2013

La "flexibilidad" en la educación matemática.

Trabajo de Fin de Máster

Pablo Negrete Rodrigo

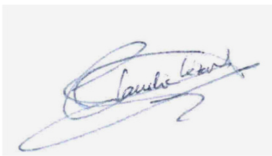
Máster en Formación de Profesorado de Secundaria

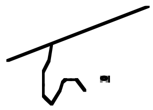
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

El autor:

Pablo Negrete Rodrigo

Vº Bº Directores:





Claudia Lázaro del Pozo

Tomás Recio Muñiz

En Santander a 25 de junio de 2013.

Índice

I. INTRODUCCIÓN

El término *flexibilidad* en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, asociado a la capacidad de adoptar métodos resolutivos diferentes en función de las variantes de un mismo problema matemático y a la adquisición de un mayor abanico procedimental y, por tanto, un entendimiento conceptual, hace referencia a una idea que viene trabajándose desde hace más de 20 años.

El conocimiento procedimental en ausencia de conocimiento conceptual se convierte en aprendizaje por mera repetición y memorización. En muchas ocasiones el estudiante posee habilidades para resolver ciertos ejercicios pero no comprende el principio matemático que se esconde detrás del procedimiento, ni sabe razonar por qué éste deriva en la respuesta correcta (Beaton, Mullis, Martin, Gonzales, Kelly, & Smith, 1996; Schmidt, McKnight, Cogan, Jakwerth, & Houang, 1999). Esto tiene una influencia clara en la motivación del alumnado que, por una parte, no sabe cuándo utilizar lo que conoce y, por otra, no encuentra el sentido de lo que estudia. En otras ocasiones el alumno que no brilla a la hora de memorizar ciertas tareas, pierde seguridad en el uso de las matemáticas, lo cual es una pena ya que la habilidad de memorizar elementos básicos de aritmética no determina el potencial matemático de la persona (Willis, 2010). Numerosos expertos en educación matemática coinciden en recalcar la necesidad de conectar procesos y conceptos para fomentar el desarrollo del entendimiento (Hiebert y Carpenter, 1992), reconocer patrones y construir conceptos mentales basados en sus propios conocimientos matemáticos (sección II-a).

Existen evidencias de que las habilidades procedimentales se aprenden a través de la práctica (Anderson & Lebiere, 1998). Con una práctica continua el individuo consigue mejores rendimientos en términos de eficiencia y rapidez. Sin embargo, surge la siguiente duda: *¿A costa de qué?* Siffrin y Schneider razonan que los comportamientos se rigidizan notablemente en este proceso, llegando casi a un estado de automatismo (Shiffrin & Schneider, 1977; Anderson, Automaticity and the ACT* theory, 1992).

A pesar de que eficiencia y rapidez sean dos características importantes, éstas no son las únicas que favorecen la competencia matemática. Un individuo que funcione con automatismos puede encontrar grandes dificultades a la hora de encarar situaciones que difieran mínimamente de las habituales, a las cuales está acostumbrado. Aquellos que gocen, además, de un conocimiento más flexible, entendido como el conocimiento de múltiples procedimientos de resolución y la habilidad para escoger el método que mejor se adecúa a cada situación, maximizarán su rendimiento matemático (Blöte, Van der Burg, & Klein, 2001; Carroll, 2000).

Los numerosos investigadores que han tratado el desarrollo y aprendizaje de la flexibilidad en el ámbito educativo coinciden en la hipótesis de que debe existir una conexión entre el conocimiento procedimental y el conceptual (Hiebert & Lefevre, 1986) (véase sección II-b). Además se proponen ciertas técnicas pedagógicas como herramientas para reforzar el lazo entre esos dos tipos de conocimiento (Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, & Empson, 1998):

- Uso de materiales manipulativos.
- La generación de algoritmos no convencionales por parte de los alumnos.
- La comparación y debate de diferentes estrategias generadas por los alumnos para resolver problemas.

