, se puede separa la matriz del marco en submatrices. En este caso los grados de libertad a condensar son los 4 correspondientes al giro. Por lo tanto la matriz de rigidez del marco se redefine como:

$$\overline{\overline{K}}_m = \overline{\overline{K}}_{8 \times 8} - \overline{\overline{K}}_{8 \times 4} \cdot \overline{\overline{K}}_{4 \times 4}^{-1} \cdot \overline{\overline{K}}_{4 \times 8} \quad (4.67)$$

En cuanto a las vigas, se considerarán cuatro: una por cada ala y otra por cada alma. En lo que respecta a las propiedades de las vigas, además del área correspondiente al marco adherido, se debe sumar una parte correspondiente a la parte tributaria de la chapa o losa donde se adhiere. En el caso de los marcos abiertos, donde no hay viga metálica superior, se considera únicamente el área de la parte tributaria de la losa.

En el apartado 4.7.3.3 se discute sobre la anchura que se debe considerar para el cálculo del área tributaria.

4.7.3.2 Cálculo aproximado

La rigidez de un marco se va a considerar idéntica a la rigidez de marco de la sección a nivel de formulación. Es decir:

$$K_D = E_s \cdot \frac{16 \cdot A_c^2}{b_b^3 \cdot b_s \cdot b_w} \cdot \frac{12 \cdot I_{s,w}}{h^2} \cdot r_1 \quad (4.68)$$

Donde:

$$r_s = \frac{b_s \cdot I_{s,w}}{b_w \cdot I_{s,s}} \quad (4.69a)$$

$$r_b = \frac{b_b \cdot I_{s,w}}{b_w \cdot I_{s,b}} \quad (4.69b)$$

$$r_1 = \frac{2 + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \beta^2 + r_s + r_b \cdot \beta^2}{\beta \cdot [(r_s + 2) \cdot (r_b + 2) - 1]} \quad (4.69c)$$

La notación empleada se describe en detalle en el apéndice B. Únicamente cabe indicar que el subíndice w se refiere al alma, s al ala superior y b al ala inferior.

4.7.3.3 Contribución de las chapas

Como se ha explicado anteriormente, un parámetro fundamental es el ancho tributario de chapa o losa que se considera para el cálculo de la inercia a flexión. Dicho ancho varía habitualmente en función de si se desea obtener la rigidez del diafragma o se quiere verificar la sección estructuralmente. Si bien en el primer caso se busca una aproximación lo más realista posible, en el segundo, el objetivo es mantenerse del lado de la seguridad.

El ancho tributario a efectos de comprobaciones estructurales está normalmente establecido en la normativa. Por ejemplo, la norma EN 1993-1-5 [31] establece que dicho ancho es $15\epsilon t$ a cada lado del rigidizador, donde t es el espesor de la chapa y ϵ depende de la tensión de plastificación del acero. Sin embargo, el ancho tributario para el cálculo de la rigidez no está tan claro por lo que varios autores han realizado sus propuestas. Algunas de las más destacadas son:

- H. Nakai y C.H. Yoo [34]: $\min(C/3, S_D)$.
- J.P. Lebet y M. A. Hirt [113]: Inercia respecto a la pared de la sección. Se va a aproximar el ancho como S_D .
- R. Wright [11]: $(S_D \cdot \tanh(5.6 \cdot S_D/b_b))/(5.6 \cdot S_D \cdot (1 - \nu^2)/b_b)$.

Donde C es el canto de la sección, S_D la separación entre diafragmas, b_b el ancho inferior del cajón y ν el módulo de Poisson del acero.

Con el fin de comprobar qué propuesta es la más aproximada, se van a comparar las cuatro alternativas anteriormente citadas con el modelo de contraste. El resultado de dicha comparación es el ratio entre la rigidez calculada con el cálculo aproximado y la rigidez calculada con el modelo de elementos finitos. Por lo tanto, si la aproximación es más flexible el ratio será inferior a 1, mientras que si la aproximación es más rígida el ratio será superior a 1.

Debido al gran volumen de resultados, se ha optado por representarlos en forma de diagrama de barras y bigotes. En dicho diagrama se representan los extremos mediante líneas,

y los cuartiles centrales mediante barras, siendo la línea central la mediana.

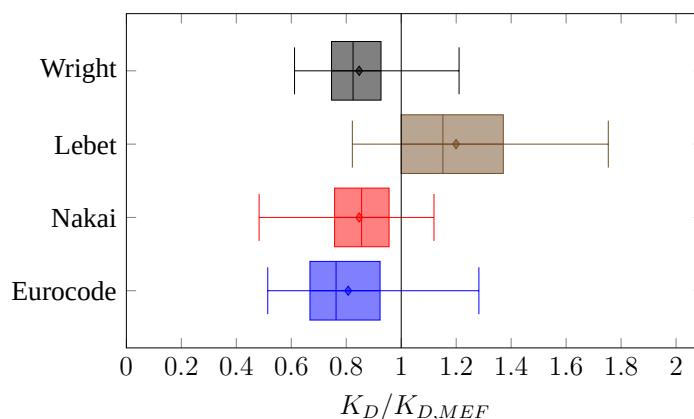


FIGURA 4.46 Ratio comparativo de rigidez en marcos

Al valorar las distintas opciones, es importante tener en cuenta que sobrevalorar la rigidez puede resultar en reacciones mayores en los diafragmas y tensiones por distorsión menores. Esto conduce a diafragmas más seguros, pero el diseño quedaría del lado de la inseguridad a nivel de tensiones. Por lo tanto, esta opción no resulta conveniente, y la rigidez propuesta por Lebet queda descartada.

Por el contrario, resulta más interesante emplear diafragmas más flexibles con el objetivo de que las tensiones por distorsión queden del lado de la seguridad. Esto también implica que los diafragmas recibirán una reacción ligeramente menor, pero aplicando hipótesis suficientemente conservadoras al diseño, se puede compensar dicha diferencia y lograr unos esfuerzos de dimensionamiento similares. Concretamente, el hecho de haber representado los diafragmas por el contorno de la sección ya implica que los momentos sean mayores a los reales, y por lo tanto el problema de la reacción ligeramente menor quede compensado. Además, en el apartado 4.7.4.3 se establecerán otras hipótesis conservadoras.

Entre las distintas propuestas, se considera que la más apropiada para el cálculo de la rigidez es la propuesta por Nakai, cuya flexibilidad es, en la mayoría de los casos, menor a la calculada en el modelo de elementos finitos. Según esta propuesta, el ancho tributario es el mínimo entre un tercio del canto y la distancia entre diafragmas. Esta propuesta, junto con la de Wright, es la que aporta resultados más precisos, pero su aplicación es mucho más simple.

4.7.4 Cálculo de esfuerzos debidos a la distorsión

4.7.4.1 Cálculo matricial de esfuerzos

Al igual que sucedía en los diafragmas en celosía, los esfuerzos en las vigas se pueden obtener aplicando el cálculo matricial de estructuras.

Los esfuerzos en las vigas resultantes son el esfuerzo axial (N_v), el esfuerzo flector (M_v) y el esfuerzo cortante (V_v). Estos esfuerzos se pueden obtener de manera unitaria a partir de los desplazamientos en los extremos de la viga ($\overline{U_{D,ij}}$) aplicando la siguiente fórmula:

$$\begin{pmatrix} N_{v,0} \\ -V_{v,0} \\ M_{v,0} \\ -N_{v,0} \\ V_{v,0} \\ M_{v,0} \end{pmatrix} = \frac{\overline{T_v^T} \cdot \overline{K_v} \cdot \overline{U_{D,ij}}}{K_D} \quad (4.70)$$

Donde se ha empleado la notación definida en el apartado 4.7.3.1

Para obtener los movimientos en los extremos de la viga que se emplean en la ecuación anterior es necesario inferir las rotaciones en los extremos a partir de los movimientos horizontales y verticales. Esto se realiza empleando la metodología de condensación estática, que se resume en la siguiente fórmula:

$$\overline{U_{D,\theta}} = -\overline{K_{4x4}^{-1}} \cdot \overline{K_{4x8}} \cdot \overline{U_D} \quad (4.71)$$

De entre todos los esfuerzos calculados, los que se van a emplear para dimensionar los marcos son los momentos flectores $\overline{M_v}$ en los extremos del alma principalmente. Dichos esfuerzos se obtienen a partir de los momentos unitarios en los extremos como:

$$\overline{M_v} = \overline{M_{v,0}} \cdot R_D = \overline{M_{v,0}} \cdot \frac{2 \cdot M_T}{b_s} \quad (4.72)$$

4.7.4.2 Cálculo aproximado de esfuerzos

Si se emplea una sección simplificada, los momentos en el vértice superior ($M_{d,t}$) e inferior ($M_{d,b}$) se pueden obtener, tal y como describe Schlaich [17], a partir de las

siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} M_{v,t} &= M_T \cdot \frac{b_b \cdot h \cdot \beta}{4 \cdot A_c} \cdot \frac{1 + \beta \cdot (2 + r_b)}{2 + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \beta^2 + r_t + r_b \cdot \beta^2} \\ M_{v,b} &= M_T \cdot \frac{b_b \cdot h \cdot \beta}{4 \cdot A_c} \cdot \frac{2 + \beta + r_t}{2 + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \beta^2 + r_t + r_b \cdot \beta^2} \end{aligned} \quad (4.73)$$

4.7.4.3 Cálculo comparativo

En este apartado se compararán los momentos calculados mediante el método matricial, que son análogos a los calculados empleando el método aproximado para una sección simplificada, y los momentos obtenidos en el modelo de elementos finitos. Dado que el modelo de elementos finitos está compuesto por láminas, se han integrado las tensiones para todo el ancho del modelo.

Al igual que sucedió con la rigidez, se representará la comparativa de momentos empleando un diagrama de barras y bigotes, ya que una vez más hay 80 resultados.

En primer lugar se muestran los momentos en el nodo superior en la figura 4.47 y los momentos en el nodo inferior en la figura 4.48.

Los resultados muestran como los momentos en el nodo superior quedan del lado de la inseguridad, mientras que los resultados en el nodo inferior se pueden considerar conservadores. Por lo tanto, se propone el momento más desfavorable calculado en ambos nodos para diseñar el marco por distorsión. Como se muestra en la figura 4.49, esto permite un diseño del lado de la seguridad. Además, dicha seguridad permite compensar la reducción en la reacción que se produce debido a la mayor flexibilidad del marco.

El nivel de seguridad anteriormente explicado se da en todos los casos, por lo que el criterio de Nakai de considerar un tercio del canto sigue siendo válido a efectos de cálculo de esfuerzos.

4.7.5 Criterios de dimensionamiento

El dimensionamiento de los marcos abiertos y cerrados se recoge habitualmente en las normativas. Por ejemplo, el Eurocódigo 1993-1-5 [31] en su capítulo 9 explica los criterios de dimensionamiento de rigidizadores transversales, e incluye las cargas para su dimensionamiento por resistencia, que deberían considerarse en conjunto con los esfuerzos de distorsión. En el apartado 6.6.3 se discute la concomitancia de ambos esfuerzos.

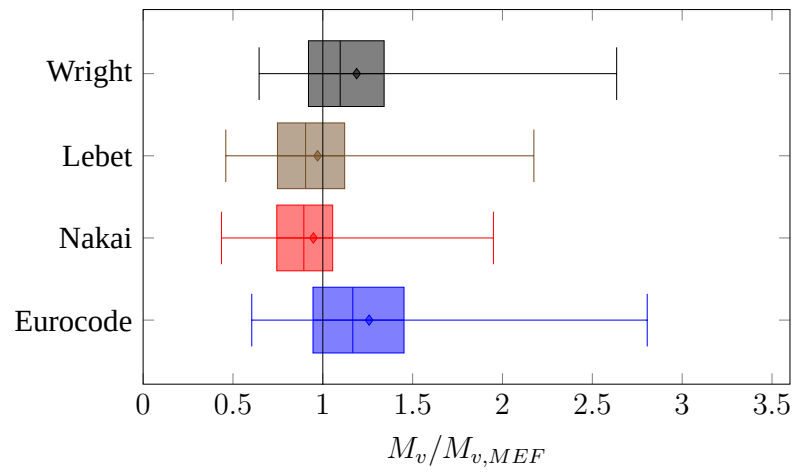


FIGURA 4.47 Ratio comparativo de momentos en el nodo superior

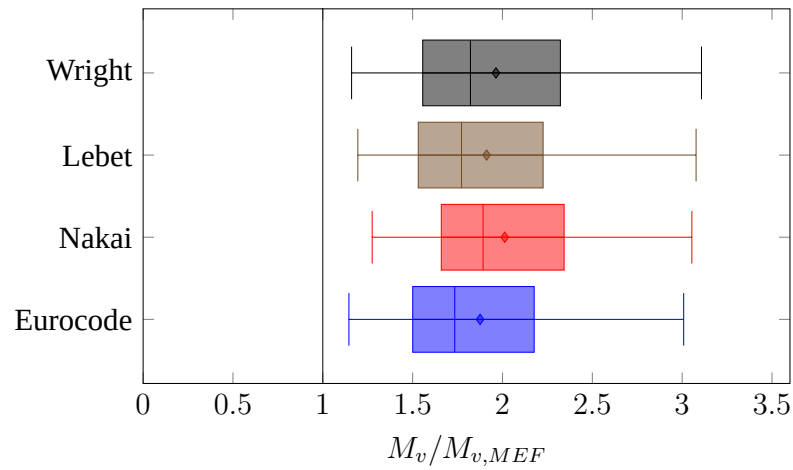


FIGURA 4.48 Ratio comparativo de momentos en el nodo inferior

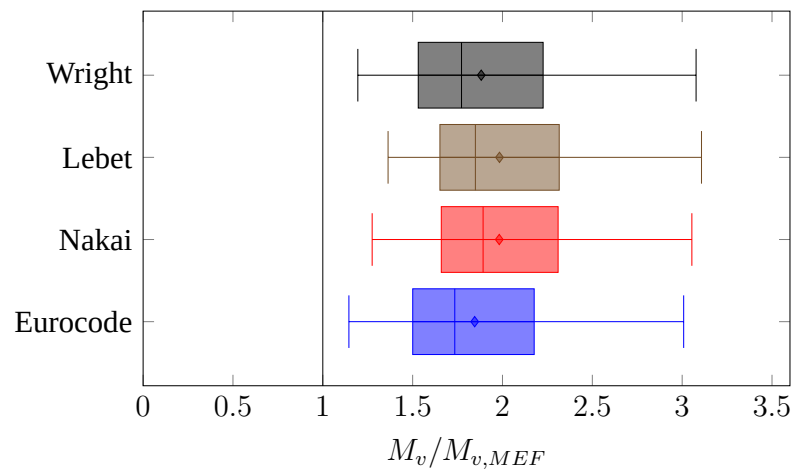


FIGURA 4.49 Ratio comparativo de envolvente de momentos en nodos

CAPÍTULO 5

Aplicación del elemento finito

5.1 Introducción

Una vez establecidas las bases teóricas del elemento finito desarrollado, el objetivo de este capítulo es demostrar la validez de dicho elemento mediante ejemplos de verificación. Para ello, se desarrollarán tres ejemplos que van desde una viga recta y biapoyada, hasta un puente de tres vanos curvo en planta. En cada uno de los ejemplos, se comparará la teoría clásica, el elemento finito propuesto y un modelo de láminas 3D.

El primer ejemplo consiste en un puente recto de sección constante de 50 m de luz, 4 m de ancho, 2 m de canto y 2 m de ancho de cajón. Este ejemplo es de carácter académico y tiene como objetivo mostrar el grado de ajuste entre la teoría de vigas y los modelos de láminas, identificando aquellos fenómenos locales que afectan a la comparativa final y que no son capturados por la teoría de vigas. Tal es el caso por ejemplo de sobretensiones en las esquinas de los diafragmas o los puntos exactos de introducción de las cargas.

El segundo ejemplo es idéntico al anterior, pero con una curvatura en planta de 100 m. Con este ejemplo se pretende demostrar la validez del elemento finito propuesto en una aplicación a un puente curvo teórico. Además, se hará uso del primer ejemplo para discernir entre fenómenos locales y globales durante la comparativa de resultados.

El tercer y último ejemplo implica avanzar un paso más en la aplicación del elemento finito, modelizando un puente con una geometría más realista, aunque de sección constante. En concreto, se ha modelizado un puente de 3 vanos 40+50+40 m con un radio en planta de 100 m. El ancho del tablero es de 10 m y el cajón es de tipo trapezoidal con 2 m de canto y un ancho que varía entre los 5 m en la losa y los 3 m en el ala inferior. Además, se ha incluido la sección de las platabandas superiores, y se ha supuesto que el cajón metálico está cerrado mediante un espesor equivalente.

No obstante, en primer lugar se explicará la metodología empleada en todos los casos.

5.2 Metodología

5.2.1 Introducción

Se ha llevado a cabo un proceso de verificación comparando tres tipos de cálculos: el cálculo según el elemento finito propuesto, el cálculo según la teoría clásica y el cálculo empleando un modelo de láminas de elementos finitos. El primero de los cálculos se ha explicado extensamente en los dos capítulos anteriores, por lo que el objeto de este apartado es explicar la metodología asociada a los otros tipos de cálculo realizados. En el caso de la teoría clásica, se explicarán las hipótesis realizadas, mientras que en el caso del cálculo de láminas se explicará cómo se ha pasado de resultados en las láminas a resultados en el eje de la viga.

Asimismo, se explicarán las propiedades materiales en este apartado, ya que serán comunes a todos los ejemplos de verificación.

5.2.2 Teoría clásica

El objetivo del cálculo utilizando la teoría clásica es emular el cálculo que se realiza habitualmente en una oficina de proyectos al trabajar con un puente mixto de sección cajón. Es decir, por una parte se calcularán los esfuerzos y movimientos empleando un modelo de elementos tipo viga comerciales de seis grados de libertad, también conocido como cálculo global, y por otro lado se calculará la distorsión como un cálculo de viga sobre lecho elástico.

Para el cálculo global se empleará el software Sofistik. Aunque este software permite tener en cuenta un séptimo grado de libertad que captura la torsión alabeada, en este caso se ha limitado el cálculo a seis grados de libertad, ya que es lo más frecuente en los software comerciales. Además, se ha observado que considerar la torsión alabeada puede conducir a diferencias mayores en el cálculo de tensiones. En la figura 5.1 se muestra un ejemplo de uno de los modelos realizados.

Los resultados del cálculo global en cuanto a movimientos son los desplazamientos y giros en las tres direcciones cartesianas. Los esfuerzos que se obtienen de este tipo de cálculo son los axiles, flectores, cortantes y torsores. Nótese que al no considerar el séptimo grado de libertad no se va a considerar el bimomento torsor.

Una vez obtenidos los resultados del cálculo global, se procede a realizar el cálculo de distorsión. Para ello, se emplea la analogía de la viga sobre lecho elástica según lo ex-

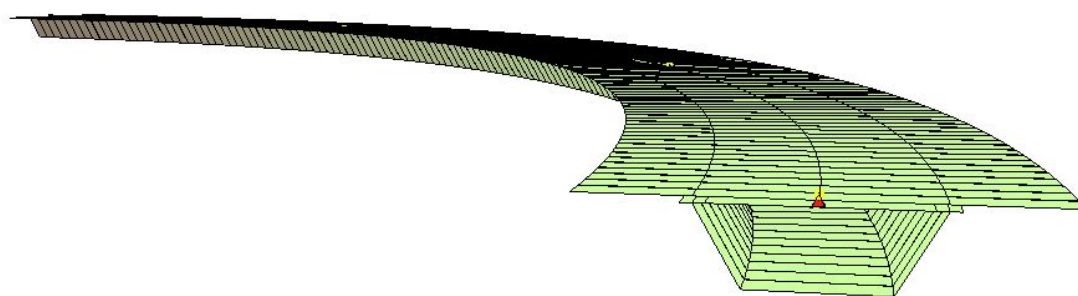


FIGURA 5.1 Modelo de contraste de elementos finitos tipo viga

puesto en el apéndice B.

Para resolver la viga sobre lecho elástico, se utilizará nuevamente el software Sofistik. Los parámetros se han calculado empleando una hoja de cálculo y la formulación de movimiento vertical unitario en el vértice superior. Además, en dicho modelo se han introducido los diafragmas de manera discreta como apoyos elásticos. En la figura 5.2 se muestra un ejemplo del modelo de cálculo y un caso de carga.

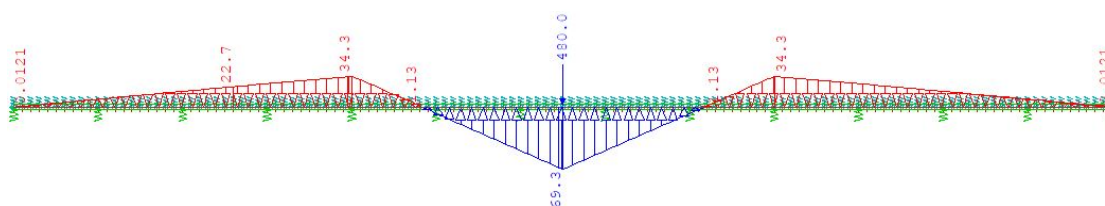


FIGURA 5.2 Modelo de viga sobre lecho elástico

Como último paso, para obtener las tensiones en los vértices se han sumado las tensiones debidas a la distorsión a las tensiones debidas al cálculo global.

5.2.3 Modelo de láminas

Los modelos de láminas suelen capturar el comportamiento de las estructuras con una mayor precisión que los modelos de elementos tipo viga. Sin embargo, presentan el inconveniente de que la interpretación de los resultados es más laboriosa, ya que los resultados se dan en cada uno de los nodos de las láminas y no en el eje de la viga. Por lo tanto, es necesario transformar los resultados de las láminas en resultados en la viga para poder comparar los tres tipos de cálculos.

La transformación desde cálculo de vigas a cálculo de láminas se va a realizar empleando dos técnicas: regresión e integración.

Ambas técnicas parten de los resultados del modelo de cálculo que, en este caso, van a ser movimientos y tensiones en los nodos. El modelo de láminas se ha creado de forma que los nodos principales están dispuestos en las mismas posiciones que los nodos de la sección en el elemento finito y las paredes se han discretizado empleando el mismo número de elementos. Es decir, en el modelo de láminas se han representado los n nodos que componen una sección incluyendo los nodos en los que se subdivide cada pared. Para el ejemplo de la sección más simple (Ejemplos 1 y 2), cada sección se ha representado empleando 48 nodos, y esas secciones se han representado con un espaciamiento de 1 m. Además, la malla principal se ha subdividido para mayor precisión. La figura 5.3 muestra una imagen de uno de los modelos de elementos finitos tipo lámina.

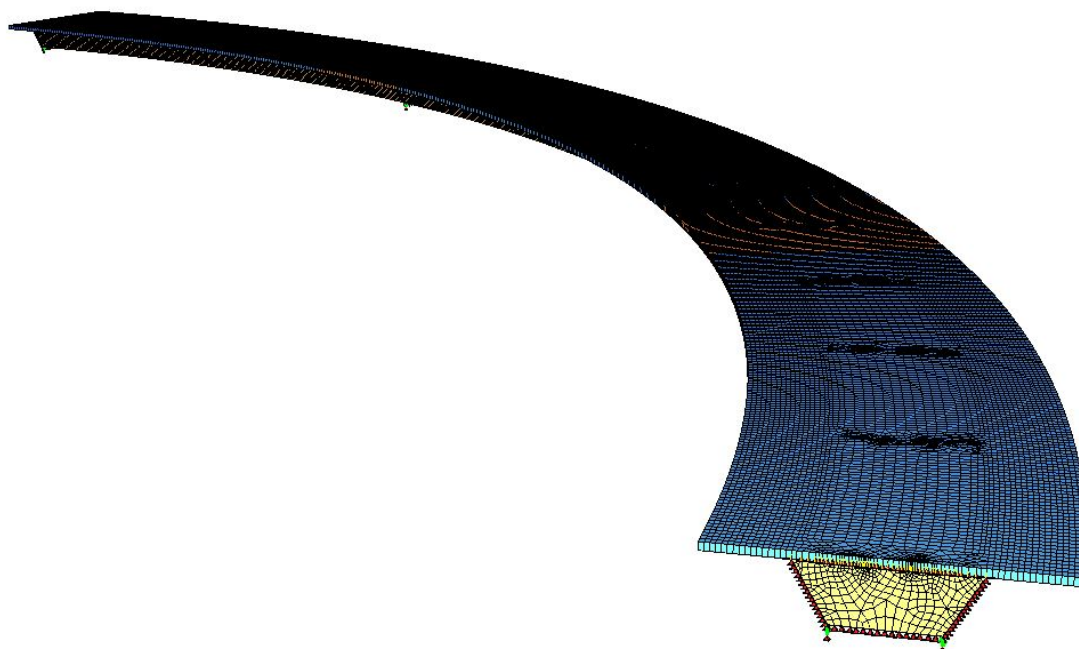


FIGURA 5.3 Modelo elementos finitos tipo lámina

Uno de los problemas de los modelos de láminas es su procesado. En este caso se ha empleado la metodología que se describe a continuación.

Para obtener los movimientos en el eje de la viga se empleará la técnica de regresión, y más concretamente, el método de los mínimos cuadrados. Este método se basa en establecer una relación entre los movimientos en los nodos del modelo de láminas ($\bar{v}_i$) y los movimientos en el eje de la viga ($\bar{\xi}_j$) a través de una matriz que contiene los movimientos unitarios ($\bar{u}_{i,j}$), a la que se le suma un error ($\bar{\epsilon}$).

$$(\bar{v}) = [\bar{u}] \cdot (\bar{\xi}) + (\bar{\epsilon}) \quad (5.1)$$

Descomponiendo por direcciones la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} \overline{v_{x,i}} \\ \overline{v_{y,i}} \\ \overline{v_{z,i}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{u_{sx,j,i}} & 0 \\ \overline{u_{sy,j,i}} & 0 \\ 0 & \overline{w_{j,i}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\xi_j} \\ \overline{\zeta_j} \end{pmatrix} + (\overline{\epsilon}) \quad (5.2)$$

Donde se ha empleado la misma terminología que en la ecuación 3.20.

Al utilizar el método de los mínimos cuadrados, se obtienen los movimientos en el eje de la viga del siguiente modo:

$$(\overline{\xi}) = [\overline{u}]^t \cdot [\overline{u}]^{-1} \cdot [\overline{u}]^t \cdot (\overline{v}) \quad (5.3)$$

El método de los mínimos cuadrados también se ha utilizado para obtener las resultantes de cálculo tensional que se definieron en el apartado 3.5.3. Concretamente, la ecuación 3.102 se puede reescribir de forma vectorial como:

$$\sigma_z = \overline{S} \cdot \overline{R}^T \quad (5.4)$$

Donde $\overline{R}^T$ son las resultantes cálculo tensional y $\overline{S}$ los módulos elásticos de cada resultante.

Empleando la nomenclatura anterior se pueden expresar la relación entre las tensiones en el modelo de láminas y las resultantes de tensiones como:

$$(\overline{\sigma_z}) = [\overline{S}] \cdot (\overline{R}^T) + (\overline{\epsilon}) \quad (5.5)$$

Y de manera análoga a la ecuación 5.3, se pueden obtener las resultantes de tensiones:

$$(\overline{R}^T) = [\overline{S}]^t \cdot [\overline{S}]^{-1} \cdot [\overline{S}]^t \cdot (\overline{\sigma_z}) \quad (5.6)$$

No obstante, lo anterior no aplica cuando se quieren obtener las resultantes totales ($\overline{R}$), ya que estas se definieron en las ecuaciones 3.90 como las integrales de las tensiones longitudinales (σ_z) multiplicadas por el alabeo (w_i) correspondiente. En estos casos, se ha realizado una integración numérica mediante la regla del trapecio. Esta regla permite expresar la integral de tensiones de un determinado esfuerzo (R_j) como la suma de las tensiones longitudinales en cada nodo ($\sigma_{z,i}$) multiplicada por el alabeo (w_i) y por una determinada área tributaria. El área tributaria se define como el área del panel ($L_p \cdot t$) multiplicado por una función de peso (W_i) que depende del nodo. En este caso, la fun-

ción de peso adopta un valor de $1/n_e$ en los nodos interiores y la mitad de este en los extremos, siendo n_e el número de elementos en los que se subdivide el panel. La suma anterior se realiza para todos nodos (i) de cada panel (p).

Lo explicado anteriormente se puede expresar matemáticamente como:

$$R_j = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_n} \sigma_{z,i} \cdot w_{j,i} \cdot t_p \cdot L_p \cdot W_i \quad (5.7)$$

Por último, cabe indicar que la sobretensión por distorsión se va a definir como la mitad de la diferencia de la tensión entre la tensión dos nodos. Es decir:

$$\Delta\sigma_d = \frac{\sigma_{z,j} - \sigma_{z,i}}{2} \quad (5.8)$$

En el caso del ala inferior, por ejemplo, los nodos se corresponderán con los extremos del panel que materializa el ala inferior.

Es importante señalar que, aunque se denomine sobretensión por distorsión, el término $\Delta\sigma_d$ no incluye únicamente la distorsión, sino que engloba todos los efectos que ocasionan diferencias de tensión entre los nodos considerados.

5.2.4 Materiales

Las propiedades de los materiales necesarias para el cálculo son el módulo de elasticidad longitudinal (E), el módulo de elasticidad transversal (G), y el módulo de elasticidad transversal (E_s). Concretamente, las propiedades de los tres materiales considerados son:

Material	E [MPa]	G [MPa]	E_s [MPa]
Hormigón	30.000	12.500	31.250
Acero	210.000	85.000	222.250
Conexiones	0.1	1e8	1e8

TABLA 5.1 Propiedades elásticas de los materiales

Como material de referencia para la homogeneización de las propiedades se va a considerar el acero, cuyas propiedades elásticas son:

- $E_0 = 210.000$ MPa
- $G_0 = 85.000$ MPa
- $E_{s0} = 222.250$ MPa

5.3 Ejemplo de verificación 1

5.3.1 Descripción de la estructura

El primer ejemplo consiste en un puente biapoyado de 50 m de luz. Su alineación en planta es recta y dispone de diafragmas cada 10 m, tal y como se muestra en la siguiente figura:

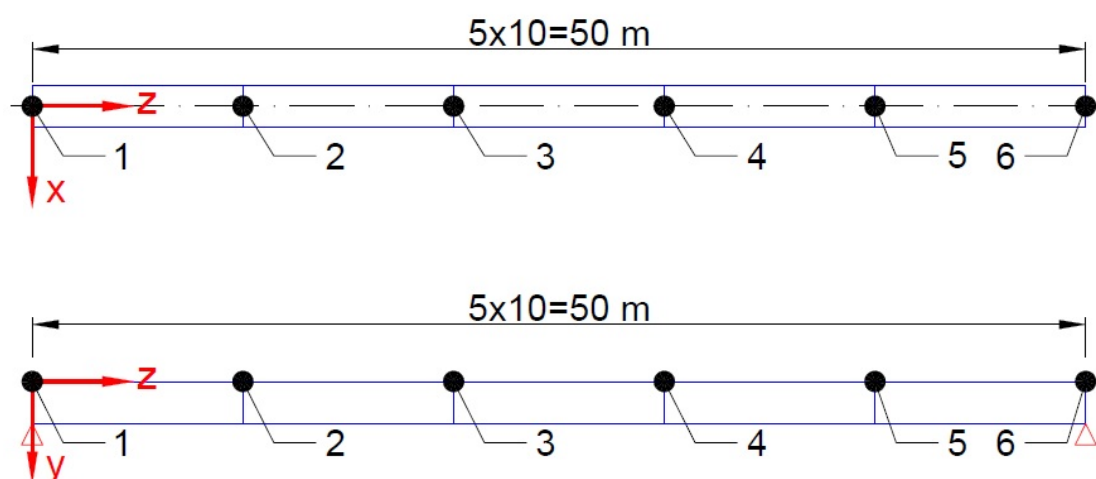


FIGURA 5.4 Ejemplo de verificación 1: Planta y Alzado

La sección es un cajón mixto compuesto por 6 paneles y 6 nodos. La losa superior tiene un ancho de 4 m y un espesor de 250 mm. Esta losa superior se divide a su vez en 3 paneles: dos correspondientes a los voladizos de 1 m a cada lado, y otro correspondiente al ancho del cajón de 2 m. El ala inferior también mide 2 m y tiene un espesor de 30 mm. Las almas tienen un espesor de 20 mm y su altura es tal que el canto total de la sección, incluyendo los espesores de la losa superior y tabla inferior, es 2 m. Es importante mencionar que cada uno de los paneles anteriores se ha dividido en 8 subpaneles.

En la figura 5.5 se puede observar un esquema de la sección, donde además se ha indicado la numeración de los nodos y los paneles.

Por último, se han supuesto diafragmas de alma llena de 2 mm en los diafragmas interiores y 20 mm en los diafragmas de apoyos (infinitamente rígidos en el modelo de láminas). Para el resto de tipologías de diafragmas, estos se han definido con rigidez axial única en todas las barras, de modo que la rigidez total del diafragma calculada con la sección simplificada, y que es 2530 MN/m, sea idéntica a la del diafragma de 2 mm. Para alcanzar dicha rigidez el área considerada ha sido 22.17 cm² en el diafragma en Cruz de San Andrés, 45.34 cm² en el diafragma en K y 40.99 cm² en el diafragma en V.

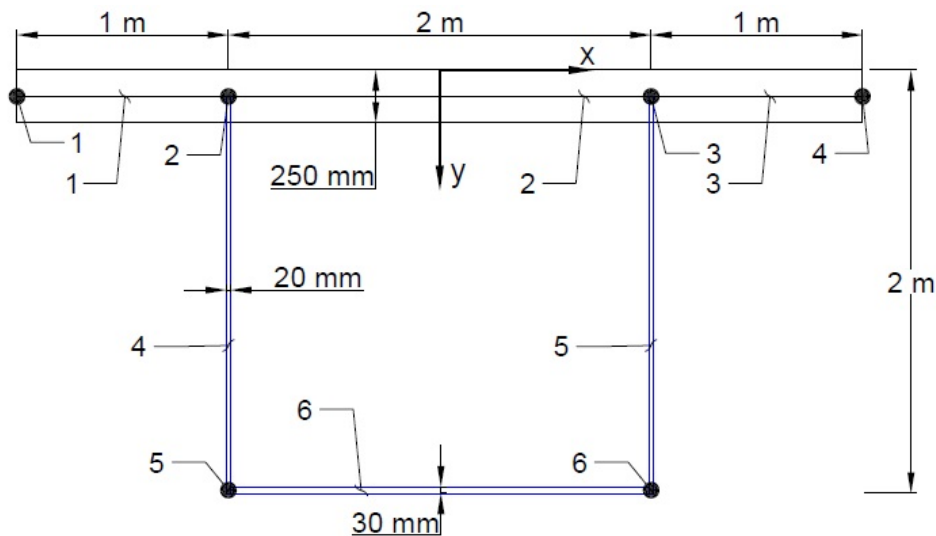


FIGURA 5.5 Ejemplo de verificación 1: Sección

5.3.2 Propiedades de la sección

El cálculo de propiedades de la sección objeto de estudio, así como la discretización empleada y otros parámetros necesarios, se encuentran extensamente detallados en el apéndice D. En este apartado, se resumen las principales propiedades empleadas en el elemento finito para la viga recta.

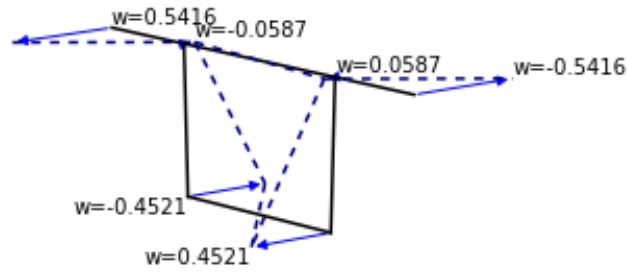
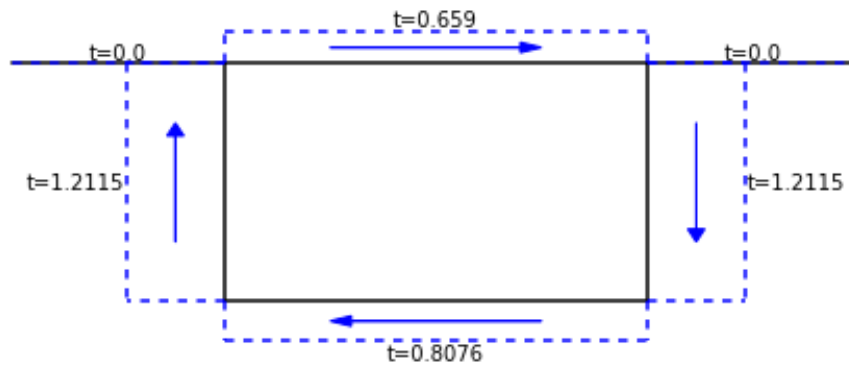
PROPIEDADES DE VIGA RECTA

Flexocompresión

- $A = 0.277 \text{ m}^2$
- $x_g = 0.000 \text{ m}$
- $y_g = 0.777 \text{ m}$
- $I_x = 0.176 \text{ m}^4$
- $I_y = 0.285 \text{ m}^4$
- $I_{xy} = 0.000 \text{ m}^4$

Torsión

- $x_t = 0.0000 \text{ m}$
- $x_t = -0.0518 \text{ m}$
- $J_t = 0.1834 \text{ m}^4$
- $I_t = 0.0173 \text{ m}^6$

FIGURA 5.6 Ej1: Alabeo w_t FIGURA 5.7 Ej1: Deformación angular t_t

Distorsión

- $I_d = 0.1162 \text{ m}^6$
- $K_d = 2.98 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
- $J_d = 0.0031 \text{ m}^4$
- $I_{td} = 0.038 \text{ m}^6$
- $J_{td} = 0.0031 \text{ m}^4$
- $K_{D,P} = 2528 \text{ MN/m}$
- $K_{D,X} = 2528 \text{ MN/m}$
- $K_{D,K} = 2527 \text{ MN/m}$
- $K_{D,V} = 2527 \text{ MN/m}$

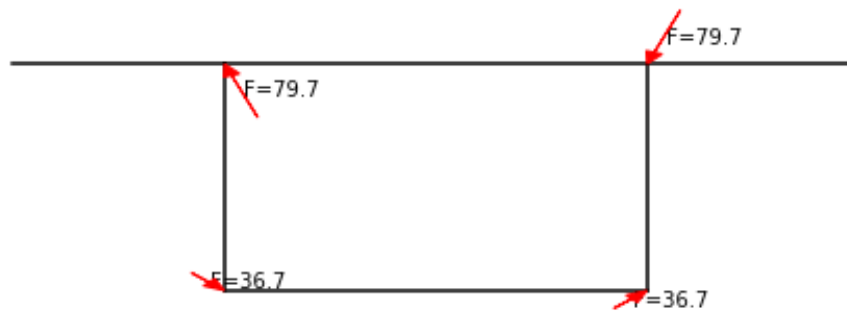


FIGURA 5.8 Ej1: Estado de fuerzas autoequilibrado

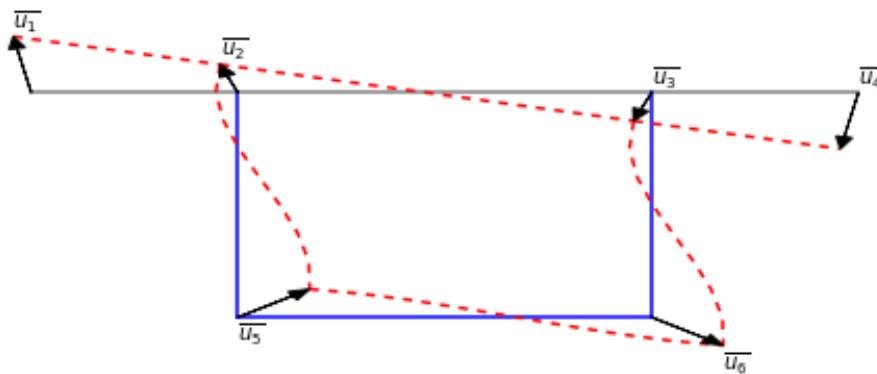
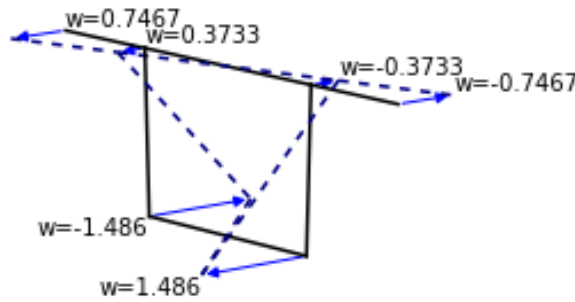


FIGURA 5.9 Ej1: Movimientos de distorsión u_d

Nodo	u_{dx}	u_{dy}	$u_{d\theta}$
1	-0.3733	-1.9929	0.9929
2	-0.3733	-1	0.9929
3	-0.3733	1	0.9929
4	-0.3733	1.9929	0.9929
5	1.486	-0.9993	0.4746
6	1.486	0.9993	0.4746

TABLA 5.2 Ej1: Movimientos de distorsión u_d

FIGURA 5.10 Ej1: Alabeo w_d

En cuanto a la teoría clásica, las propiedades de flexocompresión son idénticas, así como el módulo de torsión. Solamente existen pequeñas diferencias en las propiedades de distorsión, que se enumeran a continuación:

- $w_1 = -w_4 = 0.7469 \text{ m}^2$
- $I_d = 0.1153 \text{ m}^6$
- $w_2 = -w_3 = 0.3735 \text{ m}^2$
- $K_d = 2.98 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$
- $w_5 = -w_6 = -1.4865 \text{ m}^2$
- $K_D = 2530 \text{ MN/m}$

5.3.3 Acciones

En los ejemplos de verificación 1 y 2 se han comprobado 4 casos de carga:

- LC 1: Carga simétrica distribuida de 10 kN/m introducida como dos cuchillos de carga de 5 kN/m en el vértice superior de cada alma.
- LC 2: Carga antimétrica distribuida de 10 kN/m introducida como dos cuchillos de carga de 5 kN/m en el vértice superior de cada alma pero con direcciones opuestas. El torsor resultante aplicado es 10 kN.m/m y tiene signo positivo.
- LC 3: Carga simétrica puntual de 100 kN introducida como dos cargas puntuales de valor 50 kN en el vértice superior de cada alma en centro de luz.
- LC 4: Carga antimétrica puntual de 100 kN introducida como dos cargas puntuales de valor 50 kN en el vértice superior de cada alma en centro de luz, pero con direcciones opuestas. El torsor resultante aplicado es 100 kN.m y tiene signo positivo.

5.3.4 Estudio de convergencia

Se ha realizado un estudio de convergencia con el fin de determinar el número de elementos necesarios. Para ello, se ha estudiado la evolución de la tensión en centro de luz en el vértice inferior debido a una carga puntual distorsora (LC 4). A continuación se presentan los resultados que comparan el número de elementos entre diafragmas y la tensión:

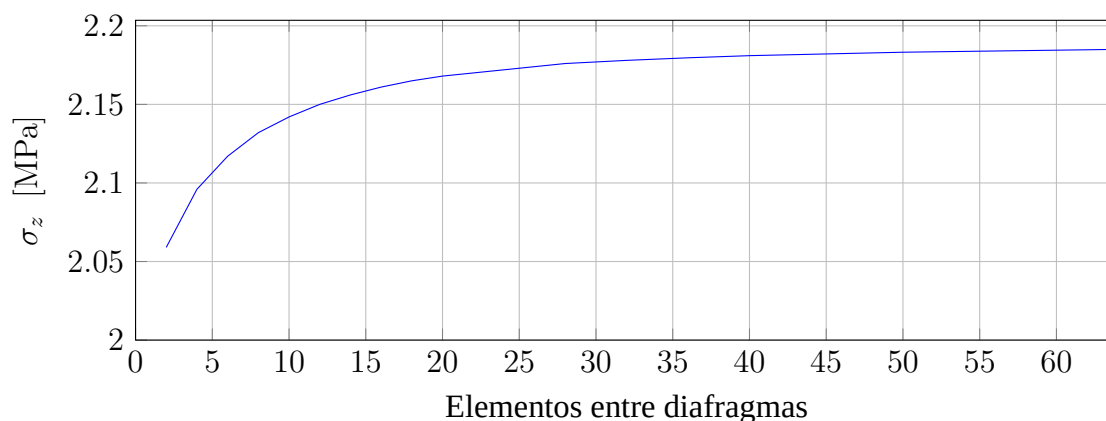


FIGURA 5.11 Ej1: Estudio de convergencia

Observando la gráfica anterior, se ha determinado que se considerarán 32 elementos entre diafragmas, ya que los resultados prácticamente se estabilizan en ese punto.

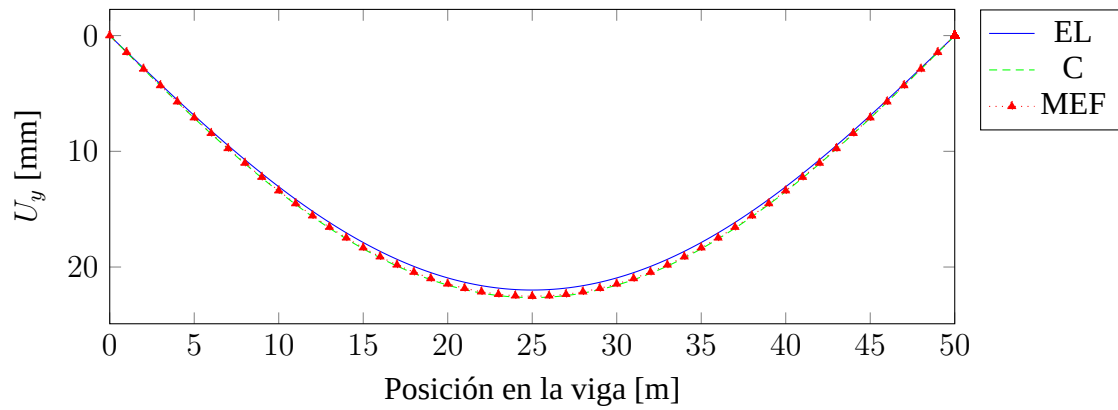
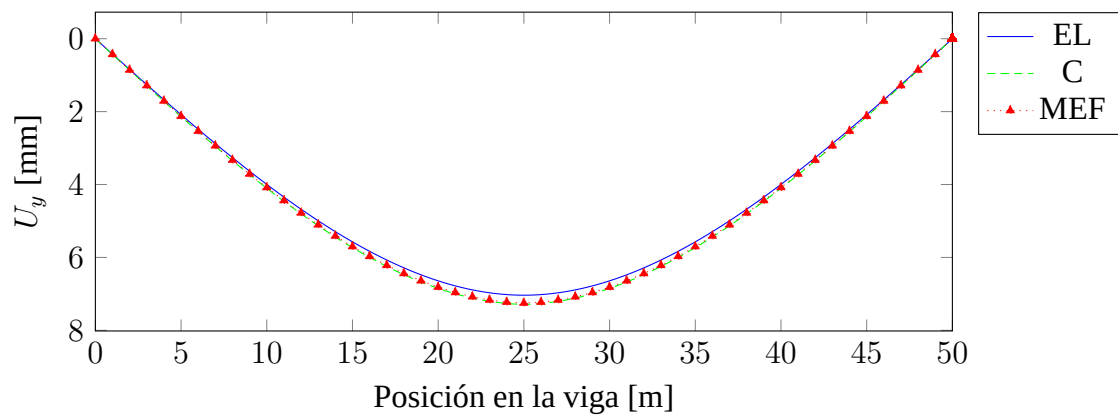
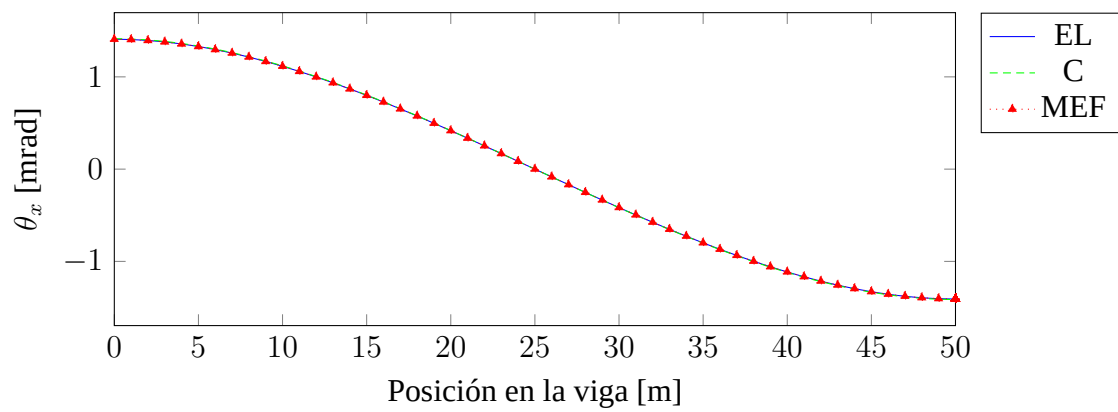
5.3.5 Movimientos

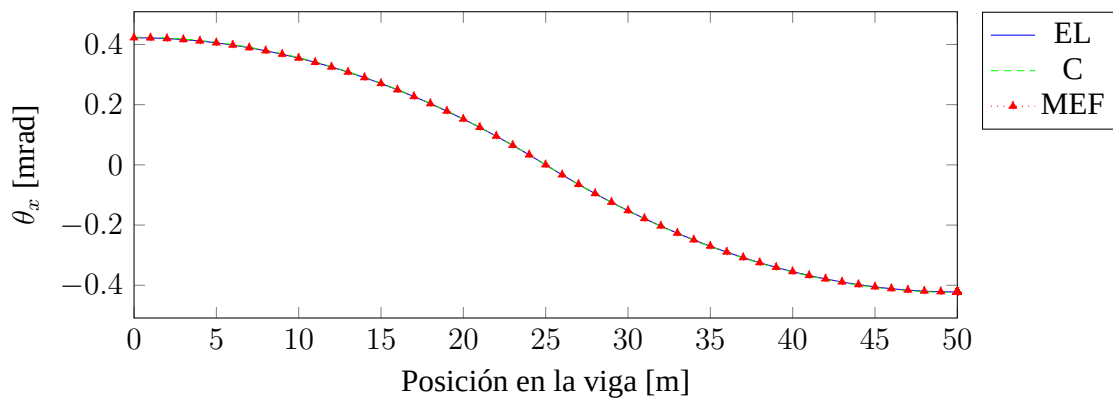
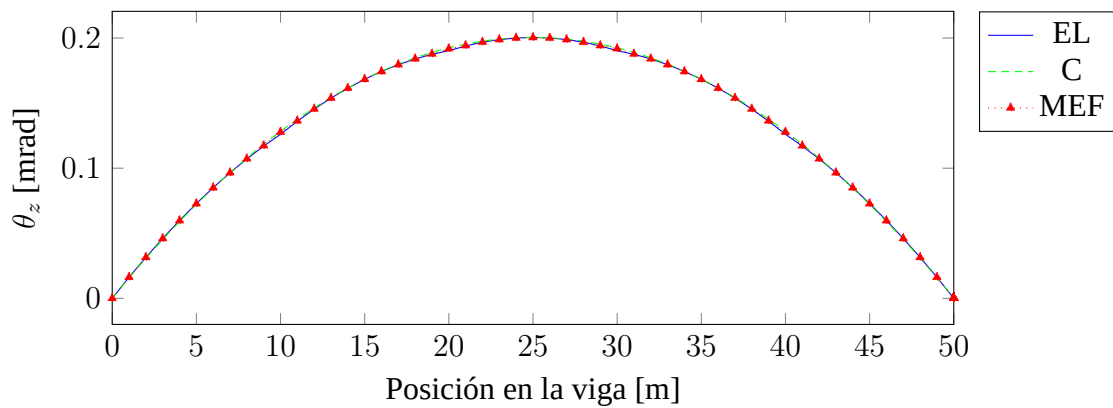
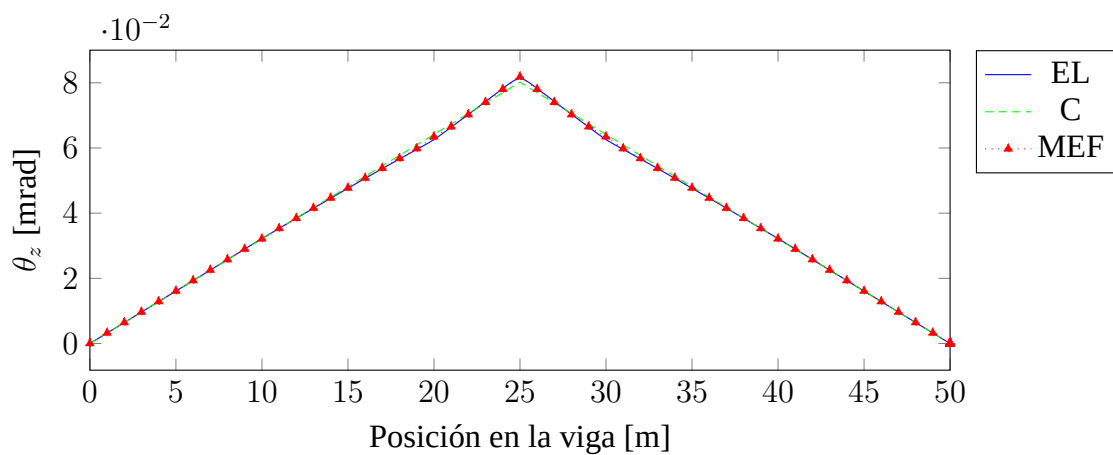
En este apartado se compararán los movimientos principales obtenidos en el eje de las vigas.

En primer lugar se comparará, en los casos de carga simétricos (1 y 3), la flecha vertical (U_y). Los resultados se muestran en las figuras 5.12 y 5.13.

Se observa que, en ambos casos, el ajuste del cálculo según la teoría clásica es más preciso que el del elemento finito propuesto. Esto se debe a que dicha teoría incorpora la deformación por cortante, mientras que en el elemento finito se trata de una mejora a implementar en el futuro.

Lo anterior se puede corroborar observando los giros perpendiculares al eje en las figuras 5.14 y 5.15 ya que con prácticamente coincidentes en los tres cálculos. No obstante, esta diferencia debida a la deformación por cortante no influye de manera relevante en el cálculo de distorsión ya que en el caso de la viga recta los movimientos se encuentran desacoplados.

FIGURA 5.12 Ej1: LC 1: Movimiento vertical U_y FIGURA 5.13 Ej1: LC 3: Movimiento vertical U_y FIGURA 5.14 Ej1: LC 1: Giro θ_x

FIGURA 5.15 Ej1: LC 3: Giro θ_x FIGURA 5.16 Ej1: LC 2: Giro θ_z FIGURA 5.17 Ej1: LC 4: Giro θ_z

En cuanto a los giros debidos a la torsión, también se observa que el ajuste entre los tres cálculos es muy bueno, como se muestra en las figuras 5.16 y 5.17.

La coincidencia en la carga distribuida es total, mientras que en el caso de la carga puntual, únicamente la teoría clásica presenta una muy ligera diferencia en el punto de introducción de la carga.

Sin embargo, no sucede lo mismo en los movimientos debidos a distorsión mostrados en las figuras 5.18 y 5.19.

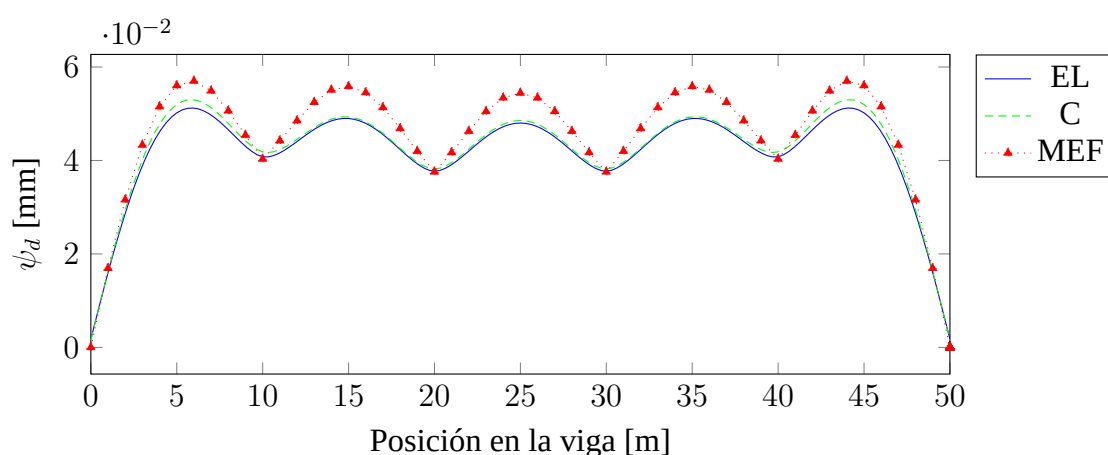


FIGURA 5.18 Ej1: LC 2: Distorsión ψ_d

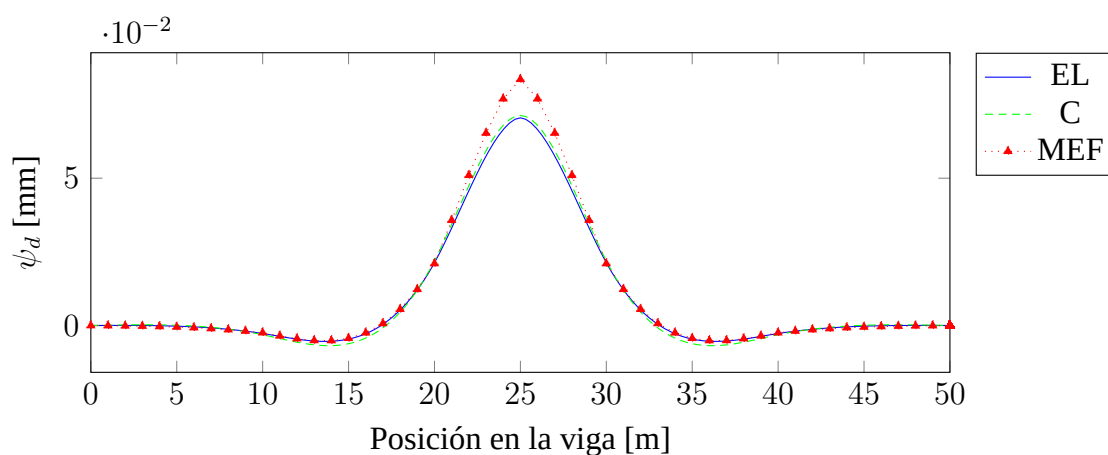


FIGURA 5.19 Ej1: LC 4: Distorsión ψ_d

En este caso, se observa una correlación muy buena en la zona de los diafragmas, mientras que se notan diferencias en la zona donde se introducen las cargas. Estas diferencias se deben principalmente a la deformación local que se produce como efecto de la introducción de la carga, como se puede apreciar en las figuras 5.20 y 5.21, que muestran los movimientos en centro de luz.

En cualquier caso, el ajuste mostrado por el elemento finito es prácticamente idéntico al mostrado por la teoría clásica de la distorsión. Además, como se podrá observar más adelante, a pesar de esta diferencia, el cálculo de esfuerzos y tensional presenta un ajuste muy bueno.

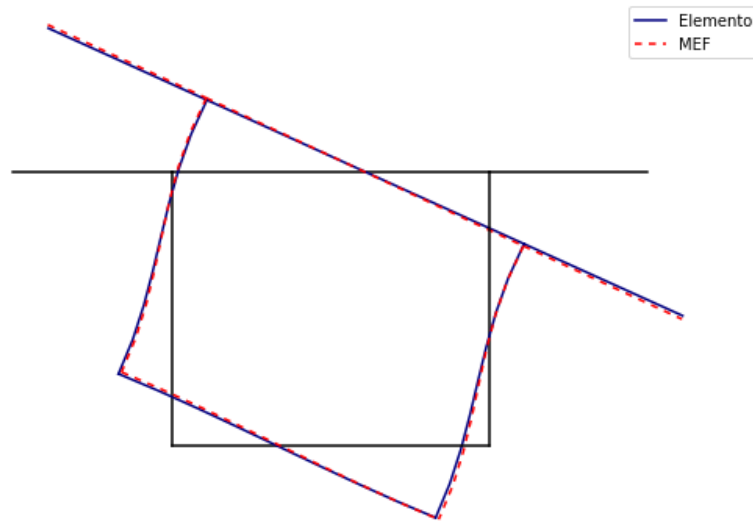


FIGURA 5.20 Ej 1: LC 2: Comparativa de movimientos en centro luz

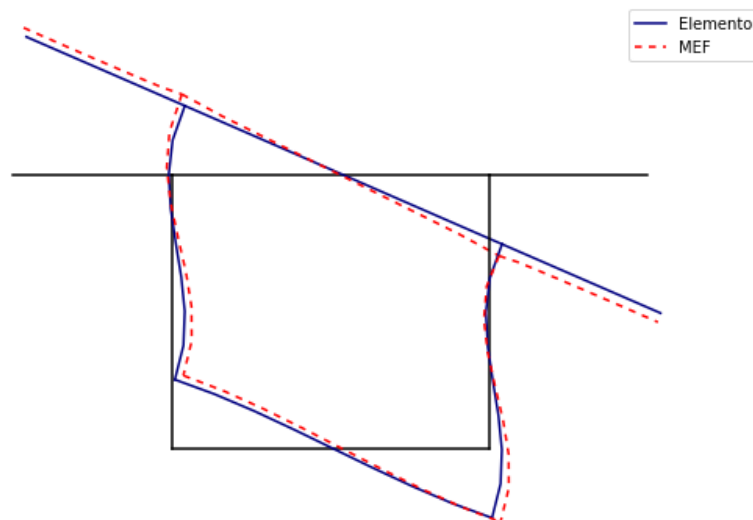


FIGURA 5.21 Ej 1: LC 4: Comparativa de movimientos en centro luz

5.3.6 Esfuerzos

En la definición del elemento finito propuesto se explicó que se obtendrían dos tipos de esfuerzos: las resultantes de cálculo tensional, que se emplean directamente para calcular las tensiones, y las resultantes totales, que son el resultado de integrar las tensiones en la sección. El objetivo de este apartado es comparar ambos tipos de esfuerzos entre los distintos cálculos. Es importante recordar, que en la teoría clásica, se ha supuesto que el bimomento torsor (B_z) es nulo y que los resultados obtenidos con dicha teoría permiten el cálculo directo de tensiones, aunque no se indican con el superíndice T .

En primer lugar, se comparan los momentos flectores longitudinales en las figuras 5.22 y 5.22.

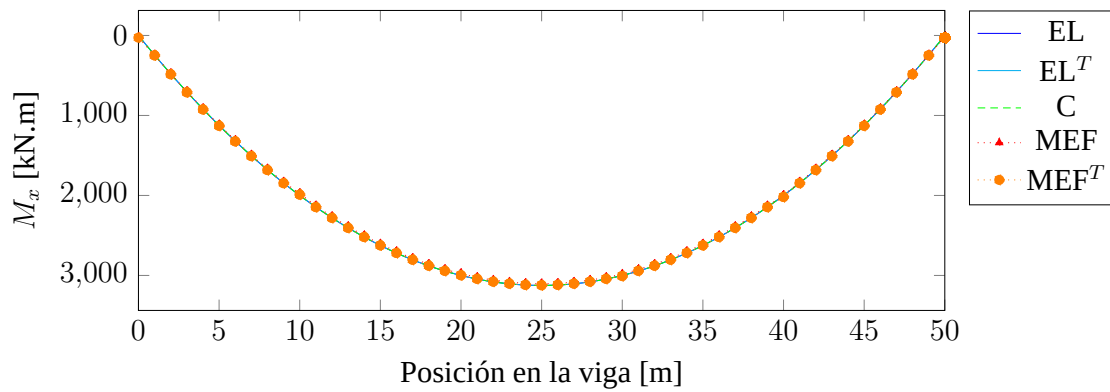
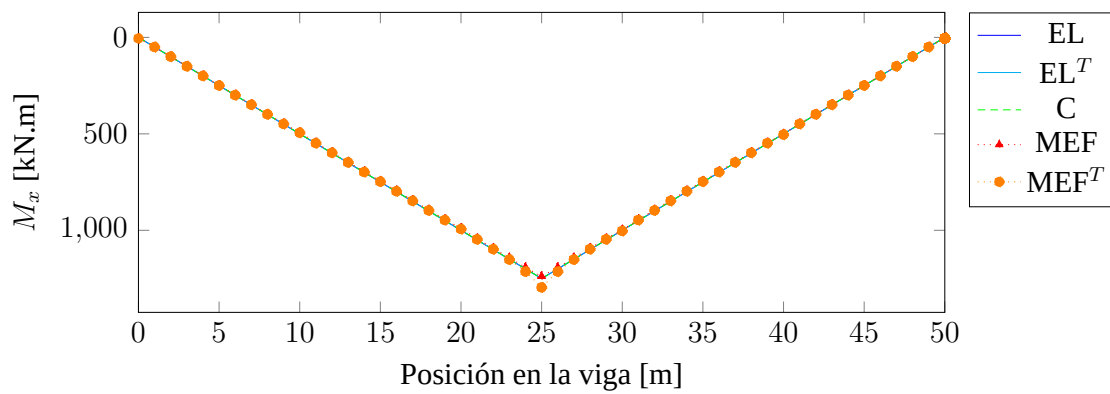
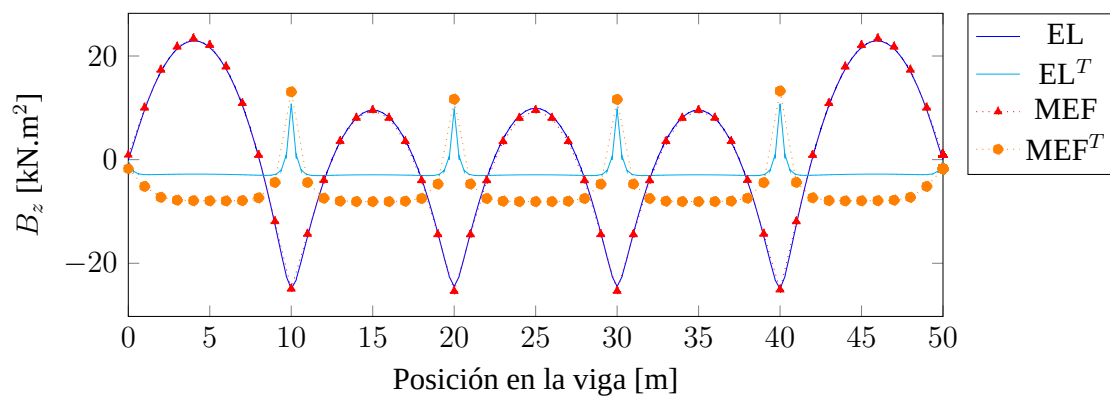
Se puede observar que la coincidencia es perfecta en prácticamente todos los casos, ya se trata de una viga biapoyada isostática. La única excepción es la concentración de tensiones que se produce en el punto de introducción de la carga puntual, lo que hace que el momento flector tensional en el modelo de elementos finitos sea ligeramente mayor, aunque esto no afecta a ninguna de las conclusiones.

En cuanto a las cargas excéntricas, los resultados principales son los bimomentos torsores (B_z) y distorsores (B_d). El primero de los bimomentos para los casos de carga excéntricos se muestra en las figuras 5.24 y 5.25.

Los resultados muestran un ajuste muy bueno entre el elemento propuesto y el modelo de elementos finitos, especialmente en el caso de las resultantes totales. En el caso de las resultantes de tensiones, se observan mayores diferencias, aunque estas probablemente se deban a las alteraciones que se producen en las inmediaciones de los puntos de introducción de las cargas en el modelo de elementos finitos. En cualquier caso, estas diferencias no afectan significativamente como se podrá observar en el apartado de tensiones 5.3.7.

Las conclusiones anteriores son igualmente aplicables a los bimomentos distorsores (B_d) que se muestran en las figuras 5.26 y 5.27.

Los bimomento distorsores sí han podido ser comparados con la teoría clásica. En el caso del momento distribuido, se puede observar como el resultado es muy similar al del elemento finito propuesto. Mientras que en el caso de la carga puntual, la teoría clásica no captura tan bien los efectos que se producen en el entorno de las cargas puntuales.

FIGURA 5.22 Ej1: LC 1: Momento M_x FIGURA 5.23 Ej1: LC 3: Momento M_x FIGURA 5.24 Ej1: LC 2: Bimomento torsor B_z

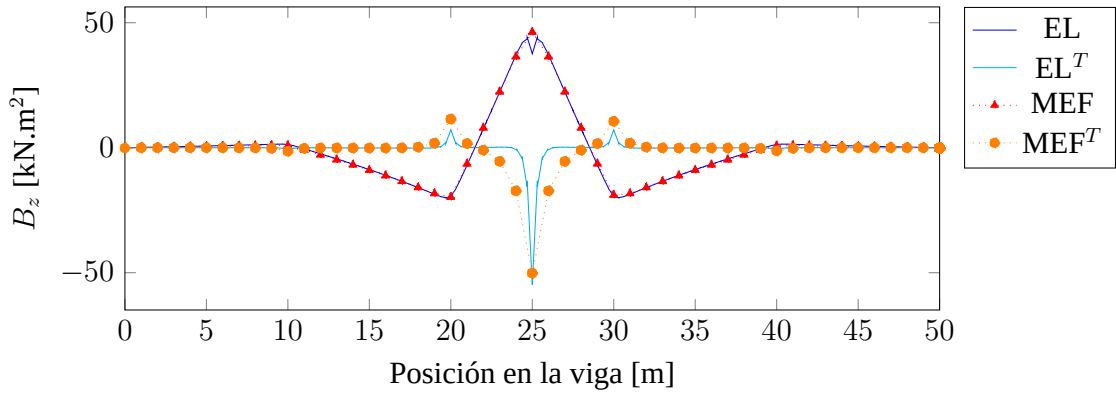


FIGURA 5.25 Ej1: LC 4: Bimomento torsor B_z

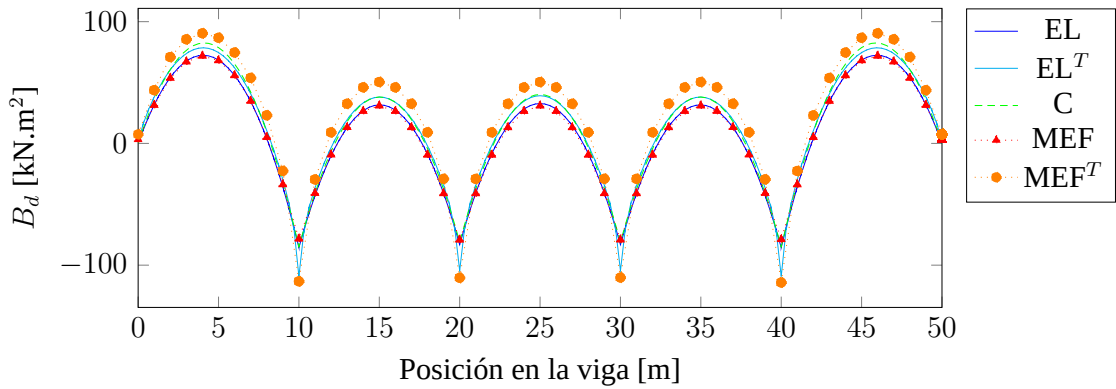


FIGURA 5.26 Ej1: LC 2: Bimomento distorsor B_d

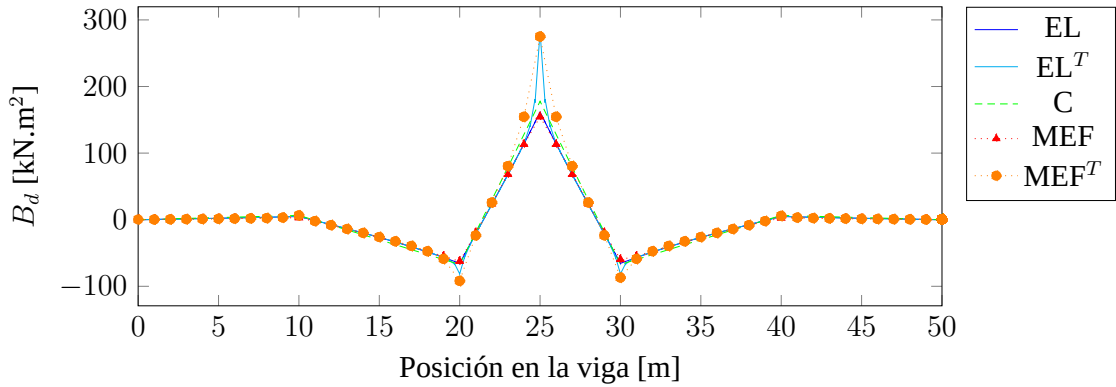


FIGURA 5.27 Ej1: LC 4: Bimomento distorsor B_d

5.3.7 Tensiones

A nivel de tensiones, se compararán las tensiones en un vértice superior y un vértice inferior del alma, debido a que tensiones y cargas son bien simétricas, bien antimétricas.

En primer lugar, se analizarán las tensiones debidas a casos de carga simétricos que se muestran en las figuras 5.28 y 5.29. En dichas figuras, se observa cómo únicamente en el punto de introducción de la carga puntual, que es el vértice superior, existe una diferencia entre las tensiones calculadas en el modelo de elementos finitos y en el resto de las teorías.

Los resultados de los casos de carga excéntricos se muestran en las figuras 5.30 y 5.31.

En las cargas distribuidas, se observan diferencias en el vértice superior, en la zona entre diafragmas, y en el vértice inferior, en la zona de diafragmas. En el caso del vértice inferior, la diferencia se debe a la concentración de tensiones que se da en las esquinas de los diafragmas, tal y como se explicó en el apartado 4.3. En cambio, en la zona entre diafragmas, la correlación de las tensiones en el vértice inferior entre el modelo de elementos finitos y el elemento propuesto es excelente, superando a la de la teoría clásica. Esta escasa diferencia en el vértice inferior entre diafragmas sugiere que la diferencia observada en el vértice superior se deba a la introducción local de las cargas. Se puede observar lo anterior en la figura 5.32, donde tanto la losa superior como el ala inferior muestran un ajuste muy bueno, mientras que en el alma se observa una diferencia relevante.

En cuanto a la carga puntual, se observan diferencias nuevamente en los puntos de introducción local de las cargas y en la zona donde los diafragmas se encuentran más solicitados. En la figura 5.33, se aprecia que la distribución de tensiones en la zona de introducción local de la carga (centro de luz) es muy irregular, lo que dificulta su captura con la teoría de vigas. Sin embargo, la buena correlación a nivel de esfuerzos que se observa en esa zona permite concluir que el ajuste propuesto es preciso dentro de la teoría de vigas.

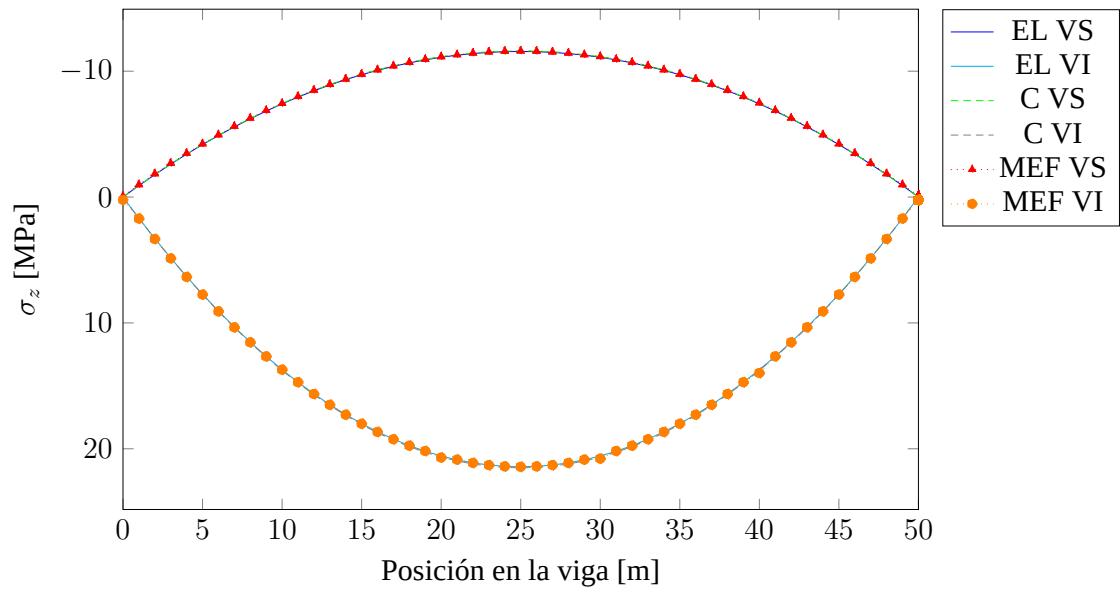


FIGURA 5.28 Ej1: LC 1: Tensiones en vértice superior (VS) e inferior (VI)

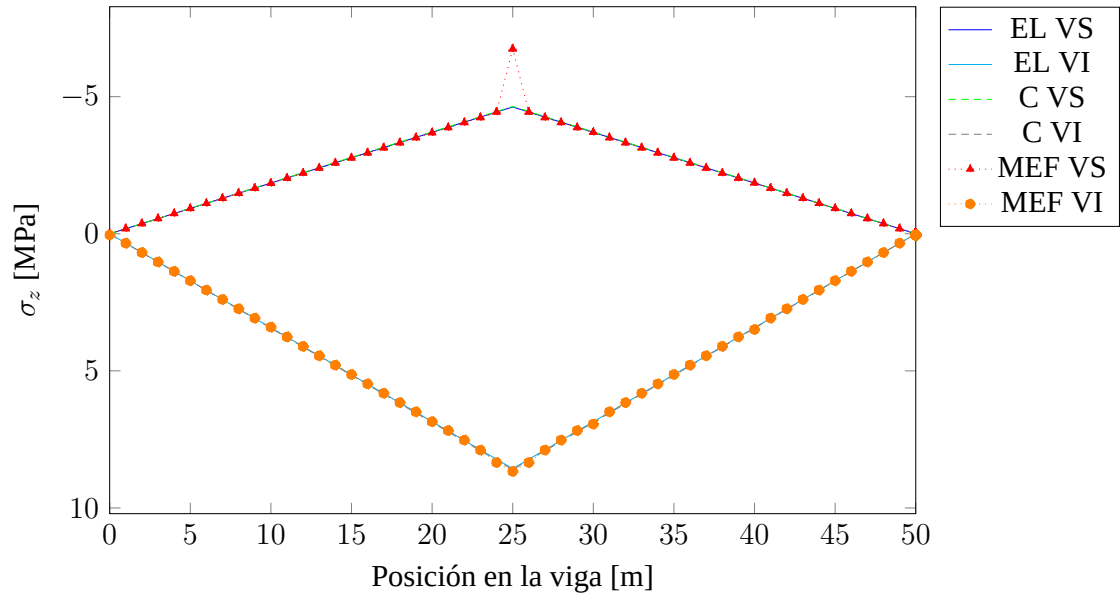


FIGURA 5.29 Ej1: LC 3: Tensiones en vértice superior (VS) e inferior (VI)

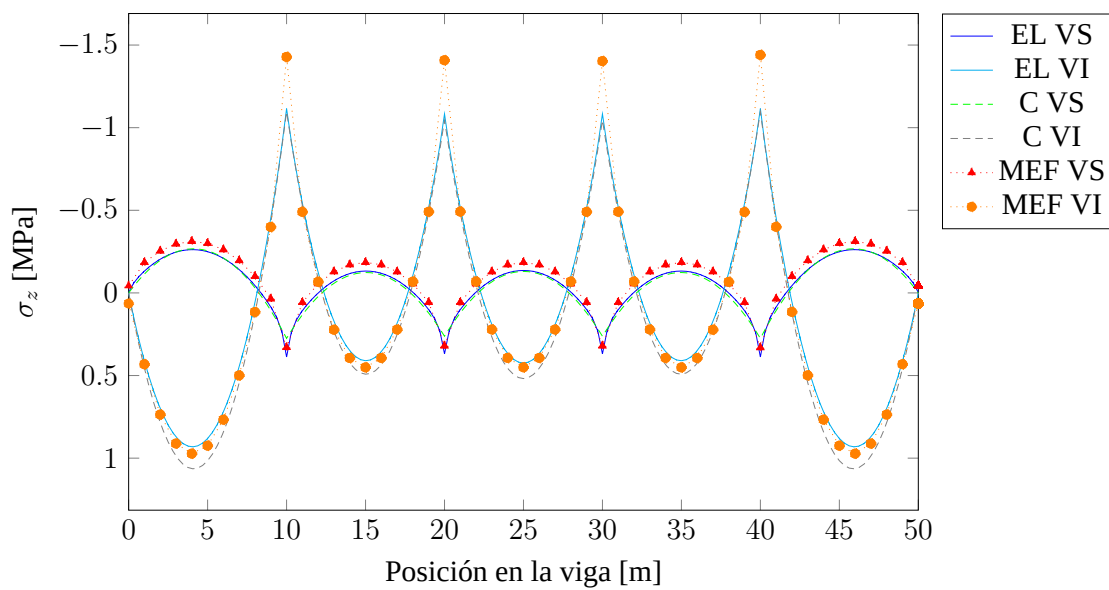


FIGURA 5.30 Ej1: LC 2: Tensiones en vértice superior (VS) e inferior (VI)

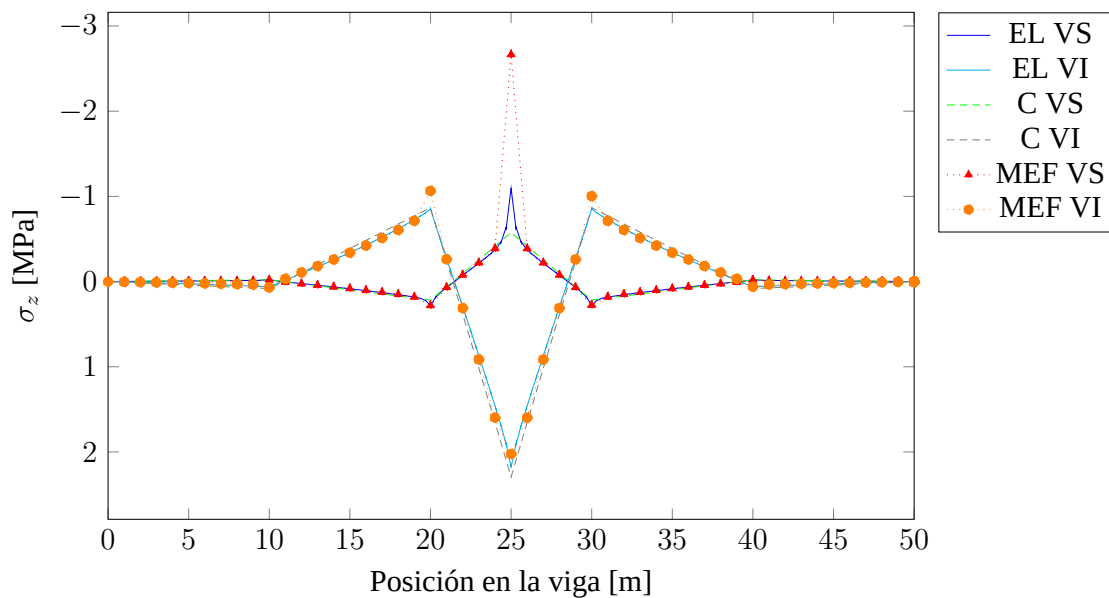


FIGURA 5.31 Ej1: LC 4: Tensiones en vértice superior (VS) e inferior (VI)

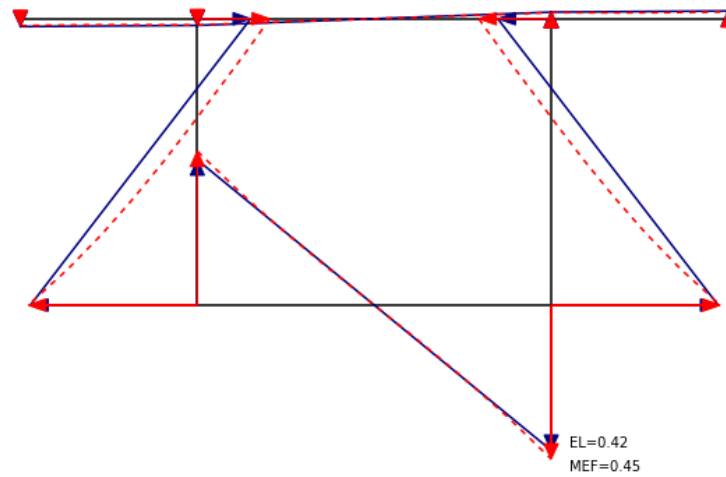


FIGURA 5.32 Ej 1: LC 2: Comparativa de tensiones en centro luz

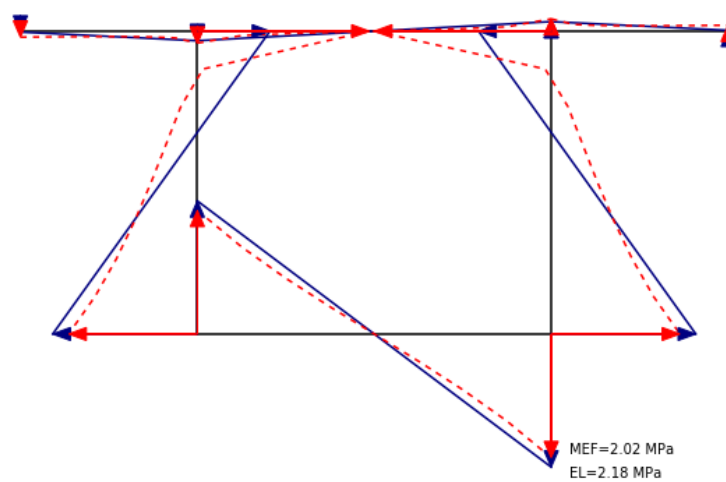


FIGURA 5.33 Ej 1: LC 4: Comparativa de tensiones en centro luz

5.3.8 Reacciones en diafragmas

El último resultado que se va a comparar son las reacciones en diafragmas. En el caso de la teoría clásica y del elemento propuesto dichas reacciones son cuantificables ya que se corresponden con una reacción en un elemento tipo muelle. Sin embargo, en el caso del modelo de elementos finitos, no es posible obtener dicha reacción por lo que deben compararse esfuerzos en los elementos que componen el diafragma.

En primer lugar se comparan las reacciones totales en los diafragmas intermedios entre la teoría clásica y el elemento propuesto. Los resultados se muestran en las figuras 5.34 y 5.35.

De la comparación se deduce que ambos métodos resultan muy similares, aunque son ligeramente mayores en el caso de la teoría clásica. No obstante, para confirmar la validez de ambos resultados, es necesario comparar los resultados a nivel de esfuerzos en los diafragmas.

La primera comparativas de esfuerzos se refiere a las tensiones tangenciales en el centro del diafragma de alma llena. Las figuras 5.36 y 5.37 muestran esta comparativa.

A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir que el ajuste logrado con el elemento finito propuesto mejora el de la teoría clásica de distorsión. Además, los resultados quedan prácticamente del lado de la seguridad en todos los casos.

Los resultados obtenidos en diafragmas compuestos por barras también se muestran a continuación. En este caso, por simplicidad, solo se muestran resultados para el caso de carga de carga distribuida. Las figuras correspondientes son 5.38, 5.39 y 5.40.

Los resultados mostrados en las figuras mencionadas anteriormente son consistentes, y muestran que el elemento finito se correlaciona excelentemente con el modelo de elementos finitos en todos los casos para diafragmas en celosía. Por lo tanto, los esfuerzos obtenidos pueden utilizarse para el dimensionamiento de dichos diafragmas.

El último punto de interés es cómo afectan las distintas tipologías de diafragmas a las tensiones. En el caso del elemento propuesto y de la teoría clásica, los distintos tipos de diafragmas no afectan, ya que la rigidez es idéntica para los 4 tipos. Sin embargo, en el modelo de elementos finitos, los resultados pueden variar si la rigidez con la que se modela el diafragma difiere significativamente de la rigidez supuesta en los modelos tipo viga.

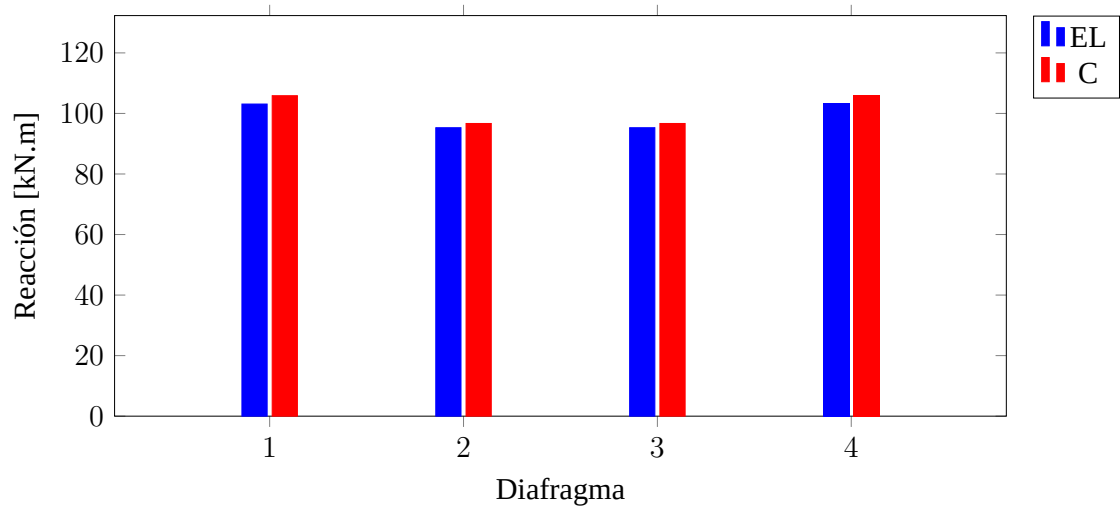


FIGURA 5.34 Ej1: LC 2: Reacciones en diafragmas intermedios

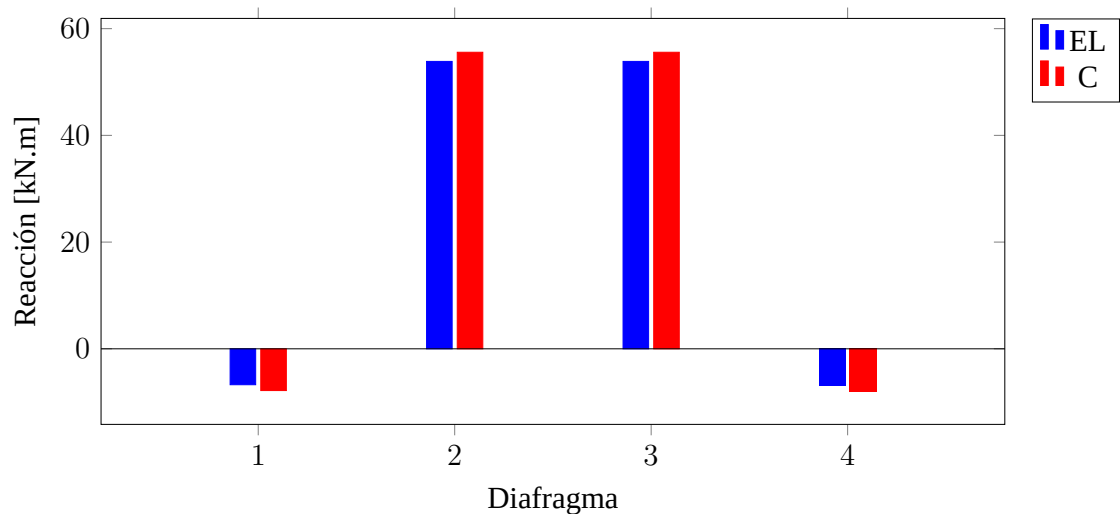


FIGURA 5.35 Ej1: LC 4: Reacciones en diafragmas intermedios

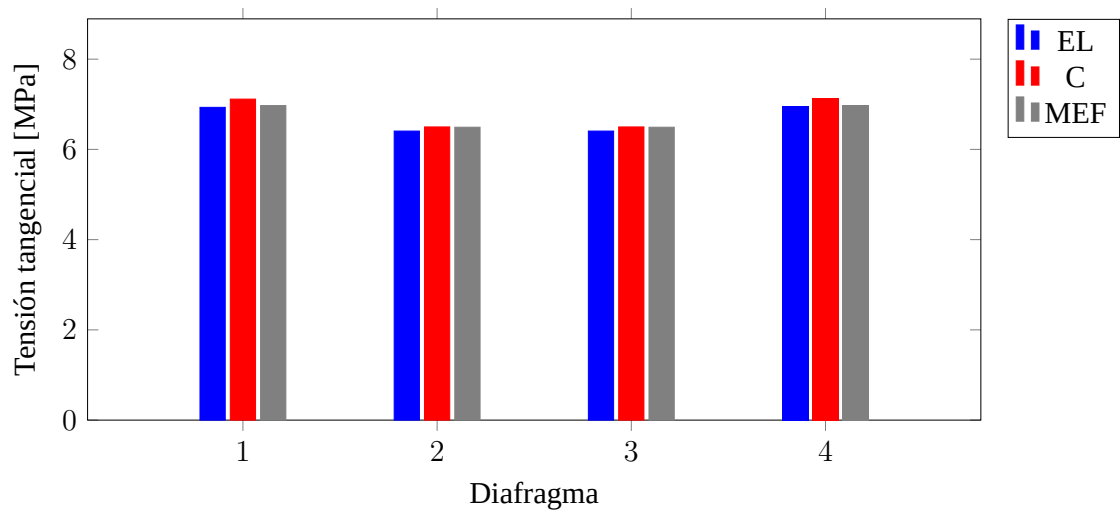


FIGURA 5.36 Ej1: LC 2: Tensión tangencial en diafragmas intermedios

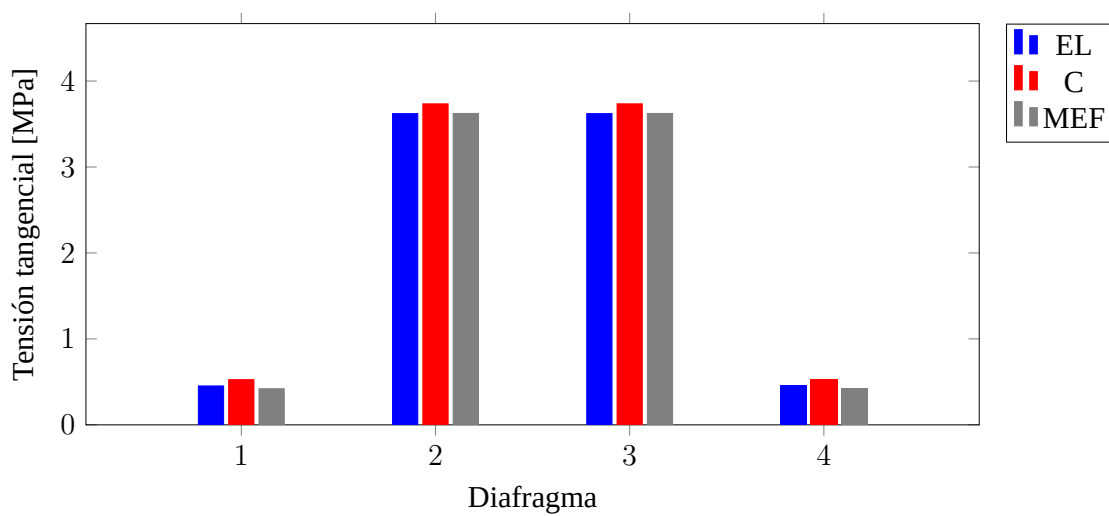


FIGURA 5.37 Ej1: LC 4: Tensión tangencial en diafragmas intermedios

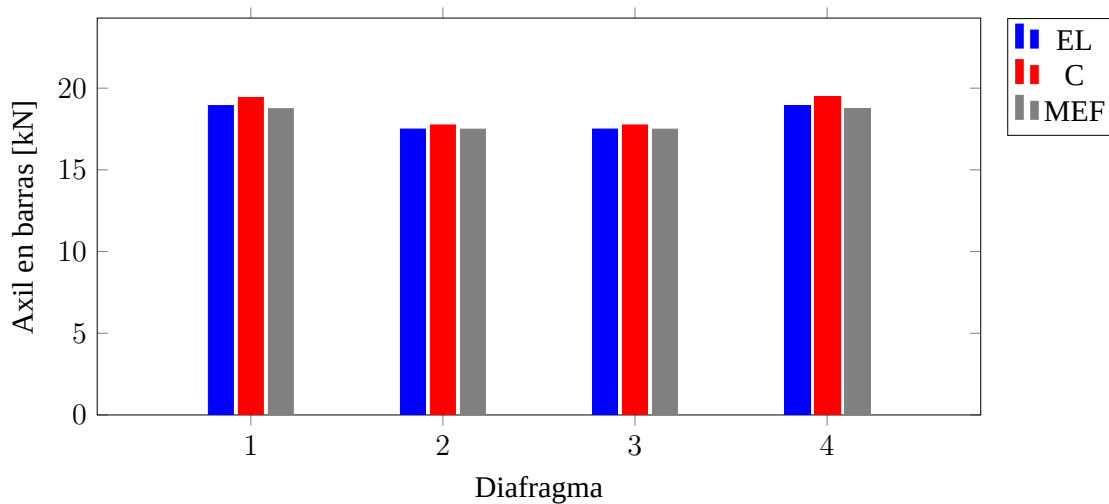


FIGURA 5.38 Ej1: LC 2: Axil en barras de diafragmas en X intermedios

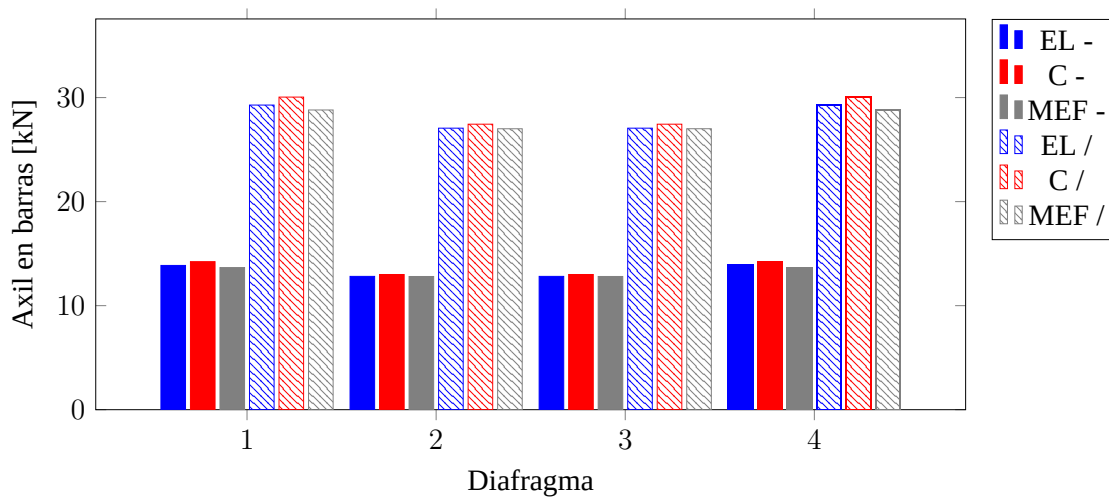


FIGURA 5.39 Ej1: LC 2: Axiles en barras de diafragmas en K intermedios

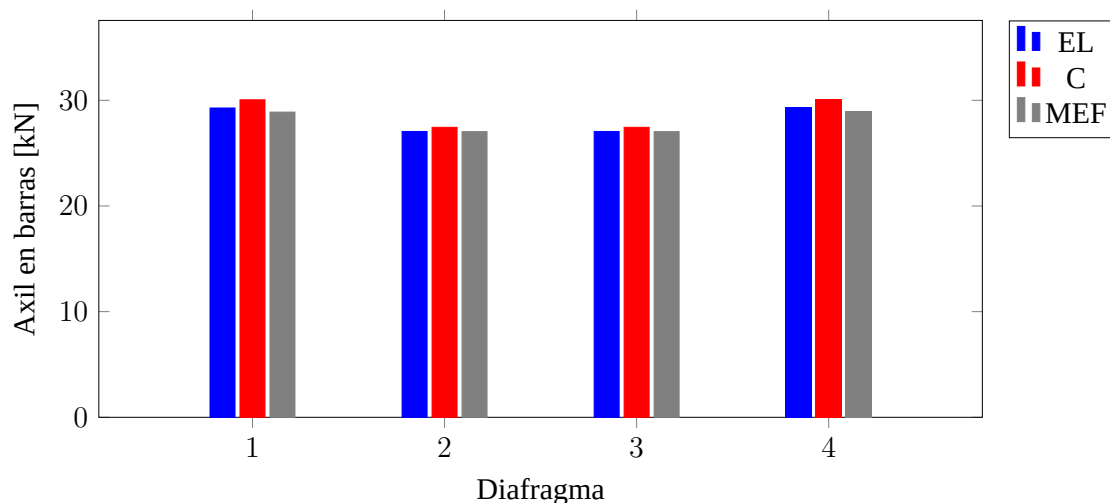


FIGURA 5.40 Ej1: LC 2: Axil en barras de diafragmas en V intermedios

Para aclarar este punto se muestran en la figura 5.41 las sobretensiones por distorsión en el ala inferior para los distintos tipos de diafragmas, así como el caso de carga puntual asimétrica en centro de luz.

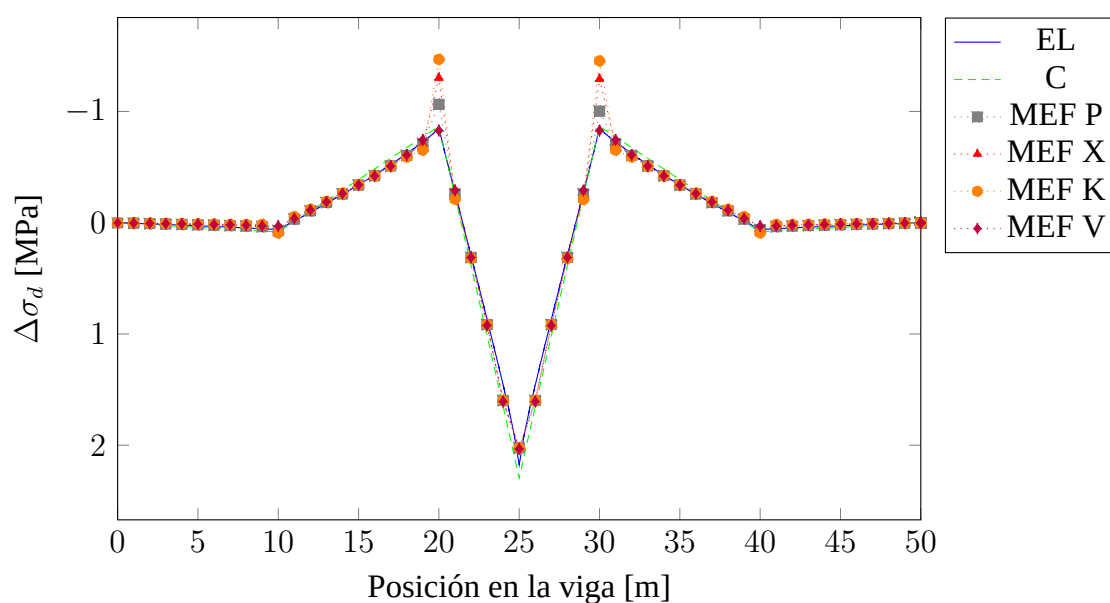


FIGURA 5.41 Ej1: LC 4: Sobretensión por distorsión

Se observa que la única diferencia se da en el vértice de los diafragmas contiguos a la carga, donde, dependiendo de la tipología, se produce un mayor o menor esfuerzo local. La relación entre dicha sobretensión y el esfuerzo local debido al diafragma es evidente en el caso del diafragma en V, donde no existe esfuerzo local en los vértices inferiores. Por lo tanto, el resultado es prácticamente idéntico a los cálculos empleando el elemento finito y la teoría clásica de vigas.

5.3.9 Conclusión

Los resultados mostrados en este ejemplo demuestran la validez tanto de la teoría clásica utilizada tradicionalmente para el cálculo de la distorsión como del elemento finito propuesto. Si bien ambos casos muestran ajustes muy buenos, el elemento finito propuesto es ligeramente más preciso en la mayoría de los resultados. Sin embargo, para futuras investigaciones, es necesario considerar la deformación por cortante.

Otra conclusión obtenida del cálculo realizado es la identificación de zonas donde se producen fenómenos locales que alteran los resultados. Estas zonas incluyen los vértices de los diafragmas, cuando se encuentran solicitados, y las zonas de introducción local de las cargas. En estas zonas hay concentraciones de tensiones que, aunque no alteran el comportamiento global de la estructura, pueden aumentar significativamente su valor. Sin embargo, estas sobretensiones se mitigan normalmente mediante un detallamiento adecuado, o bien se ven reducidas con modelos más refinados.

5.4 Ejemplo de verificación 2

5.4.1 Descripción de la estructura

El segundo ejemplo de verificación es idéntico al primero, con la única diferencia que la alineación en planta en vez de ser recta ahora es curva, con un radio de 100 m. El esquema se muestra en la figura 5.42.

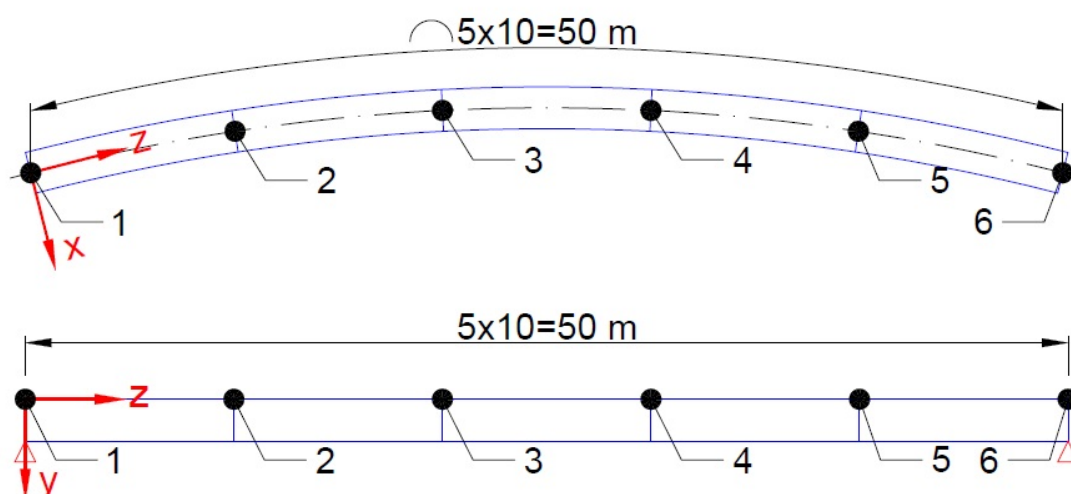


FIGURA 5.42 Ejemplo de verificación 2: Planta y Alzado

Tanto la sección como los diafragmas quedaron descritos en el ejemplo de verificación 1, por lo que se remite al lector al apartado 5.3.1 para más información.

5.4.2 Propiedades de la sección

En el apartado 5.3.2 se describieron las propiedades de la sección en el caso de la viga recta. En este apartado se explicarán las propiedades correspondientes a la viga curva. Para obtener información adicional relativa al proceso de obtención de las propiedades, consulte el apéndice D.

PROPIEDADES DE VIGA CURVA

Alabeos y deformaciones

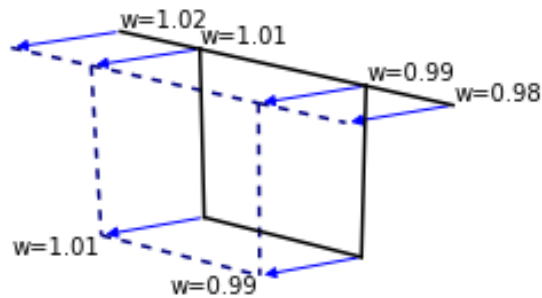


FIGURA 5.43 Ej2: Alabeo w_n^c

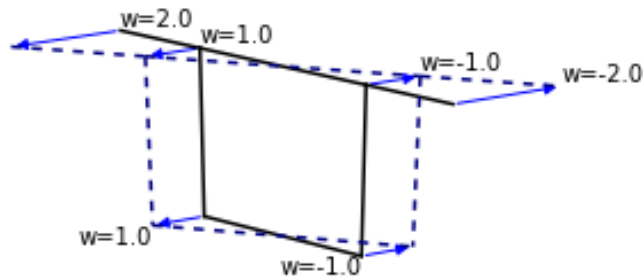


FIGURA 5.44 Ej2: Alabeo w_x^c

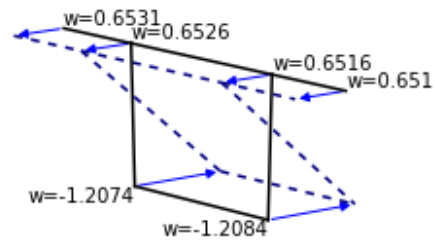


FIGURA 5.45 Ej2: Alabeo w_y^c

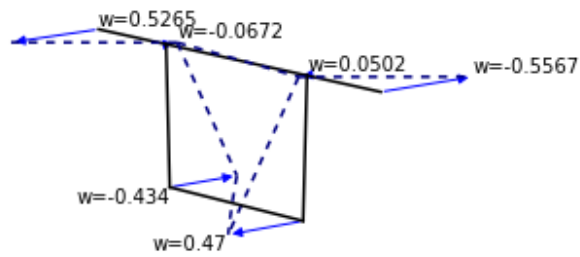


FIGURA 5.46 Ej2: Alabeo w_t^c

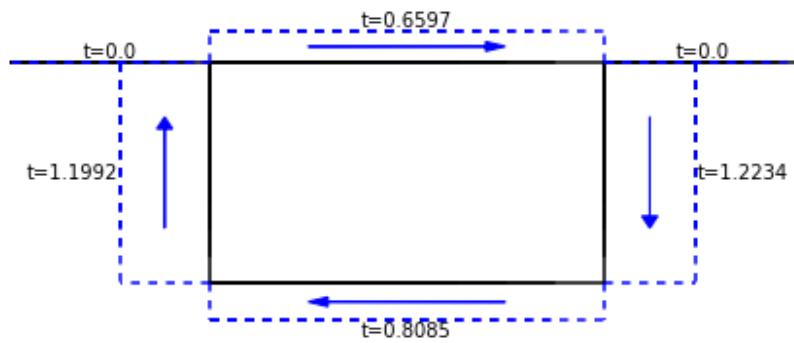


FIGURA 5.47 Ej2: Deformación angular t_t^c

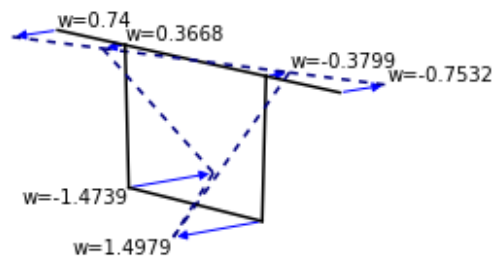


FIGURA 5.48 Ej2: Alabeo w_d^c

Propiedades

- $Q_u^c = 0.073 \text{ m}^3$
- $I_x^c = 0.1762 \text{ m}^4$
- $I_y^c = 0.2849 \text{ m}^4$
- $I_t^c = 0.0173 \text{ m}^6$
- $I_d^c = 0.1162 \text{ m}^6$
- $I_u^c = 0.2079 \text{ m}^4$
- $I_{xy}^c = -7.94 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$
- $I_{xt}^c = 3.33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^5$
- $I_{xd}^c = 2.91 \cdot 10^{-3} \text{ m}^5$
- $I_{xu}^c = 0.1806 \text{ m}^4$
- $I_{yt}^c = -2.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^5$
- $I_{yd}^c = -8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^5$
- $I_{yu}^c = -5.9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
- $I_{td}^c = 0.0381 \text{ m}^6$
- $I_{tu}^c = 3.40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^5$
- $I_{du}^c = 2.99 \cdot 10^{-3} \text{ m}^5$
- $J_t^c = 0.1833 \text{ m}^4$
- $J_d^c = 3.08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$
- $J_{td}^c = 3.08 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

En lo referente a la teoría clásica, se describieron las propiedades y funciones de alabeo fueron en el ejemplo 1. La única diferencia en este caso es la aparición del coeficiente de Dabrowsky, el cual se define como:

- $\eta = 1.033$

5.4.3 Acciones

Se considerarán las mismas acciones descritas en el ejemplo de verificación 1. Para obtener más información, el lector debe consultar el apartado 5.3.3.