El tema de la flexibilidad, como idea para el presente Trabajo Fin de Máster, les surge a los directores de este trabajo durante las Quintas Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Cantabria, celebradas los días 2 y 3 de Marzo del 2012 en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria (Boletin Informativo de SMPC, 2012-2013). En su Conferencia Inaugural, “Promoviendo la Flexibilidad Matemática”, Jon Star, *Assistant Professor of Education* en la Universidad de Harvard, presenta los resultados a los que su equipo de investigación ha llegado tras varias actuaciones experimentales en el marco de la educación de secundaria (Rittle-Johnson & Star, 2007) (Star J. R., 2001), en relación al concepto de flexibilidad en las matemáticas y a la dicotomía existente entre el conocimiento conceptual y el procedimental.

Star, define *flexibilidad* (concepto clave de este trabajo) como la combinación de dos elementos: por una parte el conocimiento de múltiples procesos resolutivos y además la capacidad de saber elegir el adecuado para resolver problemas desconocidos o buscar soluciones óptimas para aquellos con los que uno está más familiarizado. Entre todos sus trabajos de investigación se ha escogido "*Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?"* como referencia para este Trabajo Fin de Máster (véase sección II-c). En "*Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?"* se pretende extraer conclusiones esclarecedoras acerca de la influencia que la comparación de estrategias de resolución de tareas puede tener en una triple vertiente: la del conocimiento conceptual, la del conocimiento procedimental y la de la flexibilidad.

Se trata de un estudio experimental que se puso en práctica en un centro privado de educación secundaria en Tennessee, entre 70 estudiantes de 7º grado (12-13 años) de matemáticas. Los investigadores diseñaron cuidadosamente dos dinámicas diferentes de trabajo que más tarde ejecutaron durante 4 días en el centro educativo; una de ellas basada en la comparación de métodos de resolución de un modo paralelo, la otra en el estudio de diferentes métodos resolutivos de manera secuencial.

Debido al marcado carácter procedimental que tiene la enseñanza del Álgebra y a la dificultad que representa para muchos estudiantes (Kieran, 1992), Jon Star escogió la resolución de ecuaciones lineales como telón de fondo del estudio. Los 70 estudiantes (4 clases) que formaron parte la muestra de estudio fueron sometidos a 4 sesiones lectivas de 45 minutos con un componente expositivo mínimo, acto seguido fueron distribuidos por parejas y trabajaron sobre una batería de ejercicios algebraicos. A cada pareja le fue asignada una de las categorías mencionadas anteriormente, comparativa o secuencial, de modo que existiera el mismo número de parejas de cada tipo en cada clase.

Además de las lecciones y el trabajo por parejas, los estudiantes realizaron una prueba inicial y otra final, idénticas, con el propósito de obtener datos que evidencien diferencias de rendimiento en función de la condición de trabajo de la pareja. Se diseñó previamente un complejo sistema de puntuación que permitía someter a análisis tres componentes fundamentales: el conocimiento procedimental, la flexibilidad y el conocimiento conceptual.

Los resultados extraídos como comparación del pretest y el posttest concluyen que los estudiantes que trabajaron la opción comparativa obtuvieron mayores mejoras de rendimiento en los componentes de flexibilidad y conocimiento procedimental, y mejoras similares en conocimiento conceptual. Las conclusiones a las que llega Jon Star en este trabajo de investigación sugieren que puede haber mecanismos eficientes y aplicables al contexto del aula, que contribuyan al beneficio de la comparación de métodos resolutivos.

Con la ambición de comprobar si la actuación desarrollada en el mencionado trabajo es extrapolable al contexto de la Educación Secundaria en España, se ha aspirado con este trabajo a realizar una adaptación aproximada del experimento puesto en práctica por Jon Star, que fue enmarcada en el periodo de prácticas desarrollado en el centro público IES Alisal de Santander (véase sección III). Para ello se necesitó realizar un doble análisis. Por una parte, un profundo estudio de la actuación llevada a cabo en Tennessee, y por otra, una evaluación de los recursos, el tiempo, los materiales disponibles y las circunstancias en las que el autor se vio inmerso. En este sentido, es importante recordar que las responsabilidades como profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje siempre tuvieron un carácter prioritario sobre las labores como investigador propias de la actuación experimental.