5.4.4 Estudio de convergencia

Al igual que en el ejemplo de verificación 1, se ha llevado a cabo un estudio de convergencia para determinar el número de elementos requeridos. Se analizó la evolución de la tensión en centro de luz en el vértice inferior debido a una carga puntual asimétrica (LC 4), y los resultados se muestran en la figura 5.49.

Se observa nuevamente que se obtiene una estabilización del cálculo con 32 elementos, aunque existen pequeñas oscilaciones de índole numérica que no resultan relevantes para el resultado final.

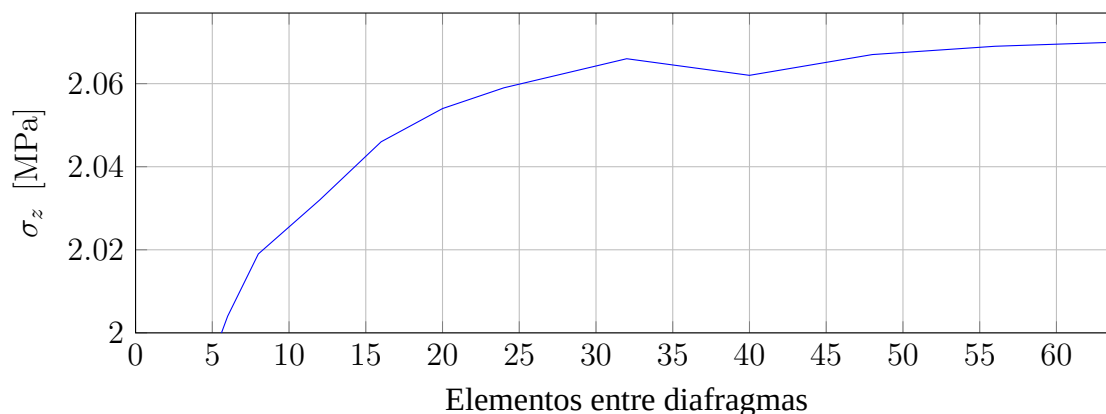


FIGURA 5.49 Ej2: Estudio de convergencia

5.4.5 Movimientos

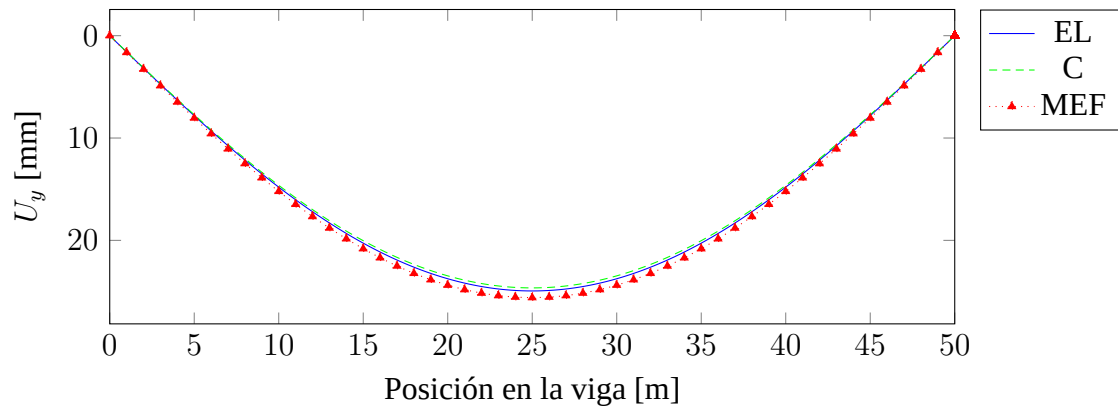
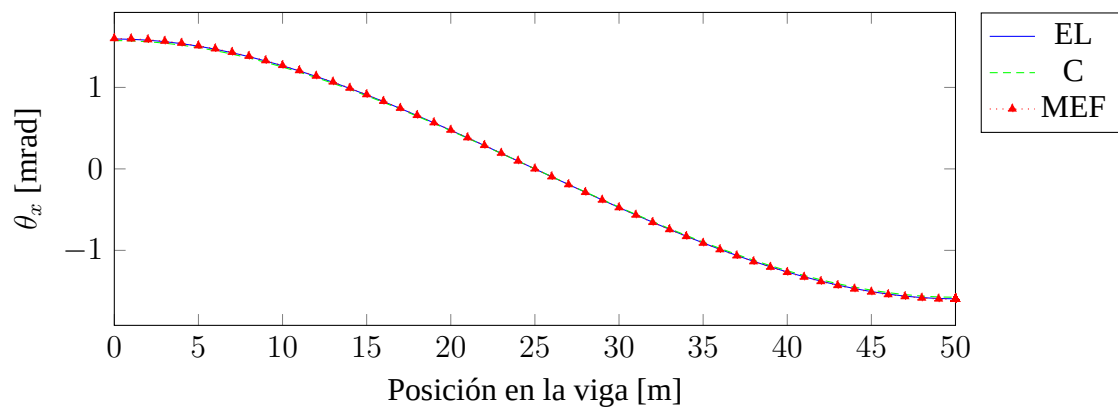
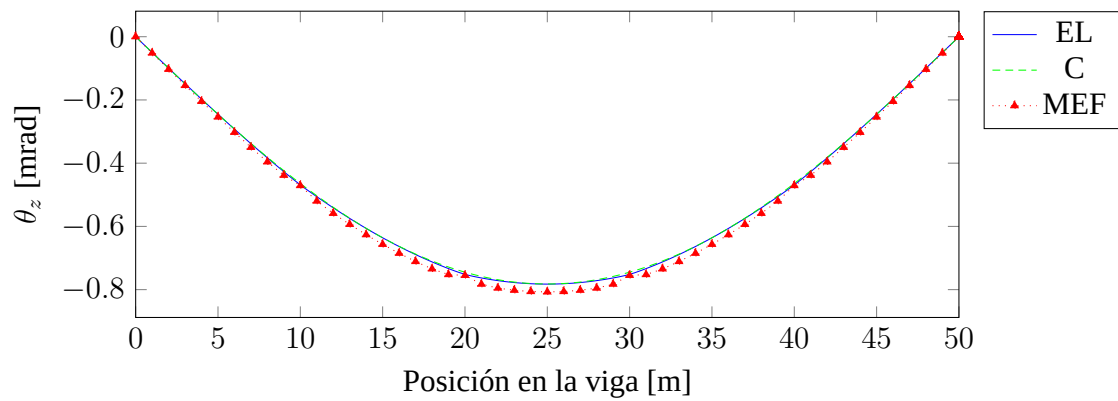
En el caso de la viga curva, todos los movimientos se encuentran conectados entre sí, por lo que para cada caso de carga se mostrarán todos los movimientos principales obtenidos en el eje de las vigas. Se consideran movimientos principales el desplazamiento vertical, el giro longitudinal, el giro por torsión y la distorsión, mientras que el resto son movimientos secundarios cuyo valor es despreciable.

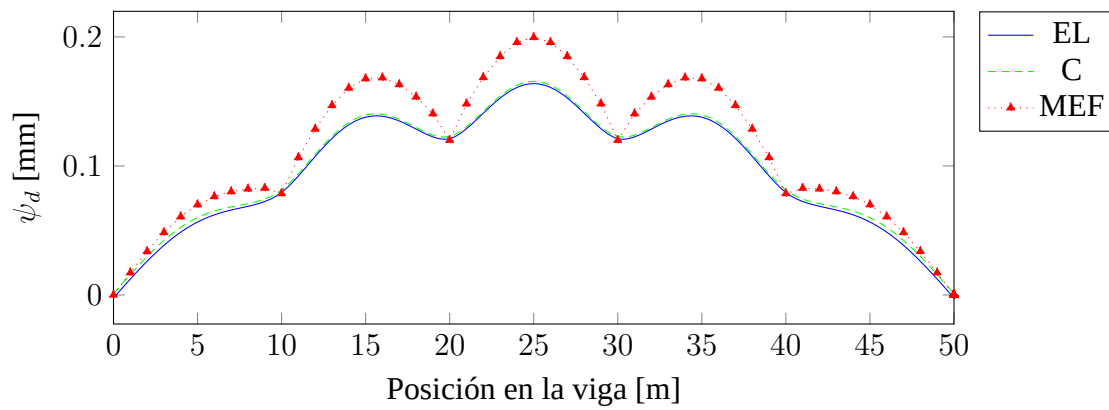
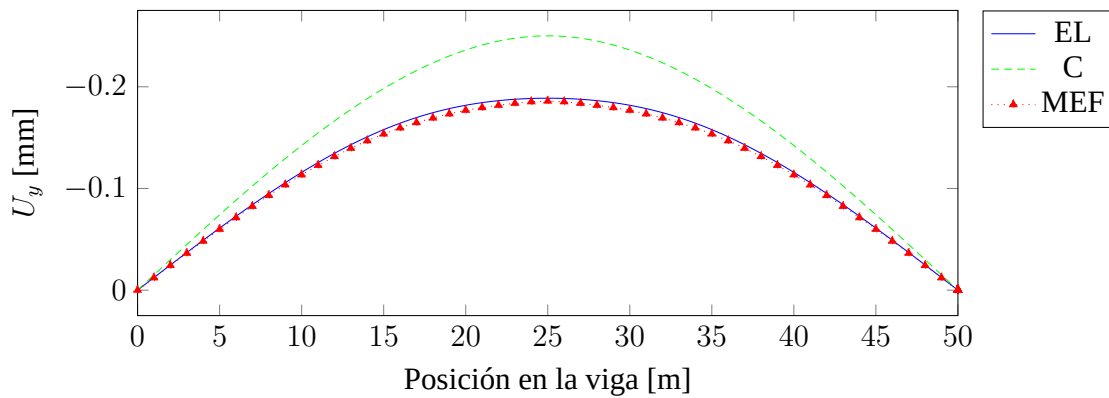
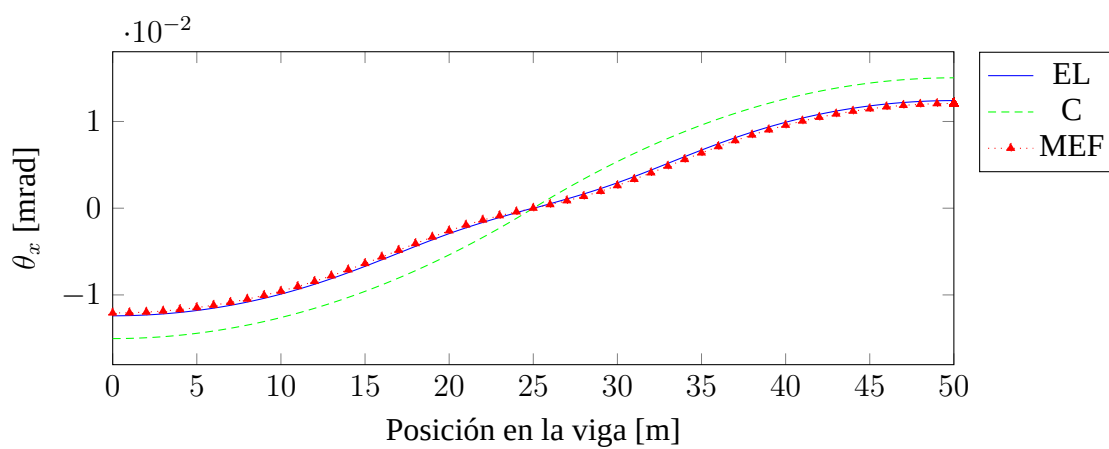
Para simplificar el volumen de resultados, se mostrarán únicamente los casos de carga de carga distribuida centrada (LC 1) y carga puntual asimétrica (LC 4). Concretamente, en las figuras 5.50 a 5.53 se muestran los resultados de la carga distribuida centrada.

Observando la figura 5.50, se aprecia que el movimiento vertical está ligeramente infravalorado debido a que no se ha considerado la deformación por cortante. Esto también se pone de manifiesto en la figura 5.51, ya que el giro longitudinal sí que resulta idéntico al calculado en el modelo de elementos finitos.

La falta de consideración de la deformación por cortante también puede haber influido ligeramente en la diferencia en el giro por torsión entre el cálculo realizado y el modelo de elementos finitos, tal y como se ilustra en la figura 5.52. No obstante, en los diafragmas donde la distorsión está restringida, se observa cómo dichas diferencias se reducen. Por lo tanto, la deformación por cortante no es la causa principal de la diferencia en el giro.

Establecer una causa clara de la diferencia es complicado. No obstante, la causa más probable que explica la diferencia es la flexión transversal que introduce la curvatura en planta. Esto significa que las tensiones longitudinales generan unas fuerzas de desviación horizontales en las almas, lo que provoca flexión transversal adicional a la distorsión. Dicha flexión altera la deformada final de la sección, que ya no es la suma de las deformadas

FIGURA 5.50 Ej2: LC 1: Movimiento vertical U_y FIGURA 5.51 Ej2: LC 1: Giro θ_x FIGURA 5.52 Ej2: LC 1: Giro θ_z

FIGURA 5.53 Ej2: LC 1: Distorsión ψ_d FIGURA 5.54 Ej2: LC 4: Movimiento vertical U_y FIGURA 5.55 Ej2: LC 4: Giro θ_x

que se han considerado como base. Por lo tanto, cuando se efectúa la regresión, se produce una diferencia que afecta tanto al giro como a la distorsión. Esto también explica por qué los resultados en los puntos donde se ha impedido la flexión transversal, que son los diafragmas, son prácticamente coincidentes.

La explicación anterior, junto con las deformaciones locales observadas en la viga recta, también justifica lo que se observa en la deformada por distorsión mostrada en la figura 5.53.

En las figuras 5.54 a 5.57 se presentan los resultados de la carga puntual asimétrica. En dichas figuras se observa que la relación entre una carga asimétrica y los movimientos verticales y giros es excelente, lo que mejora sustancialmente lo calculado según la teoría clásica.

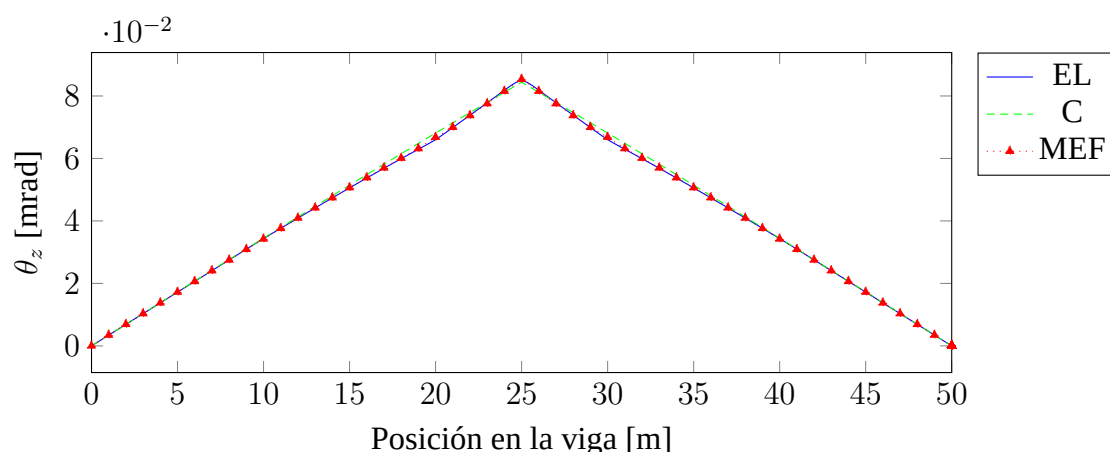


FIGURA 5.56 Ej2: LC 4: Giro θ_z

El giro por torsión mostrado en la figura 5.56 también muestra una muy buena correlación en los tres cálculos realizados.

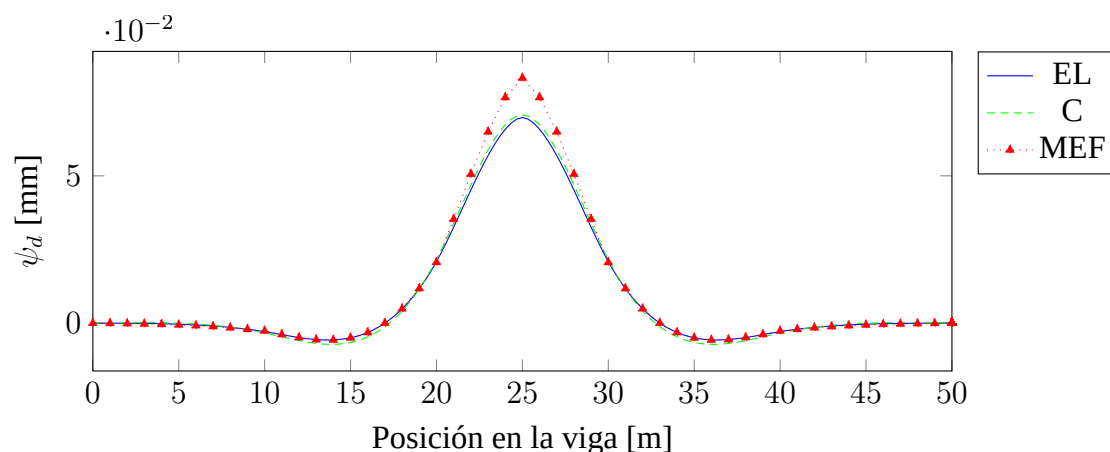


FIGURA 5.57 Ej2: LC 4: Distorsión ψ_d

Por último, en el caso de la distorsión mostrada en la figura 5.57, se puede apreciar cómo la deformación en el entorno de la carga puntual altera los resultados. Además, la relación entre el cálculo realizado y la teoría clásica es prácticamente coincidente. Cabe destacar que, en este punto, que las tensiones longitudinales son mucho menores que en el primer caso, y por lo tanto, la deformada final se ajusta mejor a las deformadas que componen la base para efectuar la regresión.

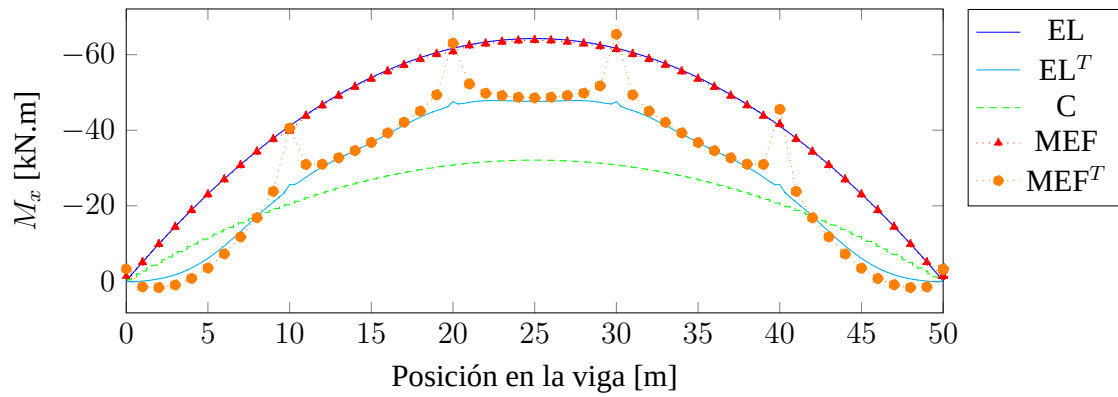
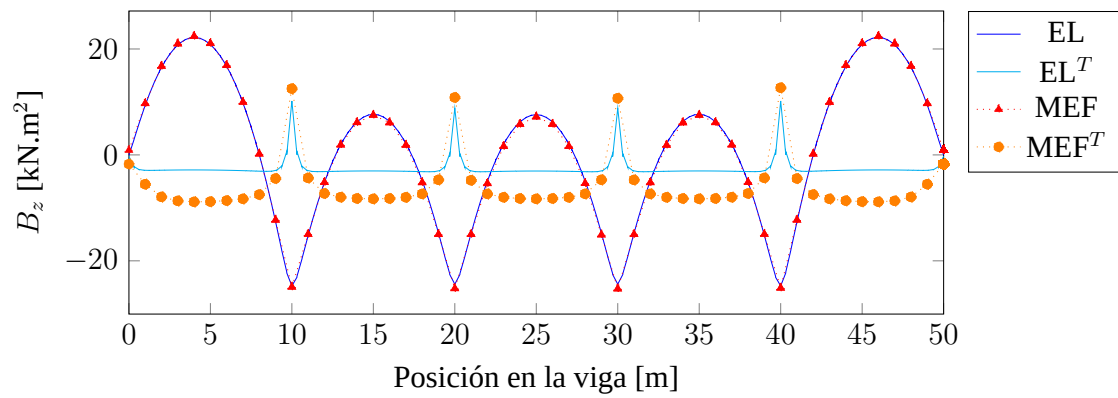
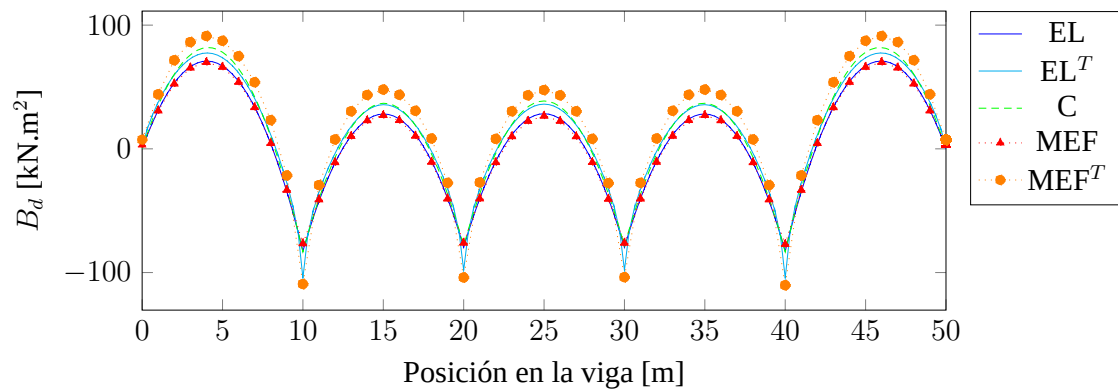
5.4.6 Esfuerzos

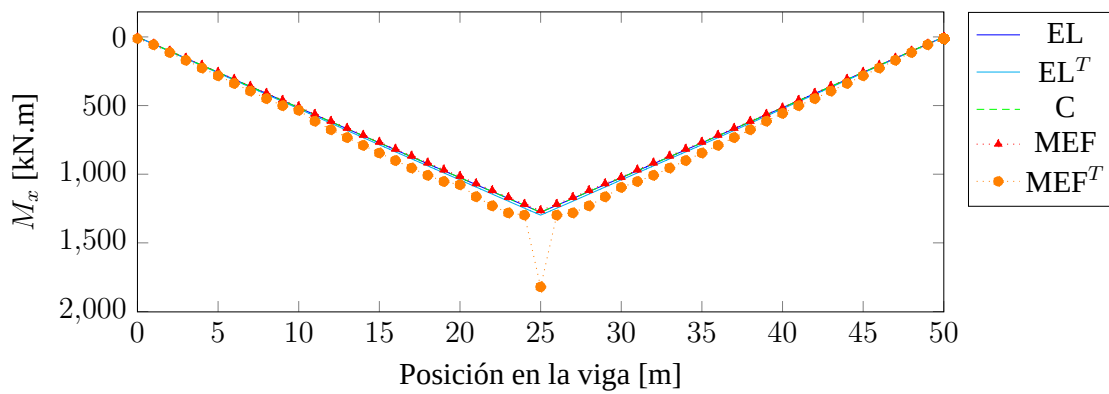
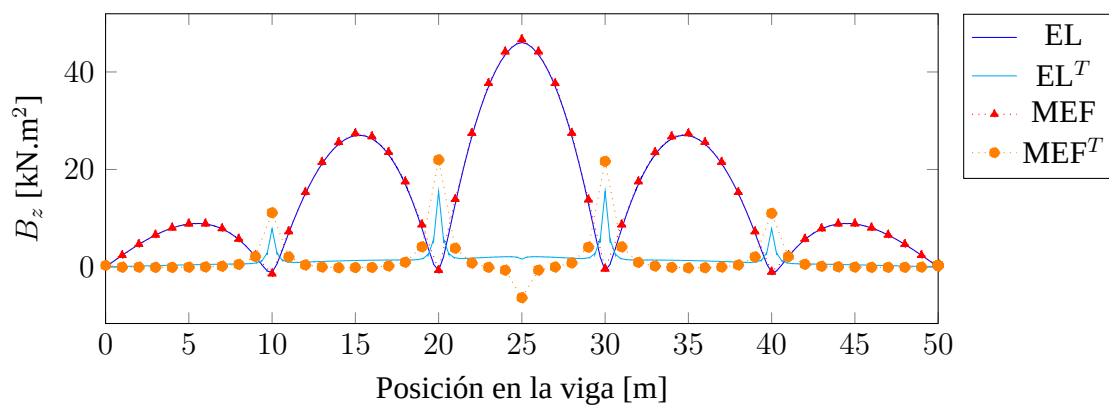
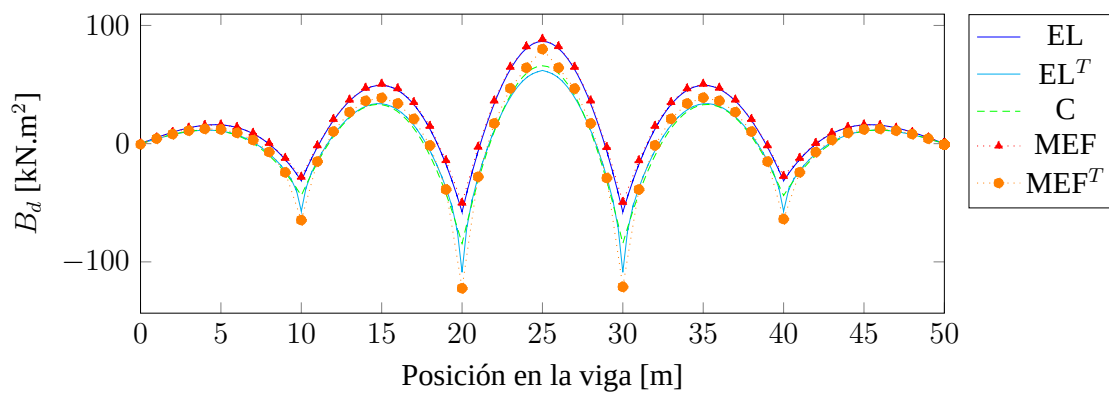
En cuanto a los esfuerzos, se compararán los momentos flectores longitudinales (M_x) y los bimomentos torsores (B_z) y distorsores (B_d). Como casos de carga se complementarán los del apartado anterior, por lo que se mostrarán los resultados de carga distribuida antimétrica (LC 2) y carga puntual simétrica (LC 3)

En las figuras 5.58 a 5.60 se muestran los esfuerzos debidos a la carga distribuida antimétrica.

Observando los tres esfuerzos en conjunto, se puede afirmar que, en términos de resultantes totales, la correlación entre los esfuerzos calculados empleando el elemento finito y los esfuerzos obtenidos de la integración de esfuerzos son excelentes. Por lo tanto, el elemento propuesto es capaz de capturar el comportamiento de la viga. Sin embargo, esta correlación no es tan buena en términos de resultantes de tensiones. De todas formas, el hecho de que las resultantes totales guarden tan buena correlación permite atribuir las diferencias observadas a fenómenos locales, que ya se observaron en la viga recta, y que por lo tanto no se pueden atribuir a la curvatura en planta del elemento.

Las conclusiones anteriores se pueden extender a los esfuerzos debidos a la carga puntual simétrica, que se muestran en las figuras 5.61 a 5.63.

FIGURA 5.58 Ej2: LC 2: Momento M_x FIGURA 5.59 Ej2: LC 2: Bimomento torsor B_z FIGURA 5.60 Ej2: LC 2: Bimomento distorsor B_d

FIGURA 5.61 Ej2: LC 3: Momento M_x FIGURA 5.62 Ej2: LC 3: Bimomento torsor B_z FIGURA 5.63 Ej2: LC 3: Bimomento distorsor B_d

5.4.7 Tensiones

Los cálculos realizados han mostrado una mejor correlación en los casos de cargas puntuales que en los casos de cargas distribuidas. Por esta razón, se detallarán los dos casos de cargas distribuidas.

En primer lugar, se muestran las tensiones en el vértice superior y vértice inferior del alma para el caso de carga distribuida simétrica tanto en el vértice derecho (VD) como en el vértice izquierdo (VI). Estos resultados se corresponden con las figuras 5.64 y 5.65.

Al observar los vértices superiores, se puede apreciar que los resultados de los distintos cálculos resultan muy similares. Sin embargo, en el caso de los vértices inferiores sí que se observa una mayor diferencia. Aun así, omitiendo los vértices de los diafragmas donde se producen concentraciones locales de tensiones, el cálculo efectuado empleando el elemento finito mejora en precisión a la teoría clásica si se compara con el modelo de láminas. Cabe destacar que las diferencias en términos absolutos son escasas, ya que son diferencias en el entorno de los 0.1 MPa en tensiones que llegan hasta los 25 MPa.

Las tensiones debidas a la carga distribuida antimétrica se muestran en las figuras 5.66 y 5.67.

En los vértices superiores se observa una diferencia significativa debido a la introducción local de las cargas. Sin embargo, en términos absolutos, el valor de dicha diferencia es escaso porque la tensión máxima prácticamente no supera los 0.5 MPa. Por lo tanto, en este caso de carga se ha podido apreciar claramente este fenómeno, pero no en el anterior.

Respecto al vértice inferior, se observa que el ajuste entre el elemento finito propuesto y el modelo de láminas es muy bueno, y mejora sustancialmente al cálculo según la teoría clásica.

Por último, se muestran las sobretensiones en el ala inferior debidas a la distorsión para los casos de carga puntuales. Las figuras correspondientes son 5.68 y 5.69.

Como se indicó al principio de este apartado, las cargas puntuales exhibieron una mejor correlación que las cargas distribuidas en términos de tensiones en ambos casos de carga. Además, se observa que el cálculo realizado empleando el elemento finito propuesto mejora al realizado según la teoría clásica.

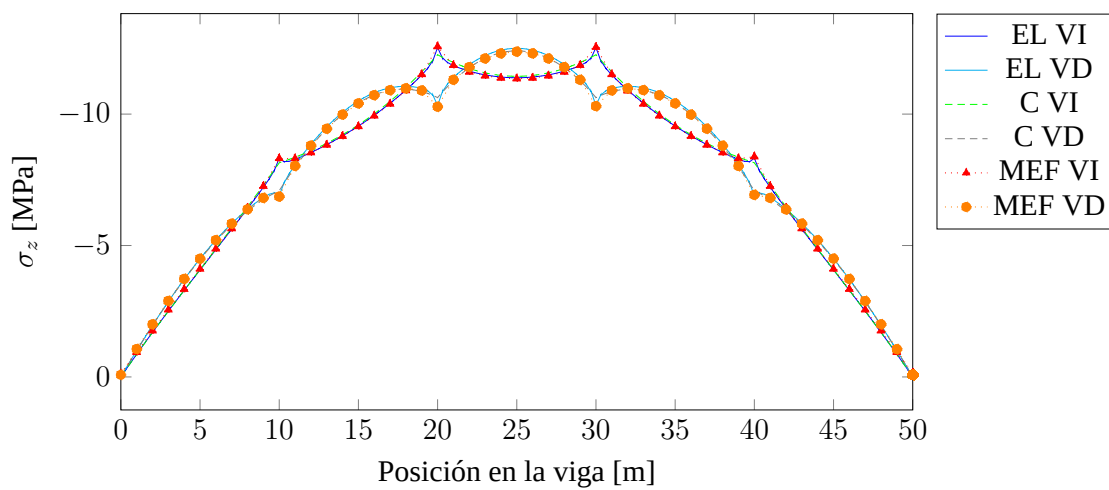


FIGURA 5.64 Ej2: LC 1: Tensiones en vértices superiores del alma

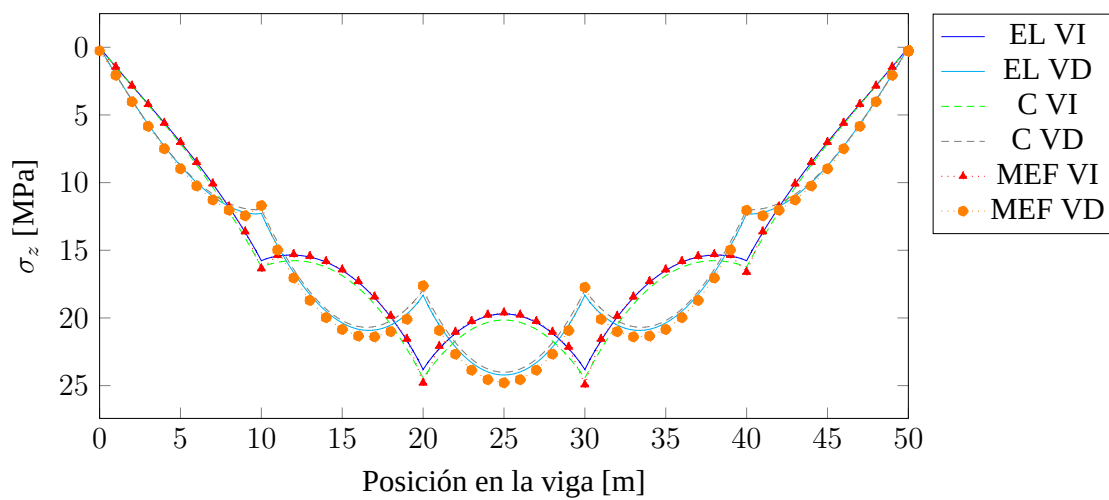


FIGURA 5.65 Ej2: LC 1: Tensiones en vértices inferiores del alma

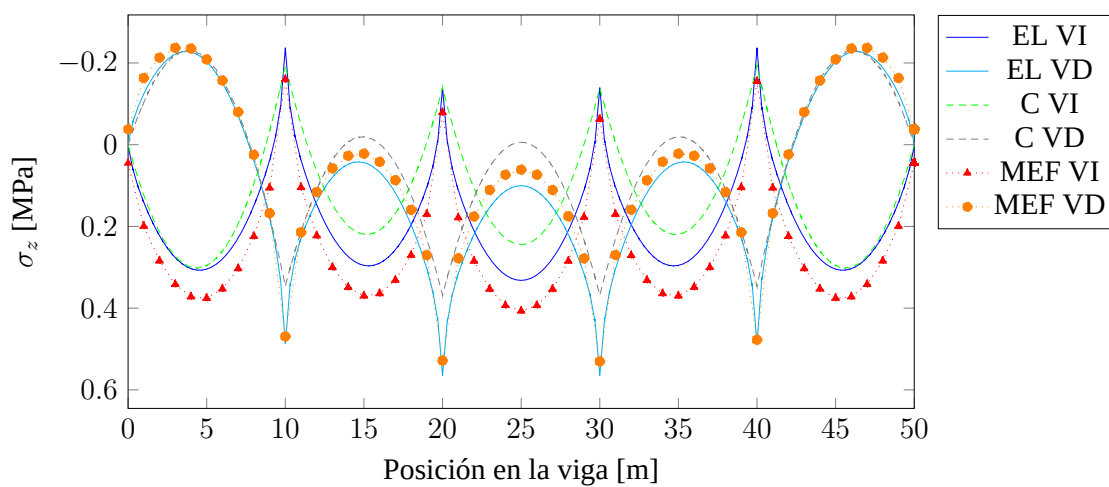


FIGURA 5.66 Ej2: LC 2: Tensiones en vértices superiores del alma

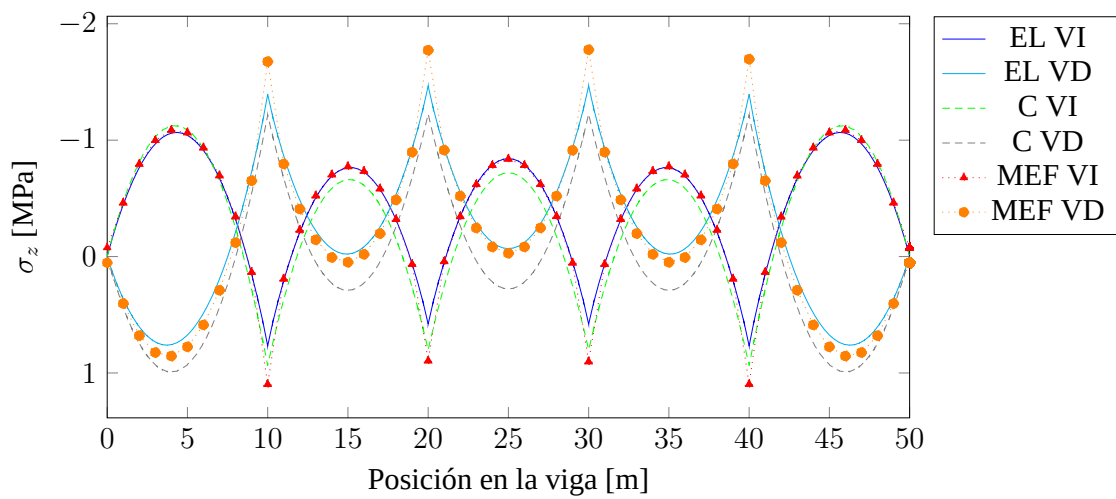


FIGURA 5.67 Ej2: LC 2: Tensiones en vértices inferiores del alma

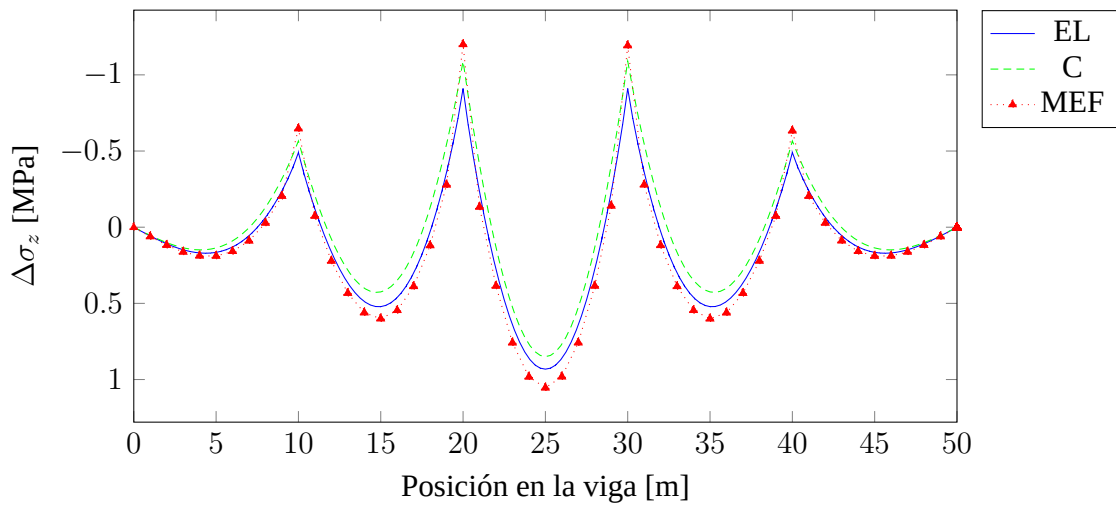


FIGURA 5.68 Ej2: LC 3: Sobretensión en ala inferior

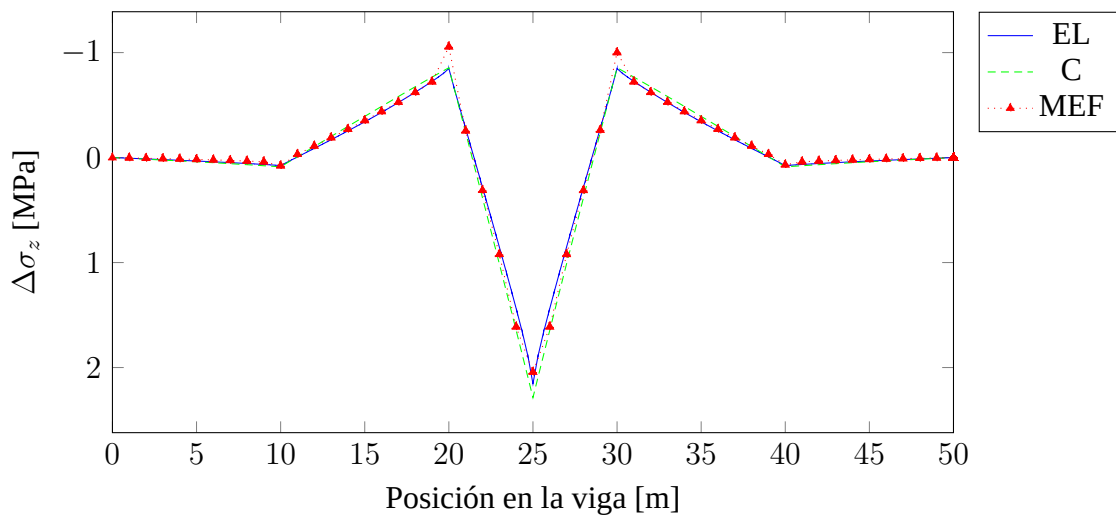


FIGURA 5.69 Ej2: LC 4: Sobretensión en ala inferior

5.4.8 Reacciones en diafragmas

El último resultado de comparación son las reacciones en los diafragmas. En el ejemplo de la viga recta, se pudo apreciar que la tipología de diafragma no influyó en la precisión en el cálculo. En este caso, se compararán los cuatro casos de carga, pero para cada caso de carga se considerará un tipo de diafragma distinto.

En primer lugar, se compara el caso de carga de carga distribuida simétrica en un diafragma de alma llena. Los resultados se muestran en la figura 5.70, y se puede observar que los tres cálculos resultan muy similares. Aunque el resultado del cálculo realizado empleando el elemento finito es ligeramente inferior al modelo de elementos tipo lámina, dicha diferencia no es relevante.

El caso de carga distribuida antimétrica y diafragmas en X se muestra en la figura 5.71. En este caso, se observa como el elemento finito aporta mayor precisión que la teoría clásica, y además, queda del lado de la seguridad.

El diafragma en K mostrado en la figura 5.72 para el caso de carga puntal simétrica muestra una diferencia relevante en el cordón superior. Esta diferencia se debe a que, cuando la losa superior se encuentra sometida a una carga axil, el hormigón de la losa tiende a expandirse en la dirección perpendicular a la compresión por efecto de Poisson, generando una tracción en el cordón superior del diafragma en K. Este fenómeno se ha podido comprobar en el modelo de elementos finitos completo. No obstante, si se ignora este efecto los resultados guardan una muy buena correlación.

El último cálculo se refiere al diafragma en V sometido a una carga puntal antimétrica, cuyos resultados se muestran en la figura 5.73. Una vez más, el elemento finito mejora el ajuste respecto a la teoría clásica y permite obtener resultados con un grado de precisión suficiente.

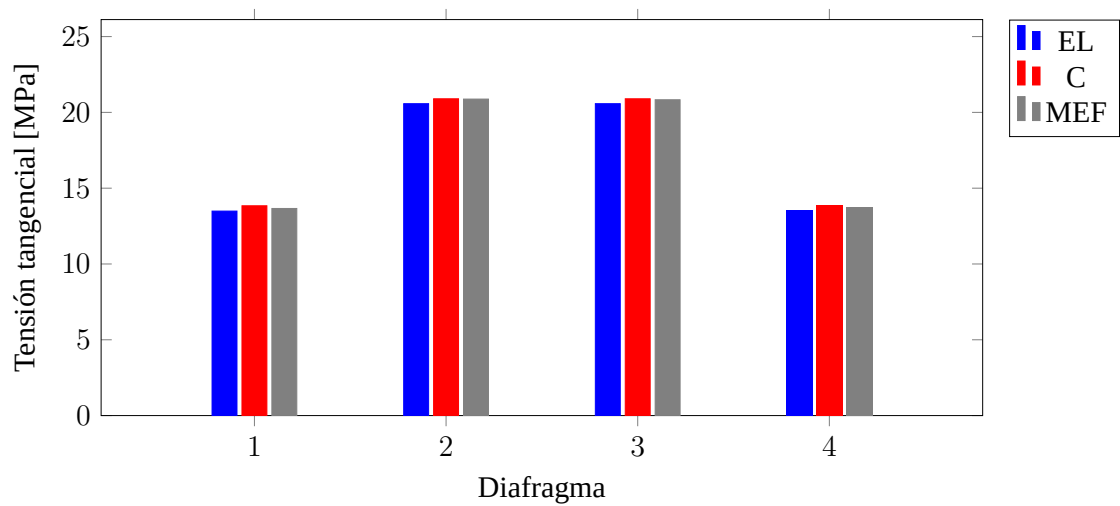


FIGURA 5.70 Ej2: LC 1: Tensión tangencial en diafragmas intermedios

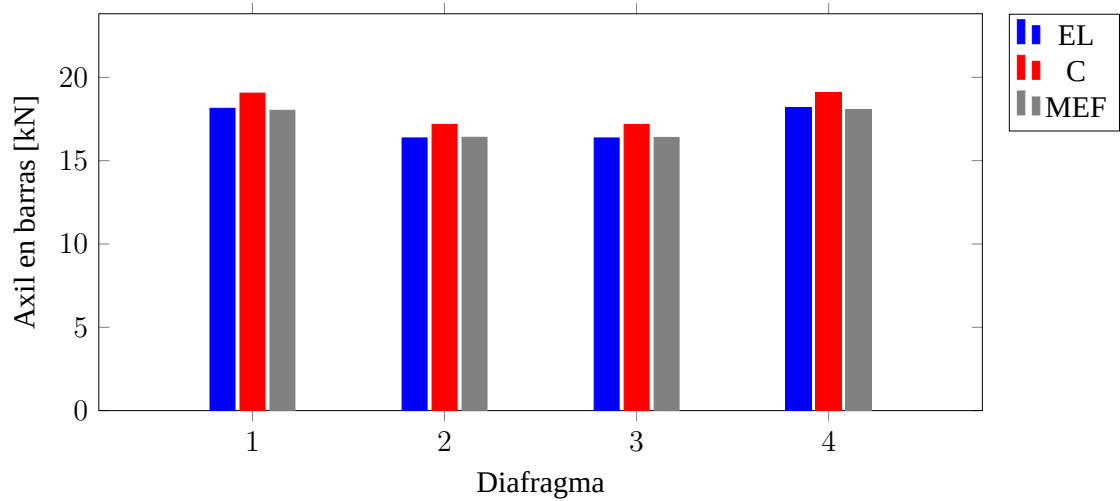


FIGURA 5.71 Ej2: LC 2: Axil en barras de diafragmas en X intermedios

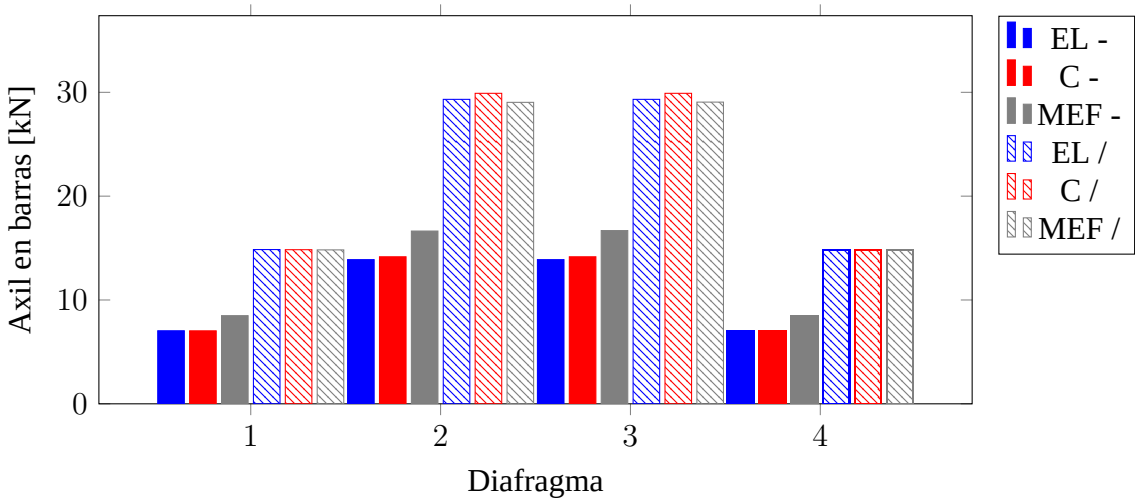


FIGURA 5.72 Ej2: LC 3: Axiles en barras de diafragmas en K intermedios

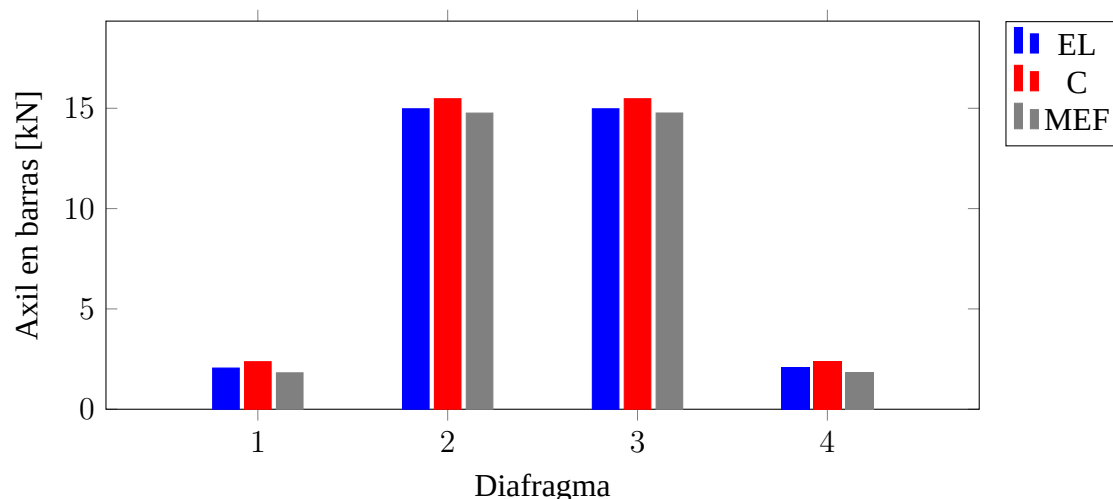


FIGURA 5.73 Ej2: LC 4: Axil en barras de diafragmas en V intermedios

5.4.9 Conclusión

Los resultados presentados en este apartado permiten afirmar que el elemento propuesto es válido para el dimensionamiento de puentes curvos.

Los movimientos guardan una buena correlación con el modelo de elementos finitos. No obstante, se debe implementar la deformación por cortante en futuras investigaciones. También se han observado diferencias en el giro y la distorsión, pero la solución pasa por implementar más modos de deformación transversal, lo cual no se considera pertinente en este trabajo ya que no afecta al resto de resultados.

Los esfuerzos presentan una correlación excelente en términos de resultantes absolutas. Además, los esfuerzos tensionales, aunque presentan diferencias, no afectan tampoco sustancialmente al cálculo de tensiones, como lo demuestran las buenas correlaciones alcanzadas a nivel de tensiones. Por último, las reacciones en diafragmas también guardan una correlación muy buena en todos los casos de carga y tipologías de diafragmas.

Cabe señalar también que, en general, el elemento finito propuesto ha exhibido una mejor correlación con el modelo de elementos finitos que la teoría clásica. Por lo tanto, se considera que el elemento propuesto resulta válido para el dimensionamiento de puentes mixtos curvos de sección cajón. No obstante, esta afirmación se corroborará en el siguiente ejemplo, basado en un puente de dimensiones realistas.

5.5 Ejemplo de verificación 3

5.5.1 Descripción de la estructura

El tercer ejemplo consiste en un puente de tres vanos con un vano central de 50 m y dos vanos laterales de 40 m. Su alineación en planta es curva y presenta un radio de 100 m. También dispone de diafragmas cada 10 m, como se muestra en la siguiente figura:

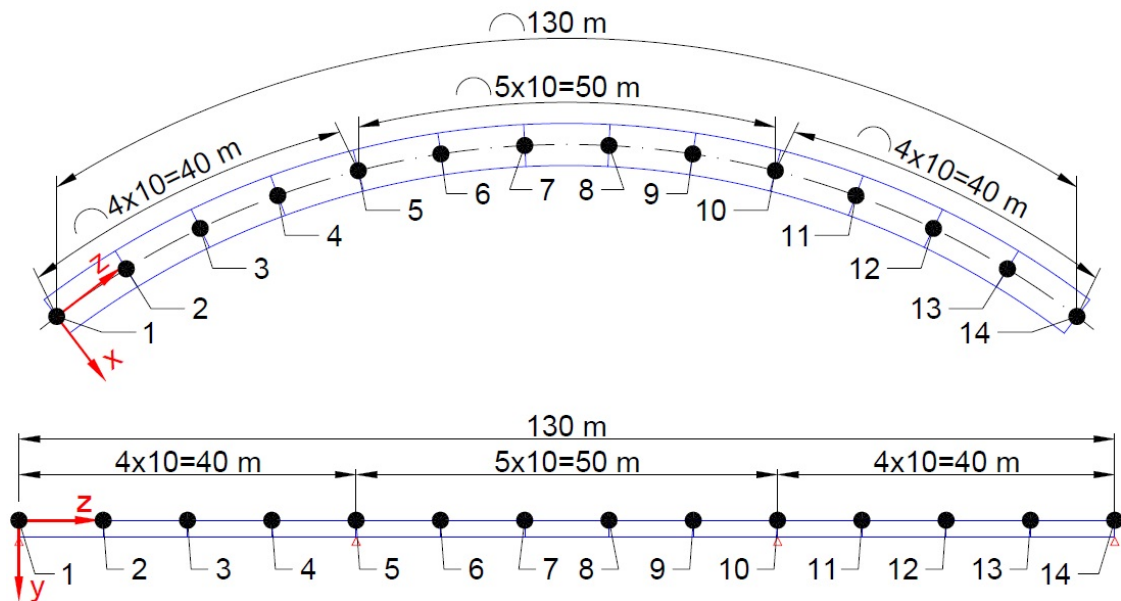


FIGURA 5.74 Ejemplo de verificación 3: Planta y Alzado

La sección es un cajón mixto trapezoidal compuesto por 13 paneles y 12 nodos. El ancho de la losa superior es de 10 m, con dos voladizos laterales de 2.5 m. El espesor de la losa es 250 mm. El ancho del cajón de varía entre los 5 m en la losa superior y los 3 m en el ala inferior. El espesor de las almas es 15 mm, mientras que el del ala inferior es 20 mm. El canto total de la sección, incluyendo espesores de la losa superior y tabla inferior, es 2 m. La sección también dispone de dos platabandas superiores bajo la losa de hormigón de 0.5 m de ancho, 0.25 m de voladizo exterior y 30 mm de espesor. Entre ambas platabandas se ha dispuesto una chapa de cierre de 5 mm. Para conectar las platabandas con la losa se han dispuesto paneles de conexión a la altura de las almas. Todo lo anterior se muestra en la figura 5.75, donde se indica también la numeración de los nodos principales.

Los diafragmas se han supuesto de alma llena de 2 mm de espesor en diafragmas interiores y 200 mm en diafragmas de apoyos (1,5,10,14). Al igual que en los ejemplos 1 y 2, se ha bloqueado el movimiento en el modelo de elementos finitos de láminas en los apoyos. Además, se ha completado el cálculo considerando otras tipologías de diafragmas. En concreto, se han calculado las otras tres tipologías de diafragmas en celosía, que se han

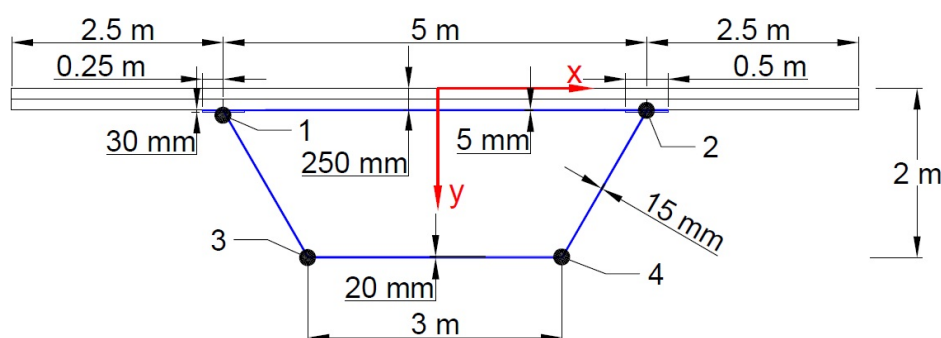


FIGURA 5.75 Ejemplo de verificación 3: Sección

definido con rigidez axial única en todas las barras. La rigidez de los diafragmas se ha igualado a la de un diafragma de 2 mm de espesor equivalente empleando las fórmulas analíticas para el cálculo de rigidez. Para lograr dicha rigidez, que en este caso es 2255 MN/m, se ha considerado un área de 46.64 cm² para el diafragma en Cruz de San Andrés, 41.9 cm² para el diafragma en K y 65.85 cm² para el diafragma en V.

En cuanto al modelo de cálculo, se han considerado una discretización de 10 barras entre diafragmas, lo que equivale a 130 barras y 131 nodos.

5.5.2 Propiedades de la sección

En este apartado se describirán las propiedades de la sección estudiada. Para el cálculo, los paneles se han dividido en ocho subpaneles, excepto las platabandas y las conexiones que no se han dividido.

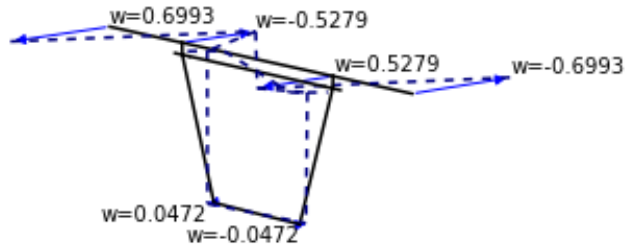
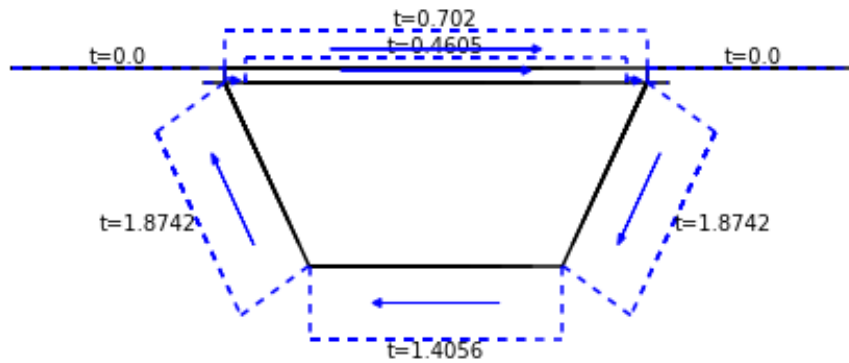
PROPIEDADES DE VIGA RECTA

Flexocompresión

- $A = 0.5295 \text{ m}^2$
- $x_g = 0.0000 \text{ m}$
- $y_g = 0.4635 \text{ m}$
- $I_x = 0.2259 \text{ m}^4$
- $I_y = 3.4915 \text{ m}^4$
- $I_{xy} = 0.0000 \text{ m}^4$

Torsión

- $x_t = 0.0000 \text{ m}$
- $J_t = 0.4326 \text{ m}^4$
- $t_t = 0.1524 \text{ m}$
- $I_t = 0.0578 \text{ m}^6$

FIGURA 5.76 Ej3: Alabeo w_t FIGURA 5.77 Ej3: Deformación angular t_t **Distorsión**

- $I_d = 0.1441 \text{ m}^6$
- $K_{D,P} = 2541 \text{ MN/m}$
- $J_d = 0.0017 \text{ m}^4$
- $K_{D,X} = 2392 \text{ MN/m}$
- $K_d = 6.196 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$
- $K_{D,K} = 2531 \text{ MN/m}$
- $I_{td} = 0.0058 \text{ m}^6$
- $K_{D,V} = 2531 \text{ MN/m}$
- $J_{td} = -0.0034 \text{ m}^4$

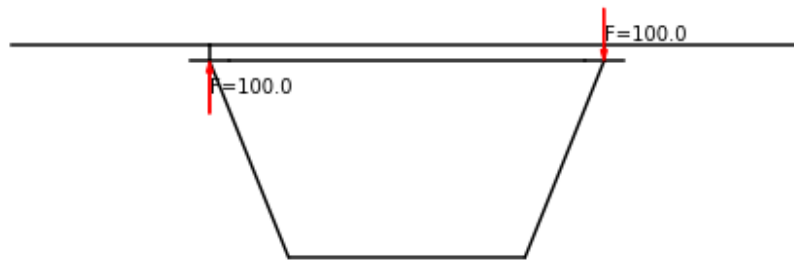


FIGURA 5.78 Ej3: Fuerzas externas

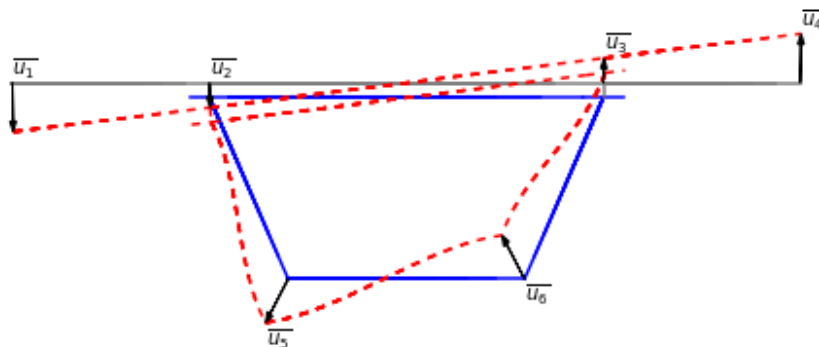


FIGURA 5.79 Ej3: Movimientos de distorsión u_d

Nodo	u_{dx}	u_{dy}	$u_{d\theta}$
1	0.043	1.9849	-0.394
2	0.043	1	-0.394
3	0.043	-1	-0.394
4	0.043	-1.985	-0.394
5	-1.2215	1.7647	-0.4267
6	-1.2215	-1.7647	-0.4267

TABLA 5.3 Ej3: Movimientos de distorsión u_d

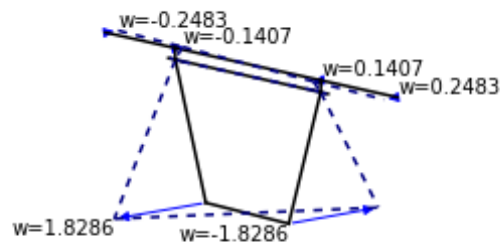


FIGURA 5.80 Ej3: Alabeo w_d

PROPIEDADES DE VIGA CURVA

Propiedades

- $Q_u^c = -0.0866 \text{ m}^4$
- $I_x^c = 0.2259 \text{ m}^4$
- $I_y^c = 3.4915 \text{ m}^4$
- $I_t^c = 0.0585 \text{ m}^6$
- $I_d^c = 0.1444 \text{ m}^6$
- $I_u^c = 0.1245 \text{ m}^4$
- $I_{xy}^c = -0.0086 \text{ m}^4$
- $I_{xt}^c = 0.0108 \text{ m}^5$
- $I_{xd}^c = -0.0082 \text{ m}^5$
- $I_{xu}^c = -0.1552 \text{ m}^4$
- $I_{yt}^c = -1.257 \cdot 10^{-3} \text{ m}^5$
- $I_{yd}^c = 3.51 \cdot 10^{-4} \text{ m}^5$
- $I_{yu}^c = -9.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
- $I_{td}^c = 0.0054 \text{ m}^6$
- $I_{tu}^c = -7.36 \cdot 10^{-3} \text{ m}^5$
- $I_{du}^c = 5.62 \cdot 10^{-3} \text{ m}^5$
- $J_t^c = 0.4326 \text{ m}^4$
- $J_d^c = 1.66 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$
- $J_{td}^c = -3.51 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$

Alabeos y deformaciones

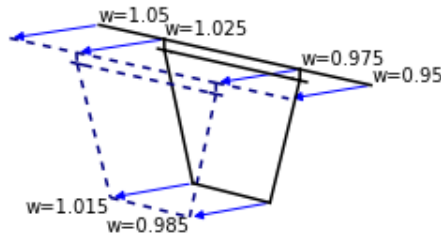


FIGURA 5.81 Ej3: Alabeo w_n^c

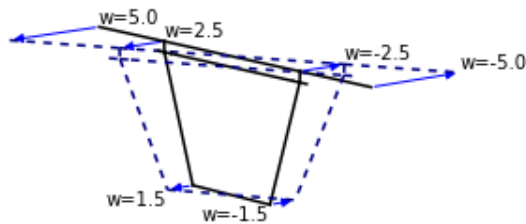


FIGURA 5.82 Ej3: Alabeo w_x^c

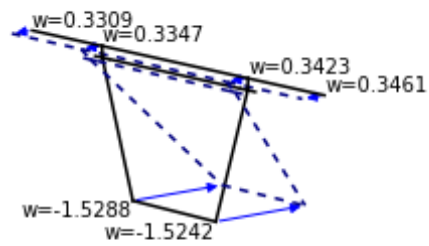


FIGURA 5.83 Ej3: Alabeo w_y^c

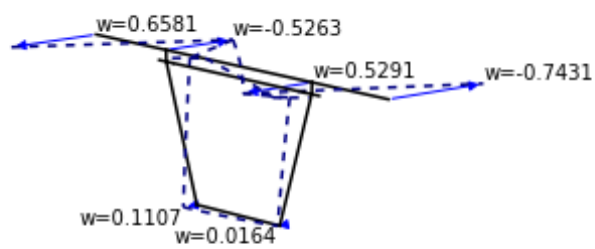


FIGURA 5.84 Ej3: Alabeo w_t^c

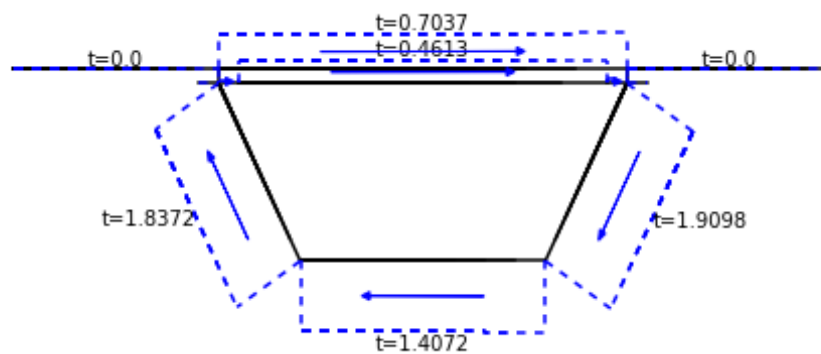


FIGURA 5.85 Ej3: Deformación angular t_t^c

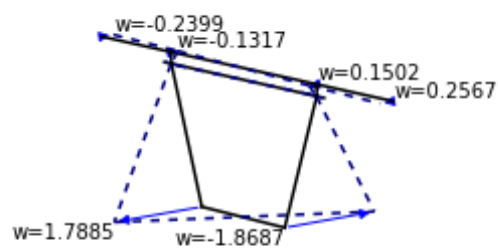


FIGURA 5.86 Ej3: Alabeo w_d^c

El cálculo de las propiedades según la teoría clásica se llevó a cabo siguiendo lo indicado en el apéndice B. Para adaptar la geometría a la sección simplificada, se asumió que tanto la platabanda como la chapa de cierre son una única chapa de espesor equivalente que se superpone con la losa del cajón en la zona entre almas. El espesor equivalente de dicha chapa es 10.5 mm. Sin embargo, esta hipótesis se hizo únicamente para el cálculo de distorsión, ya que en el cálculo de flexión se ha podido introducir la sección real.

Estableciendo esta hipótesis, los parámetros considerados en el cálculo de distorsión conforme a la formulación de movimiento vertical unitario en el vértice superior son:

- $w_1 = -w_2 = 0.1215 \text{ m}^2$
- $K_d = 4.96 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$
- $w_3 = -w_4 = -1.7921 \text{ m}^2$
- $K_D = 2255 \text{ MN/m}$
- $I_d = 0.135 \text{ m}^6$
- $\eta = 0.68$

5.5.3 Acciones

En el ejemplo de verificación 3 se han comprobado un total de 10 casos de carga con el objetivo de abarcar las casuísticas más comunes en puentes continuos. La mayor parte de los casos de cargas se corresponden con carga de tráfico. Para ello, se ha considerado el LM1 del Eurocódigo EN1991-2 [131], el cual divide el tablero en carriles virtuales. En este caso, el tablero se ha subdividido en 3 carriles virtuales de 3 m de ancho, dejando 0.5 m de barrera a cada lado. El carril central es coincidente con el eje, mientras que los carriles laterales se ubican a 3 m del eje.

La subdivisión mencionada, junto con el resto de cargas permanentes, ha llevado al cálculo de los siguientes casos de carga:

- LC 1: Carga distribuida de 2.4 kN/m^2 introducida en toda la superficie del tablero que emula el pavimento. El objetivo en este caso es estudiar el comportamiento frente a cargas muertas.
- LC 2: Sobrecarga de tráfico en vano central y carril virtual 1 interior. Es decir, en el vano central, se consideran 9 kN/m^2 en el carril interior de la curva y 2.5 kN/m^2 en el resto de carriles. El objetivo es estudiar el momento positivo en el vano central y su distorsión concomitante.
- LC 3: Sobrecarga de tráfico los dos primeros vanos y carril virtual 1 interior. La distribución transversal es idéntica al caso anterior y el objetivo es estudiar el momento flector y la distorsión sobre pila.

- LC 4: Sobrecarga de tráfico en vano central y carril virtual 1 exterior. Esta variante del caso 2 invierte la distribución transversal de carriles. El objetivo es estudiar el momento positivo en el vano central y su distorsión concomitante.
- LC 5: Sobrecarga de tráfico los dos primeros vanos y carril virtual 1 exterior. Esta variante del caso 3 también invierte la distribución transversal de carriles. Además, el objetivo vuelve a ser estudiar el momento flector negativo en pila y su distorsión concomitante.
- LC 6: Vehículos pesados en centro de luz del vano central y carril virtual 1 interior. En este caso, se han dispuesto los tres vehículos pesados en centro de luz del vano central y centrados en cada respectivo carril, con el objetivo de seguir estudiando el comportamiento a momento positivo del puente. El vehículo de 600 kN se ha dispuesto en el carril interior, mientras que el de 200 kN se ha dispuesto en el exterior y el de 400 kN centrado.
- LC 7: Vehículos pesados en centro de luz del vano 1 y carril virtual 1 interior. La distribución transversal es idéntica al caso anterior pero en este caso los vehículos se disponen en el centro de luz del primero de los vanos.
- LC 8: Vehículos pesados en centro de luz del vano central y carril virtual 1 exterior. Esta variante del caso 6 invierte la distribución transversal de vehículos pesados.
- LC 9: Vehículos pesados en centro de luz del vano 1 y carril virtual 1 interior. Esta variante del caso 7, invierte la distribución transversal de vehículos pesados.
- LC 10: Hormigonado de la losa. Se supone que el peso de la losa, con una densidad de 25 kN/m^3 , actúa sobre la sección metálica. El objetivo es estudiar el comportamiento del puente también en construcción.

Las acciones descritas anteriormente son algunas de las cargas verticales más relevantes que actúan sobre los puentes mixtos de sección cajón. Estas cargas permiten realizar una comparación completa del elemento finito. Sin embargo, debido al gran número de cargas, el volumen de información generado en la comparativa es muy extenso. En este ejemplo, solo se mostrarán los resultados considerados más relevantes.

5.5.4 Movimientos

Revisando los distintos casos de manera global, no se han observado diferencias específicas asociadas a un determinado caso de carga. En general, en todos los casos se han observado comportamientos muy similares. Por ello, se tomará el LC 2, correspondiente

a una sobrecarga en vano central, como representativo del comportamiento de los movimientos del tablero.

Conforme aumenta el ancho de los tableros, fenómenos como el arrastre y la deformación por cortante se vuelven más notorios. Esto se observa claramente en las figuras 5.87 y 5.88, ya que la diferencia observada en la flecha vertical es mucho mayor a la observada en el giro radial de la sección.

No obstante, estas diferencias no afectan sustancialmente al cálculo de tensiones de distorsión ni al cálculo de reacciones en diafragmas. Por lo tanto, implementar la deformación por cortante es una mejora a realizar en el futuro.

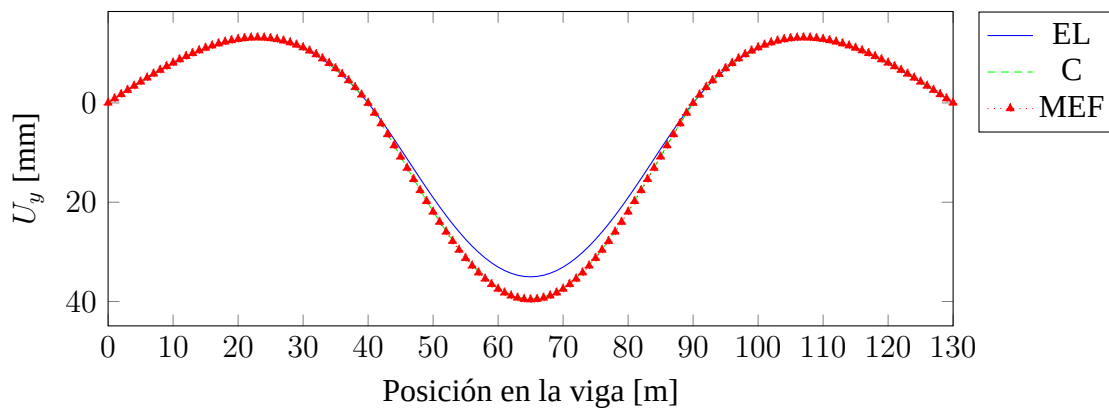
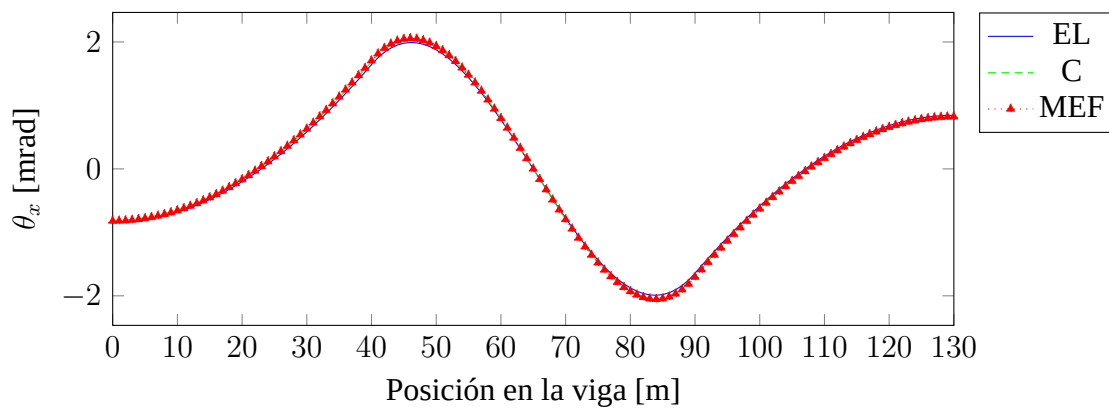
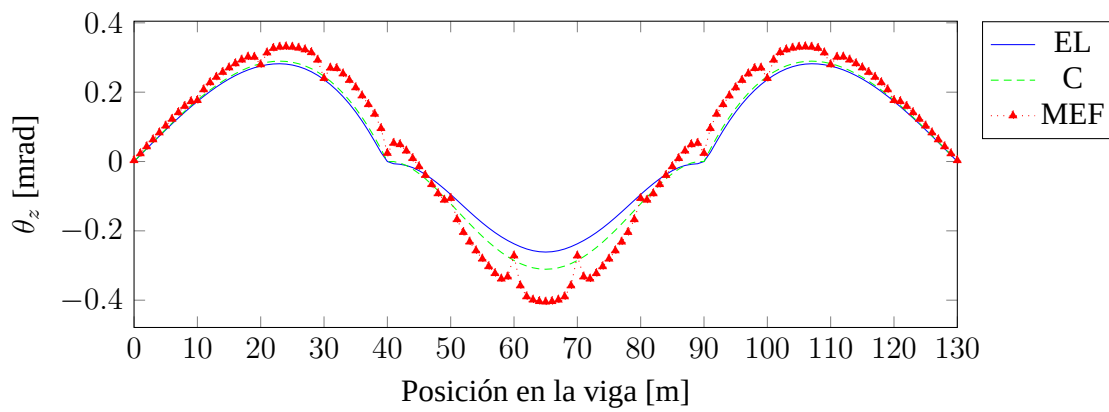
En lo que respecta a giros y distorsión, mostrados en las figuras 5.89 y 5.90, sí que se puede observar más claramente la influencia de la curvatura en la deformada por distorsión.

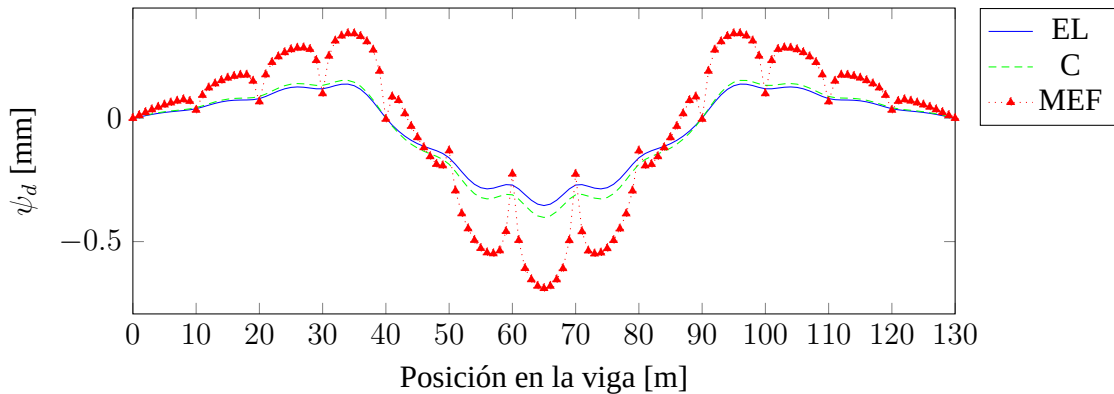
También se aprecia una diferencia sustancial, tanto en términos de rotación como de distorsión, entre el cálculo entre el modelo de elementos finitos tipo lámina y el resto. Sin embargo, esta diferencia se reduce hasta converger en la zona de diafragmas. Este fenómeno puede explicarse como la suma de varios motivos.

El primer motivo que explica las diferencias es que las fuerzas de desviación debidas a la flexión longitudinal modifican la deformada por distorsión. Es decir, la deformada por distorsión ya no esta causada por un par de fuerzas verticales en los nodos superiores del alma, sino que esta causada por fuerzas horizontales proporcionales a las tensiones por flexión. Esto se justifica en la medida en que la diferencia observada es proporcional al momento flector en la viga, ya que dicha diferencia tiende a reducirse tanto en los puntos de inflexión como en los extremos.

También es importante tener en cuenta que las cargas se han introducido en su posición real y no coinciden encima de las almas. Esto implica la existencia de una flexión transversal que también altera la deformada final transversal, y consecuentemente, el cálculo de movimientos en el eje de la viga a partir de la metodología de regresión. Sin embargo, este fenómeno se considera secundario en relación con el primero, ya que si bien la diferencia es mayor en las zonas cargadas, también guarda proporcionalidad con el mayor momento flector que causa la variación en la deformada transversal.

Por último, el hecho de que las dimensiones de la sección ya sean más importantes implica que, al igual que sucedía en la flecha vertical, exista una deformación secundaria asociada a la torsión y a la distorsión. No obstante, este fenómeno no se ha cuantificado.

**FIGURA 5.87** Ej3: LC 2: Movimiento vertical U_y **FIGURA 5.88** Ej3: LC 2: Giro θ_x **FIGURA 5.89** Ej3: LC 2: Giro θ_z

FIGURA 5.90 Ej3: LC 2: Distorsión ψ_d

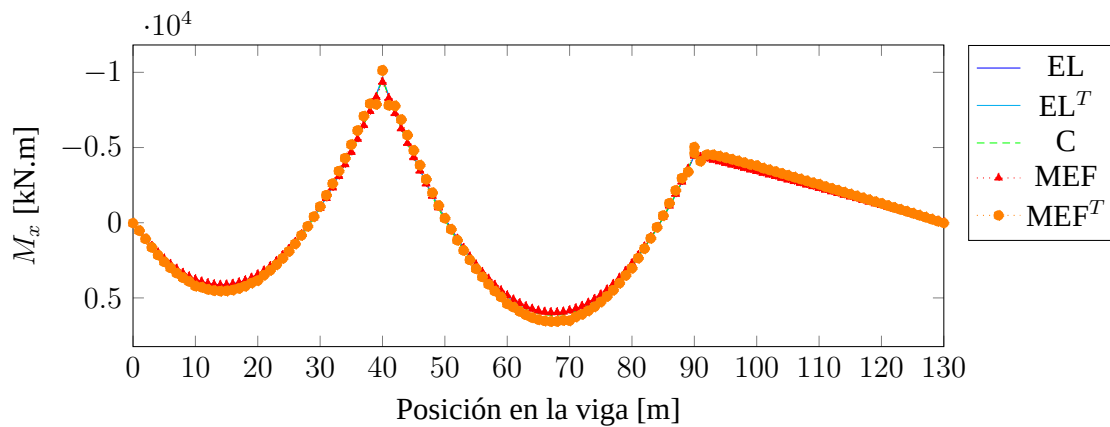
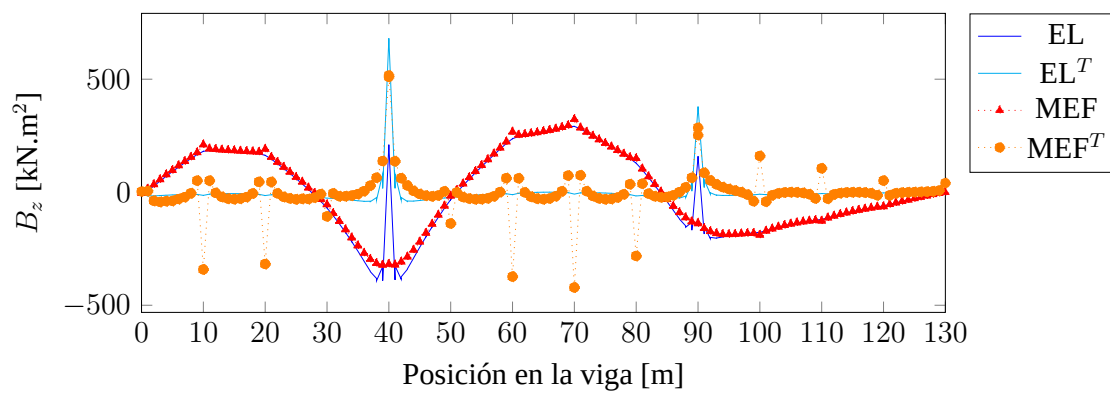
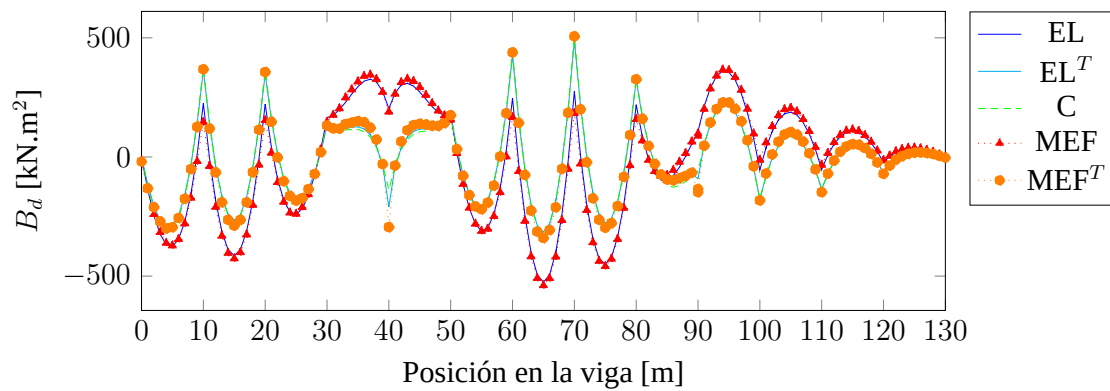
En cualquier caso, las diferencias observadas a nivel de movimientos no alteran sustancialmente el resultado final, tanto a nivel sobretensiones por distorsión como de reacciones en el diafragma. Por lo tanto, se tratarán como fenómenos secundarios.

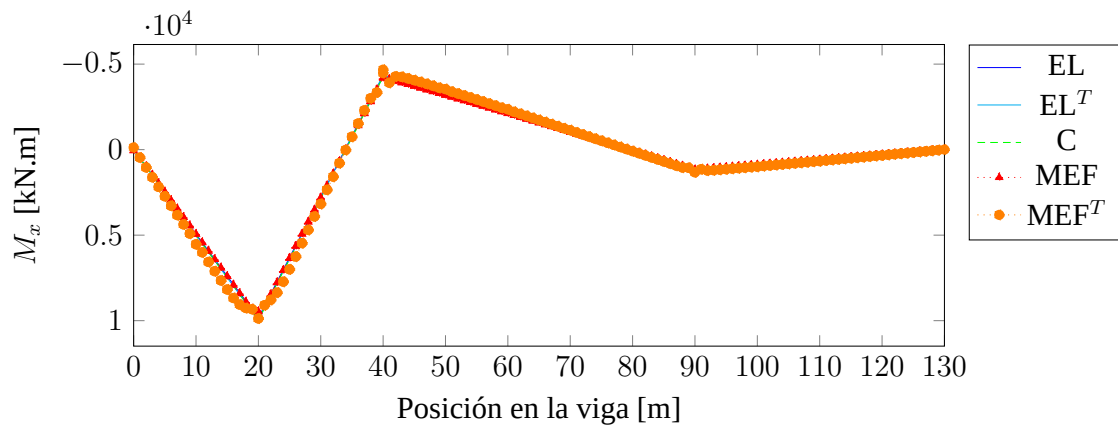
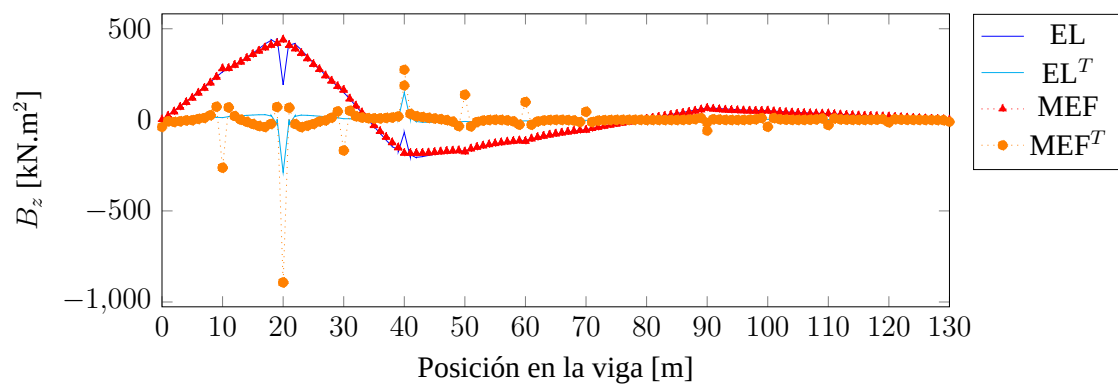
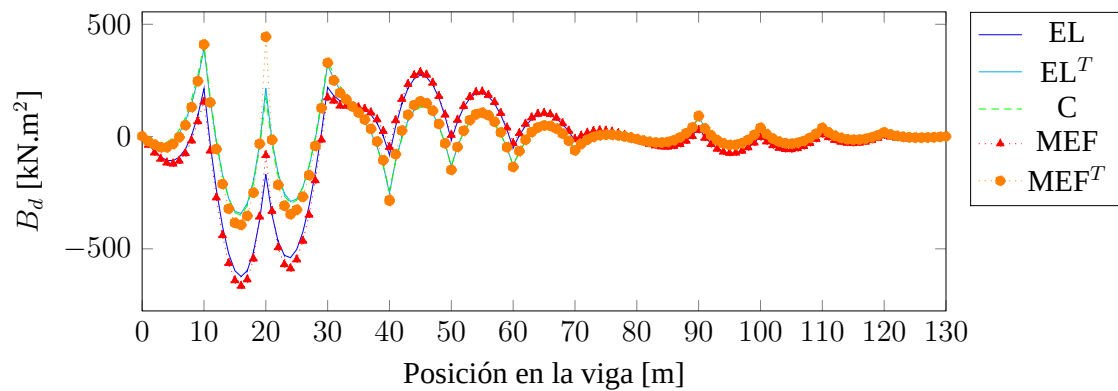
5.5.5 Esfuerzos

En términos de esfuerzos, se ha vuelto a observar una buena correlación entre los esfuerzos calculados empleando el elemento finito y los esfuerzos obtenidos del modelo de elementos finitos tipo lámina, con la excepción de las zonas donde se producen concentraciones de tensiones. Para ilustrarlo se muestran los principales resultados de los casos de carga 3 y 6 correspondientes a una carga distribuida interior en los vanos 1 y 2, y a una carga puntual en el centro de luz del vano 1 respectivamente.

De manera similar al ejemplo, la correlación a nivel de resultantes absolutas vuelve a ser muy buena, lo que indica que la obtención de esfuerzos mediante el elemento finito propuesto es fiable. Únicamente en el caso de las resultantes tensionales se observa una mayor diferencia, aunque los puntos donde se producen estas diferencias son precisamente los puntos donde se producen mayores concentraciones locales de tensiones.

Por lo tanto, se considera que el elemento es adecuado para la obtención de esfuerzos. En el siguiente apartado se mostrará su efectividad en el cálculo tensional.

FIGURA 5.91 Ej3: LC 3: Momento M_x FIGURA 5.92 Ej3: LC 3: Bimomento torsor B_z FIGURA 5.93 Ej3: LC 3: Bimomento distorsor B_d

FIGURA 5.94 Ej3: LC 6: Momento M_x FIGURA 5.95 Ej3: LC 6: Bimomento torsor B_z FIGURA 5.96 Ej3: LC 6: Bimomento distorsor B_d

5.5.6 Tensiones

La comparación de tensiones se centrará en la sobretensión por distorsión en el ala inferior, ya que se considera que es el resultado más importante.

En primer lugar, se muestran en la figura 5.97 los resultados del caso de carga 1, correspondiente a la carga uniforme repartida, para las distintas tipologías de diafragma.

Observando dicha figura, se pueden extraer varias conclusiones. La primera es que el elemento finito ofrece un ajuste aceptable con el modelo de elementos finitos, mejorando sensiblemente la precisión de los resultados respecto a la teoría clásica.

Otro aspecto a destacar es que los resultados de las distintas tipologías de diafragmas son prácticamente coincidentes. La principal diferencia se encuentra en las ubicaciones de los diafragmas, donde según el tipo de diafragma, puede haber una mayor o menor concentración de tensiones. La diferencia más importante se encuentra en los diafragmas en K, mientras que la menor diferencia se da en los diafragmas en V, ya que ninguno de sus montantes coincide con los vértices inferiores. Por esta razón, de aquí en adelante, se comparará únicamente el diafragma en V.

Para analizar las cargas de tráfico distribuidas, se consideran los casos de carga 3 y 5, correspondientes a los vanos 1 y 2 cargados interior y exteriormente respectivamente. Los resultados se muestran en las figuras 5.98 y 5.99.

Las conclusiones de la comparativa vuelven a ser similares al caso 1: el ajuste mostrado por el elemento finito es aceptable, y mejora al cálculo realizado según la teoría clásica. Además, este ajuste es mejor cuando se carga el exterior que cuando se carga el interior.

Por otra parte, se puede concluir de que las cargas interiores producen mayor distorsión entre diafragmas y en el interior de los vanos, mientras que las cargas exteriores producen una mayor distorsión en pila. No obstante, cabe señalar que la zona de pila se encuentra en el modelo de elementos finitos con el movimiento impedido, por lo que se entiende que parte de la distorsión observada se debe también a la concentración de tensiones que se produce.

Cuando se comparan las cargas puntuales, se observa una buena correlación entre el elemento finito y el cálculo en el modelo de láminas. Además, se mejora la precisión en comparación con la teoría clásica, con excepción de diferencias localizadas en los puntos de introducción de las cargas. También se observa como la mayor distorsión se da cuando la carga es interior y en el punto de aplicación de la carga. Todo lo anterior se puede

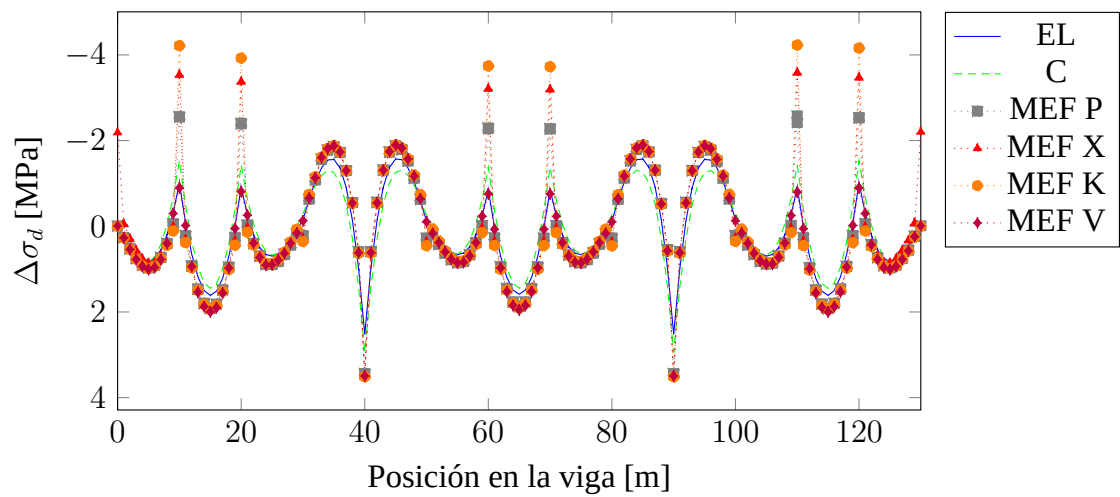


FIGURA 5.97 Ej3: LC 1: Sobretensión por distorsión

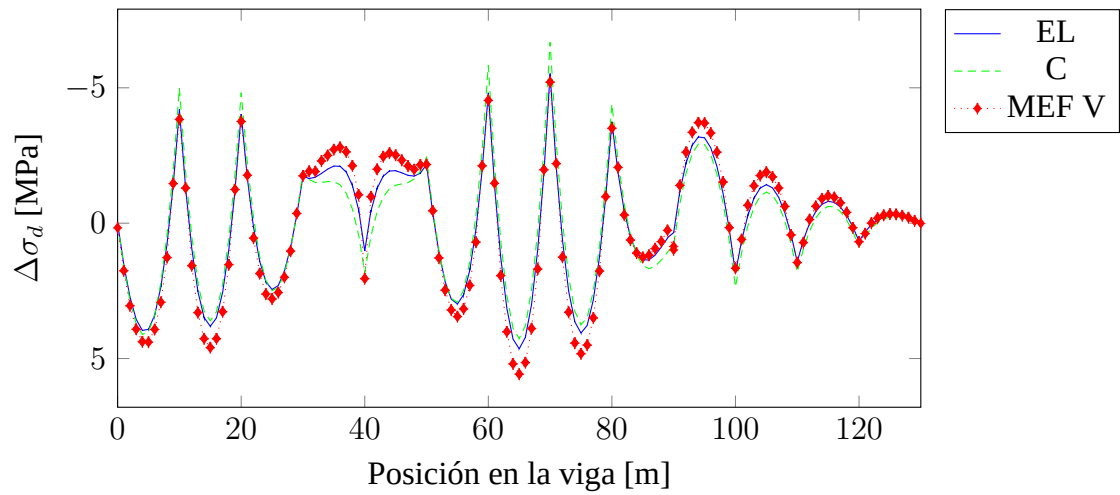


FIGURA 5.98 Ej3: LC 3: Sobretensión por distorsión

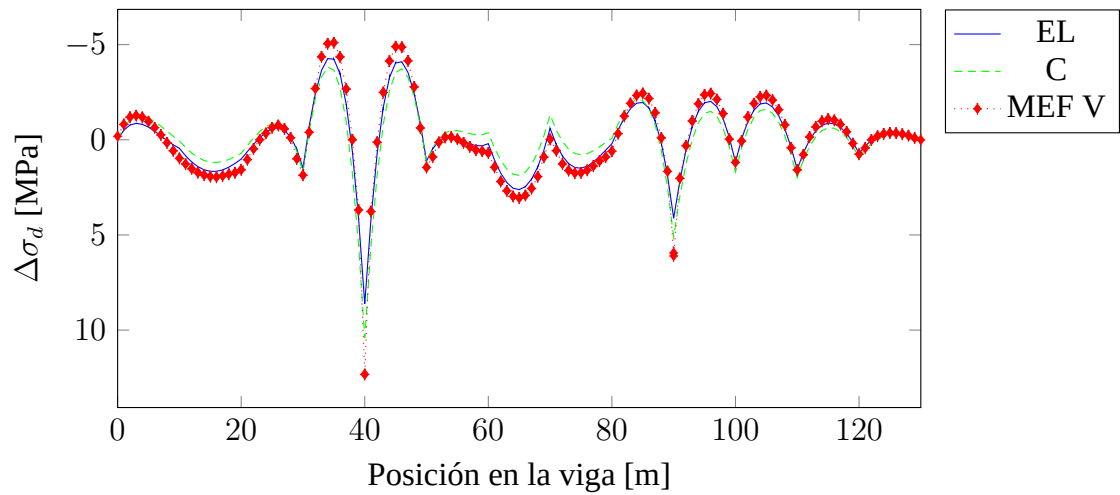


FIGURA 5.99 Ej3: LC 5: Sobretensión por distorsión

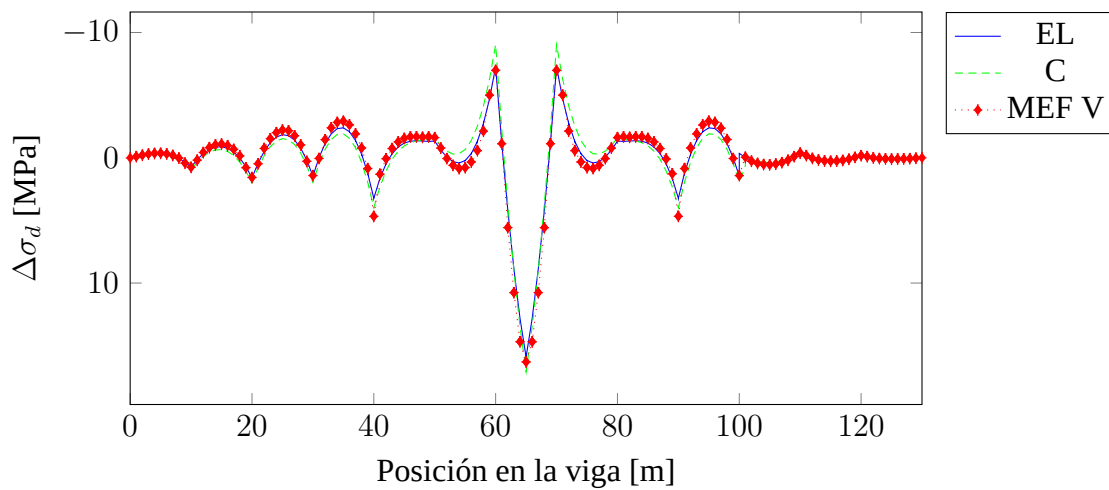


FIGURA 5.100 Ej3: LC 7: Sobretensión por distorsión

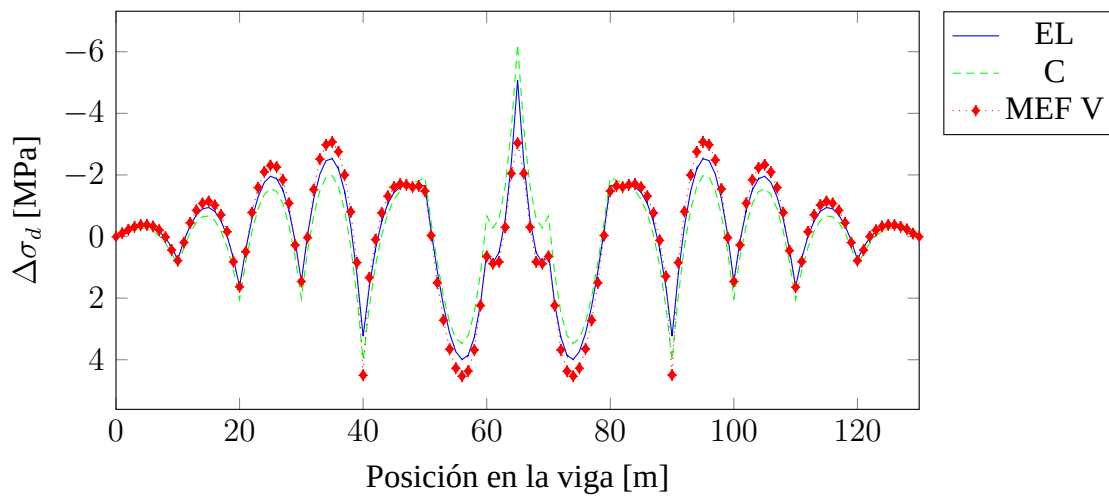


FIGURA 5.101 Ej3: LC 9: Sobretensión por distorsión

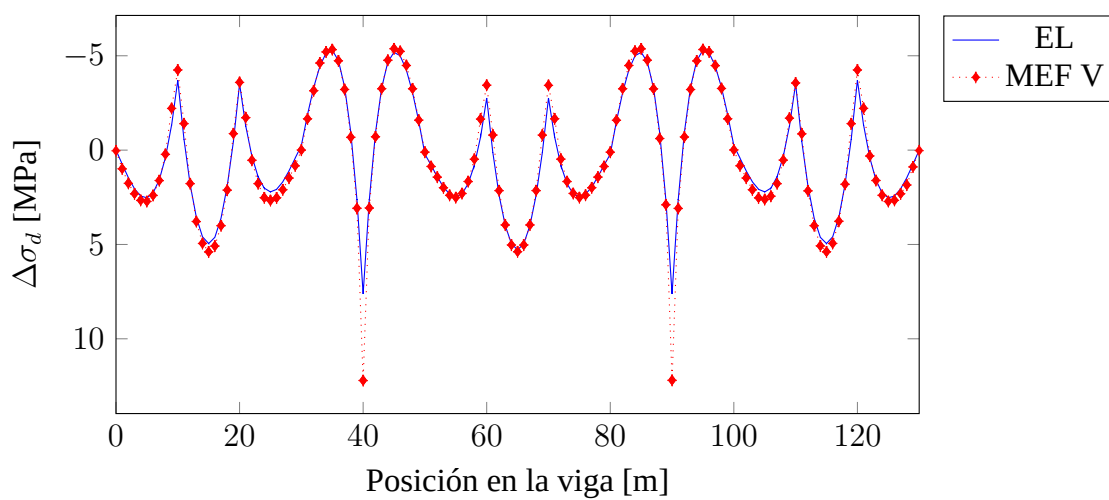


FIGURA 5.102 Ej3: LC 10: Sobretensión por distorsión

observar en las figuras 5.100 y 5.101.

Por último, cabe destacar el buen ajuste que se observa durante la fase de hormigonado de la losa (LC10), tal y como se muestra en la figura 5.102.

5.5.7 Reacciones en diafragmas

Para concluir, se presentarán los resultados de reacciones en diafragmas, entendidos como esfuerzos en los elementos que componen el diafragma. Se mostrarán varios tipos de diafragmas indistintamente, ya que la precisión en los resultados es muy similar, especialmente en los diafragmas compuestos por barras.

En primer lugar, se muestran los resultados del caso de carga distribuida (LC 1) y los resultados en los diafragmas tipo alma llena (Fig. 5.103) y tipo Cruz de San Andrés (Fig. 5.104).

Observando la primera de las figuras, correspondiente al diafragma de alma llena, se aprecia que los resultados del modelo de elementos finitos son ligeramente inferiores a los del elemento finito propuesto. Sin embargo, esto no sucede en la segunda figura ni en general en el resto de diafragmas en celosía. Esto se debe a que, como ya se expuso en el capítulo anterior, en el apartado 4.3.4, en diafragmas trapezoidales de alma llena la distribución de tensiones es irregular, y por lo tanto los resultados son más difíciles de comparar. No obstante se mantienen del lado de la seguridad.

En la segunda de las figuras, correspondiente al diafragma en Cruz de San Andrés, se puede apreciar más claramente cómo los resultados obtenidos mediante el elemento finito propuesto son prácticamente coincidentes con los del modelo de elementos finitos. Nótese que se ha promediado la compresión y tracción leídas en el modelo de elementos finitos en valor absoluto, ya que existen esfuerzos secundarios que producen una diferencia entre el valor absoluto de la compresión y el valor absoluto de la tracción.

La última conclusión que se obtiene al observar las figuras correspondientes a la carga uniforme es que la teoría clásica sobrevalora las reacciones en diafragmas, y en general, presenta mayores diferencias que el elemento finito propuesto. Esto también se podrá apreciar en el resto de figuras de comparación.

En las figuras 5.105 y 5.106 se muestran los casos de carga correspondientes a la sobrecarga de tráfico uniforme en el vano central. La primera figura se corresponde con el carril virtual 1 interior mientras que en la segunda figura el carril virtual 1 es exterior.

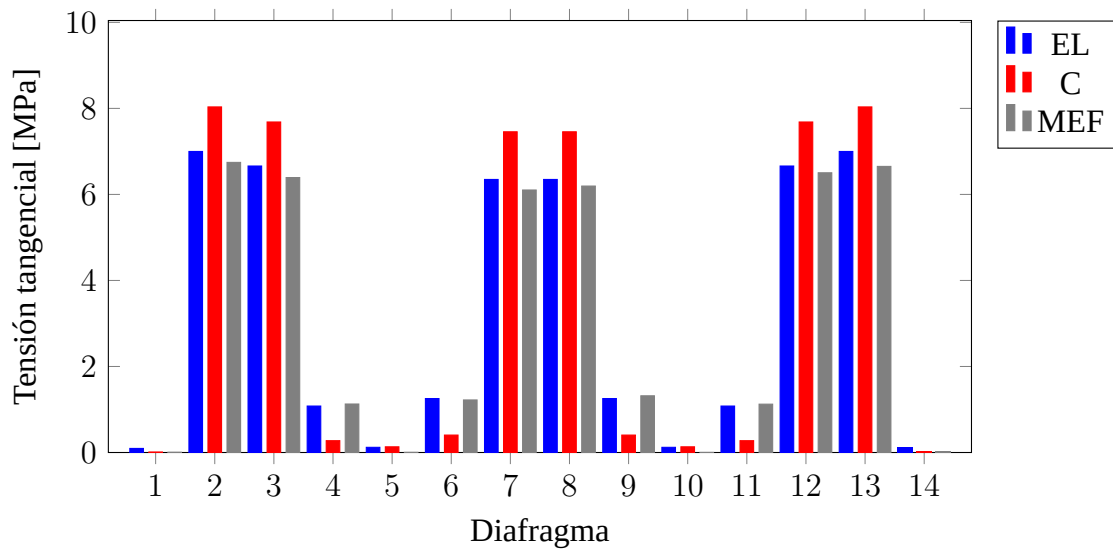


FIGURA 5.103 Ej3: LC 1: Tensión tangencial en diafragmas intermedios

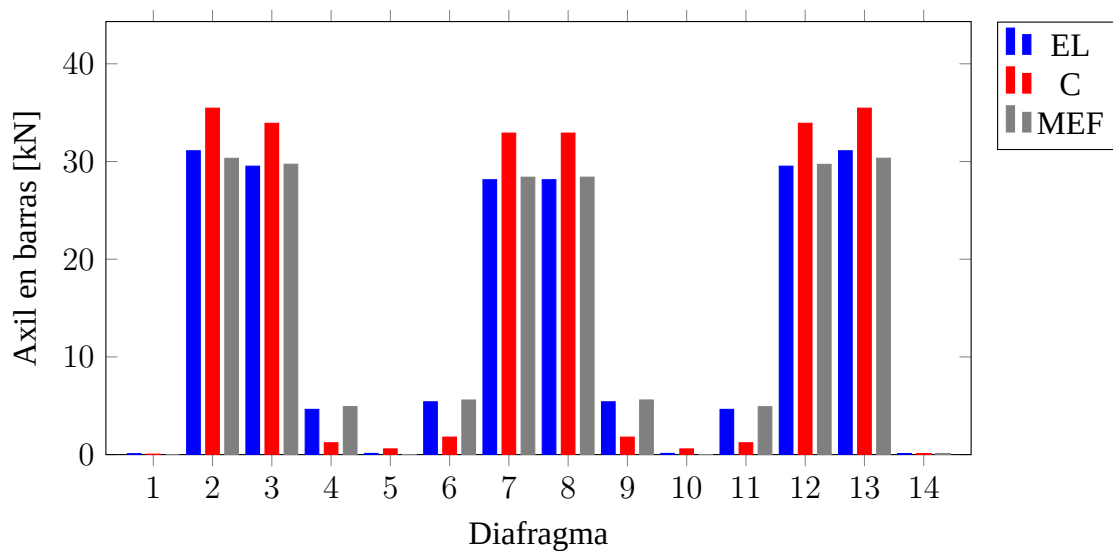


FIGURA 5.104 Ej3: LC 1: Axil en barras de diafragmas en X intermedios

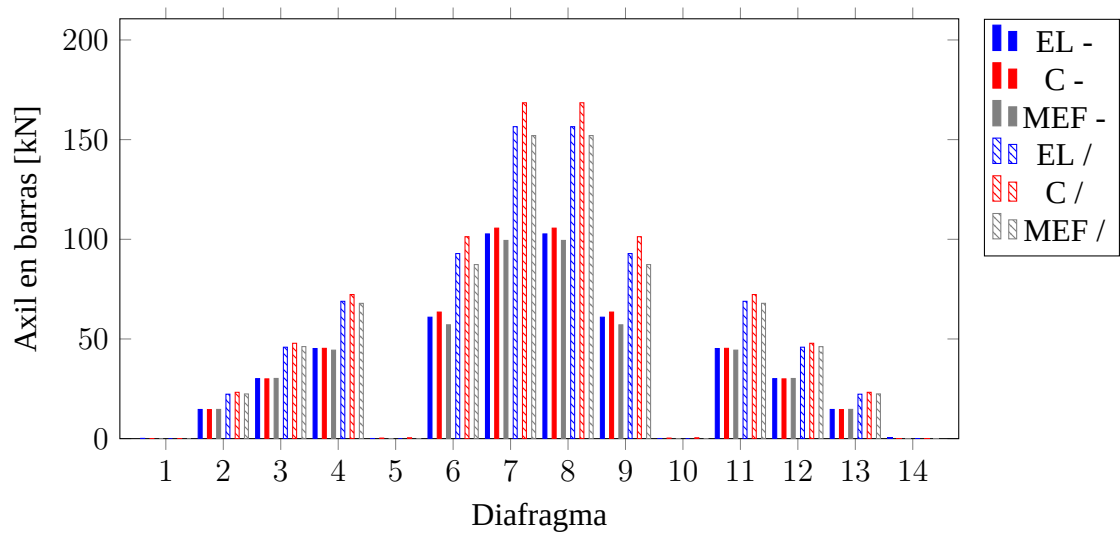


FIGURA 5.105 Ej3: LC 2: Axiles en barras de diafragmas en K intermedios

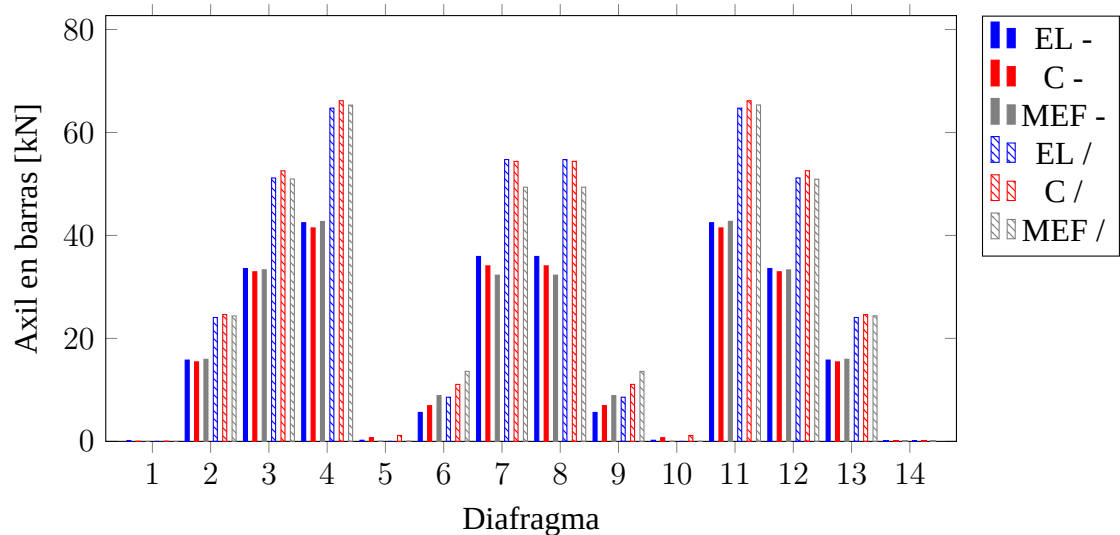


FIGURA 5.106 Ej3: LC 4: Axiles en barras de diafragmas en K intermedios

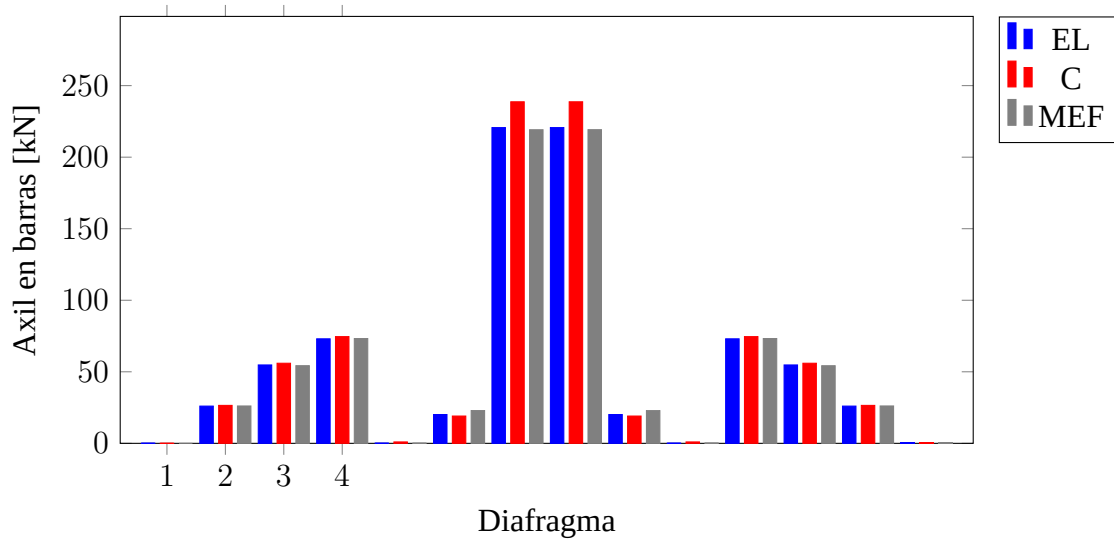


FIGURA 5.107 Ej3: LC 7: Axiles en barras de diafragmas en V intermedios

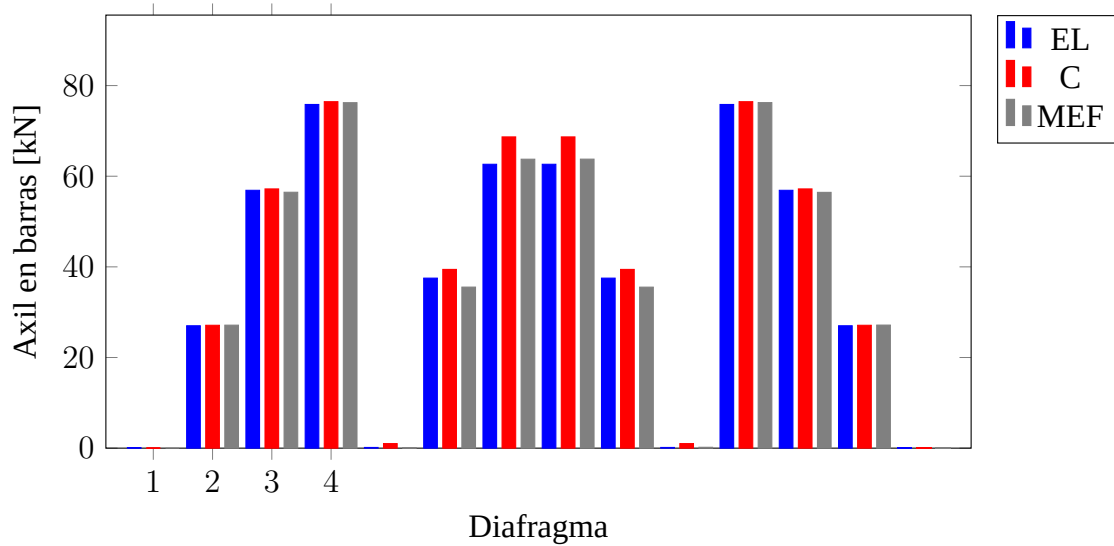


FIGURA 5.108 Ej3: LC 9: Axiles en barras de diafragmas en V intermedios

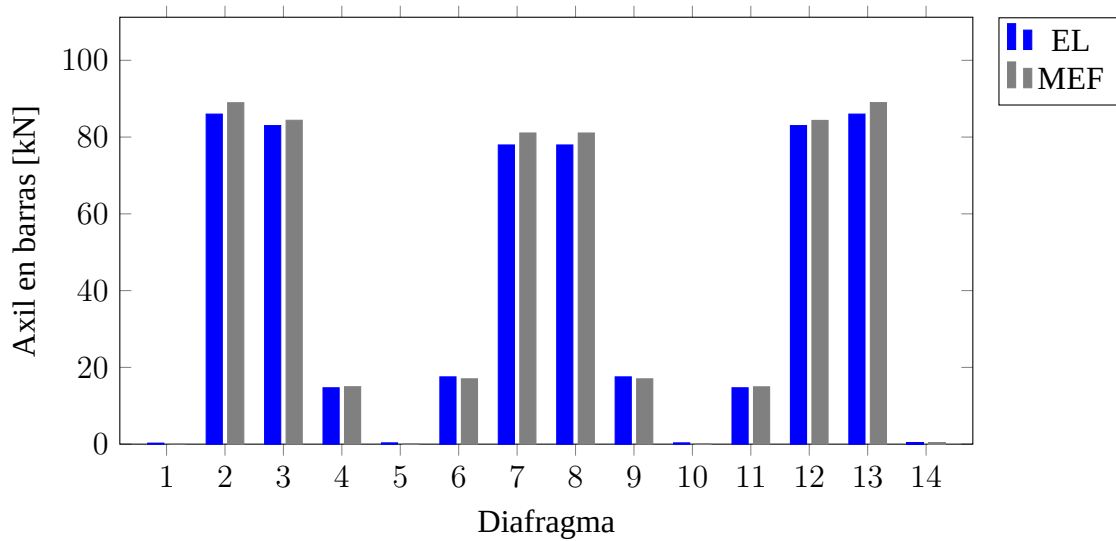


FIGURA 5.109 Ej3: LC 10: Axil en barras de diafragmas en X intermedios

Analizando los resultados se puede afirmar que cuando la carga se dispone en el interior de la curva produce mayores reacciones en los diafragmas que la carga principal se ubica en el exterior. Además, es en este caso de carga interior cuando el elemento finito muestra una mejor correlación.

Cuando en vez de analizar cargas distribuidas se consideran cargas puntuales en centro de luz, como es ocurre en las figuras 5.107 y 5.108, el ajuste del elemento finito alcanza resultados excelentes.

Las figuras 5.107 y 5.108 corresponden a cargas interiores y exteriores, y se observa que la carga interior produce mayor reacción en los diafragmas.

Por último, en la figura 5.109 se muestran las reacciones en los diafragmas en construcción. Una vez más, se observa como existe un buen ajuste entre el elemento finito propuesto y los resultados del modelo de elementos finitos.

5.5.8 Conclusión

A la luz de los resultados observados, se puede considerar que el elemento finito propuesto es válido para el análisis de puentes mixtos de sección cajón cuando se supone el tablero de sección constante. Aunque es cierto que se han encontrado discrepancias a nivel de movimientos, estas no afectan al resto de resultados, ya que han mostrado una correlación buena. Además, los resultados obtenidos mejoran en precisión a la teoría clásica de vigas.

CAPÍTULO 6

Recomendaciones para el control de la distorsión

6.1 Introducción

El objetivo de este apartado es establecer recomendaciones para controlar la distorsión en puentes mixtos de sección cajón. Estas recomendaciones se centrarán en definir el espaciamiento máximo y la rigidez requeridos para los diafragmas antidistorsión, de manera que los efectos de la distorsión puedan ser ignorados en el cálculo de la viga.

Las recomendaciones se obtendrán mediante un cálculo paramétrico en el que se variará el espaciamiento entre diafragmas y su rigidez para una geometría de puente determinada, hasta llegar a una disposición que cumpla con un límite de distorsión fijado. En concreto, se adoptará como criterio que **la tensión máxima admisible por distorsión no supere en más de un 10 % la tensión longitudinal media**. Es decir, de entre los criterios expuestos en el apartado 2.3.2, se ha optado por seguir el criterio fijado en el Eurocódigo EN1993 Parte 2 [9], ya que es la normativa de aplicación vigente.

El cálculo de la distorsión se realizará empleando el elemento finito desarrollado y justificado en apartados anteriores. Es importante mencionar que, en dicho elemento, se calculan no solo los alabeos por axil y flexión, sino también los alabeos por torsión y distorsión, teniendo en cuenta además la interacción entre estos últimos y los efectos de la curvatura. Sin embargo, esto no es lo habitual en la literatura técnica existente sobre puentes mixtos, donde lo más común para calcular las tensiones longitudinales debidas a la torsión y a la distorsión es ignorar las tensiones debidas a la torsión, y calcular únicamente las tensiones debidas a la distorsión mediante la analogía de la viga sobre lecho elástico. Esto lleva a que, tanto la literatura como las normativas, se refieran únicamente a la distorsión para referirse a las tensiones adicionales a la flexocompresión.

No obstante, en el apartado anterior se ha demostrado que la respuesta de un tablero mixto incluye tanto torsión no uniforme como distorsión, además de otros efectos. Por lo tanto, en este trabajo se considera más adecuado hablar de sobretensión para referirse a lo que comúnmente se denomina distorsión, aunque, se mencionarán ambos términos indistintamente, salvo que se indique lo contrario.

En cuanto a las recomendaciones propuestas, el estudio se centrará principalmente en tableros de 11.3 m de ancho. Este valor se considera un valor típico en el diseño de puentes, ya que dicho ancho es la suma de considerar dos calzadas de 3.5 m de ancho cada una, dos barreras de 0.65 m de ancho y una suma de arcones de 3.0 m. Además, se estudiarán las luces comprendidas entre los 30 y los 90 m, ya que se considera el rango habitual de aplicación en secciones de tipo cajón. No obstante, las conclusiones pueden ser aplicables a luces de mayor longitud, ya que se expondrá cómo a partir de los 90 m las propuestas realizadas tienden a ser conservadoras.

Partiendo del ancho de 11.3 m indicado anteriormente, se realizarán distintas variaciones en la geometría del puente con el fin de estudiar la relación entre las características del puente, la disposición de los diafragmas, su rigidez y la sobretensión. En primer lugar, se estudiarán los puentes en alineaciones rectas, donde se analizará la influencia que tiene el canto del tablero, la rigidez de los diafragmas y su espaciamiento fundamentalmente. Posteriormente, se extenderá el análisis a los puentes en alineaciones curvas, donde se estudiarán las consideraciones adicionales que hay tener en cuenta respecto a lo indicado para puentes en alineaciones rectas. El último paso consistirá en estudiar la influencia de la anchura en el cálculo de la distorsión, para lo cual se analizarán puentes ligeramente más anchos, en concreto alrededor de los 12.8 m. El objetivo es, una vez más, estudiar cómo afecta la anchura a los criterios definidos para alineaciones rectas. No obstante, también se estudiarán tableros de gran anchura, que se denominarán tableros singulares, y que llegarán hasta los 26.6 m de ancho.

Por último, el análisis se completará estudiando criterios complementarios a las recomendaciones anteriores, tales como la sobretensión por fatiga, la susceptibilidad de los rigidizadores o la tipología más adecuada de diafragmas en función de la geometría de la sección.

Sin embargo, el primer paso es definir unos conceptos generales aplicables al estudio realizado.

6.2 Criterios generales

En este apartado se definirán algunos conceptos generales que se emplearán a lo largo del presente capítulo.

El primero de los conceptos es la sobretensión ($\Delta\sigma_d$), que se define como la diferencia de tensión entre los vértices de un mismo ala, entendiendo las dos platabandas superiores como un ala única:

$$\Delta\sigma_d = \frac{\sigma_{z,j} - \sigma_{z,i}}{2} \quad (6.1)$$

Además, empleando las mismas tensiones, la tensión media en el ala (σ_m) se define como:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{z,j} + \sigma_{z,i}}{2} \quad (6.2)$$

Por lo tanto, se adoptará el criterio de que se puede ignorar la distorsión cuando el ratio entre la sobretensión y la tensión media ($\Delta\sigma$) sea inferior al 10 %:

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\sigma_d}{\sigma_m} < 10 \% \quad (6.3)$$

En cuanto a la rigidez de los diafragmas, se utilizará con el concepto de espesor equivalente de diafragma (t_{eq}). Dicho espesor equivalente se define como la comparación entre la rigidez de un diafragma cualquiera (K_D) con la rigidez de un diafragma de alma llena ($K_{D,WP}$) de espesor 1 mm. Es decir:

$$t_{eq}[mm] = \frac{K_D}{K_{D,WP}(1[mm])} \quad (6.4)$$

Se trata de un concepto previamente empleado por diversos autores, que permite la comparación entre diferentes tipologías de diafragma para una misma geometría. Además, tiene otra ventaja: presenta un orden de magnitud similar independientemente de la geometría, lo que permite la comparación entre puentes de distintos anchos o luces, por ejemplo.

En cuanto a las reacciones en los diafragmas, se empleará la relación entre la reacción calculada empleando el elemento finito y la torsión de diseño por resistencia T . Para poder compararlas, se representará la reacción en términos de torsió, por lo que la relación se define como:

$$T = \frac{R_D \cdot b_s}{2 \cdot M_{T,r}} \cdot 100 [\%] \quad (6.5)$$

En la ecuación anterior, el torsor de diseño por resistencia ($M_{T,r}$) se define como la suma del esfuerzo torsor tributario debido al LM1 del Eurocódigo (EN1991 Parte 2 [131]) factorizado y a los efectos de la curvatura. Es decir, en tableros donde no existe curvatura en planta el torsor de diseño por resistencia es el resultado de sumar la totalidad del peso de los carros que producen torsión positiva, multiplicados por su excentricidad, y la sobrecarga uniforme distribuida en la mitad del tablero, multiplicada por la longitud entre diafragmas antidistorsión (S_D) y por su excentricidad; y todo ello multiplicado por el factor de seguridad en ELU. Cuando el tablero es curvo en planta, se debe añadir la parte tributaria correspondiente el momento flector en ELU (M_{Ed}) según lo indicado en el apéndice B.

Expresado matemáticamente para un ancho entre barreras (b_r), el torsor de diseño por resistencia ($M_{T,r}$) en este caso es:

$$M_{T,r} = 1.35 \cdot S_D \cdot \left(19.5 \cdot \left(\frac{b_r}{2} - 1.5 \right) + 2.5 \cdot \frac{b_r^2}{8} \right) + 1.35 \cdot \left(600 \cdot \left(\frac{b_r}{2} - 1.5 \right) + 400 \cdot \max \left(\frac{b_r}{2} - 4.5, 0 \right) + 200 \cdot \max \left(\frac{b_r}{2} - 7.5, 0 \right) \right) + \frac{M_{Ed} \cdot S_D}{R \cdot \beta} \quad (6.6)$$

Una vez definidos los conceptos generales, se procede a mostrar el estudio realizado.

6.3 Tablero recto

6.3.1 Introducción

En primer lugar, se analizarán los criterios para el diseño de diafragmas interiores de puentes en alineaciones rectas.

Este análisis se realizará mediante el estudio de puentes de tres vanos con una luz principal que varía entre los 30 m y los 90 m en intervalos de 15 m, y luces laterales equivalentes al 80 % de la luz principal. Para todos los casos se ha considerado tablero de canto constante, y en los puentes con una luz principal de 60 m, 75 m y 90 m se ha considerado la posibilidad de canto variable. Para cada una de las luces anteriores se estudiarán 6 espaciamientos entre diafragmas interiores. Además, para cada uno de los espaciamientos, se considerarán 8 rigideces de diafragmas. En total se estudiarán 384 casos.

El resultado de este análisis serán unas gráficas que indicarán la relación entre el espa-

ciamiento, la rigidez y la sobretensión. También se mostrarán las reacciones máximas en diafragmas en cada caso. Por último, a partir del procesado de las gráficas anteriores, se establecerán unas recomendaciones para el diseño de los diafragmas interiores.

6.3.2 Metodología

Antes de exponer los resultados, es necesario definir los pasos que se han seguido hasta su consecución. Los principales se muestran en el siguiente listado:

- 1) Definición de las geometrías objeto de estudio.
- 2) Cálculo y dimensionamiento de las secciones del puente.
- 3) Cálculo y dimensionamiento de los diafragmas interiores.
- 4) Cálculo iterativo y obtención de resultados.

A continuación se desarrolla cada uno de los pasos anteriores.

6.3.2.1 Definición de las geometrías objeto de estudio

Con el fin de definir las geometrías objeto de estudio, se ha utilizado un tablero de 11.3 m de ancho y un puente de tres vanos como caso típico de puente mixto. Esta configuración permite su extrapolación tanto a puentes de múltiples vanos como a tableros de doble calzada con anchos ligeramente distintos. Por lo tanto, la geometría de partida seleccionada permite abarcar un rango amplio de utilización de los puentes mixtos.

En cuanto a las luces, se ha optado por que la luz principal (L) varíe entre los 30 m y los 90 m, ya que este es el rango de utilización habitual de los puentes mixtos. Además, se ha determinado que la luz de compensación (L_l) a cada lado sea el 80 % de la luz principal. Las luces principales se han variado en intervalos de 15 m, por lo que se han considerado los 5 casos que se muestran en la tabla 6.1.

Caso	L [m]	L_t [m]	L_l [m]	C [m]	C_v [m]	C_p [m]
1	30	78	24	1.5	—	—
2	45	117	36	1.75	—	—
3	60	156	48	2.4	1.5	3
4	75	195	60	3	2	3.5
5	90	234	72	3.6	2.5	4.5

TABLA 6.1 Luces y cantos considerados

La tabla 6.1 utiliza la nomenclatura mostrada en las figuras 6.1 y 6.2, para los casos tanto

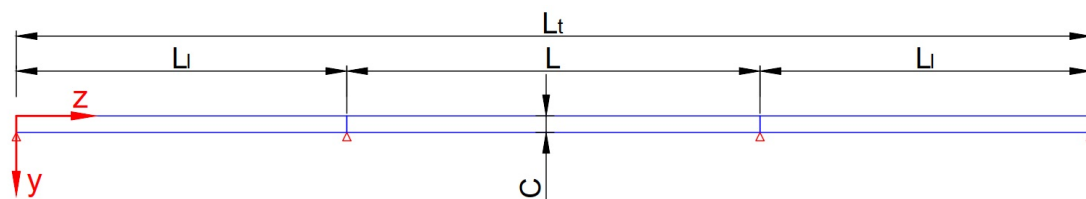


FIGURA 6.1 Casos de canto constante

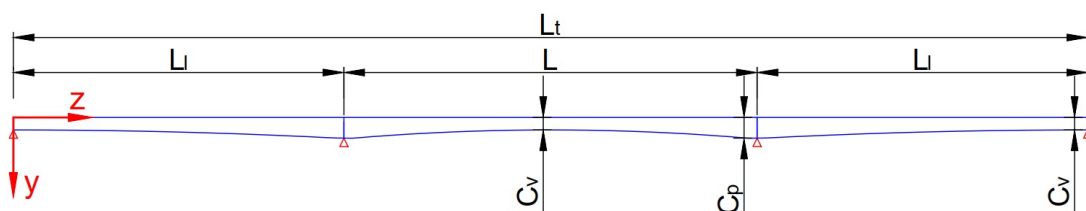


FIGURA 6.2 Casos de canto variable

de canto constante como canto variable.

Como se puede observar, el número total de casos finales en términos de luces y cantos son 8, ya que se suman 3 casos debidos a la consideración de canto variable a los 5 casos de canto constante.

En cuanto a la esbeltez del tablero, se han utilizado ratios canto-luz (C/L) habituales para esta tipología. En los casos de canto constante, se ha optado por esbelteces en el entorno de $L/25$ respecto a la luz principal. Únicamente en el caso de la luz de 30 m se ha fijado el canto mínimo en 1.5 m para que resulte inspeccionable. Para los casos de canto variable, las esbelteces son aproximadamente $L/20$ en pila y $L/40$ en centro de luz.

Luego, para cada una de las distribuciones de luces se han definido 6 distribuciones distintas de diafragmas antidistorsión. El criterio ha sido fijar un mínimo de 2 diafragmas intermedios por vano y variar de uno en uno hasta los 5 diafragmas por vano, ya que es en este entorno donde la mayoría de autores coinciden que esta el número mínimo de diafragmas requeridos. Además, se han estudiado los casos de aproximadamente 7 diafragmas por vano, y el caso un diafragma cada 3-4.5 m. El número exacto resultante de diafragmas por caso en el vano central se muestra en la tabla 6.2.

En la tabla 6.3 se muestra el espaciamiento entre diafragmas que resulta de considerar el número de diafragmas indicado en la tabla 6.2.

Por último, se ha definido la disposición de los rigidizadores transversales de alas y almas. Para ello, cada uno de los espaciamientos anteriores se ha subdividido en segmentos en el entorno de los 3-4.5 m, ya que este se considera que es un espaciamiento habitual

Caso	30 m	45 m	60 m	75 m	90 m
1	2	2	2	2	2
2	3	3	3	3	3
3	4	4	4	4	4
4	5	5	5	5	5
5	7	9	7	7	7
6	8	11	14	17	19

TABLA 6.2 Número de diafragmas en vano principal

Caso	30 m	45 m	60 m	75 m	90 m
1	10	15	20	25	30
2	7.5	11.25	15	18.75	22.5
3	6	9	12	15	18
4	5	7.5	10	12.5	15
5	3.75	4.5	7.5	9.38	11.25
6	3.33	3.75	4	4.17	4.5

TABLA 6.3 Espaciamiento de diafragmas en vano principal en metros

para los rigidizadores tanto del alma como del ala inferior. Como consecuencia de dicho espaciamiento, en el caso 6 de espaciamiento entre diafragmas coincide con un diafragma cada rigidizador.

La tabla 6.4 muestra los espaciamientos entre rigidizadores en el vano principal.

Caso	30 m	45 m	60 m	75 m	90 m
1	3.33	3.75	4	4.17	3.75
2	3.75	3.75	3.75	3.75	3.75
3	3	4.5	4	3.75	3.6
4	2.5	3.75	3.33	4.17	3.75
5	3.75	4.5	3.75	4.69	3.75
6	3.33	3.75	4	4.17	4.5

TABLA 6.4 Espaciamiento entre rigidizadores en metros

Además, se puede encontrar el listado de número de diafragmas, espaciamientos entre diafragmas y espaciamiento entre rigidizadores extendido al vano lateral en el apéndice E.2.1.

Una vez que se ha fijado la geometría principal de los distintos casos, se puede proceder al siguiente paso, que es el dimensionamiento del tablero a nivel resistente.

6.3.2.2 Cálculo y dimensionamiento de las secciones del puente

Además de la anchura, la sección del tablero presenta algunas dimensiones que son comunes a todos los casos. Concretamente, se ha supuesto un espesor de losa de 27 cm y un ancho superior del cajón de 6 m. También se ha fijado el vuelo exterior de la platibanda superior en 25 cm en todos los casos. Sin embargo, el resto de las dimensiones son variables y se han denominado acuerdo a la figura 6.3.

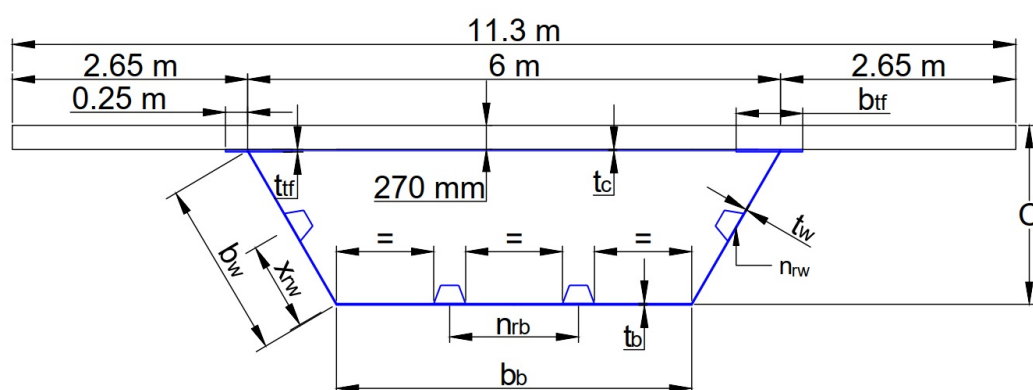


FIGURA 6.3 Sección

Las dimensiones variables y los rigidizadores son el resultado del dimensionamiento de los puentes objeto de estudio bajo el sesgo del autor del presente trabajo. Debido a que cada proyectista puede tener un sesgo propio, no se ha realizado un dimensionamiento exhaustivo buscando el óptimo de todas las secciones. En su lugar, se han considerado unos espesores aproximados que permitan eficiencias superiores al 80 % en las secciones críticas, y que a su vez permitan transiciones suaves entre espesores. También se ha fijado un espesor mínimo de chapas de 10 mm.

Para cada geometría se han definido 4 secciones tipo, que en general se corresponden con una sección para la zona de positivos (Sección 2), una sección en la zona de negativos (Sección 4), una sección de transición (Sección 3) y una sección la zona de estribos (Sección 1). En las tablas 6.5 y 6.6 se resumen las principales dimensiones de las secciones. La definición completa de cada sección y donde se aplica se encuentra en el apéndice E.2.2.

Cabe aclarar que en las tablas 6.5 y 6.6 el término x_{rw} se refiere a la posición relativa en términos porcentuales respecto a la longitud del alma. Es decir, 25 % significa que está a un cuarto de la altura del alma medido desde el ala inferior. También se menciona en dichas tablas el término R_g , que indica el tipo de rigidizador considerado. Se trata de dos tipos distintos de rigidizadores cerrados cuya diferencia está en la geometría. En la figura 6.4 se ilustra su nomenclatura de las dimensiones, y en la tabla 6.7 se encuentran las di-

Dimensión	30 m	45 m	60 m	75 m	90 m
C [m]	1.5	1.75	2.4	3	3.6
b_b [m]	4	4	4	5	5
b_{tf} [m]	0.5 – 0.75	0.75 – 1	0.75 – 1	0.75 – 1.25	1
t_{tf} [mm]	15 – 35	15 – 45	15 – 55	15 – 55	15 – 30
t_b [mm]	10 – 35	10 – 50	10 – 45	10 – 55	10 – 60
t_w [mm]	12 – 20	12 – 25	12 – 20	12 – 25	12 – 25
t_c [mm]	0	0	0	0	0 – 25
n_{rb}	2	2 – 3	2	3	3
n_{rw}	0	1	2	2	2
$x_{rw,1}$ [%]	—	50	25	25	25
$x_{rw,2}$ [%]	—	—	75	75	75
R_g	1	1	2	2	2

TABLA 6.5 Principales dimensiones de las secciones de canto constante

Dimensión	60 m	75 m	90 m
C [m]	1.5 – 3	2 – 3.5	2.5 – 3.5
b_b [m]	4	4	5
b_{tf} [m]	0.75 – 1	0.75 – 1.25	1
t_{tf} [mm]	20 – 55	20 – 60	20 – 30
t_b [mm]	12 – 45	10 – 60	10 – 60
t_w [mm]	12 – 20	12 – 25	15 – 25
t_c [mm]	0	0	0 – 30
n_{rb}	2	3	3
n_{rw}	2	2	2
$x_{rw,1}$ [%]	25	25	25
$x_{rw,2}$ [%]	75	75	75
R_g	2	2	2

TABLA 6.6 Principales dimensiones de las secciones de canto variable

mensiones específicas de cada rigidizador.

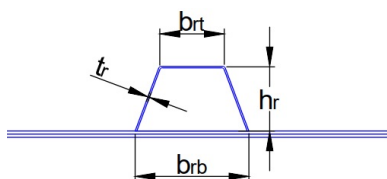


FIGURA 6.4 Rigidizador

Dimensión	Tipo 1	Tipo 2
b_{rt} [mm]	200	200
b_{rb} [mm]	350	350
h_r [mm]	200	250
t_r [mm]	8	10

TABLA 6.7 Dimensiones de los rigidizadores

Los materiales empleados en el cálculo han sido acero estructural tipo S355 y hormigón tipo C35/45. Las propiedades de cálculo han sido:

Dimensión	Hormigón	Acero
f [MPa]	$f_{ck} = 35$	$f_y = 355^1$
E [MPa]	30.000	210.000
G [MPa]	12.500	81.000

¹ Depende del espesor según UNE EN 10025.

TABLA 6.8 Materiales

Por último, es importante mencionar que las comprobaciones se han realizado utilizando el método de la sección reducida del Eurocódigo EN1993 Parte 1-5 [31].

Una vez definidas las geometrías y espesores de los tableros, el siguiente paso ha sido calcular los diafragmas.

6.3.2.3 Cálculo y dimensionamiento de diafragmas interiores

En este apartado se explicarán los criterios para el cálculo y dimensionamiento de los diafragmas interiores, ya que los diafragmas de pila y estribo se supondrán de alma llena y espesor 20 mm en todos los casos.

Como se ha explicado en la introducción, se han considerado 8 rigideces distintas de diafragmas. Las 6 primeras rigideces corresponden a valores fijos que permiten representar

adecuadamente la evolución con la rigidez. Estos valores comienzan en una rigidez equivalente de 0.01 mm, que se considera prácticamente despreciable, y continúan con 0.1, 0.5, 1, 2 mm y acaban en 10 mm. Más allá de 10 mm, los resultados se pueden considerar prácticamente estables, como se verá más adelante. Además, los valores se centran en el tramo entre 0.1 y 2 mm porque es en este intervalo donde se produce la mayor variación de resultados. Las otras dos rigideces restantes responden respectivamente a criterios de resistencia y rigidez.

Existen múltiples criterios para seleccionar la condición de rigidez, como se revisó en el apartado 2.3. De todos ellos, es más popular en España fue el propuesto por H. Nakai [110], ya que fue una condición a cumplir impuesta por la norma RPX-95 [121]. Por ello, se adoptará esta condición, que establece que la rigidez del diafragma debe ser equivalente al menos a 1.500 veces la rigidez de marco de la sección (K_d) multiplicada por el espaciamiento entre diafragmas (S_D).

$$K_D \geq 1500 \cdot K_d \cdot S_D \quad (6.7)$$

Las tablas 6.9 y 6.10 muestran los espesores equivalentes de diafragmas calculados por condición de rigidez. Cabe indicar que la condición de rigidez se ha impuesto respecto a la sección más flexible.

Caso	30 m	45 m	60 m	75 m	90 m
1	5.38	6.39	5.22	3.87	3.42
2	4.04	4.79	3.92	2.9	2.56
3	3.23	3.83	3.13	2.32	2.05
4	2.69	3.20	2.61	1.93	1.71
5	2.02	1.92	1.96	1.45	1.28
6	1.79	1.60	1.04	0.64	0.51

TABLA 6.9 Espesores en milímetros por condición de rigidez en tableros de canto constante

Caso	60 m	75 m	90 m
1	4.52	3.58	3.58
2	3.39	2.68	2.68
3	2.71	2.15	2.15
4	2.26	1.79	1.79
5	1.69	1.34	1.34
6	0.90	0.60	0.54

TABLA 6.10 Espesores en milímetros por condición de rigidez en tableros de canto variable

En cuanto al criterio de resistencia, se ha tomado la rigidez mínima resultante del dimensionamiento por resistencia de cuatro de los tipos más comunes de diafragmas: alma llena, San Andrés, K y V. Es decir, se han calculado los cuatro tipos, se ha calculado su rigidez, y se ha seleccionado el de rigidez mínima entre todos.

El dimensionamiento se ha realizado siguiendo los criterios fijados en el capítulo 4 y el Eurocódigo EN1993 1-1 [135]. Los perfiles empleados en las celosías han sido los de la serie SHS y en el caso de los diafragmas de alma llena se han calculado espesores redondeados al milímetro.

Se ha utilizado el torsor de diseño por resistencia ($M_{T,r}$) definido en la ecuación 6.6 como torsor de diseño. Este se ha transformado en esfuerzos en los elementos que componen el diafragma usando las fórmulas simplificadas del capítulo 4. Para el cordón superior se ha asumido una fuerza adicional por arriostramiento de la compresión en la platabanda superior, y una tracción por equilibrio de la carga vertical.

Las tablas 6.11 y 6.12 muestran los espesores considerados según la condición de resistencia.

Caso	30 m	45 m	60 m	75 m	90 m
1	0.68	0.77	0.95	0.87	0.86
2	0.68	0.77	0.81	0.81	0.76
3	0.68	0.77	0.81	0.75	0.72
4	0.68	0.66	0.81	0.73	0.7
5	0.68	0.66	0.81	0.73	0.66
6	0.68	0.66	0.81	0.69	0.63

TABLA 6.11 Espesores en milímetros por condición de resistencia en tableros de canto constante

Caso	60 m	75 m	90 m
1	0.87	0.85	0.71
2	0.73	0.84	0.63
3	0.73	0.83	0.62
4	0.65	0.83	0.57
5	0.65	0.71	0.57
6	0.6	0.7	0.52

TABLA 6.12 Espesores en milímetros por condición de resistencia en tableros de canto variable

Por último, cabe indicar que en cada posición de rigidizador de alas y almas donde no

existe un diafragma antidistorsión, se ha supuesto un diafragma de alma llena con un espesor equivalente de 0.01 mm. Esto se considera un límite inferior de rigidez para los rigidizadores y permite tener en cuenta el efecto favorable de los estos. En el apartado 6.6.3 se estudian con mayor detalle los rigidizadores.

6.3.2.4 Cálculo iterativo y obtención de resultados

Una vez definida la geometría del modelo, el siguiente paso ha sido definir las cargas aplicadas, calcularlas y combinarlas.

Las cargas consideradas han sido:

- **Peso propio de la estructura (G_1).**

Se trata de las cargas debidas al peso propio de la estructura metálica y de la losa de hormigón. Al hormigón se le ha asignado una densidad de 25 kN/m³ y al acero una densidad de 78.5 kN/m³.

A efectos de cálculo, ambas se han supuesto actuando sobre el puente completo en fase metálica. Cabe destacar que solo se ha considerado como peso de la estructura metálica el peso propio de la sección.

- **Carga muerta (G_2).**

La carga muerta se compone de la carga de barrera y la carga de pavimento. La primera es una barrera de 7.5 kN/m a cada lado y la segunda en una carga uniformemente repartida entre barreras de 2.4 kN/m², que equivale a 10 cm de pavimento.

Para el cálculo, se supone que ambas cargas actúan sobre la sección completa y sin tener en cuenta variaciones en los módulos elásticos debido a la reología.

- **Cargas de tráfico (Q).**

La carga de tráfico es el LM1 del Eurocódigo y está compuesta por cargas distribuidas y vehículos pesados aplicados en carriles virtuales.

La carga distribuida, se compone de una sobrecarga uniforme de 9 kN/m², que se distribuye en las posiciones más desfavorables del carril virtual 1, y otra sobrecarga uniforme de 2.5 kN/m², que se distribuye en las posiciones desfavorables del resto del tablero. Los vehículos pesados son tres, pesan 600 kN, 400 kN y 200 kN, y se aplican en los carriles virtuales del 1 al 3, respectivamente.

En este caso, se han distribuido los carriles virtuales ordenados del 1 al 3 de derecha a izquierda y viceversa. Es decir, el carril virtual 1 se puede ubicar o bien en el extremo derecho o bien en el extremo izquierdo, y a partir de ahí se disponen yuxtapuestos el resto, lo que da como resultado dos casos de carriles virtuales. A su vez, para cada configuración de carriles virtuales se ha supuesto la hipótesis de máxima flexión, donde se carga todo el ancho del tablero, y la hipótesis de máxima torsión, donde no se consideran las cargas que generen momento torsor opuesto al del carril virtual 1.

En lo que respecta a la aplicación de cargas, se ha discretizado la sobrecarga distribuida en tramos correspondientes a la distancia entre rigidizadores. Los vehículos pesados se han ubicado los nodos donde existen rigidizadores, así como en los puntos medios entre rigidizadores. Cabe señalar que los vehículos pesados se han modelado como cargas puntuales concentradas, por lo que no se han considerado los 1.2 m de distancia entre ejes del lado de la seguridad.

En cuanto al cálculo, se ha realizado sobre la sección completa sin considerar factores de modificación de los módulos de elasticidad.

Definidas las cargas, se procedió al cálculo. Las principales hipótesis realizadas fueron las siguientes:

- Se discretizó cada tramo entre rigidizadores en 4 elementos finitos. No se consideró una mayor discretización por velocidad de cálculo. Además, se considera que la precisión alcanzada es suficiente de acuerdo con los cálculos de contraste realizados.
- Se supuso que la rigidez de la losa en la zona de negativos es un 10 % de la rigidez teórica, y que la zona de negativos se extiende en un 15 % de la longitud del vano a cada lado de la pila. Cabe indicar que la reducción en la rigidez se ha aplicado a los elementos que están completamente dentro del intervalo delimitado por el 15 %.
- Las tensiones se han calculado utilizando secciones supuestas en el cálculo. En la zona de centro de vano, se ha utilizado una sección metálica para el peso propio y sección completa para el resto de cargas. En la zona de pila, se ha utilizado una sección metálica para el peso propio y una sección fisurada para el resto de cargas. Además, se ha tenido en cuenta el ancho efectivo en el cálculo de las tensiones de flexión conforme a lo indicado en los Eurocódigos EN1993 1-5 para el ala inferior y EN1994 1-1 [136] para la losa.

Una vez finalizado el cálculo, se combinaron las cargas a nivel de esfuerzos, reacciones en diafragmas y tensiones. En primer lugar, se combinaron las cargas de tráfico respetando la coherencia entre carriles virtuales, y posteriormente se han combinado las cargas permanentes con las cargas de tráfico. Para ello, se consideró un factor de 1.00 en ELS y 1.35 en ELU, que se aplica tanto a cargas permanentes como a cargas de tráfico.

Los principales resultados obtenidos tras el cálculo y su combinación fueron:

- Esfuerzos máximos y tensiones concomitantes en los vértices.
- Tensiones máximas por vértice y tensiones concomitantes en el resto de los vértices.
- Reacciones máximas en diafragmas.

Es importante destacar que en el listado anterior, los términos «vértices» y «nodos» hacen referencia a las cuatro esquinas que conforman el cajón metálico que se corresponden con las definidas en la figura 4.3.

Los resultados previos se han procesado para generar las gráficas que se presentan en la siguiente sección. Estas gráficas representan la relación entre la sobretensión y la tensión media ($\Delta\sigma$), así como la relación entre la reacción máxima en los diafragmas y la reacción de diseño por resistencia (T).

El procedimiento para obtener la relación entre la sobretensión y la tensión media en cada caso ha sido:

- 1) Obtener la envolvente de tracciones y compresiones máximas en los vértices de las alas, y sus concomitantes.
- 2) Calcular para cada vértice tensión media y su sobretensión concomitante.
- 3) Obtener las envolventes de tensión media máxima y mínima en el ala inferior y superior, y sus sobretensiones concomitantes.
- 4) Calcular el máximo o mínimo de cada listado según resulte más crítico.

El resultado final ha sido la comparación entre la tensión máxima/mínima media en cualquier punto del puente y la sobretensión máxima/mínima asociada a dicha tensión y al objeto de estudio. Es importante destacar que estas tensiones no tienen por qué coincidir en la misma posición longitudinal. Por ejemplo, si se estudia por ejemplo la sobretensión asociada a la tracción en el ala inferior, la tensión media máxima se puede dar en el vano lateral, mientras que la sobretensión máxima puede darse en el vano central. A pesar de esto, se considera que ambos términos son comparables, ya que si el dimensionamiento es

adecuado y optimizado, las tensiones máximas medias deberían resultar muy similares a lo largo del puente. Además, en el caso de que las tensiones fueran inferiores al máximo, se ha supuesto que se debe a que el coeficiente de utilización de la sección es inferior al de la sección crítica. Por lo tanto, existe margen para considerar una sobretensión adicional.

En resumen, el ratio de sobretensión ($\Delta\sigma$) se define como:

$$\Delta\sigma = \frac{\max(\overline{\Delta\sigma_d})}{\max(\overline{\sigma_m})} \cdot 100[\%] \quad (6.8)$$

Por otro lado, en este análisis solo se representarán las sobretensiones asociadas a las tensiones máximas en los vértices, ya que se considera que estas son las que gobiernan el dimensionamiento. Además, tras analizar los resultados, se ha determinado que las sobretensiones en el ala superior no condicionan en ningún caso por lo que solo se va a representar el ala inferior.

En cuanto a las reacciones en diafragmas, se representará la relación entre la reacción máxima en calculada para cada caso en los diafragmas interiores y la torsión de diseño por resistencia T . Para poder compararlas, la reacción se representará en términos de torsor, por lo que la relación mostrada en las gráficas se define como:

$$T = \frac{\max(\overline{R_D}) \cdot b_s}{2 \cdot M_{T,r}} \cdot 100[\%] \quad (6.9)$$

Concluida la descripción de la metodología empleada, se procede a mostrar los resultados.

6.3.3 Resultados

Se muestran a continuación los resultados del análisis.

6.3.3.1 Vano de 30 m y canto constante

Debido al canto mínimo requerido y al espesor mínimo de 10 mm en el ala inferior, la tensión de comparación de tracción en el ala inferior oscila alrededor de 260 MPa. Esto indica que la sección no está optimizada, y que su capacidad es mayor. Además, esta situación produce una alteración en los resultados cuando se compara con otras luces. Por lo tanto, se tomará una tensión de comparación a tracción 355 MPa.

Casos	S=10	S=7.5	S=6	S=5	S=3.75	S=3.33
$\max(\sigma_m)$ [Mpa]	355	355	355	355	355	355
$\min(\sigma_m)$ [Mpa]	-149	-147.3	-145.1	-149.1	-147.3	-149
$M_{T,r}$ [kN.m]	5.391	5.039	4.827	4.687	4.511	4.451

TABLA 6.13 Caso 30 m c.c.: Tensiones y reacciones de comparación

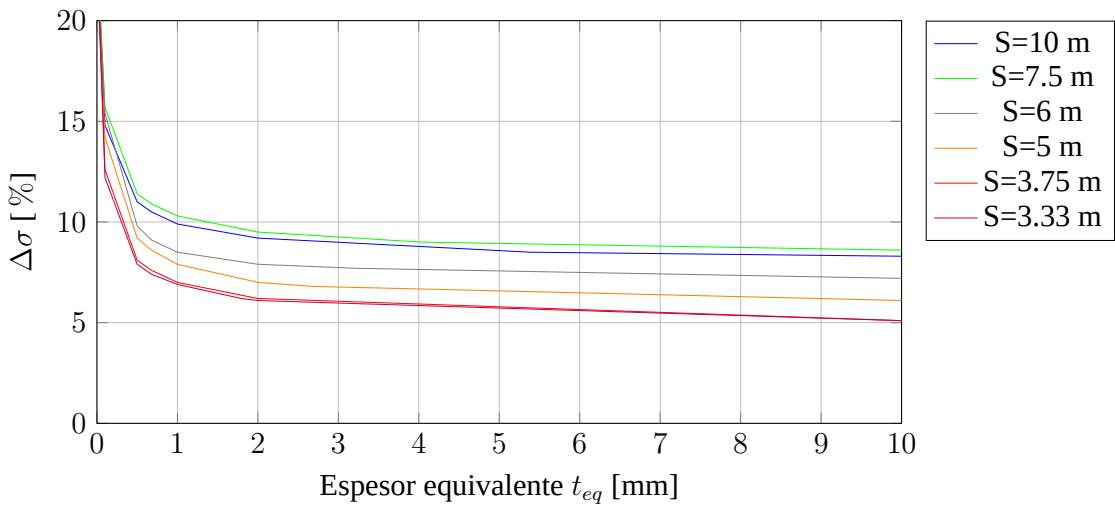


FIGURA 6.5 Caso 30 m c.c.: Tracción máxima en ala inferior

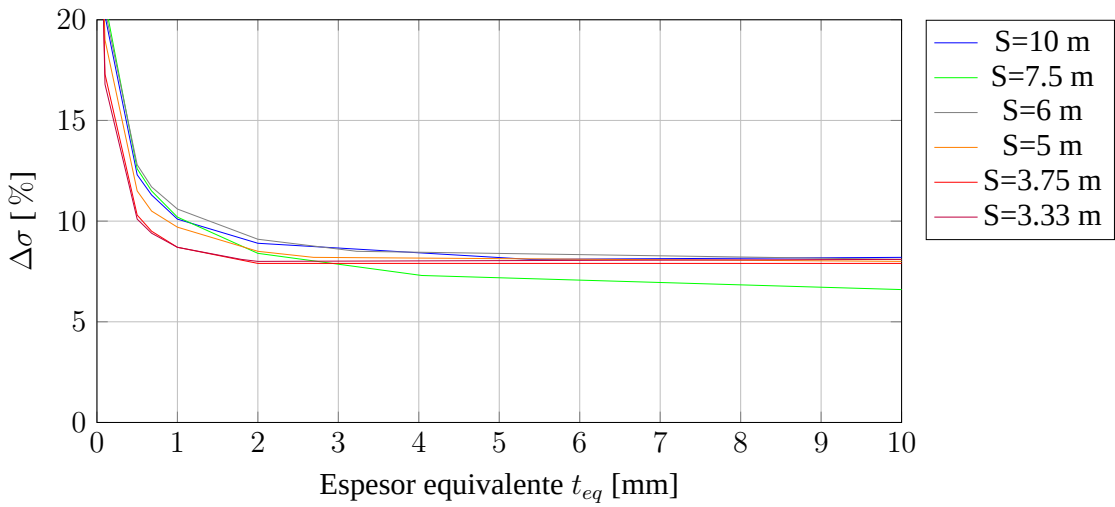


FIGURA 6.6 Caso 30 m c.c.: Compresión máxima en ala inferior

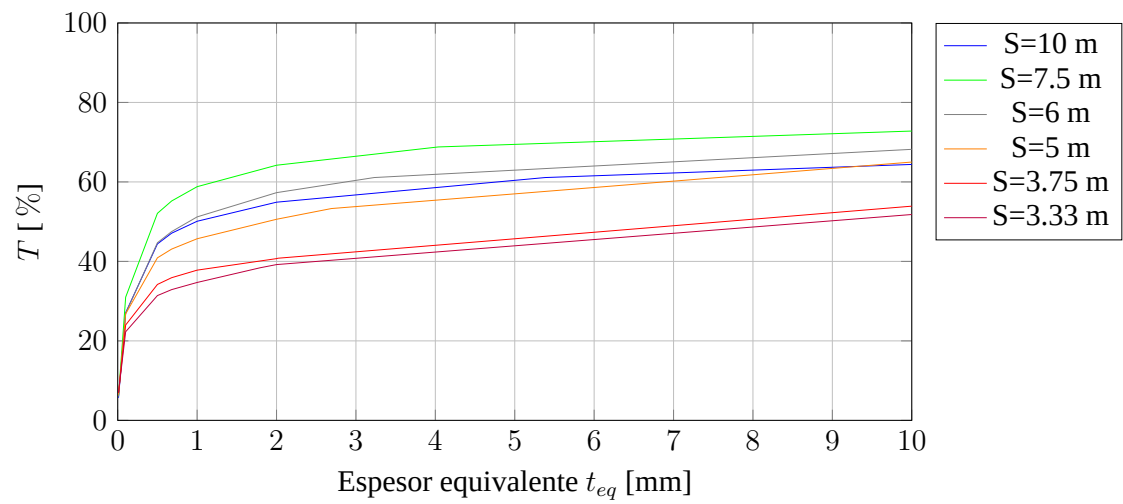


FIGURA 6.7 Caso 30 m c.c.: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.3.3.2 Vano de 45 m y canto constante

Casos	S=15	S=11.25	S=9	S=7.5	S=4.5	S=3.75
$\max(\sigma_m)$ [Mpa]	393.8	393.8	390.6	393.8	390.6	393.8
$\min(\sigma_m)$ [Mpa]	-188.7	-188.7	-192.5	-188.7	-192.5	-188.7
$M_{T,r}$ [kN.m]	6.095	5.567	5.250	5.039	4.616	4.511

TABLA 6.14 Caso 45 m c.c.: Tensiones y reacciones de comparación

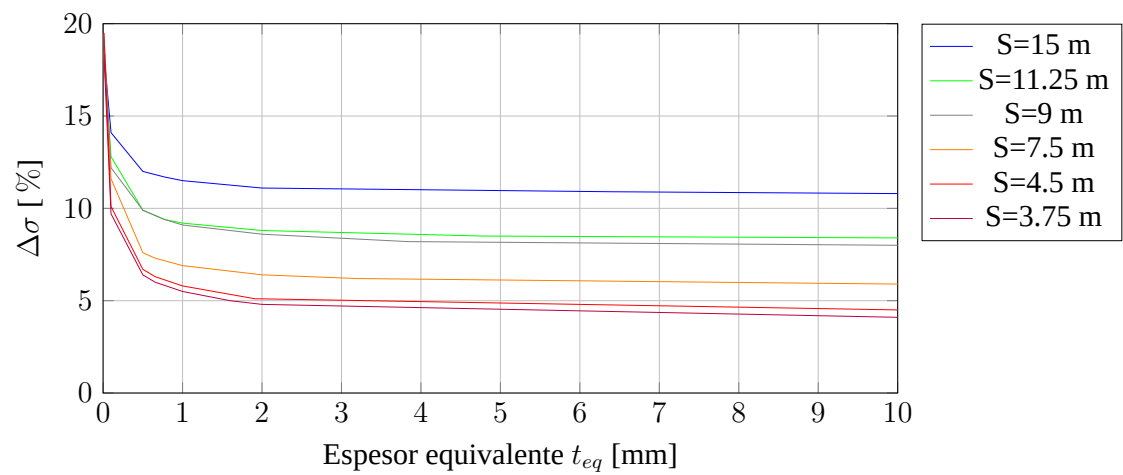


FIGURA 6.8 Caso 45 m c.c.: Tracción máxima en ala inferior

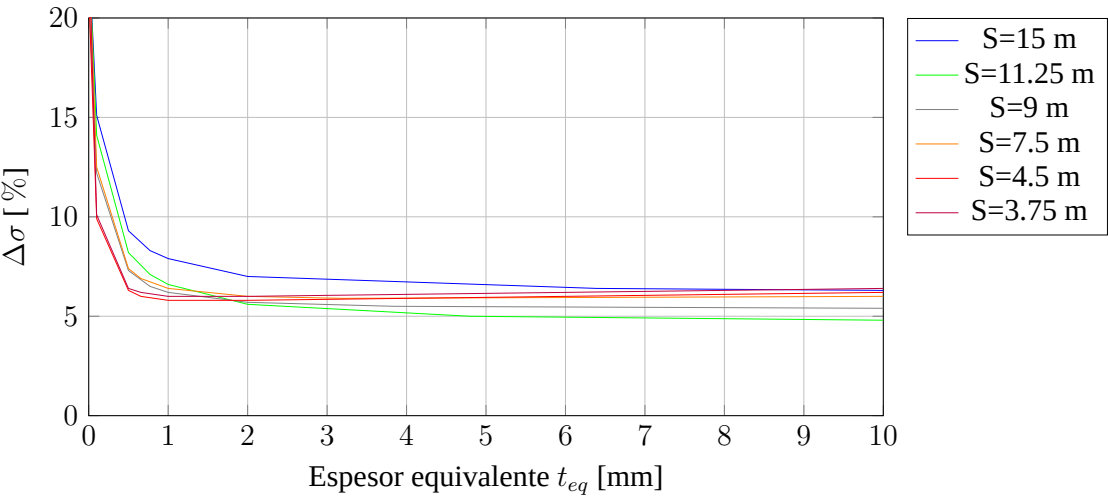


FIGURA 6.9 Caso 45 m c.c.: Compresión máxima en ala inferior

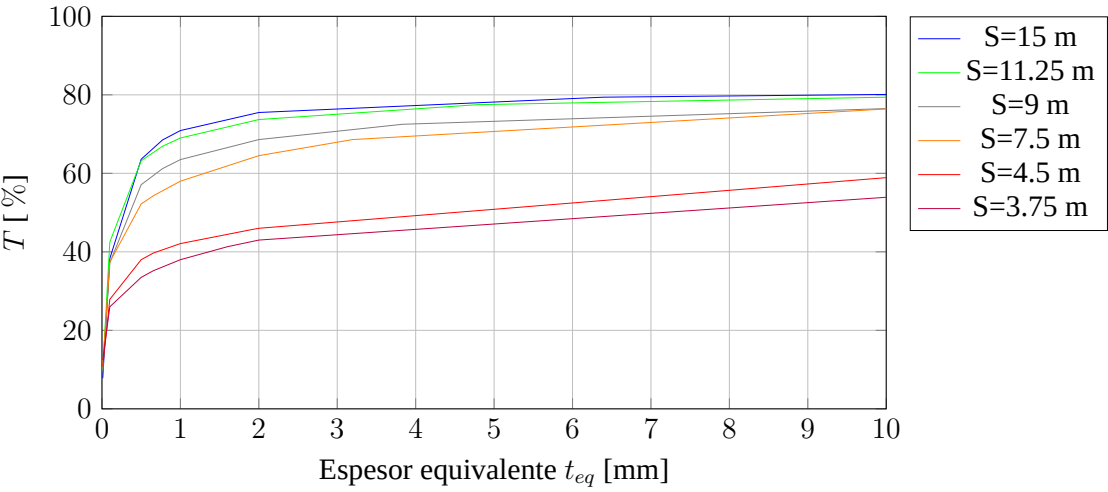


FIGURA 6.10 Caso 45 m c.c.: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.3.3.3 Vano de 60 m y canto constante

Casos	S=20	S=15	S=12	S=10	S=7.5	S=4
$\max(\sigma_m)$ [Mpa]	433.4	433.8	433.4	434.4	433.8	433.4
$\min(\sigma_m)$ [Mpa]	-240.9	-239.2	-240.9	-237.1	-239.2	-240.9
$M_{T,r}$ [kN.m]	6.799	6.095	5.672	5.391	5.039	4.546

TABLA 6.15 Caso 60 m c.c.: Tensiones y reacciones de comparación

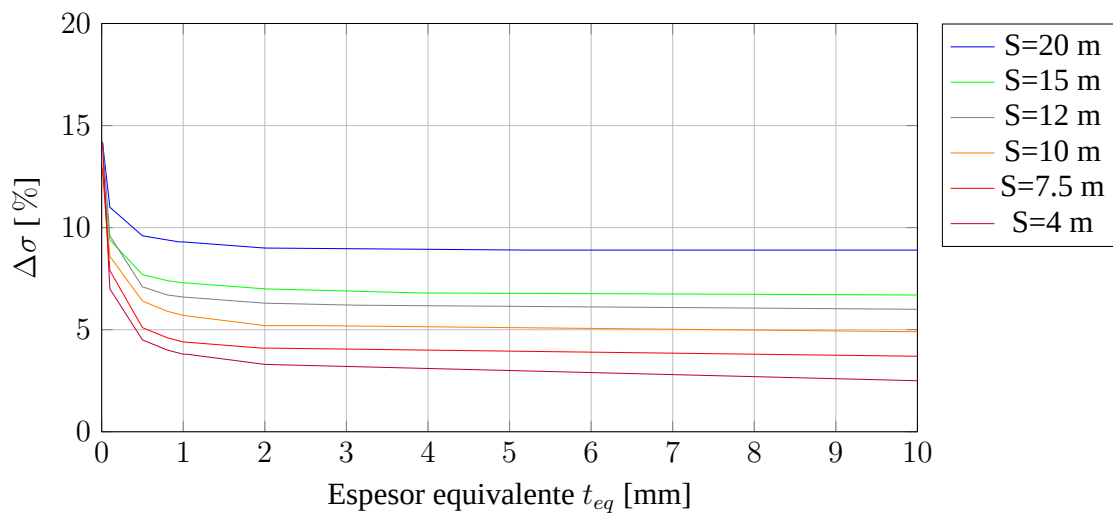


FIGURA 6.11 Caso 60 m c.c.: Tracción máxima en ala inferior

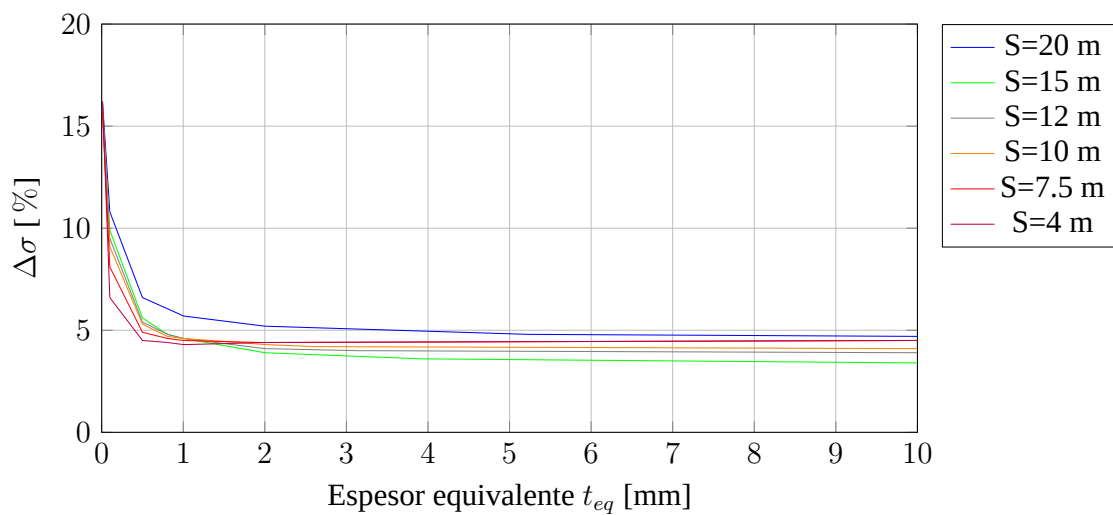


FIGURA 6.12 Caso 60 m c.c.: Compresión máxima en ala inferior

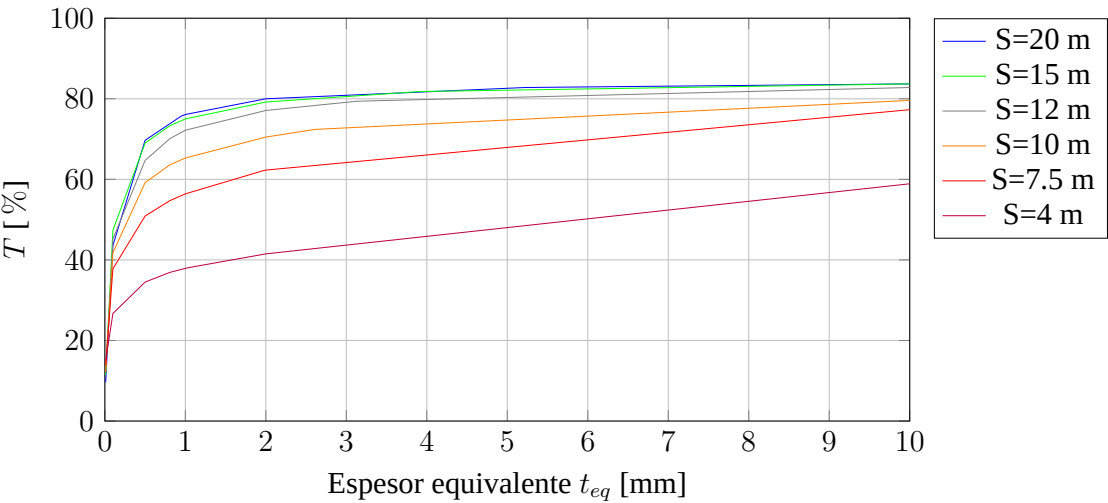


FIGURA 6.13 Caso 60 m c.c.: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.3.3.4 Vano de 60 m y canto variable

Casos	S=20	S=15	S=12	S=10	S=7.5	S=4
$\max(\sigma_m)$ [Mpa]	398.3	394.6	398.3	399	394.6	398.3
$\min(\sigma_m)$ [Mpa]	-221.7	-220.2	-221.7	-218.8	-220.2	-221.7
$M_{T,r}$ [kN.m]	6.799	6.095	5.672	5.391	5.039	4.546

TABLA 6.16 Caso 60 m c.v.: Tensiones y reacciones de comparación

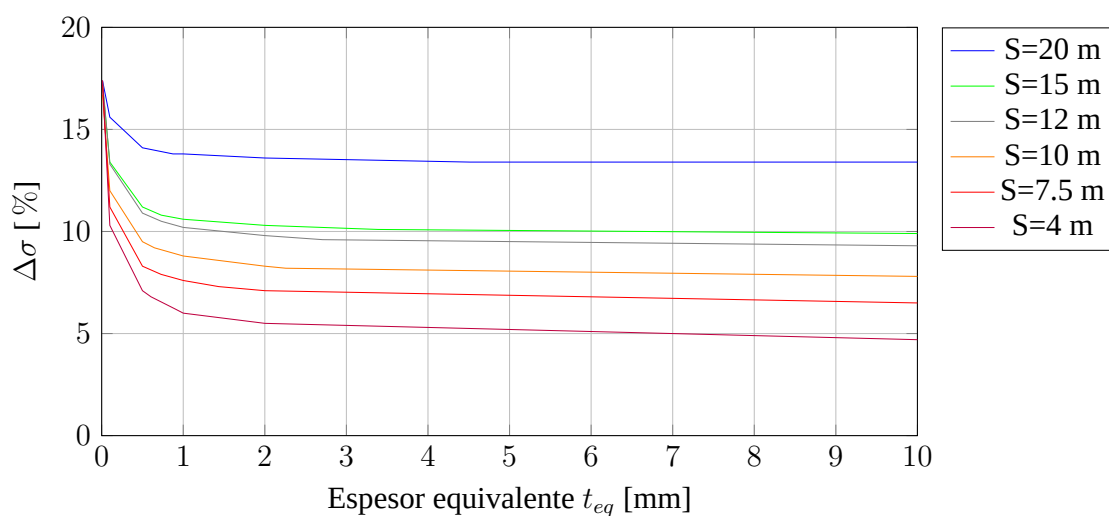


FIGURA 6.14 Caso 60 m c.v.: Tracción máxima en ala inferior

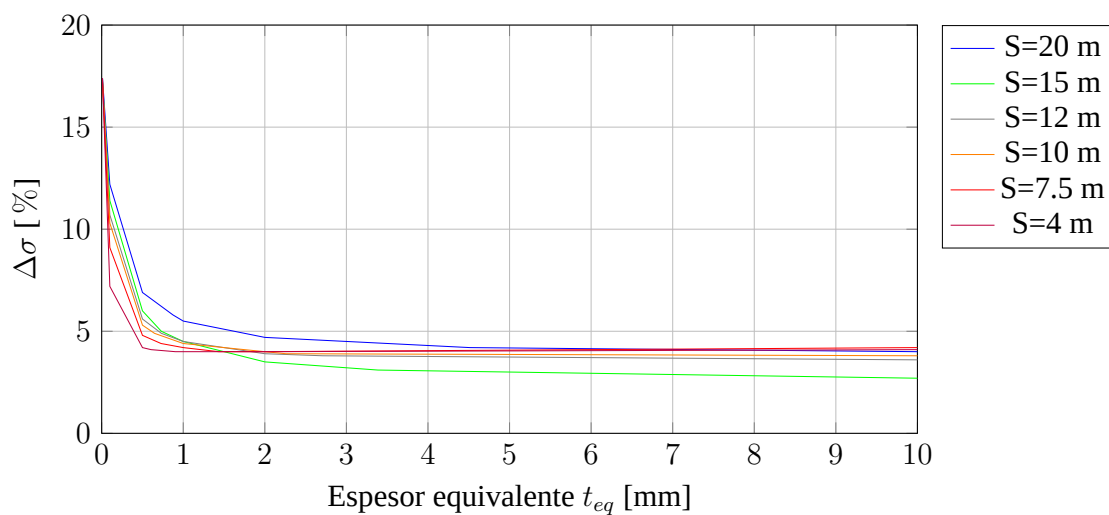


FIGURA 6.15 Caso 60 m c.v.: Compresión máxima en ala inferior

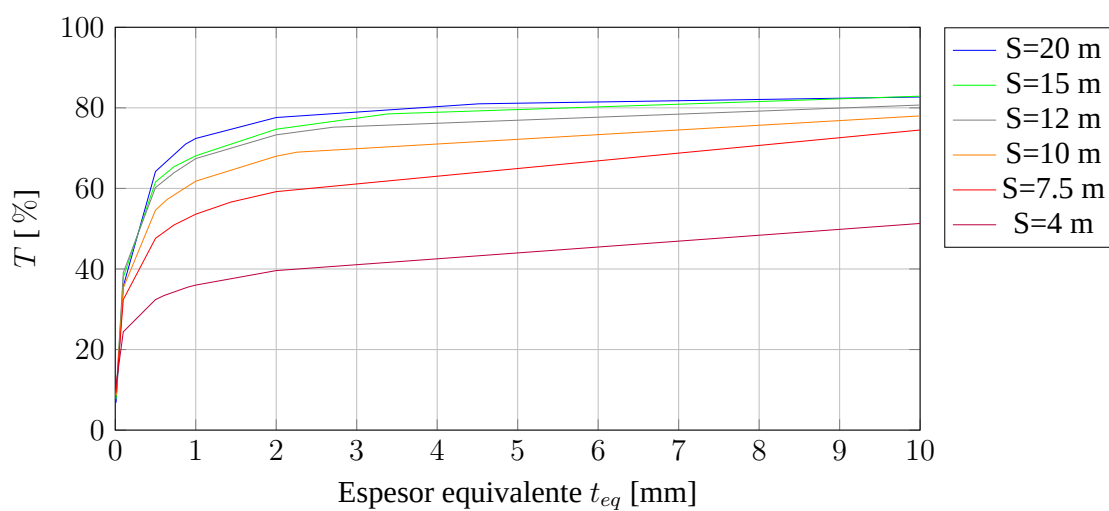


FIGURA 6.16 Caso 60 m c.v.: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.3.3.5 Vano de 75 m y canto constante

Casos	S=25	S=18.75	S=15	S=12.5	S=9.375	S=4.167
$\max(\sigma_m)$ [Mpa]	411.2	406.9	406.9	411.2	423.4	411.2
$\min(\sigma_m)$ [Mpa]	-204.6	-206.1	-206.1	-204.6	-248.5	-204.6
$M_{T,r}$ [kN.m]	7.503	6.623	6.095	5.743	5.303	4.569

TABLA 6.17 Caso 75 m c.c.:Tensiones y reacciones de comparación

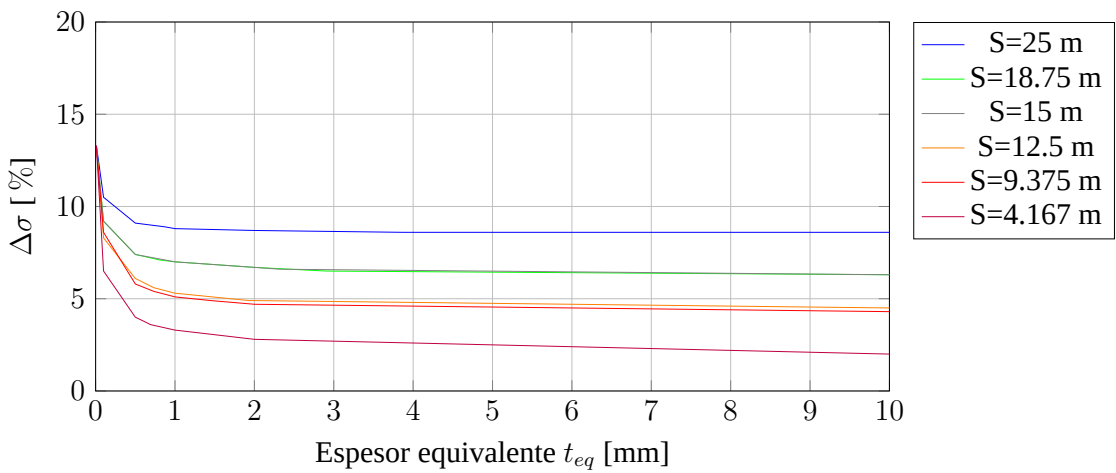


FIGURA 6.17 Caso 75 m c.c.:Tracción máxima en ala inferior

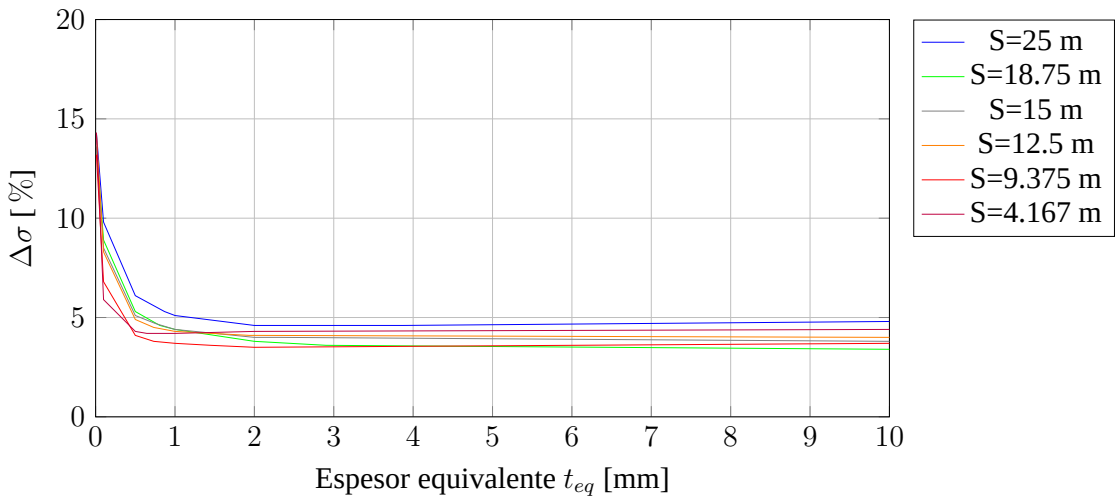


FIGURA 6.18 Caso 75 m c.c.:Compresión máxima en ala inferior

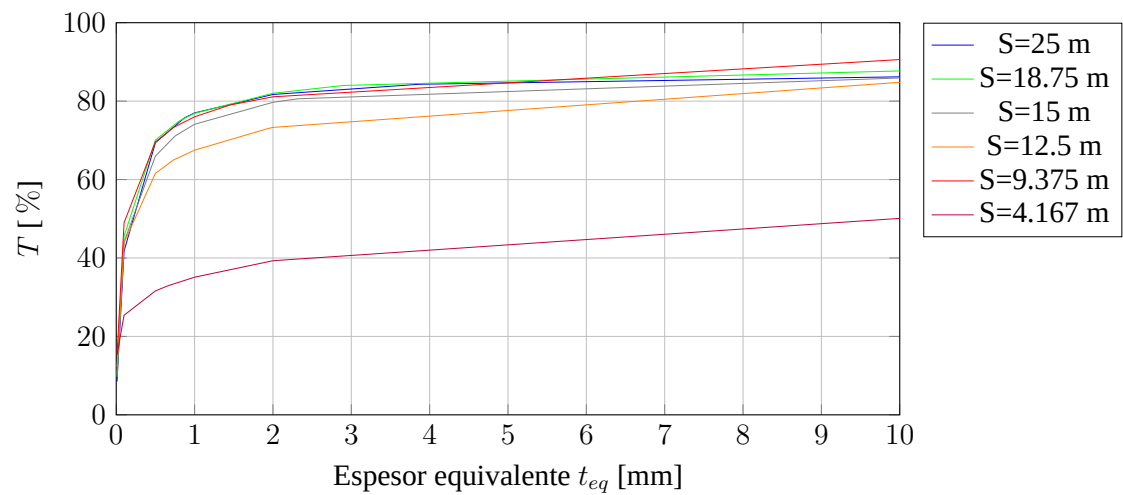


FIGURA 6.19 Caso 75 m c.c.:Reacción máxima en diafragmas interiores

6.3.3.6 Vano de 75 m y canto variable

Casos	S=25	S=18.75	S=15	S=12.5	S=9.375	S=4.167
$\max(\sigma_m)$ [Mpa]	422.4	429.9	429.9	422.4	453.3	422.4
$\min(\sigma_m)$ [Mpa]	-234	-233.9	-233.9	-234	-234.1	-234
$M_{T,r}$ [kN.m]	7.503	6.623	6.095	5.743	5.303	4.569

TABLA 6.18 Caso 75 m c.v.:Tensiones y reacciones de comparación

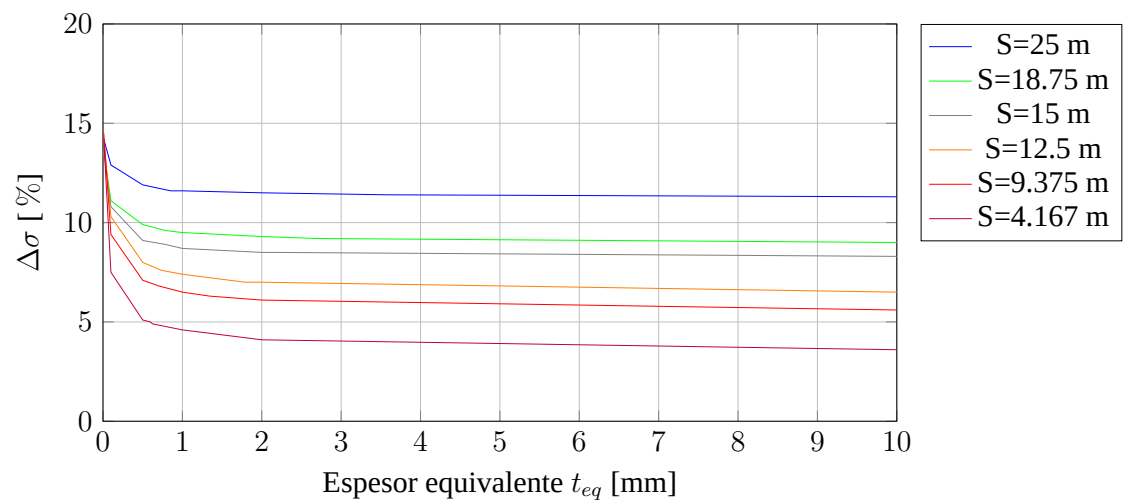


FIGURA 6.20 Caso 75 m c.v.:Tracción máxima en ala inferior

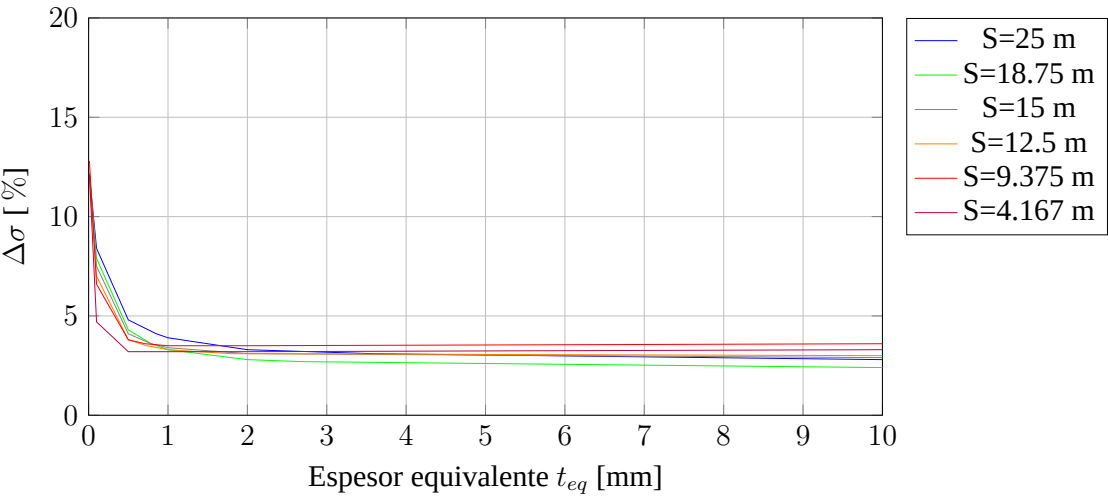


FIGURA 6.21 Caso 75 m c.v.:Compresión máxima en ala inferior

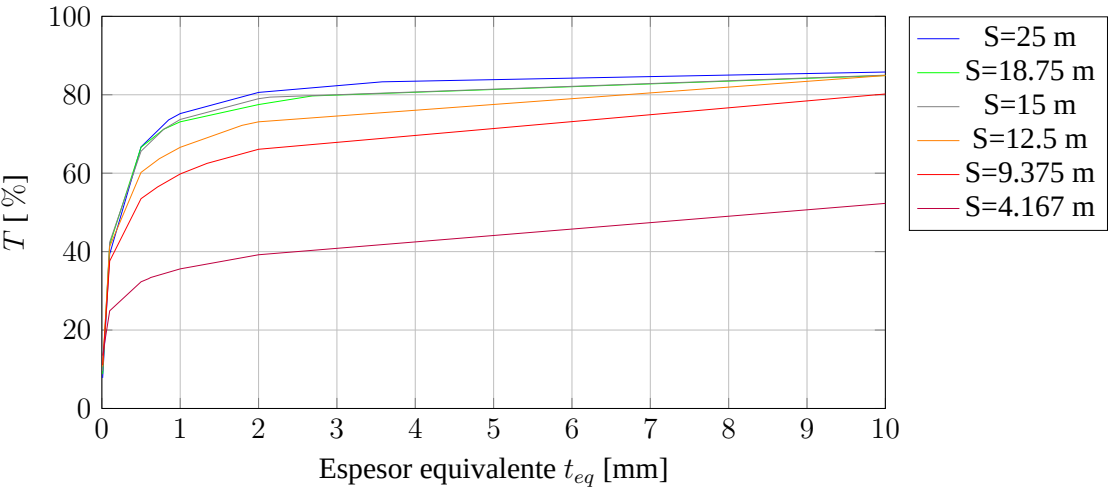


FIGURA 6.22 Caso 75 m c.v.:Reacción máxima en diafragmas interiores

6.3.3.7 Vano de 90 m y canto constante

Casos	S=30	S=22.5	S=18	S=15	S=11.25	S=4.5
$\max(\sigma_m)$ [Mpa]	454.9	447.8	449.6	447.8	454.9	429.3
$\min(\sigma_m)$ [Mpa]	-227.5	-212.6	-212.3	-212.6	-227.5	-214.2
$M_{T,r}$ [kN.m]	8.207	7.151	6.517	6.095	5.567	4.616

TABLA 6.19 Caso 90 m c.c.:Tensiones y reacciones de comparación

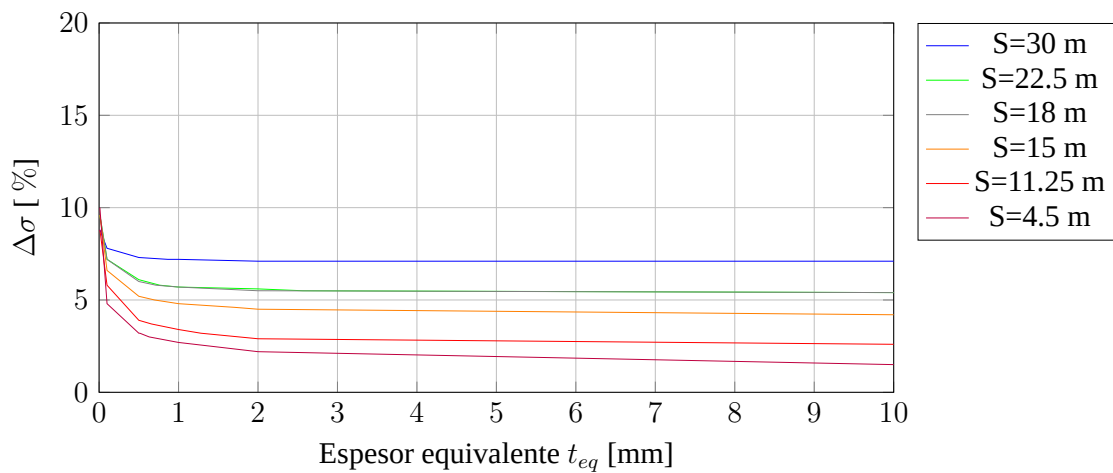


FIGURA 6.23 Caso 90 m c.c.: Tracción máxima en ala inferior

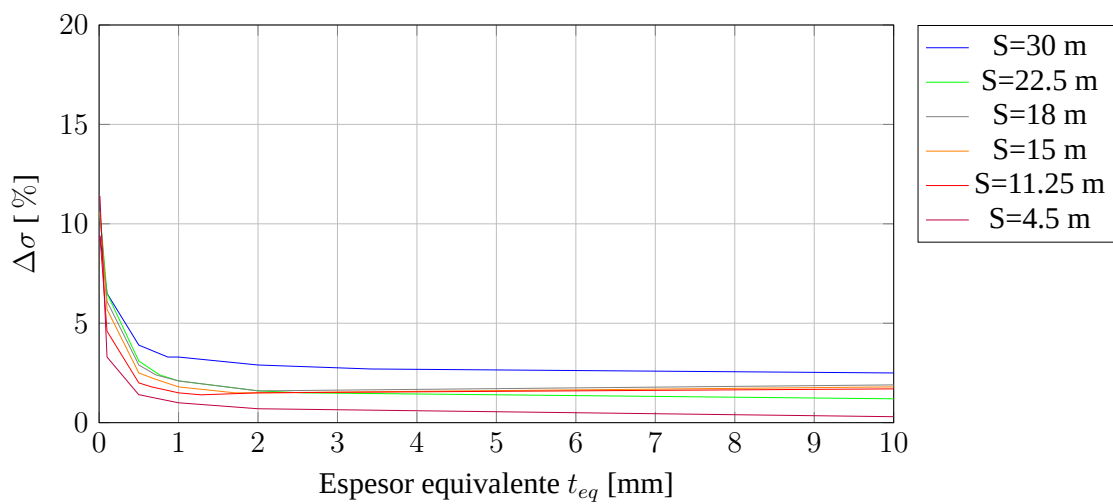


FIGURA 6.24 Caso 90 m c.c.: Compresión máxima en ala inferior

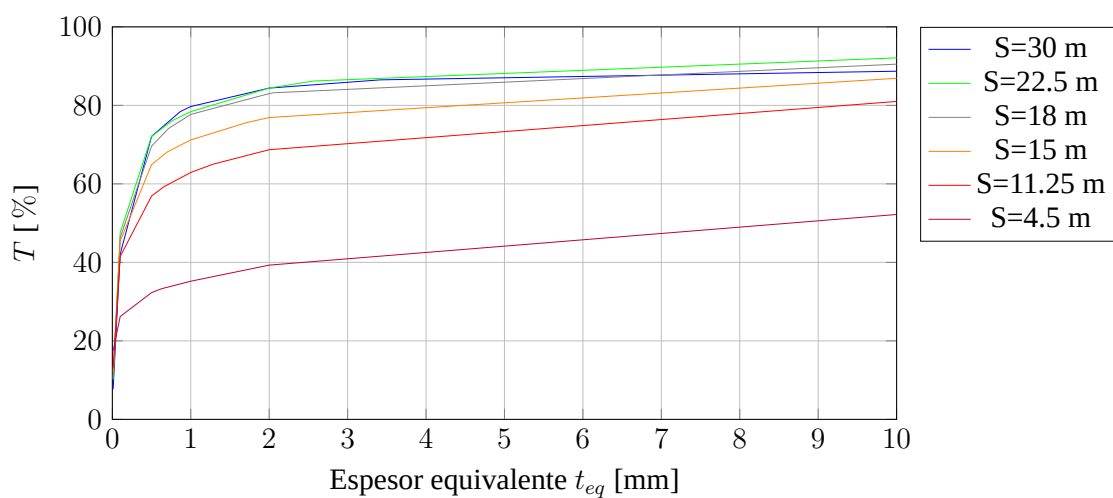


FIGURA 6.25 Caso 90 m c.c.: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.3.3.8 Vano de 90 m y canto variable

Casos	S=30	S=22.5	S=18	S=15	S=11.25	S=4.5
$\max(\sigma_m)$ [Mpa]	419.3	416.7	418.4	416.7	419.3	415.1
$\min(\sigma_m)$ [Mpa]	-217.5	-218	-217.3	-218	-217.5	-192.5
$M_{T,r}$ [kN.m]	8.207	7.151	6.517	6.095	5.567	4.616

TABLA 6.20 Caso 90 m c.v.:Tensiones y reacciones de comparación

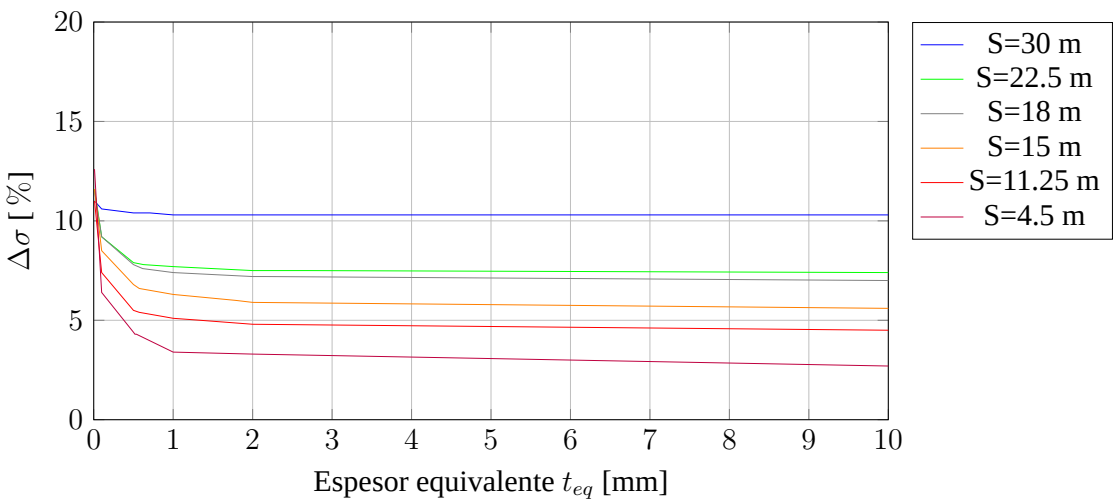


FIGURA 6.26 Caso 90 m c.v.:Tracción máxima en ala inferior

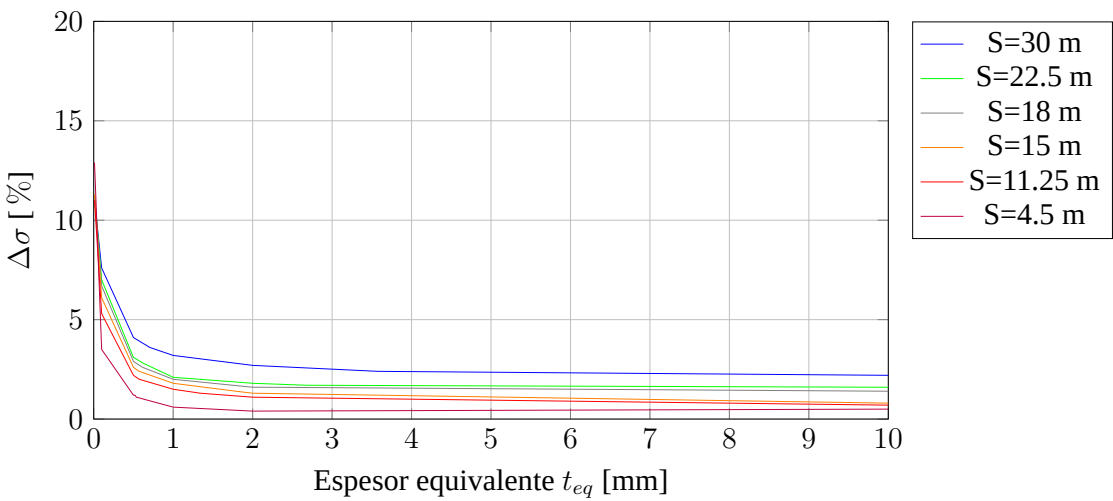


FIGURA 6.27 Caso 90 m c.v.:Compresión máxima en ala inferior

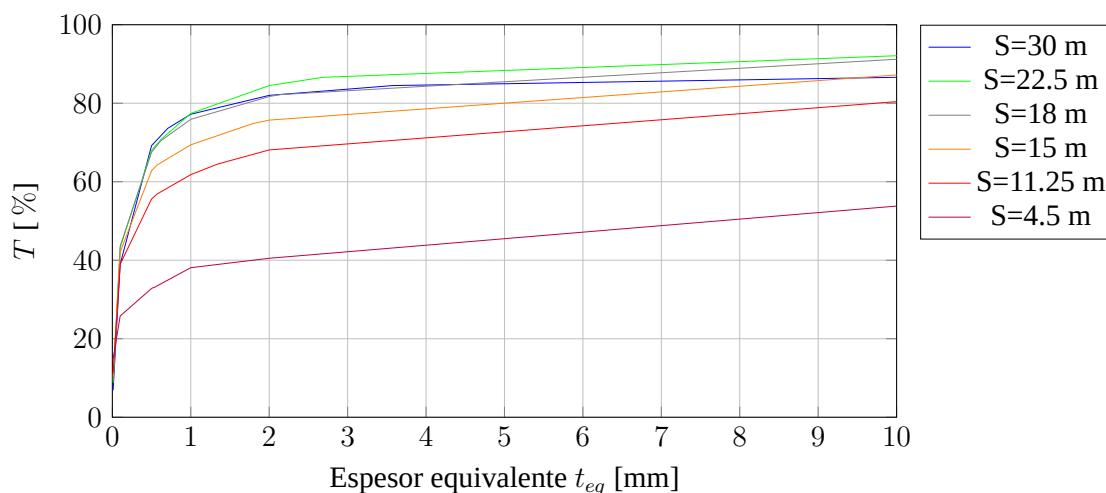


FIGURA 6.28 Caso 90 m c.v.: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.3.4 Análisis de resultados

6.3.4.1 Introducción

Una vez presentados los principales resultados obtenidos, el siguiente paso es analizarlos para establecer unas recomendaciones sobre el dimensionamiento de diafragmas interiores. Para ello, se compararán los resultados obtenidos con las propuestas de diferentes autores para determinar su idoneidad. Además, se propondrán nuevos criterios.

Las propuestas existentes en la bibliografía se centran principalmente en definir un espaciamiento máximo entre diafragmas y cumplir con un criterio de rigidez mínima. Esta rigidez mínima puede depender de las características de la sección, ser un valor arbitrario o bien ser el resultado de un dimensionamiento por resistencia. Sin embargo, algunos de los criterios de rigidez mínima ya fueron revisados por Pascual [3] en su tesis, concluyendo que no se consideraban adecuados y que lo más ajustado era considerar la rigidez que aportaba un diafragma en celosía dimensionado por resistencia.

Esta hipótesis planteada por Pascual se ha tomado como referencia para el análisis de los resultados. En primer lugar, se mostrará en análisis relativo al dimensionamiento por resistencia, donde la rigidez del diafragma la determina un dimensionamiento por resistencia de este, y el objetivo es determinar el espaciamiento máximo entre diafragmas. Posteriormente, se estudiará si los criterios adicionales de rigidez permiten alterar las conclusiones relativas al dimensionamiento por resistencia, o por el contrario son prescindibles tal y como plantea Pascual. Por último, se propondrá un planteamiento innovador, denominado «flexible», que consiste en combinar espaciamientos pequeños (de 4.5 m como máximo) con criterios de resistencia y rigidez. El objetivo de este último planteamiento es optimizar

los diafragmas en aquellos casos donde el proyectista prefiera trabajar con espaciamientos reducidos.

También es importante aclarar previamente que, según las gráficas del apartado 6.3.3, el máximo ratio de sobretensión se da en todas las geometrías cuando se aplican tensiones de tracción en el ala inferior. Por lo tanto, los resultados presentados a continuación se refieren a este caso en particular.

6.3.4.2 Dimensionamiento por resistencia

En primer lugar, se muestra la relación entre la sobretensión y el espaciamiento relativo entre diafragmas en tableros de canto constante cuando los diafragmas se dimensionan por resistencia. El espaciamiento relativo se define como la relación entre el espaciamiento entre diafragmas S_D y la luz principal L .

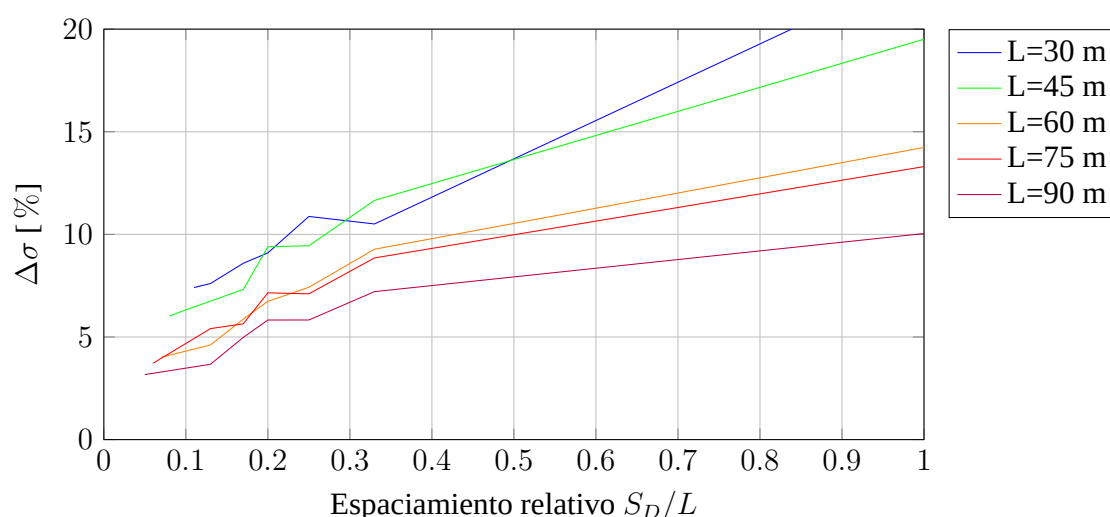


FIGURA 6.29 Relación sobretensión-espaciamiento. Canto constante

En la figura 6.29 se muestra que, para un mismo espaciamiento relativo, hay una relación clara entre la sobretensión y la luz. En particular, cuanto mayor es la luz menor es la sobretensión. Es importante destacar que, en el caso de la luz principal de 30 m, la relación de esbeltez del tablero no se corresponde con el resto, y que como se explicará más adelante, cuanto mayor es el canto menor es la sobretensión.

Sin embargo, a pesar de esa relación entre la sobretensión y la luz, la mayoría de los autores establecen el espaciamiento relativo como criterio. En concreto Pascual determina que cuatro diafragmas por vano son suficientes, lo que equivale a un espaciamiento relativo de 0.2. Si se comprueba este criterio en la figura 6.29, se puede apreciar que es válido en todos los casos. Sin embargo, en la gráfica también se observa como en el caso de 45 m

se pueden llegar a reducir a tres los diafragmas, que en los casos de 60 y 75 m se pueden reducir a dos, y que en el caso de 90 m prácticamente no son necesarios los diafragmas antidistorsión.

La figura 6.29 se basa en comparar la sobretensión con la tensión media máxima calculada elásticamente en ELU. Esto implica que, en secciones compactas a positivo, la tensión de comparación en ELU sea habitualmente superior al límite elástico es 355 MPa, ya que el momento plástico resistente es superior al elástico. Por lo tanto, si se realiza una extrapolación de tensiones elásticas, estas pueden superar los 400 MPa. No obstante, la autoridad o el proyectista, del lado de la seguridad, pueden considerar que la tensión de comparación debe ser el límite elástico. Bajo ese criterio se ha elaborado la figura 6.30, donde se ha tomado como límite elástico 355 MPa.

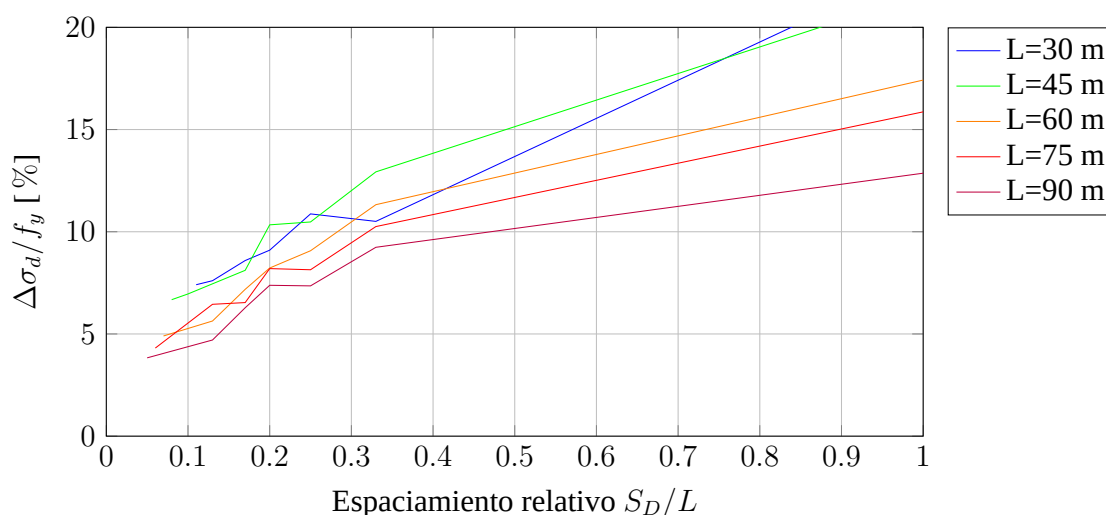


FIGURA 6.30 Relación sobretensión elástica-espaciamiento. Canto constante

Las conclusiones al realizar este cambio en la tensión de comparación son muy similares a las de la figura 6.29. Sin embargo, se observa que en este caso los espaciamientos relativos máximos se reducen. En el caso de 45 m, para un espaciamiento relativo de 0.2 se produce un leve incumplimiento, por lo que es necesario un diafragma adicional. También para los casos de 60 y 75 m es necesario un diafragma adicional, y para el caso de 90 m pasan a ser necesarios dos diafragmas.

En resumen, se puede concluir que existe una relación directa entre el espaciamiento máximo relativo entre diafragmas y la luz en los tableros de canto constante, ya que cuanto mayor es la luz, mayor es el espaciamiento máximo relativo.

En este apartado, se estudiará otra variable: el canto. Para ello, se utilizarán los puentes de canto variable. Concretamente, las figuras 6.31 y 6.32 muestran la relación de sobre-

tensión comparada con la tensión media máxima y el límite elástico, respectivamente.

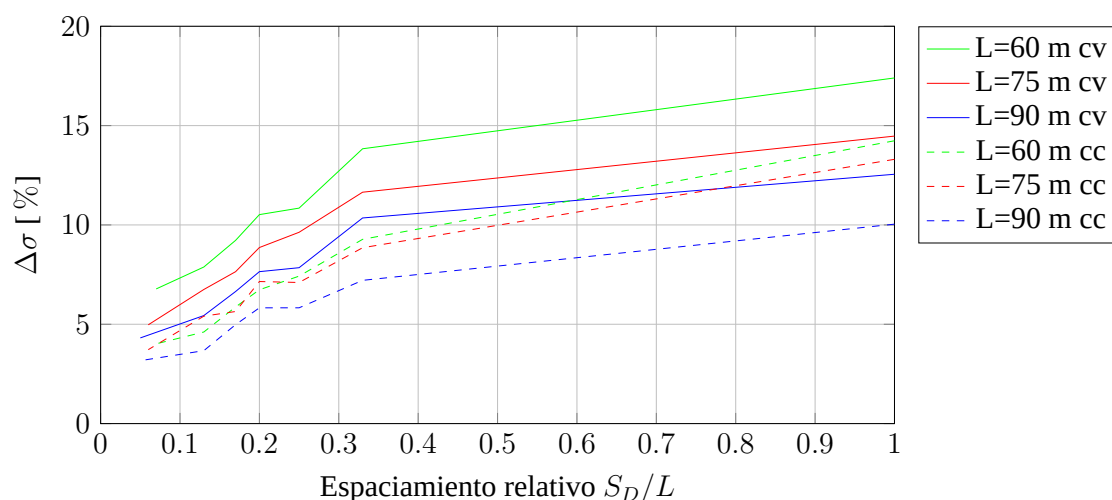


FIGURA 6.31 Relación sobretensión-espaciamento. Canto variable

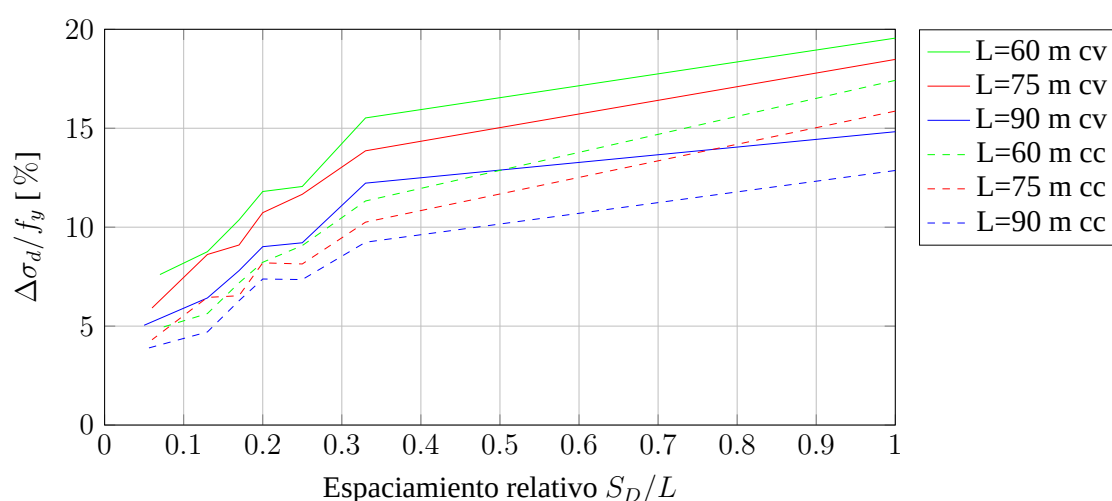


FIGURA 6.32 Relación sobretensión elástica-espaciamento. Canto variable

En las gráficas previamente mencionadas, se representa en línea continua los casos de canto variable, y en línea discontinua los casos de canto constante. El objetivo es que se aprecie claramente cómo, conforme disminuye el canto, aumenta la sobretensión.

Para tener en cuenta esta eventualidad en la reducción del canto, Pascual mantiene el criterio de la RPX-95 de limitar el espaciamento a cuatro veces el canto. Teniendo en cuenta que la relación de esbeltez aproximada en los tableros de canto variable es $L/40$, el espaciamento relativo para cuatro veces el canto es 0.1, y para dicho espaciamento, se observa claramente en ambas figuras como la sobretensión es inferior al límite del 10 %. Por lo tanto, el criterio de limitar el espaciamento máximo a cuatro veces el canto cumple, e incluso se podría elevar hasta seis veces el canto.

En conclusión, se considera que la hipótesis de Pascual de dimensionar por resistencia los diafragmas y limitar su espaciamiento a una quinta parte de la luz o cuatro veces el canto es adecuada en todos los casos. Sin embargo, también se cree que existe margen para optimizar este criterio, dado que existen casos en los que el número de diafragmas pueden reducirse incluso a la mitad.

Con el objetivo de proponer un nuevo criterio basado en el dimensionamiento por resistencia de los diafragmas, se ha calculado en cada caso el espaciamiento para el cual se alcanza una sobretensión del 10 %, tanto comparando con la tensión media máxima (σ_m), como con el límite elástico (f_y). Este cálculo se ha realizado por interpolación y se ha representado en función de la luz en la figura 6.33.

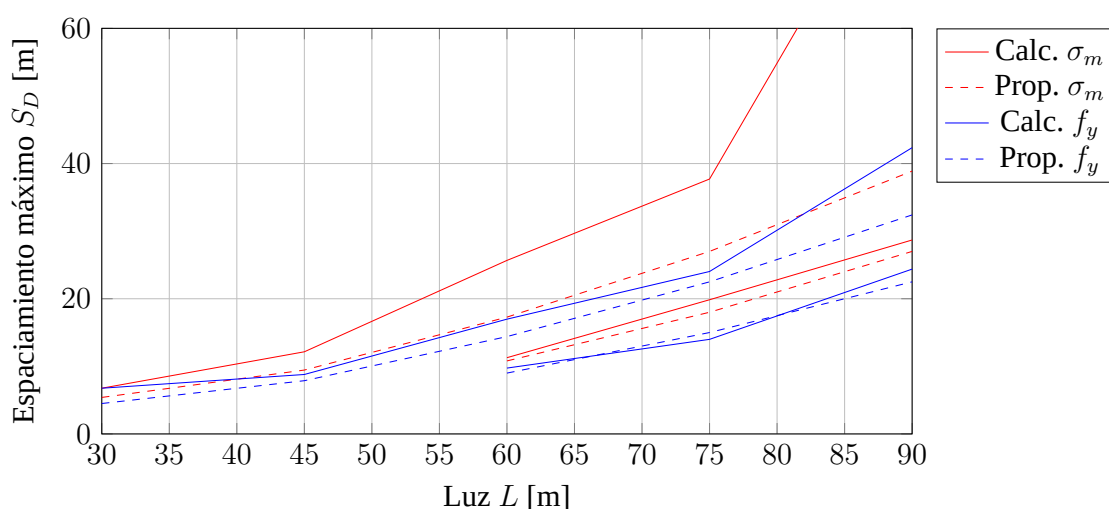


FIGURA 6.33 Relación espaciamiento máximo de diafragmas-luz

En la figura 6.33 también se representa el criterio de espaciamiento máximo propuesto, que es el siguiente:

$$S_{D,0} \leq \begin{cases} 0.09 \cdot C \cdot L & \rightarrow \Delta\sigma_d/f_y < 10\% \\ 0.12 \cdot C \cdot L & \rightarrow \Delta\sigma_d/\sigma_m < 10\% \end{cases} \quad (6.10)$$

Este criterio establece que el espaciamiento máximo en un puente recto y de ancho inferior a 11.3 m ($S_{D,0}$) es directamente proporcional a la luz del puente (L), al canto de la sección (C), y a un factor empírico que depende del criterio adoptado. Todo ello medido en metros.

Este criterio se considera simple, pero a la vez permite tener en cuenta tanto la reducción en la sobretensión que se da con la luz, como el aumento que se da al reducir el canto. La figura 6.33 muestra que dicho criterio cumple prácticamente en todos los casos, e incluso en grandes luces se puede considerar conservador.

Sin embargo, en el criterio anterior no se ha estudiado ni la influencia del ancho ni de la curvatura, lo cual se tratará en sucesivos apartados.

Por último, es importante mencionar que en relación a la reacción en los diafragmas, ninguna de las figuras del apartado 6.3.3 muestra que relación entre la reacción máxima calculada y la reacción debida a un dimensionamiento por resistencia supera el 100 %, por lo que el dimensionamiento por resistencia empleando los espaciamientos aquí expuestos será siempre adecuado.

6.3.4.3 Dimensionamiento por rigidez

Como se mencionó en la introducción, algunos autores proponen complementar el criterio de resistencia con un criterio de rigidez mínima del diafragma.

En España, el más empleado ha sido el criterio de rigidez de H. Nakai [110], mostrado en la ecuación 2.15. Este autor lo complementa con el espaciamiento fijado por F. Sakai y M. Nagai [111], mostrado en la ecuación 2.16.

Al aplicar dicho criterio e interpolar en los cálculos realizados, se llega a la tabla 6.21.

L	S_D [m]	N_D	t_D [mm]	$N_D \cdot t_D$ [mm]	$N_{D,r} \cdot t_{D,r}$ [mm]
30	6	4	3.23	12.92	2.72
45	6	7	2.56	17.92	3.08
60	6	9	1.57	14.13	3.24
75	8.1	9	1.25	11.25	3
90	10.2	8	1.16	9.28	2.88

TABLA 6.21 Aplicación de criterio de Nakai

En esta tabla se muestra el número de diafragmas calculados siguiendo el criterio de Nagai y Sakai (N_D), la rigidez mínima siguiendo el criterio de Nakai (t_D), la multiplicación de ambos términos y su comparación con el número de diafragmas mínimos por resistencia, que se ha tomado como cuatro ($N_{D,r} = 4$), multiplicados por su espesor ($t_{D,r}$).

Es evidente que aplicar el criterio de Nakai supone incrementar entre tres y seis veces la cantidad de acero requerida en comparación con el criterio de resistencia, dado que existe una relación lineal entre el espesor equivalente y el acero requerido en los diafragmas. Por lo tanto, no se considera un criterio eficiente.

En 2004, N. H. Park [112] propuso que la rigidez mínima que debería tener un diafragma es 0.2 veces la rigidez de un diafragma infinitamente rígido, y que para un puente de

3 vanos se requerían 3 diafragmas por vano. Posteriormente, J. P. Lebet [113] cita este artículo en su libro, y menciona que por diafragma rígido se entiende un diafragma de 20 mm de espesor, lo que significa que el espesor equivalente mínimo que debería tener un diafragma es de 4 mm. Sin embargo, dado que la rigidez de los diafragmas calculada siguiendo criterios de resistencia es habitualmente inferior a 1 mm, no tiene sentido emplear cuatro veces más de acero en tres diafragmas por economizar uno. Por lo tanto, este criterio tampoco se considera adecuado.