La actuación fue llevada a cabo en un grupo de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología de Matemáticas I, de 18 estudiantes de entre 16 y 17 años. Se trató de una clase de buen nivel académico en la que la mayoría de cuyos alumnos aspiran a la consecución del título de Bachillerato con el propósito de acceder a futuros estudios universitarios. Sin embargo, como en cualquier clase, existían diferencias cognitivas entre los alumnos, desde aquellos con una nota media de lo que va de curso superior al 9, hasta los que obtuvieron el título de ESO sin haber aprobado las Matemáticas de 4º de ESO (sección III-a).

Durante el transcurso de las primeras 5 sesiones el grupo recibió lecciones expositivas cortas sobre la Unidad Didáctica de las *Funciones Elementales y sus Propiedades,* donde se incorporaban elementos que fomentaban la comparación de estrategias a la hora de resolver problemas (véase sección III.b, Planteamiento de la Experiencia). La segunda parte de estas sesiones consistía en la resolución de ejercicios por parte de los alumnos. El formato utilizado fue la resolución en grupo: un alumno voluntario (u ocasionalmente elegido por el profesor) salía a la pizarra y encaraba un problema propuesto, mientras el resto de los estudiantes le ayudaban aportando comentarios, impresiones y estrategias que eran valoradas globalmente por el grupo. Aún en este contexto de trabajo colaborativo, el profesor ejercía el papel de moderador y guía en el proceso de aprendizaje.

Las dos últimas sesiones, antes de la prueba final, fueron dedicadas a la realización de tareas por parejas, tratando de seguir las líneas generales de la actuación desarrollada por el equipo de Jon Star. De forma análoga a la técnica de referencia, entre las tareas se incluyeron ejercicios con diferentes posibilidades resolutivas y se animó a las parejas a que compartiesen impresiones y comparasen sus estrategias. Sin embargo, debido al limitado número de alumnos, se tomó la decisión de que todas las parejas deberían enfrentarse a la misma batería de ejercicios, de modo que el análisis final se tendría que centrar en comparar el rendimiento de los alumnos en función del carácter de la tarea. Se distinguieron tres tipos de tareas, las rígidas con un camino de resolución único, que a su vez podían tener una naturaleza más conceptual o más procedimental, y las flexibles. Esta característica constituyó la diferencia más sustancial de la actuación con respecto a la práctica experimental diseñada por Jon Star, donde la variable a estudiar era la condición asignada a cada alumno (recordemos: secuencial o comparativa) y no la tarea propuesta.

Por último se realizó una prueba final de la unidad didáctica para extraer datos en relación a las posibles mejoras de rendimiento de alumnos como consecuencia de este experimento. Sobre los datos obtenidos de la prueba final se ha realizado un análisis estadístico sencillo con el propósito de extraer conclusiones elocuentes al respecto (véase sección III-c).

Se han obtenido dos conclusiones fundamentales: por una parte, que es posible incorporar técnicas que fomenten y ejerciten la comparación de estrategias en las dinámicas de enseñanza habituales. Por otra, que estas técnicas tienen una influencia más positiva en el conocimiento procedimental y en el desarrollo de la flexibilidad que en la adquisición de conceptos (sección III-d).

II. MARCO TEÓRICO

La resolución de problemas es uno de los pilares de la enseñanza de las matemáticas. Esta afirmación está presente no sólo en los pensamientos de brillantes matemáticos dedicados a su didáctica (Polya, 1965; Guzmán, 1995), sino también en informes internacionales (informe Cockcroft, PISA) y en el propio currículo de ESO y Bachillerato, donde se da a la resolución de problemas un carácter transversal y se alude a la necesidad de integrarlo en todos los contenidos "*con el propósito de servir para que el alumnado desarrolle una visión amplia y científica de la realidad, para estimular la creatividad y la valoración de las ideas ajenas, la habilidad para expresar las ideas propias con argumentos adecuados y el reconocimiento de los posibles errores cometidos.*" (Ministerio de Educación P. S., 2008).

En el contexto de la resolución de problemas como herramienta didáctica, juega un papel fundamental la capacidad que el docente tenga para potenciar un conocimiento "flexible" entre sus alumnos, es decir, que estos posean un amplio abanico de herramientas procedimentales a la hora de encarar un problema y, simultáneamente, sean creativos para valorar la estrategia más adecuada para su resolución. Algunos autores denominan "experiencia adaptable" a la adquisición de esta capacidad por parte de los alumnos.

Será de especial importancia entender las características del desarrollo de este tipo de conocimiento, sabiendo apreciar el papel que desempeñan la adquisición de conceptos y procedimientos en la evolución del alumno. Por tanto, conocer las relaciones entre el conocimiento conceptual y el procedimental, saber cómo fortalecerlos y aprender a evaluarlos son desafíos pendientes cuyo esclarecimiento permitiría ofrecer una enseñanza de las matemáticas más equilibrada, sólida y significativa.

Como veremos en este trabajo, las técnicas de comparación de estrategias entre alumnos, abordadas en la investigación de referencia de Jon Star (véase sección III-c), pueden constituir el instrumento necesario para el desarrollo de las competencias deseadas en el contexto del aula, sin apenas interferir con el ritmo de aprendizaje óptimo.

a. Conocimiento conceptual y conocimiento procedimental.

Tradicionalmente se asume que, en su proceso de aprendizaje de las matemáticas, los alumnos desarrollan dos tipos de conocimientos, el entendimiento conceptual y las habilidades procedimentales (Hiebert, 1986).

Hiebert y Lefevre definen el conocimiento procedimental como “reglas y secuencias para resolver problemas matemáticos” (Hiebert & Lefevre, 1986). Este conocimiento está asociado a un tipo particular de problemas y, por tanto, no puede ser generalizado. En numerosos estudios de investigación, para evaluarlo, se suele recurrir a tareas rutinarias, tales como contar objetos o solucionar operaciones convencionales de aritmética. En contraposición, los mismos autores definen conocimiento conceptual como “aquel que es rico en conexiones”. Este conocimiento no está asociado a un tipo de problema en particular sino que puede ser generalizado. En ocasiones puede ser verbalizado y a la hora de evaluarlo los investigadores utilizan problemas nuevos que se salen de los estándares procedimentales (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001).

Star hace la siguiente descripción (Star J. R., 2000):

> *“…se asume que la adquisición del concepto llega cuando el conocimiento del principio puede ser usado para reconocer, identificar, explicar, evaluar, juzgar, crear, inventar, comparar y elegir, es decir, cuando tal conocimiento es “entendido”. Mientras, la adquisición de procedimientos llega cuando las habilidades se convierten en rutinas y pueden ser ejecutadas con fluidez, con otras palabras, cuando el conocimiento se automatiza.”*

Existe la idea extendida de que ambos tipos de conocimientos se benefician mutuamente y de que son aprendidos de manera paralela. Sin embargo, no se ha llegado a un acuerdo en lo referente al orden en que los niños los adquieren y cómo el conocimiento de uno afecta a la consecución del segundo (Star J. R., 2000).

La siguiente cita de Jon Star muestra la importancia de resolver estas dificultades a las que se acaba de hacer referencia (Star J. R., 2000).

“La diferencia de tratamiento del conocimiento procedimental (con una definición muy estrecha) y del conocimiento conceptual (de mucha mayor riqueza) es en gran parte responsable del fracaso a la hora de desarrollar una teoría útil y fundada.”

En una de sus investigaciones, Ton de Jong y coautores (de Jong & Ferguson-Hessler, 1996) introduce una nueva característica del conocimiento, *la calidad*, a la cual otorga dos posibles niveles: uno superficial, pobre, asociado al aprendizaje memorístico; y otro profundo, que está anclado firmemente en la base cognitiva de la persona, se asocia con la comprensión, la abstracción y con el juicio crítico, y ha sido perfectamente estructurado y almacenado en la memoria. Considerando esta nueva variable crean la siguiente tabla 1, donde aparecen dos celdas nuevas, es decir, dos hipotéticos niveles de conocimiento a ser analizados.

Knowledge type	**Knowledge quality at endpoint of acquisition**	
	Superficial	**Deep**
Procedural Knowledge	Fully compiled; Automatized	????
Conceptual Knowledge	????	Understood

Tabla 1. Calidad del conocimiento

Jon Star, siguiendo la reflexión llevada a cabo por de Jong, se interesa en uno de estos nuevos niveles de conocimiento. Esta tercera dimensión en la teoría del conocimiento en las matemáticas es lo que llama *el entendimiento procedimental*, entendiéndose como un conocimiento profundo del procedimiento y que está asociado a procesos complejos y abstractos como aquellos abordados en la enseñanza del algebra o el cálculo.