No obstante, es importante aclarar que este estudio se ha centrado en analizar dos tipos de diafragmas: los de celosía y los de alma llena. Ambos son considerados como «rígidos» en contraposición a los diafragmas tipo marco. Las pruebas realizadas con diafragmas tipo marco han indicado que su rigidez puede ser hasta un orden de magnitud inferior a la de un diafragma «rígido», lo cual invalida las conclusiones adoptadas para el diseño por resistencia. Por lo tanto, al realizar un dimensionamiento por resistencia, es recomendable seguir las indicaciones de Pascual y emplear diafragmas en celosía, diafragmas tipo alma llena o cualquier otro tipo de diafragma siempre y cuando su rigidez sea comparable a la mínima calculada para un diafragma en celosía.

En conclusión, adoptar un criterio numérico de rigidez complementario al diseño por resistencia no tiene sentido, ya que implica un aumento significativo de peso en comparación con una disposición de diafragmas que ya cumple con los límites normativos. Sin embargo, al realizar un dimensionamiento por resistencia, es importante tener en cuenta que la rigidez mínima de los diafragmas es la que aporta un diafragma en celosía.

6.3.4.4 Dimensionamiento flexible

Cuando se emplea un dimensionamiento por resistencia, el espaciamiento entre diafragmas puede llegar a superar los 10 m e incluso los 20 m, dependiendo de la luz. Sin embargo, la función de los diafragmas no es solamente controlar la distorsión, sino que también deben cumplir con otras funciones, tal y como se expuso en el apartado 4.2.1. Por ese motivo, entre otros, existen proyectistas que prefieren trabajar con espaciamientos entre diafragmas reducidos, inferiores a 4.5 m. El objetivo de este apartado es establecer unas recomendaciones para cuando se opte por proyectar con dichos espaciamientos.

La propuesta presentada se denomina «dimensionamiento flexible» debido a que se basa en la distribución de carga viva entre diafragmas antidistorsión. En este caso, el dimensionamiento de los diafragmas se realizará para una carga inferior a la de un dimensionamiento por resistencia, asumiendo que la carga se distribuirá entre varios diafragmas. Además, se establecerá un criterio mínimo de rigidez para el caso de que se deseen utilizar

diafragmas tipo marco, que suelen ser más flexibles que los diafragmas en celosía.

Para concretar esta propuesta, se procesarán los resultados del caso 6 para cada una de las luces principales. Es importante recordar que los espaciamientos en el caso 6 oscilan entre los 3 m y los 4.5 m, que es el rango de aplicación de este dimensionamiento.

En la figura 6.34 se muestran los resultados de sobretensión comparados con la tensión de plastificación, en función de la rigidez equivalente del diafragma.

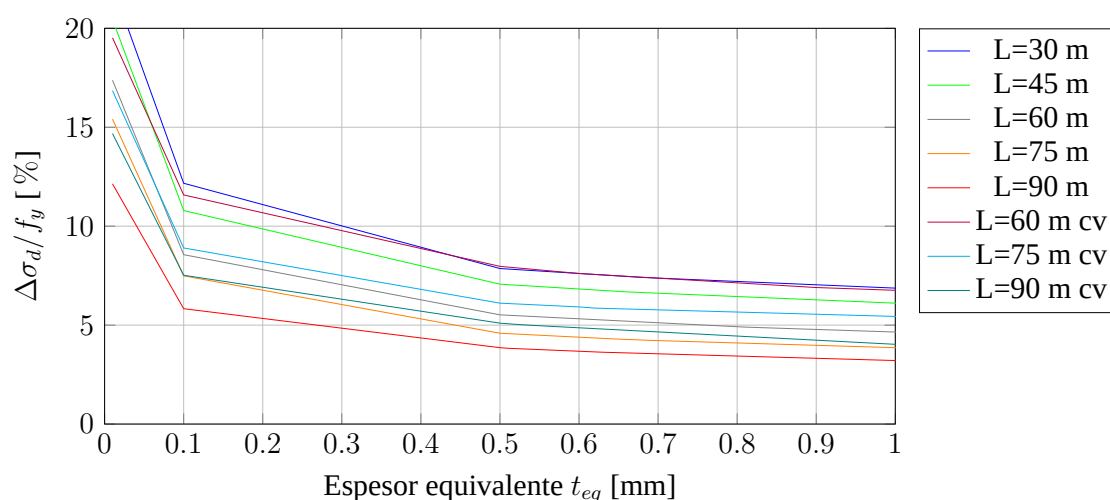


FIGURA 6.34 Relación sobretensión-espesor equivalente

Al interpolar en la gráfica anterior, se puede obtener para cada geometría estudiada el espesor equivalente con el cual se llega a la sobretensión del 10 %. Si además se divide dicho espesor por la distancia entre diafragmas, se llega a la figura 6.35, donde se representa el espesor equivalente distribuido requerido en función de la luz.

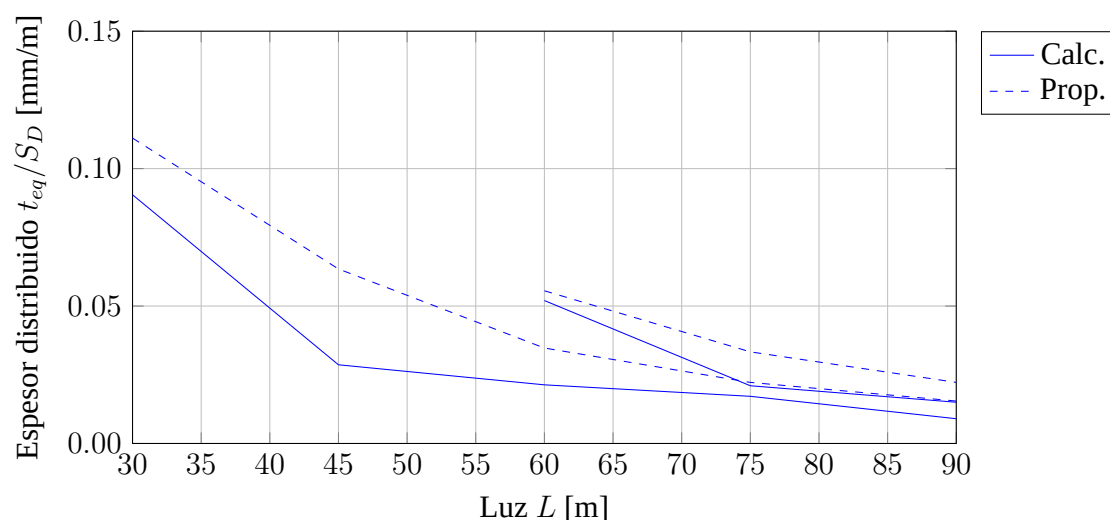


FIGURA 6.35 Espesor equivalente mínimo distribuido

En la figura 6.35 también se representa la propuesta de espesor mínimo requerido. Este espesor $t_{eq,min}$ que se define como:

$$t_{eq,min} \geq \frac{5 \cdot S_D}{L \cdot C} [mm/m] \quad (6.11)$$

Donde tanto la luz (L) como el canto (C) se definen en metros.

Se observa como el criterio propuesto cumple en todos los casos, resultando conservador en la mayoría. No obstante, si se supone un espaciamiento de 4 m, que puede considerarse un valor medio, se observa como los espesores requeridos son inferiores a 0.4 mm prácticamente en todos los casos, lo cual está por debajo de los espesores requeridos por resistencia, y también muy lejos de los criterios de rigidez mínima propuestos por ejemplo por N. H. Park.

En cuanto a la reacción de diseño, se representa en la figura 6.36 la relación entre la torsión máxima calculada en los diafragmas y la torsión al dimensionar por resistencia en función de la rigidez equivalente del diafragma.

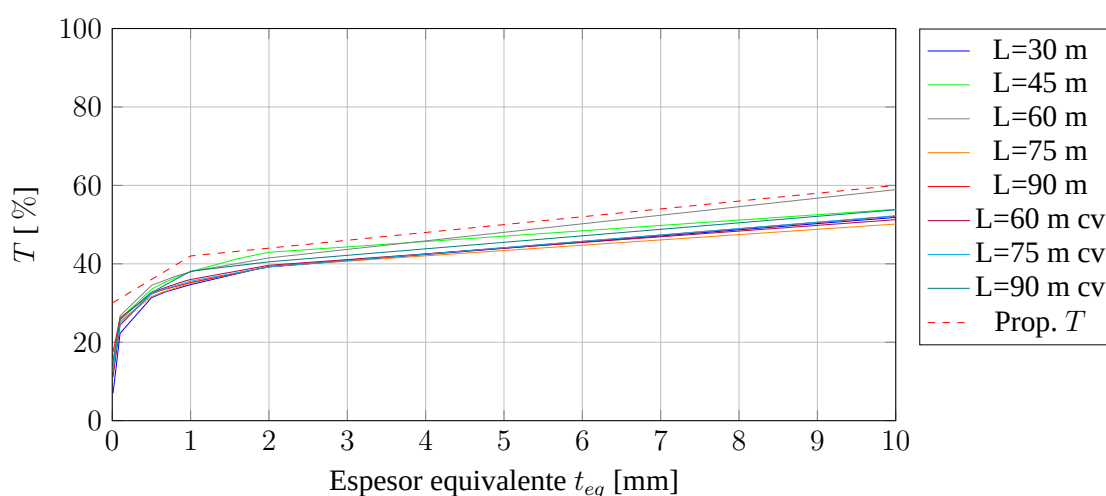


FIGURA 6.36 Reacción máxima en diafragmas

Se observa como las reacciones son similares, independientemente de la luz de cálculo, el canto o el espaciamiento. Además, dichas reacciones oscilan alrededor del 50 % de la torsión máxima de diseño por resistencia, lo cual demuestra que en caso de disponer diafragmas con espaciamientos reducidos, no es necesario llegar a dimensionarlos por resistencia.

La figura 6.36 también permite establecer una relación (T_f) entre la torsión de dimensionamiento del diafragma ($M_{T,Ed}$) y la torsión de dimensionamiento por resistencia ($M_{T,r}$). Esta relación depende del espesor equivalente del diafragma (t_{eq}), y se puede aproximar

del lado de la seguridad del siguiente modo:

$$T_f = \frac{M_{T,Ed}}{M_{T,r}} \geq \begin{cases} 0.3 + 0.12 \cdot t_{eq} & \rightarrow t_{eq} \leq 1 \text{ mm} \\ 0.4 + 0.02 \cdot t_{eq} & \rightarrow t_{eq} > 1 \text{ mm} \end{cases} \quad (6.12)$$

En la figura 6.36 se observa como el límite propuesto cumple en todos los casos.

En conclusión, el enfoque aquí expuesto supone una aproximación diferente al estudio de los diafragmas antidistorsión, ya que permite reducir las cargas de diseño respecto a un dimensionamiento por resistencia si se cumple la condición de que el espaciamiento no supera los 4.5 m, y además se verifica una condición de rigidez mínima.

6.4 Tablero curvo

6.4.1 Introducción

Una vez estudiados los tableros de puentes en alineaciones rectas, se procederá a estudiar los tableros curvos en planta.

Específicamente, se han tomado los casos de tableros rectos de canto constante explicados en el apartado anterior y se ha variado su ángulo (ϕ) en planta. Dicho ángulo se define como la luz del vano principal dividido entre el radio en planta ($\phi = L/R$), y se ha variado desde los 0 hasta los 0.4 radianes cada 0.1 rad. Sin embargo, en este caso no se han variado las rigideces de los diafragmas, sino que se ha tomado la rigidez debida a un dimensionamiento por resistencia. En total se han estudiado 5 distribuciones de luces y cantos, y para cada una de estas distribuciones se han estudiado 6 espaciamientos entre diafragmas y 5 ángulos distintos, lo que supone 150 casos distintos.

El objetivo final del análisis ha sido poder estimar cuánto se debe reducir el espaciamiento para que un dimensionamiento por resistencia siga siendo válido. Además, también se han estudiado las tensiones de distorsión asociadas a las distintas cargas y cómo varían con la curvatura. Esto permitirá identificar, por ejemplo, cuándo un dimensionamiento por resistencia no es suficiente para cumplir con los límites tensionales durante el proceso constructivo.

6.4.2 Metodología

La metodología empleada sigue los mismos pasos descritos para el tablero recto, pero con varias modificaciones. Todo ello se explica a continuación.

6.4.2.1 Definición de las geometrías objeto de estudio

El puente objeto de estudio seguirá siendo un puente de tres vanos y 11.3 m de ancho. La distribución de luces se mantendrá igual a la mostrada en la tabla 6.1, pero tomando en este caso únicamente los casos de tablero de canto constante. Al respetar la distribución de luces, también se ha mantenido el número y espaciamiento de diafragmas presentados en las tablas 6.2 a 6.4.

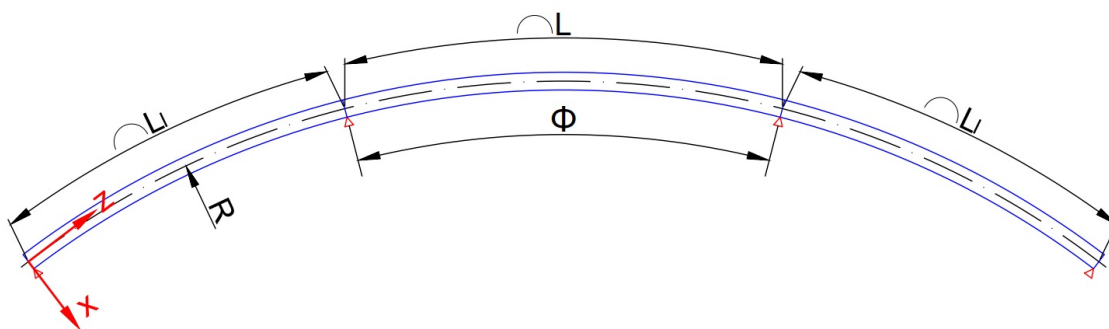


FIGURA 6.37 Planta del puente

La variación fundamental a nivel de geometría se da en la curvatura en planta. Como se explicó en la introducción, se han considerado cinco ángulos ϕ que van desde los 0 hasta los 0.4 radianes cada 0.1 rad. La definición de ϕ se muestra en la figura 6.37. La tabla 6.22 presenta los radios asociados a las distintas curvaturas y luces principales.

L	$\phi = 0$	$\phi = 0.1$	$\phi = 0.2$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.4$
30 m	0	300	150	100	75
45 m	0	450	225	150	112.5
60 m	0	600	300	200	150
75 m	0	750	375	250	187.5
90 m	0	900	450	300	225

TABLA 6.22 Radios estudiados en metros

Después de definir las geometrías, se procede a definir las secciones.

6.4.2.2 Cálculo y dimensionamiento de las secciones del puente

La sección objeto de estudio seguirá siendo la mostrada en la figura 6.3, y las dimensiones mostradas en dicha figura serán iguales. La principal variación con respecto al puente recto es que en este caso se considerará una única sección a efectos de análisis. En concreto, se ha tomado una sección muy similar a la sección de positivos, ya que la distorsión es crítica en esta zona. El motivo principal que ha llevado a esta modificación

es que, durante la fase metálica, los saltos de sección generaban discontinuidades que alteraban los resultados dentro de una rutina de cálculo paramétrico. Esto se puede observar claramente en el apartado 6.5.3.4. Además, como se expondrá más adelante, los resultados obtenidos al suponer el puente recto tienden a converger con los resultados obtenidos para tableros rectos donde se han considerado las hipótesis de cálculo refinadas.

Una vez fijada la hipótesis de partida anterior, en la tabla 6.23 se muestra un resumen de las principales dimensiones de las secciones para cada distribución de luces y canto.

Dimensión	30 m	45 m	60 m	75 m	90 m
$C [m]$	1.5	1.75	2.4	3	3.6
$b_b [m]$	4	4	4	5	5
$b_{tf} [m]$	0.5	0.75	0.75	0.75	1
$t_{tf} [mm]$	15	20	20	20	20
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	15	12	12	15	12
$t_c [mm]$	0.22 – 0.77	0.32 – 1.15	0.27 – 0.99	0.28 – 1.7	0.29 – 1.75
n_{rb}	2	2	2	3	3
n_{rw}	—	1	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	—	50	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	—	—	75	75	75

TABLA 6.23 Principales dimensiones de las secciones

En dicha tabla se puede observar como la única dimensión variable es el espesor de la chapa de cierre. Se trata de la otra gran variación respecto a los tableros rectos, ya que al tratarse de tableros curvos es necesario considerar, especialmente durante la fase de construcción, un cierre en la parte superior de la sección metálica que permita controlar las tensiones y deformaciones durante dicha fase. Dicho cierre se ha modelado como un espesor equivalente de la celosía de cierre, y se ha calculado en función del ángulo en planta del tablero. Concretamente, se ha calculado la torsión máxima debida a una viga biapoyada con la curvatura objeto de cálculo y el peso propio del tablero. A partir de ese tórsor, se ha dimensionado la celosía superior por resistencia, y se ha tomado la rigidez mínima entre una celosía en cruz o una celosía en K. El espesor asignado a cada caso se encuentra en el apéndice E.3.1.

Concluido el cálculo de secciones, se ha procedido al cálculo de diafragmas.

6.4.2.3 Cálculo y dimensionamiento de diafragmas interiores

Como se explicó en la introducción, en el caso del tablero curvo solo se ha considerado una rigidez vinculada a cada geometría, y es la mínima correspondiente a un dimensionamiento por resistencia. Concretamente, la mínima debida al dimensionamiento de cuatro de los tipos más comunes de diafragmas antidistorsión: alma llena, San Andrés, K y V.

El torsor de diseño por resistencia para el dimensionamiento ($M_{T,r}$) se ha tomado como:

$$M_{T,r} = 3780 + 134.3 \cdot S_D + M_d \cdot \frac{b_s}{b_b} \cdot \frac{S_D}{R} \quad (6.13)$$

Donde M_d es el máximo momento positivo en ELU, que se multiplica por b_s/b_b para tener en cuenta los efectos del cajón trapezoidal, tal y como se justifica en el apéndice B. Los valores que adopta el máximo flector en cada luz son los siguientes:

Luz	30 m	45 m	60 m	75 m	90 m
M_d [kN.m]	17.593	32.807	52.586	75.954	107.127

TABLA 6.24 Momento flector máximo en ELU

El listado completo del espesor equivalente de diafragma para cada geometría se encuentra en el apéndice E.3.2.

Por último, es importante mencionar que, al igual que en el tablero recto, en cada posición de rigidizador de alas y almas donde no existe un diafragma antidistorsión se ha supuesto un diafragma de alma llena con un espesor equivalente de 0.01 mm.

6.4.2.4 Cálculo iterativo y obtención de resultados

En cuanto al cálculo, se ha considerado las mismas cargas que para el caso de tablero recto, incluyendo el peso propio de la estructura, la carga muerta y las cargas de tráfico. Además, también se ha mantenido su forma de aplicarlas. Sin embargo, las hipótesis de cálculo sí que han variado en el caso del tablero curvo, donde se han realizado las siguientes hipótesis:

- Cada tramo entre rigidizadores se ha discretizado en 4 elementos finitos al igual que en el tablero recto.
- No se ha considerado fisuración de la losa a negativo, ya que se ha calculado suponiendo una sección constante.
- Las tensiones se han calculado a partir de las secciones supuestas en el cálculo, y se han aplicado las reducciones debidas al arrastre por cortante.

Al igual que en el tablero recto, las cargas también se han combinado a nivel de esfuerzos, reacciones en diafragmas y tensiones, obteniendo los mismos resultados que en el tablero recto. Lo anterior también implica que el procesamiento de los resultados haya sido idéntico, por lo que se mantiene la definición de sobretensión ($\Delta\sigma_d$), ratio de sobretensión ($\Delta\sigma$) y ratio de torsión respecto a la torsión de dimensionamiento por resistencia (T).

En cuanto a los resultados que se mostrarán, serán principalmente la sobretensión por tracción en la fibra inferior y las reacciones máximas en los diafragmas. Además, para un análisis más completo, se presentará la evolución de la distorsión con la curvatura para los distintos tipos de carga: peso propio, carga muerta y cargas de tráfico. Es importante aclarar que las tensiones máximas en los vértices debidas a cada una de las cargas pueden no coincidir en la misma sección. Por lo tanto, la sobretensión máxima no es la suma de cada una de las sobretensiones debidas a las cargas por separado, lo que significa que la sobretensión final puede mantenerse constante a pesar de que las sobretensiones de las distintas cargas varíen.

6.4.3 Resultados

Se muestran a continuación los resultados de los cálculos agrupados por vano.

6.4.3.1 Vano de 30 m

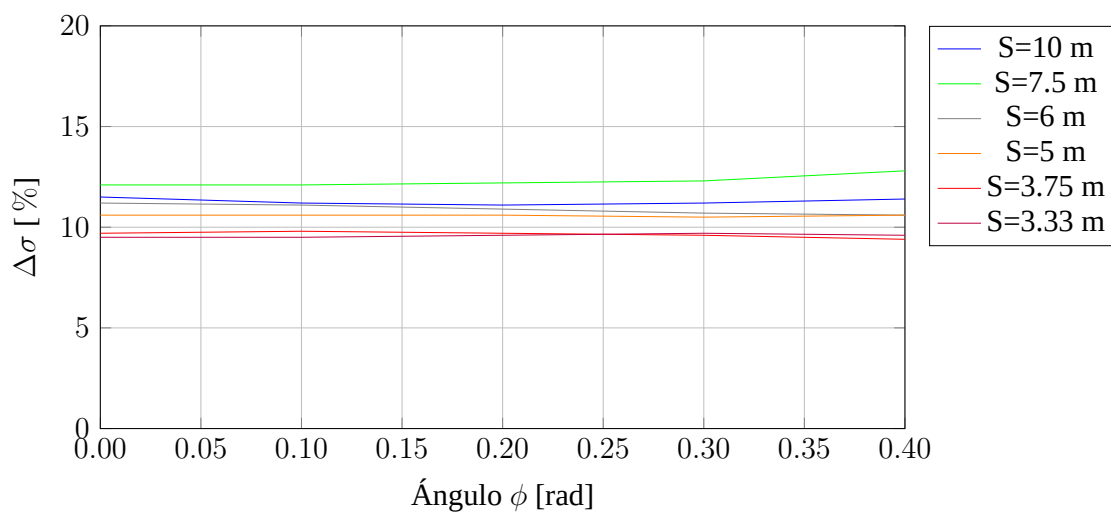


FIGURA 6.38 Caso 30 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU

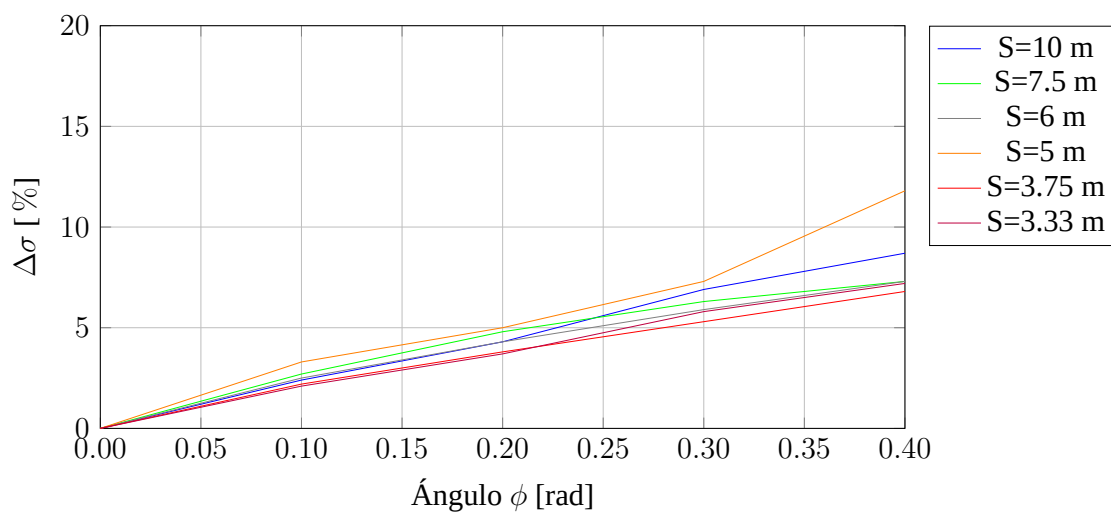


FIGURA 6.39 Caso 30 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio

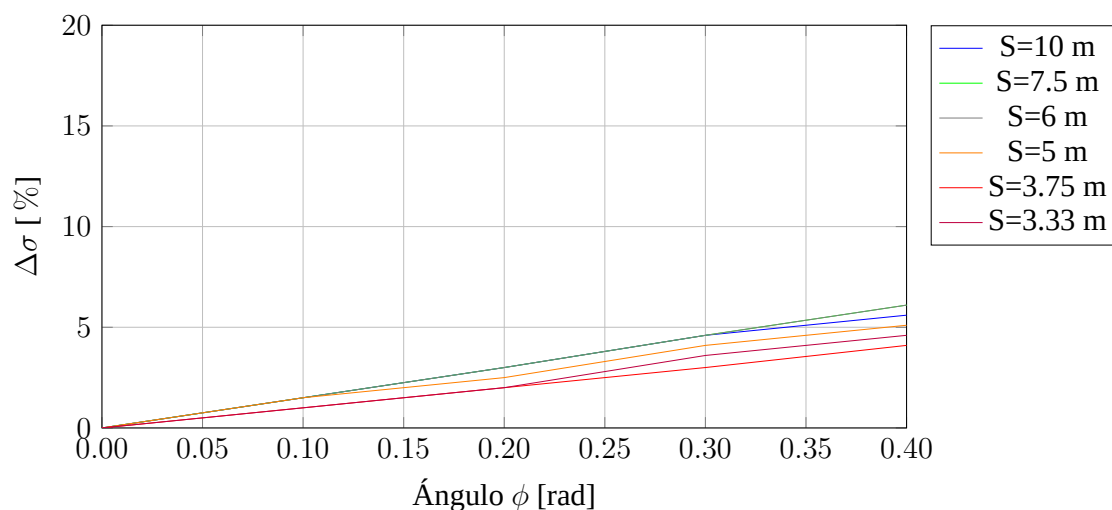


FIGURA 6.40 Caso 30 m curva: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta

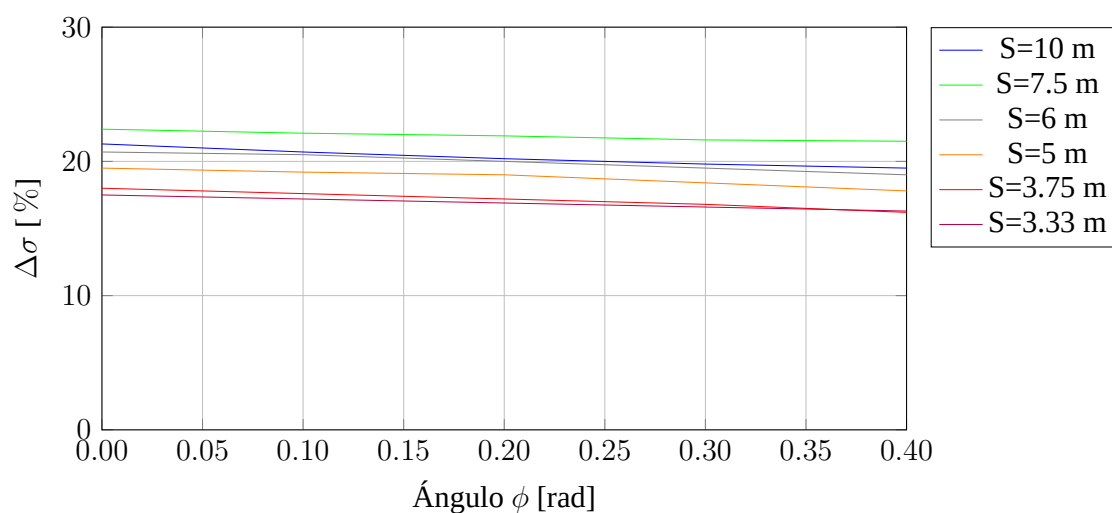


FIGURA 6.41 Caso 30 m curva: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico

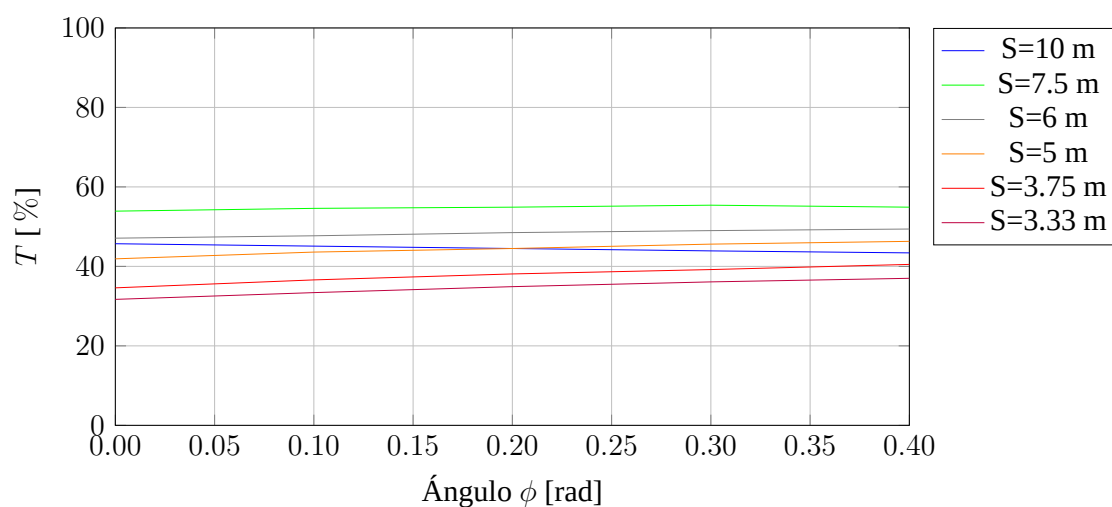


FIGURA 6.42 Caso 30 m curva: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.4.3.2 Vano de 45 m

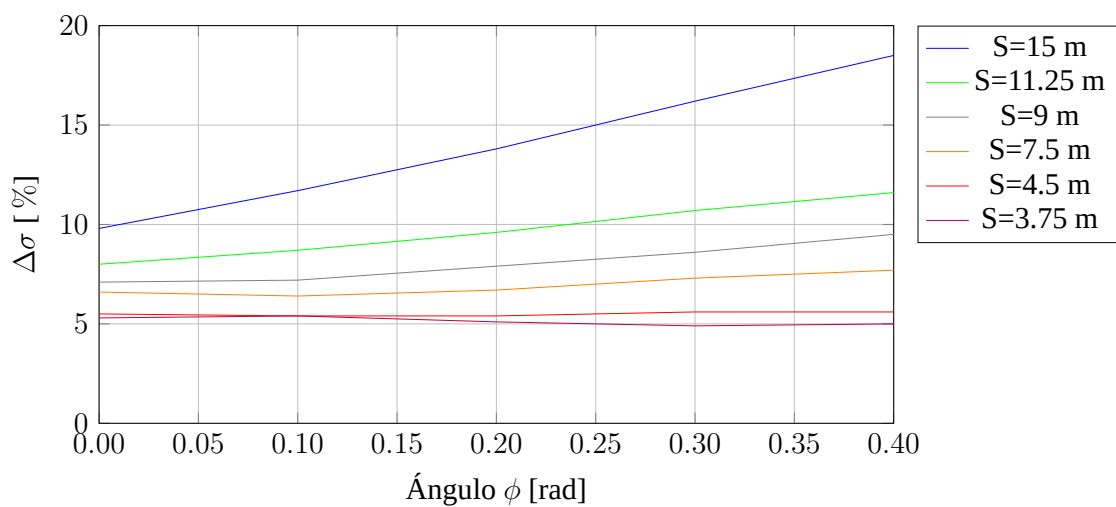


FIGURA 6.43 Caso 45 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU

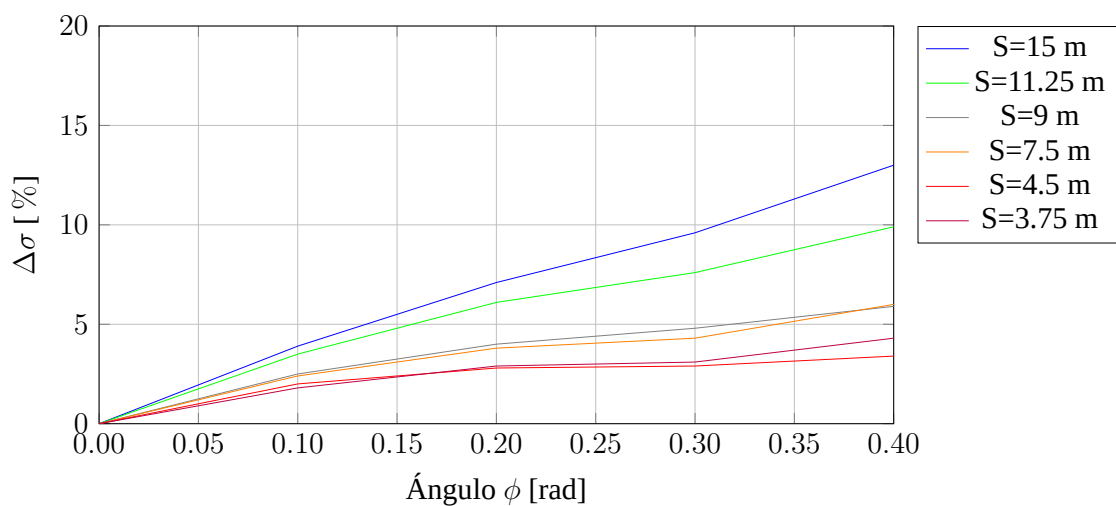


FIGURA 6.44 Caso 45 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio

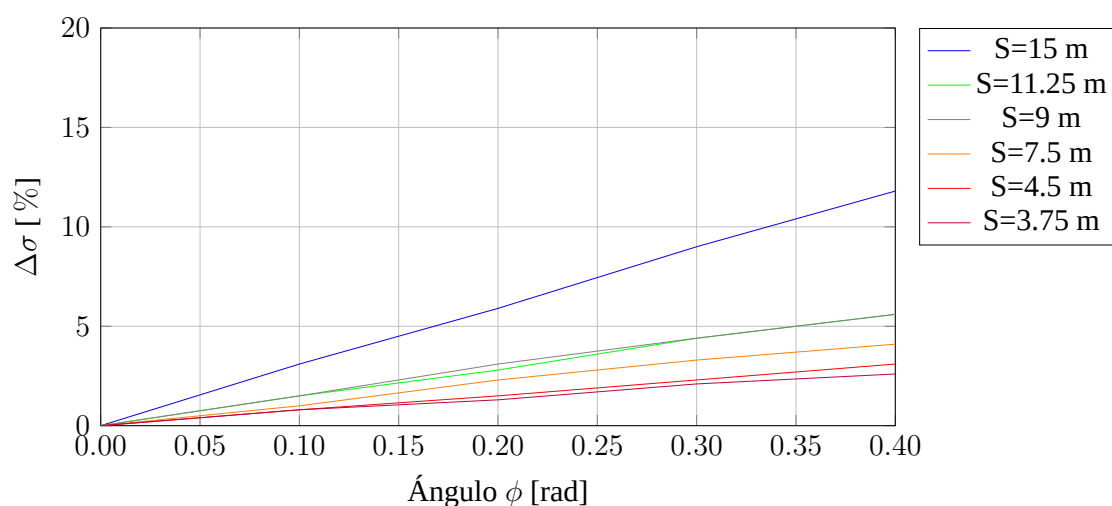


FIGURA 6.45 Caso 45 m curva: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta

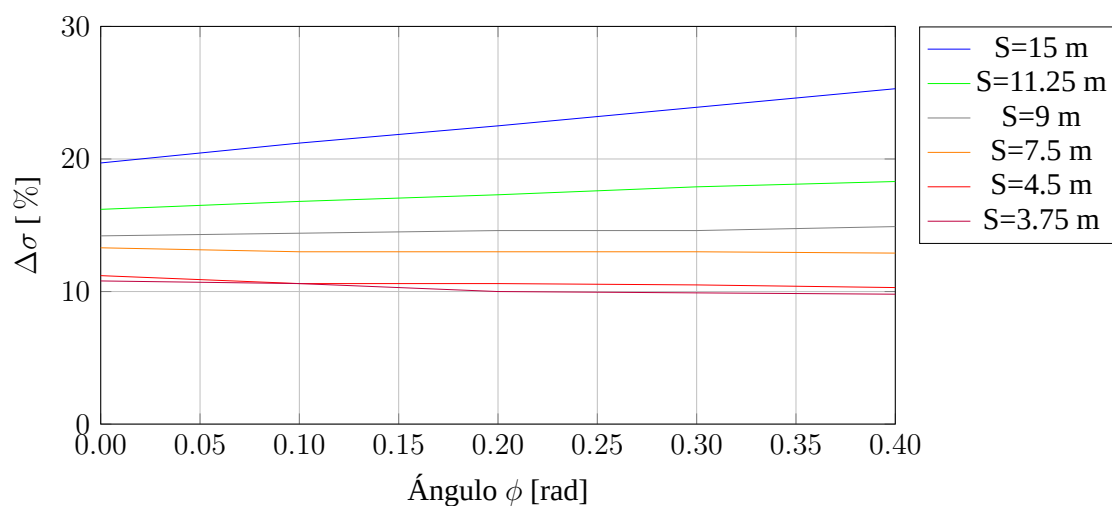


FIGURA 6.46 Caso 45 m curva: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico

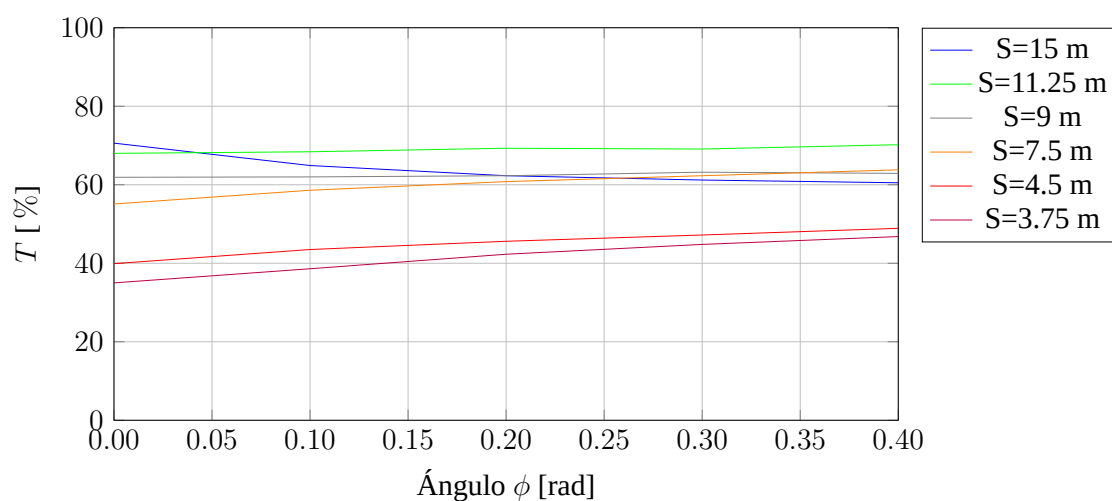


FIGURA 6.47 Caso 45 m curva: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.4.3.3 Vano de 60 m

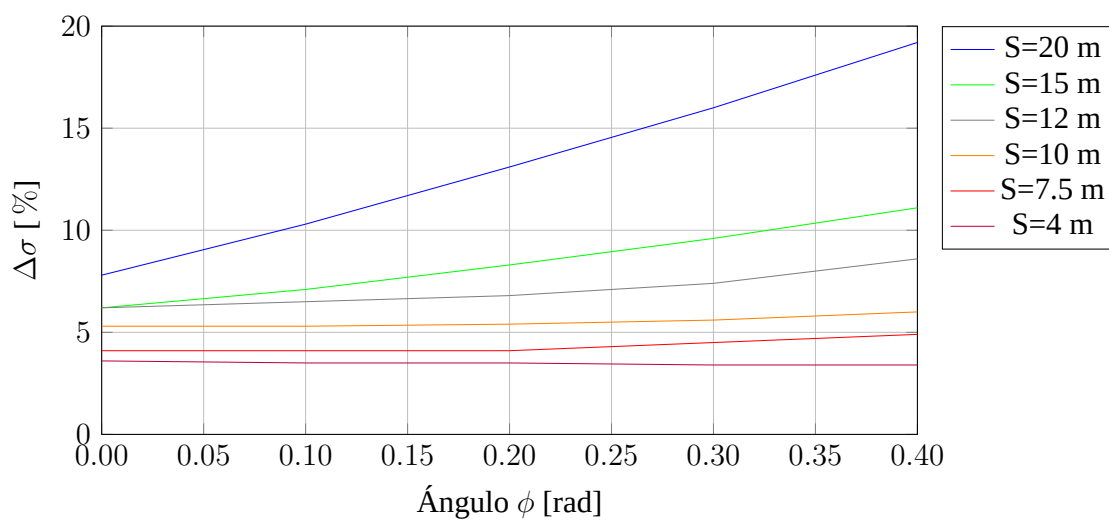


FIGURA 6.48 Caso 60 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU

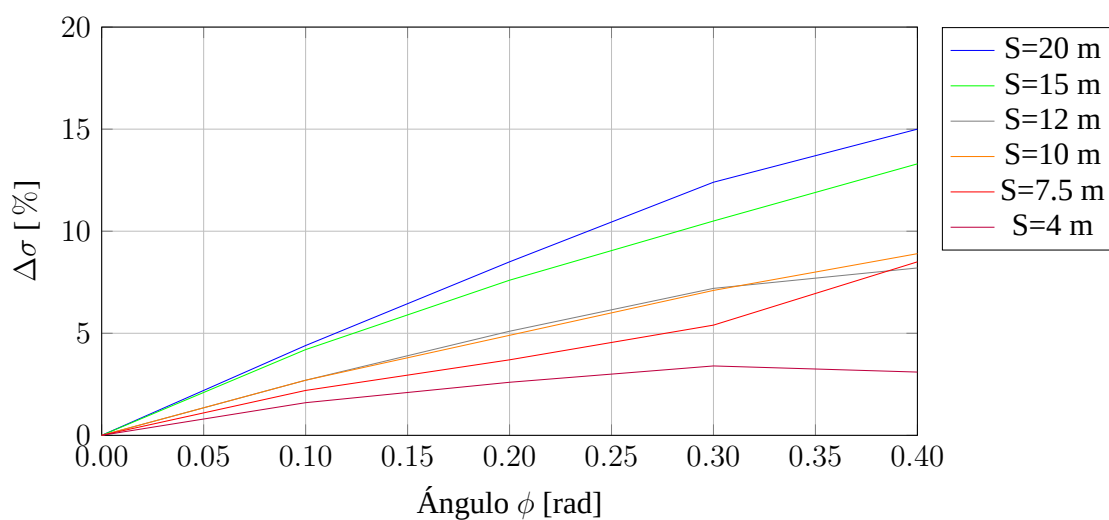


FIGURA 6.49 Caso 60 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio

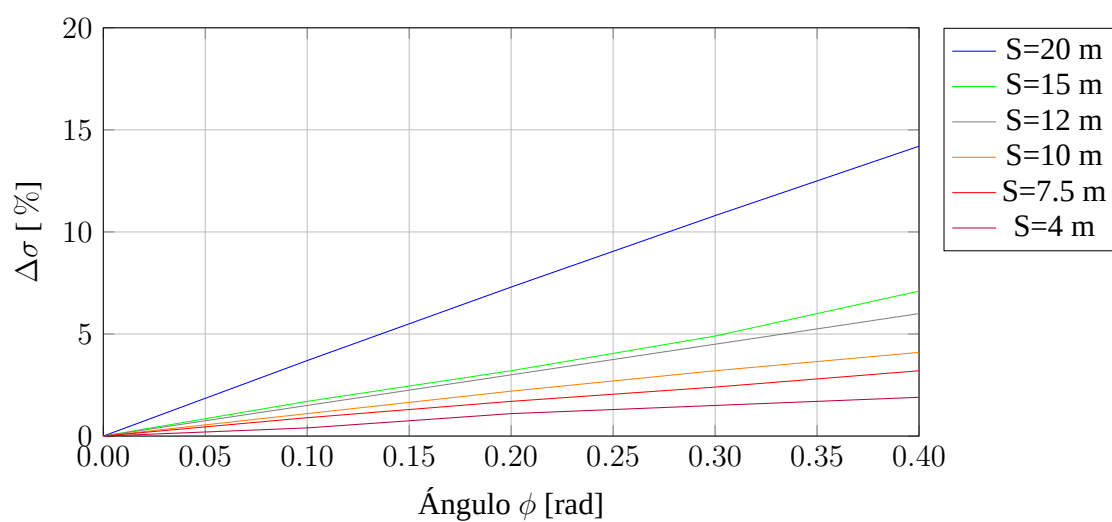


FIGURA 6.50 Caso 60 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta

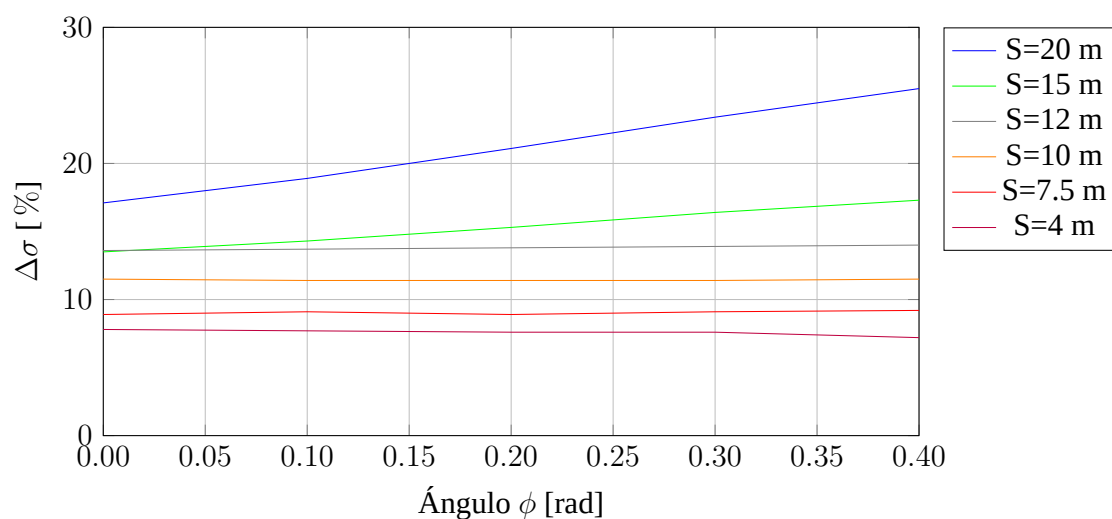


FIGURA 6.51 Caso 60 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico

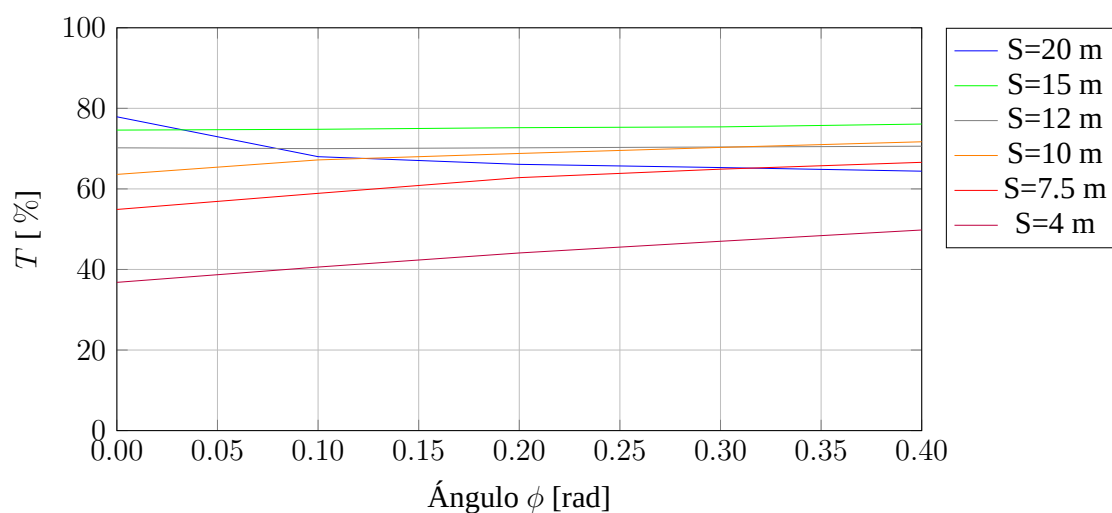


FIGURA 6.52 Caso 60 m curvo: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.4.3.4 Vano de 75 m

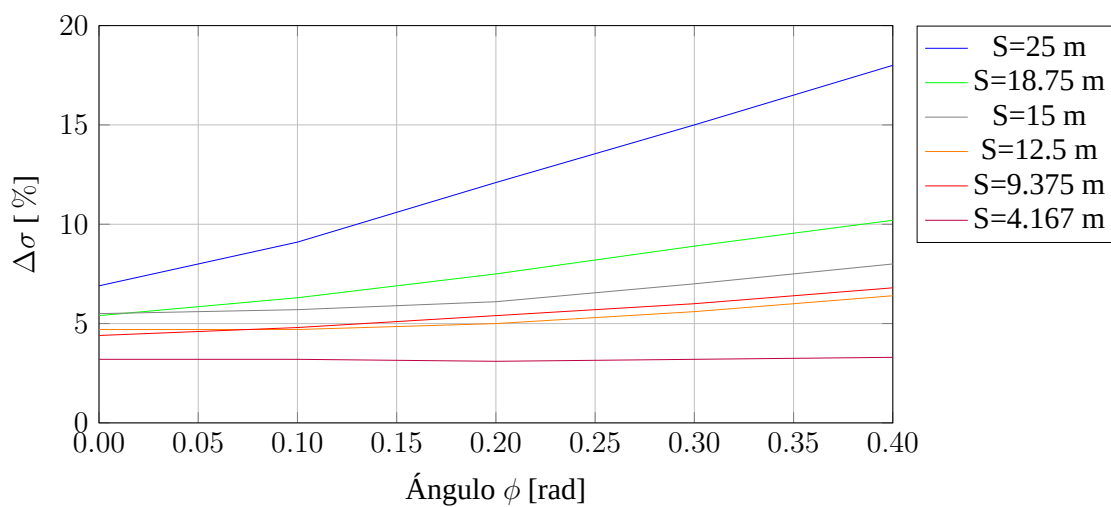


FIGURA 6.53 Caso 75 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU

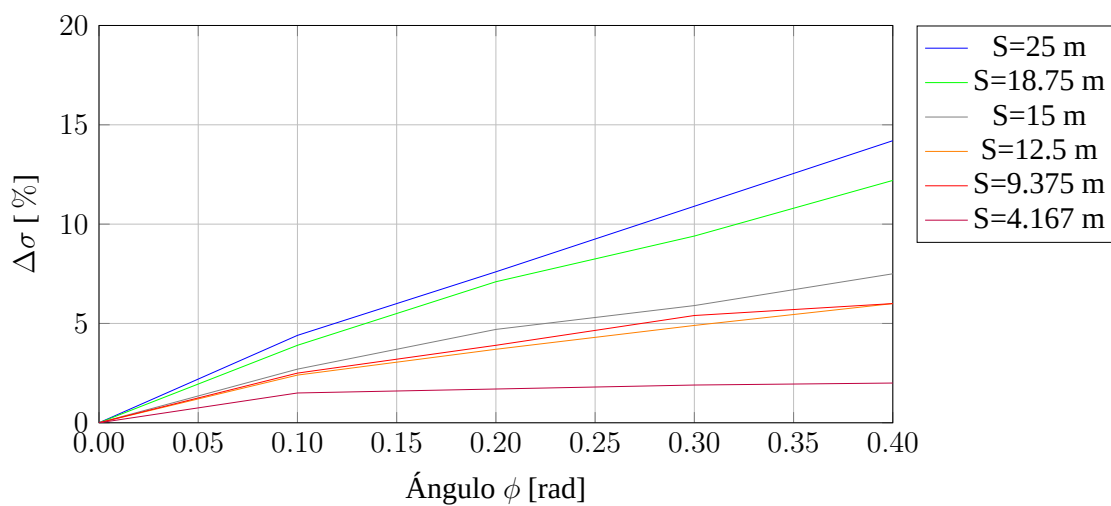


FIGURA 6.54 Caso 75 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio

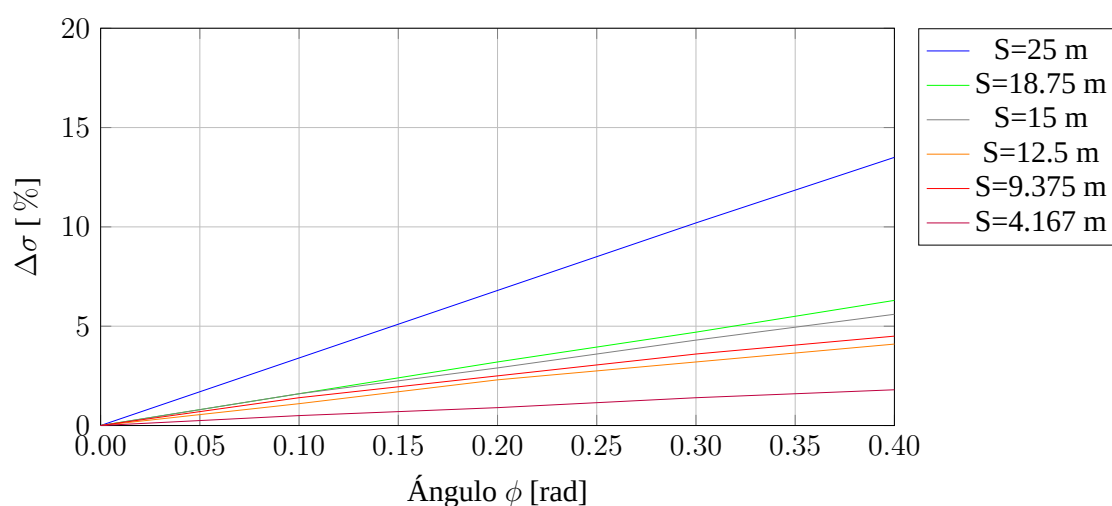


FIGURA 6.55 Caso 75 m curva: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta

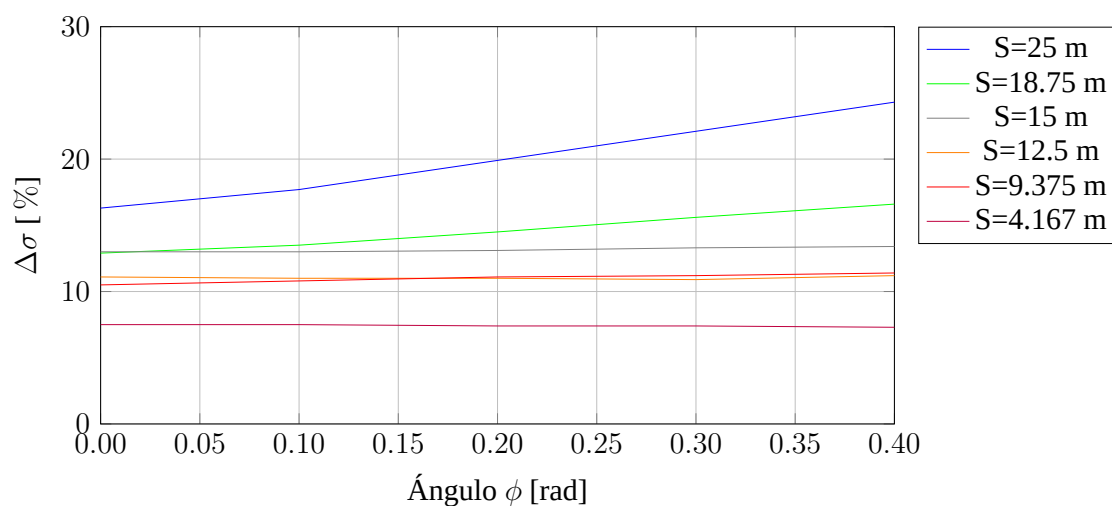


FIGURA 6.56 Caso 75 m curva: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico

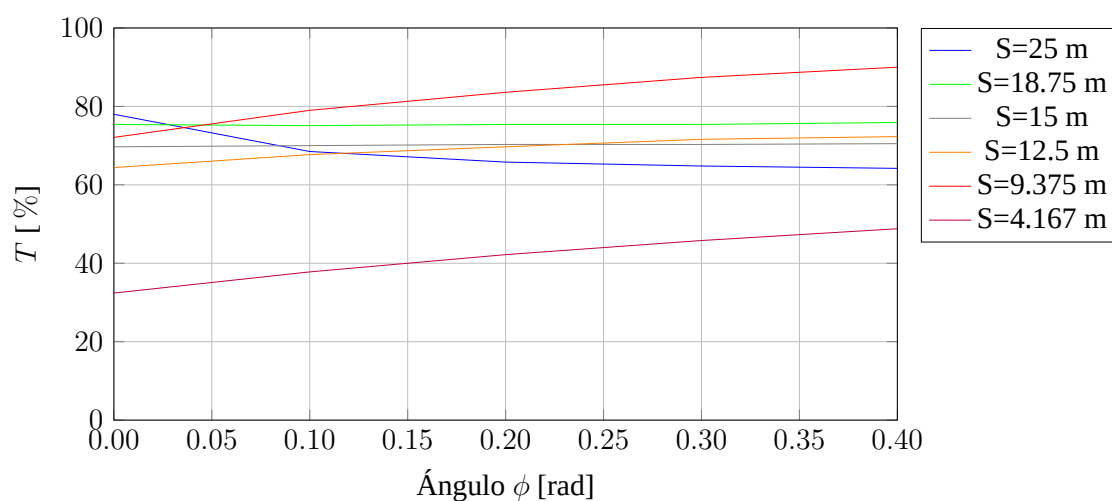


FIGURA 6.57 Caso 75 m curva: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.4.3.5 Vano de 90 m

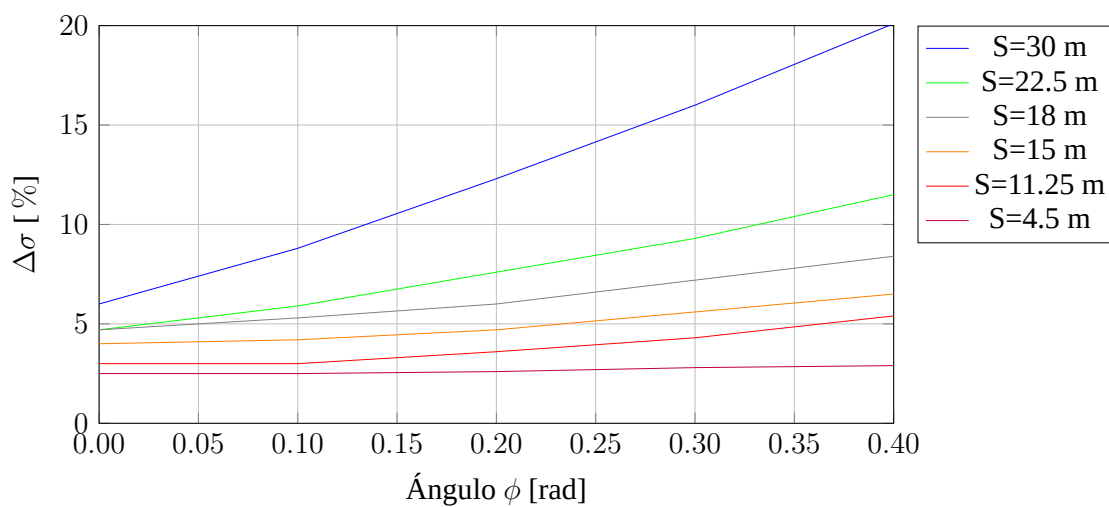


FIGURA 6.58 Caso 90 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU

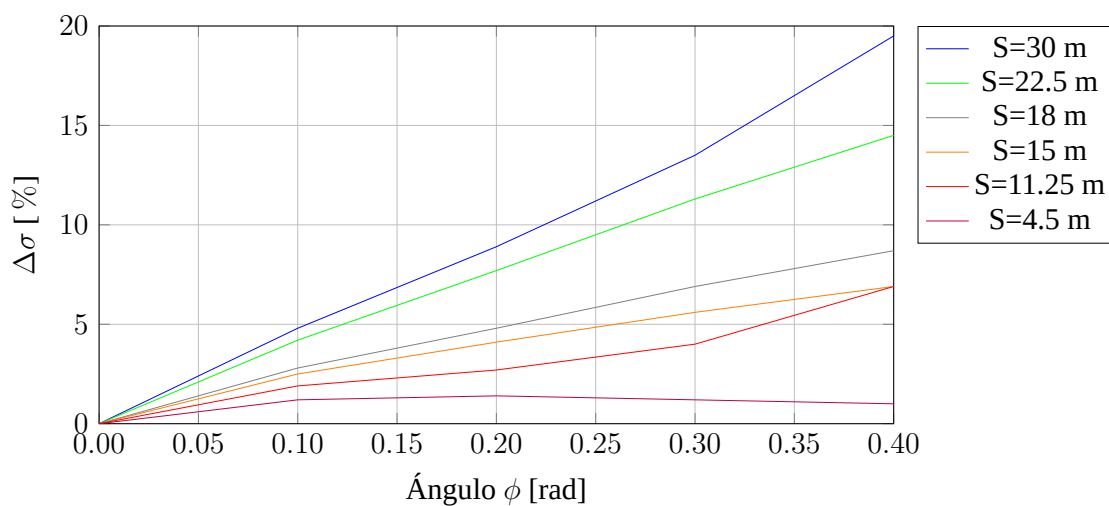


FIGURA 6.59 Caso 90 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio

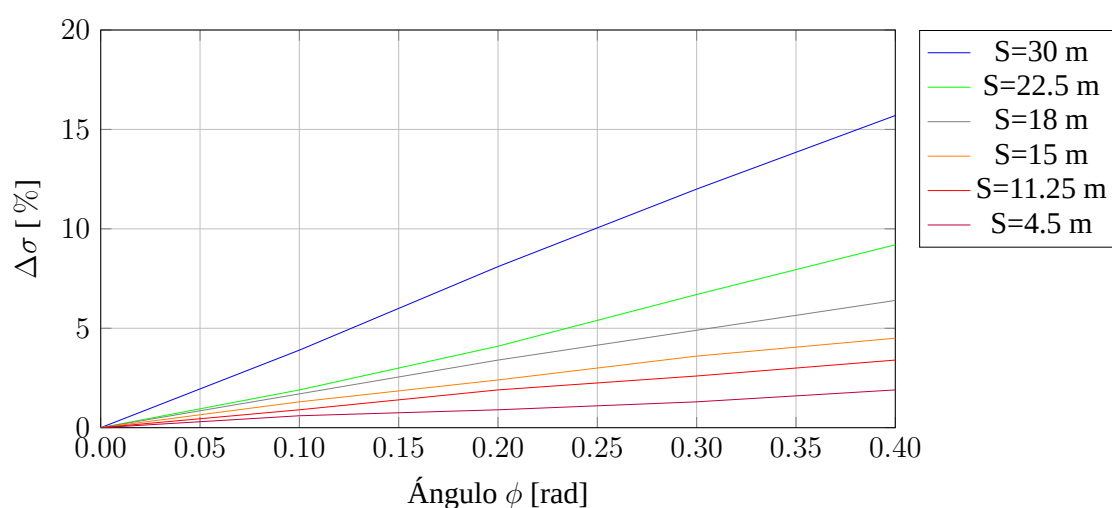


FIGURA 6.60 Caso 90 m curva: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta

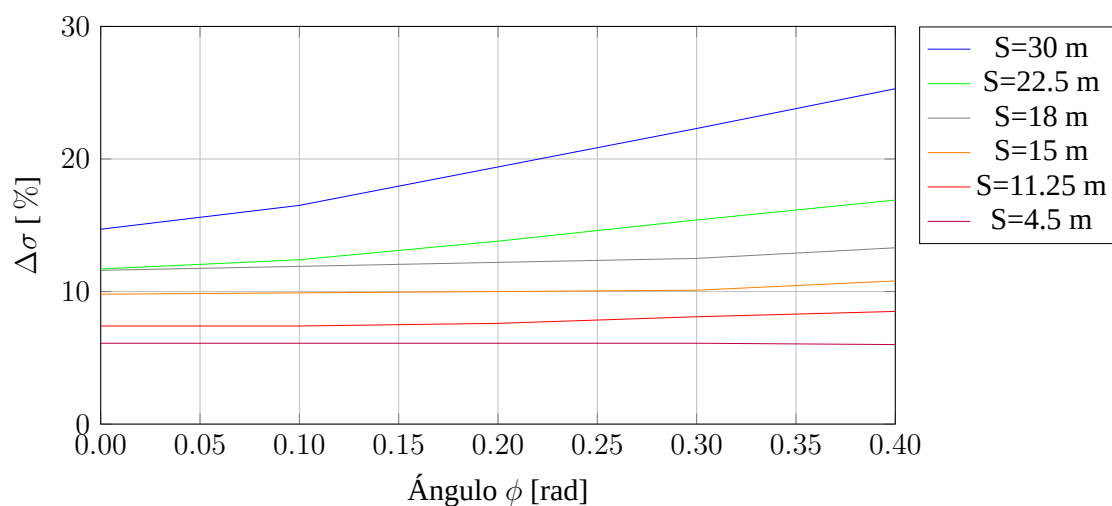


FIGURA 6.61 Caso 90 m curva: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico

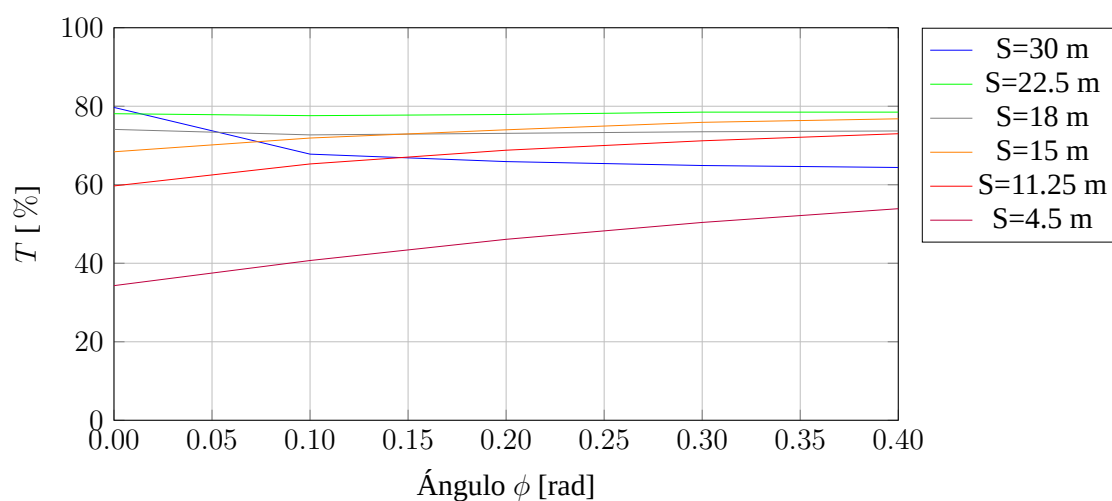


FIGURA 6.62 Caso 90 m curva: Reacción máxima en diafragmas interiores

6.4.4 Análisis de resultados

6.4.4.1 Introducción

El objetivo de este apartado es analizar los resultados mostrados anteriormente con el fin de extraer conclusiones acerca de la influencia de la curvatura en la distorsión.

En concreto, se estudiará cómo evoluciona la sobretensión dependiendo del tipo de carga y su fase de construcción, ya que en los puentes mixtos las secciones son evolutivas y, además, la curvatura en planta genera sobretensión durante todas las fases.

Asimismo, se analizará cómo la curvatura afecta a los criterios de dimensionamiento establecidos para los tableros en alineación recta, tanto para el dimensionamiento por resistencia como para el dimensionamiento flexible.

6.4.4.2 Análisis de las cargas

Las cargas principales en un tablero de un puente mixto son el peso propio, la carga muerta y el tráfico. Además, el gradiente térmico, la retracción o el viento pueden tener su influencia, pero estas últimas cargas no se consideran en el presente análisis.

Peso propio

El peso propio del puente actúa principalmente sobre la sección metálica, cuya resistencia es menor a la de la sección mixta. Por lo tanto, es necesario verificarla de manera independiente en la fase final, y por ese motivo se debe controlar la sobretensión también en esta fase.

En este caso, se ha supuesto que el peso propio actúa completamente sobre la sección metálica y sin apeos intermedios. Sin embargo, dividiendo en fases la construcción de la losa o disponiendo apeos intermedios se pueden reducir las tensiones y sobretensiones asociadas al peso propio. Además, una mayor rigidez en la celosía de cierre superior entre platabandas, o incluso la disposición de una chapa de cierre, también contribuye a la reducción de las sobretensiones. Es decir, las sobretensiones aquí mostradas se basan en una hipótesis conservadora, y podrían reducirse con un análisis refinado del proceso constructivo. Para obtener más información acerca de las celosías de cierre, se remite al lector a los artículos de Fan y Heldwing [137], Kim y Yoo [138] y Zhang *et al* [139].

Los resultados del análisis de peso propio muestran claramente que la sobretensión aumenta a medida que se incrementa la curvatura. Este crecimiento es generalmente regular, aunque en algunos casos se observan incrementos mayores de los esperados. Estos casos

se deben a problemas de convergencia, los cuales serán estudiados en mayor detalle en futuras investigaciones, ya que, debido a la limitación de tiempo de la presente investigación, no se ha podido identificar una causa clara para estos problemas. Sin embargo, estos problemas no alteran las conclusiones del presente trabajo

En la mayoría de los casos, se ha observado que la sobretensión debida al peso propio crece a medida que se incrementa el espaciamiento entre diafragmas y la luz del puente. Por ejemplo, en los vanos de 30 y 45 m prácticamente no se identifican problemas de sobretensión en construcción si se cumple con el límite de espaciamiento fijado para los tableros rectos. Sin embargo, a medida que aumenta la luz, que se observa que en los mayores espaciamientos entre diafragmas se empieza a rebasar el límite del 10 % de sobretensión.

En base a los resultados mostrados anteriormente, se considera preceptivo realizar un análisis refinado del proceso constructivo cuando se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

- $L > 45 \text{ m}$
- $\phi > 0.2 \text{ rad}$
- $S_D > L \cdot (0.3 - 0.25 \cdot \phi) \text{ m}$

Para realizar este análisis, se recomienda emplear un modelo de elementos finitos tipo lámina, ya que durante el proceso constructivo se producen saltos de sección importantes, que provocan variaciones significativas en el alabeo de la sección, y que el estado del arte actual no permite tener en cuenta. Sin embargo, este tema es susceptible de investigaciones futuras.

Carga muerta

La carga muerta es habitualmente una carga centrada que actúa sobre la sección mixta, lo que la convierte en la carga que produce menos sobretensiones.

Al igual que en el peso propio, existe una relación creciente entre la sobretensión, la curvatura en planta y el espaciamiento entre diafragmas. Sin embargo, la relación con la luz no es tan clara.

La carga muerta se incluye en las verificaciones de la sección completa, que también incluyen las cargas de tráfico. Por ello, la influencia de esta carga quedará incluida en las conclusiones finales sobre la influencia de la curvatura.

Tráfico

A diferencia de las cargas permanentes, el tráfico genera sobretensiones incluso en tableros rectos debido a que su carga es excéntrica. La sobretensión aumenta con el espaciamiento entre diafragmas y disminuye con la luz del puente, tal como se observó en los tableros de directriz recta.

Sin embargo, la mayor singularidad de la carga de tráfico es que, aproximadamente, cuando se disponen cuatro diafragmas por vano, la sobretensión se mantiene constante independientemente de la curvatura. Pascual enunció esta conclusión en su tesis sin aportar ninguna justificación numérica. No obstante, y a la vista de los resultados, esta conclusión parece confirmarse, pero no se puede aplicar al dimensionamiento del tablero, ya que debe tenerse en cuenta la influencia de las cargas permanentes en la sobretensión.

Al igual que en el caso de la carga muerta, la verificación de la sección se realiza a sección completa. Por lo tanto, la combinación entre cargas permanentes y tráfico se analizará en el siguiente apartado.

Combinación

En primer lugar, es importante destacar que las sobretensiones máximas asociadas a cada carga no necesariamente se dan en la misma sección. Por lo tanto, la suma ponderada de las sobretensiones no da como resultado la sobretensión en ELU, aunque resulta una aproximación conservadora.

Partiendo de esta premisa anterior, en la figura 6.63 se muestra el porcentaje de participación de cada tipo de carga en la tensión de flexión final. Para ello, se han tomado las tensiones debidas a cada uno de los tres tipos de carga y se ha calculado su porcentaje respecto al total. Además, las cargas de tráfico se han dividido en las cargas debidas a la sobrecarga y las cargas debidas a los carros. Para ello, se ha calculado la relación entre los carros calculados como carga puntual, y la sobrecarga calculada como carga distribuida para una luz isostática equivalente al 75 % de la luz principal.

Se observa en dicha figura cómo la influencia de las cargas permanentes aumenta a medida que la luz aumenta, pasando de suponer el 40 % cuando la luz es 30 m al 60 % cuando la luz es 90 m. La implicación de esta variación está en que cuanto menor es la luz, mayor influencia de las cargas de tráfico, y en consecuencia, mayor es la distorsión. Sin embargo, a medida que aumenta la curvatura en planta del tablero, las cargas permanentes empiezan a generar sobretensiones en la sección. Por lo tanto, cuanto mayor sea la luz, mayor será la limitación que se debe imponer al espaciamiento entre diafragmas en relación con el

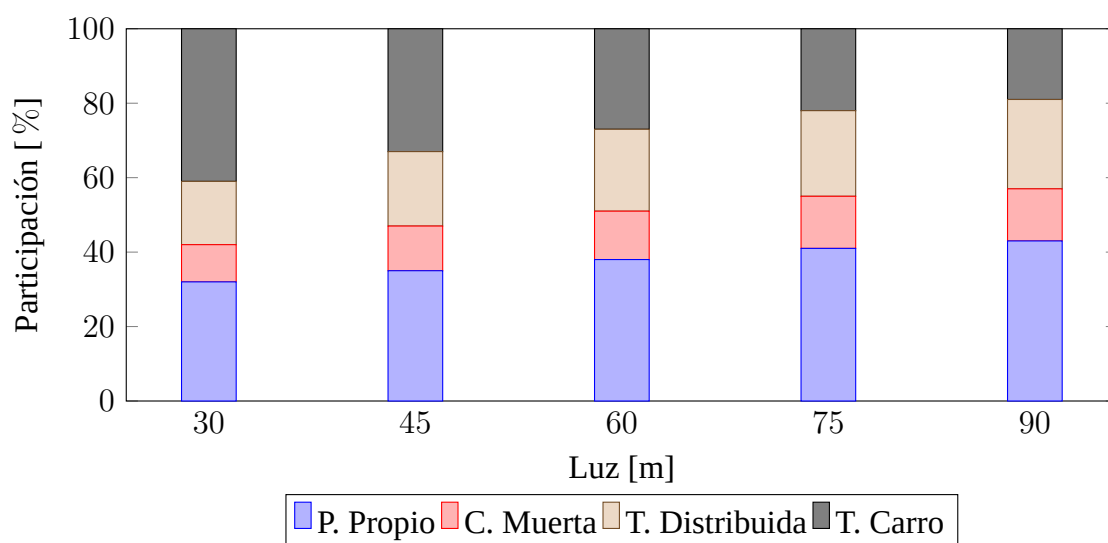


FIGURA 6.63 Participación de las cargas en la tensión total

tablero recto.

En cuanto a las cargas de tráfico, se puede observar claramente que la relación entre la tensión producida por los carros y la tensión producida por la sobrecarga pasa aproximadamente de ser el doble en 30 m a igualarse en 90 m. Es decir, conforme aumenta la luz, disminuye la influencia del carro, y este es uno de los factores que provoca la disminución de la distorsión con la luz, ya que los vehículos pesados son precisamente los mayores causantes de distorsión en tableros rectos.

Sin embargo, las conclusiones relativas a puentes en alineaciones rectas no son extrapolables a puentes con directriz curva. Por ejemplo, si se está analizando un puente de 60 m donde la relación entre las cargas permanentes y las cargas de tráfico es aproximadamente 50-50, cuando el puente es recto se puede llegar a un 20 % de sobretensión por cargas de tráfico. Pero, si presenta una curvatura en planta importante y las tensiones debidas a la carga permanente llegan al 10 %, tan solo se podrá llegar al 10 % de tensiones en las cargas de tráfico. Por lo tanto, se debe analizar la influencia de la curvatura en el dimensionamiento tanto por resistencia como flexible.

6.4.4.3 Dimensionamiento por resistencia

Para estudiar cómo afecta la curvatura al dimensionamiento por resistencia se procederá de manera similar al tablero en alineación recta. Es decir, se ha calculado por interpolación para los casos objeto de estudio, el espaciamiento mínimo entre diafragmas admisible en función de la curvatura.

Del análisis de la sobretensión máxima para el vano de 30 m mostrado en la figura 6.38,

se deduce que esta apenas varía con la curvatura, por lo que dicho vano queda fuera del presente análisis.

Para el resto de vanos, en primer lugar, se ha comparado el espaciamiento máximo obtenido para un tablero en alineación recta aplicando las hipótesis de cálculo de tablero recto del apartado anterior, donde se han considerado múltiples secciones y fisuración en pila entre otros; y el de tablero curvo, donde, como se explicó previamente, se considera sección constante. La comparativa se muestra en la tabla 6.25.

Luz	45 m	60 m	75 m	90 m
Recto [m]	12.2	25.7	37.7	89.2
Curvo [m]	15.4	26.6	38.9	90.0

TABLA 6.25 Espaciamiento máximo según hipótesis de cálculo

Se observa que los espaciamientos son muy similares, lo que confirma que adoptar la hipótesis de sección constante no altera las conclusiones. La única excepción es el vano de 45 m, donde el espaciamiento aplicando la metodología curva es mayor. Para tener en cuenta esta diferencia, se ha optado por aplicar la relación entre espaciamiento recto y curvo a todos los espaciamientos calculados con la metodología curva. Es decir, en el caso del vano de 45 m se ha aplicado un factor de $12.2/15.4 = 0.79$ a todos los espaciamientos.

Una vez fijadas las hipótesis de partida, se muestra en la figura 6.64 el espaciamiento máximo relativo calculado en función de la curvatura.

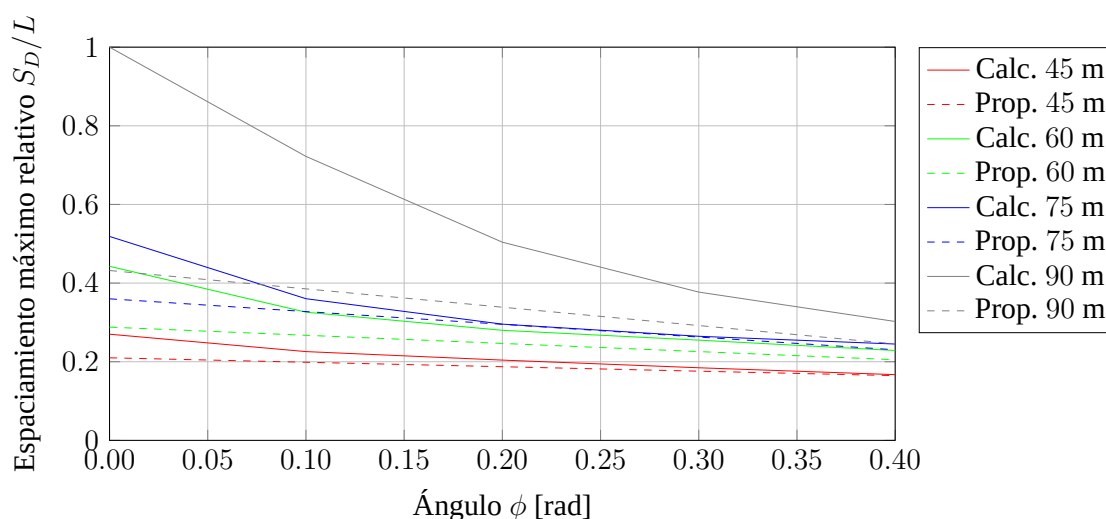


FIGURA 6.64 Espaciamiento máximo en función de la curvatura

También se representa en la figura la propuesta de espaciamiento en función de la curva-

tura. Partiendo del espaciamiento para tableros rectos ($S_{D,r}$), se propone multiplicar dicho espaciamiento por un factor que depende de la luz del vano (L) y el ángulo del vano (ϕ). Concretamente dicho factor por curvatura (f_c) se define como:

$$f_c = 1 - 0.012 \cdot L \cdot \phi = 1 - 0.012 \cdot \frac{L^2}{R} \quad (6.14)$$

Y por lo tanto el espaciamiento máximo curvo $S_{D,c}$ se define en función del espaciamiento máximo recto ($S_{D,r}$) como:

$$S_{D,c} \leq S_{D,r} \cdot \left(1 - 0.012 \cdot \frac{L^2}{R} \right) \quad (6.15)$$

Donde el espaciamiento máximo recto ($S_{D,r}$) se definirá en la ecuación 6.16 teniendo en cuenta la influencia del ancho.

Un aspecto importante del planteamiento anterior es que el factor por curvatura (f_c) se puede aplicar tanto si se limita a la tensión media como si se limita a la tensión de plastificación del acero. En concreto, el límite mostrado en la figura 6.64 se corresponde con la limitación respecto a la tensión media, que se considera la menos conservadora de ambas. Por lo tanto, su aplicación al caso de limitar la tensión de plastificación queda del lado de la seguridad.

En relación a las reacciones máximas en diafragmas interiores, las reacciones calculadas no superan en ningún caso las reacciones de dimensionamiento por resistencia, ya que T es inferior al 100 % en todas las gráficas del apartado 6.4.3. Por lo tanto, la hipótesis de dimensionamiento por resistencia queda del lado de la seguridad.

6.4.4.4 Dimensionamiento flexible

Para analizar el dimensionamiento flexible, ha sido necesario realizar cálculos complementarios. En concreto, para las luces entre 45 y 90 m se calculó el caso 6 aplicando los espesores resultantes de un dimensionamiento flexible. Es decir, el momento de diseño empleado es el resultante de aplicar al momento de diseño por resistencia el factor (T_f) definido en la ecuación 6.12. Los espesores equivalentes resultantes de este dimensionamiento se muestran en la tabla 6.26.

Es importante aclarar que, en todos los casos, el condicionante de la fue la resistencia del diafragma y no el espesor mínimo que marca la ecuación 6.11.

L	$\phi = 0$	$\phi = 0.1$	$\phi = 0.2$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.4$
45 m	0.346	0.346	0.392	0.392	0.392
60 m	0.345	0.426	0.426	0.483	0.483
75 m	0.364	0.364	0.409	0.409	0.409
90 m	0.35	0.369	0.369	0.446	0.446

TABLA 6.26 Espesores en milímetros por condición de diseño flexible

Los resultados obtenidos en cuanto a sobretensiones han sido satisfactorios, ya que en todos los casos quedan por debajo del 10 %, como se muestra en la figura 6.65.

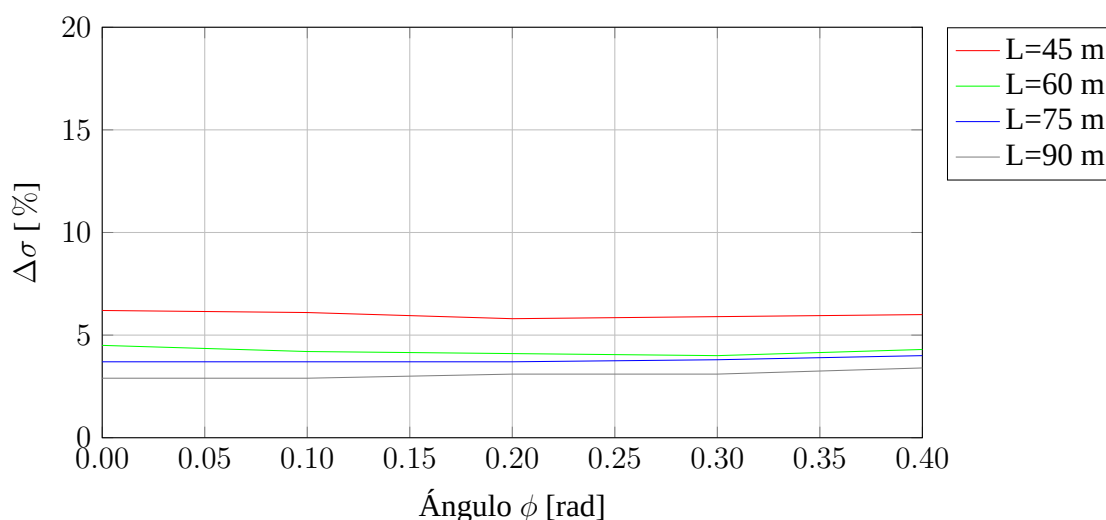


FIGURA 6.65 Sobretensión máxima en ala inferior en ELU

En cuanto a las reacciones en diafragmas, se considerarán dos posibilidades: aplicar el factor de reducción T_f definido en la ecuación 6.12 a todos los esfuerzos, o solo a las cargas de tráfico. El primero de los casos se denomina T_1 y el segundo T_2 , y para el ancho de tablero de 11.3 m definen como:

$$T_1 = T_f \cdot \left(3780 + 134.3 \cdot S_D + M_d \cdot \frac{b_s}{b_b} \cdot \frac{S_D}{R} \right)$$

$$T_2 = T_f \cdot (3780 + 134.3 \cdot S_D) + M_d \cdot \frac{b_s}{b_b} \cdot \frac{S_D}{R}$$

La comparación entre la torsión máxima calculada en los diafragmas y los torsores de dimensionamiento T_1 y T_2 se ilustra en la figura 6.66. T_1 se muestran en línea sólida mientras que T_2 se muestra en línea discontinua. Los resultados mostrados en la figura 6.66 son bastante claros. De ellos, se puede concluir que no se debe aplicar el factor de reducción a la parte del torsor de dimensionamiento debida al momento flector. Esta conclusión se basa en el hecho de que la hipótesis T_1 , donde se aplica el factor de reducción a la parte del momento, es suficiente para los casos de curvatura nula. Sin embargo, con-

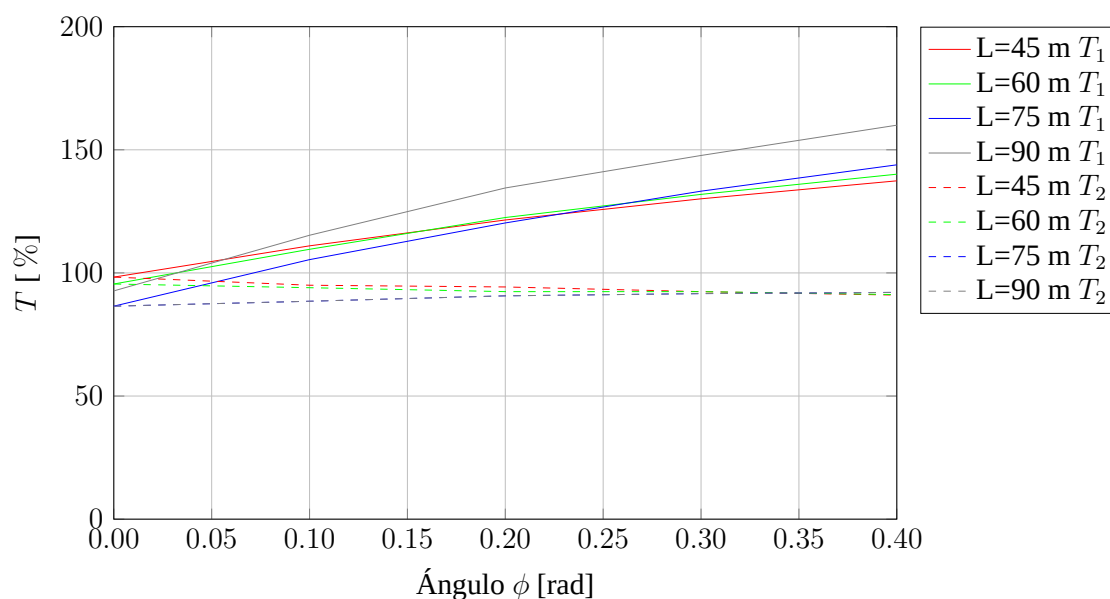


FIGURA 6.66 Reacción máxima en diafragmas interiores

forme aumenta la curvatura, la reacción en el diafragma supera la reacción considerada en el dimensionamiento.

Por otro lado, cuando se omite el factor de reducción a los esfuerzos debidos a la curvatura en la hipótesis T_2 , la resistencia es suficiente en todos los casos. Sin embargo, bajo esa hipótesis, se requerirá una mayor rigidez, lo que generará un aumento tanto en el torsor por los esfuerzos debidos a la curvatura, como en los esfuerzos debidos a las cargas de tráfico.

En resumen, la necesidad de incorporar la totalidad del torsor debido a la curvatura hace que, en el caso de tableros curvos, el enfoque flexible propuesto resulte menos atractivo que en el caso de tableros rectos. Por lo tanto, en las alineaciones curvas se recomienda un dimensionamiento por resistencia.

6.5 Tableros anchos

6.5.1 Introducción

Un parámetro fundamental en el estudio de la distorsión es el ancho del tablero. Es evidente que cuanto mayor es el ancho del tablero mayor es la carga distorsora, y por lo tanto, puede haber mayor sobretensión. Por lo tanto, se debe estudiar la respuesta ante el incremento en las cargas debido a una mayor anchura.

En los apartados anteriores se han estudiado puentes de 11.3 m de ancho total y las conclu-

siones anteriormente expuestas resultan aplicables hasta dicho ancho. No obstante, puede haber múltiples motivos que lleven a la necesidad de diseñar tableros de un ancho mayor. Por lo tanto, en este apartado se estudiará cómo influye la anchura en el dimensionamiento de diafragmas antidistorsión.

La forma de materializar el tablero también depende a su vez del ancho. De acuerdo con el SETRA [1], para anchos de hasta 12-14 m la losa del tablero no requiere de apoyos adicionales además de las almas. Sin embargo, partir de ese ancho, la misma guía recomienda disponer de vigas transversales cada 4 m aproximadamente. Por lo tanto, se estudiarán tableros ligeramente más anchos, de 12.8 m, suponiendo que la losa no está apoyada. Este estudio se realizará para luces principales a partir de 60 m, que prácticamente es el límite inferior del rango de aplicación de la teoría de vigas.

Posteriormente, y con el objetivo de estudiar tableros aún más anchos, se van a analizar dos casos singulares. El primero parte del caso estudiado anteriormente de tablero de canto variable y 75 m de luz principal. La principal diferencia es que el ancho en este caso es de 15.8 m, lo que confiere a este puente características propias de entornos urbanos. El segundo es un tablero de tres vanos principales de 90 m, dos vanos laterales de 72 m y un ancho de 26.6 m, y es más propio de un trazado de autovía donde ambos sentidos de circulación se alojan en un tablero único de sección cajón con jabalcones.

El enfoque del estudio dependerá del caso. Para estudiar tableros ligeramente más anchos, se seguirán analizando los enfoques de dimensionamiento por resistencia y dimensionamiento flexible, tal y como se describió anteriormente. Sin embargo, para estudiar singulares, el criterio de dimensionar diafragmas por resistencia cada 4-5 m está prácticamente impuesto por la presencia de las vigas transversales. Por lo tanto, el objetivo es verificar si ese criterio es suficiente.

Por último, es importante mencionar que, a nivel de metodología de cálculo, en todos los casos se ha seguido lo descrito para el tablero recto en el apartado 6.3.2.4.

6.5.2 Tableros de 12.8 m de ancho

6.5.2.1 Introducción

El primer estudio sobre los tableros anchos se centró en analizar cómo afecta al dimensionamiento de los diafragmas, tanto por criterios de resistencia como por criterios de flexibilidad, un incremento de 1.5 m en el ancho del tablero. Este incremento se considera compatible, por ejemplo, con una vía de tres carriles y arcenes de medio metro, o una vía

de dos carriles y arcones de 3 y 2 m, respectivamente.

Para el estudio se utilizaron las distribuciones de luces y cantos descritas para tableros rectos que se muestran en la tabla 6.1. De dicha tabla se tomaron los casos con luces principales de 60 m o más, por los motivos descritos anteriormente. Además, se consideraron tanto los casos de canto constante como de canto variable.

A continuación, se muestran en detalle las geometrías estudiadas, así como los principales resultados y su análisis.

6.5.2.2 Metodología y geometrías

A nivel geométrico, se han utilizado los 6 casos estudiados en tablero rectos de luces de 60 m o más como punto de partida. Posteriormente, para cada luz principal y tipo de canto se ha calculado el espaciamiento máximo por resistencia según lo descrito en el apartado 6.3.4.2. A partir de ese espaciamiento, se han seleccionado los dos espaciamientos entre diafragmas más cercanos al límite, dentro de los que cumplen, y con el fin de poder interpolar cómo se reduce el espaciamiento máximo. La correspondencia entre los casos rectos y los casos del presente estudio se puede encontrar en la tabla 6.27.

Caso	L [m]	H_{min} [m]	$S_{D,max}$ [m]	Caso recto	
1	60	2.4	17.28	2	3
2	75	3	27	1	2
3	90	3.6	38.88	1	2
4	60	1.5	10.8	4	5
5	75	2	18	3	4
6	90	2.5	27	2	3

TABLA 6.27 Casos analizados

La correspondencia con los casos rectos permite consultar que los espaciamientos entre diafragmas y rigidizadores empleados en este cálculo en las tablas 6.2 a 6.4 y el apéndice E.2.1. Además, se ha considerado el caso 6 de tablero recto para estudiar el dimensionamiento por flexibilidad.

Una vez definidos los espaciamientos y las geometrías, el siguiente paso ha sido revisar las secciones. Debido al mayor ancho del tablero se ha incrementado el espesor de la losa hasta 29 cm. Además, el incremento de 1.5 m se ha repartido añadiendo 75 cm al ancho superior e inferior del cajón y los otros 75 cm a los voladizos. Después de fijar estas dimensiones, y preservando también la dimensión de 0.25 m de ancho exterior de la platabanda, se ha revisado el dimensionamiento de las secciones. En este caso, se han

definido cuatro secciones tipo para cada distribución de luces y cantos, y se han empleado las mismas en todos los casos. Las dimensiones de las secciones se muestran en el apéndice E.4.1 y su distribución a lo largo del puente es la misma que para el caso recto.

Por último, se han dimensionado los diafragmas para cada distribución de luces y cantos. Los dos primeros casos se corresponden con un dimensionamiento por resistencia, mientras que el tercero de los casos se corresponde con un dimensionamiento flexible, donde se han seguido los criterios descritos en el apartado 6.3.4.4. Los espesores equivalentes resultantes se muestran en la tabla 6.28.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3
60 m cc	0.763	0.763	0.388
75 m cc	0.875	0.819	0.36
90 m cc	0.896	0.811	0.349
60 m cv	0.716	0.633	0.309
75 m cv	0.76	0.76	0.333
90 m cv	0.922	0.816	0.361

TABLA 6.28 Espesores equivalentes en milímetros

Los momentos torsores de diseño por resistencia ($M_{T,r}$) empleados en el dimensionamiento anterior se muestran en en la tabla 6.29.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3
60 m cc	7.614	7.090	1.973
75 m cc	8.984	7.936	1.964
90 m cc	10.232	8.923	1.976
60 m cv	6.741	6.304	1.919
75 m cv	7.614	7.177	1.945
90 m cv	10.232	8.923	1.984

TABLA 6.29 Momentos torsores de diseño ($M_{T,r}$) en kN.m

Una vez concluida la exposición de las geometrías, y teniendo en cuenta que tanto las cargas como las hipótesis de cálculo se describieron en el apartado 6.3.2.4, se procede a mostrar los resultados.

6.5.2.3 Resultados y análisis de dimensionamiento por resistencia

El principal resultado obtenido del cálculo de los puentes con diafragmas dimensionados por resistencia ha sido el ratio de sobretensión ($\Delta\sigma$) respecto a la tensión media

Caso	Caso 1	Caso 2	$S_{D,0}$	$S_{D,calc}$	$S_{D,calc}/S_{D,0}$
60 m cc	9 %	9.1 %	17.28	—	—
75 m cc	10.2 %	8.3 %	27	24.4	0.904
90 m cc	8.3 %	6.8 %	38.88	—	—
60 m cv	11.4 %	9.4 %	10.8	8.3	0.769
75 m cv	10.4 %	9.2 %	18	14.2	0.789
90 m cv	8.9 %	8.6 %	27	—	—

TABLA 6.30 Sobretensión y espaciamiento máximo

(σ_m). Este resultado se muestra en la tabla 6.30.

Además, en la tabla 6.30 se muestra el espaciamiento máximo entre diafragmas ($S_{D,0}$), siguiendo el criterio de la ecuación 6.10 para la tensión media, y el espaciamiento calculado ($S_{D,calc}$) por interpolación entre los casos 1 y 2. En aquellos casos en que ambos cumplen, no se ha calculado dicho espaciamiento. Por último, también se ha mostrado en la tabla el ratio entre $S_{D,calc}$ y $S_{D,0}$.

A la vista de los resultados, se observa una clara relación entre la esbeltez del tablero y la reducción que se produce en el espaciamiento. Por ejemplo, en los casos de canto constante apenas se produce reducción, mientras que en los casos de canto variable la reducción es más acusada. Además, también se observa cierta reducción respecto a la luz, aunque esto se puede atribuir a que el criterio de espaciamiento para grandes luces resultaba conservador.

A tenor del análisis anterior, se propone que el espaciamiento máximo en tableros rectos ($S_{D,r}$) se defina en función del espaciamiento máximo en tableros rectos de ancho 11.3 m ($S_{D,0}$) como:

$$S_{D,r} \leq S_{D,0} \cdot \left(1 - 0.004 \cdot \frac{L}{C} \cdot (b - 11.3)\right) \leq S_{D,0} \quad (6.16)$$

Donde L es la luz del vano, C es el canto mínimo del tablero y b es el ancho del tablero.

La forma en que la reducción por efecto de la anchura queda definida permite que su aplicación se pueda realizar independientemente de la tensión de comparación considerada para la sobretensión. Además, el efecto de la anchura también se puede combinar con la curvatura en planta, tal y como se definió en la ecuación 6.15.

Cabe destacar que el factor de reducción anterior se ha calibrado hasta un ancho de 12.8 m, y por lo tanto solo se debería extrapolar hasta anchos ligeramente mayores de 12.8 m.

En cualquier caso, no se considera eficiente que anchos mayores de 13.5 m se proyecten con una losa sin apoyos transversales, por lo que 13.5 m se puede considerar el límite superior de aplicación de la fórmula anterior.

La tabla 6.31 muestra a la reacción máxima en diafragmas. En todos los casos, la reacción máxima es inferior a la reacción de dimensionamiento.

Caso	Caso 1	Caso 2
60 m cc	72.1 %	67.1 %
75 m cc	79 %	78 %
90 m cc	79.7 %	76.9 %
60 m cv	56.9 %	48 %
75 m cv	70.5 %	63.9 %
90 m cv	68.4 %	68.5 %

TABLA 6.31 Reacción máxima en diafragmas

En resumen, el dimensionamiento por resistencia sigue resultando válido hasta los 13.5 m, pero si la anchura excede los 11.3 m, se debe aplicar un factor reductor al espaciamiento.

6.5.2.4 Resultados y análisis de dimensionamiento flexible

Los resultados del análisis empleando el dimensionamiento flexible se muestran en la tabla 6.32.

Caso	$\Delta\sigma$	T
60 m cc	6.9 %	91.1 %
75 m cc	5.9 %	85.3 %
90 m cc	4.5 %	89.6 %
60 m cv	10.3 %	86.3 %
75 m cv	7.3 %	86.6 %
90 m cv	5.5 %	92.7 %

TABLA 6.32 Resultados del dimensionamiento flexible

En la tabla se observa que el dimensionamiento es válido en prácticamente todos los casos, excepto en el caso de 60 m de luz principal y canto variable. Dado que es un caso único, no se considera necesario modificar las recomendaciones que se hicieron en el apartado 6.3.4.4. Sin embargo, se informa al lector que en el apartado 6.5.5 se limitará la aplicación del dimensionamiento flexible, y el caso de 60 m de luz principal y canto variable quedará excluido del rango de aplicación de dicho dimensionamiento flexible.

Por lo tanto, las recomendaciones relativas al dimensionamiento flexible son válidas en aquellos casos donde se puede aplicar. Además, el enfoque flexible cumple tanto a nivel de sobretensiones como a nivel de torsión de diseño.

6.5.3 Puente de 75 m de luz

6.5.3.1 Introducción

En este apartado se analizará un puente con una luz principal de 75 m y un ancho aproximado de 16 m. El objetivo es continuar estudiando la influencia de la anchura en la distorsión.



FIGURA 6.67 Puente Reina Sofía
Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Grez

Este tipo de puentes se pueden encontrar por ejemplo en entornos urbanos, donde en ocasiones, resulta necesario construir puentes de gran anchura y con cierta componente estética. Además, también se pueden encontrar en autovías de donde se requieren cuatro carriles por dirección, y se ha optado por tableros separados. Como ejemplo de lo anterior, se pueden encontrar el puente de Reina Sofía en Sevilla proyectado por J. J. Arenas y M. Pantaleón o el puente de conexión de la AP-9 con el Puerto de Vigo, proyectado por O. R. Ramos, y M. Pantaleón [140].

Al igual que sucedía para un ancho de 12.8 m, se considera que, para un ancho de 16 m, la luz principal de 75 m es un límite inferior de aplicación de la teoría de vigas. Además, las conclusiones obtenidas de este estudio pueden aplicarse, del lado de la seguridad, a luces mayores.

Un puente que cumple con las características de luz y ancho descritas anteriormente es el puente de acceso al Puerto de Vigo [140], por lo que se tomará como referencia. Concretamente, dicho puente tiene un ancho de 15.8 m que permite albergar una mediana de 1 m, dos carriles por dirección de 3.5 m y sendas barreras de 0.4 m. Además, la luz principal es 75 m.

Para materializar la losa en el puente de Vigo se emplea un cajón ancho con una separación de 8.3 m entre almas en su parte superior. Esto permite evitar que los voladizos resulten excesivos y se puedan realizar en hormigón sin necesidad de vigas transversales. Esta solución proporciona al tablero mayor limpieza visual desde el exterior, lo que se adapta a entornos urbanos por su calidad estética. Sin embargo, la losa se apoya en los diafragmas para reducir sus dimensiones, por lo que no se puede considerar exenta como se había planteado en todos los puentes estudiados anteriormente. Por otra parte, otra opción que se podría haber considerado en este puente es un cajón más estrecho con vigas transversales, al estilo de lo recomendado por el SETRA [1]. En este apartado se estudiarán ambas posibilidades, de modo que las conclusiones resulten aplicables a ambas situaciones.

Ambas formas de materializar la losa requieren de apoyos cada 4 m aproximadamente. Aunque se pueden utilizar modelos de cálculo refinados para evaluar estos apoyos, lo habitual es realizar un dimensionamiento por resistencia empleando un modelo de vigas del diafragma. Por lo tanto, cuando se apoya la losa lo habitual es dimensionar los diafragmas por resistencia, y esto conduce a que en este apartado se haya planteado la hipótesis de que existen diafragmas cada 4 m aproximadamente dimensionados por resistencia.

Por último, también se estudiará la influencia de la curvatura en conjunción con el ancho. Sin embargo, debido a que se trata de tableros anchos, se ha asumido que no estarán expuestos a fuertes curvaturas en planta. Por lo tanto, únicamente se han estudiado los casos de $\phi = 0.1$ y $\phi = 0.2$, que se traducen en radios de 750 m y 375 m respectivamente.

A continuación, se presentan las geometrías estudiadas en mayor detalle, los resultados obtenidos y su posterior análisis.

6.5.3.2 Metodología y geometrías

Para estudiar el puente de 75 m de luz y ancho 15.8 m se ha partido del puente de 75 m de luz y canto variable descrito para el tablero recto. Concretamente, se ha tomado el caso 6 de espaciamientos, el cual tiene un espaciamiento entre diafragmas de 4.17 m en el vano central, 4 m en los vanos laterales y no existen rigidizadores intermedios. Es

importante mencionar que se ha realizado la prueba con un espaciamiento de 5 m y un rigidizador intermedio, y los resultados han sido muy similares.

Una vez definida la geometría principal objeto de estudio, el siguiente paso ha sido definir las secciones transversales. En este apartado se van a calcular cuatro tipos de secciones transversales. Las dos primeras se corresponden con los casos de 75 m de luz, canto variable y anchos 11.3 y 12.8 que se describieron en los apartados 6.3.2.2 y 6.5.2.2 respectivamente. Las otras dos son las secciones correspondientes a un puente sin vigas transversales (sVT) y otro con vigas transversales (cVT). Las principales dimensiones geométricas de las secciones se muestran en las figuras 6.68 y 6.69.

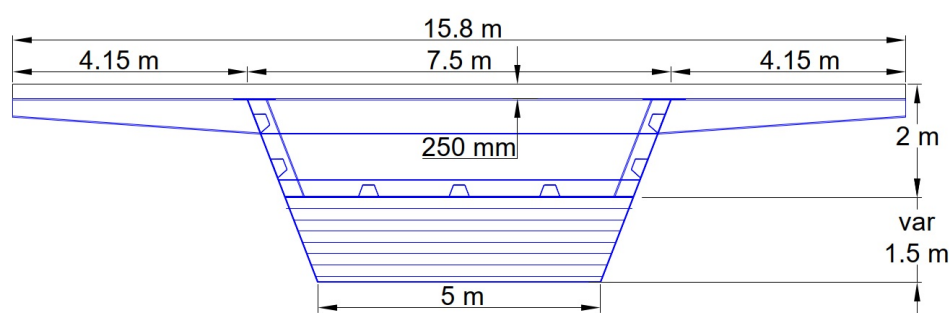


FIGURA 6.68 Puente con vigas transversales

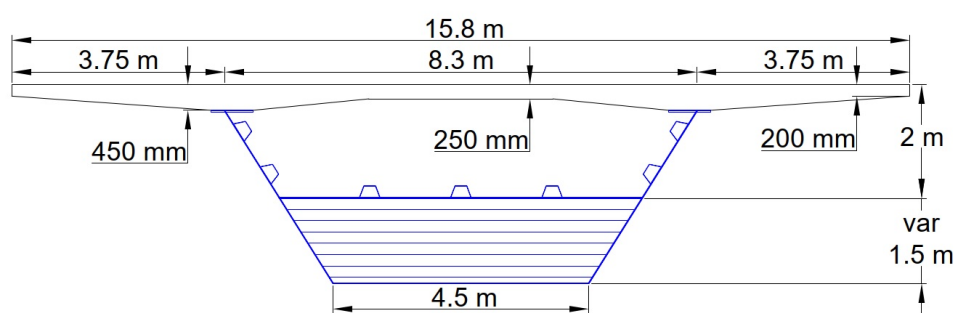


FIGURA 6.69 Puente sin vigas transversales

En lo que respecta a los espesores de las secciones, en el caso del puente sin vigas transversales, y a efectos de cálculo, se ha considerado una losa equivalente de 32 cm. Además, se han definido cuatro secciones tipo de espesores que se distribuyen conforme a lo indicado para el caso 6 en la tabla E.32. Los espesores para los dos casos nuevos se muestran en el apéndice E.4.2.

En cuanto a los diafragmas, todos han sido dimensionados por resistencia. Los espesores equivalentes empleados en el cálculo se muestran en la tabla 6.33.

Una vez definidas las geometrías, se procede a mostrar los resultados.

Ancho	R=0 m	R=750 m	R=375 m
11.3	0.624	—	—
12.8	0.629	—	—
15.8 sVT	0.567	0.633	0.633
15.8 cVT	0.650	0.727	0.814

TABLA 6.33 Espesores equivalentes de diafragma en mm

6.5.3.3 Resultados y análisis de tableros rectos

En primer lugar, se mostrará cómo evolucionan las sobretensiones a medida que aumenta el ancho del puente en tableros rectos. Para ello, se presentarán en la figura 6.70 las sobretensiones a lo largo del puente para los distintos casos de tableros rectos y se compararán con la tensión media.

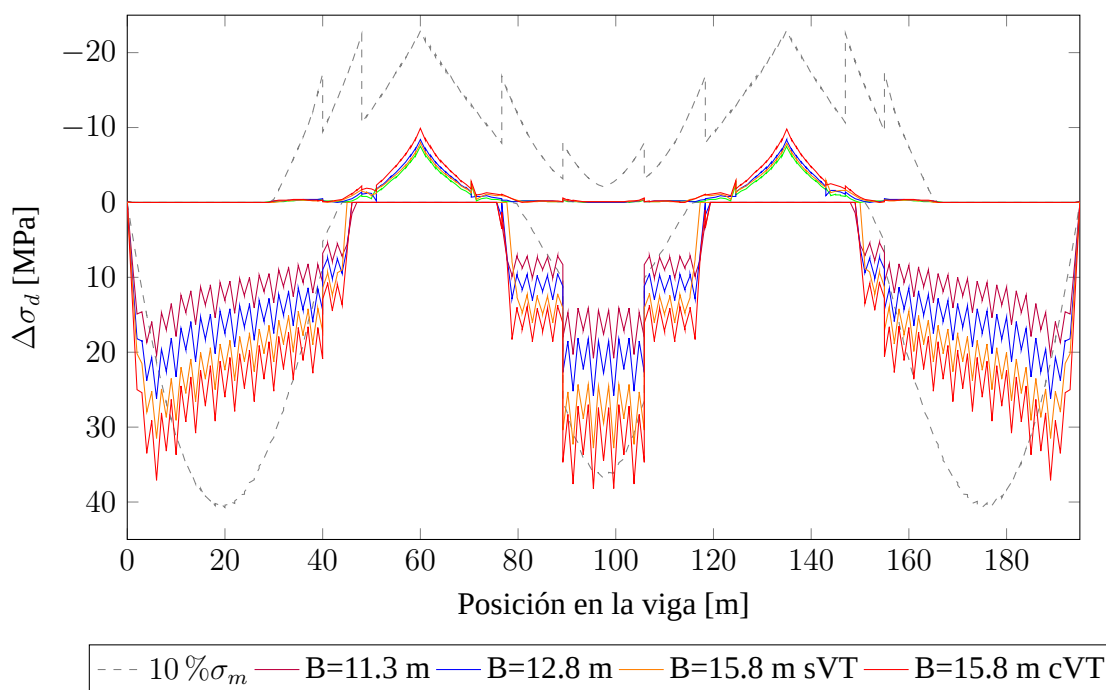


FIGURA 6.70 Sobretensiones en ala inferior

La figura 6.70 permite extraer varias conclusiones y reflexiones. La primera conclusión es que la distorsión por compresión en el ala inferior en la zona de pila no condiciona el diseño. Esta conclusión ya se había explicado anteriormente, pero en esta gráfica se ilustra con mayor claridad. La segunda conclusión es que existe una clara relación entre el ancho y la sobretensión, ya que cuanto mayor es el ancho, mayor es la sobretensión por distorsión.

Una conclusión que se podría obtener de antemano es que cuanto más estrecho es el cajón

en relación al ancho, mayor es la sobretensión por distorsión. Esto se basa en el hecho de que las sobretensiones en el caso sin vigas transversales (sVT) son menores que en el caso con vigas transversales (cVT). Sin embargo, no se puede obviar que la presencia de las vigas transversales influye en la forma de transmisión de la carga a las almas y, por ende, en la forma de introducir la carga de distorsión.

Para estudiar cómo afecta la presencia de vigas transversales al reparto de la carga distorsora, se ha preparado un modelo similar al que se empleó para estudiar la carga vertical tributaria en los diafragmas de alma llena. En dicho modelo, se han representado las almas metálicas espaciadas 7.5 m y una losa superior de 25 cm con elementos tipo lámina. Además, se ha introducido una viga transversal cada 4.17 m con elementos tipo viga. Estas vigas tienen un canto de 500 mm, un ancho de ala de 300 mm, un espesor de alas de 25 mm y un espesor de alma de 20 mm. El modelo resultante se muestra en la figura 6.71.

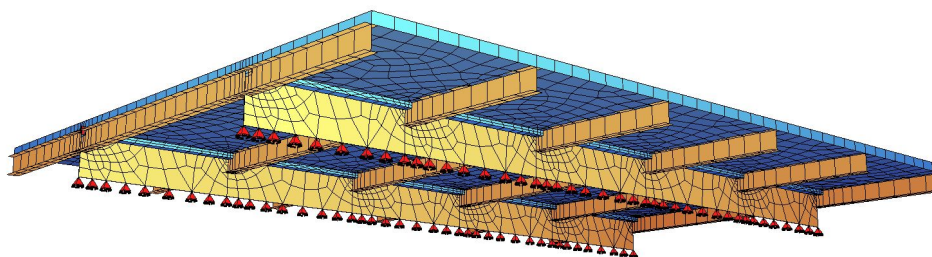


FIGURA 6.71 Modelo de cálculo de reparto

En este modelo se han introducido los vehículos de 600 kN y 400 kN, con una excentricidad de 6 y 3 m respectivamente, y se ha realizado un análisis elástico. El resultado son las fuerzas verticales en el alma que se muestran en la figura 6.72.

En la figura 6.72, se puede observar claramente que, en presencia de vigas transversales (imagen superior), la carga se reparte prácticamente de forma uniforme en la zona entre diafragmas, y que la zona de las vigas transversales es precisamente donde se produce el pico de la carga. Por el contrario, en ausencia de vigas transversales (imagen inferior), la carga queda mucho más concentrada en su zona de aplicación.

Tomando como referencia en análisis anterior, se ha realizado un nuevo cálculo con vigas transversales, pero en lugar de utilizar la carga puntual debida a los vehículos, se han utilizado cargas puntuales repartidas por igual en los nodos entre diafragmas, incluyendo los nodos de los propios diafragmas. Los resultados se muestran en la figura 6.73.

Al distribuir las cargas (D) la tensión máxima se reduce en comparación al caso puntual (P), pero sigue siendo todavía mayor al caso en el que no se disponen vigas transversales.

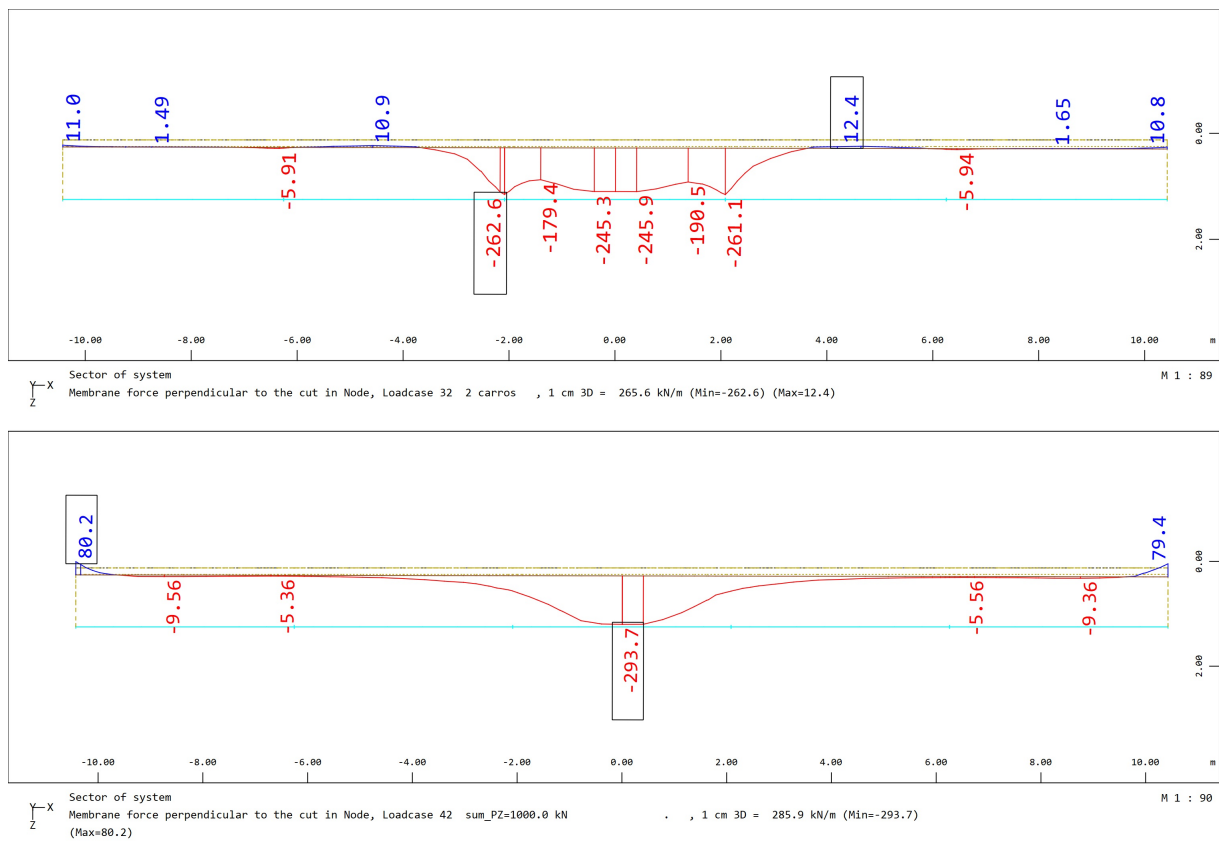


FIGURA 6.72 Reparto de la carga en el alma

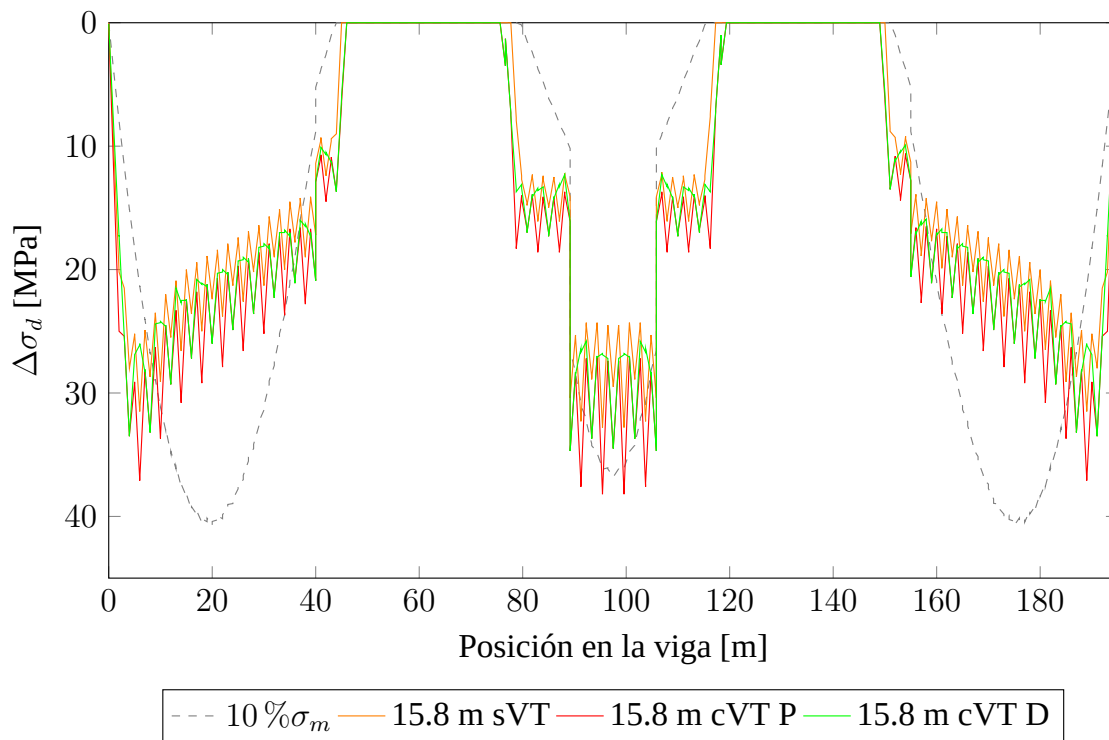


FIGURA 6.73 Sobretensiones en ala inferior por tracción

Otro aspecto que se debe señalar en la figura 6.73 es que, al aplicar la metodología descrita para la comparación de la sobretensión máxima respecto a la tensión media, el puente cumple, ya que la tensión media máxima es aproximadamente 407 MPa y la sobretensión máxima, suponiendo cargas puntuales, es 38.2 MPa. No obstante, se puede observar que una ocurre en el vano lateral y otra en el vano central, lo cual conviene aclarar que se ha asumido como posible.

Si se hubiera establecido el límite de tensión admisible en la tensión de plastificación, que en este caso sería 35.5 MPa, con la hipótesis de cargas puntuales y puente con vigas transversales, el puente no cumpliría. Sin embargo, al distribuir las cargas la sobretensión máxima se reduce a 34.7 MPa y el puente cumple. No obstante, conviene señalar que se trata de una sobretensión muy cercana al límite, por lo que se deben mantener el requerimiento de que la rigidez mínima sea la que aporte un diafragma en celosía dimensionado por resistencia. Además, se recomienda utilizar diafragmas en V o K, ya que su rigidez es superior a la del diafragma en forma de Cruz de San Andrés, que marca el límite inferior de rigidez en este caso.

En cuanto a las reacciones en los diafragmas, cabe destacar que estas están muy por debajo de las reacciones de diseño. A título ilustrativo, la reacción de diseño en los dos casos nuevos ha sido 8160 kN.m, mientras que la reacción máxima en diafragmas no ha llegado a los 2700 kN.m en el peor de los casos, que es el caso con vigas transversales. Por lo tanto, el dimensionamiento por resistencia queda del lado de la seguridad.

6.5.3.4 Resultados y análisis de tableros curvos

Para ilustrar lo que sucede cuando se considera la curvatura en planta, en este caso se han mantenido las mismas hipótesis de cálculo que en el caso de los tableros rectos. Es decir, se han utilizado varias secciones tipo y se considera fisuración en pilas. Por ese motivo, se advierte al lector que se observarán discontinuidades importantes en el entorno de las transiciones de secciones. El motivo de esto es que la hipótesis de transición suave entre secciones no se cumple durante la fase de construcción.

En la figura 6.74 se muestra cómo evoluciona la sobretensión con la curvatura para el caso sin vigas transversales, y en la figura 6.75 cómo evoluciona para el caso con vigas transversales.

Al observar ambas figuras, se puede apreciar cómo las discontinuidades producen alteraciones significativas en las tensiones. Esto se debe a que las variaciones de espesores son importantes al pasar de las secciones de positivo a las secciones de negativo, y por lo

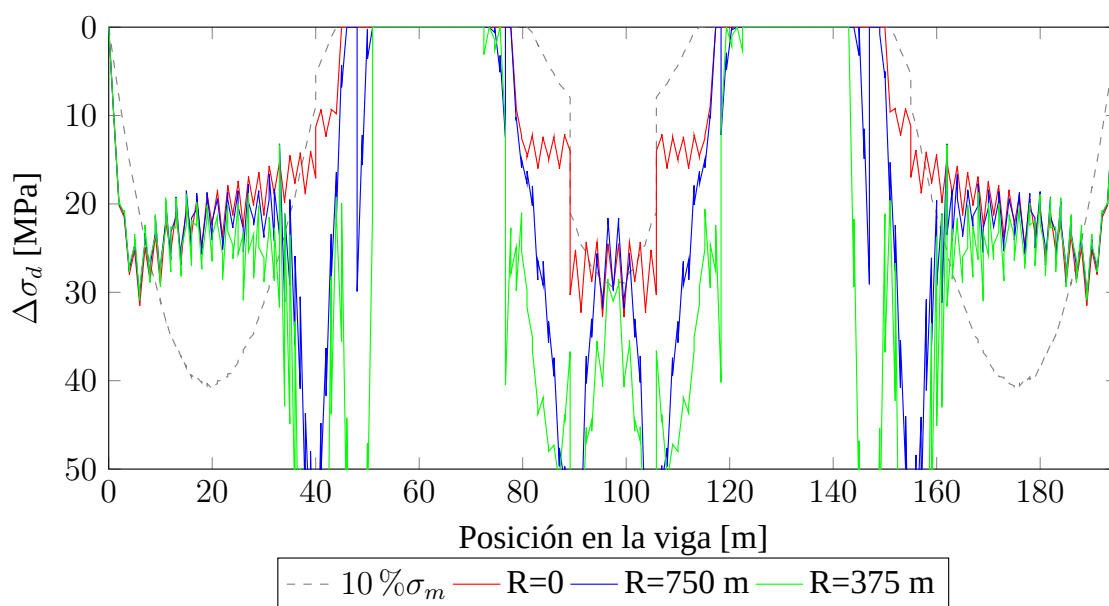


FIGURA 6.74 Sobretensiones en ala inferior por tracción sin vigas transversales

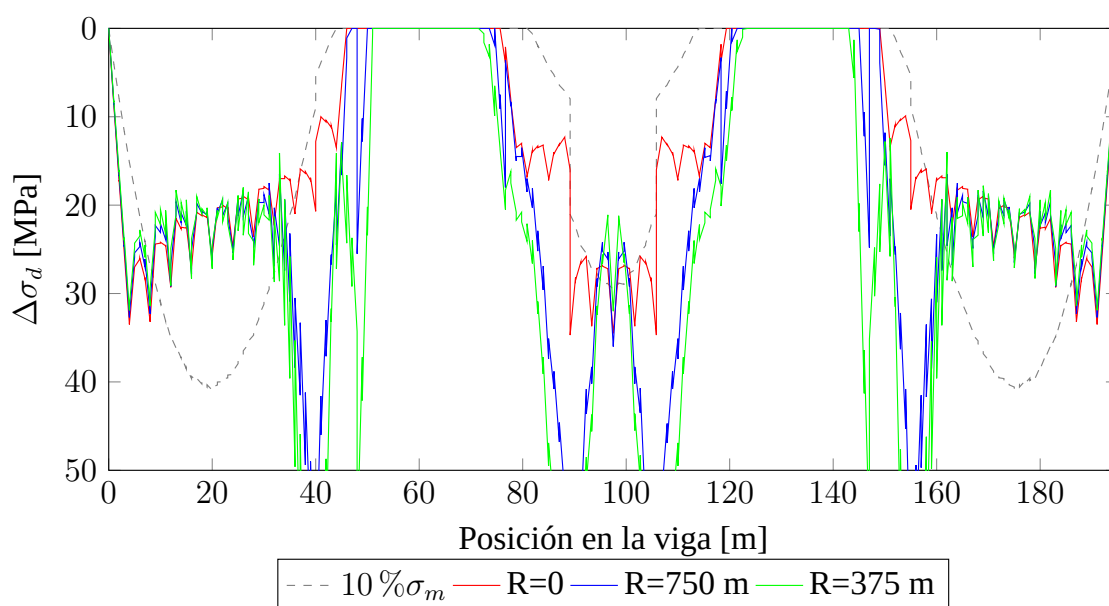


FIGURA 6.75 Sobretensiones en ala inferior por tracción con vigas transversales

tanto, los esfuerzos se alteran sustancialmente. Para solucionar este problema, se puede establecer la compatibilidad de deformaciones empleando Multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, esto excede el alcance del presente trabajo y se remite a futuras investigaciones.

No obstante, si se omiten las discontinuidades, se observa que los resultados son prácticamente independientes de la curvatura. Este hecho ya se observó en el estudio de los puentes curvos, cuyo resultado se mostró en el apartado 6.4.3. En dicho estudio se observó que, cuando el espaciamiento entre diafragmas estaba en el entorno de los 4 m, la

sobretensión permanecía prácticamente constante si los diafragmas se dimensionan por resistencia. Esta hipótesis se ha confirmado en este caso para un ancho mayor, por lo que en tableros con diafragmas dimensionados por resistencia y espaciados aproximadamente 4 m, la curvatura no tiene influencia en la sobretensión.

En cuanto a las reacciones en los diafragmas, resulta evidente que, si en el caso de los tableros rectos las reacciones no llegaban a un tercio de la capacidad de los diafragmas, en el caso de los tableros curvos no se anticipan problemas por este motivo.

6.5.4 Puente de 90 m de luz

6.5.4.1 Introducción

El último de los puentes anchos que se estudiará es un puente de autovía de tablero único. Este tipo de puentes se remontan prácticamente a la introducción de los puentes mixtos de sección cajón a finales de los años 50 en Alemania [141], donde una de las primeras obras de esta tipología fue el viaducto de Wuppertal con un ancho de 23.3 m y una luz máxima de 72 m.

En España, a finales de los años 80 se proyectaron y construyeron varios puentes de este tipo. Julio Martínez Calzón junto con Francisco Millanes Mato proyectaron el Puente del Turia [142] en la circunvalación de Valencia con un cajón único de 17 m de ancho en su parte superior para un ancho total de tablero de 24.4 m. También M. Pantaleón propuso esta tipología en el puente de Itálica en Sevilla. En este caso el ancho era de 30.5 m [143] por lo que el autor optó por un cajón multicelular y vigas transversales. Además, la luz principal eran 100 m y el canto variable, lo cual no impidió, aunque sí complicó, su construcción por el procedimiento de empuje.

Posteriormente, y coincidiendo con el cambio de siglo, el propio M. Pantaleón proyectó los viaductos de Navia y As Nogais en la A-6 [144], en las inmediaciones de Pedrafita. Aquí se produjo una evolución respecto al puente proyectado anteriormente, al introducir dos cambios importantes que se aplicarían a los puentes de esta tipología construidos coetáneamente y con posterioridad. El primero es la eliminación del canto variable de los cajones, lo cual favoreció su construcción por el procedimiento de empuje y permitió su aplicación a puentes de múltiples vanos y luces. El segundo cambio consistió en que las vigas transversales pasaron a apoyarse en jabalcones en los extremos, permitiendo así aumentar las dimensiones del voladizo y reducir el ancho del cajón, el cual pasó a ser unicelular. Para ilustrar el efecto de la introducción de los jabalcones, se puede tomar como ejemplo los puentes de la A-6, donde el cajón pasa a tener 8 m de ancho para un

ancho de tablero de 26.6 m, o el puente de la Tina Menor, donde Javier Manterola llegó a los 30 m de ancho de tablero con un cajón único de 10 m de ancho [15].



FIGURA 6.76 Viaducto de As Nogais

Fuente: La Voz de Galicia Autor: Pradero

En el siglo XXI, se han proyectado varios viaductos de este tipo en España [143], lo que justifica el interés en esta tipología de cajón único con jabalcones. Esta tipología también se ha empleado internacionalmente, como en el caso del Viaduc de Verrières [122], proyectado por M. Virlogeux, donde se utilizó un cajón único de 4.5 m de canto y 7 m de ancho para una luz principal de 144 m y un ancho de 22.3 m. Este viaducto presenta singularidad en comparación con los proyectados en España, ya que, al no ser necesario cumplir un criterio de rigidez como el impuesto por la RPX-95 [121], se pudo adoptar una estrategia antidistorsión consistente en marcos cerrados complementados por marcos en celosía cada 20 m aproximadamente. También es importante señalar que en este puente se emplearon aceros de resistencias superiores a 400 MPa en ciertas zonas.

Una característica que también es frecuente en este tipo de puentes es su curvatura en planta. Por ejemplo, el viaducto del Regueirón [123] proyectado por O.R. Ramos llega a tener una curvatura en planta de 600 m y una pendiente del 5.8 %, lo cual ilustra la versatilidad de esta tipología.

En base a las exposiciones previas, se ha decidido estudiar un puente similar al de As Nogais, con un ancho de 26.6 m, tres luces principales de 90 m y sendas luces laterales de 72 m. Aunque este ancho es ligeramente mayor que el estrictamente necesario para un puente de autovía, que suele oscilar en torno a los 23 m, permite abarcar una casuística más amplia. La elección de la luz de 90 m se debe a que se considera una luz en el rango medio-bajo de esta tipología, lo que permite que los resultados sean extrapolables a puentes de

luces mayores. Además, se ha optado por un puente de cinco vanos porque es más común en puentes de más de tres vanos, y cinco se considera un valor representativo. En cuanto a la curvatura en planta, se estudiará tanto el tablero recto como el tablero con un radio de 600 m, que se considera un radio mínimo en puentes de autovía. Por último, se analizará la casuística de diafragmas en celosía y marcos cerrados.

A continuación, se presenta con mayor detalle la geometría estudiada y se muestran los principales resultados.

6.5.4.2 Metodología y geometrías

La distribución de luces del puente es 72+90+90+90+72 m, lo que da un total de 414 m de longitud. Todas las luces son múltiplo de 9, por lo que los diafragmas se van a disponer cada 4.5 m.

La sección objeto de estudio se ha tomado del viaducto de As Nogais [144], el cual tiene un ancho de 26.6 m. En su concepción original, ese ancho permitía 2 carriles de 3.5 m de ancho por sentido, arcenes de 3 y 2.5 m respectivamente a cada lado de los carriles, barreras de 40 cm a cada lado y una mediana de 80 cm. Sin embargo, en la actualidad, y en el sentido ascendente del puerto de Pedrafita, se ha adaptado la distribución de anchos de arcén y carril para albergar 3 carriles, lo cual demuestra que el presente estudio puede abarcar puentes de gran anchura.

Las principales dimensiones de la sección se muestran en la figura 6.77.

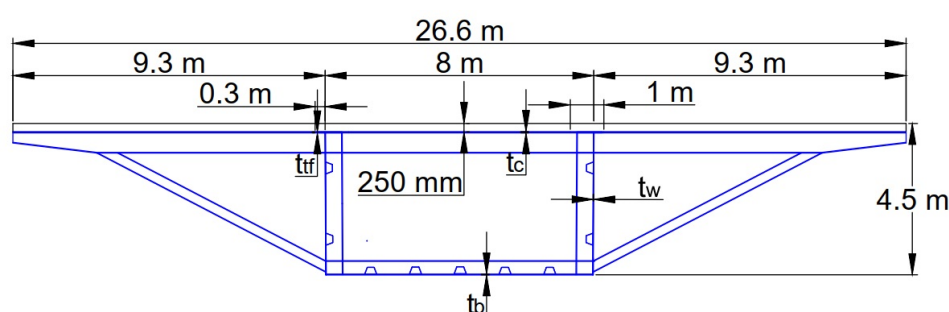


FIGURA 6.77 Sección

Para definir los espesores a lo largo del puente se ha repetido el criterio de definir cuatro secciones tipo y calcular unos espesores aproximados. En concreto, la distribución de las secciones a lo largo del puente se muestra en la figura 6.78

Y los espesores asignados a dichas secciones se muestran en la tabla 6.34, donde 0/2 indica que en el puente recto se ha considerado un espesor de 0 y 2 mm en el puente curvo.

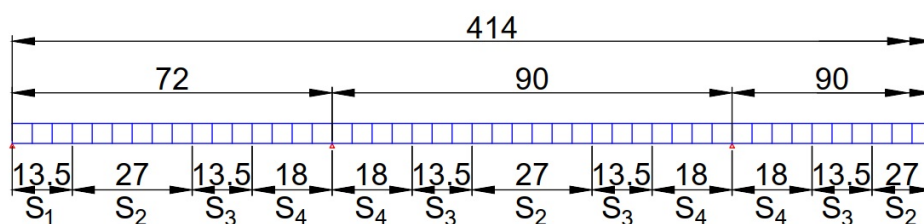


FIGURA 6.78 Alzado del puente

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$t_{tf} [mm]$	20	18	30	45
$t_b [mm]$	10	10	30	75
$t_w [mm]$	20	15	20	35
$t_c [mm]$	0/2	0/2	0/2	45

TABLA 6.34 Espesores

Debido a las dimensiones del puente, se han utilizado rigidizadores de dimensiones mayores que en los casos anteriores. El rigidizador sigue siendo de tipo cerrado, con dimensiones de 350 mm de altura y anchura en la base, 300 mm de anchura en cabeza y 10 mm de espesor.

En cuanto a los diafragmas, se ha realizado una progresión de espesores equivalentes para estudiar cómo afecta la rigidez de los diafragmas a la sobretensión. Los espesores son 0.01, 0.1, 0.4, 1, 1.16, 1.43, 2.00 y 10 mm. El espesor de 0.4 mm se corresponde a una estimación de la rigidez de un marco cerrado dimensionado por resistencia, 1.16 mm con la rigidez de un diafragma en Cruz de San Andrés y 1.43 mm con la rigidez de un diafragma en K. Además, se han considerado 1.28 mm de espesor equivalente para el caso del puente curvo.

Una vez definidas las geometrías, se muestran a continuación los resultados.

6.5.4.3 Resultados y análisis de tableros rectos

En primer lugar, en la figura 6.79 se muestra la evolución de la sobretensión conforme aumenta el espesor equivalente de diafragma. Esta representación se ha realizado comparando, respecto a la tensión máxima media (σ_m), la tensión de plastificación (f_y) y también aplicando las cargas de manera puntual (P) o distribuida (D) en 5 puntos, tal como se explicó en el caso de 75 m de luz y ancho 15.8 m.

La figura 6.79 muestra, como era de esperar, que comparar respecto a la tensión media

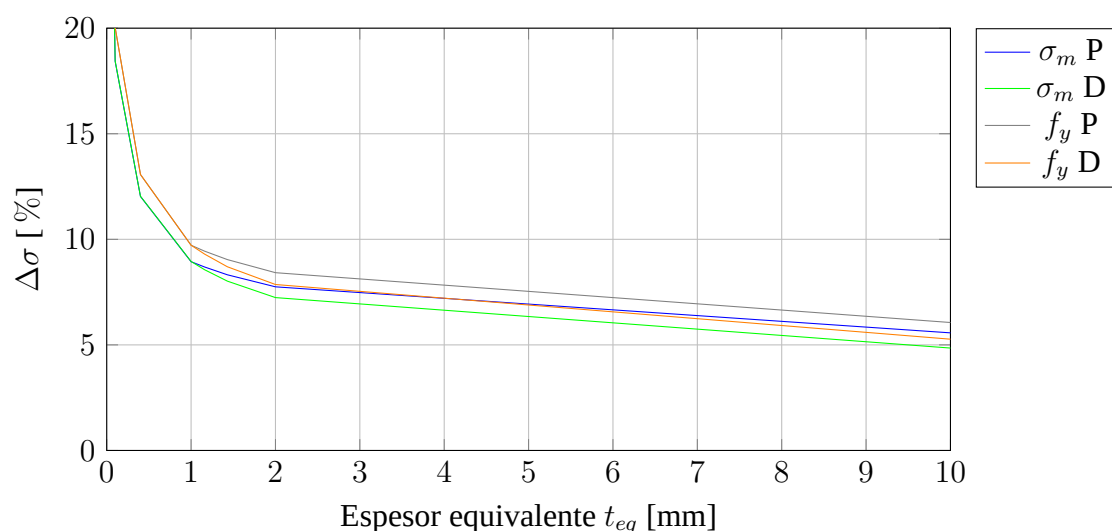


FIGURA 6.79 Sobretensiones en ala inferior por tracción

es menos restrictivo que comparar la tensión de plastificación. Además, demuestra que prácticamente hasta el milímetro de espesor no hay diferencia entre considerar las cargas distribuidas y puntuales.

Sin embargo, la principal conclusión que se puede extraer de la gráfica anterior, independientemente de la tensión de comparación o la forma de carga, es que para cumplir con el límite de sobretensión se requiere que los diafragmas estén dimensionados por resistencia y dispongan de celosías para aportar rigidez. Esto se debe a que en todos los casos, la sobretensión para un espesor de 0.4 mm, equivalente a un marco abierto, excede el límite del 10 %.

Además, la proximidad al límite de sobretensión empleando diafragmas en celosía dimensionados por resistencia provoca que, si se desea alternar marcos cerrados con diafragmas en celosía, sea necesario realizar un estudio específico. En otras palabras, si se desea emular el planteamiento del Viaduc de Verrières [122] alternando marcos cerrados con diafragmas en celosía cada 20 m, la condición de diseño de los diafragmas en celosía será fundamentalmente una condición de rigidez, y esta solo se puede obtener de un estudio específico de las sobretensiones en el puente.

Para ilustrar la complejidad que implica alternar marcos abiertos y cerrados se ha supuesto que en el puente objeto de estudio se dispone un diafragma cada 18 m con una rigidez de 2.5 mm en un caso y 5 mm en otro. Los resultados se muestran en la figura 6.80.

Se puede observar que disponer diafragmas cada 18 m permite reducir alguno de los picos de sobretensión, pero otros apenas se ven alterados e incluso se incrementan ligeramente.

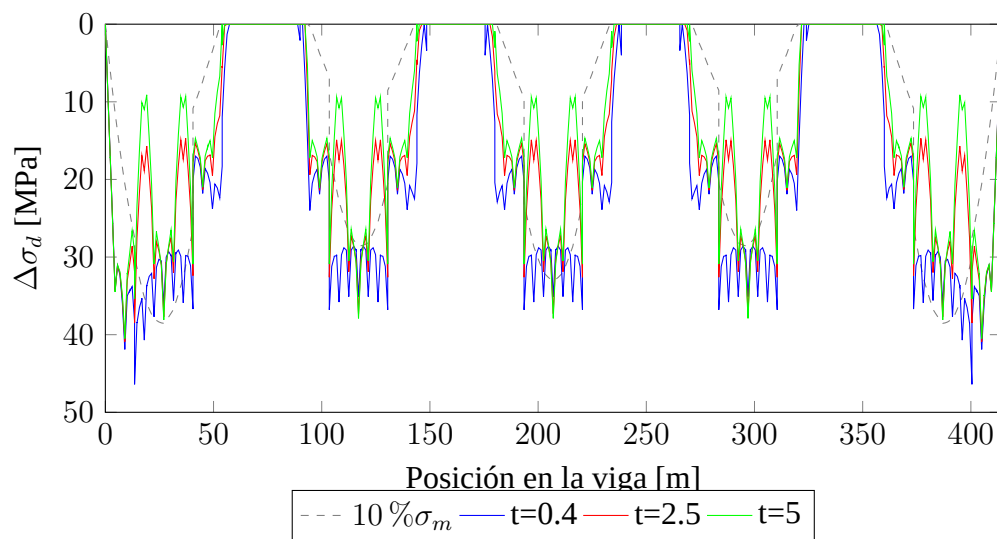


FIGURA 6.80 Sobretensiones en ala inferior por tracción

Por lo tanto, en este caso esta estrategia no resulta factible.

En cuanto a la reacción en diafragmas, sigue en la línea de lo observado anteriormente para espaciamientos cortos. Es decir, la reacción máxima calculada en diafragmas es claramente inferior a la reacción de diseño. Esto se ilustra en la figura 6.81.

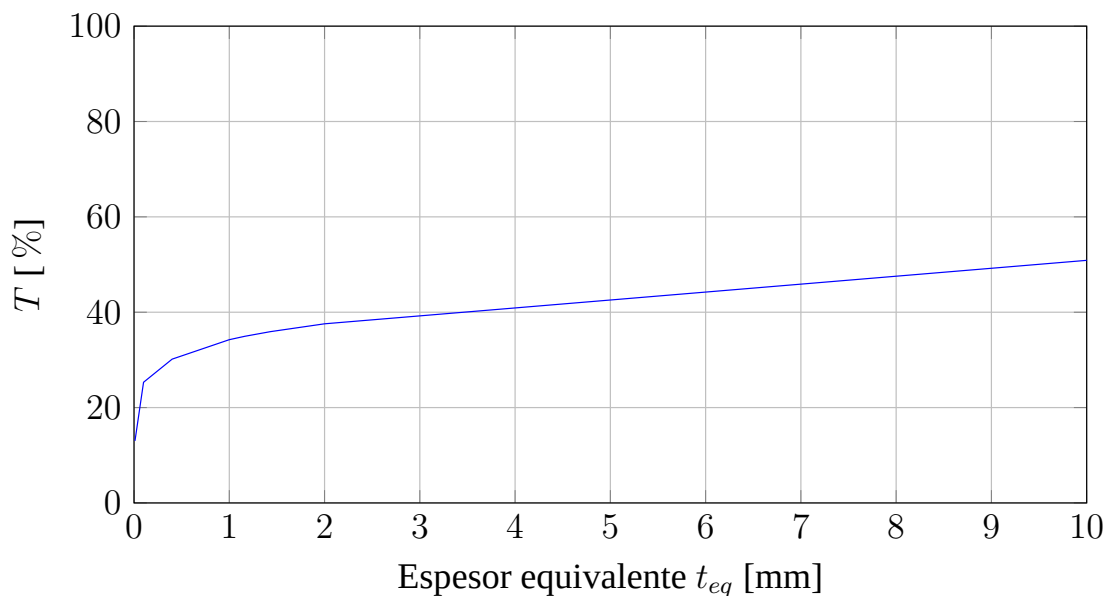


FIGURA 6.81 Reacción máxima en diafragmas interiores

6.5.4.4 Resultados y análisis de tableros curvos

En este caso, se representa la influencia de la curvatura comparando las tensiones que se producen en los casos de tablero recto y curvo. En la figura 6.82, se muestra la comparativa de tensiones entre el tablero recto y el tablero con un radio de 600 m.

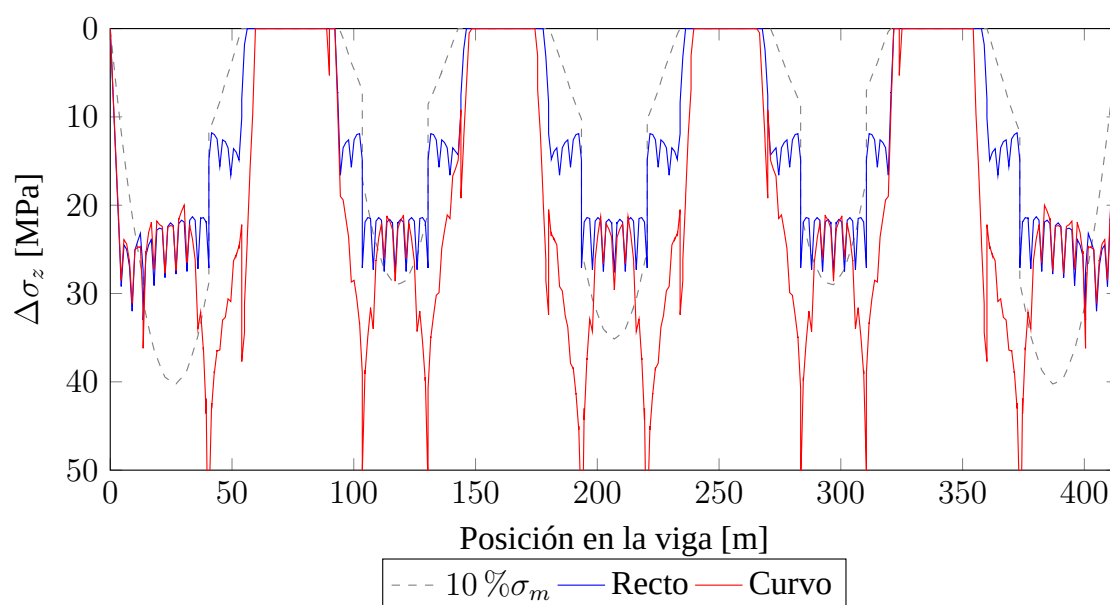


FIGURA 6.82 Sobretensiones en ala inferior por tracción

Si se omiten los picos en las transiciones de secciones, que ya fueron explicados en el caso de luz principal de 75 m y ancho 15.8 m, se aprecia que la curvatura produce un ligero incremento en las sobretensiones en centro de luz. Sin embargo, este incremento no se considera relevante a efectos de conclusiones, y por lo tanto se puede afirmar que, con espaciamientos reducidos entre diafragmas, la influencia de la curvatura es despreciable.

6.5.5 Resumen

La variedad de casos estudiados en el presente apartado permite abarcar algunas de las diferentes situaciones que pueden presentarse en el proyecto de puentes mixtos de anchuras medias y grandes.

Para puentes hasta 13.5 m se han estudiado los dimensionamientos por resistencia y flexibilidad, y se ha establecido un factor de reducción del espaciamiento por ancho. Además, se recomienda no emplear el dimensionamiento flexible en puentes de canto variable con una luz inferior a 60 m y más de 12 m de ancho.

Para puentes de ancho superior a 13.5 m, se asume que los diafragmas se dimensionan por resistencia y se ubican cada 4-4.5 m aproximadamente. Bajo esas condiciones, los casos

estudiados han mostrado que las tensiones máximas son aceptables, pero que se requiere el uso de marcos en celosía para aportar la rigidez necesaria, ya que los marcos cerrados podrían no ser lo suficientemente rígidos.

Una vez completado el análisis de los distintos casos, se propone un parámetro Λ que permite identificar aquellos puentes más susceptibles a la sobretensión. Este parámetro se define como el ancho del tablero (b) al cuadrado dividido entre la luz (L) y el canto (C):

$$\Lambda = \frac{b^2}{L \cdot C} \quad (6.17)$$

Cuando ese parámetro es inferior a 1, no se anticipan problemas por sobretensión, y se puede proponer un dimensionamiento flexible o por resistencia. Este es el caso en la mayoría de puentes estudiados donde no se observaron problemas por sobretensión.

Cuando el parámetro Λ está entre 1 y 2 el dimensionamiento flexible puede presentar problemas de falta de rigidez, especialmente si es superior a 1.5, por lo que es preferible un dimensionamiento por resistencia. Este es el caso por ejemplo de los dos últimos casos expuestos de puentes de 75 m ($\Lambda = 1.66$) y 90 m ($\Lambda = 1.75$) de luz principal, o el caso del puente de canto variable, luz principal de 60 m y ancho de 12.8 ($\Lambda = 1.82$). Las Λ fueron en estos casos superiores a 1.5, y ya se recomendó en estos casos el empleo de diafragmas en celosía para aumentar su rigidez.

Cuando el parámetro Λ supera 2 se debería realizar un análisis de la sobretensión debido a que es probable que se requiera rigidez adicional a la que aportan los diafragmas en celosía dimensionados por resistencia. Tal afirmación se basa en la proximidad al límite observada en los casos mencionados en el párrafo anterior, ya que únicamente el puente de 30 m y ancho 11.3 presenta un parámetro Λ superior a 2, y cabe recordar que los resultados tuvieron que compararse respecto a la tensión de plastificación porque respecto a la tensión media el puente no llegaba a cumplir.

En resumen, el parámetro Λ permite identificar de una forma muy simple aquellos puentes donde los fenómenos de sobretensión pueden resultar más susceptibles, y adoptar la estrategia de dimensionamiento más apropiada de entre las propuestas anteriormente.

6.6 Criterios complementarios

6.6.1 Introducción

En los apartados anteriores se han establecido los criterios de resistencia, rigidez y espaciamiento que deberían seguir los diafragmas antidistorsión en puentes mixtos de sección cajón. Sin embargo, existen aspectos que pueden influir en el diseño final del puente, y ese es el objetivo de este apartado.

Concretamente, los dos aspectos que se pretenden estudiar en este apartado son la fatiga y la susceptibilidad de los rigidizadores.

6.6.2 Fatiga

6.6.2.1 Introducción

El estudio de cualquier aspecto de la fatiga en puentes mixtos podría constituir una tesis en sí mismo, por lo que el enfoque en este caso será mucho más reducido.

Para el cálculo a fatiga según Eurocódigos, se puede tomar como documento de referencia la *Guía para el proyecto frente a fatiga de puentes metálicos y mixtos de carretera* [145], publicada en 2019 por el Ministerio de Transportes, Movilidad y Agenda Urbana (MITMA) dentro de la Serie Eurocódigos. La guía, describe detalladamente los pasos a seguir para el proyecto frente a fatiga, y también incluye un estudio de sensibilidad de los puentes mixtos a fatiga a nivel de tensiones longitudinales, así como un estudio de sensibilidad de los detalles de fatiga en celosías transversales. Como complemento, en el VIII Congreso ACHE, el equipo redactor de la guía anterior presentó una ponencia relativa al diseño de las celosías transversales en puentes mixtos [146], en la que concluyeron que detallando adecuadamente dichas celosías a fatiga no se anticipaban problemas al respecto. En resumen, la propia guía y sus investigaciones asociadas constituyen documentos de referencia muy completos para el estudio de la fatiga.

En cuanto a las celosías transversales, el cálculo de la fatiga según los Eurocódigos [118] es actualmente costoso, ya que los valores de λ_1 que permitan emplear el modelo Fatigue Load Model (FLM) 3 no han sido calibrados, por lo que no se puede emplear el método simplificado. Por lo tanto, para el cálculo de la fatiga en celosías transversales, es necesario emplear los camiones del FLM 4 [131] y el método del daño acumulado, lo cual está fuera del alcance del presente trabajo. Sin embargo, es importante destacar que, en el caso de la normativa americana AASHTO LRFD [108], en los últimos años, y como resultado

de las investigaciones realizadas [134], se está observando una tendencia a la reducción en la categoría de ciertos detalles que afectan al diseño de las celosías transversales. En estos casos, la fatiga puede llegar a condicionar el diseño de estos si por ejemplo se emplean perfiles en L, de acuerdo con la experiencia del autor.

En cuanto a las tensiones longitudinales, la guía previamente citada realiza un estudio completo, pero parece haber omitido los efectos de la distorsión que la norma obliga a considerar.

Por lo tanto, el objetivo de este apartado es completar el estudio de las tensiones longitudinales debidas a la fatiga realizando una estimación de la sobretensión que se produce en tableros de sección cajón al calcular el carro de fatiga FLM 3. Para ello, se tomarán como punto de partida las recomendaciones de disposición de diafragmas antidistorsión y rigidez expuestas anteriormente en este capítulo.

A continuación, se presenta la metodología, las geometrías y los principales resultados.

6.6.2.2 Metodología y geometrías

Como se ha explicado anteriormente, el objetivo es estudiar la sobretensión por fatiga en puentes diseñados de acuerdo con las recomendaciones establecidas en el presente capítulo. Para ello se ha partido de todas las distribuciones de luces, cantos y anchos previamente analizados, y en cada una de las geometrías se ha calculado el espaciamiento máximo entre diafragmas antidistorsión. Posteriormente se ha seleccionado la geometría que cumple con el espaciamiento máximo se encuentra más cercana al límite calculado. Además, se ha calculado la rigidez del diafragma correspondiente a dicho espaciamiento mediante un dimensionamiento por resistencia. También se ha contemplado la posibilidad de dimensionamiento flexible, calculando la rigidez de los diafragmas de acuerdo con los criterios que se indicaron en la sección 6.3.4.4.

El único parámetro que no se ha considerado en el presente estudio ha sido la curvatura en planta, ya que en el apartado 6.4.4.2 se observó que la respuesta frente a cargas de tráfico era relativamente estable independientemente de la curvatura en planta.

Dado que todas las geometrías estudiadas han sido expuestas con anterioridad, se remite al lector a apartados anteriores para más detalles. Para identificarlas, en cada tabla de resultados se indicará la luz (L), el espaciamiento entre diafragmas (S_D), el tipo de canto y el ancho.

En cuanto a las cargas, se ha considerado el FLM 3 definido en el Eurocódigo [131] de

manera simplificada. Es decir, se ha supuesto que se compone de dos ejes de 240 kN espaciados 7.2 m. Además, dicho vehículo se ha considerado centrado en un carril ubicado en la posición más excéntrica posible, y en sentido longitudinal, se ha supuesto que el eje frontal se apoya en cada posición de rigidizadores, diafragmas, y a mitad de distancia entre los elementos anteriores.

Los resultados obtenidos se han centrado en la tracción en el ala inferior, ya que las bandas superiores apenas son susceptibles a las sobretensiones, y las compresiones en la zona de pila en el ala inferior no generan problemas de fatiga. Específicamente, los resultados obtenidos han sido la tensión media máxima en el ala inferior del tablero debido a la fatiga, que se ha denominado $\sigma_{m,f}$; la sobretensión máxima en cualquier punto de la viga, que se ha denominado $\Delta\sigma_f$; y la sobretensión máxima en las ubicaciones de rigidizadores o diafragmas, que se ha denominado $\Delta\sigma_{D,f}$. La razón para separar las sobretensiones anteriores es que, habitualmente, las zonas de rigidizadores tienen detalles de fatiga más restrictivos.

Una vez explicadas las geometrías y la metodología de cálculo, se muestran los resultados.

6.6.2.3 Resultados

En primer lugar, se muestran los resultados para tableros de ancho 11.3 m y canto constante en la tabla 6.35.

L [m]	S_D [m]	$\sigma_{m,f}$ [MPa]	$\Delta\sigma_f$ [MPa]	$\Delta\sigma_{D,f}$ [MPa]
30	5	22.6	8.2	8
45	9	30.7	10.5	10.5
60	15	28.9	9.7	9.7
75	25	24.4	13	13
90	30	23.5	11.5	11.5

TABLA 6.35 Tensiones por fatiga: Ancho = 11.3 m y canto constante

En general, se observa una disminución en la tensión media debida a fatiga a medida que aumenta la luz del vano, aunque no es una reducción drástica. Según los resultados anteriores, se puede considerar un valor de $\sigma_{m,f} = 30$ MPa como tensión media para el cálculo de fatiga en puentes mixtos de sección cajón de manera conservadora.

Sin embargo, las sobretensiones parecen ser independientes de la luz, ya que el pico se da en la luz de 75 m. Además, no parece haber una reducción de la sobretensión en la proximidad de los diafragmas. Por lo tanto, como criterio conservador, se puede adoptar una sobretensión de $\Delta\sigma_f = 15$ MPa para el cálculo de fatiga.

Si se calcula la relación entre la sobretensión por fatiga y la tensión media en los casos anteriores, se obtendrá que dicha relación se encuentra entre el 33 % y el 55 %, lo cual queda muy por encima del 10 % que indica el Eurocódigo para ignorar los efectos debidos a la distorsión. Por lo tanto, se puede concluir que la sobretensión no se puede ignorar en el cálculo a fatiga.

Una vez establecidas las hipótesis de partida, el objetivo será comprobar cómo afecta la variación en los distintos parámetros a la tensión media y a la sobretensión. Concretamente, el primer parámetro que se va a variar es el tipo de canto. Los resultados para el canto variable se muestran en la tabla 6.36.

L [m]	S_D [m]	$\sigma_{m,f}$ [MPa]	$\Delta\sigma_f$ [MPa]	$\Delta\sigma_{D,f}$ [MPa]
60	10	28	11.5	11.2
75	15	29.9	12	12
90	22.5	24.2	11.7	11.2

TABLA 6.36 Tensiones por fatiga: Ancho = 11.3 m y canto variable

Los resultados de la tabla 6.36 indican que todas las hipótesis planteadas para los tableros de canto constante se confirman en los tableros de canto variable, tanto a nivel de tensiones medias como de sobretensiones y su relación.

El siguiente parámetro que se variará es el ancho. Las tablas 6.37 y 6.38 muestran los resultados para los casos de tableros de ancho 12.8 m y canto constante y canto variable.

L [m]	S_D [m]	$\sigma_{m,f}$ [MPa]	$\Delta\sigma_f$ [MPa]	$\Delta\sigma_{D,f}$ [MPa]
60	12	24.5	10.2	9.7
75	18.75	20.5	9.1	9.1
90	30	20	10.8	10.8

TABLA 6.37 Tensiones por fatiga: Ancho = 12.8 m y canto constante

L [m]	S_D [m]	$\sigma_{m,f}$ [MPa]	$\Delta\sigma_f$ [MPa]	$\Delta\sigma_{D,f}$ [MPa]
60	7.5	23.6	9.2	9.2
75	12.5	27.4	10.8	10.2
90	18	23.5	11.4	11.4

TABLA 6.38 Tensiones por fatiga: Ancho = 12.8 m y canto variable

En ambos casos se observa cómo tanto las tensiones como las sobretensiones se reducen ligeramente. No obstante, dicha reducción se puede ignorar a efectos prácticos. Por lo tanto, una vez más se confirman las hipótesis establecidas en el caso del canto constante.

Cuando se incorporan diafragmas antidistorsión cada 4 m aproximadamente en tableros de gran anchura, y estos se dimensionan por resistencia, se observa una reducción en la tensión sobretensión de fatiga. Esto se muestra en la tabla 6.39, donde a/b indica tablero sin vigas transversales y tablero con vigas transversales.

$L[m]$	$S_D[m]$	$\sigma_{m,f}[MPa]$	$\Delta\sigma_f[MPa]$	$\Delta\sigma_{D,f}[MPa]$
75	4.167	23.9/24.9	7.5/8.6	7.1/8.1
90	4.5	11.3	6.4	5.8

TABLA 6.39 Tensiones por fatiga: Tableros de gran anchura

En este caso se observan variaciones significativas respecto a las hipótesis de partida. Aunque en el caso de la luz principal de 75 m no sucede, fundamentalmente debido al canto variable, sí que se observa una reducción significativa de la tensión media de fatiga en el caso de la luz de 90 m. Además, en ninguno de los dos casos anteriores la sobretensión supera los 10 MPa, por lo que se puede adoptar la hipótesis en este tipo de tableros de $\Delta\sigma_f = 10$ MPa. Por último, se puede señalar que, en tableros de gran luz, gran anchura y canto constante, la relevancia de un camión único es tan escasa que no se debieran anticipar problemas de fatiga con un detallamiento adecuado a fatiga.

Por último, se va a mostrar cómo afecta a la fatiga realizar un dimensionamiento flexible. Para ello se van a tomar los casos de tableros de canto constante y ancho 11.3 y 12.8 m respectivamente. Los resultados se muestran en las tablas 6.40 y 6.41.

$L[m]$	$S_D[m]$	$\sigma_{m,f}[MPa]$	$\Delta\sigma_f[MPa]$	$\Delta\sigma_{D,f}[MPa]$
30	3.333	22.8	8.3	7.7
45	3.75	30.2	7.6	7
60	4	29.3	6.3	5.9
75	4.167	24.4	5.5	5.2
90	4.5	22	5	4.6

TABLA 6.40 Tensiones por fatiga: Ancho = 11.3 m y dimensionamiento flexible

$L[m]$	$S_D[m]$	$\sigma_{m,f}[MPa]$	$\Delta\sigma_f[MPa]$	$\Delta\sigma_{D,f}[MPa]$
60	4	24.5	7	6.5
75	4.167	20.8	6.3	5.7
90	4.5	20.1	5.6	5

TABLA 6.41 Tensiones por fatiga: Ancho = 12.8 m y dimensionamiento flexible

Como era de esperar, las tensiones medias no se ven afectadas. Sin embargo, las sobretensiones se ven reducidas en comparación con un dimensionamiento por resistencia. Por

lo tanto, si se disponen diafragmas antidistorsión en el entorno de los 4-5 m, se puede estimar de manera conservadora que la sobretensión para el diseño por fatiga es $\Delta\sigma_f = 10$ MPa.

6.6.2.4 Resumen

Las principales conclusiones del apartado anterior son:

- La relación entre la sobretensión debida al vehículo pesado de fatiga y la tensión media en el ala inferior llega a superar el 50 % en ciertos casos, por lo que se debe tener en cuenta la sobretensión ($\Delta\sigma_f$) en el cálculo de fatiga.
- Al utilizar el FLM 3 del Eurocódigo, se puede adoptar de manera conservadora un valor de sobretensión de $\Delta\sigma_f = 15$ MPa.
- Si el espaciamiento entre diafragmas no supera los 5 m, el valor anterior se puede reducir a $\Delta\sigma_f = 10$ MPa.

6.6.3 Rigidizadores

6.6.3.1 Introducción

En esta sección, se estudiará la susceptibilidad de los rigidizadores. En particular, se investigará si existe el riesgo de que los rigidizadores entre diafragmas pudieran dañarse por un exceso de carga al diseñar los puentes con los espaciamientos y rigideces propuestos en este capítulo.

Para abordar esta cuestión, se han predimensionado unos rigidizadores intermedios, calculado su rigidez y resistencia, y se ha calculado el puente considerando dicha rigidez. Finalmente, se ha comparado la reacción en los rigidizadores con su resistencia.

Para este estudio solo se han considerado tableros rectos, de 11.3 m de ancho y canto constante, ya que los resultados son suficientemente claros sin necesidad de considerar casos adicionales. Además, solo se han estudiado rigidizadores en forma de T, excluyendo los formados por una única chapa.

6.6.3.2 Metodología y geometrías

Para comenzar, se han tomado como referencia los cinco casos de tableros rectos, de 11.3 m de ancho y canto constante que ya se emplearon para el cálculo de fatiga. Para estos casos, se han obtenido las dimensiones de rigidizadores basándose en los criterios

de dimensionamiento de rigidizadores del Eurocódigo 3 1-5 [31]. Las dimensiones resultantes se muestran en la tabla 6.42.

L [m]	Ubicación	H_w [mm]	t_w [mm]	B_f [mm]	t_f [mm]
30	<i>Alma</i>	175	10	170	20
	<i>Ala</i>	250	10	245	15
45	<i>Alma</i>	200	10	200	18
	<i>Ala</i>	250	10	245	15
60	<i>Alma</i>	250	10	250	21
	<i>Ala</i>	250	10	245	15
75	<i>Alma</i>	300	10	320	21
	<i>Ala</i>	300	10	320	15
90	<i>Alma</i>	350	12	390	20
	<i>Ala</i>	300	10	320	15

TABLA 6.42 Dimensiones de rigidizadores

En dicha tabla, H_w denota la altura del alma del rigidizador y t_w su espesor, mientras que B_f indica el ancho total de las alas del rigidizador y t_f su espesor.

Tomando dimensiones anteriores, se ha calculado la resistencia ($M_{T,Rd}$) y rigidez (t_{eq}) del marco compuesto por los rigidizadores. En la tabla 6.43 se muestran dichos resultados, así como la separación entre ellos (S_r).

L [m]	S_r [m]	t_{eq} [mm]	$M_{T,Rd}$ [kN.m]
30	2.5	0.094	822
45	4.5	0.069	1157
60	3.75	0.038	1809
75	4.167	0.032	2431
90	3.75	0.023	2804

TABLA 6.43 Características de los rigidizadores

Una vez definidas las características, se procedió a realizar el cálculo. Para ello se sustituyó la rigidez de 0.01 mm, considerada en cálculos anteriores, por la rigidez estimada en la tabla anterior. Los resultados se muestran en el siguiente apartado.

6.6.3.3 Resultados

En primer lugar, se muestra el torsor resistente de los rigidizadores ($M_{T,Rd}$), el torsor calculado a partir de las reacciones en los rigidizadores (M_T), y la relación entre ambos.

L [m]	$M_{T,Rd}$ [kN.m]	M_T [kN.m]	$M_T/M_{T,Rd}$ [%]
30	822	260	31.6
45	1.157	309	26.7
60	1.809	276	15.3
75	2.431	372	15.3
90	2.804	347	12.4

TABLA 6.44 Reacción en rigidizadores

En el peor de los casos, se observa que la reacción apenas llega a un tercio de la capacidad de los rigidizadores. Por lo tanto, se puede afirmar preliminarmente que, en un dimensionamiento por resistencia de los diafragmas antidistorsión empleando los espaciamientos fijados en este trabajo, los rigidizadores no son susceptibles de dañarse. Sin embargo, no se ha realizado un estudio pormenorizado de la interacción entre esfuerzos de rigidización y los de distorsión, por lo que no se puede concluir de categóricamente. A pesar de esto, hay indicios cualitativos que sugieren que la interacción no debería ser un problema con niveles de eficiencia por debajo de un tercio.

Uno de los motivos es que los rigidizadores se calculan como la suma de un esfuerzo axial y una carga distribuida en una viga isostática. Esto implica que, aunque existen esfuerzos en los extremos, la mayor parte de estos se producen en el centro del rigidizador. Por otro lado, en los rigidizadores sometidos a distorsión, los esfuerzos se concentran en las esquinas y varían linealmente a lo largo del rigidizador. Por lo tanto, las secciones críticas no son coincidentes, y en consecuencia, la interacción no es la suma de eficiencia debida a los esfuerzos de rigidización con la eficiencia debida a los esfuerzos de distorsión. Además, en ciertos casos, el diseño de los rigidizadores está gobernado por criterios de rigidez, lo que implica que existe todavía un margen mayor para la interacción.

Aprovechando el predimensionamiento de los rigidizadores, se compararán los resultados obtenidos con los requerimientos de un dimensionamiento flexible. En primer lugar, se compara la resistencia.

En la tabla 6.45, se muestra la torsión de dimensionamiento por resistencia ($M_{T,r}$) y se compara con el torsor resistente ($M_{T,Rd}$) de los rigidizadores. A priori, el resultado indica que, si se considera que la resistencia mínima exigida a un diafragma dimensionado por flexibilidad es aproximadamente un 40 %, en los casos a partir de 60 m, solo teniendo en

L [m]	$M_{T,r}$ [kN.m]	$M_{T,Rd}$ [kN.m]	$M_{T,Rd}/M_{T,r}$ [%]
30	4.335	822	19
45	4.616	1.157	25.1
60	4.511	1.809	40.1
75	4.569	2.431	53.2
90	4.511	2.804	62.2

TABLA 6.45 Diseño por resistencia de rigidizadores

cuenta los rigidizadores, podría alcanzarse la resistencia requerida sin necesidad de celosías adicionales. No obstante, esta afirmación no es del todo cierta, ya que omite varios aspectos importantes como son la interacción entre esfuerzos de rigidización y esfuerzos de distorsión, o la condición de rigidez para el control del pandeo del ala superior. Además, también es necesario comprobar la condición de rigidez mínima en el dimensionamiento flexible.

En el apartado 6.3.4.4, que aborda el dimensionamiento flexible, se estableció una condición mínima de rigidez que debían cumplir los diafragmas. En la tabla 6.46 se muestra la rigidez mínima $t_{eq,min}$ aplicada a los casos estudiados, y se compara con la rigidez de los rigidizadores.

L [m]	t_{eq} [mm]	$t_{eq,min}$ [mm]
30	0.094	0.278
45	0.069	0.286
60	0.038	0.130
75	0.032	0.093
90	0.023	0.058

TABLA 6.46 Rigidez en diafragmas

En este caso, se observa como ninguno de los casos cumple con la condición de rigidez. Por lo tanto, disponer únicamente de los rigidizadores estrictos para el control de la abolladura no es suficiente.

De cualquier manera, lo expuesto anteriormente demuestra que los marcos abiertos presentan una capacidad resistente aceptable. Por lo tanto, con un estudio morfológico adecuado, pueden constituir un buen punto de partida para el diseño de diafragmas antidistorsión más eficientes.

6.7 Tipología de diafragmas

6.7.1 Introducción

El objetivo de este apartado es completar las recomendaciones anteriores relativas al diseño de diafragmas antidistorsión, proporcionando orientación sobre los tipos de diafragmas más eficientes en algunos de los casos estudiados en el presente capítulo.

En este caso, la eficiencia se refiere al peso de los diafragmas, ya que el coste del proyecto suele estar ligado al precio del kilo de acero. No obstante, debe tenerse en cuenta que algunas tipologías suponen un mayor coste de mano de obra que otras. En el caso de que la diferencia de peso entre tipologías sea escasa, una mayor simplicidad en el diseño que reduzca la mano de obra cobrarán interés. Sin embargo, esta valoración queda fuera del presente estudio.

En cuanto a las tipologías estudiadas, se han analizado la Cruz de San Andrés, K, V y diafragmas de alma llena. Los marcos abiertos han sido excluidos del análisis por su escasa rigidez.

Es importante tener en cuenta que el estudio es solo una aproximación, ya que cada proyectista y circunstancias de proyecto son distintas, lo que hace extremadamente complejo abarcar toda la casuística existente. Por ello, ha sido necesario realizar una serie de simplificaciones, las cuales se describen en el siguiente apartado de metodología y geometrías.

6.7.2 Metodología y geometrías

La geometría de la sección condiciona el dimensionamiento y tipología de los diafragmas. La carga es proporcional al ancho del tablero y los esfuerzos interiores dependen fundamentalmente del ancho superior e inferior del cajón y su canto. Por esta razón, se realizará un estudio paramétrico donde se variarán las dimensiones mencionadas anteriormente, pero partiendo de las geometrías que se han estudiado en el presente capítulo.

Como punto de partida, se tomarán las secciones los tableros de canto constante y anchos 11.3 m y 12.8 m. Se mantendrá el ancho superior del cajón y el canto, y solo se variará la dimensión del ancho inferior del cajón, pasando de un cajón rectangular donde el ancho superior e inferior son iguales, a otros dos trapezoidales donde el ancho inferior es uno y dos metros menor que el ancho superior, respectivamente. Aunque la luz no es importante, se incluye en la tabla 6.47, junto con el resto de los datos ya que la geometría base se ha tomado de dicha luz.

L [m]	C [m]	b [m]	b_s [m]	b_b [m]
30	1.5	11.3	6	6 – 4
45	1.75	11.3	6	6 – 4
60	2.4	11.3/12.8	6/6.75	6 – 4/6.75 – 4.75
75	3	11.3/12.8	6/6.75	6 – 4/6.75 – 4.75
90	3.6	11.3/12.8	6/6.75	6 – 4/6.75 – 4.75

TABLA 6.47 Geometrías de estudio

En cuanto a la metodología de dimensionamiento, el apartado 4.2.1 indica las principales funciones que debían cumplir los diafragmas. Estas se explican a continuación, junto con las hipótesis de cálculo adoptadas al respecto en el presente capítulo.

- **Control de las tensiones por distorsión.** Para controlar las tensiones por distorsión en la sección, se requiere un espaciamiento y un dimensionamiento adecuados de los diafragmas. El dimensionamiento se basa fundamentalmente en resistir un determinado torsor de diseño, aunque en ocasiones también se han impuesto criterios de rigidez. Por lo tanto, el objetivo de este apartado es complementar las recomendaciones anteriores con gráficas que permitan identificar la relación entre peso y rigidez (t_{eq}), o peso y resistencia del diafragma ($M_{T,Rd}$), para poder elegir el tipo de diafragma más eficiente.
- **Transferencia de los esfuerzos excéntricos a la sección.** Esta transferencia es la que genera los esfuerzos por distorsión en el diafragma. En este caso, se emplearon las fórmulas simplificadas del capítulo 4 para establecer la relación entre el torsor aplicado y los esfuerzos internos de dimensionamiento de los diafragmas.
- **Transmitir las cargas locales aplicadas en la plataforma a las almas y transmitir las cargas locales aplicadas en ménsulas o jабalcones en tableros muy anchos.** Todos los casos estudiados en este apartado consideran que la losa no se apoya en el cordón superior.
- **Transmitir las fuerzas de desviación del ala inferior al alma en puentes de canto variable.** Aunque este capítulo se estudian puentes de canto variable, en este apartado no se va a tener en consideración este efecto, ya que se asume de manera simplificada, que penaliza a todas las tipologías por igual.
- **Permitir la transferencia de esfuerzos en zonas singulares.** Los puentes estudiados en este capítulo no presentan zonas singulares, por lo que este efecto no se tiene en cuenta.

- **Recoger la componente horizontal en secciones trapezoidales.** Este es un efecto importante en los puentes de sección trapezoidal que requiere atención. Dicho efecto condiciona el diseño del cordón superior, para el cual se van a realizar las siguientes hipótesis:
 - Existe una fuerza de desviación permanente causada por el peso de la losa. A esta carga se le puede sumar, si resulta desfavorable, un 50 % del peso de la sección metálica.
 - El cordón superior se dispone como máximo cada 5 m, por lo que las carga sobre él se consideran locales. Bajo esta hipótesis, el cordón superior resiste el 100 % de la fuerza de desviación causada por la carga debida a los vehículos pesados. Es decir, en tableros de más de 9 m de ancho de calzada la fuerza que resiste el cordón superior es 600 kN multiplicado por el factor de ELU ($\gamma_Q=1.35$) y multiplicado por la tangente del ángulo que forma el alma con la vertical.
- **Evitar la deformación transversal de la sección durante el montaje e introducir acciones durante la construcción.** Este aspecto se ha considerado parcialmente. Aunque no se ha comprobado la rigidez para controlar el pandeo de las platabandas superiores, se ha supuesto que puede existir una fuerza de desviación en el cordón superior cuyo valor es el 1 % de la compresión en la platabanda superior durante la construcción. El valor supuesto de dicha compresión es un 80 % de la fuerza resultante de multiplicar el área de la platabanda por la tensión de 355/1.1 MPa.
- **Funciones típicas de los rigidizadores.** En este apartado se han utilizado los rigidizadores que se predimensionaron para el apartado 6.6.3, y se han añadido algunos casos nuevos. Los criterios de dimensionamiento han sido los indicados en el Eurocódigo EN1993 1-5. Hay que tener en cuenta que no se ha considerado la acción del viento en las almas ni se ha tenido en cuenta la reducción de la luz de cálculo del ala inferior que se da en los diafragmas con celosías en V. Es decir, se han supuesto los mismos rigidizadores en todos los diafragmas en celosía para una misma geometría. Las dimensiones para las almas y para el ala inferior se muestran en las tablas 6.48 y 6.49, respectivamente.

Una vez definidas las hipótesis de partida, se procede a mostrar los resultados. Cabe indicar que en cada resultado se ha indicado de manera orientativa el tursor de diseño por resistencia vinculado al caso base de tablero recto.

C [m]	H_w [mm]	t_w [mm]	B_f [mm]	t_f [mm]
1.5	175	10	170	20
1.75	200	10	200	18
2.4	250	10	250	21
3	300	10	320	21
3.6	350	12	390	20

TABLA 6.48 Dimensiones de rigidizadores del alma

b_b [m]	H_w [mm]	t_w [mm]	B_f [mm]	t_f [mm]
$4 \leq$	250	10	245	15
$5 \leq$	250	10	280	20
$6 \leq$	250	10	350	20
$6.75 \leq$	280	10	380	23

TABLA 6.49 Dimensiones de rigidizadores del ala

6.7.3 Resultados

6.7.3.1 Canto 1.5 m

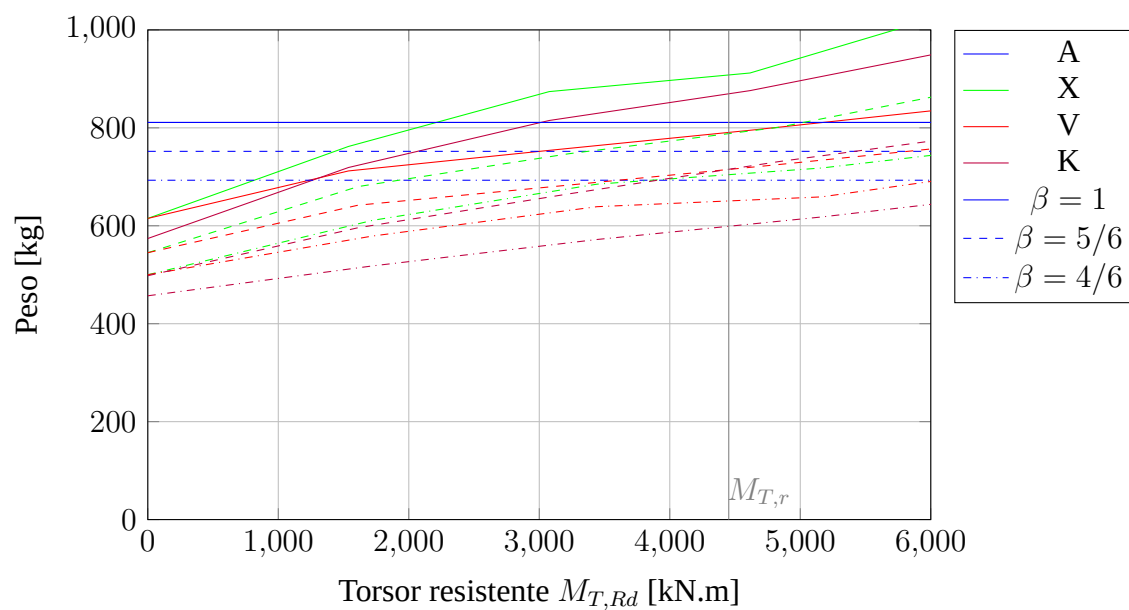


FIGURA 6.83 Canto 1.5 m: Relación peso-resistencia

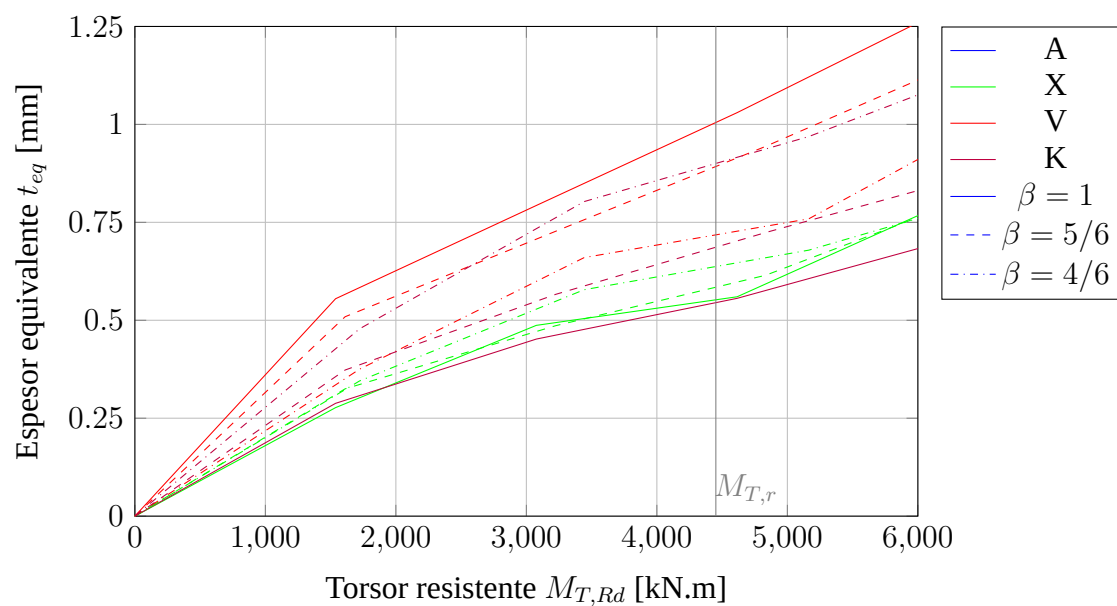


FIGURA 6.84 Canto 1.5 m: Relación rigidez-resistencia

La rigidez del diafragma de alma llena es en todos los casos 11 mm.

6.7.3.2 Canto 1.75 m

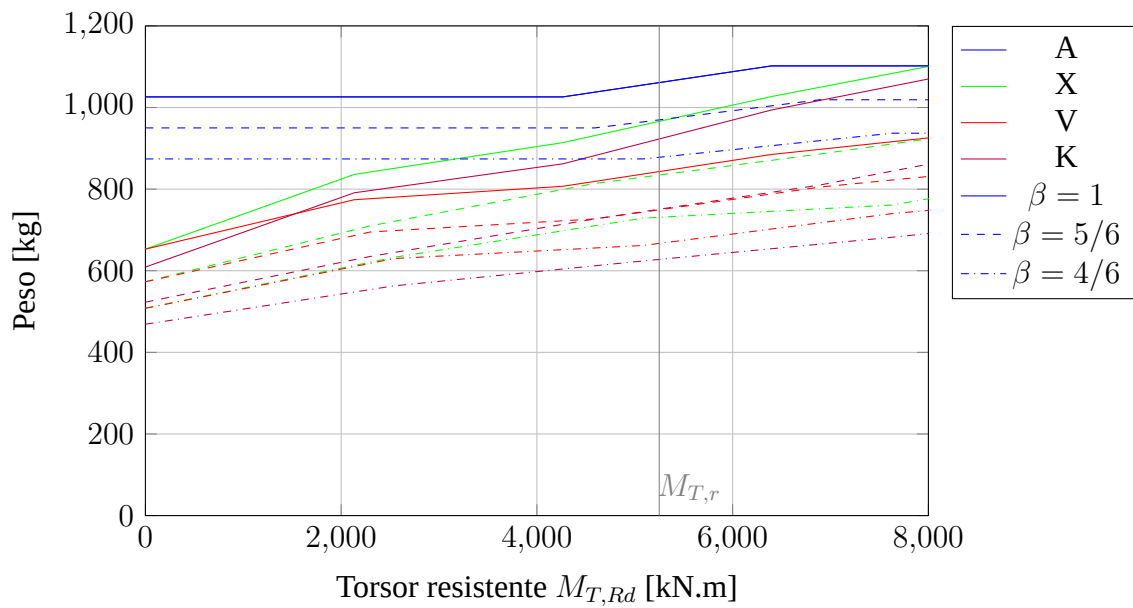


FIGURA 6.85 Canto 1.75 m: Relación peso-resistencia

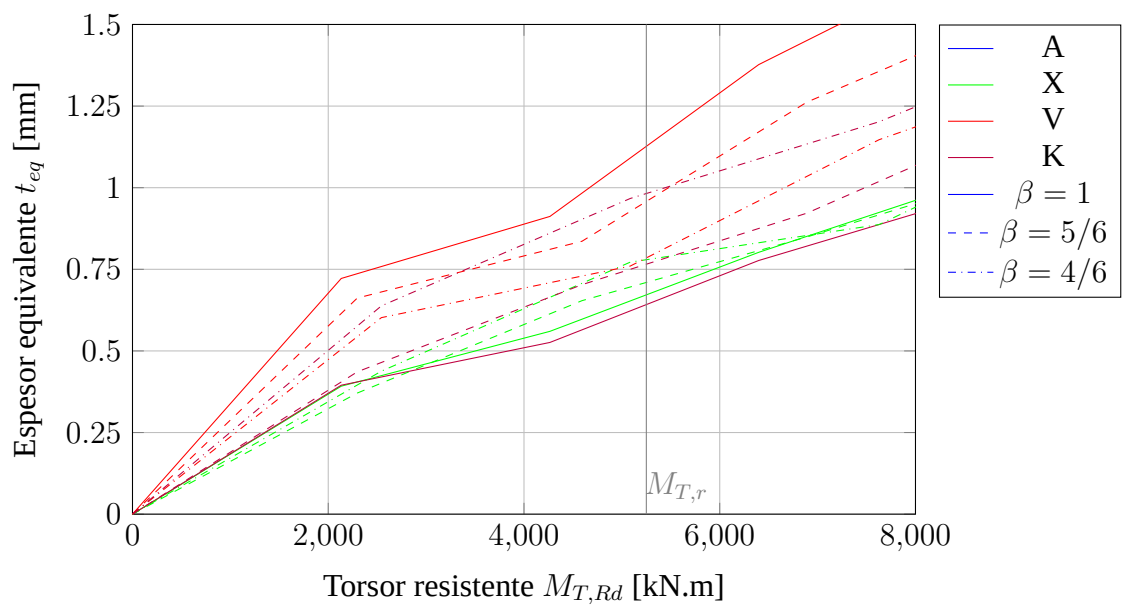


FIGURA 6.86 Canto 1.75 m: Relación rigidez-resistencia

La rigidez del diafragma de alma llena varía entre 12 y 13 mm.

6.7.3.3 Canto 2.4 m

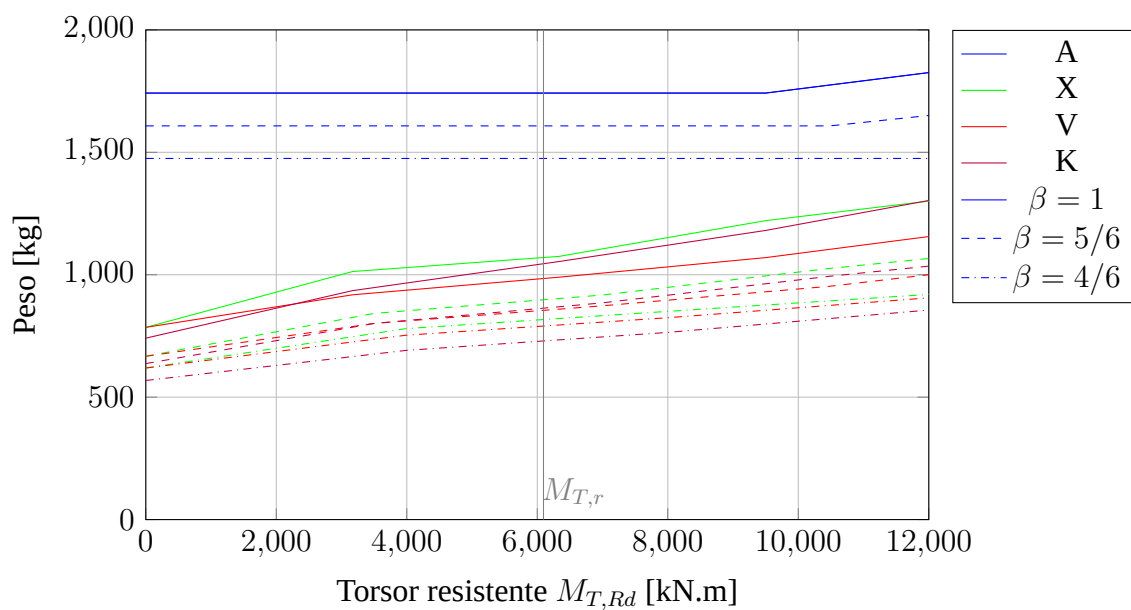


FIGURA 6.87 Canto 2.4 m: Relación peso-resistencia. Ancho 11.3 m

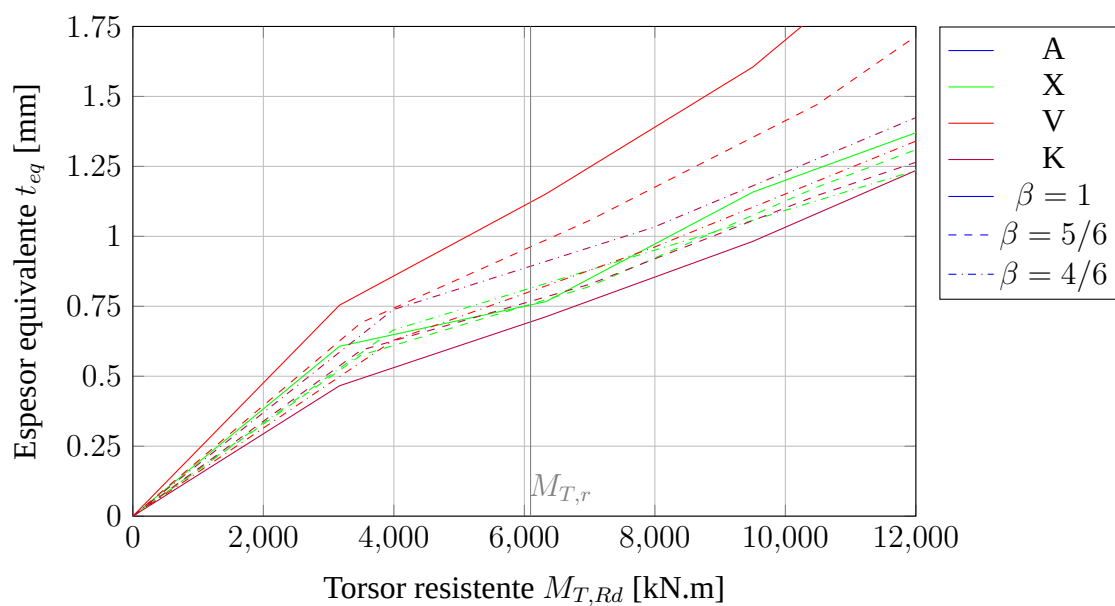


FIGURA 6.88 Canto 2.4 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 11.3 m

La rigidez del diafragma de alma llena varía entre 15 y 16 mm.

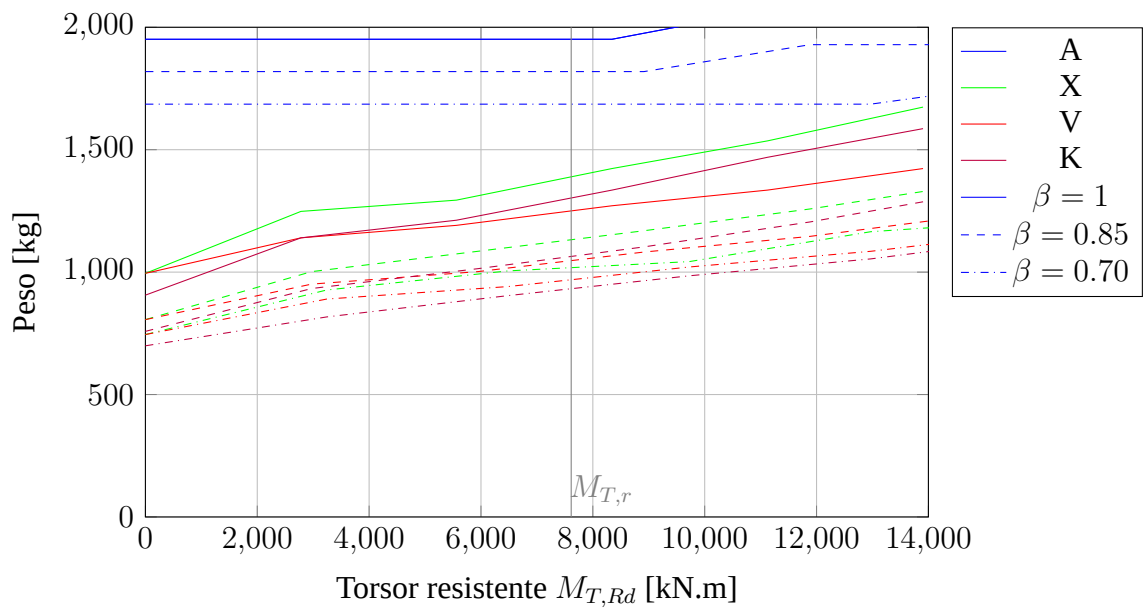


FIGURA 6.89 Canto 2.4 m: Relación peso-resistencia. Ancho 12.8 m

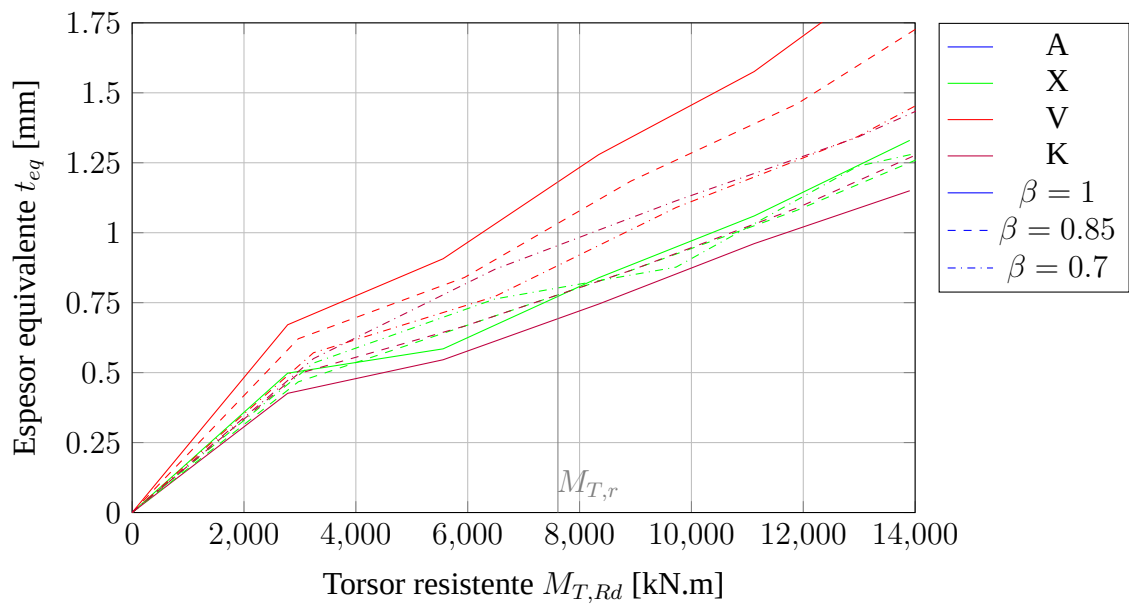


FIGURA 6.90 Canto 2.4 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 12.8 m

La rigidez del diafragma de alma llena varía entre 15 y 16 mm.

6.7.3.4 Canto 3 m

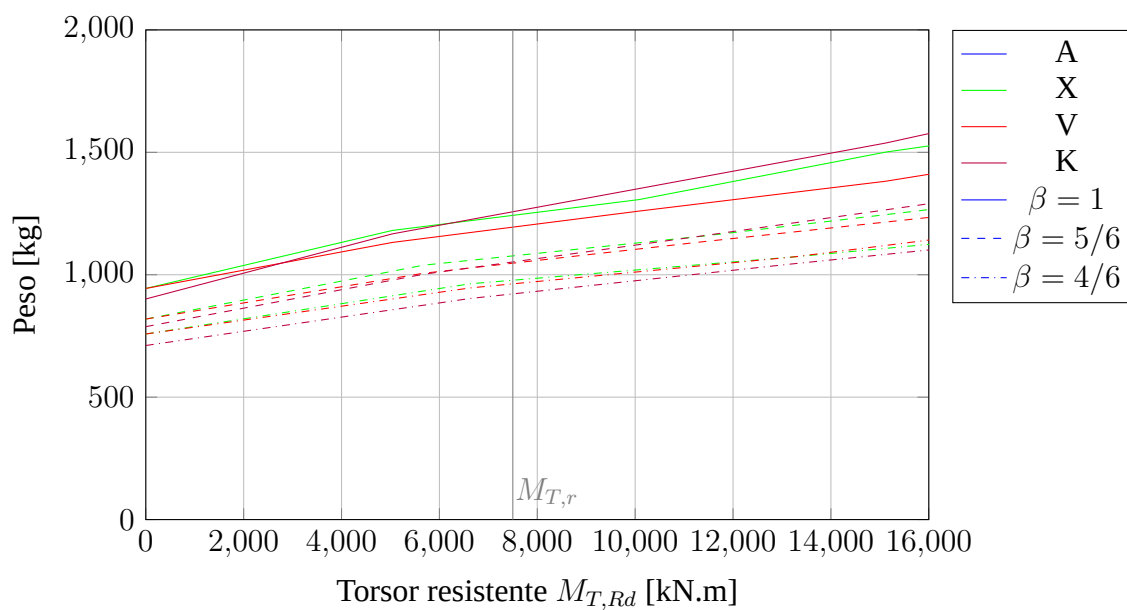


FIGURA 6.91 Canto 3 m: Relación peso-resistencia. Ancho 11.3 m

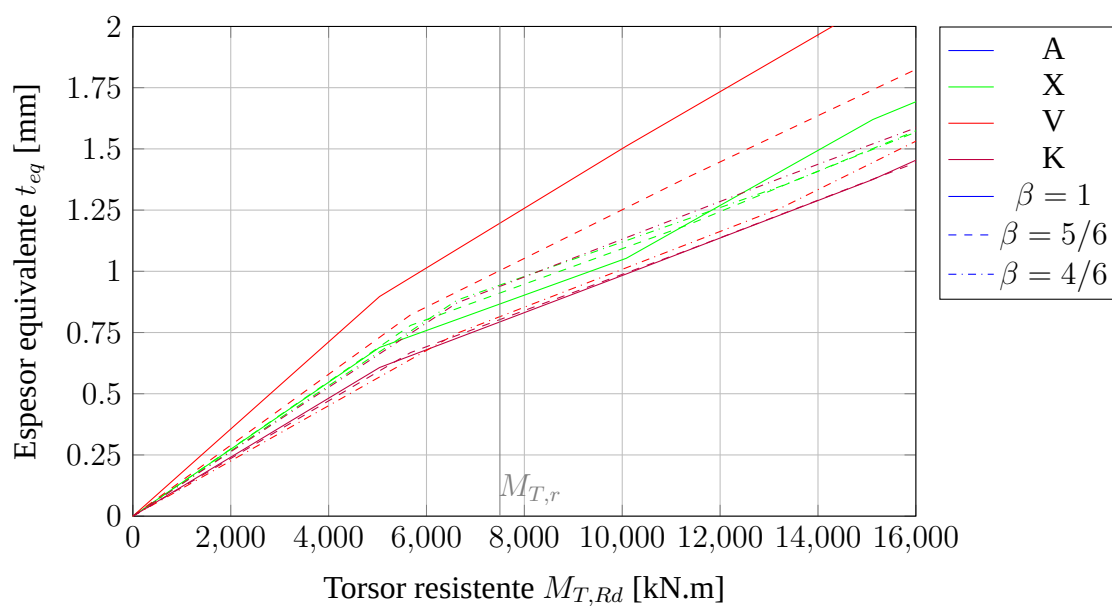


FIGURA 6.92 Canto 3 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 11.3 m

La rigidez del diafragma de alma llena varía entre 17 y 18 mm, y su peso supera los 2070 kg.

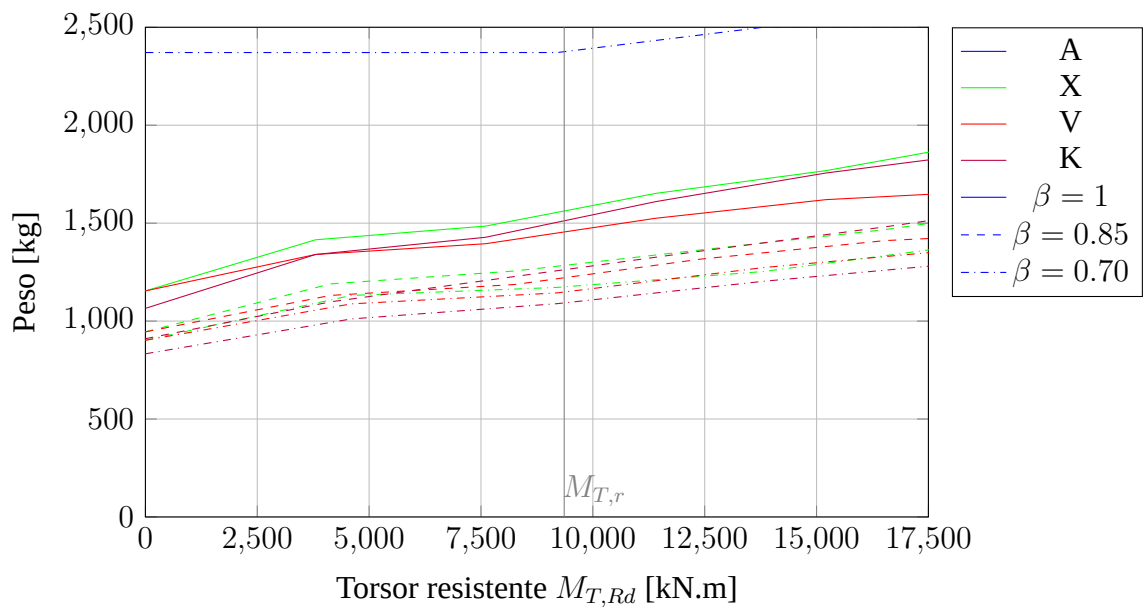


FIGURA 6.93 Canto 3 m: Relación peso-resistencia. Ancho 12.8 m

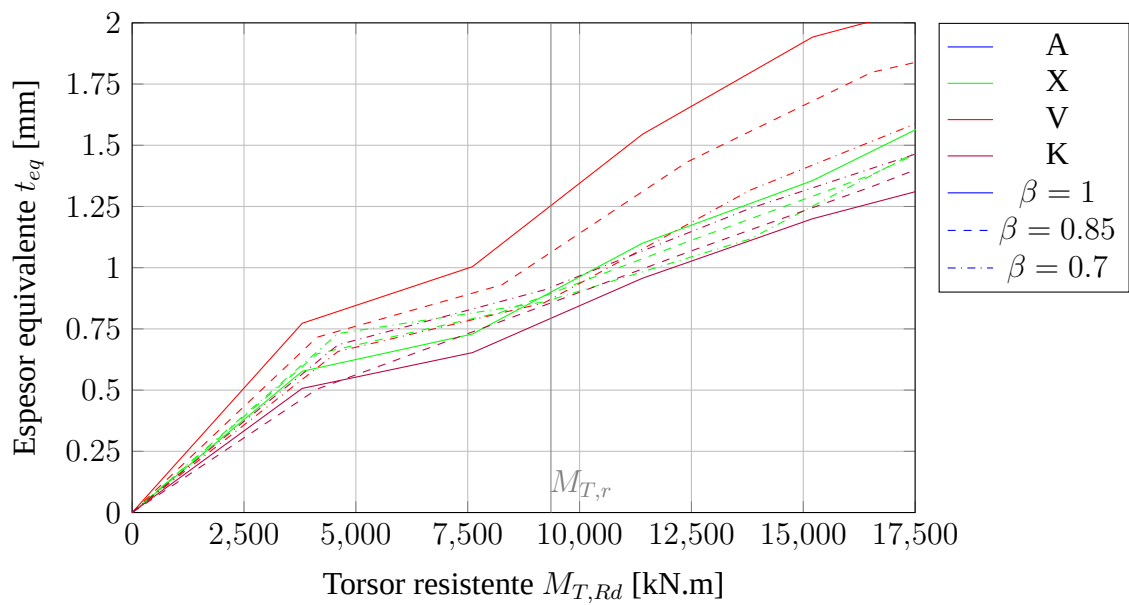


FIGURA 6.94 Canto 3 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 12.8 m

La rigidez del diafragma de alma llena varía entre 17 y 18 mm, y su peso supera los 2370 kg.

6.7.3.5 Canto 3.6 m

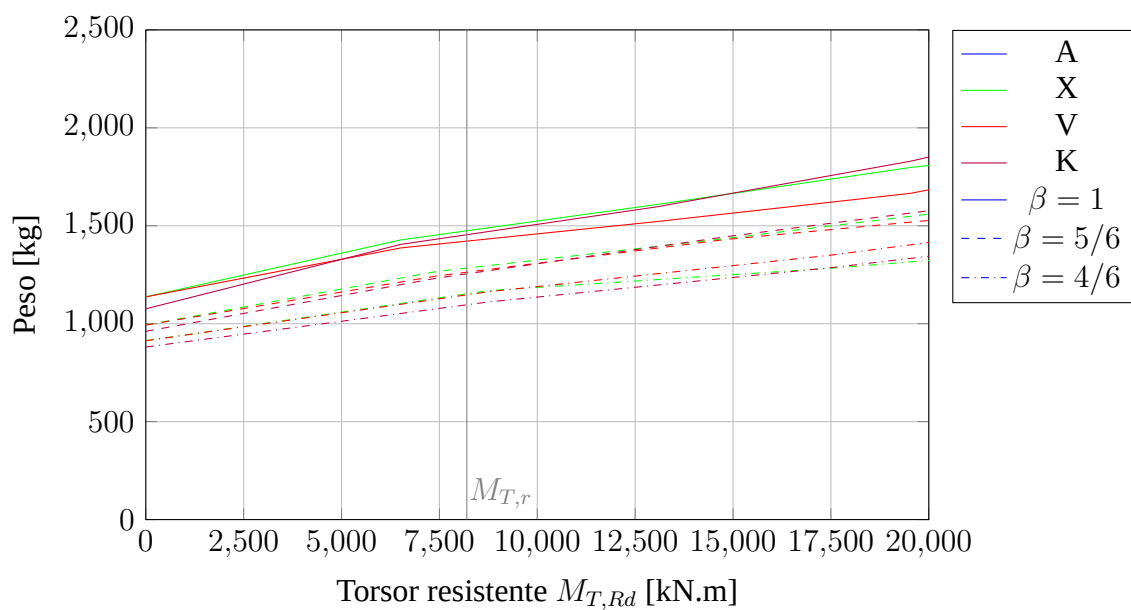


FIGURA 6.95 Canto 3.6 m: Relación peso-resistencia. Ancho 11.3 m

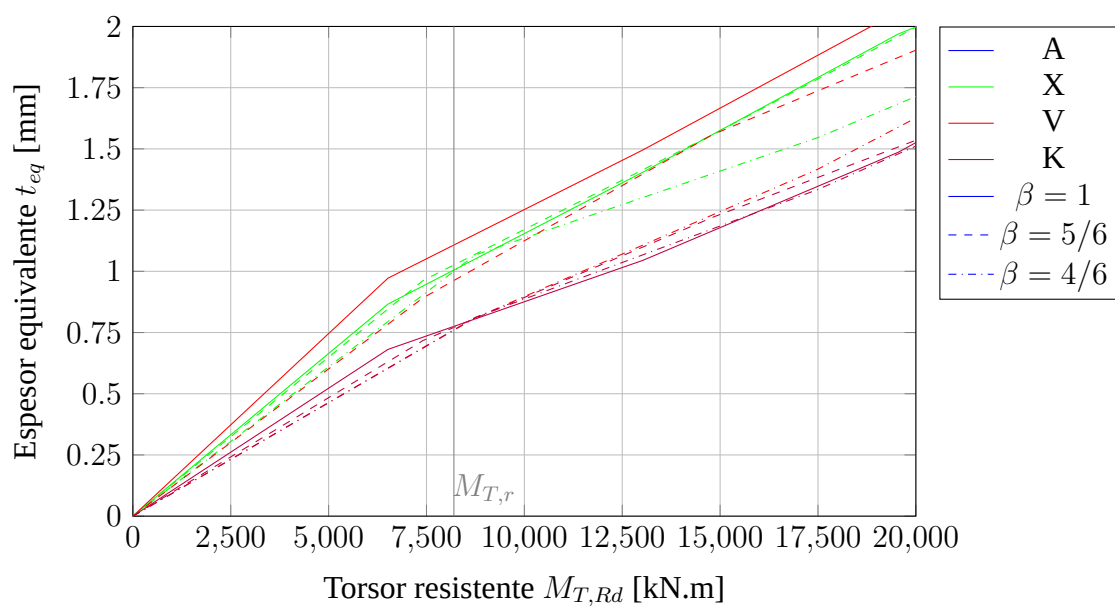


FIGURA 6.96 Canto 3.6 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 11.3 m

La rigidez del diafragma de alma llena varía entre 19 y 20 mm, y su peso supera los 2763 kg.

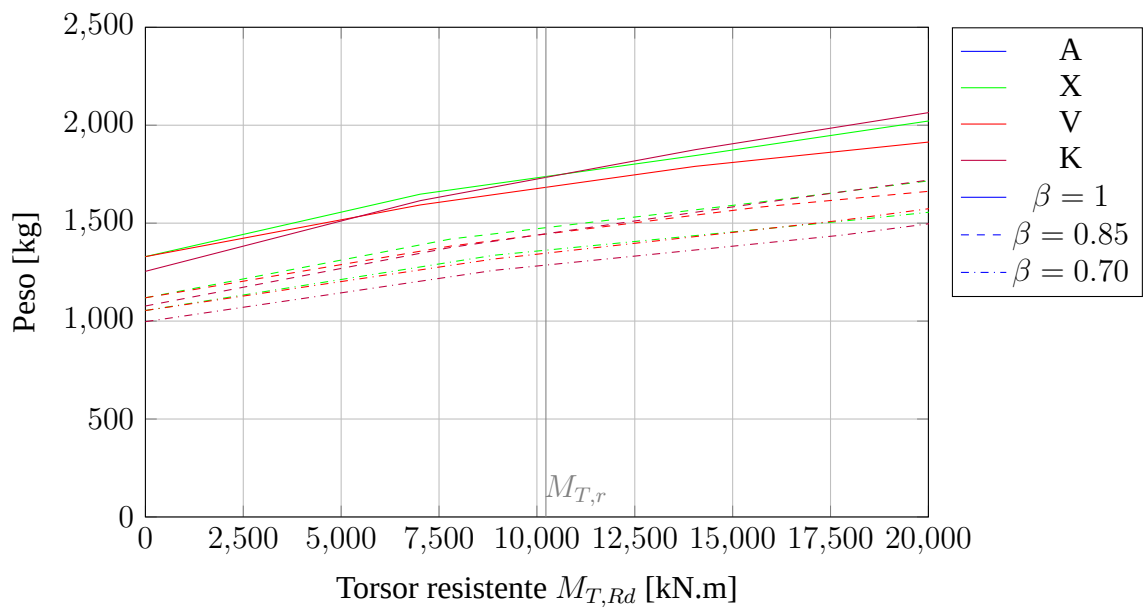


FIGURA 6.97 Canto 3.6 m: Relación peso-resistencia. Ancho 12.8 m

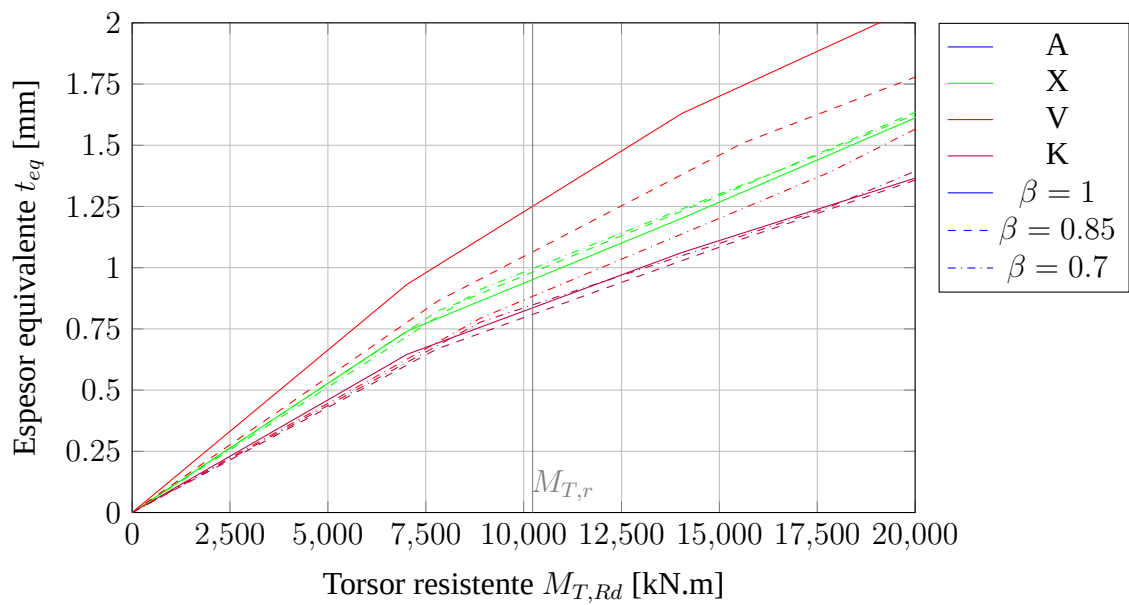


FIGURA 6.98 Canto 3.6 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 12.8 m

La rigidez del diafragma de alma llena supera los 19 mm, y su peso supera los 3100 kg.

6.7.4 Análisis de resultados

Los diafragmas se pueden dividir para su análisis en diafragmas de alma llena y diafragmas en celosía. En los primeros se observa como únicamente podrían ser competitivos en cantos reducidos, mientras que los otros son competitivos prácticamente en todos los casos, variando según la geometría del cajón y el esfuerzo solicitante cual de los tipos de diafragma en celosía es más óptimo.

Los diafragmas de alma llena han demostrado ser competitivos en secciones de almas sensiblemente verticales, con cantos de hasta 1.5 m, y con niveles de esfuerzos elevados. Aunque en la gráfica 6.83 se observa que los esfuerzos a partir de los cuales los diafragmas de alma llena resultan más eficientes superan en todos los casos la condición de resistencia $M_{T,r}$, se considera que dicho límite puede ser ligeramente inferior, ya que no se ha tenido en cuenta el incremento de peso debido a elementos secundarios como chapas de conexión en los diafragmas en celosía.

La otra gran ventaja de los diafragmas de alma llena es su rigidez, ya que prácticamente en todos los casos es un orden de magnitud superior a la de un diafragma dimensionado por resistencia. Por lo tanto, en el caso de tableros donde se requiera un control de la distorsión mediante rigidez adicional en los diafragmas, esta puede ser una solución competitiva. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el espesor requerido para controlar el pandeo vertical penaliza bastante esta tipología como se ha podido observar, por lo que no se recomienda esta tipología en ningún caso en tableros de gran canto.

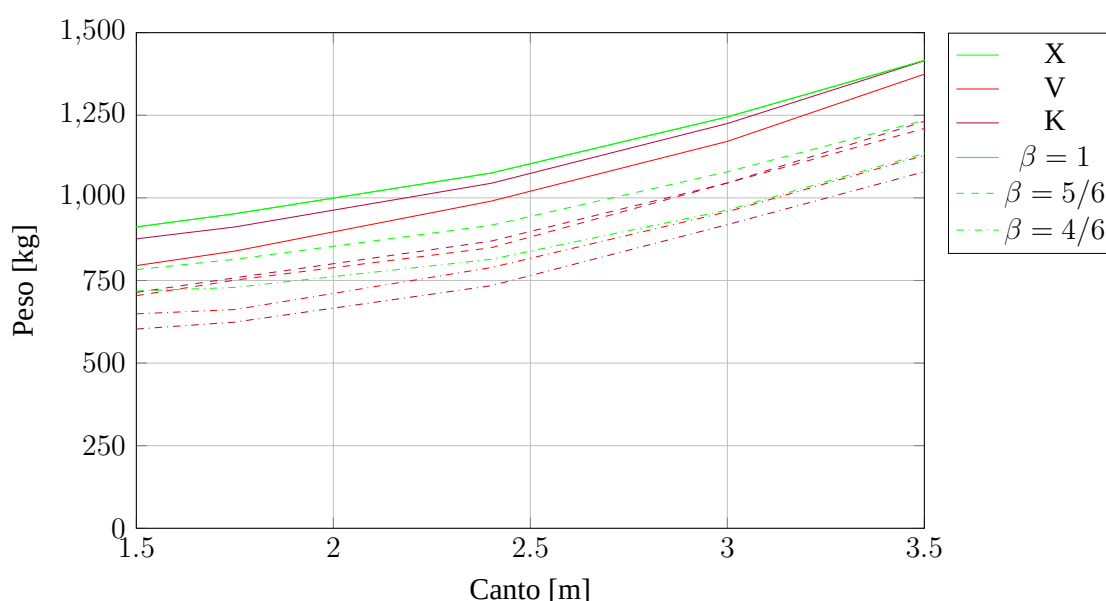


FIGURA 6.99 Relación peso-luz. Ancho 11.3 m

Para comparar los diafragmas en celosía, se ilustra en la figura 6.99 cómo varía el peso en función del canto para un dimensionamiento de un tablero de 11.3 m de ancho por condición de resistencia.

La figura 6.99 se considera muy representativa de los resultados mostrados en el apartado 6.7.3, ya que muestra cómo la celosía en V es más competitiva en secciones casi rectangulares, mientras que la celosía en K es más competitiva cuanto más acusada es la forma del trapecio. La frontera entre ambas tipologías se puede ubicar en la relación entre ancho inferior y ancho superior $\beta = 5/6$ aproximadamente. Sin embargo, es importante tener en cuenta que, dentro de la frontera, y con niveles de esfuerzos elevados, la celosía en V es más competitiva, mientras que con niveles de esfuerzos bajos la celosía en K es ligeramente más competitiva. En cualquier caso, la diferencia entre ambas es muy sutil.

En la comparativa anterior no mencionaron los diafragmas en X, también denominados Cruz de San Andrés, ya que no ofrecen ninguna ventaja en prácticamente todos los casos estudiados. Únicamente en el caso de esfuerzos elevados y canto 3.6 m este tipo de diafragmas ha resultado el más óptimo. Esto permite anticipar que en secciones con relaciones ancho de cajón - canto de uno o inferiores, este tipo de diafragmas puede resultar competitivo. Sin embargo, esta suposición se basa en la tendencia observada y no en cálculos concretos.

En cuanto a la rigidez dentro de los diafragmas en celosía, la tipología de diafragmas en V es la que ofrece una mayor rigidez cuando $\beta > 0.8$ en la mayoría de los casos. Además, esta tipología es la más eficiente desde un punto de vista del peso, por lo que es claramente la recomendada para estas geometrías.

Cuando la forma trapezoidal es más acusada ($\beta < 0.8$), la tipología más rígida depende del canto. En cantos inferiores a 3 m, el diafragma en K aporta una mayor rigidez, mientras que en cantos mayores, la solución en la más rígida es la Cruz de San Andrés. Esto se debe a que cuando los cantos son elevados, los montantes de las celosías en K se disponen muy verticales y pierden su efectividad.

Finalmente, es importante destacar que las conclusiones relativas a la rigidez de los diafragmas en celosía son similares a las de la eficiencia en términos de peso. Por lo tanto, se puede decir que la eficiencia estructural y económica están relacionadas en el dimensionamiento de diafragmas en celosía. Además, en el análisis de los diafragmas requeridos por resistencia llevado a cabo en apartados anteriores de este capítulo, se utilizó la tipología menos rígida para los cálculos. Esto implica que en muchos casos no se empleó el diafragma más eficiente en términos de peso, y por lo tanto, no se usó el diafragma reco-

mendado. Es decir, se puede considerar que el análisis realizado en el presente capítulo queda del lado de la seguridad ya que los diafragmas óptimos en términos de peso aportan mayor rigidez, en la mayoría de los casos, que los diafragmas supuestos en el cálculo.

6.8 Resumen

Como resumen de este capítulo, se propone el árbol de decisión para el dimensionamiento de diafragmas mostrado en la figura 6.100.

El árbol de decisión comienza con el cálculo del parámetro Λ de susceptibilidad a la distorsión que fue explicado en el apartado 6.5.5.

Cuando el parámetro Λ es superior a 2, la susceptibilidad a la distorsión es elevada, por lo que se debería realizar un análisis refinado. Para este análisis, se propone comenzar por espaciamientos cortos y dimensionar los diafragmas por resistencia, lo que implica calcular el torsor tributario sobre el diafragma ($M_{T,r}$ según Ec. 6.6). Una vez definidos los esfuerzos de dimensionamiento, el siguiente paso es calcular los diafragmas. Para ello, se deberían considerar aquellas tipologías que aporten mayor rigidez tales como diafragmas en celosía o diafragmas de alma llena. Una vez seleccionado el diafragma que se estime más conveniente, se debería calcular de la distorsión con el fin de verificar que la rigidez que aportan los diafragmas es suficiente. Si es así, se puede concluir el cálculo, pero en caso contrario se debería seleccionar un diafragma que aporte mayor rigidez y volver a realizar el cálculo de la distorsión hasta que esta cumpla con el límite.

Si el parámetro Λ es inferior a 2, el dimensionamiento puede ser por resistencia en cualquier caso, o flexible si se cumplen una serie de condicionantes. Para emplear el dimensionamiento flexible el tablero debe tener menos de 13.5 m de ancho, debe estar en una alineación recta y su susceptibilidad a la distorsión debe ser inferior a 1. Bajo esas condiciones, se puede fijar un espaciamiento inferior a 4.5 m y considerar un esfuerzo de dimensionamiento inferior al de un dimensionamiento por resistencia, ya que dicho esfuerzo ($M_{T,r}$) se multiplica por un factor (T_f), que se define en la ecuación 6.12. Además, se debe comprobar la rigidez mínima de los diafragmas que de acuerdo con la ecuación 6.11. Una vez establecidas las condiciones de partida, se puede proceder a calcular los diafragmas de manera iterativa, ya que el factor de reducción T_f depende de la rigidez del diafragma. Cuando la rigidez supuesta en el factor de reducción sea idéntica a la rigidez del diafragma, se puede dar por concluido el cálculo.