Esta ampliación en la concepción del conocimiento procedimental puede tener consecuencias en futuras investigaciones sobre el aprendizaje matemático de habilidades procedimentales en tres aspectos: ayudará a desarrollar una teoría más sólida sobre las relaciones entre los distintos tipos de conocimientos, ensanchará el modo de evaluar el entendimiento de los estudiantes y nos hará recordar que el verdadero entendimiento en matemáticas es la combinación de "*saber*" y "*hacer*" y no la consecución de lo uno sin lo otro.

Entender estos dos tipos de conocimientos tiene una gran importancia a la hora de analizar el concepto de la experiencia adaptable y la manera de ser instruida, en el marco de la educación secundaria.

b. Experiencia Adaptable

Como se mencionó al inicio del Marco Teórico, un concepto en estrecha relación con la *flexibilidad matemática,* que ha sido desarrollado en la introducción, es la ***experiencia adaptable*** (*adaptive expertise,* en inglés). El término fue acuñado por vez primera por Giyoo Hatano a principios de los años 80 (Hatano & Inagaki, 1986) y hace referencia a la habilidad de aplicar procedimientos significativos de manera flexible y creativa en contraposición con estrategias rutinarias y rígidas, que muchas veces sólo infieren la habilidad de completar ejercicios matemáticos rápida y correctamente sin entender lo que uno está haciendo.

Desde entonces el tema ha sido foco de estudio por parte de muchos investigadores, algunos de los cuales (Mercier & Higgings, 2013; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009) han centrado sus estudios en el contexto educativo de las matemáticas para determinar cómo debería desarrollarse la *experiencia adaptable* en el marco del aula de Educación Primaria.

Una característica univoca de la *experiencia adaptable* es la habilidad de aplicar el conocimiento a problemas nuevos o atípicos, inventando nuevos procedimientos de resolución en vez de aplicar métodos ya contrastados (Holyoak, 1991). La alta capacidad de *adaptación* permite al experto detectar aquellas situaciones donde las reglas y métodos convencionales no son directamente aplicables (Gott, Hall, Pokorny, Dibble, & Glaser, 1992). Es más, algunos autores llegan a la conclusión de que esta *flexibilidad* puede derivar en mejores rendimientos a la hora resolver problemas técnicos (Gott, Hall, Pokorny, Dibble, & Glaser, 1992), evitar errores y realizar diagnósticos más precisos (Feltovich, Spiro, & Coulson, 1997).

Un modelo de *experiencia adaptable* considera que en el proceso de aprendizaje se desarrollan dos dimensiones: la eficiencia y la innovación (o capacidad de adaptación). Schwartz, Bransford y Sears han representado gráficamente (véase tabla 2) la relación entre estas dos dimensiones identificando 4 regiones (Schwartz, Bransford, & Sears, 2005): la del novato (baja eficiencia e innovación), el experto en rutinas (alta eficiencia y baja innovación), el novato frustrado (baja eficiencia, alta innovación) y el experto en adaptación (alta eficiencia e innovación).

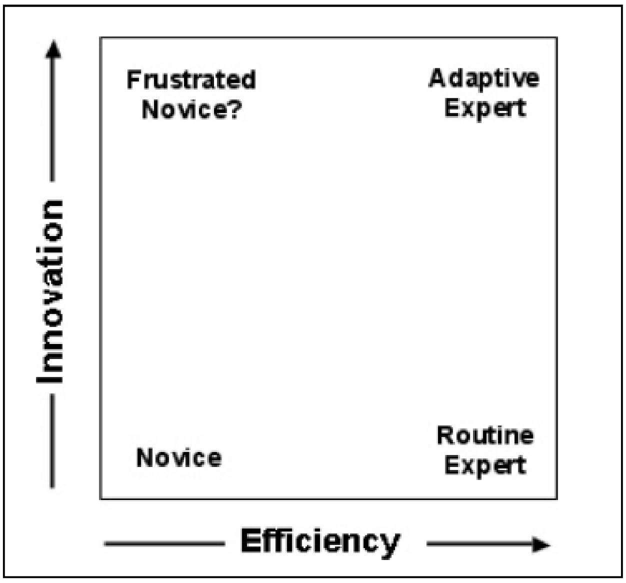


Tabla 2. Dos dimensiones del aprendizaje y la transferencia: innovación y eficiencia (Schwartz, Bransford, & Sears, 2005).