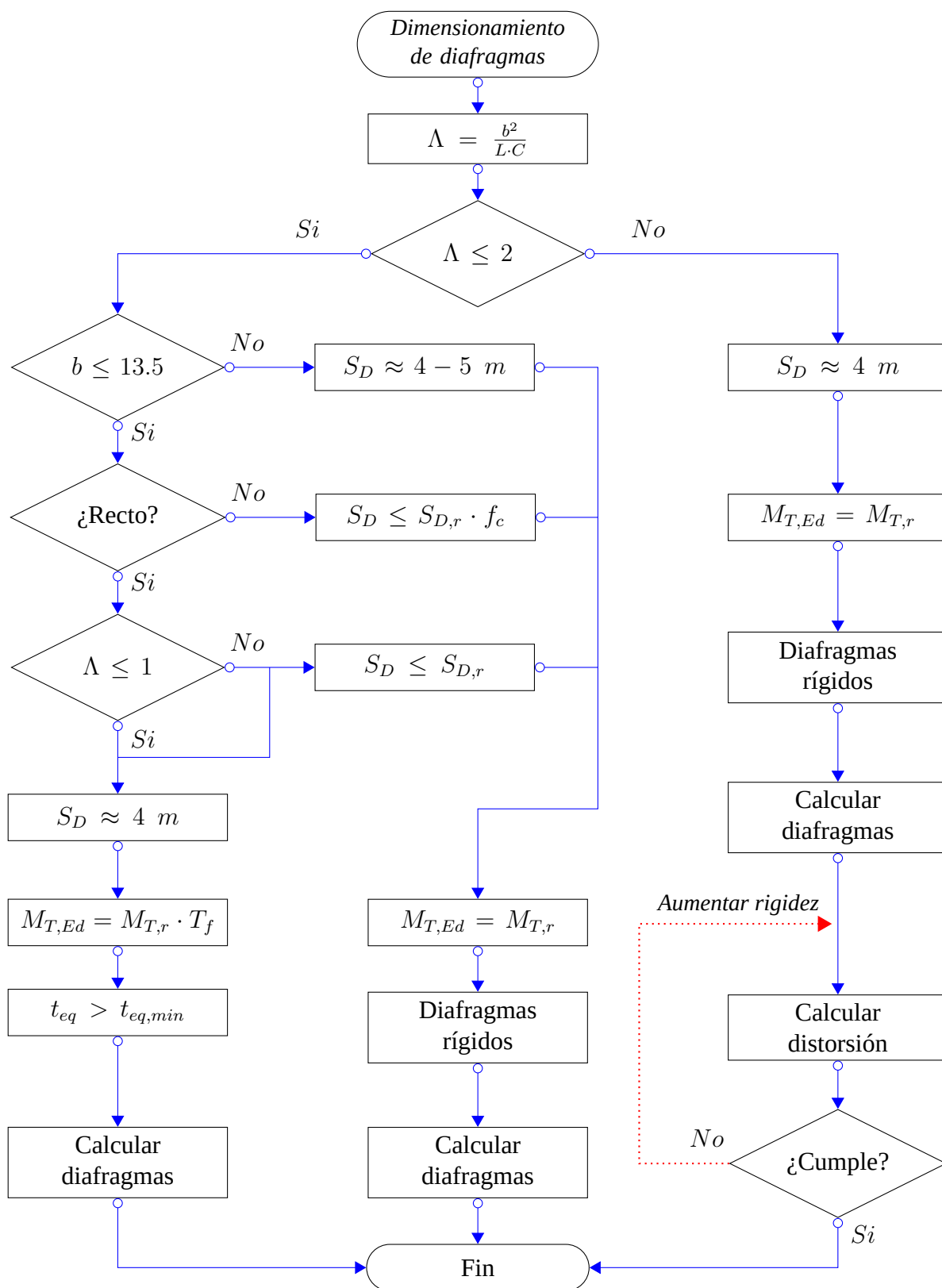


FIGURA 6.100 Árbol de decisión

Cuando el parámetro Λ es inferior a 2, siempre es posible realizar un dimensionamiento por resistencia. En este caso, el primer paso consiste en seleccionar el espaciamiento entre diafragmas en función de la anchura y la curvatura.

Si el tablero es recto y su anchura es inferior a 11.3 m, el espaciamiento máximo se define como $S_{D,0}$ en la ecuación 6.10. Esta ecuación propone dos alternativas respecto al límite de la distorsión: considerar el 10 % del límite de plastificación del acero, o el 10 % de la tensión media en el ala inferior en ELU, suponiendo un comportamiento elástico. A partir de dicho espaciamiento, en los sucesivos apartados se proponen factores que permiten ajustarlo para anchos mayores y curvaturas en planta.

El espaciamiento para anchos comprendidos entre 11.3 m y 13.5 m se muestra en la ecuación 6.16, y se define como $S_{D,r}$, que para un ancho inferior a 11.3 converge a $S_{D,0}$. Cuando el ancho es superior a 13.5 m se entiende que la losa debe ir apoyada en los diafragmas del cajón, y por lo tanto el espaciamiento entre diafragmas se debe limitar a 4-5 m, que es la posición recomendada de las vigas transversales.

Por último, para tener en cuenta la curvatura se propuso un factor f_c que se definió en la ecuación 6.14. Este factor se aplica a tableros de ancho inferior a 13.5 m, ya que cuando los espaciamientos son inferiores a 5 m, y los diafragmas se dimensionan por resistencia, se ha observado que la influencia de la curvatura en las tensiones por distorsión es escasa, independientemente del ancho.

Una vez fijado el espaciamiento para realizar el dimensionamiento por resistencia, se siguen los siguientes pasos habituales para un dimensionamiento de diafragmas. En primer lugar, se calcula el torsor de dimensionamiento por resistencia ($M_{T,r}$) y luego se calculan los posibles diafragmas, teniendo en cuenta que se recomienda emplear diafragmas «rígid»s, tales como los diafragmas en celosía o diafragmas de alma llena. Finalmente, se selecciona el óptimo de entre los diafragmas calculados.

Además de la propuesta de metodología para el diseño de diafragmas, en este capítulo también se han estudiado criterios complementarios que se deben tener en cuenta para un adecuado diseño de los puentes mixtos teniendo en cuenta la distorsión.

En primer lugar, en el estudio de los puentes curvos, se determinó que era preceptivo realizar un análisis refinado de la secuencia constructiva del puente mediante un modelo de elementos finitos tipo lámina cuando se daban, simultáneamente, las siguientes condiciones:

- $L > 45 \text{ m}$
- $\phi > 0.2 \text{ rad}$
- $S_D > L \cdot (0.3 - 0.25 \cdot \phi) \text{ m}$

Por otro lado, se llevó a cabo un estudio paramétrico de la fatiga, en el cual se observó que la relación entre la sobretensión debida al vehículo pesado de fatiga FLM 3 y la tensión media en el ala inferior llegaba a superar el 50 % en ciertos casos. Esto significa que se debe tener en cuenta la sobretensión ($\Delta\sigma_f$) en el cálculo de fatiga del tablero. Los valores que se recomiendan a partir de los cálculos realizados son:

- Si se emplea el FLM 3 del Eurocódigo, se puede adoptar de manera conservadora un valor de sobretensión de $\Delta\sigma_f = 15 \text{ MPa}$.
- El valor anterior se puede reducir a $\Delta\sigma_f = 10 \text{ MPa}$ si el espaciamiento entre diafragmas no supera los 5 m.

En este capítulo también se han estudiado las tipologías de diafragmas. La principal conclusión es que, en la mayoría de los casos, la celosía en V es más competitiva en secciones casi rectangulares, mientras que la celosía en K es más competitiva cuanto más acusada es la forma del trapecio. El límite entre ambas está aproximadamente en una relación entre el ancho inferior y ancho superior $\beta = 5/6$. Además, en cantos de hasta 1.5 m el diafragma de alma llena puede resultar competitivo, especialmente si se desean diafragmas muy rígidos. En secciones donde el ancho del cajón es similar o inferior al canto, los diafragmas en Cruz de San Andrés pueden ser una opción a estudiar.

La otra conclusión del estudio tipológico de diafragmas es que, en muchos casos, la eficiencia estructural y el peso de acero están relacionados. Por lo tanto, una elección adecuada del tipo de diafragma conduce a diseños eficientes en peso y, además, más seguros desde un punto de vista de la distorsión. Esto implica que el análisis realizado en este capítulo queda del lado de la seguridad, ya que se tomó en todos los casos el diafragma más flexible dimensionado por resistencia, en lugar del más eficiente en peso.

CAPÍTULO 7

Resumen y conclusiones

7.1 Resumen

En esta tesis se ha estudiado el cálculo y control de la distorsión en tableros mixtos de sección cajón unicelulares, con el objetivo de mejorar su eficiencia desde un punto de vista tanto del diseño como de la fabricación.

En primer lugar se realizó una investigación comparativa de las distintas metodologías existentes para el cálculo de la distorsión con el fin de determinar la más eficiente. Como resultado de esta investigación se decidió desarrollar un nuevo elemento finito unidimensional que completara las carencias observadas en los elementos finitos propuestos en la literatura.

Las características principales del elemento finito propuesto son:

- **Sección:** Cajón unicelular simétrico. Sus propiedades se calculan aplicando el método de los elementos finitos, que en la presente investigación se ha adaptado a vigas curvas.
- **Alineación:** Curva.
- **Cortante y flexión:** Movimientos en las tres dimensiones. No admite deformación por cortante. El arrastre por cortante se considera durante el post-procesado según la normativa de aplicación.
- **Torsión:** Considera la torsión no uniforme.
- **Distorsión:** Según formulación propia adaptada de J. Jönsson [58].
- **Interacción torsión-distorsión:** Sí. También incluye interacción de la distorsión con la flexión.

- **Grados de libertad:** Movimientos en las tres direcciones, giros en las tres direcciones, variación del giro longitudinal y distorsión y su variación. En total 9 por nodo.
- **Nodos y funciones de forma:** El elemento es binodal y se interpola mediante funciones de forma polinómicas de grado 3.

Además del elemento finito mencionado anteriormente, esta investigación también expone las ecuaciones que rigen el comportamiento de las vigas curvas, teniendo en cuenta la interacción entre todos los esfuerzos.

Una carencia muy común observada en los elementos finitos unidimensionales propuestos en la literatura es que apenas permiten considerar la rigidez de los diafragmas intermedios antidistorsión. Y en los casos en que sí se permite, se la rigidez se calcula por medio de fórmulas simplificadas. Por ese motivo ha sido necesario desarrollar un marco teórico para implementar los diafragmas en el cálculo con este tipo elementos. Específicamente se han desarrollado algoritmos para el cálculo de rigidez y esfuerzos en diafragmas tipo alma llena, cruz de San Andrés, K, V y marcos abiertos y cerrados. También se han revisado los criterios de dimensionamiento estructural de los diafragmas interiores cuando se ha considerado pertinente, destacando la metodología propuesta para el cálculo de los diafragmas de alma llena.

Con el fin de validar tanto el elemento finito propuesto como los algoritmos para el cálculo de diafragmas, se han realizado tres ejemplos de verificación. El primero de los ejemplos consistió en un puente recto, biapoyado y con una sección de dimensiones reducidas. El objetivo fue mostrar el grado de ajuste entre la teoría de vigas y los modelos de láminas. Este ejemplo permitió identificar aquellos fenómenos locales que no recoge la teoría de vigas, pero que habitualmente se omiten en el diseño de puentes gracias al empleo de detalles estructurales adecuados. El segundo ejemplo fue idéntico al anterior, pero con una curvatura en planta de 100 m. Su objetivo fue demostrar la validez del elemento finito propuesto aplicado a un puente curvo teórico. El último de los ejemplos consistió en la modelización de un puente con una geometría más similar a un puente real de tres vanos, aunque de sección constante y curvo en planta también. En todos los casos se pudo observar cómo el elemento finito propuesto aportaba mayor precisión que la teoría clásica de vigas cuando se comparaba con un modelo de elementos finitos tipo lámina.

En relación al control de la distorsión se llevó a cabo un análisis bibliográfico de las distintas propuestas recogidas tanto en revistas del ámbito académico como normativas vigentes y derogadas. En este sentido, se encontraron discrepancias entre los autores y aspectos susceptibles de mejora, por lo que se decidió proponer unas recomendaciones

nuevas para el control de la distorsión.

Para redactar estas recomendaciones, se realizó un cálculo paramétrico empleando el elemento finito previamente propuesto. Las principales variables estudiadas fueron las siguientes:

- Luz. Se estudió el rango entre 30 y 90 m, ya que se considera el rango más habitual para este tipo de tableros, y las conclusiones son fácilmente extrapolables a puentes de luces mayores.
- Canto. Se estudiaron tableros de canto constante y canto variable.
- Ancho. Se estudiaron tableros con anchos que oscilan desde los 11.3 m hasta 26.6 m.
- Curvatura en planta. Se estudiaron relaciones Luz principal/Radio de hasta 0.4 radianes.

Como resultado se han propuesto metodologías para el diseño de diafragmas antidistorsión que tienen en cuenta todos los parámetros mencionados anteriormente. En concreto, se han propuesto dos metodologías de dimensionamiento: dimensionamiento por resistencia y dimensionamiento «flexible».

El dimensionamiento por resistencia se basa en la propuesta de Javier Pascual. Consiste en fijar un espaciamiento máximo entre diafragmas, para lo cual se han definido unas fórmulas en función de los parámetros mencionados anteriormente. Además, en este tipo de dimensionamiento el torsor de diseño es el debido a la carga tributaria del diafragma, y la rigidez del diafragma debe ser, como mínimo, la que aporte un diafragma en celosía dimensionado por resistencia.

El dimensionamiento «flexible» consiste en espaciar los diafragmas un máximo de 4.5 m. Esto permite reducir el esfuerzo torsor de diseño aproximadamente a un 40 % del torsor por resistencia, aunque el valor preciso del factor de reducción se debe calcular en función del espesor equivalente de diafragma. Además, se debe comprobar la rigidez del diafragma según un criterio de rigidez mínima.

Como resultado del estudio se ha propuesto un límite de aplicación para las metodologías anteriores, siendo más restrictivo el del dimensionamiento flexible. Además, se indica que, si se excede dicho límite, se debe realizar un análisis refinado, ya que es posible que se requiera rigidez adicional a la que proporcionan los diafragmas en celosía dimensionados por resistencia.

Finalmente se han completado las recomendaciones con el estudio de la tensión debida a la distorsión que debe considerarse en el cálculo de fatiga. También se ha estudiado la tipología de diafragmas óptima en términos de peso y rigidez según la geometría de la sección.

7.2 Conclusiones

La investigación se ha dividido en tres grandes bloques de acuerdo a los objetivos fijados al principio de la investigación: cálculo de la distorsión, cálculo de diafragmas antidistorsión y recomendaciones para el control de la distorsión. A continuación, se presentan las principales conclusiones para cada uno de estos bloques.

Las principales conclusiones respecto al cálculo de la distorsión son las siguientes:

- La metodología más precisa para el cálculo de la distorsión es el empleo de elementos finitos multidimensionales. Sin embargo, el tiempo requerido para la preparación del modelo, el cálculo y el procesamiento de resultados hacen de ésta una metodología costosa que se debe reservar para situaciones excepcionales.
- La metodología más eficiente para el cálculo de la distorsión es el empleo de elementos finitos basados en la teoría de vigas, puesto que esta proporciona suficiente precisión y está en consonancia con las normativas vigentes. En ausencia de este tipo de elementos finitos se puede utilizar la analogía de la viga sobre lecho elástico. Para ello se recomienda emplear la formulación descrita en el apéndice B, ya que se han observado en las formulaciones existentes carencias y simplificaciones que en ciertos casos pueden conducir a diseños que no están del lado de la seguridad.
- En los puentes curvos se recomienda tener en cuenta la interacción entre torsión y distorsión. Las pruebas realizadas considerando ambos fenómenos por separado han dado lugar a imprecisiones notables. No obstante, si no se considera la interacción torsión-distorsión se recomienda ignorar los efectos debidos a la torsión no uniforme.
- En la literatura estudiada solo uno de los elementos finitos propuestos considera la interacción torsión-distorsión en puentes curvos. Sin embargo, este elemento presenta otras limitaciones, por lo que ha sido necesario desarrollar un nuevo elemento finito que incorpore la interacción entre todos los esfuerzos.
- Como es sabido, los modos de deformación de las vigas curvas y las ecuaciones que los rigen son diferentes de los de las viga rectas. Por lo tanto, se ha adaptado el

método para la obtención de las propiedades de la sección y los alabeos basado en elementos finitos a vigas curvas. Para sintetizar la formulación, se han empleado funciones de forma lineales y se ha recomendado una discretización elevada de la sección. Además, se han mantenido el centro de giro y la deformada transversal por distorsión de las vigas rectas.

- Para obtener la deformada transversal por distorsión, la ortogonalización de la distorsión respecto a la torsión uniforme es más estable que respecto a la torsión no uniforme cuando se consideran secciones iguales, pero con distintos espesores de chapa. Por esta razón se ha implementado la ortogonalización respecto a la torsión uniforme en el elemento finito. Además, las propiedades de la sección obtenidas son aplicables a la analogía de la viga sobre lecho elástico.
- El uso de elementos binodales y funciones polinómicas de Hermite proporciona suficiente precisión para calcular la distorsión en vigas curvas cuando los radios de curvatura en planta no son muy reducidos.
- Como es conocido, en las vigas curvas en planta las tensiones longitudinales causan una fuerza radial que, a su vez, produce una flexión transversal en la sección. Esta flexión altera la deformada modal, pero no altera significativamente las tensiones longitudinales debidas a la distorsión en radios moderados.
- El elemento finito propuesto permite el cálculo de la distorsión en tableros mixtos con un mayor grado de precisión que el proporcionado por la teoría clásica. Esta precisión se ha observado al compararlo con un modelo de elementos finitos tipo lámina.

En relación con el cálculo de los diafragmas se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La distribución de tensiones tangenciales en los diafragmas de alma llena es no homogénea cuando la sección es trapezoidal. Esto tiene implicaciones para el correcto diseño de este tipo de diafragmas, que son las siguientes:
 - La tensión tangencial en el eje de simetría es menor que la calculada suponiendo tensión tangencial uniforme.
 - La forma más adecuada de modelar los diafragmas de alma llena, cuando se utiliza el elemento finito propuesto, es emplear un elemento membrana de 4 nodos que únicamente considere la deformación tangencial. Dicho elemento logra un buen ajuste tanto a nivel de tensiones como de rigidez.

- Cuando se utiliza la analogía de la viga sobre lecho elástico la rigidez del diafragma se puede aproximar a partir de la deformación tangencial en el centro del mismo. Además, las tensiones pueden aproximarse por interpolación de movimientos según lo indicado en la sección 4.3.4.2.
 - Para dimensionar el diafragma se recomienda considerar la tensión tangencial calculada a un 40 % de la altura medida desde la fibra inferior.
 - Para un diseño más preciso, se recomienda realizar un modelo de elementos finitos multidimensionales refinado para comprobar las plastificaciones locales. Esto es especialmente importante si la forma trapezoidal del diafragma es pronunciada.
- Como es sabido, los diafragmas de alma llena no solo soportan cargas de distorsión, sino que también resisten cargas verticales derivadas del tránsito del tráfico sobre el puente. Su valor depende de la separación entre diafragmas y almas, y se pueden aproximar según lo indicado en el apartado 4.3.5 del presente trabajo.
 - En los diafragmas de alma llena se recomienda emplear el método de las tensiones efectivas para su dimensionamiento. En el apartado 4.3.6.6 se describe el procedimiento para calcular los diafragmas empleando dicha metodología. Además, se recomienda comprobar el respiro del diafragma, de manera análoga al respiro del alma, en ELS. El criterio de limitar la tensión tangencial a la tensión crítica en ELU se considera demasiado restrictivo de acuerdo con las pruebas realizadas.
 - Los diafragmas en celosía se pueden modelar con un alto grado de precisión utilizando elementos tipo barra. También se han proporcionado fórmulas para obtener su rigidez y esfuerzos de manera analítica.
 - En los diafragmas en celosía lo adecuado para dimensionar el diafragma es verificar cada montante entre arriostramientos.
 - Los marcos abiertos y cerrados se pueden modelar empleando elementos tipo viga. Sin embargo, el grado de precisión a nivel de esfuerzos y rigidez es menor al de los otros diafragmas anteriormente indicados. Por este motivo se realizan las siguientes recomendaciones:
 - Para emplear elementos tipo viga, la altura máxima de los elementos del marco debe ser inferior al mínimo entre un cuarto del canto del tablero o un cuarto de la longitud del panel. Si se superan dichas limitaciones, se recomienda realizar un cálculo independiente del diafragma utilizando un modelo de elementos finitos tipo lámina, y obtener la rigidez a través de dicho modelo.

- Para el cálculo de esfuerzos y rigidez, el ancho de chapa colaborante de la sección debe ser el mínimo entre un tercio del canto y la distancia entre diafragmas. Este criterio fue propuesto por H. Nakai [34], y se ha comprobado que es el más ajustado. Sin embargo, para verificar las secciones se deben tomar los anchos colaborantes indicados en las normativas.
- El momento flector de diseño de las secciones del marco debe ser la envolvente de los nudos superior e inferior. Además, se sugiere verificar este tipo de diafragmas empleando un modelo de elementos finitos tipo lámina cuando se excedan las dimensiones indicadas anteriormente.

Por último, se han establecido recomendaciones para el control de la distorsión. Las principales conclusiones son:

- A medida que aumenta la curvatura en planta o el ancho del tablero, también aumentan las tensiones longitudinales debidas a la distorsión.
- Las reacciones calculadas en los diafragmas no superan en ningún caso al torsor de diseño por resistencia, que es el torsor resultante de sumar las cargas tributarias en el diafragma. Además, cuando el espaciamiento entre diafragmas es inferior a 4.5 m, las reacciones son aproximadamente inferiores al 40 % del torsor de diseño por resistencia.
- Se proponen dos criterios de dimensionamiento para los diafragmas interiores antidistorsión. Cada uno de ellos se resume a continuación:
 - Dimensionamiento por resistencia. Este criterio propuesto por Pascual [3] consiste en fijar un espaciamiento máximo entre diafragmas y calcular estos utilizando el momento torsor de diseño por resistencia. Además, la rigidez del diafragma debe ser como mínimo la que aporte un diafragma en celosía dimensionado por resistencia. En el capítulo 6 de este trabajo se han revisado los espaciamientos máximos entre diafragmas siguiendo este criterio y se han ajustado en función del canto, la luz, el ancho y el radio en planta.
 - El dimensionamiento flexible. Consiste en espaciar los diafragmas como máximo 4.5 m, y dimensionar los diafragmas para una carga de aproximadamente un 40 % del torsor de diseño por resistencia. El valor preciso del factor de reducción depende de la rigidez del diafragma y se calcula según lo indicado en la sección 6.3.4.4. Además, en esta sección también se indica el criterio de rigidez mínima que debe cumplir el diafragma.

- Se ha definido un parámetro $\Lambda = b^2/(L \cdot C)$ de susceptibilidad a la distorsión que depende del ancho del tablero, la luz y el canto. Este parámetro permite identificar cuándo aplicar los distintos tipos de dimensionamiento anteriormente indicados. Los criterios se indican a continuación:
 - Si el parámetro Λ es inferior a 1, el puente es recto, y el ancho es inferior a 13.5 m el dimensionamiento puede ser flexible o por resistencia.
 - Cuando el parámetro Λ está entre 1 y 2, el puente es curvo, o el ancho del tablero es superior a 13.5 m, se debe realizar el dimensionamiento por resistencia.
 - Cuando el parámetro Λ es superior a 2, la susceptibilidad a la distorsión es elevada. Por lo tanto se debería realizar un análisis refinado, ya que es muy probable que, además de los criterios de dimensionamiento por resistencia, sea necesario que los diafragmas dispongan de rigidez adicional.
- Se debe calcular la distorsión en puentes curvos empleando un modelo de elementos finitos tipo lámina siempre y cuando se den simultáneamente las siguientes circunstancias:
 - $L > 45$ m
 - $L/R > 0.2$ rad
 - $S_D > L \cdot (0.3 - 0.25 \cdot L/R)$ m
- Es importante tener en cuenta las tensiones por distorsión en el cálculo de fatiga, ya que pueden llegar a incrementar un 50 % las tensiones longitudinales. Si se utiliza el FLM 3 del Eurocódigo, se puede adoptar de manera conservadora un valor de sobretensión de $\Delta\sigma_f = 15$ MPa. Además, este valor se puede reducir a $\Delta\sigma_f = 10$ MPa si el espaciamiento entre diafragmas no supera los 5 m.
- La celosía en V es la tipología de diafragma es más competitiva en secciones casi rectangulares, mientras que la celosía en K es más competitiva cuanto más acusada es la forma del trapecio. El límite entre ambas está aproximadamente en una relación entre el ancho inferior y ancho superior $\beta = 5/6$. Además, en cantos de hasta 1.5 m, el diafragma de alma llena puede resultar adecuado, especialmente si se desean diafragmas muy rígidos. En secciones donde el ancho del cajón es similar o inferior al canto, los diafragmas en Cruz de San Andrés pueden ser una opción a considerar.
- En los diafragmas en celosía la eficiencia estructural y peso de acero están relacionados en muchos casos. Por lo tanto, una elección adecuada del tipo de diafragma

conduce a diseños eficientes en peso, y además, más seguros desde un punto de vista de la distorsión.

7.3 Futuras líneas de investigación

El elemento finito propuesto logra mejorar la precisión de los elemento previamente propuestos para el cálculo de la distorsión en puentes curvos. Sin embargo, aún no se puede considerar válido para su implementación de manera regular y automatizada en el diseño de puentes. Los principales aspectos que deben revisarse son:

- Compatibilidad de deformaciones en los cambios de sección: Se ha observado que en las transiciones de sección, especialmente durante la fase metálica, se producen discontinuidades relevantes en las tensiones. A pesar de su importancia, apenas existe literatura al respecto, por lo que se debe avanzar en esa línea.
- Estudio de los problemas de convergencia en radios reducidos.
- Implementación de la deformación por cortante.

Además, entre los aspectos susceptibles de mejora en el elemento finito se pueden destacar:

- Adaptar el elemento al empleo de curvas isogeométricas, ya que cada vez son más populares los entornos BIM basados en este tipo de curvas.
- Extender el elemento a secciones no simétricas.
- Considerar los empujes al vacío en almas de vigas curvas, tanto a nivel de flexión transversal como de alma efectiva.

En cuanto a las recomendaciones para el control de la distorsión, estas se basan en el criterio que indica el Eurocódigo de limitar la distorsión al 10 % de las tensiones de flexión. Sin embargo, no se ha encontrado literatura que justifique dicho límite, que data del siglo pasado. Teniendo en cuenta los numerosos avances realizados desde entonces, especialmente a nivel computacional, se considera viable revisar los límites de distorsión mediante un análisis en rotura de puentes mixtos reales empleando elementos finitos multidimensionales.

Por último, el diseño de los propios diafragmas y rigidizadores transversales también presenta aspectos susceptibles de estudios ulteriores:

- En los rigidizadores transversales del alma y de las alas se recomienda estudiar la interacción entre los esfuerzos de rigidización y los esfuerzos de distorsión para determinar el umbral admisible de esfuerzos de distorsión.
- Se recomienda profundizar en el estudio de los marcos abiertos, que es la tipología que actualmente recomienda el SETRA, ya que la literatura al respecto es escasa en cuanto a criterios para su diseño preliminar.
- El empleo de algoritmos de optimización topológica [147] o morfogénesis computacional [148] ha resultado en diafragmas con formas romboidales y diafragmas curvos en planta. Estos diseños rompen con los más comunes hasta la fecha, lo que podría representar una línea de investigación novedosa que aporte soluciones interesantes.

APÉNDICE A

Listado de símbolos

Lista de letras latinas

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
A	Área de la sección	3.95,D.1	96, 453
A^c	Área de la sección curva	3.96	97
A_b	Área de la barra	-	185
A_c	Área encerrada por el cajón	B.3	406
A_y	Área de cortante de la sección	-	18
b	Ancho total del tablero	-	138, 406
b_0	Ancho de cajón rectangular	-	13
b_b	Ancho inferior del cajón	-	137, 406
b_c	Ancho del voladizo del cajón	-	406
b_s	Ancho superior del cajón	-	137, 406
b_t, b_d	Cargas de bimomentos	3.118	104
B_t, B_d	Bimomentos torsores y distorsores	3.90,3.173	94, 125
B_t^T, B_d^T	Bimomentos torsores y distorsores para el cálculo de tensiones	3.101,3.175	99
b_w	Longitud del alma	-	406
C	Canto del cajón medido entre fibras extremas de la sección	-	205
e	Excentricidad de la carga	-	13

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
E	Módulo de elasticidad longitudinal del material	-	65
E_s	Módulo de elasticidad transversal del material	3.14	65
F_{dx}	Resultante de distorsión en x	3.90,3.173	94, 125
F_{dx}^T	Resultante de distorsión en x para el cálculo de tensiones	3.101,3.175	99
F_z	Axil	3.90,3.173	94, 125
F_z^T	Axil para el cálculo de tensiones	3.101,3.175	99
G	Módulo de elasticidad transversal del material	-	65
h	Altura del cajón de fibra media del ala inferior a la fibra media de la losa superior	-	138, 406
h_b	Altura del cajón de fibra media del ala inferior al centro de gravedad	-	406
h_D	Altura del diafragma	-	165
$\overline{H}_{ij}$	Función de interpolación polinómica de Hermite	-	111
h_s	Altura del cajón desde el centro de gravedad a la fibra media de la losa superior	-	406
h_t	Distancia en perpendicular de la pared al centro de giro	-	76
I_d	Inercia de alabeo de distorsión	B.62,D.50	410, 423
I_i^c	Inercias simples de la viga $I_x^c, I_y^c, I_t^c, I_d^c, I_u^c$	3.98,D.81	97, 494
I_{ij}^c	Inercias compuestas de la viga $I_{xy}^c, I_{xt}^c, I_{xd}^c, I_{xu}^c, I_{yt}^c, I_{yd}^c, I_{yu}^c, I_{td}^c, I_{tu}^c, I_{du}^c$	3.99,D.81	98, 494
I_s	Inercia transversal de una pared	-	407, 410
I_t	Inercia de alabeo de torsión	D.17	20, 466
I_{td}	Inercia cruzada de alabeo torsión-distorsión	D.58	29, 481
I_w^c	Inercias simples de alabeos compuestos de la viga I_a^c, I_n^c, I_θ^c	3.145	116
I_{ww}^c	Inercias cruzadas de alabeos compuestos de la viga $I_{ya}^c, I_{yn}^c, I_{y\theta}^c, I_{an}^c, I_{a\theta}^c, I_{at}^c, I_{au}^c, I_{ad}^c, I_{n\theta}^c, I_{nt}^c, I_{nu}^c, I_{nd}^c, I_{\theta t}^c, I_{\theta u}^c, I_{\theta d}^c$	3.146	116
I_x, I_y, I_{xy}	Inercias de flexión	3.95,D.3	96, 453

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
J_d	Inercia de distorsión uniforme	D.45	29, 478
J_d^c	Inercia de distorsión uniforme curva	3.106,D.85	100, 495
J_t	Inercia de torsión uniforme	D.16	20, 465
J_t^c	Inercia de torsión uniforme curva	3.106,D.85	100, 495
J_{td}	Inercia cruzada de torsión-distorsión uniforme	D.55	29, 481
J_{td}^c	Inercia cruzada curva de torsión-distorsión uniforme	3.106,D.85	100, 495
$\overline{\overline{K_b}}$	Matriz de rigidez de una barra articulada	4.49	185
K_d	Rigidez de marco de la sección	3.163,B.61	121, 410
K_D	Rigidez del diafragma	3.182,B.61	128, 428
$\overline{\overline{K_G}}$	Matriz de rigidez tangencial de la sección	3.59	82
$\overline{\overline{K_G^c}}$	Matriz de rigidez tangencial curva de la sección	3.50	78
$\overline{\overline{K_m}}$	Matriz de rigidez del diafragma antidistorsión	-	128
$\overline{\overline{K_s}}$	Matriz de rigidez de la sección	-	81
K_δ	Rigidez de marco en la dirección de la diagonal	-	423
L	Luz del vano principal	-	281
L_b	Longitud de la barra	-	185
L_d	Longitud de la diagonal del cajón	B.2	138, 406
L_{eq}	Longitud equivalente donde se aplica la sobrecarga	4.29	160
L_p	Longitud de un elemento de pared	-	78
m_d	Carga distorsora	3.118,B.49	104, 418
M_d	Momento distorsor	3.121,3.178	107
M_{du}	Momento distorsor uniforme	3.91,3.176	94
M_{du}^T	Momento distorsor uniforme para el cálculo de tensiones	3.107	100
M_{dw}	Momento distorsor no uniforme	3.121	107
$\overline{m_s}$	Momentos transversales	B.68	425
m_t	Carga torsora	3.118	104

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
M_T	Momento torsor en el diafragma	4.4	137, 428
$M_{T,Ed}$	Momento torsor de diseño de diafragmas	-	312
$M_{T,r}$	Momento torsor de diseño de diafragmas por resistencia	6.6	279
$M_{T,Rd}$	Momento torsor resistente del diafragma	-	367
M_t	Momento torsor	3.121,3.178	107
M_{tu}	Momento torsor uniforme	3.91,3.176	94
M_{tu}^T	Momento torsor uniforme para el cálculo de tensiones	3.107	100
M_{tw}	Momento torsor no uniforme	3.121	107
m_x, m_y	Cargas flectoras	3.118	104
M_x, M_y	Momentos flectores	3.90,3.173	94, 125
M_x^T, M_y^T	Momentos flectores para el cálculo de tensiones	3.101,3.175	99
$\bar{n}$	Vector unitario perpendicular a la pared $(-t_y, t_x)$	-	57
N_b	Esfuerzo axial en una barra del diafragma	-	188
N_i	Función de forma	-	107, 143
$\bar{p}$	Fuerzas exteriores repartidas (p_x, p_y, p_z)	-	102
$\bar{P}$	Fuerzas exteriores puntuales (P_x, P_y, P_z)	-	102
Q_a^c, Q_n^c, Q_θ^c	Momentos compuestos de primer orden curvos	3.144	116
q_D	Carga vertical de diseño del diafragma	4.45	182
q_{ll}	Carga vertical repartida sobre diafragmas debida a las cargas de tráfico	4.26	153
q_{sc}	Carga vertical repartida sobre diafragmas debida a la sobrecarga	4.30	155
Q_t^c, Q_d^c, Q_u^c	Momentos de primer orden curvos	3.97	97
q_{ts}, q_{bs}, q_{ws}	Carga unitaria en ala superior, inferior y almas respectivamente debidas a la distorsión	4.2	137
q_v	Carga vertical repartida sobre diafragmas debida a vehículos pesados	4.27	155
Q_x, Q_y	Momentos de primer orden	3.95	96

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
Q_x^c, Q_y^c	Momentos de primer orden de flexión curvos	3.96	97
q_x, q_y, q_z	Resultantes de fuerzas exteriores en el eje de la viga	3.117	103
r	Radio en planta de un punto de la sección	-	57
R	Radio en planta del eje de la viga	-	57
R_1	Radio en planta del punto inicial de un elemento de pared $R_1 = R - x_1$	-	78
r_s, r_b, r_1	Variables auxiliares	B.6	407
R_d	Resultante de deformación transversal	3.92,3.181	94
R_D	Reacción en el diafragma	3.183	130
s	Coordenada a lo largo de una pared	-	57
S	Fuerza de distorsión en la dirección de la diagonal	B.50	13, 419
S_D	Espaciamiento entre diafragmas	-	44
$S_{D,0}$	Espaciamiento entre diafragmas en puentes rectos de ancho inferior a 11.3 m	6.10	308
$S_{D,c}$	Espaciamiento entre diafragmas en puentes curvos	6.15	333
$S_{D,r}$	Espaciamiento entre diafragmas en puentes rectos	6.16	338
$\bar{t}$	Vector unitario con la dirección de la pared (t_x, t_y)	-	57
t	Espesor de pared	-	66
T	Relación entre reacción máxima en diafragmas y reacción de diseño por resistencia	6.9	279, 292
t_b	Espesor del ala inferior del cajón	-	406
$\overline{T}_b$	Matriz de transformación de una barra articulada	4.50	185
t_c	Espesor de las chapas superiores del cajón	-	406
t_d	Deformación angular unitaria debida a la distorsión	3.66	86
t_d^c	Deformación angular unitaria debida a la distorsión en viga curva	3.87	93

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
t_D	Espesor del diafragma	-	143
t_{eq}	Espesor equivalente de diafragma	6.4	279
$t_{eq,min}$	Espesor equivalente de diafragma mínimo en dimensionamiento flexible	6.11	310
T_f	Relación mínima entre torsor de diseño flexible y torsor de diseño por resistencia	6.12	312
t_l	Espesor de la losa superior del cajón	-	406
t_t	Deformación angular unitaria debida a la torsión	3.65	86
t_t^c	Deformación angular unitaria debida a la torsión en viga curva	3.86	93
t_w	Espesor de las almas del cajón	-	406
$\bar{u}$	Movimientos en el eje de la viga en coordenadas globales (u_x, u_y, u_z)	-	57
U	Energía de deformación	3.16	66
U_ε	Energía de deformación longitudinal	3.17	66
U_γ	Energía de deformación tangencial	3.18	66
U_s	Energía de deformación transversal	3.19	67
$\bar{u}_d$	Movimiento unitario de distorsión en coordenadas globales (u_{dx}, u_{dy}) o coordenadas locales (u_{ds}, u_{dn})	-	81, 408
$u_{d\theta}$	Giro unitario de distorsión en un punto de la pared	3.77	86
$\bar{u}_D$	Movimientos en los nodos representativos de la sección	4.1	128, 136
$\bar{u}_i$	Movimientos en los nodos	3.130	107
$\bar{u}_s$	Movimiento unitario de la sección en coordenadas globales (u_{sx}, u_{sy}) o coordenadas locales (u_s, u_n)	-	57
u_{tn}	Movimiento unitario de torsión en perpendicular a la pared	3.56	81

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
$\bar{v}$	Movimientos en el centro de la pared de punto cualquiera de la sección en coordenadas globales (v_x, v_y, v_z) .	3.78	57
$\bar{v}_s$	Movimientos en un punto cualquiera de la sección en coordenadas locales (v_s, v_n, v_{sz}) .	3.79	58
V_s	Función de intensidad de la distorsión que toma como referencia el movimiento unitario en la dirección del alma	-	22
V_x, V_y	Esfuerzos cortantes	3.121,3.175	107
W	Energía de las acciones exteriores	-	91
w_a^c, w_θ^c	Funciones de alabeo compuestas	3.135	113
w_d	Función de alabeo de distorsión	-	81, 411
w_d^c	Función de alabeo curvo de distorsión	-	81
w_n^c	Función de alabeo curvo de axil	3.25	68
w_t	Función de alabeo de torsión	-	21
w_t^c	Función de alabeo curvo de torsión	-	76
w_x^c	Función de alabeo curvo de flexión transversal	3.34	71
w_y^c	Función de alabeo curvo de flexión longitudinal	3.40	74
x_g, y_g	Centro de gravedad de la sección	D.2	453
x_t, y_t	Centro de giro de la sección	D.11	76, 461
y_s	Distancia de un punto de la pared a la fibra media de esta.	-	63, 408

Lista de letras griegas

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
β	Ratio entre el ancho inferior del cajón y el ancho superior	B.4	137, 407
β^*	Ratio entre el alabeo inferior del cajón y el alabeo superior	B.25	413
δ_d	Movimiento en la dirección de la diagonal	B.42	137, 416
$\Delta\sigma$	Ratio de sobretensión	6.3	279, 291
$\Delta\sigma_d$	Sobretensión en la viga respecto a la tensión media	6.1	278
$\Delta\sigma_{D,f}$	Sobretensión por fatiga en la posición de los diafragmas respecto a la tensión media	-	358
$\Delta\sigma_f$	Sobretensión por fatiga en la viga respecto a la tensión media	-	358
ε_s	Deformación transversal	3.10	64, 92
ε_z	Deformación longitudinal	3.6,3.10	61, 92
η	Parámetro de Dabrowski	B.54	420
γ_d	Función de intensidad de la distorsión que toma como referencia la deformación angular unitaria de la sección	B.40	22, 416
γ_{nz}	Deformación tangencial perpendicular al plano de la pared	3.13	64
γ_{sz}	Deformación tangencial en el plano de la pared	3.8,3.11	62, 92
γ_{yz}	Deformación tangencial global	-	18
Λ	Parámetro de distorsión	6.17	355
ν	Módulo de Poisson del material	-	65
ϕ	L/R	-	313
Π	Energía total del sistema	3.80	91

Símbolo	Descripción	Eq.	Página
ψ_d	Función de intensidad de la distorsión que toma como referencia el movimiento vertical unitario en el vértice superior del alma	-	22, 81
$\sigma_{cr,c,D}$	Tensión longitudinal crítica de abolladura del diafragma como columna	4.42	174
$\sigma_{cr,p,D}$	Tensión longitudinal crítica de abolladura del diafragma como placa	4.34	167
σ_m	Tensión longitudinal media en el ala	6.2	279
$\sigma_{m,f}$	Tensión longitudinal media en el ala por fatiga	-	358
σ_s	Tensión transversal	3.15,3.109	65
σ_z	Tensión longitudinal	3.15,3.102	65, 99
$\tau_{cr,D}$	Tensión tangencial crítica del diafragma	4.31	164
τ_D	Tensión tangencial en un punto del diafragma	4.22	150
τ_{sz}	Tensión tangencial	3.15,3.108	65
$\bar{\theta}$	Giros en coordenadas globales $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$	-	57
θ_w	Ángulo que forma el alma con la vertical	-	406
ξ	Función de intensidad del modo de deformación	-	67

APÉNDICE B

Revisión del cálculo de distorsión en puentes mixtos

B.1 Introducción

El objetivo de este apéndice es definir los parámetros necesarios para calcular la distorsión en puentes mixtos de sección trapezoidal usando la analogía de la viga sobre lecho elástico. Esto se realizará conforme a las tres formulaciones descritas en el apartado 2.2.2.5. También se definirán los coeficientes que permiten pasar de una formulación a otra en base a la relación geométrica entre movimientos y a la relación entre las cargas aplicadas.

En primer lugar se explicarán los parámetros relacionados con la viga, y posteriormente se calculará la rigidez y la obtención de esfuerzos en diafragmas para algunas de las tipologías más habituales. Estas tipologías son los diafragmas de alma llena, en Cruz de San Andrés, en K y en V.

Por último, se mostrará un ejemplo de aplicación, donde se comparará la formulación propuesta con alguna de las formulaciones existentes, así como un modelo de láminas.

B.2 Cálculo de parámetros de la viga sobre lecho elástico

B.2.1 Geometría y materiales de la sección

En primer lugar se va a definir la sección objeto de estudio, que es un cajón mixto de sección trapezoidal. Eso implica que los materiales considerados van a ser hormigón en la losa superior y acero en el resto. Concretamente se va a denominar E_c al módulo de elasticidad del hormigón y E_a al módulo de elasticidad del acero. Este último se considerará el material de referencia para la homogeneización en adelante. Además, se van

a definir los módulos de elasticidad transversal de E_{sc} y E_{sa} donde se va a asumir un comportamiento de placa [63]. El cálculo del módulo de elasticidad transversal E_{si} de un material i se realiza a partir del módulo de elasticidad longitudinal E_i y el coeficiente de Poisson ν_i empleando la relación:

$$E_{si} = E_i / (1 - \nu_i^2) \quad (\text{B.1})$$

A nivel geométrico, el ancho total del tablero es b y se compone de dos voladizos de ancho b_c y un cajón central de ancho b_s en su parte superior y b_b en su parte inferior. El canto total medido de centro de la losa superior al centro del ala inferior es h , que a su vez se puede dividir en la distancia que va desde el centro de gravedad (y_g) hasta la fibra media superior (h_s), y la distancia que va desde el centro de gravedad a la fibra inferior (h_b). Además, el espesor de la losa superior es t_l , el espesor del ala inferior es t_b y el espesor del alma t_w . Se ha considerado la posibilidad de que el cajón metálico se encuentre cerrado en su parte superior disponiendo una chapa de espesor t_c que va de un alma al otro. Dicha chapa superior también permite tener en cuenta la existencia de platabandas superiores metálicas en el cajón. Para ello se debe considerar que su área es equivalente al área de las platabandas y la chapa de cierre si la hubiera. Todo lo anterior se muestra en la figura B.1.

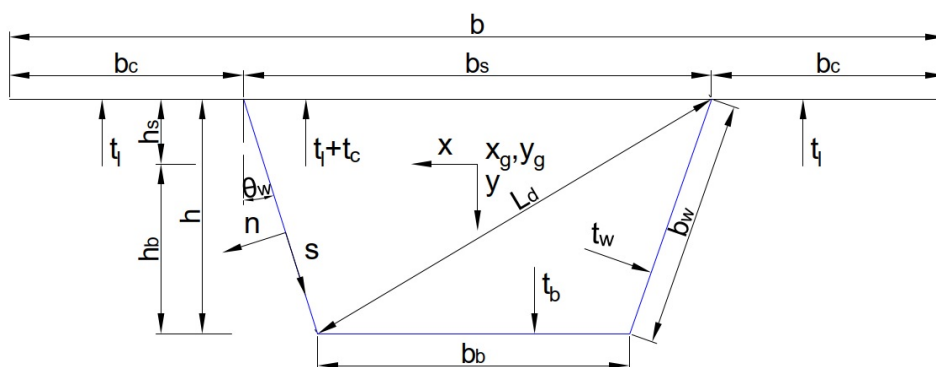


FIGURA B.1 Geometría de la sección

En el esquema anterior también se incluye la longitud del alma (b_w), el ángulo que forma el alma con la vertical (θ_w) y la longitud de la diagonal (L_d). Su cálculo se muestra a continuación:

$$b_w = \sqrt{\left(\frac{b_s - b_b}{2}\right)^2 + h^2} \quad \theta_w = \arccos\left(\frac{h}{b_w}\right) \quad L_d = \sqrt{\left(\frac{b_s + b_b}{2}\right)^2 + h^2} \quad (\text{B.2})$$

Además, otro parámetro que se va a emplear es el área encerrada por el cajón (A_c) que se define de la siguiente manera:

$$A_c = \frac{b_s + b_b}{2} \cdot h \quad (\text{B.3})$$

El ratio entre ancho inferior y ancho superior que se denomina β y se define como:

$$\beta = \frac{b_b}{b_s} \quad (\text{B.4})$$

Y por último, también es necesario para el cálculo de las propiedades definir las inercias locales de las paredes (I_s). Estas son las siguientes:

$$I_{s,s} = \frac{E_{sc}}{E_{sa}} \cdot \frac{t_l^3}{12} + \frac{t_c^3}{12} \quad (\text{B.5a})$$

$$I_{s,b} = \frac{t_b^3}{12} \quad (\text{B.5b})$$

$$I_{s,w} = \frac{t_w^3}{12} \quad (\text{B.5c})$$

Donde $I_{s,s}$ es la suma de la inercia de la losa superior y las chapas adheridas a la losa superior, $I_{s,b}$ es la inercia del ala inferior e $I_{s,w}$ es la inercia del alma.

Haciendo uso de estas inercias, y de la geometría anterior, se van a calcular las variables auxiliares r_s, r_b, r_1 :

$$r_s = \frac{b_s \cdot I_w}{b_w \cdot I_{s,s}} \quad (\text{B.6a})$$

$$r_b = \frac{b_b \cdot I_w}{b_w \cdot I_{s,b}} \quad (\text{B.6b})$$

$$r_1 = \frac{2 + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \beta^2 + r_s + r_b \cdot \beta^2}{\beta \cdot [(r_s + 2) \cdot (r_b + 2) - 1]} \quad (\text{B.6c})$$

Por último, indicar que en el sistema de referencia considerado la dirección z es la dirección del eje de la viga y la dirección positiva de y coincide con la dirección de la gravedad. Además, la dirección de la pared se va a denominar s y la dirección perpendicular a la pared n . Lo anterior también se ha mostrado en la figura B.1.

B.2.2 Planteamiento de la ecuación

Existen numerosas alternativas para obtener la ecuación diferencial de la viga sobre lecho elástico. En esta caso se va a emplear el principio de los trabajos virtuales [127]. Mediante este principio se puede obtener la igualdad entre la suma del trabajo efectuado

por las fuerzas exteriores y el trabajo de deformación debido a las tensiones internas. Como fuerzas exteriores se van a considerar las fuerzas (P) en el contorno de la viga (A), y, además, el trabajo de deformación interno se calcula en todo el volumen (V) de la viga.

$$\int_A \bar{P} \cdot \delta \bar{v} \cdot dA = \int_V \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot dV \quad (\text{B.7})$$

La distorsión, de manera genérica, se va a representar como función de intensidad de la distorsión (ξ). Los movimientos transversales en la viga, o movimientos contenidos en el plano perpendicular al eje de la viga, se pueden expresar como la multiplicación de dicha función de intensidad por un movimiento unitario ($\bar{u}_d$). Se añadirá el subíndice x o y para referirse a los movimientos en coordenadas cartesianas y s o n para referirse a los movimientos en las coordenadas locales de la pared. En el caso del movimiento longitudinal, la función de intensidad que multiplica el movimiento longitudinal unitario, o alabeo (w_d), es la derivada primera de la función de intensidad (ξ^I) con signo negativo. Es decir, el campo de movimientos total de la viga ($\bar{v}$) se pueden expresar como:

$$\bar{v}(x, y, z) = (\xi \cdot u_{dx}, \xi \cdot u_{dy}, -\xi^I \cdot w_d) \quad (\text{B.8})$$

Una condición transversal a todas las formulaciones de distorsión en secciones cajón es que el alabeo libre de la sección se obtiene suponiendo que no existe deformación tangencial. Por lo tanto, las deformaciones asociadas al campo de movimientos anterior son únicamente las deformaciones debidas a la deformación longitudinal (ε_z) y las deformaciones debidas a la flexión transversal (ε_s). En el caso de la viga curva las deformaciones longitudinales se calculan empleando la siguiente expresión [88]:

$$\varepsilon_z = \frac{R}{R-x} \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_x}{R} \right) \quad (\text{B.9})$$

Donde R es el radio en planta de la curva.

En lo que respecta a las deformaciones transversales, estas se corresponden con la flexión local de las paredes, y por lo tanto se calculan a partir de la curvatura de la pared (u_{dn}^{II}), multiplicada por la distancia a la fibra neutra de la pared (y_s), y a su vez multiplicada por la distorsión de la sección (ξ).

$$\bar{\varepsilon}(z, s) = \left(\frac{R}{R-x} \left(-\xi^{II} \cdot w_d - \frac{\xi \cdot u_{dx}}{R} \right), -\xi \cdot y_s \cdot \frac{\partial^2 u_{dn}}{\partial s^2} \right) \quad (\text{B.10})$$

Multiplicando la deformación anterior por el módulo elástico, y añadiendo las tensiones debidas a la flexión, se llega a la siguiente definición de las tensiones en la viga.

$$\bar{\sigma}(z, s) = \left(E \cdot \frac{R}{R-x} \left(-\xi^{II} \cdot w_d - \frac{\xi \cdot u_{dx}}{R} - E \cdot \frac{M_x \cdot y}{E_0 \cdot I_x} \right), -E_s \cdot \xi \cdot y_s \cdot \frac{\partial^2 u_{dn}}{\partial s^2} \right) \quad (\text{B.11})$$

Para obtener el trabajo de deformación (U_z) debido a las tensiones longitudinales en la viga se van a sustituir las tensiones calculadas en la ecuación B.11 y deformaciones calculadas en la ecuación B.10 en la ecuación del trabajo virtual B.7. Sabiendo además que el diferencial de volumen de una viga curva es $dV = ((R-x)/R) \cdot dA \cdot dz$, se puede expresar dicho trabajo como:

$$U_z = \int_L \int_S \left(E \cdot \frac{R}{R-x} \left(-\xi^{II} \cdot w_d - \frac{\xi \cdot u_{dx}}{R} - E \cdot \frac{M_x \cdot y}{E_0 \cdot I_x} \right) \right) \cdot \frac{R}{R-x} \left(-\xi^{II} \cdot w_d - \frac{\xi \cdot u_{dx}}{R} \right) \cdot \frac{R-x}{R} \cdot dA \cdot dz \cdot \delta \xi \quad (\text{B.12})$$

Donde los subíndice L y S de las integrales se refieren a la integral extendida a al eje de la viga y a la sección respectivamente.

A partir del desarrollo en serie de Taylor, y en la misma línea que otros autores como Kang [88], se puede aproximar $R/(R-x) \approx (R+x)/R$. Por lo tanto, se puede expresar la ecuación B.12 como:

$$U_z = \int_L \int_S \left(E \cdot \frac{R+x}{R} \left(-\xi^{II} \cdot w_d - \frac{\xi \cdot u_{dx}}{R} \right)^2 - E \cdot \frac{M_x \cdot y}{E_0 \cdot I_x} \cdot \frac{R+x}{R} \cdot \left(-\xi^{II} \cdot w_d - \frac{\xi \cdot u_{dx}}{R} \right) \right) \cdot dA \cdot dz \cdot \delta \xi \quad (\text{B.13})$$

Debido a que la sección es simétrica, la función de alabeo es antisimétrica. Además, en dicha función de alabeo se va a imponer la condición de que la resultante de flectores sea nula, lo que se traduce en que $\int w_d \cdot x \cdot dA = \int w_d \cdot y \cdot dA = 0$. También la multiplicación de la función de alabeo w_d por la deformada modal u_{dx} es nula, ya que para una misma cota el movimiento es constante pero el alabeo es antisimétrico. Por último, se van a despreciar las multiplicaciones donde el denominador sea el radio elevado al cuadrado y la integral $\int w_d \cdot x \cdot y \cdot dA \approx 0$.

Aplicando las simplificaciones anteriores, integrando por partes, y sustituyendo ahora

todos los términos, se llega a expresar el trabajo virtual en la viga como:

$$\delta\xi \cdot \int_L \left(\left(\int_s E \cdot w_d^2 \cdot t \cdot ds \right) \cdot \xi^{IV} + \left(\int_s E_s \cdot I_s \cdot \frac{\partial^4 u_{dn}}{\partial s^4} \cdot ds \right) \cdot \xi \right) \cdot dz = \delta\xi \cdot \int_L \left(\int_s \bar{P} \cdot \bar{u}_d \cdot \frac{R-x}{R} \cdot ds - \frac{M_x}{R} \int_s \frac{E \cdot y}{E_0 \cdot I_x} \cdot u_{dx} \cdot t \cdot ds \right) dz \quad (\text{B.14})$$

Donde el subíndice s de la integral se refiere a la integral extendida a la fibra media de la sección. Además se ha denominado I_s a la inercia local de la pared.

Despejando el término $\delta\xi$, introduciendo cuatro nuevos términos y derivando se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$E_0 \cdot I_d \cdot \xi^{IV} + E_{s0} \cdot K_d \cdot \xi = m_d - \eta \cdot \frac{M_x}{R} \quad (\text{B.15})$$

Donde el término I_d es la inercia a distorsión de la sección que se define como:

$$I_d = \int_s \frac{E}{E_0} \cdot w_d^2 \cdot t \cdot ds \quad (\text{B.16})$$

El término K_d es lo que se conoce como rigidez de marco de la sección y se definirá en B.61.

La carga distorsora (m_d) se obtiene como la suma, para todas las cargas aplicadas, de la multiplicación escalar de las cargas puntuales (P) o distribuidas (p) por el movimiento unitario en el punto de aplicación (u_d). Expresado de forma matemática:

$$m_d = \int_s \bar{p} \cdot \bar{u}_d \cdot \frac{R-x}{R} \cdot ds + \sum \bar{P} \cdot \bar{u}_d \quad (\text{B.17})$$

Por último, η es el coeficiente de Dabrowski que transforma los momentos flectores en la viga en carga distorsora cuando las vigas son curvas en planta. Este se define como:

$$\eta = \int_s \frac{E}{E_0} \cdot \frac{y}{I_x} \cdot u_{dx} \cdot dA \quad (\text{B.18})$$

La ecuación B.15 se corresponde con la forma genérica de expresar la ecuación diferencial. Dependiendo del movimiento de referencia considerado cada uno de los términos adoptará un valor, y para pasar de una a otra formulación se aplicarán unos coeficientes que dependen de la relación entre movimientos y cargas. Concretamente, se va a aplicar la siguiente nomenclatura dependiendo de la formulación:

$$\begin{aligned}
 V_s = 1 & \rightarrow E_0 \cdot I_{dV} \cdot V_s^{IV} + E_{s0} \cdot K_{dV} \cdot V_s = m_{dV} - \eta_V \cdot \frac{M_x}{R} \\
 \gamma_d = 1 & \rightarrow E_0 \cdot I_{d\gamma} \cdot \gamma_d^{IV} + E_{s0} \cdot K_{d\gamma} \cdot \gamma_d = m_{d\gamma} - \eta_\gamma \cdot \frac{M_x}{R} \\
 \psi_d = 1 & \rightarrow E_0 \cdot I_{d\psi} \cdot \psi_d^{IV} + E_{s0} \cdot K_{d\psi} \cdot \psi_d = m_{d\psi} - \eta_\psi \cdot \frac{M_x}{R}
 \end{aligned}$$

La obtención de los términos de las ecuaciones anteriores se explica a continuación.

B.2.3 Cálculo de alabeos

En primer lugar se va a calcular la función de alabeo (w_d) vinculada a la distorsión. Para obtener dicha función se van a realizar las siguientes hipótesis que son comunes a cualquier formulación:

- La resultante de tensiones y momentos en la sección es nula:

$$\iint E \cdot w_d \cdot dA = \iint E \cdot w_d \cdot x \cdot dA = \iint E \cdot w_d \cdot y \cdot dA = 0 \quad (B.19)$$

- Cuando el alabeo es libre no existe deformación tangencial en la sección:

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial v_z}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial z} = -\xi^I \cdot \left(\frac{\partial w_d}{\partial s} - u_{ds} \right) = \frac{\partial w_d}{\partial s} - u_{ds} = 0 \quad (B.20)$$

- El movimiento es uniforme en cada una de las paredes de longitud L que van desde un nodo i a un nodo j . Esto permite expresar la condición anterior de deformación angular nula como la igualdad entre la variación del alabeo en una pared y el movimiento en la dirección de la pared:

$$\frac{w_j - w_i}{L} = u_{ds} \quad (B.21)$$

De las hipótesis anteriores se deduce que, al no existir ni axil ni momento flector de eje horizontal, la función de alabeo es antisimétrica respecto al eje central vertical de la sección como se muestra en la figura B.2.

La condición de deformación angular nula establece que la variación de alabeo sea lineal en cada una de las paredes. Por lo tanto, la función de alabeo completa de la sección se puede expresar a partir de los alabeos w_1 y w_2 y w_3 . No obstante w_3 se puede calcular directamente a partir de w_1 , ya que la función de alabeo es lineal en toda la losa superior

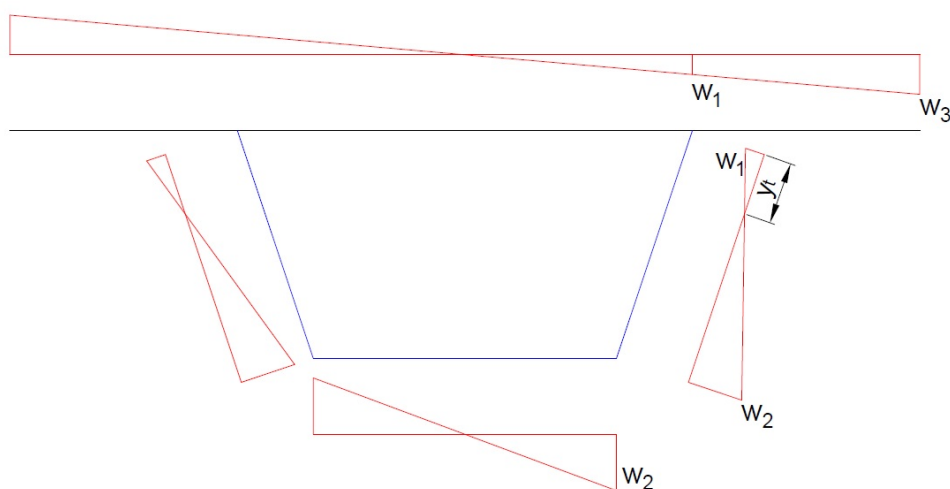


FIGURA B.2 Alabeo de la sección

por lo tanto:

$$w_3 = w_1 \cdot \frac{b}{b_s} \quad (\text{B.22})$$

Consecuentemente, es posible expresar la función de alabeo de la sección completa a partir únicamente de los alabeos w_1 y w_2 .

Por último, la condición de momento flector de eje vertical nulo permite obtener la relación entre w_1 y w_2 . Para ello se plantea en primer lugar el equilibrio de momentos respecto al eje vertical:

$$\begin{aligned} & \frac{w_1 \cdot b}{4} \cdot t_l \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{E_c}{E_s} + \frac{w_1 \cdot b_s}{4} \cdot t_c \cdot \frac{b_s}{3} - \frac{w_2 \cdot b_b}{4} \cdot t_b \cdot \frac{b_b}{3} \\ & + w_1 \cdot b_w \cdot t_w \cdot \left(\frac{b_s}{6} + \frac{b_b}{12} \right) - w_2 \cdot b_w \cdot t_w \cdot \left(\frac{b_s}{12} + \frac{b_b}{6} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Con el fin de simplificar la ecuación anterior, van a emplear los siguientes términos:

$$\alpha_l = \frac{b^3 \cdot t_l}{b_w \cdot t_w \cdot b_s^2} \cdot \frac{E_c}{E_s} \quad (\text{B.24a})$$

$$\alpha_t = \frac{b_s \cdot t_c}{b_w \cdot t_w} \quad (\text{B.24b})$$

$$\alpha_b = \frac{b_b \cdot t_b}{b_w \cdot t_w} \quad (\text{B.24c})$$

Dividiendo la ecuación B.23 entre $b_w \cdot t_w \cdot b_s / 12$, y haciendo uso de los términos anteriores, se obtiene la siguiente relación entre w_1 y w_2 .

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha_b \cdot \beta + 2 \cdot \beta + 1}{\alpha_l + \alpha_t + \beta + 2} = \frac{1}{\beta^*} \quad (\text{B.25})$$

Donde se ha definido el término β^* que se empleará en adelante para referirse a relación entre el alabeo superior e inferior.

Una vez definida la relación entre los alabeos w_1 y w_2 se va a proceder a calcular el valor que adopta cada uno. Este valor dependerá de la formulación que se emplee, ya que existe una relación directa entre el alabeo y los movimientos en la sección. En este caso, y por simplicidad, se va a considerar la deformación unitaria en la dirección del alma, ya que la aplicación la ecuación B.21 para establecer la relación entre w_1 y w_2 es prácticamente directa. Si se toma como pared el alma, el movimiento en la dirección de la pared es unitario $u_{ds} = 1$, la longitud de la pared es b_w y los alabeos en los extremos son w_1 y w_2 . Por lo tanto:

$$\frac{w_2 + w_1}{b_w} = 1 \quad (\text{B.26})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones B.25 y B.26 se puede obtener el valor de w_1 y w_2 .

Concretamente, w_1 se define como:

$$w_1 = \frac{\alpha_b \cdot \beta + 2 \cdot \beta + 1}{\alpha_b \cdot \beta + \alpha_l + \alpha_t + 3 \cdot (\beta + 1)} = \frac{b_w}{1 + \beta^*} \quad (\text{B.27})$$

Y w_2 se obtiene directamente:

$$w_2 = b_w - w_1 = \frac{b_w \cdot \beta^*}{1 + \beta^*} \quad (\text{B.28})$$

La integral de los alabeos calculados anteriormente extendida a toda la sección es:

$$I_{d0} = \iint w_d^2 \cdot dA = \frac{b_w^3 \cdot t_w}{3} \cdot \frac{(\alpha_l + \alpha_t + 2) + \beta^{*2} \cdot (\alpha_b + 2) - 2 \cdot \beta^*}{(1 + \beta^*)^2} \quad (\text{B.29})$$

Es importante indicar que la integral calculada no es la inercia correspondiente a la formulación de movimiento unitario en la dirección del alma, ya que en dicha formulación la inercia depende también de las cargas aplicadas, como se explicará con posterioridad.

La función de alabeo vinculada a los otras formulaciones, así como la inercia a distorsión,

se obtendrá a partir de los coeficientes de paso y su cálculo se muestra en el apartado B.2.8.

B.2.4 Movimientos

Se van a calcular en este apartado los movimientos en el cajón debidos a la distorsión.

Estos movimientos se pueden dividir según las direcciones. Los subíndices x e y se refieren a los ejes cartesianos, mientras que s y n se corresponden con la dirección del alma y su perpendicular. También se han dividido los movimientos según su posición en el cajón, donde t se corresponde con la parte superior, b con la parte inferior y w con el punto medio del alma. Aplicando esta nomenclatura, se han representado los movimientos en la figura B.3.

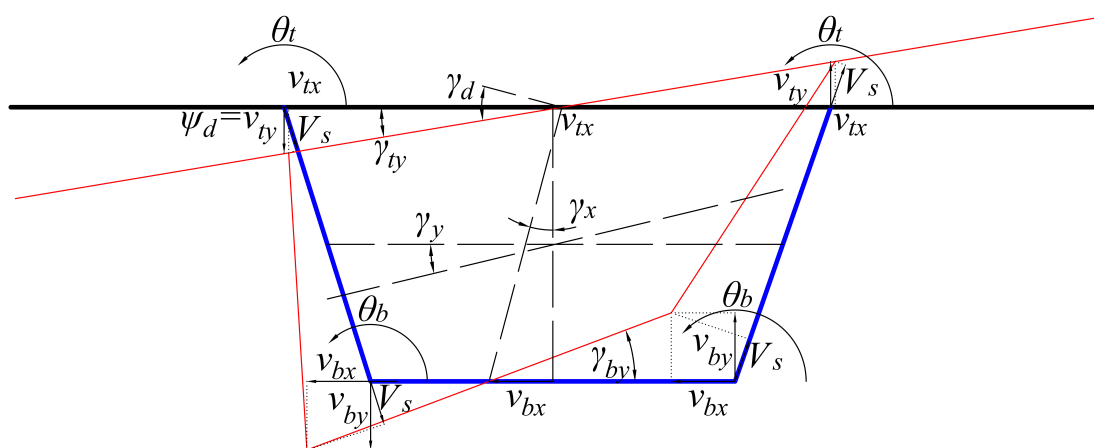


FIGURA B.3 Movimientos de la sección

En la figura anteriormente indicada también se muestra la deformación angular de la sección descompuesta en la componente debida al movimiento horizontal (γ_x) y la componente debida al movimiento vertical (γ_y). Cabe indicar que en secciones trapezoidales la deformación angular (γ_x) se mantiene constante en toda la sección mientras que (γ_y) varía entre la parte superior e inferior.

Con el fin de calcular los valores que adoptan los movimientos anteriores, también se va a partir del caso de deformación unitaria en la dirección del alma. Por lo tanto el valor de V_s es 1:

Los movimientos en x o movimientos horizontales se pueden calcular fácilmente a partir de la relación entre la variación del alabeo y el movimiento mostrada en la ecuación B.21.

$$V_{tx} = \frac{2 \cdot w_1}{b_s} = \frac{2 \cdot b_w}{b_s \cdot (1 + \beta^*)} \quad (\text{B.30})$$

$$V_{bx} = \frac{2 \cdot w_2}{b_b} = \frac{2 \cdot b_w \cdot \beta^*}{b_b \cdot (1 + \beta^*)} \quad (\text{B.31})$$

El valor total del movimiento en x se obtiene sumando ambos términos:

$$V_x = V_{tx} + V_{bx} = \frac{2 \cdot b_w}{b_b} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \quad (\text{B.32})$$

Y la deformación angular, o distorsión, debida al movimiento horizontal se obtiene dividiendo entre la altura de la sección:

$$\gamma_x = \frac{V_x}{h} = \frac{2 \cdot b_w}{h \cdot b_b} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \quad (\text{B.33})$$

En lo que respecta al movimiento en y , este se obtiene a partir del movimiento en el alma y el movimiento horizontal. El movimiento en un alma, que forma un ángulo θ_w con la vertical, es la suma de la proyección del movimiento en x y el movimiento en y . Esto permite establecer la siguiente relación:

$$V_{ty} = \frac{V_s - V_{tx} \cdot \text{seno}(\theta_w)}{\text{cos}(\theta_w)} \quad (\text{B.34})$$

Sustituyendo los términos que aparecen en la ecuación anterior por su valor se llega a:

$$V_{ty} = \frac{b_w}{h} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \quad (\text{B.35})$$

Y procediendo de manera análoga, el movimiento en el vértice inferior es:

$$V_{by} = \frac{V_s + V_{bx} \cdot \text{seno}(\theta_w)}{\text{cos}(\theta_w)} = \frac{b_w}{h} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{\beta \cdot (1 + \beta^*)} = \frac{V_{ty}}{\beta} \quad (\text{B.36})$$

El movimiento total en y es una vez más la suma de ambos movimientos:

$$V_y = V_{ty} + V_{by} = \frac{b_w}{h} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (\text{B.37})$$

La deformación angular, o distorsión, debida al movimiento vertical es distinta dependiendo de la posición donde se mida. Concretamente, deformación en la fibra media se obtiene dividiendo el movimiento vertical medio en el alma entre la anchura media del cajón:

$$\gamma_{wy} = 2 \cdot V_{wy} \cdot \frac{2}{b_s + b_b} = 2 \cdot \frac{V_{ty} + V_{by}}{2} \cdot \frac{2}{b_s + b_b} = \frac{2 \cdot V_y}{b_s + b_b} = \frac{2 \cdot b_w}{h \cdot b_b} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \quad (\text{B.38})$$

No obstante, autores como Yoo [2] consideran la deformación angular medida en la losa superior:

$$\gamma_{ty} = \frac{2 \cdot V_{ty}}{b_s} = \frac{2}{h} \cdot \frac{b_w}{b_s} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \quad (\text{B.39})$$

La deformación angular medida en la losa superior se va a denominar γ_d y se obtiene sumando la deformación angular en la losa superior (γ_{ty}) a la deformación angular en horizontal (γ_x):

$$\gamma_d = \gamma_x + \gamma_{ty} = \frac{2 \cdot b_w}{h \cdot b_b} \cdot (1 + \beta) \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \quad (\text{B.40})$$

Además de los movimientos definidos anteriormente, también se va a hacer uso de la distorsión angular en la fibra media (γ_w) medida como la suma de la distorsión angular en (γ_x) y la distorsión angular media en y (γ_{wy}):

$$\gamma_w = \gamma_x + \gamma_{wy} = \frac{4 \cdot b_w}{h \cdot b_b} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \quad (\text{B.41})$$

Y por último, otro movimiento que va a resultar de utilidad en adelante va a ser el movimiento en la diagonal δ_d . Este se obtiene proyectando el movimiento total en x y el movimiento total en y en la dirección de la diagonal:

$$\delta_d = V_x \cdot \frac{(b_s + b_b)}{2 \cdot L_d} + V_y \cdot \frac{h}{L_d} = \frac{b_w}{L_d} \cdot \frac{(\beta + \beta^*)}{(1 + \beta^*)} \cdot \left(2 + \frac{2}{\beta}\right) \quad (\text{B.42})$$

Las fórmulas anteriormente mostradas permiten obtener los movimientos cuando se considera una deformación unitaria en el alma. Sin embargo, como se explicó en el apartado 2.2.2.5, existen otras posibilidades.

En la formulación propuesta por R. Dabrowsky [12], se considera unitaria la deformación angular de la sección medida al nivel de la losa superior. Es decir, $\gamma_d = 1$. Por lo tanto, los movimientos vinculados a dicha formulación se pueden obtener multiplicando los movimientos calculados anteriormente por el coeficiente C_{γ_d} , que se corresponde con la inversa de γ_d :

$$C_{\gamma_d} = \frac{1}{\gamma_d} = \frac{h}{2} \cdot \frac{b_b \cdot b_s}{b_w \cdot (b_b + b_s)} \cdot \frac{(1 + \beta^*)}{(\beta + \beta^*)} \quad (\text{B.43})$$

De manera análoga se puede proceder para la formulación propuesta por R. Wright [11]¹, donde el movimiento unitario es el movimiento vertical en el vértice superior del alma: $V_{ty} = 1$. En este caso el coeficiente de paso entre formulaciones se va a denominar C_{ψ_d} y se define como:

$$C_{\psi_d} = \frac{1}{V_{ty}} = \frac{h}{b_w} \cdot \frac{(1 + \beta^*)}{(\beta + \beta^*)} \quad (\text{B.44})$$

Una vez definidos todos los movimientos para el caso del movimiento unitario en el alma, y los coeficientes de paso entre una y otra formulación, se pueden obtener los movimientos en todas las formulaciones. Se han resumido en la siguiente tabla:

Mov.	$V_s = 1$	$\gamma_d = 1$	$\psi_d = 1$
V_s	1	$\frac{h}{4} \cdot \frac{b_b}{b_w} \cdot \frac{(1+\beta^*)}{(\beta+\beta^*)}$	$\frac{h}{b_w} \cdot \frac{(1+\beta^*)}{(\beta+\beta^*)}$
γ_d	$\frac{2}{h} \cdot \frac{b_w}{b_b} \cdot \frac{(\beta+\beta^*) \cdot (1+\beta)}{(1+\beta^*)}$	1	$2 \cdot \frac{b_b+b_s}{b_b \cdot b_s}$
V_{ty}	$\frac{b_w}{h} \cdot \frac{(\beta+\beta^*)}{(1+\beta^*)}$	$\frac{b_b}{2 \cdot (1+\beta)}$	1
V_{by}	V_{ty} / β	$\frac{b_s}{2 \cdot (1+\beta)}$	$1/\beta$
V_{tx}	$\frac{2 \cdot b_w}{b_s \cdot (1+\beta^*)}$	$\frac{h}{1+\beta} \cdot \frac{\beta}{(\beta+\beta^*)}$	$\frac{2 \cdot h}{b_s} \cdot \frac{1}{(\beta+\beta^*)}$
V_{bx}	$V_{tx} \cdot \frac{\beta^*}{\beta}$	$\frac{h}{1+\beta} \cdot \frac{\beta^*}{(\beta+\beta^*)}$	$\frac{2 \cdot h}{b_b} \cdot \frac{\beta^*}{(\beta+\beta^*)}$
γ_m	$\frac{4}{h} \cdot \frac{b_w}{b_b} \cdot \frac{(\beta+\beta^*)}{(1+\beta^*)}$	$\frac{2}{1+\beta}$	$4/b_b$
δ_d	$\frac{b_w}{L_d} \cdot \frac{(\beta+\beta^*)}{(1+\beta^*)} \cdot \left(2 + \frac{2}{\beta}\right)$	$\frac{b_s \cdot h}{L_d}$	$\frac{4}{b_b} \cdot \frac{A_c}{L_d}$

TABLA B.1 Movimientos unitarios

Hasta este punto no se han mencionado los giros θ_t y θ_b debido a que su obtención no se va a realizar de manera rigurosa mediante una fórmula de aplicación directa, sino mediante un sistema de ecuaciones a partir de los movimientos anteriores. Dicho sistema se obtiene partiendo de un modelo de marco de una semisección, donde se imponen los movimientos anteriormente indicados y la condición de que no existen fuerzas aplicadas en la sección. Bajo estas condiciones, los dos únicos movimientos incógnita son los giros, que se pueden obtener empleando por ejemplo el método matricial de estructuras [126].

Si se condensa la matriz de rigidez del modelo anteriormente descrito a los dos grados de libertad incógnita, el resultado es el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{r_s} + 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{r_b} + 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_t \\ \theta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{b_b} \cdot \left(\frac{\beta}{r_s} - 1\right) \cdot V_{ty} \\ \frac{6}{b_b} \cdot \left(\frac{1}{r_b \cdot \beta} - 1\right) \cdot V_{ty} \end{pmatrix} \quad (\text{B.45})$$

¹La formulación propuesta por Wright considera media sección, por lo que todos los parámetros y cargas calculados según dicha formulación deberían reducirse a la mitad. Sin embargo, se va a prescindir de esta hipótesis en adelante.

Donde r_s y r_b se definieron en las ecuaciones B.6.

No obstante, el sistema anterior se puede simplificar en el caso de los puentes mixtos donde la rigidez de la losa es muy superior a la del resto de alas y chapas. Concretamente el giro superior (θ_t) se puede aproximar como:

$$\theta_t \approx \frac{2 \cdot V_{ty}}{b_s} \quad (\text{B.46})$$

Y el giro inferior (θ_b) como:

$$\theta_b \approx \frac{(6 - 6 \cdot \beta \cdot r_b - \beta^2 \cdot r_b) \cdot V_{ty}}{b_b \cdot \beta \cdot (3 + 2 \cdot r_b)} \quad (\text{B.47})$$

B.2.5 Cargas externas

En este apartado se va a explicar el proceso para la obtención de la carga distorsora debida a las cargas externas verticales. Dicho proceso se puede considerar simplificado, ya que se va a prescindir de la influencia de la rigidez de las almas, que por otra parte es muy baja en el caso de los puentes mixtos y además tiende a reducir la carga aplicada. Si se desea considerar la rigidez de las almas, así como cargas más complejas, se emplaza al lector al libro *Concrete Box-girder Bridges* [17] de J. Schlaich.

Se va a suponer en este caso que la acción distorsora en el tablero la causan únicamente cargas verticales que transitan sobre la losa. Además, se va a adoptar la simplificación de suponer que la rigidez de la losa de hormigón es mucho mayor que la del alma metálica, lo cual sucede en la mayor parte de las secciones cajón mixtas. Ambas hipótesis son habituales en cualquier formulación para el cálculo de la distorsión en tableros mixtos.

El hecho de suponer la rigidez del alma metálica despreciable frente a la losa supone que la deformación de la losa superior sea lineal. Dicha deformación es nula en el centro del tablero y varía linealmente, adoptando el valor de V_{ty} en el vértice superior del alma. Por lo tanto, se puede obtener la carga distorsora (m_d) de manera directa aplicando el principio de los trabajos virtuales mostrado en la ecuación B.17:

$$m_d = \sum P_i \cdot u_{dy,i} = \sum P_i \cdot e_i \cdot \frac{2 \cdot V_{ty}}{b_s} \quad (\text{B.48})$$

Donde P_i son las cargas aplicadas y e_i la excentricidad de dichas cargas. La suma de la multiplicación de ambos términos es el momento torsor (M_t), y por lo tanto la carga

distorsora (m_d) se puede expresar como:

$$m_d = M_t \cdot \frac{2 \cdot V_{ty}}{b_s} \quad (\text{B.49})$$

Esta fórmula resulta tanto aplicable a la formulación de deformación angular unitaria (γ_d) como a la formulación de deformación vertical unitaria (ψ_d). Además, en el caso de cargas distribuidas se puede tener en cuenta que la longitud donde se aplica la carga varía respecto a la longitud en el eje de la viga (Ec. B.17).

En el caso de la formulación de deformación unitaria en el alma (V_s), la forma de obtener la carga distorsora es distinta. En primer lugar se parte del torsor aplicado en la sección. Dicho torsor se va a suponer que está causado por un par de fuerzas P aplicadas en los vértices superiores del alma del cajón. A su vez, estas fuerzas están en equilibrio con el flujo de torsión uniforme q_u en la sección. La suma de los dos estados anteriores da como resultado unas fuerzas diagonales S que están en equilibrio con las fuerzas en la dirección de las paredes. Todo lo anterior se muestra en la figura B.4:

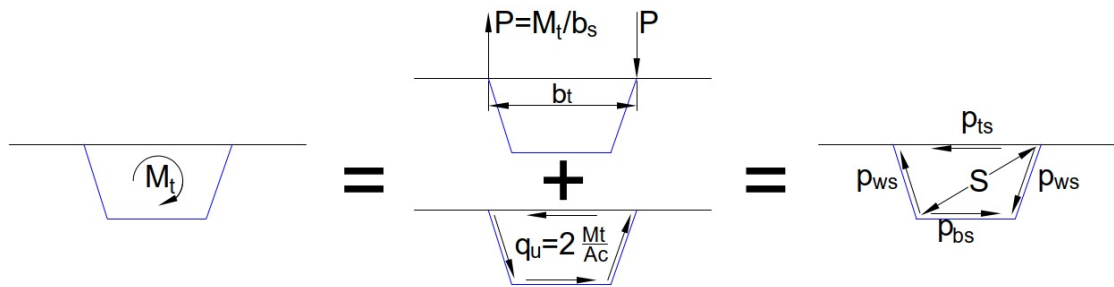


FIGURA B.4 Carga distorsión

El valor de la fuerza S se puede obtener por equilibrio de fuerzas en la dirección vertical en el nodo superior del alma:

$$S \cdot \frac{h}{L_d} = \frac{M_t}{b_s} - \frac{M_t}{2 \cdot A_c} \cdot b_w \cdot \frac{h}{b_w}$$

Despejando en el equilibrio anterior el valor de S , se obtiene la siguiente relación:

$$S = M_t \cdot \frac{L_d}{2 \cdot A_c} \cdot \beta \quad (\text{B.50})$$

La carga distorsora aplicada en la formulación de deformación unitaria en el alma (V_s) se corresponde con la fuerza en el alma causada por S y que se ha representado como p_{ws} en la figura B.4. Para obtener dicha carga el procedimiento más simple, una vez más, es

establecer el equilibrio de fuerzas verticales en el nodo superior del alma:

$$S \cdot \frac{h}{L_d} = p_{ws} \cdot \frac{h}{b_w}$$

Del equilibrio anterior se deduce el valor de la fuerza p_{ws} :

$$p_{ws} = \frac{b_w}{L_d} \cdot S = \frac{M_t \cdot b_w}{2 \cdot A_c} \cdot \beta \quad (\text{B.51})$$

Si se hubiera aplicado el principio de los trabajos virtuales, el valor de la carga distorsora sería:

$$p_{ws}^* = \frac{2 \cdot M_t}{b_s} \cdot \frac{b_w}{h} \cdot \frac{\beta + \beta^*}{1 + \beta^*}$$

Por lo que haciendo el cociente entre ambas cargas se obtiene el coeficiente de paso C_v , que permite conectar los términos de la ecuación de la viga elástica obtenidos de manera energética con la carga aplicada:

$$C_v = \frac{p_{ws}}{p_{ws}^*} = \frac{b_b}{2 \cdot (b_s + b_b)} \cdot \frac{1 + \beta^*}{\beta + \beta^*} \quad (\text{B.52})$$

Conocidos todos los valores, y conocidos los movimientos, se muestran a continuación los valores de la carga distorsora para las distintas formulaciones:

$$m_{dV} = p_{ws} = M_t \cdot \frac{b_w}{2 \cdot A_c} \cdot \beta \quad (\text{B.53a})$$

$$m_{d\gamma} = M_t \cdot \frac{\beta}{1 + \beta} \quad (\text{B.53b})$$

$$m_{d\psi} = M_t \cdot \frac{2}{b_s} \quad (\text{B.53c})$$

B.2.6 Cargas debidas a la curvatura en planta

La carga distorsora en la viga debido a la curvatura en planta (m_{dc}) se definió como:

$$m_{dc} = \eta \cdot \frac{M_x}{R}$$

Donde η se definió en B.18, M_x es el momento flector en la viga y R la curvatura en planta. Nótese que el radio en planta ha de ser suficientemente amplio como para que la distribución de tensiones debido al momento flector resulte aproximadamente lineal.

El término η también se puede definir como

$$\eta = \frac{I_{yu}}{I_x} = \frac{1}{I_x} \cdot \int_s \frac{E}{E_0} \cdot y \cdot u_{dx} \cdot t \cdot ds \quad (\text{B.54})$$

Para el cálculo de los movimientos u_{dx} se va a suponer que no existen cargas perpendiculares actuando en las paredes de la sección, y por lo tanto los movimientos se pueden obtener empleando las funciones de interpolación polinómica clásicas y los movimientos en los nodos descritos en el apartado B.2.4. De este modo, el término I_{yu} se puede calcular aplicando la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} I_{yu} = & \left(b \cdot t_l \cdot \frac{E_c}{E_a} + b_s \cdot t_c \right) \cdot V_{tx} \cdot h_s + b_b \cdot t_b \cdot V_{bx} \cdot h_b \\ & + 2 \cdot b_w \cdot t_w \cdot \left(V_{tx} \quad \theta_t \cdot \cos(\theta_w) \quad -V_{bx} \quad \theta_b \cdot \cos(\theta_w) \right) \cdot \begin{bmatrix} 7/20 & 3/20 \\ b_w/20 & b_w/30 \\ 3/20 & 7/20 \\ -b_w/30 & -b_w/20 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_s \\ -h_b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Aplicando simplificaciones, la ecuación anterior se puede redefinir del siguiente modo:

$$\begin{aligned} I_{yu} = & \frac{2 \cdot h}{b_b} \cdot \left(b_b \cdot t_b \cdot h_b + 2 \cdot b_w \cdot t_w \cdot \frac{7 \cdot h_b - 3 \cdot h_s}{20} \right) \cdot V_{ty} \\ & + b_w \cdot t_w \cdot h \cdot \left((\theta_t - \theta_b) \cdot \frac{3 \cdot h_s - 2 \cdot h_b}{30} + \theta_b \cdot \frac{h}{30} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

La formulación anterior permite su aplicación tanto a secciones rectangulares como trapecoidales y se ha comprobado empleando un modelo de elementos finitos. En dicho modelo se ha introducido la distribución de tensiones debidas a un momento flector unitario, pero en la dirección x tal y como se muestra en la figura B.5, y se ha aplicado un torsor también unitario que equilibra la distribución de tensiones anterior. Como condición de contorno se ha restringido el movimiento diagonal y se ha obtenido como resultado la fuerza en dicha diagonal. El resultado ha sido que con la formulación anterior y los movimientos precisos el error ha sido inferior al 1 %, quedando del lado de la seguridad en todos los casos. Cuando se han empleado los movimientos aproximados el error ha sido inferior al 2 %, quedando también del lado de la seguridad en todos los casos.

No obstante el procedimiento anterior puede resultar engorroso debido a la multitud de parámetros necesarios para su cálculo. Por ese motivo, autores como T. Helwing [149] emplean el método M/R [150], que consiste en suponer que el momento se aplica úni-

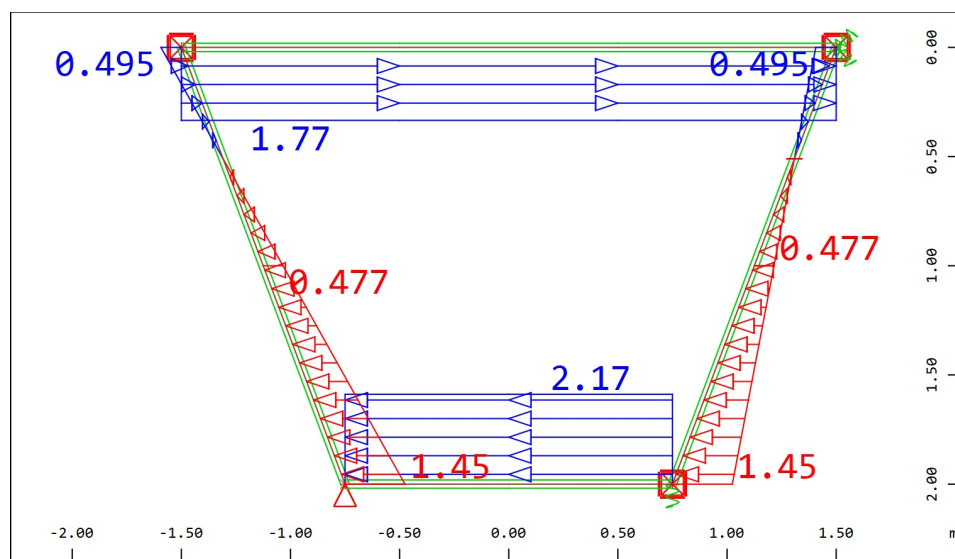


FIGURA B.5 Carga debida a la curvatura

camente en las alas superiores e inferiores, y que a efectos de la ecuación B.54 supone despreciar la influencia de las almas en el cálculo tanto de I_x como I_{yu} . Aplicando dicha simplificación anterior, la influencia de la curvatura en planta se puede asimilar a un momento torsor distribuido (m_{tc}) de valor:

$$m_{tc} = \frac{M_x}{R \cdot \beta} \quad (\text{B.57})$$

Y dicho momento torsor se puede tratar como un momento torsor externo que se suma al debido a las cargas externas. Además, este valor es coherente con los esfuerzos internos en barras calculados por T. Helwing [149] para diafragmas en K. No obstante, las pruebas realizadas sugieren que dicho procedimiento **no está del lado de la seguridad cuando se calcula la distorsión empleando la analogía de la viga sobre lecho elástico**, ya que η calculado de manera precisa puede llegar a ser ligeramente mayor que $1/\beta$, con diferencias que llegan hasta el 11 % en las pruebas realizadas. Sin embargo, cuando se calculan las reacciones en los diafragmas de manera precisa empleando la analogía de la viga sobre lecho elástico, la reacción tampoco llega habitualmente al 100 % de la carga, por lo que esta simplificación resulta especialmente interesante para dimensionamientos por resistencia.

B.2.7 Rigidez de Marco

Para obtener la rigidez de marco se va a seguir un procedimiento similar al descrito por L. Viñuela en el libro *Proyecto y construcción de puentes metálicos y mixtos* [128]. Este procedimiento se basa en partir de la rigidez de la sección en la dirección de la diagonal para luego extrapolarlo a la dirección del alma. Concretamente, la relación entre la fuerza

y la deformación en la dirección de la diagonal se va a expresar como:

$$S = K_\delta \cdot \delta_d \quad (\text{B.58})$$

Donde K_δ es la rigidez de marco en la dirección de la diagonal. Dicha rigidez se puede obtener por dos métodos. El primero consiste en realizar un modelo de barras de la sección de ancho unidad y el segundo en emplear una fórmula de aplicación directa.

En el primero de los métodos las secciones de las barras se corresponden con una sección rectangular de ancho unitario y canto correspondiente al espesor de la sección. El módulo de elasticidad que se asigna a estas barras es el módulo de elasticidad transversal. En lo que se refiere a las condiciones de contorno, el modelo presenta un apoyo simple en uno de los vértices inferiores y un apoyo deslizante en la dirección de la diagonal en el vértice opuesto. Aplicando una fuerza unitaria en este último vértice en la dirección de la diagonal, y leyendo el valor del desplazamiento, se puede obtener fácilmente el valor de K_δ .

Alternativamente, la otra opción es emplear una fórmula. Empleando las variables auxiliares definidas en las ecuaciones B.6, se puede calcular K_δ del siguiente modo:

$$K_\delta = E_{sa} \cdot \frac{12 \cdot L_d^2 \cdot I_w}{b_s \cdot b_b \cdot b_w \cdot h^2} \cdot r_1 \quad (\text{B.59})$$

Una vez calculada la rigidez diagonal siguiendo los procedimientos descritos por L. Vuñuela [128], se va a proceder a integrar esta rigidez dentro de la ecuación diferencial de la viga. Para ello se va a calcular el trabajo virtual desarrollado por la fuerza S :

$$E_{s0} \cdot K_d \cdot \xi \cdot \delta(\xi) = S \cdot \delta(\delta_d \cdot \xi) = K_\delta \cdot \delta_d^2 \cdot \xi \cdot \delta(\xi) \quad (\text{B.60})$$

Sustituyendo el valor de δ_d correspondiente a cada formulación usando la tabla B.1, y empleando el término C_v en la formulación de desplazamiento vertical en el alma, se llega a las siguientes rigideces de marco en función de la formulación:

$$K_{dV} = \frac{4 \cdot A_c \cdot b_w^2}{L_d^2 \cdot b_b \cdot h} \cdot \frac{\beta + \beta^*}{1 + \beta^*} \cdot \frac{K_\delta}{E_{s0}} = \frac{b_w^2}{L_d^2 \cdot C_v} \cdot \frac{K_\delta}{E_{s0}} \quad (\text{B.61a})$$

$$K_{d\gamma} = \frac{b_s^2 \cdot h^2}{L_d^2} \cdot \frac{K_\delta}{E_{s0}} \quad (\text{B.61b})$$

$$K_{d\psi} = \frac{16 \cdot A_c^2}{L_d^2 \cdot b_b^2} \cdot \frac{K_\delta}{E_{s0}} \quad (\text{B.61c})$$

B.2.8 Inercia a distorsión

La función de alabeo para las distintas formulaciones es directamente proporcional a los movimientos, como se mostró en la ecuación B.21. Por lo tanto, para obtener los alabeos de acuerdo a las formulaciones de movimiento vertical unitario en el alma y deformación angular unitaria únicamente es necesario multiplicar los valores de la función de alabeo para deformación unitaria en la dirección del alma por los coeficientes de paso C_{ψ_d} y C_{γ_d} respectivamente. El resultado para w_1 y w_2 se muestra a continuación:

Alabeo	$V_s = 1$	$\gamma_d = 1$	$\psi_d = 1$
w_1	$\frac{b_w}{(1+\beta^*)}$	$\frac{h \cdot b_b}{2 \cdot (1+\beta) \cdot (\beta+\beta^*)}$	$\frac{h}{(\beta+\beta^*)}$
w_2	$\frac{b_w \cdot \beta^*}{(1+\beta^*)}$	$\frac{h \cdot b_b \cdot \beta^*}{2 \cdot (1+\beta) \cdot (\beta+\beta^*)}$	$\frac{h \cdot \beta^*}{(\beta+\beta^*)}$

TABLA B.2 Alabeos

En lo que respecta al valor de la inercia a distorsión (I_d), esta depende del cuadrado de los alabeos por lo que la inercia para cada formulación será la integral de la función de alabeo calculada en la ecuación B.29 multiplicada por los pertinentes coeficientes al cuadrado. Además, al igual que sucedió en la rigidez de marco, la inercia para el caso de deformación unitaria en la dirección del alma debe ir multiplicada por el coeficiente corrector de la carga:

$$I_{dV} = I_{d0} \cdot C_v \quad (\text{B.62a})$$

$$I_{d\gamma} = I_{d0} \cdot C_{\gamma_d}^2 \quad (\text{B.62b})$$

$$I_{d\psi} = I_{d0} \cdot C_{\psi_d}^2 \quad (\text{B.62c})$$

La inercia I_{dV} también se puede definir como:

$$I_{dV} = \frac{b_w^3 \cdot t_w}{12} \cdot \frac{2 \cdot \beta \cdot [(\alpha_l + \alpha_t + 2) \cdot (\alpha_b + 2) - 1]}{(\beta + 1) \cdot [\alpha_l + \alpha_t + \alpha_b \cdot \beta + 3 \cdot (\beta + 1)]} \quad (\text{B.63})$$

Que, añadiendo la contribución de las chapas adheridas a la losa, se corresponde con lo mostrado en los libros de L. Viñuela [48][128] o J. Schlaich [17].

B.2.9 Tensiones

La resultante de tensiones longitudinales en la viga debidas a la distorsión se le denomina bimomento distorsor (B_d) y se define como:

$$B_d = \int_S w_d \cdot \sigma_z \cdot dA = \int_S w_d \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \left(-\xi^{II} \cdot w_d - \frac{\xi \cdot u_{dx}}{R} \right) \cdot dA \quad (\text{B.64})$$

Aplicando las simplificaciones descritas en el subapartado B.2.2, la ecuación anterior también se puede expresar como:

$$B_d = -E_0 \cdot I_d \cdot \xi^{II} \quad (B.65)$$

Y esta resultante permite expresar las tensiones en la viga debidas a la distorsión como:

$$\sigma_z = -\frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \frac{B_d \cdot w_d}{I_d} \quad (B.66)$$

Se puede observar como la fórmula anterior guarda una estrecha similitud con la fórmula para obtener las tensiones debidas a flexión. El alabeo equivale a la distancia a la fibra neutra y el bimomento distorsor equivale al momento flector. Debido a esta equivalencia, en el cálculo de la viga sobre lecho elástico el momento flector resultante en la viga se corresponde con el bimomento distorsor.

Además, si las tensiones en la viga se han calculado con elementos tipo barra rectos, las tensiones finales en la viga se pueden expresar como:

$$\sigma_z = -\frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot \left(\frac{B_d \cdot w_d}{I_d} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} \right) \approx -\frac{E}{E_0} \cdot \frac{R+x}{R} \cdot \left(\frac{B_d \cdot w_d}{I_d} + \frac{M_x \cdot y}{I_x} \right) \quad (B.67)$$

B.2.10 Momentos transversales

Los momentos transversales ($\overline{m_s}$) son el resultado de sumar los momentos debidos a la distorsión de la sección ($m_{sd,0} \cdot \xi$) y los momentos debidos a la curvatura en planta causados por las fuerzas de desviación en las almas ($m_{sc,0} \cdot M_x/R$):

$$\overline{m_s} = \overline{m_{sd,0}} \cdot \xi + \overline{m_{sc,0}} \cdot \frac{M_x}{R} \quad (B.68)$$

Los momentos unitarios debidos a la distorsión ($m_{sd,0}$) se definen como:

$$\overline{m_{sd,0}} = \begin{cases} m_{sd,0,t} = \frac{6 \cdot E_s \cdot I_c}{b_s} \cdot \left(\frac{2 \cdot V_{ty}}{b_s} - \theta_t \right) \\ m_{sd,0,b} = \frac{6 \cdot E_s \cdot I_b}{b_b} \cdot \left(\frac{2 \cdot V_{ty}}{b_b \cdot \beta} - \theta_b \right) \end{cases} \quad (B.69)$$

Mientras que los momentos unitarios debidos a la curvatura ($m_{sc,0}$) se obtienen de la siguiente fórmula:

$$\overline{m}_{sc,0} = \begin{pmatrix} m_{sd,0,t} \\ m_{sd,0,b} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{r_s} + 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{r_b} + 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot h_l - 3 \cdot h_s \\ 2 \cdot h_s - 3 \cdot h_l \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{b_w^2 \cdot t_w \cdot \cos(\theta_w)}{20 \cdot I_x \cdot r_s} & 0 \\ 0 & \frac{b_w^2 \cdot t_w \cdot \cos(\theta_w)}{20 \cdot I_x \cdot r_b} \end{bmatrix} \quad (B.70)$$

En ambos casos, los momentos se han obtenido a partir de un modelo de pórtico plano de la sección. Para el caso de los momentos unitarios debidos a la distorsión se han impuesto los movimientos del apartado B.2.4 en las distintas barras que componen la sección, y se han obtenido los momentos en los nudos. Sin embargo, en el segundo de los casos se han aplicado las cargas debidas a la curvatura en las almas, como se muestra en la figura B.5, se han bloqueado los desplazamientos en los nodos de la sección, permitiendo únicamente el giro, y se han calculado los momentos flectores en los nodos.

En cualquier caso, los momentos transversales unitarios también se pueden obtener directamente de un modelo de pórtico como se muestra en la figura B.6.

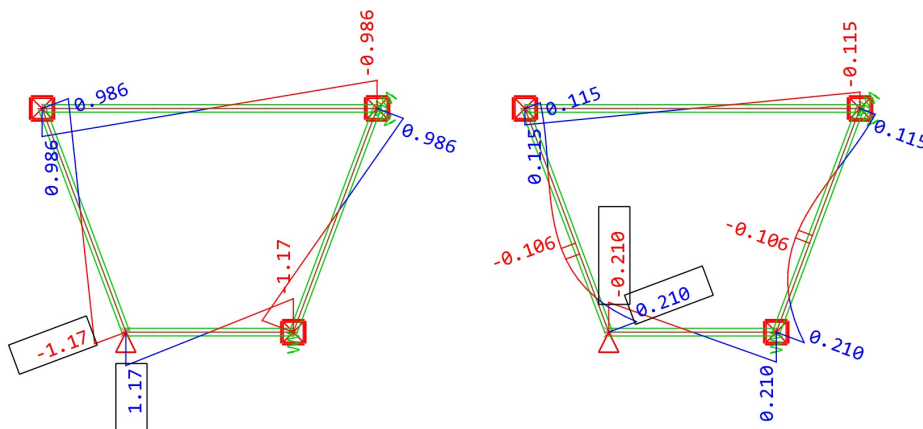


FIGURA B.6 Momentos transversales debidos a la distorsión y a la curvatura

B.3 Diafragmas antidistorsión

B.3.1 Introducción

En este apartado se va a explicar el procedimiento para obtener la rigidez y los esfuerzos de diseño en algunos de los diafragmas antidistorsión más frecuentes.

Para el cálculo de la rigidez de los diafragmas se van a aplicar teoremas energéticos y el principio de los trabajos virtuales. Los esfuerzos de diseño se obtendrán principalmente a partir de las condiciones de equilibrio. No obstante, existe un procedimiento alternativo para obtener la rigidez de los diafragmas y los esfuerzos de diseño que se describe en el libro de L. Viñuela [128] y que se va a explicar someramente a continuación.

En la figura B.4 se muestran las cargas que aparecen en el contorno del diafragma p_{ts} , p_{bs} y p_{ws} . El cálculo de p_{ws} se realizó en el apartado B.2.5, y su valor se muestra en la ecuación B.51. Estableciendo el equilibrio en los nodos entre las cargas incógnitas, S y p_{ws} se pueden obtener los valores de p_{ts} y p_{bs} . Estas últimas se definen como:

$$p_{ts} = p_{ws} \cdot \frac{b_b}{b_w} \quad (\text{B.71a})$$

$$p_{bs} = p_{ws} \cdot \frac{b_s}{b_w} \quad (\text{B.71b})$$

Tanto las dos fuerzas anteriores como p_{ws} se aplican de manera distribuida en el contorno del diafragma. La fuerza aplicada por unidad de longitud es:

$$q_{ts} = \frac{M_t}{2 \cdot A_c} \cdot \beta^2 \quad (\text{B.72a})$$

$$q_{ws} = \frac{M_t}{2 \cdot A_c} \cdot \beta \quad (\text{B.72b})$$

$$q_{bs} = \frac{M_t}{2 \cdot A_c} \quad (\text{B.72c})$$

En el modelo de cálculo se representa el diafragma con su geometría real. Las paredes de la sección también se representan considerando un ancho que varía en función de los autores o de la normativa que se considere. Las pruebas realizadas indican que una aproximación realista para el cálculo de rigidez antidistorsión del diafragma es representar las paredes con elementos tipo lámina en una longitud equivalente a la distancia entre diafragmas. A efectos resistentes se deben considerar los valores indicados en la normativa.

Las condiciones de contorno del modelo de cálculo son limitar el movimiento en la dirección del tablero en la sección y permitir la deformación en la dirección diagonal. Es decir, los cuatro vértices del diafragma deben tener impedido el movimiento en la dirección perpendicular al plano del diafragma. Además, en una de las diagonales el vértice inferior debe tener impedido el desplazamiento en todas las direcciones, mientras que su vértice opuesto debe permitir el desplazamiento únicamente en la dirección de la diagonal. Dicho movimiento en la diagonal y el tipo de apoyos se muestra en la figura B.7.

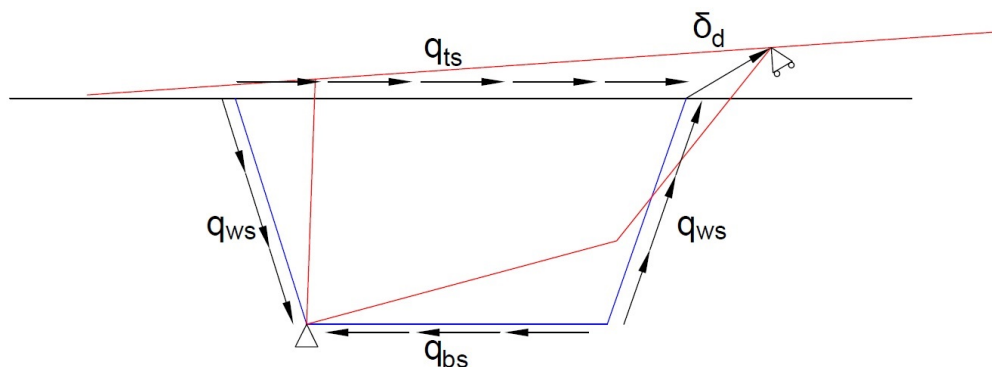


FIGURA B.7 Modelo de cálculo de diafragma

Calculando el modelo anterior se obtiene el movimiento en la diagonal δ_d . Conocida la relación entre el momento torsor M_t y la fuerza diagonal S mostrada en la ecuación B.50, y conocido que la rigidez que relaciona la fuerza en la diagonal S con el movimiento δ_d se denomina K_δ , se puede calcular esta última rigidez como:

$$K_\delta = M_t \cdot \frac{L_d}{2 \cdot A_c} \cdot \frac{\beta}{\delta_d} \quad (\text{B.73})$$

La rigidez anterior se puede adaptar a cada formulación aplicando los mismos coeficientes definidos en B.61 y que se muestran a continuación:

$$K_{DV} = \frac{b_w^2}{L_d^2 \cdot C_v} \cdot K_\delta \quad (\text{B.74a})$$

$$K_{D\gamma} = \frac{b_s^2 \cdot h^2}{L_d^2} \cdot K_\delta \quad (\text{B.74b})$$

$$K_{D\psi} = \frac{16 \cdot A_c^2}{L_d^2 \cdot b_b^2} \cdot K_\delta \quad (\text{B.74c})$$

La rigidez del diafragma antidistorsión se ha denominado K_D y se considera dentro del modelo de viga sobre lecho elástico como un muelle discreto dispuesto en la ubicación del diafragma.

La reacción en dicho muelle se va a denominar R_D . No obstante, para el diseño de los elementos del diafragma lo habitual es emplear el momento torsor en el diafragma (M_T), que se relaciona con la reacción del siguiente modo:

$$M_T = \frac{2 \cdot A_c}{b_w \cdot \beta} \cdot R_{DV} \quad (\text{B.75a})$$

$$M_T = \frac{1 + \beta}{\beta} \cdot R_{D\gamma} \quad (\text{B.75b})$$

$$M_T = \frac{b_s}{2} \cdot R_{D\psi} \quad (\text{B.75c})$$

B.3.2 Diafragma de alma llena

La rigidez de un diafragma de alma llena se obtiene a partir del trabajo virtual de deformación angular del diafragma:

$$\int_D G \cdot t_D \cdot (\gamma \cdot \xi) \cdot \delta(\gamma \cdot \xi) \cdot dA = \delta\xi \cdot \left(G \cdot t_D \cdot \gamma_m^2 \cdot A_c \cdot \xi \right) = \delta\xi \cdot (K_D \cdot \xi) \quad (\text{B.76})$$

Donde G es el módulo de deformación cortante del panel, t_D el espesor del diafragma y γ_m es la deformación angular media del panel. Dicha deformación angular media se ha supuesto que es la deformación en el centro del panel, que se calculó en B.41. Las pruebas realizadas con un modelo de contraste como el descrito anteriormente mostraron una correlación muy buena.

Para calcular la rigidez diagonal hay que establecer la relación entre la deformación en la diagonal (δ_d) y la deformación angular media (γ_m), que se puede tomar de la tabla B.1. Aplicando esa relación se llega a la siguiente rigidez diagonal para un diafragma de alma llena:

$$K_\delta = \left(\frac{\gamma_m}{\delta_d} \right)^2 \cdot G \cdot t_D \cdot A_c = \frac{G \cdot t \cdot L_d^2}{A_c} \quad (\text{B.77})$$

Durante el diseño de los diafragmas de alma llena, lo habitual es considerar la tensión tangencial en el panel (τ_D). Esta se define interpolando la deformación angular en el panel como:

$$\tau_D(\zeta) = G \cdot \gamma_D(\zeta) = G \cdot \frac{V_{ty} \cdot (2 + 2 \cdot \beta)}{b_b \cdot (1 + \zeta \cdot (\beta - 1))} \quad (\text{B.78})$$

Donde ζ es la coordenada relativa de profundidad del diafragma, siendo $\zeta = 0$ la fibra superior y $\zeta = 1$ la fibra inferior.

A través de la rigidez del diafragma, se puede establecer una relación entre V_{ty} y M_T , que permite expresar las tensiones en el eje vertical del diafragma como:

$$\tau_D = \frac{M_T \cdot \beta}{2 \cdot b_s \cdot h \cdot t_D} \cdot \frac{1}{1 - \zeta + \zeta \cdot \beta} \quad (\text{B.79})$$

En lo que respecta a las consideraciones sobre que profundidad considerar para el diseño, estas quedaron descritas en el apartado 4.3

B.3.3 Diafragma en X o Cruz de San Andrés

En un diafragma en X, también conocido como Cruz de San Andrés, los perfiles metálicos que lo componen se disponen en la dirección de la diagonal. Por lo tanto, la rigidez a distorsión de dicho diafragma medida en la dirección diagonal, denominada previamente K_δ se corresponde con la rigidez axial de las dos barras que componen dicho diafragma:

$$K_\delta = 2 \cdot \frac{E \cdot A_b}{L_d} \quad (\text{B.80})$$

Donde A_b es el área del perfil empleado en la cruz.

En lo que respecta al diseño de los perfiles, la fuerza axial de diseño (N_b) se corresponde con la mitad de la fuerza diagonal (S). Por lo tanto:

$$N_b = M_T \cdot \frac{L_d}{4 \cdot A_c} \cdot \beta \quad (\text{B.81})$$

B.3.4 Diafragma en K

El diafragma en K se compone de un perfil superior de área A_{tb} y un perfil diagonal de área A_{db} . A la longitud de esta última diagonal se la va a denominar L_b .

La rigidez antidistorsión del diafragma se va a obtener aplicando el segundo teorema de Castigliano [151]. Este teorema permite calcular la deformación en la dirección de la diagonal a partir de la fuerza aplicada en la diagonal S :

$$S \cdot \delta_d = \oint \frac{N_i}{E \cdot A_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial S} \cdot dl \quad (\text{B.82})$$

Considerando que actúa la mitad de la fuerza S en cada diagonal, los esfuerzos en el perfil superior (N_{tb}) y el perfil diagonal (N_{db}) se pueden obtener por equilibrio en los nodos. Concretamente, su valor en función de la fuerza diagonal es:

$$\begin{aligned} N_{tb} &= S \cdot \frac{b_b}{2 \cdot L_d} \\ N_{db} &= S \cdot \frac{L_b}{L_d} \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

Sustituyendo en la ecuación B.82 el valor de los axiles, se llega a la siguiente deformación:

$$\delta_d = 2 \cdot \left(\frac{b_s}{2 \cdot E \cdot A_{tb}} \cdot \left(\frac{b_b}{2 \cdot L_d} \right)^2 + \frac{L_b}{E \cdot A_{db}} \cdot \left(\frac{L_b}{L_d} \right)^2 \right) \quad (\text{B.84})$$

Cuya inversa es la rigidez diagonal (K_δ):

$$K_\delta = \frac{4 \cdot E \cdot A_{tb} \cdot A_{db} \cdot L_d^2}{b_s \cdot b_b^2 \cdot A_{db} + 8 \cdot L_b^3 \cdot A_{tb}} \quad (\text{B.85})$$

Los esfuerzos de diseño se pueden obtener sustituyendo S en la ecuación B.83 por su valor en función del momento torsor, tal y como fue definido en la ecuación B.50.

$$\begin{aligned} N_{tb} &= M_T \cdot \frac{b_b \cdot \beta}{4 \cdot A_c} \\ N_{db} &= M_T \cdot \frac{L_b \cdot \beta}{2 \cdot A_c} \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

B.3.5 Diafragma en V

El diafragma en V se compone principalmente de dos perfiles diagonales de longitud L_b y área A_b .

La rigidez antidistorsión se va a calcular siguiendo el mismo procedimiento del diafragma en K. En primer lugar se calcula por equilibrio en los nudos el valor de la fuerza en la diagonal (N_b) en función de S .

$$N_b = S \cdot \frac{L_b}{L_d} \quad (\text{B.87})$$

Aplicando el segundo teorema de Castigliano mostrado en la ecuación B.82 se obtiene la deformación en la diagonal:

$$\delta_d = \frac{2 \cdot L_b}{E \cdot A_b} \cdot \left(\frac{L_b}{L_d} \right)^2 \quad (\text{B.88})$$

E invirtiendo la deformación anterior se llega a la rigidez diagonal:

$$K_\delta = \frac{E \cdot A_b \cdot L_d^2}{2 \cdot L_b^3} \quad (\text{B.89})$$

De manera análoga al diafragma en K, el axil de diseño en la diagonal obtiene sustituyendo S en la ecuación B.87 por su valor en función del momento torsor:

$$N_b = M_T \cdot \frac{L_b \cdot \beta}{2 \cdot A_c} \quad (\text{B.90})$$

B.3.6 Otros diafragmas

En los casos no incluidos anteriormente se recomienda en empleo del método general para obtener la rigidez y los esfuerzos en los elementos. En este apartado se incluyen por ejemplo los marcos abiertos y cerrados, que si bien se han estudiado en el apartado 4.7, las limitaciones en la aplicación de las fórmulas simplificadas y su incertidumbre aconsejan el empleo de métodos más refinados para el cálculo de sus propiedades y resistencia.

B.4 Viga sobre lecho elástico

En este apéndice se han obtenido los parámetros necesarios para el cálculo de la viga sobre lecho elástico de acuerdo con tres de las formulaciones más comunes. La ecuación diferencial final para cada una de estas formulaciones se define como:

$$E_0 \cdot I_{dV} \cdot V_s^{IV} + E_{s0} \cdot K_{dV} \cdot V_s = m_{dV} - \eta_V \cdot \frac{M_x}{R} \quad (B.91a)$$

$$E_0 \cdot I_{d\gamma} \cdot \gamma_d^{IV} + E_{s0} \cdot K_{d\gamma} \cdot \gamma_d = m_{d\gamma} - \eta_\gamma \cdot \frac{M_x}{R} \quad (B.91b)$$

$$E_0 \cdot I_{d\psi} \cdot \psi_d^{IV} + E_{s0} \cdot K_{d\psi} \cdot \psi_d = m_{d\psi} - \eta_\psi \cdot \frac{M_x}{R} \quad (B.91c)$$

Donde la inercia I_d fue calculada en la ecuación B.62, la rigidez de marco K_d fue calculada en la ecuación B.61, las cargas distorsoras fueron calculadas en la ecuación B.53 y el parámetro η se calculó en el apartado B.2.6.

Los parámetros anteriores tienen su correspondencia en la analogía de la viga sobre lecho elástico como se muestra en la figura B.8:

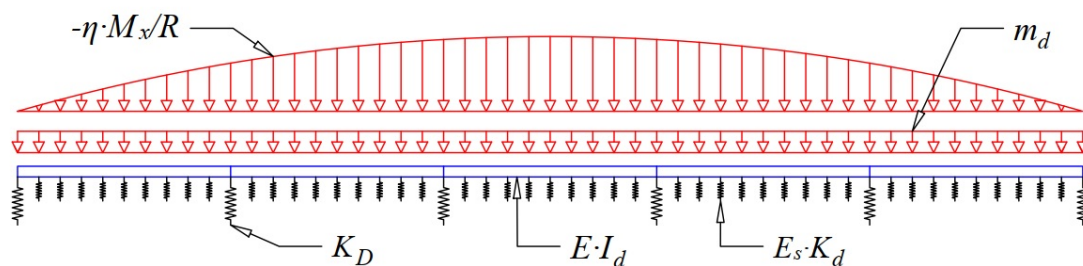


FIGURA B.8 Viga sobre lecho elástico

Es decir, la inercia a distorsión de la viga I_d se corresponde con la rigidez a flexión de la viga, la rigidez de marco K_d es la rigidez distribuida y tanto la carga distorsora externa como la debida a la curvatura son cargas aplicadas. Además, se ha añadido la rigidez de

los diafragmas antidistorsión K_D , que actúan como muelles discretos.

La solución de la ecuación diferencial da como principales resultados el movimiento vertical (ξ), el momento flector y las reacciones en los diafragmas (R_D). El movimiento vertical se corresponde con los movimientos debidos a distorsión en la viga y, aplicando los coeficientes definidos en la tabla B.1, permite obtener los movimientos en todos los vértices de la sección. También permite aplicando la ecuación B.68 obtener los momentos transversales en la sección. Por su parte, momento flector se corresponde con el bimomento distorsor (B_d), y aplicando la ecuación B.66 permite obtener las tensiones por distorsión. Por último, las reacciones en diafragmas (R_D) pueden ser transformadas en momentos torsores en el diafragma (M_T) según lo descrito en las ecuaciones B.75, y a su vez transformadas en esfuerzos en elementos conforme a lo descrito en el apartado B.3.

B.5 Cálculo comparativo

B.5.1 Introducción

La validez de la formulación propuesta se va a comprobar mediante un cálculo comparativo. En primer lugar se van a comparar resultados entre las tres formulaciones para demostrar que las tres son coherentes y permiten obtener idénticos resultados. Posteriormente se van a tomar los resultados de una de las formulaciones y se van a comparar con un cálculo mediante elementos finitos y un cálculo empleando formulaciones de otros autores. Concretamente, se van a considerar las formulaciones propuestas por C. Yoo [2] y L. Viñuela [48], siendo esta última la que aparece en la norma EAE-11 [14].

El cálculo comparativo se va a realizar para un puente de una longitud de 40 m donde se han dispuesto 4 diafragmas antidistorsión intermedios a 8 m. El ancho del tablero es 10 m y el canto 2 m. Las características de la sección se detallan en el apartado B.5.2 y las características de los diafragmas en el apartado B.5.4.

El modelo de elementos finitos se ha desarrollado empleando el software de cálculo Sofistik. Los materiales considerados tienen las mismas propiedades elásticas que los empleados en el cálculo de la viga. La losa superior de hormigón y los paneles metálicos se han representado empleando elementos tipo lámina. Dichos elementos son de tipo cuadrilátero de cuatro nodos conforme a la teoría de Reissner-Mindlin [129]. Los diafragmas antidistorsión con elementos celosía se han representado con elementos tipo barra de inercia a flexión reducida. El mallado se ha llevado a cabo empleando

elementos con una dimensión máxima de 1 m, si bien en la mayoría de de elementos no se exceden los 50 cm en ninguna de las dimensiones. Dicho mallado se genera automáticamente en el programa Sofistik, que toma como base en el trabajo desarrollado por Rank [152][130]. Por último, indicar que los bordes extremos del tablero se han supuesto rotulados y con el movimiento únicamente permitido en dirección longitudinal, excepto en las esquinas inferiores, donde se ha supuesto un muelle de rigidez despreciable en longitudinal para estabilizar numéricamente la estructura en longitudinal.

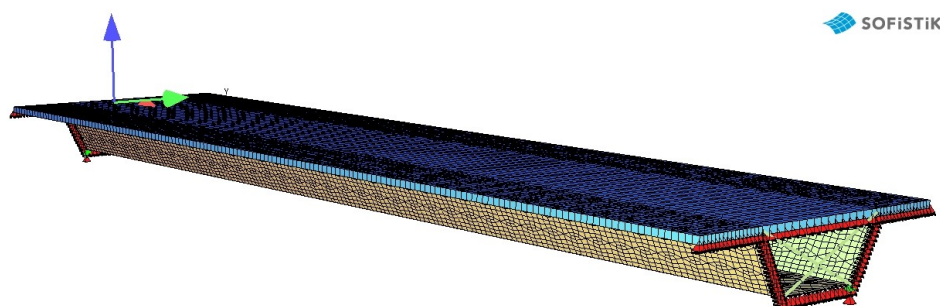


FIGURA B.9 Modelo de elementos finitos

B.5.2 Geometría y propiedades de la sección

Las dimensiones de los elementos de la sección conforme a la nomenclatura mostrada la figura B.1 y a lo calculado en el apartado B.2.1 son:

■ $b = 10 \text{ m}$	■ $t_l = 250 \text{ mm}$	■ $b_c = 2.50 \text{ m}$
■ $b_s = 5 \text{ m}$	■ $t_c = 0 \text{ mm}$	■ $b_w = 2.24 \text{ m}$
■ $b_b = 3 \text{ m}$	■ $t_w = 12 \text{ mm}$	■ $L_d = 4.47 \text{ m}$
■ $h = 2 \text{ m}$	■ $t_b = 20 \text{ mm}$	■ $A_c = 8.00 \text{ m}^2$

Y las propiedades de los materiales consideradas son:

■ $E_s = 210.000 \text{ MPa}$	■ $E_{ss} = 225.250 \text{ MPa}$	■ $G_s = 85.000 \text{ MPa}$
■ $E_c = 30.000 \text{ MPa}$	■ $E_{sc} = 31.250 \text{ MPa}$	■ $G_c = 12.500 \text{ MPa}$

Para el cálculo de las propiedades se van a emplear los siguientes parámetros adimensionales calculados conforme a las ecuaciones B.24c:

$$C_{\gamma_d} = 0.916 \text{ m}$$

en la dirección del alma, que se obtiene aplicando la fórmula B.29 es:

$$I_{d0} = 0.171 \text{ m}^4$$

Los parámetros auxiliares para el cálculo de la rigidez de marco se calculan conforme a las ecuaciones B.5 y B.6. Su resultado se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \blacksquare I_{s,s} &= 1.83 \times 10^{-4} \text{ m}^4 & \blacksquare I_{s,b} &= 6.67 \times 10^{-7} \text{ m}^4 & \blacksquare I_{s,w} &= 1.44 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \\ \blacksquare r_s &= 1.76 \times 10^{-4} & \blacksquare r_b &= 2.90 \times 10^{-4} & \blacksquare r_1 &= 1.87 \end{aligned}$$

Con estos parámetros auxiliares se obtiene la rigidez diagonal de la sección aplicando la fórmula B.59:

$$K_\delta = 0.107 \text{ MN/m}^2$$

Y por último con todos los parámetros auxiliares previamente definidos se pueden calcular los parámetros que rigen el comportamiento de la viga sobre lecho elástico. Se emplean las ecuaciones B.62 para las inercias y B.61 para las rigideces de marco.

Parámetro	$V_s = 1$	$\gamma_d = 1$	$\psi_d = 1$
$E_0 \cdot I_d$	6909 MN.m ²	26543 MN.m ⁴	30201 MN.m ²
$E_{s0} \cdot K_d$	0.140 MN/m ²	0.536 MN	0.610 MN/m ²

TABLA B.5 Parámetros de cálculo de la viga sobre lecho elástico

Si se calculan los parámetros anteriores siguiendo las formulaciones de L. Viñuela [48] y C. Yoo [2], el resultado es:

Formulación	Viñuela	Yoo
$E_0 \cdot I_d$	6909 MN.m ²	26543 MN.m ⁴
$E_{s0} \cdot K_d$	0.140 MN/m ²	0.308 MN

TABLA B.6 Parámetros de cálculo de la viga sobre lecho elástico

Al comparar los parámetros calculados en la tabla B.6 con los de la tabla B.5 se puede apreciar como en el caso del trabajo de L. Viñuela la correspondencia con la formulación de deformación unitaria en el alma es total. En el caso de C. Yoo, se observa una diferencia respecto a la formulación de deformación angular unitaria en la únicamente en la rigidez de marco. No obstante, el propio autor afirma que debido a que la influencia de la rigidez de marco de la sección es del orden de la milésima parte de la rigidez del diafragma, se

puede considerar la rigidez de marco de la sección supuesta cuadrada. Esto significa que la formulación propuesta en este trabajo supone un refinamiento del trabajo de C. Yoo en el cálculo de las propiedades de la sección.

B.5.3 Cargas

En el cálculo se van a considerar un único caso de carga consistente en un momento torsor distribuido en todo el puente de valor $m_t = 100 \text{ kN.m/m}$ y un momento torsor puntual de valor $M_t = 1000 \text{ kN.m}$ aplicado en centro de luz.

El valor de la fuerza diagonal (S) para el momento torsor puntual de 1000 kN.m se calcula conforme a la ecuación B.50, y es:

$$S = 167.71 \text{ kN}$$

Las cargas distorsoras puntuales (M_d) y distribuidas (m_d) aplicadas en el cálculo de la viga sobre lecho elástico se calculan siguiendo las ecuaciones B.53 y son:

Carga	$V_s = 1$	$\gamma_d = 1$	$\psi_d = 1$
M_d	83.85 kN	375.00 kN.m	400.00 kN
m_d	8.39 kN/m	37.50 kN.m/m	40.00 kN/m

TABLA B.7 Cargas

Las cargas propuestas por L. Viñuela y C. Yoo se corresponden exactamente con las cargas de $V_s = 1$ y $\gamma_d = 1$ respectivamente.

En el caso del modelo de elementos finitos, las cargas se han aplicado como un par de fuerzas, bien linealmente distribuidas, bien puntuales, en los vértices superiores de las almas.

B.5.4 Diafragmas

Los diafragmas antidistorsión empleados en el cálculo son de tres tipos: Diafragma de alma llena (WP), diafragma en cruz de San Andrés (X) y diafragma en K (K). La rigidez de los tres diafragmas es idéntica conforme a la formulación propuesta. Concretamente, se ha considerado un diafragma de alma llena de 1 mm de espesor y se ha calculado el área de las barras necesaria en las otras tipologías para igualar la rigidez de dicho diafragma de alma llena.

La rigidez diagonal del diafragma de alma llena de 1 mm es:

$$K_{\delta} = 212.50 \text{ MN/m}$$

Y la rigidez conforme a las tres formulaciones es la siguiente:

Rigidez	$V_s = 1$	$\gamma_d = 1$	$\psi_d = 1$
K_d	277 MN/m	1063 MN.m	1209 MN/m

TABLA B.8 Rigidez de diafragmas antidistorsión

En el caso del diafragma en Cruz de San Andrés, el módulo elástico de la barra requerido es:

$$E \cdot A_b = 475 \text{ MN}$$

Mientras que en el caso del diafragma en K, el módulo elástico requerido considerando una barra diagonal de longitud $L_b = 2.5 \text{ m}$ es:

$$E \cdot A_b = 452 \text{ MN}$$

En lo que respeta a la rigidez de los diafragmas conforme a los trabajos de L. Viñuela y C. Yoo el resultado es:

Autor	WP	X	K
Viñuela [MN/m]	302	302	411
Yoo [MN.m]	680	680	520

TABLA B.9 Rigidez de diafragmas antidistorsión

En este caso si que se observa una diferencia en todos los casos entre la formulación propuesta y el trabajo de otros autores. Además, la rigidez del diafragma de alma llena es idéntica a la del diafragma en X en ambos autores.

En el caso de L. Viñuela, la diferencia observada en todos los casos se debe a que el autor considera la deformación diagonal de la formulación $\psi_d = 1$ para calcular la rigidez de los diafragmas antidistorsión en vez de la deformación diagonal de la formulación $V_s = 1$. Esta diferencia, si bien converge cuando el alma es vertical, supone una variación que se va agudizando conforme el ángulo que forma el alma con la vertical es mayor.

Las diferencias que se observan con el trabajo de C.Yoo son más importantes. El autor

parece no tener en cuenta que en secciones trapezoidales el ángulo que forma la sección distorsionada con la horizontal no es igual en la losa superior que en el ala inferior. Por lo tanto, existe una componente vertical de deformación que debe ser tomada en cuenta a la hora de calcular la rigidez de los diafragmas.

Por último, ambos autores parecen despreciar la flexibilidad debida a la deformación del cordón superior de la celosía en el caso del diafragma en K.

B.5.5 Resultados

Se van a comparar a continuación los resultados obtenidos conforme a las distintas metodologías. Concretamente, se van a comparar las tensiones en el vértice inferior, la deformación angular media en la sección y la reacción en los diafragmas antidistorsión.

Se toma el vértice inferior como punto de comparación debido a que las tensiones son mayores y a que en el vértice superior los resultados se ven distorsionados por ser el punto de introducción de las cargas en el modelo de elementos finitos. Este efecto local también hace que se considere la deformación angular media en la sección y no la deformación medida al nivel de la losa superior.

Un aspecto a señalar es que el diafragma de alma llena y el diafragma en Cruz de San Andrés tienen idéntica rigidez, por lo que se compararán a la vez los resultados.

Se muestran en la figura B.10 las tensiones en el vértice inferior para el caso de los diafragmas de alma llena (WP) y los diafragmas en Cruz de San Andrés (X), y en la figura B.11 se muestran los resultados para los diafragmas en K.

Se observa como en la zona entre diafragmas el ajuste entre la formulación propuesta y el modelo de elementos finitos es más preciso que el resto de formulaciones propuestas por otros autores. Sin embargo, existen diferencias significativas en la zona los diafragmas debido a efectos locales como se indicó en el apartado 5.

Las deformaciones angulares medias se muestran en la figura B.12 para el caso de diafragmas de alma llena (WP) y diafragmas en cruz de San Andrés (X), y en la figura B.13 para el caso de diafragma en K.

Se observa en este caso como las diferencias entre formulaciones son mas acusadas. La introducción de las cargas locales en el modelo de elementos finitos provoca unas deformaciones adicionales en la losa superior que no son tenidas en consideración y que justifican la diferencia. No obstante, en los diafragmas los efectos locales a nivel de de-

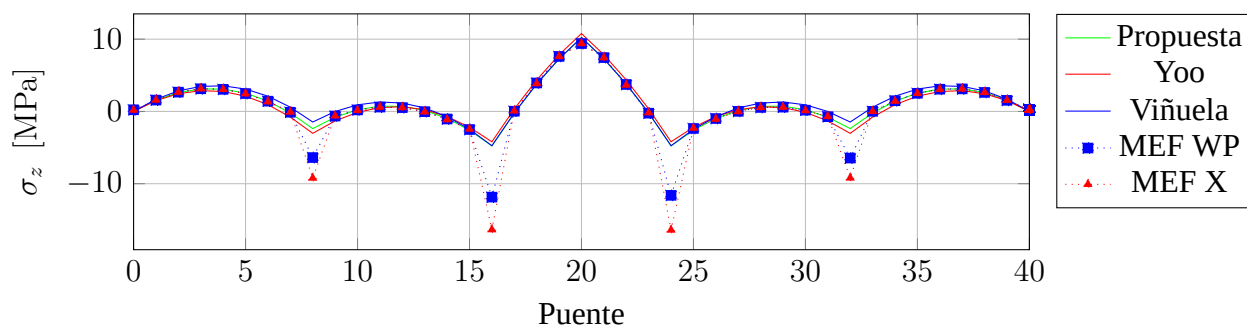


FIGURA B.10 Tensiones en vértice inferior: Diafragmas WP y X

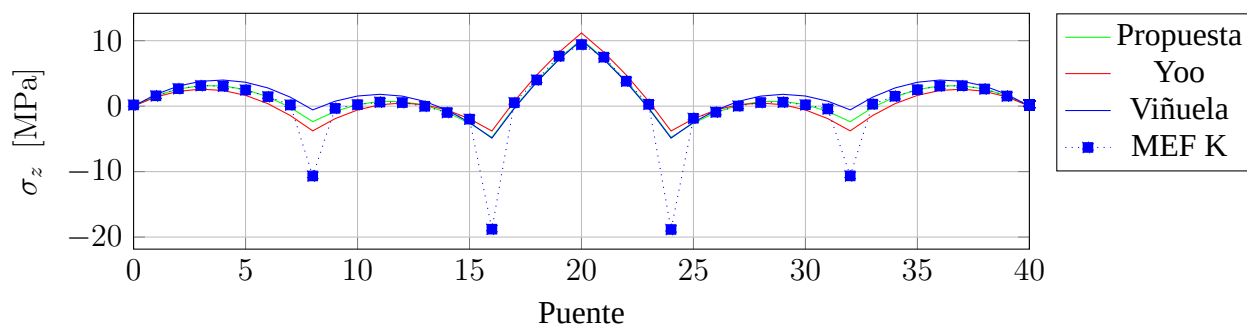


FIGURA B.11 Tensiones en vértice inferior: Diafragma K

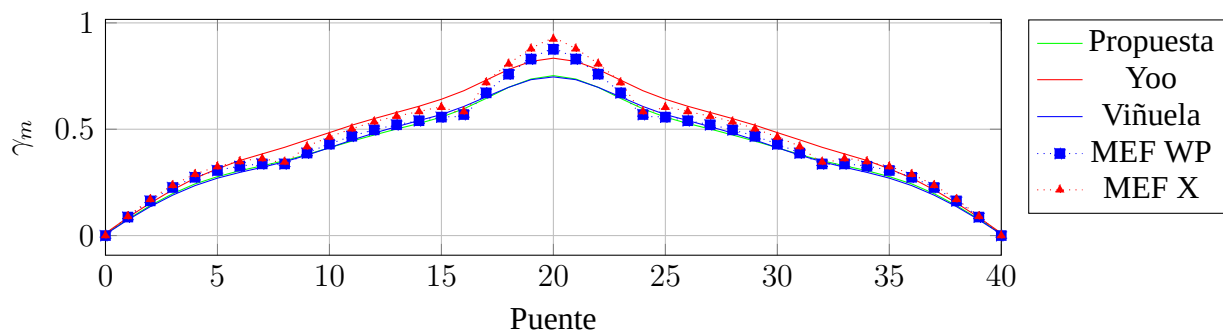


FIGURA B.12 Deformación angular media: Diafragmas WP y X

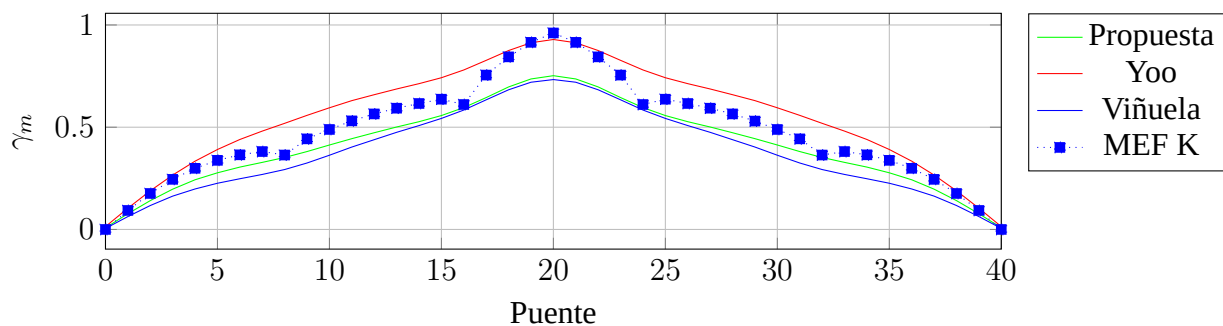


FIGURA B.13 Deformación angular media: Diafragma K

formación quedan controlados por la presencia de los propios diafragmas, y es en estos puntos donde se observa como la formulación propuesta permite un mejor ajuste de la deformación angular en la sección.

Por último, se van a mostrar los momentos torsores resultantes calculados en los diafragmas antidistorsión. Para obtener el momento torsor en el diafragma de alma llena se ha leído del modelo la tensión tangencial a media altura del diafragma, se ha calculado su deformación angular correspondiente, y se ha comparado con la deformación media en el diafragma causada por un momento torsor unitario. En el caso de los diafragmas en celosía, se han comparado los esfuerzos axiles en los miembros de la celosía con los esfuerzos axiles para el caso de un momento torsor unitario.

En primer lugar se muestran los resultados para los diafragmas de alma llena (WP) y los diafragmas en cruz de San Andrés (X):

Diafragma	Propuesta	Yoo	Viñuela	MEF WP	MEF X
1	797	799	795	748	784
2	1350	1342	1352	1257	1321
3	1350	1342	1352	1258	1320
4	797	799	795	747	784

TABLA B.10 Reacciones en diafragmas [kN.m]: Diafragmas WP y X

Y a continuación se muestran los resultados para el diafragma en K:

Diafragma	Propuesta	Yoo	Viñuela	MEF K
1	797	799	795	783
2	1350	1334	1357	1321
3	1350	1334	1357	1321
4	797	799	795	783

TABLA B.11 Reacciones en diafragmas [kN.m]: Diafragma K

Las reacciones calculadas son muy similares a las obtenidas del modelo de elementos finitos y en todos los casos quedan del lado de la seguridad.

B.6 Conclusión

La analogía de la viga sobre lecho elástico permite el cálculo de la distorsión en puentes mixtos.

En el presente apéndice se han derivado de manera rigurosa todos los parámetros necesarios para modelar un puente mixto empleando la analogía de la viga sobre lecho elástico de acuerdo a las formulaciones más comunes. Se han calculado los alabeos teniendo en consideración la existencia de chapas adheridas a la losa superior, la inercia a distorsión, la rigidez de marco y la rigidez de los diafragmas, así como las cargas aplicadas. También se han obtenido el coeficiente que relaciona la carga distorsora y el momento flector en vigas curvas y los coeficientes que permiten pasar de una formulación a otra.

Respecto al procesamiento de resultados, se han propuesto fórmulas para calcular las tensiones longitudinales adicionales a la flexión recta, momentos transversales en la sección y esfuerzos en los diafragmas.

Por último, se ha llevado a cabo un cálculo comparativo entre la formulación propuesta, formulaciones de otros autores y modelos de elementos finitos. A la vista de los resultados, la formulación propuesta permite el cálculo de la distorsión en un puente mixto de manera más precisa que formulaciones precedentes propuestas por otros autores.

APÉNDICE C

Integrales

C.1 Funciones de forma de la viga

En este apartado se van a mostrar las integrales de las funciones de forma de la viga.

$$\overline{\overline{K_{HH}}} = \oint_L \left[\begin{array}{cc|cc} H_{i1} \cdot H_{i1} & H_{i1} \cdot H_{i2} & H_{i1} \cdot H_{j1} & H_{i1} \cdot H_{j2} \\ H_{i2} \cdot H_{i1} & H_{i2} \cdot H_{i2} & H_{i2} \cdot H_{j1} & H_{i2} \cdot H_{j2} \\ \hline H_{j1} \cdot H_{i1} & H_{j1} \cdot H_{i2} & H_{j1} \cdot H_{j1} & H_{j1} \cdot H_{j2} \\ H_{j2} \cdot H_{i1} & H_{j2} \cdot H_{i2} & H_{j2} \cdot H_{j1} & H_{j2} \cdot H_{j2} \end{array} \right] \cdot dz =$$

$$\frac{L}{420} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 156 & 22 \cdot L & 54 & -13 \cdot L \\ 22 \cdot L & 4 \cdot L^2 & 13 \cdot L & -3 \cdot L^2 \\ \hline 54 & 13 \cdot L & 156 & -22 \cdot L \\ -13 \cdot L & -3 \cdot L^2 & -22 \cdot L & 4 \cdot L^2 \end{array} \right] \quad (C.1)$$

$$\overline{\overline{K_{H^I H^I}}} = \oint_L \left[\begin{array}{cc|cc} H_{i1}^I \cdot H_{i1}^I & H_{i1}^I \cdot H_{i2}^I & H_{i1}^I \cdot H_{j1}^I & H_{i1}^I \cdot H_{j2}^I \\ H_{i2}^I \cdot H_{i1}^I & H_{i2}^I \cdot H_{i2}^I & H_{i2}^I \cdot H_{j1}^I & H_{i2}^I \cdot H_{j2}^I \\ \hline H_{j1}^I \cdot H_{i1}^I & H_{j1}^I \cdot H_{i2}^I & H_{j1}^I \cdot H_{j1}^I & H_{j1}^I \cdot H_{j2}^I \\ H_{j2}^I \cdot H_{i1}^I & H_{j2}^I \cdot H_{i2}^I & H_{j2}^I \cdot H_{j1}^I & H_{j2}^I \cdot H_{j2}^I \end{array} \right] \cdot dz =$$

$$\frac{1}{30 \cdot L} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 36 & 3 \cdot L & -36 & 3 \cdot L \\ 3 \cdot L & 4 \cdot L^2 & -3 \cdot L & -1 \cdot L^2 \\ \hline -36 & -3 \cdot L & 36 & -3 \cdot L \\ 3 \cdot L & -1 \cdot L^2 & -3 \cdot L & 4 \cdot L^2 \end{array} \right] \quad (C.2)$$

$$\overline{\overline{K_{H^{II}H^{II}}}} = \oint_L \left[\begin{array}{cc|cc} H_{i1}^{II} \cdot H_{i1}^{II} & H_{i1}^{II} \cdot H_{i2}^{II} & H_{i1}^{II} \cdot H_{j1}^{II} & H_{i1}^{II} \cdot H_{j2}^{II} \\ H_{i2}^{II} \cdot H_{i1}^{II} & H_{i2}^{II} \cdot H_{i2}^{II} & H_{i2}^{II} \cdot H_{j1}^{II} & H_{i2}^{II} \cdot H_{j2}^{II} \\ \hline H_{j1}^{II} \cdot H_{i1}^{II} & H_{j1}^{II} \cdot H_{i2}^{II} & H_{j1}^{II} \cdot H_{j1}^{II} & H_{j1}^{II} \cdot H_{j2}^{II} \\ H_{j2}^{II} \cdot H_{i1}^{II} & H_{j2}^{II} \cdot H_{i2}^{II} & H_{j2}^{II} \cdot H_{j1}^{II} & H_{j2}^{II} \cdot H_{j2}^{II} \end{array} \right] \cdot dz =$$

$$\frac{1}{L^3} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 12 & 6 \cdot L & -12 & 6 \cdot L \\ 6 \cdot L & 4 \cdot L^2 & -6 \cdot L & 2 \cdot L^2 \\ \hline -12 & -6 \cdot L & 12 & -6 \cdot L \\ 6 \cdot L & 2 \cdot L^2 & -6 \cdot L & 4 \cdot L^2 \end{array} \right] \quad (C.3)$$

$$\overline{\overline{K_{HH^{II}}}} = \overline{\overline{K_{H^{II}H}}}^t = \oint_L \left[\begin{array}{cc|cc} H_{i1} \cdot H_{i1}^{II} & H_{i1} \cdot H_{i2}^{II} & H_{i1} \cdot H_{j1}^{II} & H_{i1} \cdot H_{j2}^{II} \\ H_{i2} \cdot H_{i1}^{II} & H_{i2} \cdot H_{i2}^{II} & H_{i2} \cdot H_{j1}^{II} & H_{i2} \cdot H_{j2}^{II} \\ \hline H_{j1} \cdot H_{i1}^{II} & H_{j1} \cdot H_{i2}^{II} & H_{j1} \cdot H_{j1}^{II} & H_{j1} \cdot H_{j2}^{II} \\ H_{j2} \cdot H_{i1}^{II} & H_{j2} \cdot H_{i2}^{II} & H_{j2} \cdot H_{j1}^{II} & H_{j2} \cdot H_{j2}^{II} \end{array} \right] \cdot dz =$$

$$\frac{1}{30 \cdot L} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} -36 & -33 \cdot L & 36 & -3 \cdot L \\ -3 \cdot L & -4 \cdot L^2 & 3 \cdot L & 1 \cdot L^2 \\ \hline 36 & 3 \cdot L & -36 & 33 \cdot L \\ -3 \cdot L & 1 \cdot L^2 & 3 \cdot L & -4 \cdot L^2 \end{array} \right] \quad (C.4)$$

$$K_{N^I N^I} = \oint_L \left[\begin{array}{c|c} N_i^I \cdot N_i^I & N_i^I \cdot N_j^I \\ \hline N_j^I \cdot N_i^I & N_j^I \cdot N_j^I \end{array} \right] \cdot dz = \frac{1}{L} \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \quad (C.5)$$

$$\overline{\overline{K_{HN^I}}} = \overline{\overline{K_{N^IH}}}^t = \oint_L \left[\begin{array}{c|c} H_{i1} \cdot N_i^I & H_{i1} \cdot N_j^I \\ \hline H_{i2} \cdot N_i^I & H_{i2} \cdot N_j^I \\ \hline H_{j1} \cdot N_i^I & H_{j1} \cdot N_j^I \\ H_{j2} \cdot N_i^I & H_{j2} \cdot N_j^I \end{array} \right] \cdot dz = \frac{1}{12 \cdot L} \cdot \left[\begin{array}{c|c} -6 & 6 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline -6 & 6 \\ 1 & -1 \end{array} \right] \quad (C.6)$$

$$\overline{\overline{K_{H^{II}N^I}}} = \overline{\overline{K_{N^IH^{II}}}}^t = \oint_L \left[\begin{array}{c|c} H_{i1}^{II} \cdot N_i^I & H_{i1}^{II} \cdot N_j^I \\ \hline H_{i2}^{II} \cdot N_i^I & H_{i2}^{II} \cdot N_j^I \\ \hline H_{j1}^{II} \cdot N_i^I & H_{j1}^{II} \cdot N_j^I \\ \hline H_{j2}^{II} \cdot N_i^I & H_{j2}^{II} \cdot N_j^I \end{array} \right] \cdot dz = \frac{1}{L^2} \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \quad (C.7)$$

C.2 Alabeos

Se muestran a continuación las integrales más comunes para los alabeos.

$$\int \frac{E}{E_0} \cdot w_1 \cdot dA = \sum_{k=1}^{paredes} \frac{E_k}{E_0} \cdot t_k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww,k}}] \cdot \begin{pmatrix} w_{1,k,i} \\ w_{1,k,j} \end{pmatrix} \quad (C.8)$$

$$\int \frac{E}{E_0} \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot dA = \sum_{k=1}^{paredes} \frac{E_k}{E_0} \cdot t_k \cdot \begin{pmatrix} w_{1,k,i} & w_{1,k,j} \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww,k}}] \cdot \begin{pmatrix} w_{2,k,i} \\ w_{2,k,j} \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

$$\int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_1 \cdot dA \approx \int \frac{E}{E_0} \cdot \left(1 + \frac{x}{R}\right) \cdot w_1 \cdot dA = \sum_{k=1}^{paredes} \frac{E_k}{E_0} \cdot t_k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww,k}^c}] \cdot \begin{pmatrix} w_{1,k,i} \\ w_{1,k,j} \end{pmatrix} \quad (C.10)$$

$$\int \frac{E}{E_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot dA \approx \int \frac{E}{E_0} \cdot \left(1 + \frac{x}{R}\right) \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot dA = \sum_{k=1}^{paredes} \frac{E_k}{E_0} \cdot t_k \cdot \begin{pmatrix} w_{1,k,i} & w_{1,k,j} \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww,k}^c}] \cdot \begin{pmatrix} w_{2,k,i} \\ w_{2,k,j} \end{pmatrix} \quad (C.11)$$

Donde las matrices $\overline{\overline{M_{ww}}}$ y $\overline{\overline{M_{ww}^c}}$ se definen como:

$$\overline{\overline{M_{ww,k}}} = \begin{bmatrix} \frac{L_k}{3} & \frac{L_k}{6} \\ \frac{L_k}{6} & \frac{L_k}{3} \end{bmatrix} \quad (C.12)$$

$$\overline{\overline{M_{ww,k}^c}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{R+x_i}{R}\right) \cdot \frac{L_k}{3} + \frac{t_{x,k}}{R} \cdot \frac{L_k^2}{12} & \left(\frac{R+x_i}{R}\right) \cdot \frac{L_k}{6} + \frac{t_{x,k}}{R} \cdot \frac{L_k^2}{12} \\ \left(\frac{R+x_i}{R}\right) \cdot \frac{L_k}{6} + \frac{t_{x,k}}{R} \cdot \frac{L_k^2}{12} & \left(\frac{R+x_i}{R}\right) \cdot \frac{L_k}{3} + \frac{t_{x,k}}{R} \cdot \frac{L_k^2}{4} \end{bmatrix} \quad (C.13)$$

C.3 Deformación angular

Las integrales asociadas a la deformación angular de la sección se calculan del siguiente modo:

$$\int \frac{G}{G_0} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot dA = \sum_{k=1}^{paredes} \frac{G_k}{G_0} \cdot t_k \cdot \begin{pmatrix} t_{1,i} & t_{1,j} \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww}}] \cdot \begin{pmatrix} t_{2,i} \\ t_{2,j} \end{pmatrix} \quad (C.14)$$

$$\int \frac{G}{G_0} \cdot \frac{R}{R-x} \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot dA \approx \int \frac{G}{G_0} \cdot \left(1 + \frac{x}{R}\right) \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot dA = \sum_{k=1}^{paredes} \frac{G_k}{G_0} \cdot t_k \cdot \begin{pmatrix} t_{1,i} & t_{1,j} \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww}^c}] \cdot \begin{pmatrix} t_{2,i} \\ t_{2,j} \end{pmatrix} \quad (C.15)$$

Donde las matrices $\overline{M_{ww}}$ y $\overline{M_{ww}^c}$ se corresponden con las definidas en el apartado C.2.

C.4 Movimientos

Las integrales que se emplean para el cálculo de la contribución en las paredes se pueden expresar del siguiente modo en notación matricial:

$$\oint \frac{E}{E_0} \cdot \frac{t^3}{12} \cdot u_{1n} \cdot u_{2n} \cdot ds = \sum_{k=1}^{paredes} \frac{E_k}{E_0} \cdot \frac{t_k^3}{12} \cdot \begin{pmatrix} u_{n1,k,i} & u_{\theta1,k,i} & u_{n1,k,j} & u_{\theta1,k,j} \end{pmatrix} \cdot [\overline{K_{HH,k}}] \cdot \begin{pmatrix} u_{n2,k,i} \\ u_{\theta2,k,i} \\ u_{n2,k,j} \\ u_{\theta2,k,j} \end{pmatrix} \quad (C.16)$$

$$\oint \frac{G}{G_0} \cdot \frac{t^3}{3} \cdot u_{1\theta} \cdot u_{2\theta} \cdot ds = \sum_{k=1}^{paredes} \frac{G_k}{G_0} \cdot \frac{t_k^3}{3} \cdot \begin{pmatrix} u_{n1,k,i} & u_{\theta1,k,i} & u_{n1,k,j} & u_{\theta1,k,j} \end{pmatrix} \cdot [\overline{K_{H^I H^I,k}}] \cdot \begin{pmatrix} u_{n2,k,i} \\ u_{\theta2,k,i} \\ u_{n2,k,j} \\ u_{\theta2,k,j} \end{pmatrix} \quad (C.17)$$

Donde las matrices $\overline{\overline{K_{HH,k}}}$ y $\overline{\overline{K_{H^I H^I,k}}}$ se definen de la siguiente manera:

$$\overline{\overline{K_{HH,k}}} = \frac{L_k}{420} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 156 & 22 \cdot L_k & 54 & -13 \cdot L_k \\ 22 \cdot L_k & 4 \cdot L_k^2 & 13 \cdot L_k & -3 \cdot L_k^2 \\ \hline 54 & 13 \cdot L_k & 156 & -22 \cdot L_k \\ -13 \cdot L_k & -3 \cdot L_k^2 & -22 \cdot L_k & 4 \cdot L_k^2 \end{array} \right] \quad (\text{C.18})$$

$$\overline{\overline{K_{H^I H^I,k}}} = \frac{1}{30 \cdot L_k} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 36 & 3 \cdot L_k & -36 & 3 \cdot L_k \\ 3 \cdot L_k & 4 \cdot L_k^2 & -3 \cdot L_k & -1 \cdot L_k^2 \\ \hline -36 & -3 \cdot L_k & 36 & -3 \cdot L_k \\ 3 \cdot L_k & -1 \cdot L_k^2 & -3 \cdot L_k & 4 \cdot L_k^2 \end{array} \right] \quad (\text{C.19})$$

APÉNDICE D

Ejemplo de cálculo de propiedades de secciones

D.1 Introducción

El presente apéndice tiene por objeto mostrar el proceso de cálculo de las propiedades de una sección a través de un ejemplo. Concretamente, se va a calcular la sección que se ha empleado en los ejemplos de verificación 1 y 2.

La sección se va a suponer que esta compuesta por paredes rectas de espesor y propiedades constantes. Esto permite pasar de la forma integral de calcular las propiedades a expresarlas en forma de sumatorios y multiplicaciones. Por lo tanto, la definición de las propiedades que se hizo en el capítulo 3, se va a expresar en este caso en forma de sumatorios.

El ejemplo comenzará con los datos necesarios para definir las secciones, es decir, materiales y geometría. Con esos datos se obtendrán las propiedades básicas de las paredes. A partir de esas propiedades se van a definir, en primer lugar, las propiedades de la viga recta, incluyendo deformaciones, alabeos, áreas, momentos e inercias. Por último, se calcularán los alabeos, deformaciones y propiedades de la viga curva.

D.2 Materiales y geometría de la sección

Se definen en primer lugar los materiales. Para cada uno de los materiales es necesario definir el módulo de elasticidad longitudinal (E), el módulo de elasticidad transversal (G), y el módulo de elasticidad transversal (E_s).

En la sección objeto de cálculo, los materiales que se van a considerar son hormigón para la losa superior y acero para el resto de paredes. Las características que se van a asignar

a estos materiales son:

Material	E [MPa]	G [MPa]	E_s [MPa]
Hormigón	30.000	12.500	31.250
Acero	210.000	85.000	222.250

TABLA D.1 Propiedades elásticas de los materiales

En lo sucesivo, resulta necesario considerar uno de estos materiales como material de referencia. En este caso, se va a considerar el acero, lo cual implica que las propiedades elásticas de referencia sean:

$$\blacksquare E_0 = 210.000 \text{ MPa} \quad \blacksquare G_0 = 85.000 \text{ MPa} \quad \blacksquare E_{s0} = 222.250 \text{ MPa}$$

El siguiente paso es definir la geometría de la sección. Se trata de una sección cajón mixta compuesta por 6 paneles y 6 nodos. El ancho de la losa superior es de 4 m y el espesor de 250 mm. Se divide en 3 paneles, dos correspondientes a los voladizos de 1 m a cada lado y otro correspondiente al ancho del cajón de 2 m. La tabla inferior también mide 2 m y tiene un espesor de 30 mm. Las almas tienen un espesor de 20 mm, y su altura es tal que el canto total de la sección incluyendo espesores de la losa superior y ala inferior es 2 m.

En la figura D.1 se puede observar un esquema de la sección, donde además se ha indicado la numeración de los nodos y los paneles.

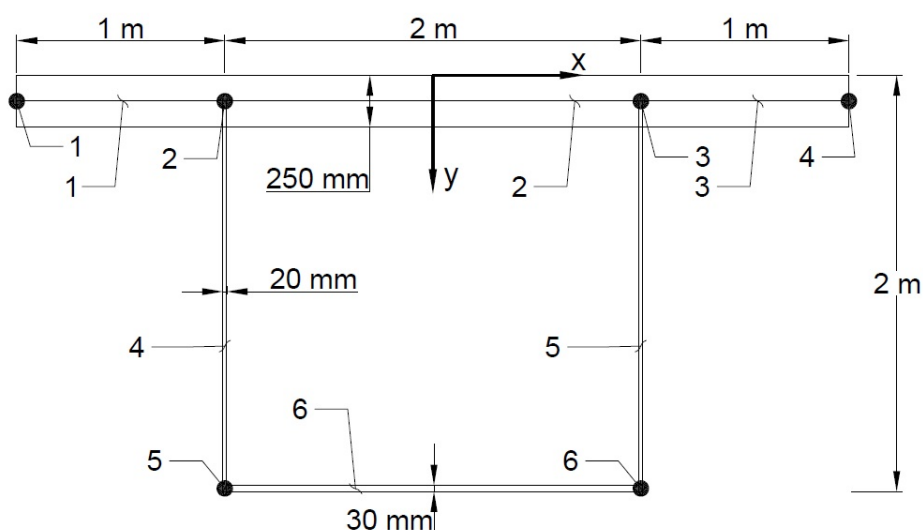


FIGURA D.1 Esquema de la sección

Tomando como referencia el centro de la fibra superior de la sección, las coordenadas de

Nodo	X [m]	Y [m]
1	-2	0.125
2	-1	0.125
3	1	0.125
4	2	0.125
5	-1	1.985
6	1	1.985

TABLA D.2 Nodos

los nodos se muestran en la tabla D.2.

Los datos necesarios para definir los paneles de la sección se muestran en la tabla D.3. Es decir, nodo de inicio (i) y final (j) de cada panel, espesor y material. En esta tabla además se ha añadido una columna adicional, no explicada previamente, que son las divisiones. Las divisiones son en número de elementos que componen cada panel. Como se explicó en el capítulo 3, para poder obtener las función de alabeo por torsión y distorsión de la viga curva es necesario discretizar los paneles en elementos pequeños. Esto se debe a que se van a emplear funciones de forma lineales para obtener el alabeo, pero estas no se corresponden con la solución real de la ecuación. Por lo tanto, es necesario emplear varios elementos para obtener un mejor ajuste. En este caso se han dividido todos los paneles en 8 subelementos.

Panel	Nodo i	Nodo j	Espesor [mm]	Material	Divisiones
1	1	2	250	Hormigón	8
2	2	3	250	Hormigón	8
3	3	4	250	Hormigón	8
4	2	5	20	Acero	8
5	3	6	20	Acero	8
6	5	6	30	Acero	8

TABLA D.3 Paneles

A partir de estos datos se puede proceder a calcular las propiedades de la sección.

D.3 Cálculo de propiedades en viga recta

D.3.1 Introducción

En los cálculos que se van a mostrar a continuación **para la viga recta se va a suponer que cada panel esta compuesto por un único elemento**. El motivo no es otro que una mayor claridad en la exposición, ya que permite reducir el volumen de información mostrada sin perder precisión. El motivo es que los alabeos son lineales en todo el panel, y por lo tanto, no se ven afectados por las subdivisiones.

D.3.2 Propiedades de las paredes

El primer paso es definir un vector con las propiedades completas de cada panel. Se va a considerar una pared k que va de un nodo i a un nodo j . Para esa pared las propiedades son las siguientes:

- Nodos: $(n_{i,k}, n_{j,k})$
- Coordenadas: $(x_{i,k}, y_{i,k}, x_{j,k}, y_{j,k})$
- Espesor: t_k
- Longitud: $L_k = ((x_{j,k} - x_{i,k})^2 + (y_{j,k} - y_{i,k})^2)^{\frac{1}{2}}$
- Vectores unitarios: $\bar{t}_k = (t_{x,k}, t_{y,k}) = (\frac{x_{j,k} - x_{i,k}}{L_k}, \frac{y_{j,k} - y_{i,k}}{L_k})$
- Materiales: $(E_k, G_k, E_{s,k})$

Aplicado a la sección:

Panel	x_i [m]	y_i [m]	x_j [m]	y_j [m]	L_k [m]	t_x	t_y
1	-2	0.125	-1	0.125	1	1	0
2	-1	0.125	1	0.125	2	1	0
3	1	0.125	2	0.125	1	1	0
4	-1	0.125	-1	1.985	1.86	0	1
5	1	0.125	1	1.985	1.86	0	1
6	-1	1.985	1	1.985	2	1	0

TABLA D.4 Propiedades Paneles

D.3.3 Flexocompresión

Una vez definidas las paredes, se puede proceder a calcular las propiedades de la sección relativas a flexocompresión. Estas son el área (A), el centro de gravedad (x_g, y_g) y los momentos de inercia (I_x, I_y, I_{xy}).

$$A = \sum L_k \cdot t_k \cdot \frac{E_k}{E_0} \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} x_g &= \sum \frac{L_k \cdot t_k}{A} \cdot \frac{E_k}{E_0} \cdot \frac{x_{i,k} + x_{j,k}}{2} \\ y_g &= \sum \frac{L_k \cdot t_k}{A} \cdot \frac{E_k}{E_0} \cdot \frac{y_{i,k} + y_{j,k}}{2} \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$\begin{aligned} I_x &= \sum \frac{E_k}{E_0} \cdot L_k \cdot t_k \cdot \left(\left(\frac{y_{j,k} - y_{i,k}}{12} \right)^2 + \left(\frac{y_{i,k} + y_{j,k}}{2} - Y_g \right)^2 + \frac{(t_k \cdot t_{x,k})^2}{12} \right) \\ I_y &= \sum \frac{E_k}{E_0} \cdot L_k \cdot t_k \cdot \left(\left(\frac{x_{j,k} - x_{i,k}}{12} \right)^2 + \left(\frac{x_{i,k} + x_{j,k}}{2} - X_g \right)^2 + \frac{(t_k \cdot t_{y,k})^2}{12} \right) \\ I_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (D.3)$$

Tomando los valores de la sección:

$$A = 0.2773 \text{ m}^2$$

$$x_g = 0.0000 \text{ m}$$

$$y_g = 0.7771 \text{ m}$$

$$I_x = 0.1762 \text{ m}^4$$

$$I_y = 0.2849 \text{ m}^4$$

En este punto, resulta de utilidad en adelante redefinir las coordenadas nodales respecto al centro de gravedad:

$$x_i = x_i - x_g$$

$$y_i = y_i - y_g$$

Expresado en forma de tabla para la sección:

Nodo	x [m]	y [m]
1	-2	-0.6521
2	-1	-0.6521
3	1	-0.6521
4	2	-0.6521
5	-1	1.2079
6	1	1.2079

TABLA D.5 Coordenadas nodales

Los movimientos en la sección para los casos de flexocompresión resultan triviales, al ser movimientos unitarios en la dirección de los respectivos ejes.

Primeramente se muestra el movimiento en x , llamado u_x .

En la figura D.2 se ha representado el movimiento en x .

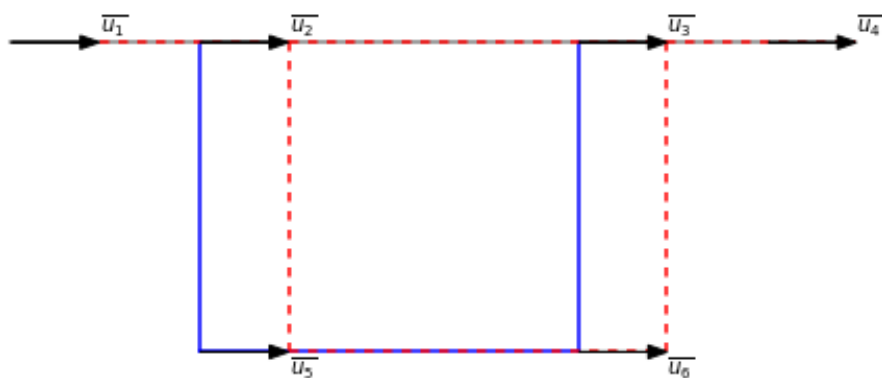


FIGURA D.2 Movimiento u_x

En la tabla D.6 se muestran los valores del movimiento en x en los nodos.

Nodo	u_{sx}	u_{sy}	u_{θ}
1	1	0	0
2	1	0	0
3	1	0	0
4	1	0	0
5	1	0	0
6	1	0	0

TABLA D.6 Movimiento u_x

Para obtener los movimientos en las coordenadas locales de los paneles $(\bar{s}, \bar{n})$ hay que transformar los resultados en el nodo de inicio (i) del panel y el nodo final (j) del panel.

La transformación es la siguiente:

$$\begin{aligned} u_{s,i,k} &= t_{x,k} \cdot u_{sx,i} + t_{y,k} \cdot u_{sy,i} \\ u_{n,i,k} &= -t_{y,k} \cdot u_{sx,i} + t_{x,k} \cdot u_{sy,i} \\ u_{\theta,i,k} &= u_{\theta,i} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Aplicado a la sección, los movimientos en los nodos extremos de los paneles se muestran en la tabla D.7:

Panel	$u_{s,i}$	$u_{n,i}$	$u_{\theta,i}$	$u_{s,j}$	$u_{n,j}$	$u_{\theta,j}$
1	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0	0
4	0	-1	0	0	-1	0
5	0	-1	0	0	-1	0
6	1	0	0	1	0	0

TABLA D.7 Movimientos locales u_x

A continuación se muestra el movimiento en y , llamado u_y .

La figura D.3 representa el movimiento en y .

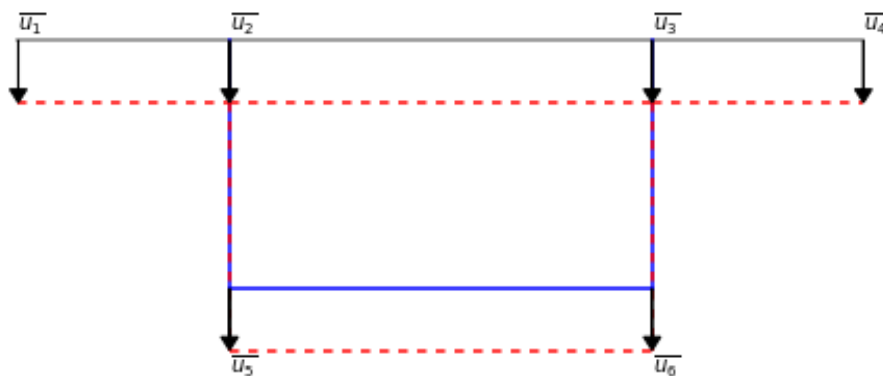


FIGURA D.3 Movimiento u_y

Los valores del movimiento en los nodos se muestran en la tabla D.8.

Nodo	u_{sx}	u_{sy}	u_{θ}
1	0	1	0
2	0	1	0
3	0	1	0
4	0	1	0
5	0	1	0
6	0	1	0

TABLA D.8 Movimiento u_y

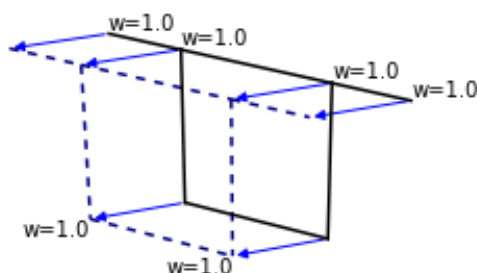
Aplicando la transformación mostrada en la ecuación D.4 se pueden mostrar los movimientos en coordenadas locales de los paneles del siguiente modo:

Panel	$u_{s,i}$	$u_{n,i}$	$u_{\theta,i}$	$u_{s,j}$	$u_{n,j}$	$u_{\theta,j}$
1	0	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	0	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	0	0	1	0

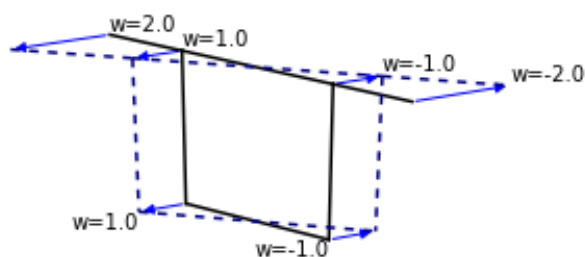
TABLA D.9 Movimientos locales u_y

Seguidamente, se van a mostrar los alabeos debidos a los esfuerzos de flexocompresión.

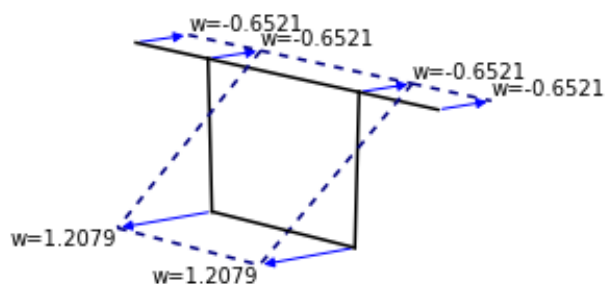
En primer lugar, se muestra en la figura D.4 el alabeo debido a axil (w_n), que adopta un valor unitario para toda la sección.


FIGURA D.4 Alabeo w_n

Siguiendo con los alabeos, se muestra en la figura D.5 el alabeo debido al movimiento en x , que es w_x , y se corresponde con $-x$.

FIGURA D.5 Alabeo w_x

El alabeo debido al movimiento en y se denomina w_y , y se corresponde con y . Se muestra en la figura D.6.

FIGURA D.6 Alabeo w_y

Por último, se resume el valor en los nodos de todos los alabeos anteriores en la siguiente tabla:

Nodo	$w_n = 1$	$w_x = -x$	$w_y = y$
1	1	2	-0.6521
2	1	1	-0.6521
3	1	-1	-0.6521
4	1	-2	-0.6521
5	1	1	1.2079
6	1	-1	1.2079

TABLA D.10 Alabeos debidos a la flexocompresión

D.3.4 Torsión

El siguiente paso es calcular las propiedades de torsión. Estas propiedades dependen del centro de giro, que a priori resulta desconocido, por lo que la primera parte del cálculo consiste en la determinación este. A modo de resumen, para obtener el centro de giro (x_t, y_t) , en primer lugar, de un centro de giro arbitrario (x_b, y_b) . Respecto a este centro se obtiene la función de alabeo (w_t) y, ortogonalizando respecto a axiles y momentos, se llega al centro de giro real. Este proceso se realiza a través de un cálculo matricial que se explica en primer lugar.

La función de alabeo vinculada a un centro de giro cualquiera se obtiene a partir de la resolución del sistema de ecuaciones del tipo:

$$\overline{\overline{K_G}} \cdot \overline{w_t} = \overline{f_t} \quad (\text{D.5})$$

Donde $\overline{\overline{K_G}}$ y $\overline{f_t}$ son el resultado de ensamblar, para toda la sección, el vector de fuerzas de cada elemento de pared $(\overline{f_{t,k}})$, y la matriz de rigidez de cada elemento de pared $(\overline{\overline{K_{G,k}}})$.

La matriz de rigidez de cada elemento de pared $(\overline{\overline{K_{G,k}}})$ se define como:

$$\overline{\overline{K_{G,k}}} = \frac{G \cdot t_k}{L_k} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

Donde el valor de $G \cdot t_k / L_k$ aplicado a los paneles se muestra en la tabla D.11

Nodo	G [MPa]	t_k [m]	L_k [m]	$G \cdot t_k / L_k$
1	12500	0.25	1	3125
2	12500	0.25	2	1563
3	12500	0.25	1	3125
4	85000	0.02	1.86	914
5	85000	0.02	1.86	914
6	85000	0.03	2	1275

TABLA D.11 $G \cdot t_k / L_k$

Si se ensamblan todos los elementos, la matriz $\overline{\overline{K_G}}$ resultante es:

$$\overline{\overline{K_G}} = \begin{bmatrix} 3125 & -3125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3125 & 5601 & -1563 & 0 & -914 & 0 \\ 0 & -1563 & 5601 & -3125 & 0 & -914 \\ 0 & 0 & -3125 & 3125 & 0 & 0 \\ 0 & -914 & 0 & 0 & 2189 & -1275 \\ 0 & 0 & -914 & 0 & -1275 & 2189 \end{bmatrix}$$

Volviendo al vector de fuerzas $\overline{f_{t,k}}$, este se define como:

$$\overline{f_{t,k}} = G \cdot t_k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot h_{t,k} \quad (D.7)$$

En la ecuación anterior se muestra que en el vector de fuerzas interviene la distancia del centro de giro a la pared (h_t), que es un dato que se desconoce a priori. Por lo tanto, para obtener el alabeo es necesario calcular el centro de giro. Para obtener este centro se va a suponer un centro de giro arbitrario, y se van a obtener la función de alabeo vinculada a ese centro de giro. Imponiendo que los momentos flectores son nulos para la resultante de tensiones debida a la función de alabeo se obtienen dos condiciones adicionales, que permiten calcular las dos coordenadas del centro de giro. El proceso al completo se detalla a continuación.

El primer paso es suponer un centro de giro, que en este caso va a ser el centro de gravedad de la sección (0, 0). Tomando como referencia ese centro de giro, se va a obtener la distancia h_b de las paredes al centro de giro del siguiente modo:

$$h_{b,k} = -(x_{i,k} - x_b) \cdot t_{y,k} + (y_{i,k} - y_b) \cdot t_{x,k} \quad (D.8)$$

El resultado de sustituir en la ecuación anterior los valores de los paneles se muestra en la tabla D.12.

Panel	x_i [m]	x_b [m]	x_i [m]	x_b [m]	t_x	t_y	h_b [m]
1	-2	0	-0.6521	0	1	0	-0.6521
2	-1	0	-0.6521	0	1	0	-0.6521
3	1	0	-0.6521	0	1	0	-0.6521
4	-1	0	-0.6521	0	0	1	1
5	1	0	-0.6521	0	0	1	-1
6	-1	0	1.2079	0	1	0	1.2079

 TABLA D.12 h_b

Remplazando esos valores de h_b por h_t en el vector de fuerzas ($\overline{f_t}$), el vector resultante es:

$$\overline{f_t} = \begin{pmatrix} 2038 \\ -1700 \\ 1700 \\ -2038 \\ -1380 \\ 1380 \end{pmatrix}$$

Definido el sistema de ecuaciones, este necesita de una condición de contorno para su resolución. Una hipótesis habitual es imponer el alabeo nulo en uno de los nodos, que en este caso va a ser el nodo 1: $w_{t,1} = 0$. Aplicando esta condición, la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\overline{w_{t0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6521 \\ -0.6381 \\ -1.2902 \\ -1.0454 \\ -0.2448 \end{pmatrix}$$

Para compensar la condición que se ha impuesto de alabeo nulo en un punto, se va redefinir el alabeo de modo que la resultante de tensiones longitudinales sea nula. Este proceso se conoce como ortogonalizar respecto al axil, y se realiza sumando un valor constante a la

función de alabeo, que se corresponde con el alabeo por axil:

$$w_{t1,i} = w_{t0,i} + C_N \quad (D.9)$$

Donde C_N se define como:

$$C_N = - \sum \frac{L_k \cdot t_k}{A} \cdot \frac{E_k}{E_0} \cdot \frac{w_{t0,i,k} + w_{t0,j,k}}{2} \quad (D.10)$$

El valor de C_N en este caso es:

$$C_N = 0.6451$$

Y por lo tanto la función de alabeo w_{t1} redefinida es:

$$\overline{w_{t1}} = \begin{pmatrix} 0.6451 \\ -0.007 \\ 0.007 \\ -0.6451 \\ -0.4003 \\ 0.4003 \end{pmatrix}$$

El centro de giro x_t, y_t , este se obtiene a partir de la función anterior. Para ello hay que ortogonalizar respecto al alabeo como se muestra a continuación:

$$x_t = x_b - \sum \frac{L_k \cdot t_k \cdot E_k}{I_x^f \cdot E_0 \cdot 6} \cdot (2 \cdot w_{t1,i,k} \cdot y_{i,k} + w_{t1,i,k} \cdot y_{j,k} + w_{t1,j,k} \cdot y_{i,k} + 2 \cdot w_{t1,j,k} \cdot y_{j,k}) \quad (D.11a)$$

$$y_t = y_b + \sum \frac{L_k \cdot t_k \cdot E_k}{I_y^f \cdot E_0 \cdot 6} \cdot (2 \cdot w_{t1,i,k} \cdot x_{i,k} + w_{t1,i,k} \cdot x_{j,k} + w_{t1,j,k} \cdot x_{i,k} + 2 \cdot w_{t1,j,k} \cdot x_{j,k}) \quad (D.11b)$$

Donde todos los valores anteriores han sido previamente definidos a excepción de I_x^f e I_y^f . Estos valores son la inercia a flexión contando únicamente con la fibra media, o dicho de otro modo, la inercia a flexión sin contar con la contribución debida a la flexión local de las paredes. Expresado de forma matemática:

$$I_x^f = \sum \frac{E_k}{E_0} \cdot L_k \cdot t_k \cdot \left(\left(\frac{y_{j,k} - y_{i,k}}{12} \right)^2 + \left(\frac{y_{i,k} + y_{j,k}}{2} - y_g \right)^2 \right) \quad (D.12)$$

$$I_y^f = \sum \frac{E_k}{E_0} \cdot L_k \cdot t_k \cdot \left(\left(\frac{x_{j,k} - x_{i,k}}{12} \right)^2 + \left(\frac{x_{i,k} + x_{j,k}}{2} - x_g \right)^2 \right) \quad (D.13)$$

Aplicados a la sección objeto de estudio, esos valores son:

$$I_x^f = 0.1755 m^4$$

$$I_y^f = 0.2849 m^4$$

Una vez conocidos todos los valores de las ecuaciones D.11 se puede proceder a calcular el centro de giro:

$$x_t = 0.0000 m$$

$$y_t = -0.0518 m$$

Obtenido el centro de giro, se repite el proceso para obtener la función de alabeo. El primer paso es volver a calcular la distancia del centro de giro a las paredes (h_t):

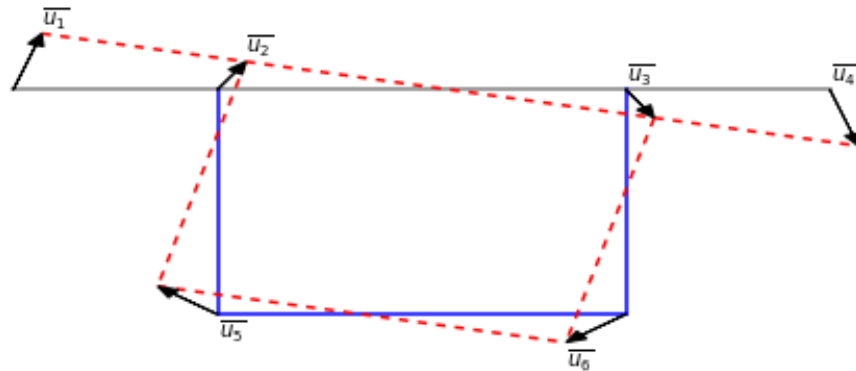
$$h_{t,k} = -(x_{i,k} - x_t) \cdot t_{y,k} + (y_{i,k} - y_t) \cdot t_{x,k} \quad (D.14)$$

Cuyos valores aplicados a la sección se muestran en la siguiente tabla:

Panel	x_i [m]	x_t [m]	y_i [m]	y_t [m]	t_x	t_y	h_t [m]
1	-2	0	-0.6521	-0.0518	1	0	-0.6003
2	-1	0	-0.6521	-0.0518	1	0	-0.6003
3	1	0	-0.6521	-0.0518	1	0	-0.6003
4	-1	0	-0.6521	-0.0518	0	1	1
5	1	0	-0.6521	-0.0518	0	1	-1
6	-1	0	1.2079	-0.0518	1	0	1.2597

TABLA D.13 h_t

El centro de giro también permite establecer los movimientos unitarios en la sección. En el caso de la torsión se van a denominar u_t y gráficamente se muestran en la figura D.7.

FIGURA D.7 Movimiento de giro u_t

Los movimientos debidos al giro tabulados para los nodos se muestran en la tabla D.14.

Nodo	u_{sx}	u_{sy}	u_θ
1	0.6003	-2	1
2	0.6003	-1	1
3	0.6003	1	1
4	0.6003	2	1
5	-1.2597	-1	1
6	-1.2597	1	1

TABLA D.14 Movimiento de giro u_t

Y en las coordenadas locales de los paneles los movimientos de torsión son:

Panel	$u_{s,i}$	$u_{n,i}$	$u_{\theta,i}$	$u_{s,j}$	$u_{n,j}$	$u_{\theta,j}$
1	0.6003	-2	1	0.6003	-1	1
2	0.6003	-1	1	0.6003	1	1
3	0.6003	1	1	0.6003	2	1
4	-1	-0.6003	1	-1	1.2597	1
5	1	-0.6003	1	1	1.2597	1
6	-1.2597	-1	1	-1.2597	1	1

TABLA D.15 Movimientos locales u_t

Volviendo a los alabeos, sustituyendo el valor h_t en el vector de fuerzas $\overline{f}_t$ se obtiene el

siguiente resultado:

$$\overline{f}_t = \begin{pmatrix} 1876 \\ -1700 \\ 1700 \\ -1876 \\ -1512 \\ 1512 \end{pmatrix}$$

Debido a que la matriz $\overline{\overline{K}}_G$ no varía, se puede calcular la función de alabeo directamente. En este caso, se vuelve a imponer la condición de que el alabeo $w_{t,1}$ es nulo. Por lo tanto, el alabeo que se obtiene es:

$$\overline{w}_{t0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6003 \\ -0.4829 \\ -1.0832 \\ -0.9936 \\ -0.0895 \end{pmatrix}$$

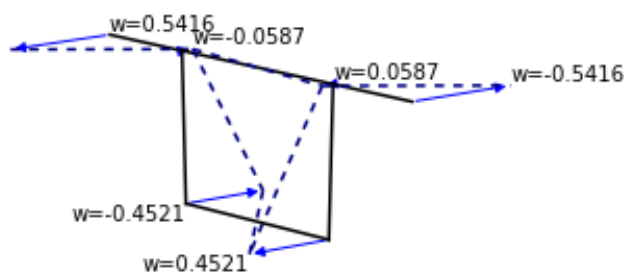
Volviendo a aplicar las ecuaciones D.10 y D.9, se obtiene la función de alabeo definitiva:

$$C_N = 0.5416$$

Nodo	w_t
1	0.5416
2	-0.0587
3	0.0587
4	-0.5416
5	-0.4521
6	0.4521

TABLA D.16 Alabeo w_t

En la figura D.8 se muestra la función de alabeo gráficamente.

FIGURA D.8 Alabeo w_t

Una vez definida la función de alabeo, se puede definir la deformación angular en un elemento de pared para una variación en el giro unitaria:

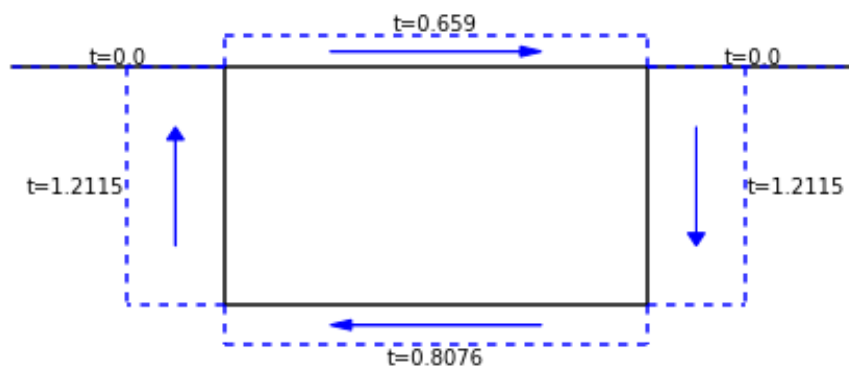
$$t_{t,k} = \frac{w_{t,j,k} - w_{t,i,k}}{L_k} - h_{t,k} \quad (D.15)$$

Concretamente, para la sección objeto de estudio los valores son los siguientes:

Panel	w_{ti}	w_{tj}	L_k [m]	h_t [m]	t_t
1	0.5416	-0.0587	1	-0.6003	0
2	-0.0587	0.0587	2	-0.6003	0.659
3	0.0587	-0.5416	1	-0.6003	0
4	-0.0587	-0.4521	1.86	1	-1.2115
5	0.0587	0.4521	1.86	-1	1.2115
6	-0.4521	0.4521	2	1.2597	-0.8076

TABLA D.17 Deformación t_t

La representación gráfica se muestra en la figura D.9.

FIGURA D.9 Deformación t_t

Conocido el valor de t_t , se puede obtener el valor del módulo de rigidez a torsión uniforme

(J_t) :

$$J_t = \sum L_k \cdot t_k \cdot \frac{G_k}{G_0} \cdot \left(t_{t,k}^2 + \frac{t_k^2}{3} \right) \quad (D.16)$$

Que en este caso es:

$$J_t = 0.1834 m^4$$

Por último, se calcula la inercia a torsión (I_t). Esta se define como la suma de la parte debida al alabeo de la fibra media (I_t^f) y la parte debida a la flexión local de las paredes (I_t^p):

$$I_t = I_t^f + I_t^p \quad (D.17)$$

La parte debida a la fibra media se calcula del siguiente modo:

$$I_t^f = \sum \frac{L_k \cdot t_k \cdot E_k}{E_0 \cdot 3} \cdot ((w_{t,i,k})^2 + w_{t,i,k} \cdot w_{t,j,k} + (w_{t,j,k})^2) \quad (D.18)$$

Y la parte debida a la contribución de las paredes se calcula usando la siguiente fórmula:

$$I_t^p = \sum \frac{(t_k)^3 \cdot E_k}{12 \cdot E_0} \cdot (\overline{u_{t,k}})^t \cdot [\overline{K_{HH,k}}] \cdot (\overline{u_{t,k}}) \quad (D.19)$$

Donde $\overline{u_{t,k}}$ son los movimientos de torsión perpendiculares a la pared y de giro:

$$\overline{u_{t,k}} = \begin{pmatrix} u_{nt,k,i} & u_{\theta t,k,i} & u_{nt,k,j} & u_{\theta t,k,j} \end{pmatrix} \quad (D.20)$$

Y $\overline{\overline{K_{HH,k}}}$ se define como:

$$\overline{\overline{K_{HH,k}}} = \frac{L_k}{420} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 156 & 22 \cdot L_k & 54 & -13 \cdot L_k \\ 22 \cdot L_k & 4 \cdot L_k^2 & 13 \cdot L_k & -3 \cdot L_k^2 \\ \hline 54 & 13 \cdot L_k & 156 & -22 \cdot L_k \\ -13 \cdot L_k & -3 \cdot L_k^2 & -22 \cdot L_k & 4 \cdot L_k^2 \end{array} \right] \quad (D.21)$$

Los resultados tabulados para cada panel de la inercia se muestran en la tabla D.18.

Panel	w_{ti}	w_{tj}	L_k [m]	E [MPa]	t_k [m]	I_t^f [m ⁶]	I_t^p [m ⁶]
1	0.5416	-0.0587	1	30000	0.25	0.0032	0.0004
2	-0.0587	0.0587	2	30000	0.25	0.0001	0.0001
3	0.0587	-0.5416	1	30000	0.25	0.0032	0.0004
4	-0.0587	-0.4521	1.86	210000	0.02	0.0029	0
5	0.0587	0.4521	1.86	210000	0.02	0.0029	0
6	-0.4521	0.4521	2	210000	0.03	0.0041	0

TABLA D.18 Inercia a torsión I_t

Y si se suman los términos anteriores el resultado es:

$$I_t^f = 0.0163 m^6$$

$$I_t^p = 0.0010 m^6$$

$$I_t = 0.0173 m^6$$

D.3.5 Distorsión

En lo referente a la viga recta, el ultimo paso es calcular las propiedades de distorsión. Para ello es necesario, en primer lugar, definir el estado autoequilibrado de cargas que va a deformar la sección. Este estado autoequilibrado lo componen unas fuerzas externas que actúan y unas fuerzas internas que lo equilibran.

Como fuerzas externas se va a considerar un par de fuerzas opuestas de 100 kN aplicado en los nodos 2 y 3 de la sección, tal y como se muestra en la figura D.10.

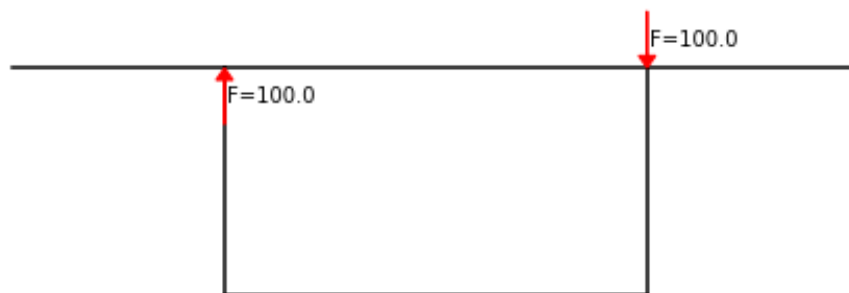


FIGURA D.10 Fuerzas externas aplicadas en la sección

En lo que respecta a las fuerzas internas, se va a establecer que las fuerzas externas son equilibradas por el flujo de torsión uniforme. Para ello se va a calcular en primer lugar la

resultante de torsión debida a las fuerzas externas $M_{t,ex}$:

$$M_{t,ex} = \sum (-F_{x,i} \cdot (y_i - y_t) + F_{y,i} \cdot (x_i)) = 200 \text{ kN.m}$$

Conocido el torsor, y conocidas las tensiones debidas a una fuerza de torsión unitaria, se pueden obtener las fuerzas en los nodos que equilibran las fuerzas externas:

$$\overline{F_{d,k}} = - \frac{M_{t,ex} \cdot t_{t,k} \cdot t_k \cdot L_k \cdot G_k}{2 \cdot J_t^f \cdot G_0} \begin{bmatrix} t_{x,k} \\ t_{y,k} \\ 0 \\ t_{x,k} \\ t_{y,k} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.22})$$

Donde el valor de J_t^f se corresponde con la rigidez a torsión uniforme considerando únicamente la fibra media, y se define como:

$$J_t^f = \sum L_k \cdot t_k \cdot \frac{G_k}{G_0} \cdot (t_{t,k}^2) \quad (\text{D.23})$$

Particularizando para la sección:

$$J_t^f = 0.1803 \text{ m}^4$$

Sumando todas las fuerzas de equilibrio a las fuerzas externas se obtiene el estado auto-equilibrado. Las resultantes F_d en los nodos del estado autoequilibrado son las siguientes:

Nodo	F_x [kN]	F_y [kN]	M_z [kN.m]
1	0	0	0
2	-26.9	-75	0
3	-26.9	75	0
4	0	0	0
5	26.9	25	0
6	26.9	-25	0

TABLA D.19 Fuerzas de distorsión en los nodos F_d

La tabla anterior se muestra de manera gráfica en la figura D.11.

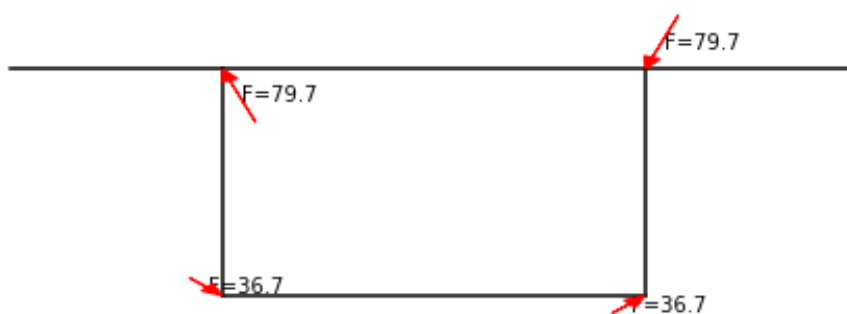


FIGURA D.11 Estado de fuerzas autoequilibrado

En la figura anterior, se puede observar como los vectores de fuerza no están en la dirección de las diagonales de la sección, como habitualmente se muestra en la literatura de distorsión [17]. Esto se debe a que las fuerzas externas se están aplicando concentradas en los nodos superiores, y no distribuidas en las almas. Si se sumaran las fuerzas verticales en el nodo superior e inferior de cada alma, y se repartieran por igual entre ambos nodos, la dirección del vector resultante de estas fuerzas si sería la diagonal. Por lo tanto, la única diferencia entre considerar los vectores en la diagonal y considerar los vectores como en este ejemplo radica en la deformación longitudinal del alma, que se puede considerar despreciable y consecuentemente no existe en la práctica una diferencia. Además, se han comparado los resultados obtenidos con las fórmulas clásicas para el cálculo de los parámetros de distorsión en secciones cajón, y se han obtenido diferencias inferiores al 0.1 %.

Una vez definido el estado autoequilibrado de cargas, el siguiente paso es calcular la deformación de la sección como pórtico plano. Para ello se plantea un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\overline{\overline{K_s}} \cdot \overline{u_d} = \overline{F_d} \quad (D.24)$$

La matriz de rigidez ($\overline{\overline{K_s}}$) de la sección se obtiene de la manera tradicional, considerando cada elemento de pared como una viga de longitud ($L = L_k$), módulo de elasticidad ($E_{s,k}$), área igual al espesor de la pared ($A = t_k$) e inercia proporcional al espesor de la

pared ($I = t_k^3/12$). Es decir:

$$\overline{\overline{K}}_{s,k} = E_{s,k} \cdot \overline{\overline{T}}^t \cdot \overline{\overline{T}} \quad (D.25)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot I}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot I}{L} \\ -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot I}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot I}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot I}{L} \end{bmatrix}$$

El término $\overline{\overline{T}}$ que aparece se refiere a la matriz de cambio de base o matriz de rotación de la viga. Esta depende de la dirección de la pared ($\bar{t}$) y se define como:

$$\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} t_{x,k} & t_{y,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t_{y,k} & t_{x,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{x,k} & t_{y,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t_{y,k} & t_{x,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (D.26)$$

Las propiedades necesarias para el cálculo de la matriz se muestran en la siguiente tabla:

Panel	E_s [MPa]	t_k [m]	L_k [m]	A [m ²]	I [m ⁴]	t_x	t_y
1	31250	0.25	1	0.25	0.0052	1	0
2	31250	0.25	2	0.25	0.0052	1	0
3	31250	0.25	1	0.25	0.0052	1	0
4	222250	0.02	1.86	0.02	2.67E-06	0	1
5	222250	0.02	1.86	0.02	2.67E-06	0	1
6	222250	0.03	2	0.03	9E-06	1	0

TABLA D.20 Propiedades de los paneles

Definida la matriz de rigidez y el vector de fuerzas, el siguiente paso es resolver el sistema. Para que el pórtico sea estable es necesario fijar tres condiciones de contorno, que pueden ser por ejemplo empotrar el pórtico en el nodo 1. Con esas condiciones ya se puede resolver la estructura. Los resultados se muestran en la tabla D.21.

Nodo	u_{dx}	u_{dy}	$u_{d\theta}$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0.43	0
4	0	0.43	0
5	111.834	0.02	-15.64
6	111.834	0.41	-15.64

TABLA D.21 Movimientos en el pórtico u_{d0}

La solución anterior se ha mostrado en coordenadas globales. Para referirla a coordenadas locales de los paneles se puede hacer uso de la matriz de cambio de base $\overline{\overline{T}}$ del siguiente modo:

$$\overline{u_{d0}} \cdot \overline{\overline{T}} = (u_{ds}, u_{dn}, u_{d\theta}) \quad (\text{D.27})$$

Definida la deformada inicial, el procedimiento para obtener el alabeo resulta muy similar al caso de la torsión. El primer paso es plantear el sistema de ecuaciones para la obtención del alabeo:

$$\overline{\overline{K_G}} \cdot \overline{w_d} = \overline{f_d} \quad (\text{D.28})$$

Donde $\overline{\overline{K_G}}$ es una matriz idéntica a la definida para la torsión, y $\overline{f_d}$ depende de los desplazamientos en la dirección de la pared:

$$\overline{f_{d,k}} = G \cdot t_k \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{u_{ds,i} + u_{ds,j}}{2} \quad (\text{D.29})$$

Estos desplazamientos en los nodos de cada pared, así como el desplazamiento medio se muestran a continuación:

Panel	$u_{ds,i}$	$u_{ds,j}$	u_{ds}
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0.02	0.01
5	0.43	0.41	0.42
6	111.834	111.834	111.834

TABLA D.22 Movimientos en la dirección de la pared u_s

Con estos valores, el vector de cargas resultante es:

$$\overline{f_d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -17.3 \\ -714 \\ 0 \\ -285159 \\ 285890 \end{pmatrix}$$

De manera análoga a la torsión, para resolver el sistema resulta necesario fijar una condición de contorno, que puede ser por ejemplo alabeo nulo en el nodo 1: $w_{d,1} = 0$. De este modo la solución del sistema es:

$$\overline{w_{d0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 39.49 \\ 39.49 \\ -67.49 \\ 107.78 \end{pmatrix}$$

Para compensar la hipótesis de alabeo nulo, se ortogonaliza la función de alabeo respecto al axil y se redefine el alabeo:

$$w_{d1,i} = w_{d0,i} + C_N \quad (D.30)$$

Donde C_N es:

$$C_N = -\frac{1}{A} \sum L_k \cdot t_k \cdot \frac{E_k}{E_0} \cdot \frac{w_{d0,i,k} + w_{d0,j,k}}{2} \quad (D.31)$$

El valor de C_N en este caso es el siguiente:

$$C_N = -19.89$$

Y el alabeo se redefine como:

$$\overline{w_{d1}} = \begin{pmatrix} -19.89 \\ -19.89 \\ 19.6 \\ 19.6 \\ -87.38 \\ 87.9 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es ortogonalizar respecto a los momentos para compensar las condiciones impuestas a la hora de resolver el pórtico plano. Primero se ortogonaliza respecto al eje y :

$$w_{d1,i}^* = w_{d1,i} + C_y \cdot y_i \quad (\text{D.32})$$

Donde C_y se calcula usando la siguiente fórmula:

$$C_y = - \sum \frac{L_k \cdot t_k \cdot E_k}{I_x^f \cdot E_0 \cdot 6} \cdot (2 \cdot w_{d1,i,k} \cdot y_{i,k} + w_{d1,i,k} \cdot y_{j,k} + w_{d1,j,k} \cdot y_{i,k} + 2 \cdot w_{d1,j,k} \cdot y_{j,k}) \quad (\text{D.33})$$

Sustituyendo por los valores de la sección, el resultado es:

$$C_y = 0.2150$$

Y permite redefinir el alabeo como:

$$\overline{w_{d1}^*} = \begin{pmatrix} -19.75 \\ -19.75 \\ 19.75 \\ 19.75 \\ -87.64 \\ 87.64 \end{pmatrix}$$

Posteriormente se ortogonaliza respecto al eje x :

$$w_{d2,i} = w_{d1,i}^* + C_x \cdot x_i \quad (\text{D.34})$$

Donde C_x es:

$$C_x = - \sum \frac{L_k \cdot t_k \cdot E_k}{I_y^f \cdot E_0 \cdot 6} \cdot (2 \cdot w_{d1,i,k}^* \cdot x_{i,k} + w_{d1,i,k}^* \cdot x_{j,k} + w_{d1,j,k}^* \cdot x_{i,k} + 2 \cdot w_{d1,j,k}^* \cdot x_{j,k}) \quad (D.35)$$

Que en este caso adopta el siguiente valor:

$$C_x = -29.25$$

Y permite redefinir el alabeo como:

$$\overline{w_{d2}} = \begin{pmatrix} 38.76 \\ 9.51 \\ -9.51 \\ -38.76 \\ -58.39 \\ 58.39 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes anteriormente calculados sirven para redefinir en vertical y horizontal el campo de movimientos por distorsión. Para ello se emplean las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} u_{dx1,i} &= u_{dx0,i} + C_x \\ u_{dy1,i} &= u_{dy0,i} + C_y \end{aligned} \quad (D.36)$$

Los movimientos después de realizar esta transformación son:

Nodo	u_{dx}	u_{dy}	$u_{d\theta}$
1	-29.251	-0.215	0
2	-29.251	-0.215	0
3	-29.251	0.215	0
4	-29.251	0.215	0
5	82.583	-0.195	-15.64
6	82.583	0.195	-15.64

TABLA D.23 Movimientos en la sección u_{d1}

El último paso es ortogonalizar respecto a la torsión. En este caso se va a realizar respecto a la torsión uniforme, por lo que hay que definir, de manera provisional, la deformación

tangencial en la pared:

$$t_{d0,k} = \frac{u_{ds1,i} + u_{ds1,j}}{2} - \frac{w_{d2,j,k} - w_{d2,i,k}}{L_k} \quad (D.37)$$

Si se sustituyen los valores en los paneles el resultado es:

Panel	u_s	$\Delta w_{d2}/L_k$	t_{d0}
1	-29.251	-29.251	0
2	-29.251	-9.506	-19.745
3	-29.251	-29.251	0
4	-0.205	-36.501	36.296
5	0.205	36.501	-36.296
6	82.583	58.385	24.197

TABLA D.24 Deformación tangencial t_{d0}

Haciendo uso de esa deformación, se puede ortogonalizar respecto a la distorsión del siguiente modo:

$$w_{d3,i} = w_{d2,i} + C_t \cdot w_{t,i} \quad (D.38)$$

Donde C_t se calcula como se muestra a continuación:

$$C_t = - \sum \frac{L_k \cdot t_k \cdot G_k \cdot t_{d0,k} \cdot t_{t,k}}{G_0 \cdot J_t^f} \quad (D.39)$$

Para la sección de estudio, el valor de C_t es:

$$C_t = -29.96$$

Que permite redefinir el alabeo como:

$$\overline{w_{d3}} = \begin{pmatrix} 22.53 \\ 11.26 \\ -11.26 \\ -22.53 \\ -44.84 \\ 44.84 \end{pmatrix}$$

C_t también permite aplicar la corrección por giro a la sección del siguiente modo:

$$\begin{aligned} u_{dx2,i} &= u_{dx1,i} + C_t \cdot (y_i - y_t) \\ u_{dy2,i} &= u_{dy1,i} - C_t \cdot (x_i - x_t) \\ u_{dr2,i} &= u_{dr0,i} - C_t \end{aligned} \quad (D.40)$$

Que se traduce en los siguientes movimientos:

Nodo	u_{dx}	u_{dy}	$u_{d\theta}$
1	-11.27	-60.14	29.96
2	-11.27	-30.18	29.96
3	-11.27	30.18	29.96
4	-11.27	60.14	29.96
5	44.84	-30.16	14.32
6	44.84	30.16	14.32

TABLA D.25 Movimientos en la sección u_{d2}

El último paso es normalizar la deformada. Para ello se toma la deformación en un nudo cualquiera de la sección y se impone el valor que se desee.

$$C_d = \frac{1}{u_{d2,i}} \quad (D.41)$$

En este caso se va a tomar el nodo 3, y se va a considerar un movimiento vertical unitario y positivo.

$$C_d = \frac{1}{u_{dy2,3}} = \frac{1}{30.18}$$

Multiplicando el alabeo por el coeficiente de normalización C_d se obtiene la función de alabeo por distorsión definitiva.

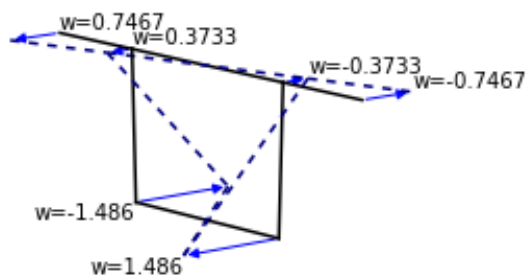
$$w_{d,i} = w_{d3,i} \cdot C_d \quad (D.42)$$

Los resultados tabulados de la función de alabeo por distorsión w_d son:

Nodo	w_d
1	0.7467
2	0.3733
3	-0.3733
4	-0.7467
5	-1.486
6	1.486

TABLA D.26 Alabeo w_d

Y se muestran gráficamente en la figura D.12.

FIGURA D.12 Alabeo w_d

Los movimientos también se normalizan aplicando el coeficiente C_d como se muestra a continuación:

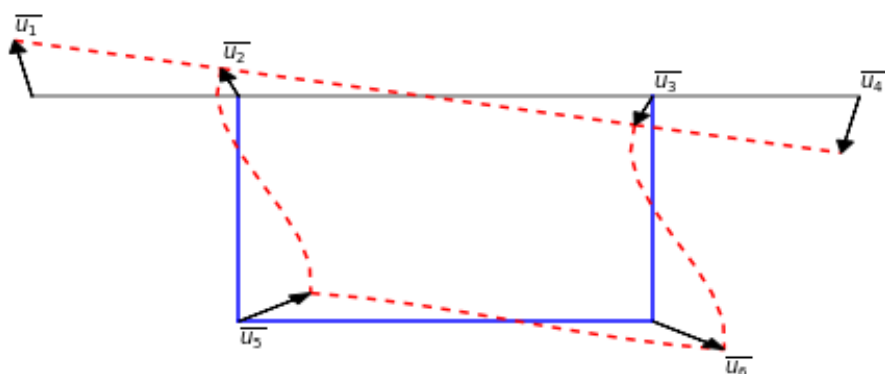
$$\overline{u_d} = \overline{u_{d2}} \cdot C_d \quad (\text{D.43})$$

Aplicando la fórmula anterior, los movimientos definitivos debidos a la distorsión en los nodos se detallan en la tabla D.27.

Nodo	u_{sx}	u_{sy}	u_θ
1	-0.3733	-1.9929	0.9929
2	-0.3733	-1	0.9929
3	-0.3733	1	0.9929
4	-0.3733	1.9929	0.9929
5	1.486	-0.9993	0.4746
6	1.486	0.9993	0.4746

TABLA D.27 Movimiento de distorsión u_d

La tabla anterior se muestra de manera gráfica en la figura D.13.


 FIGURA D.13 Movimiento de distorsión u_d

Los movimientos anteriores en las coordenadas locales de los paneles son:

Panel	$u_{s,i}$	$u_{n,i}$	$u_{\theta,i}$	$u_{s,j}$	$u_{n,j}$	$u_{\theta,j}$
1	0.6003	-2	1	0.6003	-1	1
2	0.6003	-1	1	0.6003	1	1
3	0.6003	1	1	0.6003	2	1
4	-1	-0.6003	1	-1	1.2597	1
5	1	-0.6003	1	1	1.2597	1
6	-1.2597	-1	1	-1.2597	1	1

 TABLA D.28 Movimientos locales u_d

Conocido el alabeo, y conocidos los movimientos, se puede proceder a calcular las propiedades de distorsión. Primero se calcula la deformación angular para una distorsión unitaria:

$$t_{d,k} = \frac{u_{ds,i} + u_{ds,j}}{2} - \frac{w_{d,j,k} - w_{d,i,k}}{L_k} \quad (D.44)$$

Expresándolo en forma de tabla:

Panel	u_s	$\Delta w_{d2}/L$	t_{d0}
1	-0.3733	-0.3733	0
2	-0.3733	-0.3733	0
3	-0.3733	-0.3733	0
4	-0.9997	-0.9996	0
5	0.9997	0.9996	0
6	1.486	1.486	0

 TABLA D.29 Deformación tangencial t_d

En la tabla se puede observar como no existe deformación angular. Este resultando se corresponde con lo esperado, al haber impuesto la condición de que no exista torsión uniforme.

El módulo de rigidez a distorsión uniforme (J_d) se obtiene sumando la contribución de la fibra media y la contribución de las paredes:

$$J_d = J_d^f + J_d^p \quad (D.45)$$

La contribución de la fibra media se obtiene integrando la deformación angular en la sección:

$$J_d^f = \sum L_k \cdot t_k \cdot \frac{G_k}{G_0} \cdot (t_{d,k}^2) \quad (D.46)$$

En este caso, al no haber deformación angular en la fibra media, el resultado es nulo.

$$J_d^f = 0$$

En lo que respecta a la contribución de las paredes, esta se obtiene multiplicando los movimientos por la matriz $\overline{\overline{K_{H^I H^I}}}$:

$$J_d^p = \sum \frac{(t_k)^3 \cdot G_k}{3 \cdot G_0} \cdot (\overline{u_{d,k}}^t) \cdot [\overline{\overline{K_{H^I H^I,k}}}] \cdot (\overline{u_{d,k}}) \quad (D.47)$$

Donde $\overline{u_{d,k}}$ son los movimientos de distorsión perpendiculares a la pared y de giro:

$$\overline{u_{d,k}} = \begin{pmatrix} u_{nd,k,i} & u_{\theta d,k,i} & u_{nd,k,j} & u_{\theta d,k,j} \end{pmatrix} \quad (D.48)$$

Y $\overline{\overline{K_{H^I H^I}}}$ se define como:

$$\overline{\overline{K_{H^I H^I,k}}} = \frac{1}{30 \cdot L_k} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 36 & 3 \cdot L_k & -36 & 3 \cdot L_k \\ 3 \cdot L_k & 4 \cdot L_k^2 & -3 \cdot L_k & -1 \cdot L_k^2 \\ \hline -36 & -3 \cdot L_k & 36 & -3 \cdot L_k \\ 3 \cdot L_k & -1 \cdot L_k^2 & -3 \cdot L_k & 4 \cdot L_k^2 \end{array} \right] \quad (D.49)$$

La contribución de cada panel a la rigidez a distorsión uniforme es la siguiente:

Nodo	J_d^p [m ⁴]
1	7.55E-04
2	1.53E-03
3	7.55E-04
4	8.05E-06
5	8.05E-06
6	1.90E-05

TABLA D.30 Contribución de las paredes a la rigidez distorsión uniforme J_d^p

Y la rigidez total es:

$$J_d = J_d^p = 0.0031m^4$$

La inercia a distorsión (I_d) se obtiene de manera muy similar a la inercia a torsión. Se define como la suma de la contribución debida al alabeo en la fibra media y la contribución debida a la deformación por flexión local de las paredes:

$$I_d = I_d^f + I_d^p \quad (D.50)$$

La contribución del alabeo en la fibra media se obtiene del siguiente modo:

$$I_d^f = \sum \frac{L_k \cdot t_k \cdot E_k}{E_0 \cdot 3} \cdot ((w_{d,i,k})^2 + w_{d,i,k} \cdot w_{d,j,k} + (w_{d,j,k})^2) \quad (D.51)$$

Mientras que la contribución de las paredes se calcula como:

$$I_d^p = \sum \frac{(t_k)^3 \cdot E_k}{12 \cdot E_0} \cdot (\overline{u_{d,k}})^t \cdot [\overline{K_{HH,k}}] \cdot (\overline{u_{d,k}}) \quad (D.52)$$

Donde $\overline{u_{d,k}}$ se definió en la ecuación D.48 y $\overline{K_{HH,k}}$ se definió en la ecuación D.21.

Tomando los datos anteriores, la contribución de cada panel a la inercia a distorsión se muestra en la tabla D.31.

Panel	w_{di}	w_{dj}	L_k [m]	E [MPa]	t_k [m]	I_d^f [m ⁶]	I_d^p [m ⁶]
1	0.7467	0.3733	1	30000	0.25	0.0116	4.32E-04
2	0.3733	-0.3733	2	30000	0.25	0.0033	1.24E-04
3	-0.3733	-0.7467	1	30000	0.25	0.0116	4.32E-04
4	0.3733	-1.486	1.86	210000	0.02	0.0222	9.49E-07
5	-0.3733	1.486	1.86	210000	0.02	0.0222	9.49E-07
6	-1.486	1.486	2	210000	0.03	0.0442	1.84E-06

TABLA D.31 Inercia a distorsión I_d

El resultado de sumar las inercias para todos los paneles es el siguiente:

$$I_d^f = 0.1152 m^6$$

$$I_d^p = 0.0010 m^6$$

$$I_d = 0.1162 m^6$$

El último parámetro de distorsión es la rigidez como marco (K_d). Esta se define como:

$$K_d = \frac{1}{E_{s0}} \cdot (\overline{u_d}^t) \cdot [\overline{K_s}] \cdot (\overline{u_d}) \quad (D.53)$$

Donde $\overline{K_s}$ es la matriz de rigidez de pórtico plano de la sección con la que se calcularon los movimientos iniciales y $\overline{u_d}$ son los movimientos de distorsión en coordenadas globales, que se definen para un nodo cualquiera como:

$$\overline{u_{d,k,i}} = \begin{pmatrix} u_{dx,k,i} & u_{dy,k,i} & u_{d\theta,k,i} \end{pmatrix} \quad (D.54)$$

Sustituyendo por los valores de la sección, el valor de K_d es:

$$K_d = 2.98E - 05 m^2$$

En los cálculos anteriores se ha mostrado el proceso para obtener las propiedades de torsión y distorsión por separado. Sin embargo, existe una interacción entre ambas que debe ser también calculada. El parámetro que recoge la interacción uniforme es J_{td} y el parámetro que recoge la interacción no uniforme es I_{td} .

La interacción uniforme se calcula sumando la contribución de la fibra media y la contribución de las paredes:

$$J_{td} = J_{td}^f + J_{td}^p \quad (D.55)$$

La contribución de la fibra media se obtiene como:

$$J_{td}^f = \sum L_k \cdot t_k \cdot \frac{G_k}{G_0} \cdot (t_{t,k} \cdot t_{d,k}) \quad (D.56)$$

En este caso, haberse ortogonalizado la distorsión respecto a la torsión uniforme, el valor anterior es nulo, por lo que:

$$J_{td}^f = 0$$

En lo que respecta a la contribución de las paredes, esta se obtiene multiplicando los movimientos locales en los extremos de las paredes por la matriz $\overline{\overline{K_{H^I H^I}}}$ previamente definida:

$$J_{td}^p = \sum \frac{(t_k)^3 \cdot G_k}{3 \cdot G_0} \cdot (\overline{U_{t,k}})^t \cdot [\overline{\overline{K_{H^I H^I,k}}}] \cdot (\overline{U_{d,k}}) \quad (D.57)$$

El resultado de la contribución de las paredes tabulado por panel es:

Nodo	J_{td}^p [m ⁴]
1	7.60E-04
2	1.53E-03
3	7.60E-04
4	-4.96E-06
5	-4.96E-06
6	1.80E-05

TABLA D.32 Interacción torsión-distorsión uniforme de las paredes J_{td}^p

Y la interacción uniforme total es:

$$J_{td} = J_{td}^p = 0.0031 m^4$$

Para la interacción no uniforme (I_{td}) el proceso es similar. En este caso, por criterio de signo, a la interacción de alabeos en la fibra media se le resta la interacción debida a la flexión en la pared:

$$I_{td} = I_{td}^f - I_{td}^p \quad (D.58)$$

La interacción de la fibra media se define como:

$$I_{td}^f = \sum \frac{L_k \cdot t_k \cdot E_k}{E_0 \cdot 6} (2 \cdot w_{t,i,k} \cdot w_{d,i,k} + w_{t,i,k} \cdot w_{d,j,k} + w_{t,j,k} \cdot w_{d,i,k} + 2 \cdot w_{t,j,k} \cdot w_{d,j,k}) \quad (D.59)$$

Y la interacción de las paredes se define como:

$$I_{td}^p = \sum \frac{(t_k)^3 \cdot E_k}{12 \cdot E_0} \cdot (\overline{u_{t,k}})^t \cdot [\overline{K_{HH,k}}] \cdot (\overline{u_{d,k}}) \quad (D.60)$$

Los cálculos anteriores aplicados a la sección dan como resultado el siguiente valor de interacción no uniforme:

$$\begin{aligned} I_{td}^f &= 0.039 m^6 \\ I_{td}^p &= 0.0001 m^6 \\ I_{td} &= 0.038 m^6 \end{aligned}$$

D.4 Cálculo de propiedades en viga curva

D.4.1 Introducción

En este apartado se van a calcular las propiedades de la viga curva. Para ello se va a adoptar un **radio de 100 m**.

En este caso, la información se va a mostrar teniendo en cuenta las subdivisiones. Los paneles que van de un nodo i a un nodo j se van a dividir en 8 subpaneles, lo cual implica que van a aparecer 7 nodos que van del 1 al 7. Por lo tanto, a la hora de representar un panel se van a representar los 9 nodos, empezando por el i , siguiendo por los nodos interiores del 1 al 7, y acabando en el nodo j . Los subpaneles también se numerarán del 1 al 8.

D.4.2 Cálculo de alabeos

La obtención de los alabeos debidos a flexocompresión es inmediata al estar basados en fórmulas de directa aplicación.

En primer lugar se calcula el alabeo curvo debido al axil w_n^c , que se define como:

$$w_n^c = \frac{R - x_i}{R} \quad (D.61)$$

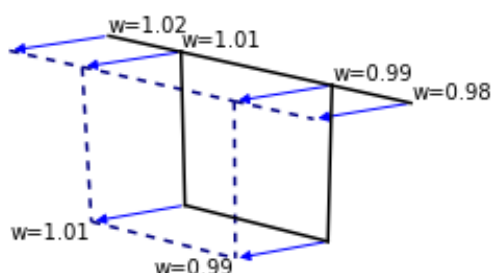
El alabeo anterior se puede expresar en forma de tabla del siguiente modo:

Nodo	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
i	1.0200	1.0100	0.9900	1.0100	0.9900	1.0100
1	1.0188	1.0075	0.9888	1.0100	0.9900	1.0075
2	1.0175	1.0050	0.9875	1.0100	0.9900	1.0050
3	1.0163	1.0025	0.9862	1.0100	0.9900	1.0025
4	1.0150	1.0000	0.9850	1.0100	0.9900	1.0000
5	1.0138	0.9975	0.9838	1.0100	0.9900	0.9975
6	1.0125	0.9950	0.9825	1.0100	0.9900	0.9950
7	1.0112	0.9925	0.9812	1.0100	0.9900	0.9925
j	1.0100	0.9900	0.9800	1.0100	0.9900	0.9900

 TABLA D.33 Alabeo curvo debido al axil w_n^c

Cabe indicar que la tabla anterior se corresponde con la representación que se va a hacer de todos los alabeos en la viga curva. Se van a mostrar todos los nodos que componen el panel porque en ciertos casos el alabeo dejará de ser lineal.

El alabeo w_n^c se puede representar gráficamente como se muestra en la figura D.14.


 FIGURA D.14 Alabeo curvo debido al axil w_n^c

A continuación, se muestra el alabeo debido a la flexión de eje vertical (w_x^c), que se define como:

$$w_x^c = -x_i \quad (D.62)$$

La fórmula anterior expresada en forma de tabla se muestra en la tabla D.34.

Nodo	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
i	2.000	1.00	-1.000	1	-1	1.00
1	1.875	0.75	-1.125	1	-1	0.75
2	1.750	0.50	-1.250	1	-1	0.50
3	1.625	0.25	-1.375	1	-1	0.25
4	1.500	0.00	-1.500	1	-1	0.00
5	1.375	-0.25	-1.625	1	-1	-0.25
6	1.250	-0.50	-1.750	1	-1	-0.50
7	1.125	-0.75	-1.875	1	-1	-0.75
j	1.000	-1.00	-2.000	1	-1	-1.00

TABLA D.34 Alabeo curvo debido a la flexión de eje vertical w_x^c

La representación gráfica de la tabla anterior se muestra en la figura D.15.

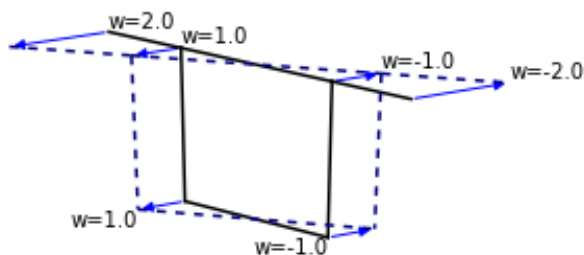


FIGURA D.15 Alabeo curvo debido a la flexión de eje vertical w_x^c

Por último, el alabeo debido a la flexión de eje horizontal (w_y^c), que se define como:

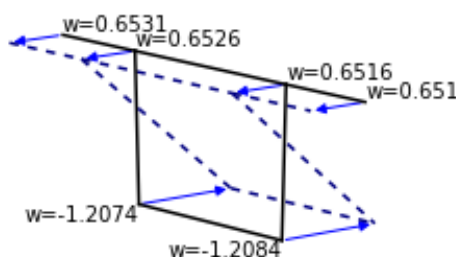
$$w_y^c = -y_i + \frac{x_i \cdot y_t}{R} \quad (\text{D.63})$$

El valor de cada nodo se expresa en forma de tabla en D.35.

Nodo	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
i	0.6531	0.6526	0.6516	0.6526	0.6516	-1.2074
1	0.6530	0.6525	0.6515	0.4201	0.4191	-1.2075
2	0.6530	0.6523	0.6514	0.1876	0.1866	-1.2077
3	0.6529	0.6522	0.6514	-0.0449	-0.0459	-1.2078
4	0.6528	0.6521	0.6513	-0.2774	-0.2784	-1.2079
5	0.6528	0.6519	0.6512	-0.5099	-0.5109	-1.2081
6	0.6527	0.6518	0.6512	-0.7424	-0.7434	-1.2082
7	0.6527	0.6517	0.6511	-0.9749	-0.9759	-1.2083
j	0.6526	0.6516	0.6510	-1.2074	-1.2084	-1.2084

 TABLA D.35 Alabeo curvo debido a la flexión de eje horizontal w_y^c

La tabla anterior, representada gráficamente, se muestra en la figura D.16.


 FIGURA D.16 Alabeo curvo debido a la flexión de eje horizontal w_y^c

El cálculo del alabeo debido a torsión ya no es el resultado de aplicar una fórmula directa, sino requiere de solucionar un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\overline{\overline{K_G^c}} \cdot \overline{w_t^c} = \overline{f_t^c} \quad (D.64)$$

Donde $\overline{\overline{K_G^c}}$ y $\overline{f_t^c}$ son el resultado de ensamblar, para toda la sección, las matrices de cada elemento de pared $\overline{\overline{K_{G,k}^c}}$ y $\overline{f_{t,k}^c}$.

Concretamente, $\overline{\overline{K_{G,k}^c}}$ se define como:

$$\overline{\overline{K_{G,k}^c}} = G_k \cdot t_k \cdot \left(R_{1,k} - \frac{L_k}{2} \cdot t_{x,k} \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{R_{1,k}}{L_k} - t_{x,k} & -\frac{R_{1,k}}{L_k} \\ t_{x,k} - \frac{R_{1,k}}{L_k} & \frac{R_{1,k}}{L_k} \end{bmatrix} \quad (D.65)$$

Y el vector $\overline{f_{t,k}^c}$ se define como:

$$\overline{f_{t,k}^c} = G_k \cdot t_k \cdot \left(R_{1,k} - \frac{L_k}{2} \cdot t_{x,k} \right) \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -h_{t,k} \\ h_{t,k} \end{pmatrix} \quad (\text{D.66})$$

Como se ha explicado anteriormente, cada panel esta formado por 8 subpaneles. Los parámetros que intervienen en las ecuaciones anteriores son constantes para cada panel, con la excepción de R_1 . Por ello, se muestra en primer lugar una tabla con las propiedades de los subpaneles que componen cada panel y que son comunes. Posteriormente se muestra una tabla con el valor de R_1 correspondiente a cada subpanel.

Panel	G [MPa]	t_k [m]	L_k [m]	t_x	h_t [m]
1	12500	0.25	0.125	1	-0.6003
2	12500	0.25	0.25	1	-0.6003
3	12500	0.25	0.125	1	-0.6003
4	85000	0.02	0.2325	0	1
5	85000	0.02	0.2325	0	-1
6	85000	0.03	0.25	1	1.2597

TABLA D.36 Propiedades de los paneles

Subpanel	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
1	102	101	99	101	99	101
2	101.875	100.75	98.875	101	99	100.75
3	101.75	100.5	98.75	101	99	100.5
4	101.625	100.25	98.625	101	99	100.25
5	101.5	100	98.5	101	99	100
6	101.375	99.75	98.375	101	99	99.75
7	101.25	99.5	98.25	101	99	99.5
8	101.125	99.25	98.125	101	99	99.25

TABLA D.37 R_1 en metros

Conocidos los parámetros que intervienen en el sistema de ecuaciones, se puede resolver este. Para ello, es necesario volver a hacer uso del criterio de fijar como nulo el alabeo en uno de los nodos, en este caso el 1. Con esta hipótesis, se obtiene la solución del sistema de ecuaciones que se muestra en la tabla D.38.

Nodo	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
i	0	-0.5885	-0.4608	-0.5885	-0.4608	-0.9553
1	-0.0736	-0.574	-0.536	-0.6344	-0.4083	-0.8393
2	-0.1471	-0.5591	-0.6112	-0.6802	-0.3558	-0.7238
3	-0.2207	-0.5437	-0.6864	-0.7261	-0.3034	-0.6087
4	-0.2943	-0.528	-0.7616	-0.7719	-0.2509	-0.4942
5	-0.3678	-0.5118	-0.8368	-0.8178	-0.1984	-0.3801
6	-0.4414	-0.4952	-0.9121	-0.8636	-0.146	-0.2666
7	-0.515	-0.4782	-0.9873	-0.9095	-0.0935	-0.1536
j	-0.5885	-0.4608	-1.0625	-0.9553	-0.041	-0.041

 TABLA D.38 Solución del sistema w_{t0}^c

No obstante, al haberse fijado el criterio de alabeo nulo en un punto, es necesario ortogonalizar el alabeo respecto alabeo debido al axil curvo, de forma que el alabeo definitivo se pueda expresar como:

$$w_t^c = w_{t0}^c + C_N \cdot w_n^c \quad (D.67)$$

Donde C_N se obtiene aplicando la siguiente ecuación:

$$C_N = - \sum \frac{E_k \cdot t_k}{E_0 \cdot A} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww}^c}] \cdot \begin{pmatrix} w_{t0,i}^c \\ w_{t0,j}^c \end{pmatrix} \quad (D.68)$$

En la ecuación D.68 aparece la matriz $\overline{M_{ww}^c}$, que permite integrar los alabeos de una sección curva. Esta se define como:

$$\overline{M_{ww}^c} = \begin{bmatrix} \left(\frac{R+x_i}{R} \right) \cdot \frac{L_k}{3} + \frac{t_{x,k}}{R} \cdot \frac{L_k^2}{12} & \left(\frac{R+x_i}{R} \right) \cdot \frac{L_k}{6} + \frac{t_{x,k}}{R} \cdot \frac{L_k^2}{12} \\ \left(\frac{R+x_i}{R} \right) \cdot \frac{L_k}{6} + \frac{t_{x,k}}{R} \cdot \frac{L_k^2}{12} & \left(\frac{R+x_i}{R} \right) \cdot \frac{L_k}{3} + \frac{t_{x,k}}{R} \cdot \frac{L_k^2}{4} \end{bmatrix} \quad (D.69)$$

Donde todos los parámetros han sido previamente definidos, aclarando que x_i se refiere a la coordenada de inicio del subpanel.