Schwartz y sus colaboradores sugieren que, en su hoja de ruta para guiar a los alumnos hacia la experiencia adaptable, el profesional docente debe encontrar un equilibrio entre la innovación y la eficiencia.

Esta reflexión está relacionada con el concepto de calidad del conocimiento de de Jong que veíamos en la sección anterior y con la nueva dimensión del conocimiento (el entendimiento procedimental) sobre la que teorizaba Jon Star. En esencia ambas hipótesis asumen que los logros cognitivos que los alumnos pueden alcanzar, tendrán siempre un componente procedimental muy marcado.

Mercier y Higginns (Mercier & Higgings, 2013) llegan a la conclusión de que para cultivar la *experiencia adaptable* los estudiantes deben innovar y explorar los conceptos matemáticos. En el contexto de las matemáticas se deben ofrecer al estudiante estrategias múltiples a la hora de resolver problemas y no un único método resolutivo (véase tabla 3). Permitir a los alumnos explorar y razonar sobre las diferentes estrategias matemáticas hará que cada uno escoja un método personal y revelador, lo cual le ayudará a adquirir más capacidad de flexibilidad y adaptación (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009).

Strategy	Use of strategy to solve 3 + 5
Sum	Put up 3 fingers, usually accompanied by saying, "1, 2, 3"; put up 5 fingers, usually accompanied by saying, "1, 2, 3, 4, 5"; count all fingers, saying, "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8"
Shortcut sum	Say, "1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8," perhaps simultaneously putting up fingers
Min	Say, "5, 6, 7, 8" or "6, 7, 8," perhaps simultaneously putting up fingers on each count beyond 5
Count from first	Count from first addend, saying, "3, 4, 5, 6, 7, 8" or "4, 5, 6, 7, 8"
Retrieval	Say an answer and explain by saying, for example, "I just knew it"

Tabla 3. Estrategias comunes de niños para sumar (Siegler & Shrager, September 1998)

Además, como se mencionó anteriormente en la introducción, se han encontrado evidencias de que el uso de materiales manipulativos ayuda a los estudiantes a desarrollar el entendimiento de modo que son capaces de trasladar el conocimiento a nuevas situaciones. Del mismo modo las actividades colaborativas han sido recomendadas como herramienta para facilitar la experiencia adaptable. Los estudiantes que trabajan en grupos y comparten impresiones sobre el entendimiento y estrategias resolutivas estarán trabajando conceptos a un nivel mucho más profundo (Mercier & Higgings, 2013).

Como contrapartida o inconveniente otros investigadores (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009) sostienen que la experiencia adaptable no es algo que pueda ser instruido, sino que más bien se trata de algo que deba ser fomentado o cultivado, por lo que afirman que es necesario llevar a cabo estudios futuros que se desarrollen a lo largo de un periodo de tiempo prolongado con el fin de extraer conclusiones significativas al respecto.

En resumen, la incógnita radica en encontrar el método idóneo para, a través de problemas que conjuguen procedimientos y conceptos, ofrecer una enseñanza de mayor rendimiento. Es precisamente la búsqueda de este método el objetivo del experimento de Jon Star del que hablaremos en la siguiente sección. A una escala más humilde, se pretende con el siguiente trabajo encontrar indicios que corroboren la posibilidad de utilizar mencionados problemas en el ámbito de la Educación Secundaria en España.

c. El planteamiento de Jon Star

Como se ha comentado con anterioridad al inicio del capítulo I, durante al menos 20 o 25 años ha existido la creencia, cada vez más generalizada, de que los estudiantes se benefician de la práctica de comparar diferentes métodos de resolución de problemas. Han sido muchos los estudios al respecto que han demostrado la importancia de esta idea en el ámbito de la enseñanza de matemáticas, sin embargo es difícil encontrar estudios que relacionen las nuevas técnicas didácticas de comparación de métodos resolutivos con los resultados académicos de los alumnos. Y aún más que evalúen cuantitativamente los progresos de los alumnos en los diferentes componentes del conocimiento.

Para analizar de manera experimental el efecto que este mecanismo puede tener en el proceso de aprendizaje Jon Star ha llevado a cabo diversas colaboraciones experimentales en Centros de Educación Primaria y Secundaria con dos vertientes principales que a su vez están relacionadas entre sí (Star J.

R., 2001). Por un lado, orienta su análisis a la obtención de conclusiones en referencia a la importancia de la flexibilidad en las matemáticas; por otro, estudios que ahondan en las diferencias y conexiones entre el conocimiento procedimental y conceptual.

Una de sus colaboraciones, plasmada en el artículo "*Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations"* que desarrolló con Bethany Rittle-Johnson y fue publicado en el 2007 en el *Journal of Educational Psychology,* ha servido como modelo para la actuación de este Trabajo Fin de Máster, que tuvo lugar en el centro de prácticas IES Alisal. En el artículo de Star se explica pormenorizadamente cómo se trabajó con 70 estudiantes de entre 12 y 14 años en el bloque de Álgebra y, más concretamente, la resolución de ecuaciones de primer grado. Se escoge el álgebra como telón de fondo de esta investigación por un triple motivo. Por una parte, es un dominio que apenas ha sido estudiado (la mayor parte de las investigaciones en el campo del conocimiento flexible han sido siempre enmarcadas en procesos de aritmética básica), por otra parte constituye un tema ideal para investigar la flexibilidad porque hay diferentes maneras de resolver ecuaciones, siendo algunas más eficientes que otras (Star & Rittle-Johnson, 2007). Además, históricamente el álgebra ha representado un escollo para el alumnado, que, al abordarlo, se expone por primera vez a magnitudes significativas de simbolismo y la abstracción en matemática.

Entre los objetivos más importantes de este proyecto se incluyen:

- Investigar si la comparación de procedimientos de resolución de problemas puede ayudar el proceso de aprendizaje y transferencia, la flexibilidad y la adquisición conocimiento conceptual.
- Realizar un estudio experimental en clases reales
- Facilitar el aprendizaje de estimaciones computacionales para niños de 10 a 12 años.
- Facilitar el aprendizaje de resolución de ecuaciones algebraicas en alumnos de 12 a 14 años.

El trabajo experimental de campo requirió un sofisticado diseño previo de toda una serie de técnicas y actividades a poner en práctica en el contexto del aula. Se usó un diseño del tipo pretest-intervención-postest, para el cual hubo que preparar un método de evaluación al que los alumnos serían sometidos inmediatamente antes de llevar a cabo el programa y justo al acabarlo. Esta evaluación representó la herramienta necesaria para la obtención de los datos de campo que posteriormente serían analizados.

La intervención se desarrolló en 4 sesiones consecutivas de 45 minutos. La primera sesión se dedicó a la realización del pretest (30 minutos) y una exposición breve del profesor en la cual abordó una posible resolución de una ecuación lineal con paréntesis, indicando a los alumnos la posibilidad de utilizar diferentes estrategias.

Durante las dos siguientes sesiones se emparejó a los estudiantes de las clases aleatoriamente sin atender a ninguna variable. A cada pareja se le asignó al azar una condición: comparativa o secuencial, de modo que hubiera el mismo número de cada tipo en todas las clases. La manera de trabajo en el aula dependía de la condición que le fuera asignada a la pareja.

Las parejas con condición comparativa estudiaron dos procedimientos de resolución para un mismo problema abordado en clase y fueron animados a comparar aquellos a la hora de contestar a las preguntas. La tabla 4 ilustra un ejemplo de una de los ejercicios creadas por el equipo de Jon Star.