El término C_N aplicado a la sección adopta el siguiente valor:

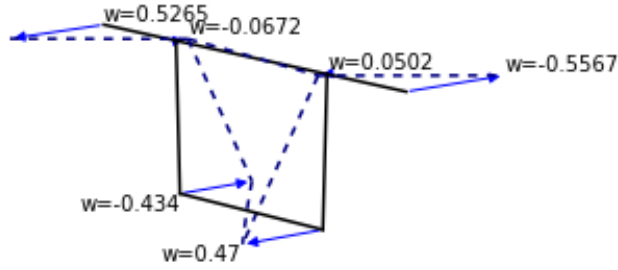
$$C_N = 0.5162$$

Y el alabeo definitivo se muestra en la tabla D.39.

Nodo	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
i	0.5265	-0.0672	0.0502	-0.0672	0.0502	-0.434
1	0.4523	-0.054	-0.0256	-0.1131	0.1027	-0.3193
2	0.3781	-0.0403	-0.1015	-0.1589	0.1552	-0.205
3	0.3038	-0.0263	-0.1774	-0.2048	0.2076	-0.0913
4	0.2296	-0.0118	-0.2532	-0.2506	0.2601	0.022
5	0.1554	0.0031	-0.3291	-0.2965	0.3126	0.1348
6	0.0812	0.0184	-0.4049	-0.3423	0.365	0.247
7	0.007	0.0341	-0.4808	-0.3882	0.4175	0.3587
j	-0.0672	0.0502	-0.5567	-0.434	0.47	0.47

TABLA D.39 Alabeo debido a torsión w_t^c

Su representación gráfica se muestra en la figura D.17.

FIGURA D.17 Alabeo curvo debido torsión w_t^c

El alabeo debido a distorsión se obtiene siguiendo un procedimiento análogo a la torsión. En este caso el sistema de ecuaciones es del tipo:

$$\overline{\overline{K_G^c}} \cdot \overline{w_{d0}^c} = \overline{f_d^c} \quad (\text{D.70})$$

Donde $\overline{\overline{K_G^c}}$ ha sido definida previamente y $\overline{f_d^c}$ es el resultado de ensamblar el vector $\overline{f_{d,k}^c}$ para los distintos elementos que componen la matriz.

Concretamente, $\overline{f_{d,k}^c}$ se define como:

$$\overline{f_{d,k}^c} = G_k \cdot t_k \cdot \left(R_{1,k} - \frac{L_k}{2} \cdot t_{x,k} \right) \cdot R \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{u_{ds,i} + u_{ds,j}}{2} \quad (\text{D.71})$$

En la tabla D.40 se muestra el valor medio de u_{ds} en cada subpanel.

Subpanel	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
1	-0.3733	-0.3733	-0.3733	-0.9999	0.9999	1.4859
2	-0.3733	-0.3734	-0.3733	-0.9998	0.9998	1.4859
3	-0.3733	-0.3734	-0.3733	-0.9997	0.9997	1.4859
4	-0.3733	-0.3734	-0.3733	-0.9996	0.9996	1.4859
5	-0.3733	-0.3734	-0.3733	-0.9995	0.9995	1.4859
6	-0.3733	-0.3734	-0.3733	-0.9995	0.9995	1.4859
7	-0.3733	-0.3734	-0.3733	-0.9994	0.9994	1.4859
8	-0.3733	-0.3733	-0.3733	-0.9993	0.9993	1.4859

 TABLA D.40 u_{ds}

Con esos datos, se puede proceder a resolver el sistema de ecuaciones, añadiendo una vez más la condición de alabeo nulo en el nodo 1. La solución se muestra en la siguiente tabla:

Nodo	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
i	0.0000	-0.3660	-1.0982	-0.3660	-1.0982	-2.2066
1	-0.0457	-0.4575	-1.1439	-0.5962	-0.8634	-1.8334
2	-0.0915	-0.5490	-1.1897	-0.8263	-0.6286	-1.4601
3	-0.1372	-0.6406	-1.2354	-1.0564	-0.3939	-1.0868
4	-0.1830	-0.7321	-1.2812	-1.2865	-0.1591	-0.7135
5	-0.2287	-0.8236	-1.3269	-1.5165	0.0756	-0.3402
6	-0.2745	-0.9152	-1.3727	-1.7466	0.3103	0.0331
7	-0.3202	-1.0067	-1.4184	-1.9766	0.5450	0.4063
j	-0.3660	-1.0982	-1.4642	-2.2066	0.7796	0.7796

 TABLA D.41 Solución del sistema w_{d0}^c

Para compensar el alabeo nulo se va a modificar, una vez más, la función de alabeo aplicando la corrección por axil:

$$w_d^c = w_{d0}^c + C_N \cdot w_n^c \quad (\text{D.72})$$

En la ecuación anterior C_N se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$C_N = - \sum \frac{E_k \cdot t_k}{E_0 \cdot A} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww}^c}] \cdot \begin{pmatrix} w_{d0,i}^c \\ w_{d0,j}^c \end{pmatrix} \quad (\text{D.73})$$

Donde la matriz $\overline{M_{ww}^c}$ fue definida en la ecuación D.69.

Sustituyendo los términos en la ecuación anterior se obtiene el siguiente coeficiente C_N :

$$C_N = 0.7255$$

Y el alabeo definitivo es:

Nodo	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
i	0.74	0.3668	-0.3799	0.3668	-0.3799	-1.4739
1	0.6934	0.2734	-0.4266	0.1366	-0.1451	-1.1024
2	0.6467	0.1801	-0.4733	-0.0935	0.0896	-0.7309
3	0.6	0.0868	-0.5199	-0.3236	0.3244	-0.3595
4	0.5534	-0.0066	-0.5666	-0.5537	0.5591	0.012
5	0.5067	-0.0999	-0.6132	-0.7838	0.7938	0.3835
6	0.4601	-0.1933	-0.6599	-1.0138	1.0285	0.7549
7	0.4134	-0.2866	-0.7065	-1.2439	1.2632	1.1264
j	0.3668	-0.3799	-0.7532	-1.4739	1.4979	1.4979

TABLA D.42 Alabeo debido a distorsión w_d^c

Que se ha representado gráficamente en la figura D.18.

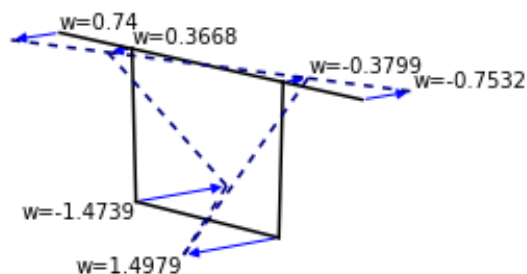


FIGURA D.18 Alabeo curvo debido distorsión w_d^c

D.4.3 Cálculo de deformación angular

Las hipótesis realizadas durante este trabajo hacen que únicamente se haya considerado deformación angular vinculada a la torsión uniforme y a la distorsión uniforme. Esta queda caracterizada por los parámetros t_t^c y t_d^c que se describen a continuación.

El parámetro vinculado a la deformación angular por torsión, t_t^c , se calcula del siguiente

modo para los dos extremos del panel:

$$t_{t,k}^c = \begin{cases} t_{t,k,i}^c = -h_{t,k} + w_{t,i}^c \cdot \frac{t_{x,k}}{R} + \frac{w_{t,j}^c - w_{t,i}^c}{L_k} \cdot \frac{R-x_i}{R} \\ t_{t,k,j}^c = -h_{t,k} + w_{t,j}^c \cdot \frac{t_{x,k}}{R} + \frac{w_{t,i}^c - w_{t,j}^c}{L_k} \cdot \frac{R-x_j}{R} \end{cases} \quad (D.74)$$

El valor del parámetro t_t^c medio en cada subpanel es:

Subpanel	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
1	0	0.6532	0	-1.1992	1.2234	-0.8004
2	0	0.6548	0	-1.1992	1.2234	-0.8024
3	0	0.6564	0	-1.1992	1.2234	-0.8044
4	0	0.6581	0	-1.1992	1.2234	-0.8064
5	0	0.6597	0	-1.1992	1.2234	-0.8085
6	0	0.6614	0	-1.1992	1.2234	-0.8105
7	0	0.663	0	-1.1992	1.2234	-0.8125
8	0	0.6647	0	-1.1992	1.2234	-0.8146

TABLA D.43 t_t^c

Y esta tabla se muestra gráficamente en la figura D.19.

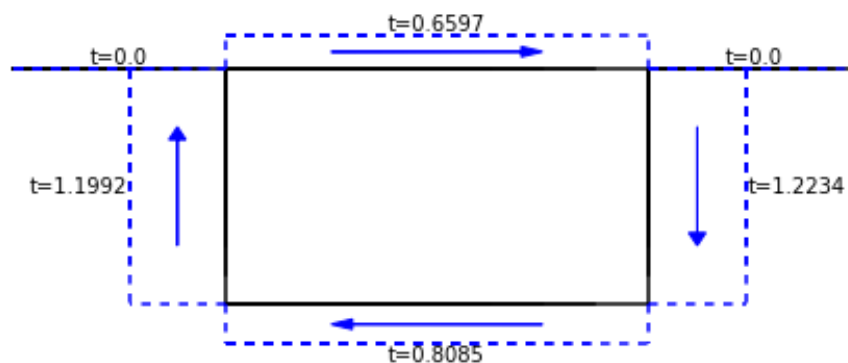


FIGURA D.19 t_t^c

En lo que respecta a la deformación angular por distorsión, el procedimiento para su cálculo es muy similar al anterior.

El término t_d^c se calcula del siguiente modo para los dos extremos del panel:

$$t_{d,k}^c = \begin{cases} t_{d,k,i}^c = u_{ds,k,i} - w_{t,i}^c \cdot \frac{t_{x,k}}{R} - \frac{w_{d,j}^c - w_{d,i}^c}{L_k} \cdot \frac{R-x_i}{R} \\ t_{d,k,j}^c = u_{ds,k,j} - w_{t,j}^c \cdot \frac{t_{x,k}}{R} - \frac{w_{d,i}^c - w_{d,j}^c}{L_k} \cdot \frac{R-x_j}{R} \end{cases} \quad (D.75)$$

Y el valor medio que adopta el parámetro t_d^c en cada subpanel se muestra en la tabla D.44.

Subpanel	Panel 1	Panel 2	Panel 3	Panel 4	Panel 5	Panel 6
1	0	0.0001	0	-0.0001	0.0001	-0.0001
2	0	0.0001	0	-0.0001	0.0001	-0.0001
3	0	0.0001	0	-0.0001	0.0001	-0.0001
4	0	0.0001	0	-0.0001	0.0001	-0.0001
5	0	0.0001	0	-0.0001	0.0001	-0.0001
6	0	0.0001	0	-0.0001	0.0001	-0.0001
7	0	0.0001	0	-0.0001	0.0001	-0.0001
8	0	0.0001	0	-0.0001	0.0001	-0.0001

TABLA D.44 t_d^c

Su representación gráfica se ha omitido debido a que el valor de t_d^c se puede considerar despreciable.

D.4.4 Cálculo de propiedades

Una vez definidos los alabeos y las deformaciones angulares, se puede proceder a calcular las propiedades de la sección.

En primer lugar, se calcula el momento de primer orden curvo vinculado al movimiento de distorsión en x . Para ello se va a aproximar el desplazamiento en x de la sección debido al movimiento a una función lineal. Esta simplificación permite expresar el movimiento como un alabeo más, de modo que la integral se puede calcular del siguiente modo:

$$Q_u^c = \sum \frac{E_k \cdot t_k}{E_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overline{[M_{ww,k}^c]} \cdot \begin{pmatrix} u_{dx,i}^c \\ u_{dx,j}^c \end{pmatrix} \quad (\text{D.76})$$

Sustituyendo por los valores de la sección, el resultado que se obtiene es el siguiente:

$$Q_u^c = 0.0713 m^3$$

Las inercias curvas (I^c) dependen de la contribución de una parte debida al alabeo en la fibra media y otra parte debida a la flexión local de las paredes. Esto se puede expresar de manera genérica como:

$$I^c = I_f^c + I_p^c \quad (\text{D.77})$$

La contribución del alabeo en la fibra media se calcula de manera genérica para dos alabeos cualesquiera w_1 y w_2 del siguiente modo:

$$I_f^c = I_f^c(w_1, w_2) = \sum \frac{E_k \cdot t_k}{E_0} \cdot \begin{pmatrix} w_{1,k,i} & w_{1,k,j} \end{pmatrix} \cdot [\overline{M_{ww,k}^c}] \cdot \begin{pmatrix} w_{2,k,i} \\ w_{2,k,j} \end{pmatrix} \quad (D.78)$$

Donde todos los términos han sido definidos previamente.

La contribución de la flexión de las paredes para dos movimientos genéricos $\overline{u_1}$ y $\overline{u_2}$ se calcula como:

$$I_p^c = I_p^c(\overline{u_1}, \overline{u_2}) = \sum \frac{(t_k)^3 \cdot E_k}{12 \cdot E_0} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u_{1,k}}^t \end{pmatrix} \cdot [\overline{K_{HH,k}}] \cdot \begin{pmatrix} \overline{u_{2,k}} \end{pmatrix} \quad (D.79)$$

Donde $\overline{u_{m,k}}$ son los movimientos en coordenadas locales de la pared:

$$\overline{u_{m,k}} = \begin{pmatrix} u_{nm,k,i} & u_{\theta m,k,i} & u_{nm,k,j} & u_{\theta m,k,j} \end{pmatrix} \quad (D.80)$$

Esta notación permite expresar las inercias de la sección (I_i^c, I_{ij}^c) del siguiente modo:

$$I_x^c = I_f^c(y, y) + I_p^c(\overline{u_y}, \overline{u_y}) \quad (D.81a)$$

$$I_y^c = I_f^c(x, x) + I_p^c(\overline{u_x}, \overline{u_x}) \quad (D.81b)$$

$$I_t^c = I_f^c(w_t^c, w_t^c) + I_p^c(\overline{u_t}, \overline{u_t}) \quad (D.81c)$$

$$I_d^c = I_f^c(w_d^c, w_d^c) + I_p^c(\overline{u_d}, \overline{u_d}) \quad (D.81d)$$

$$I_u^c = I_f^c(u_{dx}, u_{dx}) \quad (D.81e)$$

$$I_{xy}^c = I_f^c(y, x) - I_p^c(\overline{u_x}, \overline{u_y}) \quad (D.81f)$$

$$I_{xt}^c = I_f^c(y, w_t^c) - I_p^c(\overline{u_y}, \overline{u_t}) \quad (D.81g)$$

$$I_{xd}^c = I_f^c(y, w_d^c) + I_p^c(\overline{u_y}, \overline{u_d}) \quad (D.81h)$$

$$I_{xu}^c = I_f^c(y, u_{dx}) \quad (D.81i)$$

$$I_{yt}^c = I_f^c(x, w_t^c) + I_p^c(\overline{u_x}, \overline{u_t}) \quad (D.81j)$$

$$I_{yd}^c = I_f^c(x, w_d^c) - I_p^c(\overline{u_x}, \overline{u_d}) \quad (D.81k)$$

$$I_{yu}^c = I_f^c(x, u_{dx}) \quad (D.81l)$$

$$I_{td}^c = I_f^c(w_t^c, w_d^c) - I_p^c(\overline{u_t}, \overline{u_d}) \quad (D.81m)$$

$$I_{tu}^c = I_f^c(w_t^c, u_{dx}) \quad (D.81n)$$

$$I_{du}^c = I_f^c(w_d^c, u_{dx}) \quad (D.81ñ)$$

Donde se ha hecho uso de que $u_x = -t_y$ y $u_y = t_x$.

El resultado de cada uno de los términos anteriores se muestra en la siguiente tabla:

Propiedad	I_f^c	I_p^c	I^c	Unidades
I_x^c	0.1755	7.49E-04	0.1762	[m ⁴]
I_y^c	0.2849	2.48E-06	0.2849	[m ⁴]
I_t^c	0.0164	9.95E-04	0.0173	[m ⁶]
I_d^c	0.1152	9.92E-04	0.1162	[m ⁶]
I_u^c	0.2079	-	0.2079	[m ⁴]
I_{xy}^c	-7.94E-04	0.00E+00	-7.94E-04	[m ⁴]
I_{xt}^c	3.33E-03	3.39E-20	3.33E-03	[m ⁵]
I_{xd}^c	2.91E-03	2.09E-17	2.91E-03	[m ⁵]
I_{xu}^c	0.1806	-	0.1806	[m ⁴]
I_{yt}^c	-1.98E-05	-8.18E-07	-2.10E-05	[m ⁵]
I_{yd}^c	-6.46E-06	1.18E-06	-8.00E-06	[m ⁵]
I_{yu}^c	-5.89E-05	-	-5.89E-05	[m ⁴]
I_{td}^c	0.0391	9.90E-04	0.0381	[m ⁶]
I_{tu}^c	3.40E-03	-	3.40E-03	[m ⁵]
I_{du}^c	2.99E-03	-	2.99E-03	[m ⁵]

TABLA D.45 Inercias curvas

Para calcular la rigidez a torsión y distorsión uniforme el procedimiento es muy similar. También se va a calcular como la suma de una parte debida a la deformación en la fibra media y otra parte debida a la deformación en la pared. Esto se expresa del siguiente modo:

$$J^c = J_f^c + J_p^c \quad (\text{D.82})$$

La contribución de la deformación en la fibra media se calcula de manera genérica para dos deformaciones cualesquiera t_1 y t_2 del siguiente modo:

$$J_f^c = J_f^c(t_1, t_2) = \sum \frac{G_k \cdot t_k}{G_0} \cdot \begin{pmatrix} t_{1,k,i} & t_{1,k,j} \end{pmatrix} \cdot \overline{[M_{ww,k}^c]} \cdot \begin{pmatrix} t_{2,k,i} \\ t_{2,k,j} \end{pmatrix} \quad (\text{D.83})$$

Y la contribución de las paredes para dos movimientos genéricos $\overline{u_1}$ y $\overline{u_2}$ se calcula como:

$$J_p^c = J_p^c(u_1, u_2) = \sum \frac{(t_k)^3 \cdot G_k}{3 \cdot G_0} \cdot \left(\overline{u_{1,k}}^t \right) \cdot \overline{[K_{H^I H^I, k}]} \cdot (\overline{u_{2,k}}) \quad (\text{D.84})$$

Donde en ambas ecuaciones todos los términos han sido previamente definidos.

Usando esta notación, la rigidez a torsión (J_t^c) y distorsión (J_d^c) uniformes, y su interacción (J_{td}^c), se definen como:

$$J_t^c = J_f^c(t_t^c, t_t^c) + J_p^c(u_t, u_t) \quad (\text{D.85a})$$

$$J_d^c = J_f^c(t_d^c, t_d^c) + J_p^c(u_d, u_d) \quad (\text{D.85b})$$

$$J_{td}^c = J_f^c(t_t^c, t_d^c) + J_p^c(u_t, u_d) \quad (\text{D.85c})$$

Los resultados de las fórmulas anteriores aplicados a la sección son:

Propiedad	J_f^c	J_p^c	J^c	Unidades
J_t^c	0.1802	3.09E-03	0.1833	[m ⁴]
J_d^c	1.80E-09	3.08E-03	3.08E-03	[m ⁴]
J_{td}^c	1.80E-05	3.06E-03	3.08E-03	[m ⁴]

TABLA D.46 Rigidez a torsión y distorsión uniforme

APÉNDICE E

Geometrías consideradas en el cálculo paramétrico

E.1 Introducción

En este apéndice se muestran todos los datos necesarios para poder replicar las geometrías consideradas en el cálculo paramétrico del capítulo 6.

E.2 Tablero recto

E.2.1 Espaciamientos entre diafragmas y rigidizadores

Caso	30m	45m	60m	75m	90m
1	2	2	2	2	2
2	3	3	3	3	3
3	4	4	4	4	4
4	5	5	5	5	5
5	7	9	7	7	7
6	8	11	14	17	19

TABLA E.1 Número de diafragmas en vano principal

Caso	30m	45m	60m	75m	90m
1	2	2	2	2	2
2	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3
4	4	5	4	4	4
5	7	7	7	7	7
6	8	11	11	14	15

TABLA E.2 Número de diafragmas en vano lateral

Caso	30m	45m	60m	75m	90m
1	10	15	20	25	30
2	7.5	11.25	15	18.75	22.5
3	6	9	12	15	18
4	5	7.5	10	12.5	15
5	3.75	4.5	7.5	9.38	11.25
6	3.33	3.75	4	4.17	4.5

TABLA E.3 Espaciamiento de diafragmas en vano principal en metros

Caso	30m	45m	60m	75m	90m
1	8	12	16	20	24
2	6	9	12	15	18
3	6	9	12	15	18
4	4.8	6	9.6	12	14.4
5	3	4.5	6	7.5	9
6	2.67	3	4	4	4.5

TABLA E.4 Espaciamiento de diafragmas en vano lateral en metros

Caso	30m	45m	60m	75m	90m
1	3.33	3.75	4	4.17	3.75
2	3.75	3.75	3.75	3.75	3.75
3	3	4.5	4	3.75	3.6
4	2.5	3.75	3.33	4.17	3.75
5	3.75	4.5	3.75	4.69	3.75
6	3.33	3.75	4	4.17	4.5

TABLA E.5 Espaciamiento entre rigidizadores en vano principal en metros

Caso	30m	45m	60m	75m	90m
1	2.67	3	4	4	3
2	3	3	3	3.75	3.6
3	3	4.5	4	3.75	3.6
4	2.4	3	3.2	4	3.6
5	3	4.5	3	3.75	3
6	2.67	3	4	4	4.5

TABLA E.6 Espaciamiento entre rigidizadores en vano lateral en metros

E.2.2 Secciones

E.2.2.1 Vano principal de 30 m

Sec	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	0 – 5.3	0 – 6	0 – 6	0 – 4.8	0 – 6	0 – 5.3
2	5.3 – 13.3	6 – 12	6 – 12	4.8 – 14.4	6 – 12	5.3 – 13.3
3	13.3 – 18.7	12 – 18	12 – 18	14.4 – 19.2	12 – 18	13.3 – 18.7
4	18.7 – 27.3	18 – 27.8	18 – 27	19.2 – 29	18 – 27.8	18.7 – 27.3
3	27.3 – 34	27.8 – 35.3	27 – 36	29 – 34	27.8 – 35.3	27.3 – 34
2	34 – 44	35.3 – 42.8	36 – 42	34 – 44	35.3 – 42.8	34 – 44
3	44 – 50.7	42.8 – 50.3	42 – 51	44 – 49	42.8 – 50.3	44 – 50.7
4	50.7 – 59.3	50.3 – 60	51 – 60	49 – 58.8	50.3 – 60	50.7 – 59.3
3	59.3 – 64.7	60 – 66	60 – 66	58.8 – 63.6	60 – 66	59.3 – 64.7
2	64.7 – 72.7	66 – 72	66 – 72	63.6 – 73.2	66 – 72	64.7 – 72.7
1	72.7 – 78	72 – 78	72 – 78	73.2 – 78	72 – 78	72.7 – 78

TABLA E.7 Guitarra de secciones en metros

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
$b_b [m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf} [m]$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$t_{tf} [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	0	0	0	0	0	0

TABLA E.8 Sección 1

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
$b_b [m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf} [m]$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$t_{tf} [mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	12	12	12	12	12	12
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	0	0	0	0	0	0

TABLA E.9 Sección 2

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
$b_b [m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf} [m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf} [mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_b [mm]$	25	25	20	20	25	25
$t_w [mm]$	20	20	18	18	20	20
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	0	0	0	0	0	0

TABLA E.10 Sección 3

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf}[mm]$	35	35	35	35	35	35
$t_b[mm]$	35	35	35	35	35	35
$t_w[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	0	0	0	0	0	0

TABLA E.11 Sección 4

E.2.2.2 Vano principal de 45 m

Sec	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	0 – 6	0 – 6	0 – 7.2	0 – 6	0 – 7.2	0 – 6
2	6 – 24	6 – 24	7.2 – 21.6	6 – 24	7.2 – 21.6	6 – 24
3	24 – 30	24 – 30	21.6 – 28.8	24 – 30	21.6 – 28.8	24 – 30
4	30 – 43.5	30 – 43.5	28.8 – 49.5	30 – 43.5	28.8 – 49.5	30 – 43.5
3	43.5 – 51	43.5 – 51	–	43.5 – 51	–	43.5 – 51
2	51 – 66	51 – 66	49.5 – 67.5	51 – 66	49.5 – 67.5	51 – 66
3	66 – 73.5	66 – 73.5	–	66 – 73.5	–	66 – 73.5
4	73.5 – 87	73.5 – 87	67.5 – 88.2	73.5 – 87	67.5 – 88.2	73.5 – 87
3	87 – 93	87 – 93	88.2 – 95.4	87 – 93	88.2 – 95.4	87 – 93
2	93 – 111	93 – 111	95.4 – 110	93 – 111	95.4 – 110	93 – 111
1	111 – 117	111 – 117	110 – 117	111 – 117	110 – 117	111 – 117

TABLA E.12 Guitarra de secciones en metros

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75
$b_b [m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf} [m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf} [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	3	2	3	2
n_{rw}	1	1	1	1	1	1
$x_{rw,1} [\%]$	50	50	50	50	50	50

TABLA E.13 Sección 1

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75
$b_b [m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf} [m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf} [mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	12	12	12	12	12	12
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	3	2	3	2
n_{rw}	1	1	1	1	1	1
$x_{rw,1} [\%]$	50	50	50	50	50	50

TABLA E.14 Sección 2

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75
$b_b [m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf} [m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf} [mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_b [mm]$	25	25	25	25	25	25
$t_w [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	3	2	3	2
n_{rw}	1	1	1	1	1	1
$x_{rw,1} [\%]$	50	50	50	50	50	50

TABLA E.15 Sección 3

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	45	45	45	45	45	45
$t_b[mm]$	50	50	50	50	50	50
$t_w[mm]$	20	20	25	20	25	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	3	2	3	2
n_{rw}	1	1	1	1	1	1
$x_{rw,1}[\%]$	50	50	50	50	50	50

TABLA E.16 Sección 4

E.2.2.3 Vano principal de 60 m y canto constante

Sec	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	0 – 8	0 – 6	0 – 8	0 – 6.4	0 – 6	0 – 8
2	8 – 32	6 – 33	8 – 32	6.4 – 35.2	6 – 33	8 – 32
3	32 – 40	33 – 42	32 – 40	35.2 – 41.6	33 – 42	32 – 40
4	40 – 56	42 – 55.5	40 – 56	41.6 – 54.7	42 – 55.5	40 – 56
3	56 – 64	55.5 – 63	56 – 64	54.7 – 61.3	55.5 – 63	56 – 64
2	64 – 92	63 – 93	64 – 92	61.3 – 94.7	63 – 93	64 – 92
3	92 – 100	93 – 101	92 – 100	94.7 – 101	93 – 101	92 – 100
4	100 – 116	101 – 114	100 – 116	101 – 114	101 – 114	100 – 116
3	116 – 124	114 – 123	116 – 124	114 – 121	114 – 123	116 – 124
2	124 – 148	123 – 150	124 – 148	121 – 150	123 – 150	124 – 148
1	148 – 156	150 – 156	148 – 156	150 – 156	150 – 156	148 – 156

TABLA E.17 Guitarra de secciones en metros

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
$b_b [m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf} [m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf} [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.18 Sección 1

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
$b_b [m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf} [m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf} [mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	12	12	12	12	12	12
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.19 Sección 2

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_b[mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_w[mm]$	18	18	18	18	18	18
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.20 Sección 3

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	55	55	55	55	55	55
$t_b[mm]$	45	45	45	45	45	45
$t_w[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.21 Sección 4

E.2.2.4 Vano principal de 60 m y canto variable

Sec	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	0 – 28	0 – 33	0 – 28	0 – 32	0 – 33	0 – 28
3	28 – 40	33 – 42	28 – 40	32 – 41.6	33 – 42	28 – 40
4	40 – 56	42 – 55.5	40 – 56	41.6 – 54.7	42 – 55.5	40 – 56
3	56 – 68	55.5 – 66.8	56 – 68	54.7 – 64.7	55.5 – 66.8	56 – 68
2	68 – 88	66.8 – 89.3	68 – 88	64.7 – 91.3	66.8 – 89.3	68 – 88
3	88 – 100	89.3 – 101	88 – 100	91.3 – 101	89.3 – 101	88 – 100
4	100 – 116	101 – 114	100 – 116	101 – 114	101 – 114	100 – 116
3	116 – 128	114 – 123	116 – 128	114 – 124	114 – 123	116 – 128
1	128 – 156	123 – 156	128 – 156	124 – 156	123 – 156	128 – 156

TABLA E.22 Guitarra de secciones en metros

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf}[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b[mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_w[mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.23 Sección 1

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf}[mm]$	25	25	25	25	25	25
$t_b[mm]$	12	12	12	12	12	12
$t_w[mm]$	12	12	12	12	12	12
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1}[\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2}[\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.24 Sección 2

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_b[mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_w[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1}[\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2}[\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.25 Sección 3

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	55	55	55	55	55	55
$t_b[mm]$	45	45	45	45	45	45
$t_w[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	2	2	2	2	2	2
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1}[\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2}[\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.26 Sección 4

E.2.2.5 Vano principal de 75 m y canto constante

Sec	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	0 – 8	0 – 7.5	0 – 7.5	0 – 8	0 – 8.6	0 – 8
2	8 – 36	7.5 – 37.5	7.5 – 37.5	8 – 36	8.6 – 42.9	8 – 36
3	36 – 48	37.5 – 45	37.5 – 45	36 – 48	42.9 – 51.4	36 – 48
4	48 – 72.5	45 – 75	45 – 75	48 – 72.5	51.4 – 64.7	48 – 72.5
3	72.5 – 85	75 – 86.3	75 – 86.3	72.5 – 85	64.7 – 74.1	72.5 – 85
2	85 – 110	86.3 – 109	86.3 – 109	85 – 110	74.1 – 121	85 – 110
3	110 – 123	109 – 120	109 – 120	110 – 123	121 – 130	110 – 123
4	123 – 147	120 – 150	120 – 150	123 – 147	130 – 144	123 – 147
3	147 – 159	150 – 158	150 – 158	147 – 159	144 – 152	147 – 159
2	159 – 187	158 – 188	158 – 188	159 – 187	152 – 186	159 – 187
1	187 – 195	188 – 195	188 – 195	187 – 195	186 – 195	187 – 195

TABLA E.27 Guitarra de secciones en metros

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	3	3	3	3	3	3
$b_b[m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf}[mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_b[mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w[mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.28 Sección 1

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	3	3	3	3	3	3
$b_b[m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf}[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b[mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w[mm]$	12	12	12	12	12	12
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.29 Sección 2

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	3	3	3	3	3	3
$b_b [m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf} [m]$	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
$t_{tf} [mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_b [mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_w [mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.30 Sección 3

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	3	3	3	3	3	3
$b_b [m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf} [m]$	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
$t_{tf} [mm]$	55	55	55	55	55	55
$t_b [mm]$	55	55	55	55	55	55
$t_w [mm]$	25	25	25	25	25	25
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.31 Sección 4

E.2.2.6 Vano principal de 75 m y canto variable

Sec	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	0 – 40	0 – 37.5	0 – 37.5	0 – 40	0 – 37.5	0 – 40
3	40 – 48	37.5 – 45	37.5 – 45	40 – 48	37.5 – 48.8	40 – 48
4	48 – 76.7	45 – 75	45 – 75	48 – 76.7	48.8 – 74.1	48 – 76.7
3	76.7 – 89.2	75 – 86.3	75 – 86.3	76.7 – 89.2	74.1 – 88.1	76.7 – 89.2
2	89.2 – 106	86.3 – 109	86.3 – 109	89.2 – 106	88.1 – 107	89.2 – 106
3	106 – 118	109 – 120	109 – 120	106 – 118	107 – 121	106 – 118
4	118 – 147	120 – 150	120 – 150	118 – 147	121 – 146	118 – 147
3	147 – 155	150 – 158	150 – 158	147 – 155	146 – 158	147 – 155
1	155 – 195	158 – 195	158 – 195	155 – 195	158 – 195	155 – 195

TABLA E.32 Guitarra de secciones en metros

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf}[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b[mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_w[mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1}[\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2}[\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.33 Sección 1

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
$t_{tf}[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b[mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w[mm]$	12	12	12	12	12	12
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.34 Sección 2

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
$t_{tf}[mm]$	30	30	30	30	40	30
$t_b[mm]$	30	30	30	30	35	30
$t_w[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.35 Sección 3

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5
$b_b[m]$	4	4	4	4	4	4
$b_{tf}[m]$	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
$t_{tf}[mm]$	55	55	55	55	60	55
$t_b[mm]$	55	55	55	55	60	55
$t_w[mm]$	25	25	25	25	25	25
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1}[\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2}[\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.36 Sección 4

E.2.2.7 Vano principal de 90 m y canto constante

Sec	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	0 – 6	0 – 7.2	0 – 7.2	0 – 7.2	0 – 6	0 – 9
2	6 – 42	7.2 – 46.8	7.2 – 46.8	7.2 – 46.8	6 – 42	9 – 40.5
3	42 – 63	46.8 – 61.2	46.8 – 61.2	46.8 – 61.2	42 – 63	40.5 – 58.5
4	63 – 83.3	61.2 – 83.3	61.2 – 82.8	61.2 – 83.3	63 – 83.3	58.5 – 85.5
3	83.3 – 98.3	83.3 – 98.3	82.8 – 97.2	83.3 – 98.3	83.3 – 98.3	85.5 – 99
2	98.3 – 136	98.3 – 136	97.2 – 137	98.3 – 136	98.3 – 136	99 – 135
3	136 – 151	136 – 151	137 – 151	136 – 151	136 – 151	135 – 149
4	151 – 171	151 – 173	151 – 173	151 – 173	151 – 171	149 – 176
3	171 – 192	173 – 187	173 – 187	173 – 187	171 – 192	176 – 194
2	192 – 228	187 – 227	187 – 227	187 – 227	192 – 228	194 – 225
1	228 – 234	227 – 234	227 – 234	227 – 234	228 – 234	225 – 234

TABLA E.37 Guitarra de secciones en metros

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6
$b_b [m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf} [m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf} [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.38 Sección 1

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6
$b_b [m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf} [m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf} [mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b [mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w [mm]$	12	12	12	12	12	15
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.39 Sección 2

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6
$b_b[m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_b[mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_w[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.40 Sección 3

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6
$b_b[m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	25	25	25	25	25	25
$t_b[mm]$	60	60	60	60	60	60
$t_w[mm]$	25	25	25	25	25	25
$t_c[mm]$	25	25	25	25	25	25
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.41 Sección 4

E.2.2.8 Vano principal de 90 m y canto variable

Sec	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
1	0 – 42	0 – 46.8	0 – 46.8	0 – 46.8	0 – 42	0 – 40.5
3	42 – 60	46.8 – 57.6	46.8 – 57.6	46.8 – 57.6	42 – 60	40.5 – 54
4	60 – 87	57.6 – 87	57.6 – 86.4	57.6 – 87	60 – 87	54 – 90
3	87 – 98.3	87 – 98.3	86.4 – 97.2	87 – 98.3	87 – 98.3	90 – 99
2	98.3 – 136	98.3 – 136	97.2 – 137	98.3 – 136	98.3 – 136	99 – 135
3	136 – 147	136 – 147	137 – 148	136 – 147	136 – 147	135 – 144
4	147 – 174	147 – 176	148 – 176	147 – 176	147 – 174	144 – 180
3	174 – 192	176 – 187	176 – 187	176 – 187	174 – 192	180 – 194
1	192 – 234	187 – 234	187 – 234	187 – 234	192 – 234	194 – 234

TABLA E.42 Guitarra de secciones en metros

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5
$b_b [m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf} [m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf} [mm]$	25	25	25	25	25	25
$t_b [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_w [mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c [mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.43 Sección 1

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5
$b_b[m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_b[mm]$	10	10	10	10	10	10
$t_w[mm]$	15	15	15	15	15	15
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.44 Sección 2

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h[m]$	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5
$b_b[m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf}[m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf}[mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_b[mm]$	30	30	30	30	30	30
$t_w[mm]$	20	20	20	20	20	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.45 Sección 3

Dimensión	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6
$h [m]$	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5
$b_b [m]$	5	5	5	5	5	5
$b_{tf} [m]$	1	1	1	1	1	1
$t_{tf} [mm]$	25	25	25	25	25	30
$t_b [mm]$	50	50	50	50	50	60
$t_w [mm]$	25	25	25	25	25	25
$t_c [mm]$	25	25	25	25	25	30
n_{rb}	3	3	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	25	25	25	25	25	25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75	75	75

TABLA E.46 Sección 4

E.3 Tablero curvo

E.3.1 Espesor equivalente de chapa de cierre

Dimensiones en milímetros.

	$\phi = 0$	$\phi = 0.1$	$\phi = 0.2$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.4$
Caso 1	0.265	0.503	0.591	0.636	0.768
Caso 2	0.288	0.481	0.566	0.651	0.735
Caso 3	0.219	0.423	0.513	0.603	0.694
Caso 4	0.218	0.341	0.511	0.6	0.645
Caso 5	0.288	0.481	0.566	0.651	0.735
Caso 6	0.265	0.503	0.591	0.636	0.768

TABLA E.47 Vano 30 m

	$\phi = 0$	$\phi = 0.1$	$\phi = 0.2$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.4$
Caso 1	0.322	0.567	0.736	1.026	1.133
Caso 2	0.322	0.566	0.735	1.025	1.131
Caso 3	0.354	0.543	0.732	1.01	1.153
Caso 4	0.322	0.566	0.735	1.025	1.131
Caso 5	0.354	0.543	0.732	1.01	1.153
Caso 6	0.322	0.566	0.735	1.025	1.131

TABLA E.48 Vano 45 m

	$\phi = 0$	$\phi = 0.1$	$\phi = 0.2$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.4$
Caso 1	0.278	0.547	0.629	0.711	0.99
Caso 2	0.288	0.481	0.608	0.735	0.82
Caso 3	0.278	0.547	0.629	0.711	0.99
Caso 4	0.265	0.503	0.591	0.68	0.857
Caso 5	0.288	0.481	0.608	0.735	0.82
Caso 6	0.278	0.547	0.629	0.711	0.99

TABLA E.49 Vano 60 m

	$\phi = 0$	$\phi = 0.1$	$\phi = 0.2$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.4$
Caso 1	0.303	0.613	0.966	1.217	1.469
Caso 2	0.288	0.608	0.82	1.286	1.558
Caso 3	0.288	0.608	0.82	1.286	1.558
Caso 4	0.303	0.613	0.966	1.217	1.469
Caso 5	0.278	0.635	0.977	1.161	1.696
Caso 6	0.303	0.613	0.966	1.217	1.469

TABLA E.50 Vano 75 m

	$\phi = 0$	$\phi = 0.1$	$\phi = 0.2$	$\phi = 0.3$	$\phi = 0.4$
Caso 1	0.288	0.651	1.025	1.291	1.693
Caso 2	0.288	0.651	1.025	1.291	1.693
Caso 3	0.293	0.662	1.043	1.315	1.723
Caso 4	0.288	0.651	1.025	1.291	1.693
Caso 5	0.288	0.651	1.025	1.291	1.693
Caso 6	0.287	0.656	1.01	1.391	1.753

TABLA E.51 Vano 90 m

E.3.2 Espesor equivalente de diafragmas

Dimensiones en milímetros.

S_D	R=0 m	R=300 m	R=150 m	R=100 m	R=75 m
10	0.679	0.781	0.883	0.974	1.102
7.5	0.679	0.73	0.781	0.883	0.883
6	0.679	0.679	0.73	0.781	0.846
5	0.679	0.679	0.679	0.73	0.781
3.75	0.679	0.679	0.679	0.679	0.73
3.33	0.679	0.679	0.679	0.679	0.679

TABLA E.52 Vano 30 m

S_D	R=0 m	R=450 m	R=225 m	R=150 m	R=112.5 m
15	0.772	0.887	1.106	1.251	1.397
11.25	0.772	0.829	0.96	1.002	1.251
9	0.772	0.772	0.829	1.002	1.002
7.5	0.656	0.772	0.829	0.887	1.002
4.5	0.656	0.772	0.772	0.772	0.829
3.75	0.656	0.656	0.772	0.772	0.772

TABLA E.53 Vano 45 m

S_D	R=0 m	R=600 m	R=300 m	R=200 m	R=150 m
20	0.949	1.02	1.233	1.539	1.718
15	0.807	0.949	1.091	1.233	1.539
12	0.807	0.949	1.02	1.091	1.233
10	0.807	0.949	0.949	1.02	1.233
7.5	0.807	0.807	0.949	0.949	1.02
4	0.807	0.807	0.807	0.807	0.949

TABLA E.54 Vano 60 m

S_D	R=0 m	R=750 m	R=375 m	R=250 m	R=187.5 m
25	0.868	1.19	1.358	1.658	2.028
18.75	0.809	0.984	1.19	1.358	1.643
15	0.751	0.916	1.053	1.19	1.358
12.5	0.732	0.851	0.962	1.14	1.19
9.38	0.732	0.792	0.851	0.962	1.053
4.17	0.689	0.709	0.732	0.741	0.781

TABLA E.55 Vano 75 m

S_D	R=0 m	R=900 m	R=450 m	R=300 m	R=225 m
30	0.865	1.197	1.503	1.814	2.242
22.5	0.763	0.967	1.206	1.495	1.669
18	0.716	0.865	1.079	1.305	1.495
15	0.698	0.849	0.967	1.179	1.315
11.25	0.66	0.763	0.865	0.958	1.079
4.5	0.63	0.646	0.66	0.698	0.763

TABLA E.56 Vano 90 m

E.4 Tableros anchos

E.4.1 Secciones para ancho de 12.8 m

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$b[m]$	12.8	12.8	12.8	12.8
$h[m]$	2.4	2.4	2.4	2.4
$b_t[m]$	6.75	6.75	6.75	6.75
$b_b[m]$	4.75	4.75	4.75	4.75
$b_{tf}[m]$	0.9	0.9	1.1	1.1
$t_{tf}[mm]$	15	20	30	55
$t_s[mm]$	290	290	290	290
$t_b[mm]$	10	10	30	45
$t_w[mm]$	15	15	18	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	0.25	0.25	0.25	0.25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75

TABLA E.57 Vano 60 m y canto constante

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$b[m]$	12.8	12.8	12.8	12.8
$h[m]$	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3	1.5 – 3
$b_t[m]$	6.75	6.75	6.75	6.75
$b_b[m]$	4.75	4.75	4.75	4.75
$b_{tf}[m]$	0.9	0.9	1.2	1.2
$t_{tf}[mm]$	20	25	30	55
$t_s[mm]$	290	290	290	290
$t_b[mm]$	15	15	30	45
$t_w[mm]$	15	15	20	20
$t_c[mm]$	0	0	0	0
n_{rb}	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	0.25	0.25	0.25	0.25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75

TABLA E.58 Vano 60 m y canto variable

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$b[m]$	12.8	12.8	12.8	12.8
$h[m]$	3	3	3	3
$b_t[m]$	6.75	6.75	6.75	6.75
$b_b[m]$	5.75	5.75	5.75	5.75
$b_{tf}[m]$	0.9	0.9	1.4	1.4
$t_{tf}[mm]$	15	20	30	55
$t_s[mm]$	290	290	290	290
$t_b[mm]$	10	10	30	55
$t_w[mm]$	15	15	20	25
$t_c[mm]$	0	0	0	0
n_{rb}	4	4	4	4
n_{rw}	2	2	2	2
$x_{rw,1}[\%]$	0.25	0.25	0.25	0.25
$x_{rw,2}[\%]$	75	75	75	75

TABLA E.59 Vano 75 m y canto constante

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$b[m]$	12.8	12.8	12.8	12.8
$h[m]$	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5
$b_t[m]$	6.75	6.75	6.75	6.75
$b_b[m]$	4.75	4.75	4.75	4.75
$b_{tf}[m]$	0.9	0.9	1.4	1.4
$t_{tf}[mm]$	20	20	30	55
$t_s[mm]$	290	290	290	290
$t_b[mm]$	15	10	30	55
$t_w[mm]$	15	15	20	25
$t_c[mm]$	0	0	0	0
n_{rb}	4	4	4	4
n_{rw}	2	2	2	2
$x_{rw,1}[\%]$	0.25	0.25	0.25	0.25
$x_{rw,2}[\%]$	75	75	75	75

TABLA E.60 Vano 75 m y canto variable

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$b[m]$	12.8	12.8	12.8	12.8
$h[m]$	3.6	3.6	3.6	3.6
$b_t[m]$	6.75	6.75	6.75	6.75
$b_b[m]$	5.75	5.75	5.75	5.75
$b_{tf}[m]$	1.2	1.2	1.2	1.2
$t_{tf}[mm]$	15	20	30	25
$t_s[mm]$	290	290	290	290
$t_b[mm]$	10	10	30	60
$t_w[mm]$	15	15	20	25
$t_c[mm]$	0	0	0	25
n_{rb}	4	4	4	4
n_{rw}	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	0.25	0.25	0.25	0.25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75

TABLA E.61 Vano 90 m y canto constante

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$b[m]$	12.8	12.8	12.8	12.8
$h[m]$	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5	2.5 – 4.5
$b_t[m]$	6.75	6.75	6.75	6.75
$b_b[m]$	4.75	4.75	4.75	4.75
$b_{tf}[m]$	1.2	1.2	1.2	1.2
$t_{tf}[mm]$	25	20	30	25
$t_s[mm]$	290	290	290	290
$t_b[mm]$	15	10	30	50
$t_w[mm]$	15	15	20	25
$t_c[mm]$	0	0	0	25
n_{rb}	4	4	4	4
n_{rw}	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	0.25	0.25	0.25	0.25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75

TABLA E.62 Vano 90 m y canto variable

E.4.2 Secciones para puente de 75 m de luz

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$b[m]$	15.8	15.8	15.8	15.8
$h[m]$	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5
$b_t[m]$	8.3	8.3	8.3	8.3
$b_b[m]$	4.5	4.5	4.5	4.5
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	1.25	1.25
$t_{tf}[mm]$	20	20	30	75
$t_s[mm]$	320	320	320	320
$t_b[mm]$	15	10	30	75
$t_w[mm]$	20	15	25	30
$t_c[mm]$	1	1	1	1
n_{rb}	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	0.25	0.25	0.25	0.25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75

TABLA E.63 Puente sin vigas transversales

Dimensión	Sección 1	Sección 2	Sección 3	Sección 4
$b[m]$	15.8	15.8	15.8	15.8
$h[m]$	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5	2 – 3.5
$b_t[m]$	7.5	7.5	7.5	7.5
$b_b[m]$	5	5	5	5
$b_{tf}[m]$	0.75	0.75	1.25	1.25
$t_{tf}[mm]$	20	20	30	65
$t_s[mm]$	250	250	250	250
$t_b[mm]$	15	10	30	65
$t_w[mm]$	18	15	25	30
$t_c[mm]$	1	1	1	1
n_{rb}	3	3	3	3
n_{rw}	2	2	2	2
$x_{rw,1} [\%]$	0.25	0.25	0.25	0.25
$x_{rw,2} [\%]$	75	75	75	75

TABLA E.64 Puente con vigas transversales

Bibliografía

- [1] Service d'études techniques des routes et autoroutes (SETRA). *Ponts mixtes acier-béton guide de conception durable*. SETRA, 2010, pág. 196. isbn: 978-2-11-099163-8.
- [2] Chai H. Yoo, Junsuk Kang y Kyungsik Kim. «Stresses due to distortion on horizontally curved tub-girders». En: *Engineering Structures* 87 (mar. de 2015), págs. 70-85. issn: 18737323. doi: 10.1016/j.engstruct.2015.01.011.
- [3] Javier Pascual Santos. «Criterios de dimensionamiento de los diafragmas interiores en secciones cajón de puentes mixtos». Tesis doct. Universidad Politécnica de Madrid, 2005.
- [4] Alvaro Serrano Corral y Julio Martínez Calzón. «Una revisión biográfica y significativa de las estructuras mixtas de hormigón y acero estructural». En: *Hormigón y Acero* 72.293 (abr. de 2021), págs. 7-29.
- [5] Óscar Ramón Ramos Gutiérrez y col. «Viaductos de San Felipe y Las Tinajas en zonas de alto riesgo sísmico (ruta 60, Chile)». En: *VII Congreso Internacional de Estructuras: [resúmenes publicados en la revista Hormigón y Acero (ISSN 0439-5689), v. 68, especial Congreso, junio 2017]*, 2017, pág. 98. Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE), 2017, pág. 98.
- [6] Óscar Ramón Ramos Gutiérrez y col. «Rampas de acceso al viaducto Bicentenario y Aunorte, autopistas elevadas en la Ciudad de México». En: *VII Congreso Internacional de Estructuras: [resúmenes publicados en la revista Hormigón y Acero (ISSN 0439-5689), v. 68, especial Congreso, junio 2017]*, 2017, págs. 99-100. Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE), 2017, págs. 99-100.
- [7] Francisco Millanes Mato. «Construir en acero los puentes de luces medias». En: *Construir el futuro en acero*. Madrid, 2004.
- [8] European Commission y col. *Combri, valorisation of knowledge for competitive steel and composite bridges*. Publications Office, 2010. doi: doi/10.2777/75697.

- [9] CEN. *Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 2: Puentes*. Bruxelles: AENOR, jun. de 2012.
- [10] Alejandro Giraldo Soto. «Comportamiento estructural de vigas mixtas de sección cajón en estado límite último bajo la interacción de esfuerzos de flexión, cortante y torsión. Estudio teórico y experimental». Tesis doct. Universidad Politécnica de Madrid, 2017. doi: 10.20868/UPM.thesis.47694.
- [11] Richard N. Wright, Sana R. Abdel-Samad y Arthur R. Robinson. «BEF Analogy for Analysis of Box Girders». En: *Journal of the Structural Division* 94.7 (jul. de 1968), págs. 1719-1743. issn: 0044-8001. doi: 10.1061/JSDEAG.0002013.
- [12] Ryszard Dabrowski. *Curved Thin-Walled Girders. Theory and Analysis*. London: Cement y Concrete Association, 1972.
- [13] Guohao Li. *Analysis of box girder and truss bridges*. China Academic Publishers - Springer Berlin Heidelberg, 1987, pág. 141. isbn: 9783540132820.
- [14] Ministerio de Fomento de España. *EAE Instrucción de Acero Estructural*. 2011.
- [15] Javier Manterola Armisen y Antonio Martínez Cutillas. «Puente sobre la ría Tina Menor en la Autovía del Cantábrico». En: *II Congreso ACHE*. Madrid: Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE), 2002.
- [16] Khaled M. Sennah y John B. Kennedy. «Literature Review in Analysis of Box-Girder Bridges». En: *Journal of Bridge Engineering* 7.2 (mar. de 2002), págs. 134-143. issn: 1084-0702. doi: 10.1061/(ASCE)1084-0702(2002)7:2(134).
- [17] Jörg Schlaich y Hartmut Scheef. *Concrete Box-girder Bridges*. Structural engineering documents. International Association for Bridge y Structural Engineering, 1982. isbn: 9783857480317.
- [18] Francisco Cambroner Barrientos. «Análisis conjunto de los modos resistentes en secciones de paredes delgadas y su aplicación a tableros de puente». Tesis doct. Universidad de Cantabria, 2013.
- [19] Stephen P. Timoshenko. *History of Strength of Materials*. Dover Publications, 1983.
- [20] James R. Rice. *Solid Mechanics*. Harvard University, Cambridge, MA 02138 USA: School of Engineering et. al., feb. de 2010.
- [21] Claude Navier. *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées par M. Navier,... : sur l'application de la mécanique à l'Établissement des constructions et des machines*. Vol. 1. Paris: Corps Royaux des Ponts et Chaussées et des Mines, 1833.

- [22] Stephen P. Timoshenko. «LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars». En: *Philosophical Magazine Series 1* 41.245 (mayo de 1921), págs. 744-746. issn: 1941-5982. doi: 10.1080/14786442108636264.
- [23] Eugenio Oñate. *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal*. 1.^a ed. Vol. 1,2. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2016. isbn: 84-87867-00-6.
- [24] *AQUA Manual, Service Pack 2020-12 Build 405*. SOFiSTiK AG. Nuremberg, Germany., 2021.
- [25] *Analysis for Civil Structures*. MIDASoft, Inc. 2019.
- [26] *Home - Technical Knowledge Base - Computers and Structures, Inc.* url: <https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Home> (visitado 02-01-2023).
- [27] Eric Reissner. «Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy». En: *Quarterly of Applied Mathematics* 4.3 (1946), págs. 268-278. issn: 0033-569X. doi: 10.1090/QAM/17176.
- [28] Ferdinando Laudiero y Marco Savoia. «Shear strain effects in flexure and torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section». En: *Thin-Walled Structures* 10.2 (ene. de 1990), págs. 87-119. issn: 0263-8231. doi: 10.1016/0263-8231(90)90058-7.
- [29] A. G. Razaqpur y H. G. Li. «A finite element with exact shape functions for shear lag analysis in multi-cell box girders». En: *Computers & Structures* 39.1-2 (ene. de 1991), págs. 155-163. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(91)90083-X.
- [30] Fabrizio Gara y col. «A higher order steel–concrete composite beam model». En: *Engineering Structures* 80 (dic. de 2014), págs. 260-273. issn: 0141-0296. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2014.09.002.
- [31] CEN. *Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1-5: Placas planas cargadas en su plano*. Bruxelles: AENOR, sep. de 2011.
- [32] Gerhard H. Sedlacek y Stefan Bild. «A simplified method for the determination of the effective width due to shear lag effects». En: *Journal of Constructional Steel Research* 24.3 (ene. de 1993), págs. 155-182. issn: 0143-974X. doi: 10.1016/0143-974X(93)90042-Q.
- [33] Bernt Johansson y col. *Commentary and Worked Examples to EN 1993-1-5 Plated Structural Elements*. 1.^a ed. JRC-ECCS, oct. de 2007.

- [34] Hiroshi Nakai y Chai H. Yoo. *Analysis and Design of Curved Steel Bridges*. McGraw-Hill, 1988.
- [35] Barré de Saint-Venant. *Memoire sur la torsion des prismes*. 1853.
- [36] Curt F. Kollbrunner y Konrad Basler. *Torsion in Structures. An Engineering Approach*. Springer Berlin Heidelberg, 1969. doi: 10.1007/978-3-662-22557-8.
- [37] Vasily Zakharovich Vlasov. *Thin-walled elastic beams*. Israel Program for Scientific Translations, 1961.
- [38] Hiroshi Nakai y Conrad P. Heins. «Analysis Criteria for Curved Bridges». En: *Journal of the Structural Division* 103.7 (jul. de 1977), págs. 1419-1427. issn: 0044-8001. doi: 10.1061/JSDEAG.0004674.
- [39] Hans Ebner. *Torsional stresses in box beams with cross sections partially restrained against warping*. Inf. téc. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics, mayo de 1934.
- [40] B. Richmond. «Twisting of Thin-Walled Box Girders.» En: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 33.4 (abr. de 1966), págs. 659-675. issn: 1753-7789. doi: 10.1680/IICEP.1966.9080.
- [41] D. C. Dalton y B. Richmond. «Twisting of Thin-Walled Box Girders of Trapezoidal Cross Section.» En: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 39.1 (ene. de 1968), págs. 61-73. issn: 1753-7789. doi: 10.1680/IICEP.1968.8108.
- [42] L. F. Boswell y S. H. Zhang. «The effect of distortion in thin-walled box-spine beams». En: *International Journal of Solids and Structures* 20.9-10 (ene. de 1984), págs. 845-862. issn: 0020-7683. doi: 10.1016/0020-7683(84)90054-4.
- [43] Nam-Hoi Park, Sanghyun Choi y Young-Jong Kang. «Exact distortional behavior and practical distortional analysis of multicell box girders using an expanded method». En: *Computers & Structures* 83.19-20 (jul. de 2005), págs. 1607-1626. issn: 00457949. doi: 10.1016/j.compstruc.2005.01.003.
- [44] S. H. Zhang y L. P.R. Lyons. «A thin-walled box beam finite element for curved bridge analysis». En: *Computers & Structures* 18.6 (ene. de 1984), págs. 1035-1046. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(84)90148-2.
- [45] Conrad P. Heins y Dann H. Hall. *Designer's guide to steel box girder bridges*. Bethlehem Steel Corp., 1981.
- [46] Colin J. Billington. «Theoretical and Experimental Elastic Behaviour of Box Girder Bridges». Tesis doct. Faculty of Engineering of the University of London, 1974.

- [47] Vladimír Křístek. «Tapered Box Girders of Deformable Cross Section». En: *Journal of the Structural Division* 96.8 (ago. de 1970), págs. 1761-1793. issn: 0044-8001. doi: 10.1061/JSDEAG.0002661.
- [48] Luis Viñuela Rueda. *Recomendaciones para el proyecto de puentes de acero*. Manuales sobre la construcción con acero. ENSIDESA, 1992. isbn: 9788487405013.
- [49] Xun Xu y col. «A Unified Theory for Distortion Analysis of Thin-Walled Hollow Sections». En: *International Journal of Steel Structures* 19.3 (jun. de 2019), págs. 769-786. issn: 20936311. doi: 10.1007/S13296-018-0162-3/TABLES/3.
- [50] Conrad P. Heins y James C. Oleinik. «Curved box beam bridge analysis». En: *Computers & Structures* 6.2 (abr. de 1976), págs. 65-73. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(76)90054-7.
- [51] B. Kermani y P. Waldron. «Analysis of continuous box girder bridges including the effects of distortion». En: *Computers & Structures* 47.3 (mayo de 1993), págs. 427-440. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(93)90238-9.
- [52] Lando Mentrasti. «Torsion of Box Girders with Deformable Cross Sections». En: *Journal of Engineering Mechanics* 117.10 (oct. de 1991), págs. 2179-2200. issn: 0733-9399. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:10(2179).
- [53] Jeppe Jönsson. «Distortional theory of thin-walled beams». En: *Thin-Walled Structures* 33.4 (1999), págs. 269-303. issn: 02638231. doi: 10.1016/S0263-8231(98)00050-0.
- [54] B. I. Maisel. «Analysis of concrete box beams using small computer capacity». En: *Canadian Journal of Civil Engineering* 12.2 (1985), págs. 265-278. issn: 03151468. doi: 10.1139/L85-028.
- [55] Chai H. Yoo y Samir V. Acra. «Cross-sectional properties of thin-walled multicellular section». En: *Computers & Structures* 22.1 (ene. de 1986), págs. 53-61. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(86)90084-2.
- [56] Steen Krenk y Bo Jeppesen. «Finite elements for beam cross-sections of moderate wall thickness». En: *Computers & Structures* 32.5 (ene. de 1989), págs. 1035-1043. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(89)90405-7.
- [57] Jeppe Jönsson. «Determination of shear stresses, warping functions and section properties of thin-walled beams using finite elements». En: *Computers & Structures* 68.4 (ago. de 1998), págs. 393-410. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/S0045-7949(98)00070-4.

- [58] Jeppe Jönsson. «Distortional warping functions and shear distributions in thin-walled beams». En: *Thin-Walled Structures* 33.4 (abr. de 1999), págs. 245-268. issn: 02638231. doi: 10.1016/S0263-8231(98)00048-2.
- [59] Richard Schardt. *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 1989. doi: 10.1007/978-3-642-52330-4.
- [60] N. Silvestre y D. Camotin. «International Journal of Structural Stability and Dynamics». En: *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 03.04 (2003), págs. 461-490. issn: 0219-4554. doi: 10.1142/S0219455403001002.
- [61] Rodrigo Gonçalves, Rui Bebiano y Dinar Camotim. «On the shear deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory». En: *Thin-Walled Structures* 84 (nov. de 2014), págs. 325-334. issn: 0263-8231. doi: 10.1016/J.TWS.2014.07.012.
- [62] Nuno Peres, Rodrigo Gonçalves y Dinar Camotim. «First-order generalised beam theory for curved thin-walled members with circular axis». En: *Thin-Walled Structures* 107 (oct. de 2016), págs. 345-361. issn: 0263-8231. doi: 10.1016/J.TWS.2016.06.016.
- [63] Michael Joachim Andreassen y Jeppe Jönsson. «Distortional buckling modes of semi-discretized thin-walled columns». En: *Thin-Walled Structures* 51 (feb. de 2012), págs. 53-63. issn: 02638231. doi: 10.1016/j.tws.2011.11.002.
- [64] Anders Bau Hansen y Jeppe Jönsson. «A thin-walled beam element based on semi-analytical solution modes». En: *Thin-Walled Structures* 144 (nov. de 2019), pág. 106344. issn: 02638231. doi: 10.1016/j.tws.2019.106344.
- [65] Mohammed Khalil Ferradi y Xavier Céspedes. «A new beam element with transversal and warping eigenmodes». En: *Computers & Structures* 131 (ene. de 2014), págs. 12-33. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/J.COMPSTRUC.2013.10.001.
- [66] Mohammed Khalil Ferradi y Xavier Céspedes. «A curved beam model with the asymptotic expansion method». En: *Engineering Structures* 241 (ago. de 2021). issn: 18737323. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2021.112494.
- [67] Salvador Monleón, Carlos Lázaro y Josep Casanova. «La sección abierta y cerrada bajo solicitación excéntrica. . . en una viga curva. Un tributo a Javier Mantecola». En: *Hormigón y Acero* 70.289 (nov. de 2019), págs. 7-24. issn: 0439-5689. doi: 10.33586/HYA.2019.2091.

- [68] Marcello Arici y Michele Fabio Granata. «Unified theory for analysis of curved thin-walled girders with open and closed cross section through HSA method». En: *Engineering Structures* 113 (abr. de 2016), págs. 299-314. issn: 0141-0296. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2016.01.051.
- [69] Marcello Arici, Michele Fabio Granata y Giuseppe Longo. «Symplectic analysis of thin-walled curved box girders with torsion, distortion and shear lag warping effects». En: *Thin-Walled Structures* 175 (jun. de 2022), pág. 109244. issn: 0263-8231. doi: 10.1016/J.TWS.2022.109244.
- [70] I. C. Dikaros y E. J. Sapountzakis. «Generalized Warping Analysis of Composite Beams of an Arbitrary Cross Section by BEM. I: Theoretical Considerations and Numerical Implementation». En: *Journal of Engineering Mechanics* 140.9 (sep. de 2014), pág. 04014062. issn: 0733-9399. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000775.
- [71] I. C. Dikaros y E. J. Sapountzakis. «Generalized Warping Analysis of Composite Beams of an Arbitrary Cross Section by BEM. II: Numerical Applications». En: *Journal of Engineering Mechanics* 140.9 (sep. de 2014), pág. 04014063. issn: 0733-9399. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000776.
- [72] E. J. Sapountzakis e I. N. Tsiptsis. «Generalized warping analysis of curved beams by BEM». En: *Engineering Structures* 100 (oct. de 2015), págs. 535-549. issn: 0141-0296. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2015.06.038.
- [73] E. J. Sapountzakis e I. N. Tsiptsis. «B-splines in the Analog Equation Method for the generalized beam analysis including warping effects». En: *Computers and Structures* 180 (feb. de 2017), págs. 60-73. issn: 00457949. doi: 10.1016/J.COMPSTRUC.2016.03.007.
- [74] Ioannis N. Tsiptsis y Evangelos J. Sapountzakis. «Generalized warping and distortional analysis of curved beams with isogeometric methods». En: *Computers & Structures* 191 (oct. de 2017), págs. 33-50. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/J.COMPSTRUC.2017.06.007.
- [75] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor y J. Z. Zhu. *El Método de los Elementos finitos. (6 Edición)*. El método de los elementos finitos. CIMNE, 2010. isbn: 978-84-96736-72-6.
- [76] *Actas del VIII Congreso de ACHE*. Santander, jun. de 2022.
- [77] *IABSE Symposium Prague 2022 - Challenges for Existing and Oncoming Structures*. Prague, mayo de 2022.

- [78] A. Prokić. «New finite element for analysis of shear lag». En: *Computers and Structures* 80.11 (mayo de 2002), págs. 1011-1024. issn: 00457949. doi: 10.1016/S0045-7949(02)00036-6.
- [79] Guangpan Zhou y col. «Beam Finite Element Including Shear Lag Effect of Extra-Wide Concrete Box Girders». En: *Journal of Bridge Engineering* 23.11 (nov. de 2018), pág. 04018083. issn: 1084-0702. doi: 10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0001297.
- [80] Xiayuan Li y col. «Beam finite element for thin-walled box girders considering shear lag and shear deformation effects». En: *Engineering Structures* 233 (abr. de 2021), pág. 111867. issn: 0141-0296. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2021.111867.
- [81] Zdenek P. Bazant y Mahjoub El Nimeiri. «Stiffness Method for Curved Box Girders at Initial Stress». En: *Journal of the Structural Division* 100.10 (oct. de 1974), págs. 2071-2090. issn: 0044-8001. doi: 10.1061/JSDEAG.0003912.
- [82] Stefanus F. van Zyl y Alexander C. Scordelis. «Analysis of Curved, Prestressed, Segmental Bridges». En: *Journal of the Structural Division* 105.11 (nov. de 1979), págs. 2399-2417. issn: 0044-8001. doi: 10.1061/JSDEAG.0005284.
- [83] L. F. Boswell y S. H. Zhang. «A box beam finite element for the elastic analysis of thin-walled structures». En: *Thin-Walled Structures* 1.4 (1983), págs. 353-383. doi: 10.1016/0263-8231(83)90014-9.
- [84] A. G. Razaqpur y H. G. Li. «Refined analysis of curved thin-walled multicell box girders». En: *Computers & Structures* 53.1 (oct. de 1994), págs. 131-142. issn: 0045-7949. doi: 10.1016/0045-7949(94)90136-8.
- [85] Nam Hoi Park, Young Joon Choi y Young Jong Kang. «Spacing of intermediate diaphragms in horizontally curved steel box girder bridges». En: *Finite Elements in Analysis and Design* 41.9-10 (mayo de 2005), págs. 925-943. issn: 0168874X. doi: 10.1016/j.finel.2004.12.006.
- [86] Nam-Hoi Park, Nam-Hyoung Lim y Young-Jong Kang. «A consideration on intermediate diaphragm spacing in steel box girder bridges with a doubly symmetric section». En: *Engineering Structures* 25 (2003), págs. 1665-1674. doi: 10.1016/S0141-0296(03)00145-7.
- [87] Nam-Hoi Park y col. «Distortional Analysis of Steel Box Girders». En: *International journal of steel structures* 2 (jun. de 2002), págs. 51-58.

- [88] Young J. Kang y Chai H. Yoo. «Thin Walled Curved Beams. I: Formulation of Nonlinear Equations». En: *Journal of Engineering Mechanics* 120.10 (oct. de 1994), págs. 2072-2101. issn: 0733-9399. doi: 10.1061/(asce)0733-9399(1994)120:10(2072).
- [89] Francisco Cambroner-Barrientos, Julián Díaz-del-Valle y José Antonio Martínez-Martínez. «Beam element for thin-walled beams with torsion, distortion, and shear lag». En: *Engineering Structures* 143 (jul. de 2017), págs. 571-588. issn: 18737323. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.04.020.
- [90] Francisco Cambroner-Barrientos y col. «Experimental verification of a beam element for thin-walled beams with torsion, distortion, and shear lag». En: *Engineering Structures* 261 (jun. de 2022), pág. 114249. issn: 0141-0296. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2022.114249.
- [91] Virajan Verma y K. Nallasivam. «One-dimensional finite element analysis of thin-walled box-girder bridge». En: *Innovative Infrastructure Solutions* 5.2 (ago. de 2020), págs. 1-24. issn: 23644184. doi: 10.1007/S41062-020-00287-X/TABLES/7.
- [92] Óscar Ramón Ramos Gutiérrez y col. «Unusual structural effects in a variable-depth box girder bridge: The Pujayo viaduct». En: *Engineering Structures* 33.2 (2011), págs. 615-620. issn: 0141-0296,1873-7323. doi: 10.1016/j.engstruct.2010.11.020.
- [93] T. H.G. Megson y G. Hallak. «Finite element modelling of box girder diaphragms at supports». En: *Thin-Walled Structures* 22.1 (1995), págs. 25-37. issn: 02638231. doi: 10.1016/0263-8231(95)95935-T.
- [94] Praween Chusilp y col. «Cyclic shear behaviour of steel box girders: experiment and analysis». En: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 31.11 (nov. de 2002), págs. 1993-2014. issn: 1096-9845. doi: 10.1002/EQE.200.
- [95] Hyung Keun Ryu, Chang Su Shim y Sung Pil Chang. «Testing a composite box-girder bridge with precast decks». En: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Building* 157.4 (mayo de 2015), págs. 243-250. issn: 09650911. doi: 10.1680/STBU.2004.157.4.243.
- [96] Quang Viet Vu, Duc Kien Thai y Seung Eock Kim. «Effect of intermediate diaphragms on the load – carrying capacity of steel – concrete composite box girder bridges». En: *Thin-Walled Structures* 122 (ene. de 2018), págs. 230-241. issn: 02638231. doi: 10.1016/j.tws.2017.10.024.

- [97] Renato Silva Nicoletti y col. «Numerical assessment of effective width in steel-concrete composite box girder bridges with partial interaction». En: *Engineering Structures* 239 (jul. de 2021). issn: 18737323. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2021.112333.
- [98] Jeonghwa Lee y col. «Intermediate diaphragm spacing for single-cell rectangular steel box girder bridges considering aspect-ratio». En: *Journal of Constructional Steel Research* (dic. de 2019), pág. 105877. doi: 10.1016/j.jcsr.2019.105877.
- [99] Jeonghwa Lee y col. «Effect of Load Combinations on Distortional Behaviors of Simple-Span Steel Box Girder Bridges». En: *Metals* 2021, Vol. 11, Page 1238 11.8 (ago. de 2021), pág. 1238. issn: 2075-4701. doi: 10.3390/MET11081238.
- [100] Li Zhu y col. «Simplified analysis method accounting for shear-lag effect of steel-concrete composite decks». En: *Journal of Constructional Steel Research* 115 (ago. de 2015), págs. 62-80. issn: 0143974X. doi: 10.1016/J.JCSR.2015.08.020.
- [101] B. Einarsson, M. A. Crisfield y P. J. Dowling. «Collapse of stiffened box-girder diaphragms». En: *Journal of Constructional Steel Research* 2.2 (ene. de 1982), págs. 11-25. issn: 0143-974X. doi: 10.1016/0143-974X(82)90022-0.
- [102] Shervin Maleki, Pantea Mohammadinia y Abouzar Dolati. «Numerical study of steel box girder bridge diaphragms». En: *Earthquakes and Structures* 11.4 (2016), págs. 681-699. doi: 10.12989/eas.2016.11.4.681.
- [103] Ulrike Kuhlmann y col. «Update on the revision of Eurocode 3». En: *Steel Construction* 14.1 (feb. de 2021), págs. 2-13. issn: 1867-0539. doi: 10.1002/STC0.202000048.
- [104] Vladimir Kristek. «Ultimate load carrying capacity of box girders». En: *Acta Technica CSAV* 23.5 (1978), págs. 630-652.
- [105] Tetsuya Yabuki, Yasunori Arizumi y Sriramulu Vinnakota. «Strength of Thin-Walled Box Girders Curved in Plan». En: *Journal of Structural Engineering* 121.5 (mayo de 1995), págs. 907-914. issn: 0733-9445. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:5(907).
- [106] Yasunori Arizumi, Sumio Hamada y Takeshi Oshiro. «Behavior Study of Curved Composite Box Girders». En: *Journal of Structural Engineering* 114.11 (nov. de 1988), págs. 2555-2573. issn: 0733-9445. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:11(2555).
- [107] Conrad P. Heins. «Box Girder Bridge Design-State of the Art». En: *Engineering Journal* 15.4 (1978). issn: 0013-8029.

-
- [108] American Association of State Highway and Transportation Officials. *AASHTO LRFD Bridge Design Specifications*. 9.^a ed. Washington DC: AASHTO, 2020.
- [109] James C. Oleinik y col. «Diaphragms for Curved Box Beam Bridges». En: *ASCE J Struct Div* 101.10 (1975), págs. 2161-2178. issn: 0044-8001. doi: 10.1061/JSDAAG.0004192.
- [110] Hiroshi Nakai y Yasuo Murayama. «Distorsional Stress Analysis and Design Aid for Horizontally Curved Box Girder Bridges with Diaphragms». En: *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers Tokyo* 13 (1982), págs. 35-37. issn: 03855406. doi: 10.2208/jscej1969.1981.309_25.
- [111] Fujikazu Sakai y Masatsugu Nagai. «A Proposal For Intermediate Diaphragm Design In Curved Steel Box Girder Bridges». En: *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers* 1981.305 (1981), págs. 11-22. issn: 0385-5392. doi: 10.2208/jscej1969.1981.11.
- [112] Young Jong Kang Nam-Hoi Park Ki-Yong Yoon. «Effective Distortional Stiffness Ratio and Spacing of Intermediate Diaphragm in Steel Box Girder Bridges». En: *International Journal of Steel Structures* (jun. de 2004), págs. 93-102.
- [113] Jean-Paul Lebet y Manfred A. Hirt. *Ponts en acier : Conception et dimensionnement des ponts métalliques et mixtes acier-béton*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2009.
- [114] Jeong-Hwa Lee y col. «Spacing of Intermediate Diaphragms Horizontally Curved Steel Box Girder Bridges considering Bending-distortional Warping Normal Stress Ratio». En: *Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society* 16.9 (sep. de 2015), págs. 6325-6332. issn: 1975-4701. doi: 10.5762/kais.2015.16.9.6325.
- [115] Yoda Teruhiko, Hiroyuki Shimizu y Masaharu Hirashima. «On the Simplified Design Method for Intermediate Diaphragms in Steel Box Girder Bridges». En: *Earthquake Eng* 1.2 (1984).
- [116] Tetsuya Yabuki y Yasunori Arizumi. «A Provision on Intermediate Diaphragm Spacing in Curved Steel-Plated Box-Bridge-Girders». En: *Structural Eng./Earthquake Eng* 6.2 (oct. de 1989), págs. 207-216.
- [117] CEN. *Eurocódigo 4: Proyecto de estructuras mixtas de acero y hormigón. Parte 2: Reglas generales y reglas para puentes*. Bruxelles: AENOR, nov. de 2011.
- [118] CEN. *Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1-9: Fatiga*. Bruxelles: AENOR, nov. de 2008.

- [119] American Association of State Highway and Transportation Officials. *AASHTO Guide Specifications for Horizontally Curved Steel Girder Highway Bridges*. Washington DC: AASHTO, 2003. isbn: 1560511656.
- [120] British Standards Institution. *Steel, concrete and composite bridges - Part 3: Code of practice for design of steel bridges*. BSI, 2000.
- [121] Ministerio de Fomento. DGC. *Recomendaciones para el Proyecto de Puentes Mixtos para Carreteras. RPX-95*. 1996.
- [122] Emmanuel Bouchon y col. «El viaducto de Verrières». En: *Puentes metálicos 2004* 1.23 (2004).
- [123] Marcos Jesús Pantaleón Prieto y col. «Viaducto Regueirón». En: *IV Congreso ACHE*. Valencia: Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE), 2008.
- [124] Stephen P. Timoshenko. *Teoría de la elasticidad*. Urmo S.A. de Ediciones, 1981. isbn: 9788431402310.
- [125] Christian Menn. *Prestressed Concrete Bridges*. Birkhäuser Basel, 2012. isbn: 9783034891318.
- [126] Avelino San Martín Quiroga y José Ramón Gonzalez de Cangas. *Cálculo matricial de estructuras*. [1a ed]. Colección Escuelas. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos, 2001. isbn: 9788438001790.
- [127] Jean Salençon. *Mécanique des milieux continus: Concepts généraux*. Mécanique des milieux continus. L'École polytechnique, 2005. isbn: 9782730212458.
- [128] Luis Viñuela Rueda y José Martínez Salcedo. *Proyecto y construcción de puentes metálicos y mixtos*. Publicaciones (Asociación para la Promoción Técnica del Acero). APTA, 2009. isbn: 9788469230572.
- [129] *SOFiMSHA Manual, Service Pack 2020-2 Build 131*. SOFiSTiK AG. Oberschleissheim, Germany., 2019.
- [130] *SOFiMSHC Manual, Service Pack 2020-2 Build 131*. SOFiSTiK AG. Oberschleissheim, Germany., 2019.
- [131] CEN. *UNE-EN 1991-2:2004 Eurocódigo 1: Acciones en estructuras. Parte 2: Cargas de tráfico en puentes*. Bruxelles: AENOR, 2004.
- [132] R. J. Bridle y F. Sims. «The effect of bridge failures on UK technical policy and practice». En: *Engineering History and Heritage*. 2009, págs. 39-49. doi: 10.1680/ehh2009.162.1.39.

- [133] Ove Lagerqvist y Bernt Johansson. «Resistance of I-girders to concentrated loads». En: *Journal of Constructional Steel Research* 39.2 (sep. de 1996), págs. 87-119. issn: 0143-974X. doi: 10.1016/S0143-974X(96)00023-5.
- [134] Anthony Battistini y col. *Improved Cross Frame Details for Steel Bridges*. Inf. téc. Austin, Texas: TXDOT, 2014.
- [135] CEN. *Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificios*. Bruxelles: AENOR, mayo de 2008.
- [136] CEN. *Eurocódigo 4: Proyecto de estructuras mixtas de acero y hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación*. Bruxelles: AENOR, feb. de 2011.
- [137] Zhanfei Fan y Todd A. Helwig. «Behavior of Steel Box Girders with Top Flange Bracing». En: *Journal of Structural Engineering* 125.8 (ago. de 1999), págs. 829-837. issn: 0733-9445. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1999)125:8(829).
- [138] Kyungsik Kim y Chai H Yoo. «Bending behaviors of quasi-closed trapezoidal box girders with X-type internal cross-frames». En: *Journal of Constructional Steel Research* 65 (2009), págs. 1827-1835. doi: 10.1016/j.jcsr.2009.04.014.
- [139] Yanling Zhang y col. «Torsional behaviour of curved composite beams in construction stage and diaphragm effects». En: *Journal of Constructional Steel Research* 108 (2015), págs. 1-10. doi: 10.1016/j.jcsr.2015.01.021.
- [140] Marcos Jesús Pantaleón Prieto y Óscar Ramón Ramos Gutiérrez. «Estructura de conexión con la A-9 en el puerto de Vigo». En: Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE), 2005, págs. 1703-1717. isbn: 84-89670-50-1.
- [141] Jorge Bernabeu Larena. «Evolución tipológica y estética de los puentes mixtos en Europa». Tesis doct. Universidad Politécnica de Madrid, 2004. doi: 10.20868/UPM.THESIS.269.
- [142] Julio Martínez Calzón y Francisco Millanes Mato. «Dos ejemplos de grandes puentes mixtos pretensados, en Tortosa y Valencia». En: *Hormigón y Acero* 42.179 (1991). url: <http://www.hormigonyacero.com/index.php/ache/article/view/725>.
- [143] GT 3/10. *M-39 Tableros Empujados*. Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE), 2021, pág. 358. isbn: 978-84-89670-93-8.
- [144] Marcos Jesús Pantaleón Prieto y Alfredo Diego Abascal. «Viaductos sobre el río Navia y As Nogais». En: *II Congreso ACHE*. Madrid: Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE), 2002.

- [145] Dirección General del Carreteras. *Guía para el proyecto frente a fatiga de puentes metálicos y mixtos de carretera*. Ed. por Ministerio de Fomento, Secretaría General Técnica y Centro de Publicaciones. Madrid: Centro de Publicaciones, ago. de 2019, pág. 387.
- [146] Miguel Ortega Cornejo, Maria João Freitas y Humberto Agrela Lopes. «Análisis de la respuesta frente a fatiga de las celosías transversales en puentes mixtos de carretera acorde al Eurocódigo EN1993-1-9». En: *VIII Congreso ACHE*. Santander: Asociación Española de Ingeniería Estructural (ACHE), 2022.
- [147] Amr A. Nassr y col. «Topology optimization of horizontally curved box girder diaphragms». En: *Engineering Structures* 256 (abr. de 2022). issn: 18737323. doi: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2022.113959.
- [148] Mads Baandrup y col. «Closing the gap towards super-long suspension bridges using computational morphogenesis». En: *Nature Communications* 2020 11:1 11.1 (jun. de 2020), págs. 1-7. issn: 2041-1723. doi: 10.1038/s41467-020-16599-6.
- [149] Author Todd Helwig y col. *Design Guidelines For Steel Trapezoidal Box Girder*. Inf. téc. Center for Transportation Research at The University of Texas at Austin, 2007.
- [150] D. H. Tung y R. S. Fountain. «Approximate Torsional Analysis of Curved Box Girders by the M/R-Method». En: *Engineering Journal* 7 (jul. de 1970), págs. 65-74.
- [151] Avelino San Martín Quiroga y José Ramón Gonzalez de Cangas. *Cálculo de Estructuras*. Colección Escuelas. Colegio de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos, 2001.
- [152] M. Rücker M. Schweingruber E. Rank. «Automatische Generierung von Finite-Element-Netzen». En: *Bauingenieur Heft* 10 (1994).

Índice de figuras

1.1. Viaducto de acceso al Puerto de Vigo	2
1.2. Tipos de diafragma a considerar	7
2.1. Estado inicial	14
2.2. Estado simétrico (a.1) y estado antimétrico (a.2)	14
2.3. Flexión transversal (b.1) y cortante-flexión (b.2)	15
2.4. Estado auto-equilibrado (c.1) y torsión (c.2)	15
2.5. Flexión transversal (d.1) y distorsión (d.2)	16
2.6. Torsión en almas (e.1) y torsión en voladizo (e.2)	16
2.7. Viga sobre lecho elástico	23
2.8. Movimientos de referencia para la distorsión	23
3.1. Sistema de referencia	57
3.2. Movimientos en la viga	57
3.3. Referencial y movimientos locales	58
3.4. Elemento diferencial de pared	59
3.5. Equilibrio de elemento diferencial de pared	60
3.6. Deformación longitudinal de un elemento diferencial de pared	61
3.7. Deformación angular de un elemento diferencial de pared	62
3.8. Deformación secundaria en una pared	63
3.9. Deformación angular perpendicular a la pared de un elemento diferencial	64
3.10. Alabeo axil	69
3.11. Movimiento en X	71
3.12. Alabeo movimiento en X	72
3.13. Movimiento en Y	73
3.14. Alabeo movimiento en Y	75
3.15. Giro de la sección	76
3.16. Alabeo torsión	80

3.17. Movimientos	81
3.18. Ejemplo pórtico plano	82
3.19. Condición bimomento nulo	85
3.20. Condición torsión uniforme nula	85
3.21. Alabeo distorsión	88
3.22. Resultantes	94
3.23. Fuerzas y resultantes	103
3.24. Grados de libertad	110
3.25. Funciones de forma lineales	111
3.26. Funciones de forma cúbicas	112
4.1. Tipos de diafragma considerados	132
4.2. Viaducto del Regueirón	134
4.3. Nodos de referencia	136
4.4. Modelo de cálculo de diafragma	138
4.5. Diafragma de alma llena en Viaducto de Escaleritas	140
4.6. Modelo de contraste de diafragma de alma llena	141
4.7. Carga de distorsión en el modelo	142
4.8. Carga vertical en el modelo	142
4.9. Rigidez considerando la matriz constitutiva completa	146
4.10. Rigidez considerando solo deformaciones tangenciales	146
4.11. Tensión tangencial en modelo de diafragma rectangular exento	148
4.12. Tensión tangencial en modelo de diafragma rectangular completo	148
4.13. Tensión de Von Mises en modelo de diafragma rectangular completo	148
4.14. Tensión tangencial en modelo de diafragma trapezoidal exento	149
4.15. Tensión tangencial en modelo de diafragma trapezoidal completo	149
4.16. Tensión de Von Mises en modelo de diafragma trapezoidal completo	149
4.17. Tensión tangencial en el eje central vertical del diafragma	152
4.18. Tensión tangencial en el centro del diafragma	154
4.19. Modelo de reparto de cargas verticales	156
4.20. Cargas en modelo	157
4.21. Ejemplo de resultados en modelo de reparto	158
4.22. Coeficiente de abolladura tangencial	166
4.23. Coeficiente de abolladura vertical para un vehículo	169
4.24. Coeficiente de abolladura vertical para dos vehículos solapados	169
4.25. Factor crítico en función de la inclinación de las almas	170
4.26. Interacción de cargas críticas en diafragmas rectangulares	171
4.27. Interacción de cargas críticas en diafragmas trapezoidales	172

4.28. Coeficientes de reducción en ELU para tensiones normales	175
4.29. Coeficientes de reducción en ELU para tensiones tangenciales	176
4.30. Torsor resistente calculado según distintas metodologías	177
4.31. Relación momento torsor - desplazamiento en diafragma de alma llena . .	180
4.32. Modelo de contraste de Cruz de San Andrés	185
4.33. Rigidez en diafragmas en Cruz de San Andrés	187
4.34. Esfuerzos en diafragmas en Cruz de San Andrés	188
4.35. Longitud de pandeo en diafragmas en Cruz de San Andrés	189
4.36. Modelo de contraste de diafragma en V	191
4.37. Rigidez en diafragmas en V	193
4.38. Esfuerzos en diafragmas en V	194
4.39. Modelo de contraste de diafragma en K	196
4.40. Rigidez en diafragmas en K exentos	198
4.41. Rigidez en diafragmas en K con cordón superior mixto	198
4.42. Esfuerzos en montantes de diafragmas en K exentos	200
4.43. Esfuerzos en cordón superior de diafragmas en K exentos	200
4.44. Esfuerzos en montantes de diafragmas en K mixtos	201
4.45. Modelo de contraste de marco abierto	203
4.46. Ratio comparativo de rigidez en marcos	206
4.47. Ratio comparativo de momentos en el nodo superior	209
4.48. Ratio comparativo de momentos en el nodo inferior	209
4.49. Ratio comparativo de envolvente de momentos en nodos	209
5.1. Modelo de contraste de elementos finitos tipo viga	213
5.2. Modelo de viga sobre lecho elástico	213
5.3. Modelo elementos finitos tipo lámina	214
5.4. Ejemplo de verificación 1: Planta y Alzado	217
5.5. Ejemplo de verificación 1: Sección	218
5.6. Ej1: Alabeo w_t	219
5.7. Ej1: Deformación angular t_t	219
5.8. Ej1: Estado de fuerzas autoequilibrado	220
5.9. Ej1: Movimientos de distorsión u_d	220
5.10. Ej1: Alabeo w_d	221
5.11. Ej1: Estudio de convergencia	222
5.12. Ej1: LC 1: Movimiento vertical U_y	223
5.13. Ej1: LC 3: Movimiento vertical U_y	223
5.14. Ej1: LC 1: Giro θ_x	223
5.15. Ej1: LC 3: Giro θ_x	224

5.16. Ej1: LC 2: Giro θ_z	224
5.17. Ej1: LC 4: Giro θ_z	224
5.18. Ej1: LC 2: Distorsión ψ_d	225
5.19. Ej1: LC 4: Distorsión ψ_d	225
5.20. Ej 1: LC 2: Comparativa de movimientos en centro luz	226
5.21. Ej 1: LC 4: Comparativa de movimientos en centro luz	226
5.22. Ej1: LC 1: Momento M_x	228
5.23. Ej1: LC 3: Momento M_x	228
5.24. Ej1: LC 2: Bimomento torsor B_z	228
5.25. Ej1: LC 4: Bimomento torsor B_z	229
5.26. Ej1: LC 2: Bimomento distorsor B_d	229
5.27. Ej1: LC 4: Bimomento distorsor B_d	229
5.28. Ej1: LC 1: Tensiones en vértice superior (VS) e inferior (VI)	231
5.29. Ej1: LC 3: Tensiones en vértice superior (VS) e inferior (VI)	231
5.30. Ej1: LC2: Tensiones en vértice superior (VS) e inferior (VI)	232
5.31. Ej1: LC 4: Tensiones en vértice superior (VS) e inferior (VI)	232
5.32. Ej 1: LC 2: Comparativa de tensiones en centro luz	233
5.33. Ej 1: LC 4: Comparativa de tensiones en centro luz	233
5.34. Ej1: LC2: Reacciones en diafragmas intermedios	235
5.35. Ej1: LC4: Reacciones en diafragmas intermedios	235
5.36. Ej1: LC2: Tensión tangencial en diafragmas intermedios	235
5.37. Ej1: LC4: Tensión tangencial en diafragmas intermedios	236
5.38. Ej1: LC2: Axil en barras de diafragmas en X intermedios	236
5.39. Ej1: LC2: Axiles en barras de diafragmas en K intermedios	236
5.40. Ej1: LC2: Axil en barras de diafragmas en V intermedios	237
5.41. Ej1: LC4: Sobretenión por distorsión	237
5.42. Ejemplo de verificación 2: Planta y Alzado	238
5.43. Ej2: Alabeo w_n^c	239
5.44. Ej2: Alabeo w_x^c	239
5.45. Ej2: Alabeo w_y^c	240
5.46. Ej2: Alabeo w_t^c	240
5.47. Ej2: Deformación angular t_t^c	240
5.48. Ej2: Alabeo w_d^c	240
5.49. Ej2: Estudio de convergencia	242
5.50. Ej2: LC 1: Movimiento vertical U_y	243
5.51. Ej2: LC 1: Giro θ_x	243
5.52. Ej2: LC 1: Giro θ_z	243

5.53. Ej2: LC 1: Distorsión ψ_d	244
5.54. Ej2: LC 4: Movimiento vertical U_y	244
5.55. Ej2: LC 4: Giro θ_x	244
5.56. Ej2: LC 4: Giro θ_z	245
5.57. Ej2: LC 4: Distorsión ψ_d	245
5.58. Ej2: LC 2: Momento M_x	247
5.59. Ej2: LC 2: Bimomento torsor B_z	247
5.60. Ej2: LC 2: Bimomento distorsor B_d	247
5.61. Ej2: LC 3: Momento M_x	248
5.62. Ej2: LC3: Bimomento torsor B_z	248
5.63. Ej2: LC 3: Bimomento distorsor B_d	248
5.64. Ej2: LC 1: Tensiones en vértices superiores del alma	250
5.65. Ej2: LC 1: Tensiones en vértices inferiores del alma	250
5.66. Ej2: LC 2: Tensiones en vértices superiores del alma	250
5.67. Ej2: LC 2: Tensiones en vértices inferiores del alma	251
5.68. Ej2: LC 3: Sobretenensión en ala inferior	251
5.69. Ej2: LC 4: Sobretenensión en ala inferior	251
5.70. Ej2: LC 1: Tensión tangencial en diafragmas intermedios	253
5.71. Ej2: LC 2: Axil en barras de diafragmas en X intermedios	253
5.72. Ej2: LC 3: Axiles en barras de diafragmas en K intermedios	253
5.73. Ej2: LC 4: Axil en barras de diafragmas en V intermedios	254
5.74. Ejemplo de verificación 3: Planta y Alzado	255
5.75. Ejemplo de verificación 3: Sección	256
5.76. Ej3: Alabeo w_t	257
5.77. Ej3: Deformación angular t_t	257
5.78. Ej3: Fuerzas externas	258
5.79. Ej3: Movimientos de distorsión u_d	258
5.80. Ej3: Alabeo w_d	258
5.81. Ej3: Alabeo w_n^c	259
5.82. Ej3: Alabeo w_x^c	259
5.83. Ej3: Alabeo w_y^c	260
5.84. Ej3: Alabeo w_t^c	260
5.85. Ej3: Deformación angular t_t^c	260
5.86. Ej3: Alabeo w_d^c	260
5.87. Ej3: LC 2: Movimiento vertical U_y	264
5.88. Ej3: LC 2: Giro θ_x	264
5.89. Ej3: LC 2: Giro θ_z	264

5.90. Ej3: LC 2: Distorsión ψ_d	265
5.91. Ej3: LC 3: Momento M_x	266
5.92. Ej3: LC3: Bimomento torsor B_z	266
5.93. Ej3: LC 3: Bimomento distorsor B_d	266
5.94. Ej3: LC 6: Momento M_x	267
5.95. Ej3: LC6: Bimomento torsor B_z	267
5.96. Ej3: LC 6: Bimomento distorsor B_d	267
5.97. Ej3: LC1: Sobretensión por distorsión	269
5.98. Ej3: LC3: Sobretensión por distorsión	269
5.99. Ej3: LC5: Sobretensión por distorsión	269
5.100Ej3: LC7: Sobretensión por distorsión	270
5.101Ej3: LC9: Sobretensión por distorsión	270
5.102Ej3: LC10: Sobretensión por distorsión	270
5.103Ej3: LC 1: Tensión tangencial en diafragmas intermedios	272
5.104Ej3: LC 1: Axil en barras de diafragmas en X intermedios	272
5.105Ej3: LC2: Axiles en barras de diafragmas en K intermedios	273
5.106Ej3: LC4: Axiles en barras de diafragmas en K intermedios	273
5.107Ej3: LC 7: Axiles en barras de diafragmas en V intermedios	274
5.108Ej3: LC 9: Axiles en barras de diafragmas en V intermedios	274
5.109Ej3: LC 10: Axil en barras de diafragmas en X intermedios	275
6.1. Casos de canto constante	282
6.2. Casos de canto variable	282
6.3. Sección	284
6.4. Rigidizador	286
6.5. Caso 30 m c.c.: Tracción máxima en ala inferior	293
6.6. Caso 30 m c.c.: Compresión máxima en ala inferior	293
6.7. Caso 30 m c.c.: Reacción máxima en diafragmas interiores	294
6.8. Caso 45 m c.c.: Tracción máxima en ala inferior	294
6.9. Caso 45 m c.c.: Compresión máxima en ala inferior	295
6.10. Caso 45 m c.c.: Reacción máxima en diafragmas interiores	295
6.11. Caso 60 m c.c.: Tracción máxima en ala inferior	296
6.12. Caso 60 m c.c.: Compresión máxima en ala inferior	296
6.13. Caso 60 m c.c.: Reacción máxima en diafragmas interiores	297
6.14. Caso 60 m c.v.: Tracción máxima en ala inferior	298
6.15. Caso 60 m c.v.: Compresión máxima en ala inferior	298
6.16. Caso 60 m c.v.: Reacción máxima en diafragmas interiores	298
6.17. Caso 75 m c.c.:Tracción máxima en ala inferior	299

6.18. Caso 75 m c.c.:Compresión máxima en ala inferior	299
6.19. Caso 75 m c.c.:Reacción máxima en diafragmas interiores	300
6.20. Caso 75 m c.v.:Tracción máxima en ala inferior	300
6.21. Caso 75 m c.v.:Compresión máxima en ala inferior	301
6.22. Caso 75 m c.v.:Reacción máxima en diafragmas interiores	301
6.23. Caso 90 m c.c.:Tracción máxima en ala inferior	302
6.24. Caso 90 m c.c.:Compresión máxima en ala inferior	302
6.25. Caso 90 m c.c.:Reacción máxima en diafragmas interiores	302
6.26. Caso 90 m c.v.:Tracción máxima en ala inferior	303
6.27. Caso 90 m c.v.:Compresión máxima en ala inferior	303
6.28. Caso 90 m c.v.:Reacción máxima en diafragmas interiores	304
6.29. Relación sobretensión-espaciamento. Canto constante	305
6.30. Relación sobretensión elástica-espaciamento. Canto constante	306
6.31. Relación sobretensión-espaciamento. Canto variable	307
6.32. Relación sobretensión elástica-espaciamento. Canto variable	307
6.33. Relación espaciamento máximo de diafragmas-luz	308
6.34. Relación sobretensión-espesor equivalente	311
6.35. Espesor equivalente mínimo distribuido	311
6.36. Reacción máxima en diafragmas	312
6.37. Planta del puente	314
6.38. Caso 30 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU	318
6.39. Caso 30 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio	318
6.40. Caso 30 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta	319
6.41. Caso 30 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico .	319
6.42. Caso 30 m curvo: Reacción máxima en diafragmas interiores	319
6.43. Caso 45 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU	320
6.44. Caso 45 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio	320
6.45. Caso 45 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta	321
6.46. Caso 45 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico .	321
6.47. Caso 45 m curvo: Reacción máxima en diafragmas interiores	321
6.48. Caso 60 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU	322
6.49. Caso 60 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio	322
6.50. Caso 60 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta	323
6.51. Caso 60 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico .	323

6.52. Caso 60 m curvo: Reacción máxima en diafragmas interiores	323
6.53. Caso 75 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU	324
6.54. Caso 75 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio	324
6.55. Caso 75 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta	325
6.56. Caso 75 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico .	325
6.57. Caso 75 m curvo: Reacción máxima en diafragmas interiores	325
6.58. Caso 90 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior en ELU	326
6.59. Caso 90 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a peso propio	326
6.60. Caso 90 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida a carga muerta	327
6.61. Caso 90 m curvo: Sobretensión máxima en ala inferior debida al tráfico .	327
6.62. Caso 90 m curvo: Reacción máxima en diafragmas interiores	327
6.63. Participación de las cargas en la tensión total	331
6.64. Espaciamiento máximo en función de la curvatura	332
6.65. Sobretensión máxima en ala inferior en ELU	334
6.66. Reacción máxima en diafragmas interiores	335
6.67. Puente Reina Sofía	341
6.68. Puente con vigas transversales	343
6.69. Puente sin vigas transversales	343
6.70. Sobretensiones en ala inferior	344
6.71. Modelo de cálculo de reparto	345
6.72. Reparto de la carga en el alma	346
6.73. Sobretensiones en ala inferior por tracción	346
6.74. Sobretensiones en ala inferior por tracción sin vigas transversales	348
6.75. Sobretensiones en ala inferior por tracción con vigas transversales	348
6.76. Viaducto de As Nogais	350
6.77. Sección	351
6.78. Alzado del puente	352
6.79. Sobretensiones en ala inferior por tracción	353
6.80. Sobretensiones en ala inferior por tracción	354
6.81. Reacción máxima en diafragmas interiores	354
6.82. Sobretensiones en ala inferior por tracción	355
6.83. Canto 1.5 m: Relación peso-resistencia	370
6.84. Canto 1.5 m: Relación rigidez-resistencia	370
6.85. Canto 1.75 m: Relación peso-resistencia	371
6.86. Canto 1.75 m: Relación rigidez-resistencia	371

6.87. Canto 2.4 m: Relación peso-resistencia. Ancho 11.3 m	372
6.88. Canto 2.4 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 11.3 m	372
6.89. Canto 2.4 m: Relación peso-resistencia. Ancho 12.8 m	373
6.90. Canto 2.4 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 12.8 m	373
6.91. Canto 3 m: Relación peso-resistencia. Ancho 11.3 m	374
6.92. Canto 3 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 11.3 m	374
6.93. Canto 3 m: Relación peso-resistencia. Ancho 12.8 m	375
6.94. Canto 3 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 12.8 m	375
6.95. Canto 3.6 m: Relación peso-resistencia. Ancho 11.3 m	376
6.96. Canto 3.6 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 11.3 m	376
6.97. Canto 3.6 m: Relación peso-resistencia. Ancho 12.8 m	377
6.98. Canto 3.6 m: Relación rigidez-resistencia. Ancho 12.8 m	377
6.99. Relación peso-luz. Ancho 11.3 m	378
6.100.Árbol de decisión	381
B.1. Geometría de la sección	406
B.2. Alabeo de la sección	412
B.3. Movimientos de la sección	414
B.4. Carga distorsión	419
B.5. Carga debida a la curvatura	422
B.6. Momentos transversales debidos a la distorsión y a la curvatura	426
B.7. Modelo de cálculo de diafragma	428
B.8. Viga sobre lecho elástico	432
B.9. Modelo de elementos finitos	434
B.10. Tensiones en vértice inferior: Diafragmas WP y X	440
B.11. Tensiones en vértice inferior: Diafragmas K	440
B.12. Deformación angular media: Diafragmas WP y X	440
B.13. Deformación angular media: Diafragmas K	440
D.1. Esquema de la sección	450
D.2. Movimiento u_x	454
D.3. Movimiento u_y	455
D.4. Alabeo w_n	456
D.5. Alabeo w_x	457
D.6. Alabeo w_y	457
D.7. Movimiento de giro u_t	463
D.8. Alabeo w_t	465
D.9. Deformación t_t	465

D.10. Fuerzas externas aplicadas en la sección	467
D.11. Estado de fuerzas autoequilibrado	469
D.12. Alabeo w_d	477
D.13. Movimiento de distorsión u_d	478
D.14. Alabeo curvo debido al axil w_n^c	484
D.15. Alabeo curvo debido a la flexión de eje vertical w_x^c	485
D.16. Alabeo curvo debido a la flexión de eje horizontal w_y^c	486
D.17. Alabeo curvo debido torsión w_t^c	489
D.18. Alabeo curvo debido distorsión w_d^c	491
D.19. t_t^c	492

Índice de tablas

2.1. Número de diafragmas intermedios requeridos según Park	46
2.2. Espaciamiento máximo de diafragmas intermedios requeridos según Lee 2015	47
4.1. Propiedades elásticas de los materiales	139
4.2. Geometría de las secciones consideradas	139
4.3. Influencia de la separación entre diafragmas para vehículo 600 kN	159
4.4. Influencia de la separación entre almas para vehículos pesados	160
4.5. Sobrecarga máxima sobre diafragma	162
4.6. Carga repartida en diafragma debida a la sobrecarga	163
4.7. Casos complementarios	168
4.8. Geometrías de los marcos abiertos estudiados	202
5.1. Propiedades elásticas de los materiales	216
5.2. Ej1: Movimientos de distorsión u_d	220
5.3. Ej3: Movimientos de distorsión u_d	258
6.1. Luces y cantos considerados	281
6.2. Número de diafragmas en vano principal	283
6.3. Espaciamiento de diafragmas en vano principal en metros	283
6.4. Espaciamiento entre rigidizadores en metros	283
6.5. Principales dimensiones de las secciones de canto constante	285
6.6. Principales dimensiones de las secciones de canto variable	285
6.7. Dimensiones de los rigidizadores	286
6.8. Materiales	286
6.9. Espesores en milímetros por condición de rigidez en tableros de canto constante	287

6.10. Espesores en milímetros por condición de rigidez en tableros de canto variable	287
6.11. Espesores en milímetros por condición de resistencia en tableros de canto constante	288
6.12. Espesores en milímetros por condición de resistencia en tableros de canto variable	288
6.13. Caso 30 m c.c.: Tensiones y reacciones de comparación	293
6.14. Caso 45 m c.c.: Tensiones y reacciones de comparación	294
6.15. Caso 60 m c.c.: Tensiones y reacciones de comparación	295
6.16. Caso 60 m c.v.: Tensiones y reacciones de comparación	297
6.17. Caso 75 m c.c.:Tensiones y reacciones de comparación	299
6.18. Caso 75 m c.v.:Tensiones y reacciones de comparación	300
6.19. Caso 90 m c.c.:Tensiones y reacciones de comparación	301
6.20. Caso 90 m c.v.:Tensiones y reacciones de comparación	303
6.21. Aplicación de criterio de Nakai	309
6.22. Radios estudiados en metros	314
6.23. Principales dimensiones de las secciones	315
6.24. Momento flector máximo en ELU	316
6.25. Espaciamiento máximo según hipótesis de cálculo	332
6.26. Espesores equivalentes en milímetros por condición de diseño flexible . .	334
6.27. Casos analizados	337
6.28. Espesores equivalentes en milímetros	338
6.29. Momentos torsores de diseño ($M_{T,r}$) en kN.m	338
6.30. Sobretensión y espaciamiento máximo	339
6.31. Reacción máxima en diafragmas	340
6.32. Resultados del dimensionamiento flexible	340
6.33. Espesores equivalentes de diafragma en mm	344
6.34. Espesores en mm	352
6.35. Tensiones por fatiga: Ancho = 11.3 m y canto constante	359
6.36. Tensiones por fatiga: Ancho = 11.3 m y canto variable	360
6.37. Tensiones por fatiga: Ancho = 12.8 m y canto constante	360
6.38. Tensiones por fatiga: Ancho = 12.8 m y canto variable	360
6.39. Tensiones por fatiga: Tableros de gran anchura	361
6.40. Tensiones por fatiga: Ancho = 11.3 m y dimensionamiento flexible	361
6.41. Tensiones por fatiga: Ancho = 12.8 m y dimensionamiento flexible	361
6.42. Dimensiones de rigidizadores	363
6.43. Características de los rigidizadores	363

6.44. Reacción en rigidizadores	364
6.45. Diseño por resistencia de rigidizadores	365
6.46. Rigidez en diafragmas	365
6.47. Geometrías de estudio	367
6.48. Dimensiones de rigidizadores del alma	369
6.49. Dimensiones de rigidizadores del ala	369
 B.1. Movimientos unitarios	417
B.2. Alabeos	424
B.3. Movimientos unitarios	435
B.4. Alabeos	435
B.5. Parámetros de cálculo de la viga sobre lecho elástico	436
B.6. Parámetros de cálculo de la viga sobre lecho elástico	436
B.7. Cargas	437
B.8. Rigidez de diafragmas antidistorsión	438
B.9. Rigidez de diafragmas antidistorsión	438
B.10. Reacciones en diafragmas [kN.m]: Diafragmas WP y X	441
B.11. Reacciones en diafragmas [kN.m]: Diafragma K	441
 D.1. Propiedades elásticas de los materiales	450
D.2. Nodos	451
D.3. Paneles	451
D.4. Propiedades Paneles	452
D.5. Coordenadas nodales	454
D.6. Movimiento u_x	454
D.7. Movimientos locales u_x	455
D.8. Movimiento u_y	456
D.9. Movimientos locales u_y	456
D.10. Alabeos debidos a la flexocompresión	457
D.11. $G \cdot t_k / L_k$	458
D.12. h_b	460
D.13. h_t	462
D.14. Movimiento de giro u_t	463
D.15. Movimientos locales u_t	463
D.16. Alabeo w_t	464
D.17. Deformación t_t	465
D.18. Inercia a torsión I_t	467
D.19. Fuerzas de distorsión en los nodos F_d	468

D.20. Propiedades de los paneles	470
D.21. Movimientos en el pórtico u_{d0}	471
D.22. Movimientos en la dirección de la pared u_s	471
D.23. Movimientos en la sección u_{d1}	474
D.24. Deformación tangencial t_{d0}	475
D.25. Movimientos en la sección u_{d2}	476
D.26. Alabeo w_d	477
D.27. Movimiento de distorsión u_d	477
D.28. Movimientos locales u_d	478
D.29. Deformación tangencial t_d	478
D.30. Contribución de las paredes a la rigidez distorsión uniforme J_d^p	480
D.31. Inercia a distorsión I_d	481
D.32. Interacción torsión-distorsión uniforme de las paredes J_{td}^p	482
D.33. Alabeo curvo debido al axil w_n^c	484
D.34. Alabeo curvo debido a la flexión de eje vertical w_x^c	485
D.35. Alabeo curvo debido a la flexión de eje horizontal w_y^c	486
D.36. Propiedades de los paneles	487
D.37. R_1 en metros	487
D.38. Solución del sistema w_{t0}^c	488
D.39. Alabeo debido a torsión w_t^c	489
D.40. u_{ds}	490
D.41. Solución del sistema w_{d0}^c	490
D.42. Alabeo debido a distorsión w_d^c	491
D.43. t_t^c	492
D.44. t_d^c	493
D.45. Inercias curvas	495
D.46. Rigidez a torsión y distorsión uniforme	496
E.1. Número de diafragmas en vano principal	497
E.2. Número de diafragmas en vano lateral	498
E.3. Espaciamiento de diafragmas en vano principal en metros	498
E.4. Espaciamiento de diafragmas en vano lateral en metros	498
E.5. Espaciamiento entre rigidizadores en vano principal en metros	498
E.6. Espaciamiento entre rigidizadores en vano lateral en metros	499
E.7. Guitarra de secciones en metros	499
E.8. Sección 1	500
E.9. Sección 2	500
E.10. Sección 3	500

E.11. Sección 4	501
E.12. Guitarra de secciones en metros	501
E.13. Sección 1	502
E.14. Sección 2	502
E.15. Sección 3	502
E.16. Sección 4	503
E.17. Guitarra de secciones en metros	503
E.18. Sección 1	504
E.19. Sección 2	504
E.20. Sección 3	505
E.21. Sección 4	505
E.22. Guitarra de secciones en metros	506
E.23. Sección 1	506
E.24. Sección 2	507
E.25. Sección 3	507
E.26. Sección 4	508
E.27. Guitarra de secciones en metros	508
E.28. Sección 1	509
E.29. Sección 2	509
E.30. Sección 3	510
E.31. Sección 4	510
E.32. Guitarra de secciones en metros	511
E.33. Sección 1	511
E.34. Sección 2	512
E.35. Sección 3	512
E.36. Sección 4	513
E.37. Guitarra de secciones en metros	513
E.38. Sección 1	514
E.39. Sección 2	514
E.40. Sección 3	515
E.41. Sección 4	515
E.42. Guitarra de secciones en metros	516
E.43. Sección 1	516
E.44. Sección 2	517
E.45. Sección 3	517
E.46. Sección 4	518
E.47. Vano 30 m	518

E.48. Vano 45 m	519
E.49. Vano 60 m	519
E.50. Vano 75 m	519
E.51. Vano 90 m	519
E.52. Vano 30 m	520
E.53. Vano 45 m	520
E.54. Vano 60 m	520
E.55. Vano 75 m	521
E.56. Vano 90 m	521
E.57. Vano 60 m y canto constante	522
E.58. Vano 60 m y canto variable	522
E.59. Vano 75 m y canto constante	523
E.60. Vano 75 m y canto variable	523
E.61. Vano 90 m y canto constante	524
E.62. Vano 90 m y canto variable	524
E.63. Puente sin vigas transversales	525
E.64. Puente con vigas transversales	525



La distorsión en los puentes mixtos se controla mediante una disposición adecuada de los diafragmas antidistorsión. El dimensionamiento riguroso de estos diafragmas ha sido históricamente relegado en detrimento de fórmulas simplificadas que en muchas ocasiones llevan a diseños poco eficientes. Uno de los motivos de estas simplificaciones ha sido el no disponer de herramientas eficientes para su cálculo. Por este motivo en esta tesis se desarrolla un elemento finito que permite el cálculo de la distorsión y los diafragmas antidistorsión en tableros mixtos de sección cajón curvos en planta. También se revisan los criterios de dimensionamiento de los diafragmas antidistorsión, tanto a nivel estructural, como a nivel de espaciamiento y rigidez. Además, se han estudiado las tipologías más adecuadas de diafragmas en función de la geometría de la sección y como afecta la distorsión al cálculo de fatiga.

Distortion in composite bridges is controlled by a proper arrangement of the anti-distortion diaphragms. However, the rigorous design of these diaphragms has historically been relegated to the detriment of simplified formulas that often lead to inefficient designs. One of the reasons for these simplifications has been the lack of efficient tools for its calculation. For this reason, a finite element that allows the calculation of distortion and diaphragms in plan-curved box-section composite bridges has been developed in this thesis. Furthermore, the design criteria for anti-distortion diaphragms are also reviewed regarding structural design, spacing and stiffness. In addition, the most appropriate types of diaphragms have been studied depending on the geometry of the section and how distortion affects the fatigue calculation.