A. Compare Condition

Mandy's Solution:		**Erica's Solution:**	
$5(y+1) = 3(y+1)+8$		$5(y+1) = 3(y+1)+8$	
$5y+5 = 3y+3+8$	*Distribute*	$2(y+1) = 8$	*Subtract on Both*
$5y+5 = 3y+11$	*Combine*	$y+1 = 4$	*Divide on Both*
$2y+5 = 11$	*Subtract on Both*	$y = 3$	*Subtract on Both*
$2y = 6$	*Subtract on Both*		
$y = 3$	*Divide on Both*		

1. Mandy and Erica solved the problem differently, but they got the same answer. Why?

2. Why might you choose to use Erica's way?

Tabla 4. Condición comparativa (Rittle-Johnson & Star, 2007)

Mientras los estudiantes con condición comparativa trabajaban dos métodos de resolución alternativos para un mismo ejercicio (siempre presentados en paralelo, en la misma hoja), las parejas con condición secuencial estudiaban los mismos dos métodos de resolución pero aplicados a distintos ejercicios de manera secuencial y en hojas consecutivas. No existía en ese caso una valoración comparativa directa de los métodos por parte del alumno.

B. Sequential Condition

Mandy's Solution:

$$\begin{aligned} 5(y+1) &= 3(y+1)+8 & & \\ 5y+5 &= 3y+3+8 & & \textit{Distribute} \\ 5y+5 &= 3y+11 & & \textit{Combine} \\ 2y+5 &= 11 & & \textit{Subtract on Both} \\ 2y &= 6 & & \textit{Subtract on Both} \\ y &= 3 & & \textit{Divide on Both} \end{aligned}$$

1. Would you choose to use Mandy's way to solve problems like this? Why or why not?

-----NEXT PAGE-----

Erica's Solution:

$$\begin{aligned} 10(x+3) &= 6(x+3)+16 & & \\ 4(x+3) &= 16 & & \textit{Subtract on Both} \\ x+3 &= 4 & & \textit{Divide on Both} \\ x &= 1 & & \textit{Subtract on Both} \end{aligned}$$

1. Check Erica's solution by substituting her answer into the equation. Did Erica get the right answer?

Figure 1. Sample pages from intervention packet for (A) compare and (B) sequential conditions.

Tabla 5. Condición secuencial (Rittle-Johnson & Star, 2007)

Tampoco las preguntas propuestas, referidas a sendos ejercicios, sugerían a los alumnos la necesidad de comparación entre métodos de resolución.

Las ecuaciones algebraicas utilizadas como ejemplos para trabajar con los alumnos de la condición comparativa fueron clasificadas en cuatro tipos: dividir, combinar, sustraer o convencional. Para los tres primeros tipos de ecuaciones se muestra un método de resolución tradicional y, al lado, otro más sofisticado que ofrece atajos de cálculo. Para el último tipo (la ecuación convencional), sin embargo, es el primer método resolutivo el que representa la estrategia más eficiente. (Véase ejemplo en tabla 6).

Table 1
Alternative Solution Methods for Four Types of Equations

Equation type[a]	Sample solution via conventional method	Sample solution via nonconventional method
$a(x + b) = c$ Divide composite	$3(x + 1) = 15$ $3x + 3 = 15$ $3x = 12$ $x = 4$	$3(x + 1) = 15$ $x + 1 = 5$ $x = 4$
$a(x + b) + d(x + b) = c$ Combine composite	$2(x + 1) + 3(x + 1) = 10$ $2x + 2 + 3x + 3 = 10$ $5x + 5 = 10$ $5x = 5$ $x = 1$	$2(x + 1) + 3(x + 1) = 10$ $5(x + 1) = 10$ $x + 1 = 2$ $x = 1$
$a(x + b) = d(x + b) + c$ Subtract composite	$7(x - 2) = 3(x - 2) + 16$ $7x - 14 = 3x - 6 + 16$ $7x - 14 = 3x + 10$ $4x - 14 = 10$ $4x = 24$ $x = 6$	$7(x - 2) = 3(x - 2) + 16$ $4(x - 2) = 16$ $x - 2 = 4$ $x = 6$
$a(x + b) + dx + e = f(gx + h) + ix + c$ Conventional	$4(x - 2) + 2x + 10 = 2(3x + 1) + 4x + 8$ $4x - 8 + 2x + 10 = 6x + 2 + 4x + 8$ $6x + 2 = 10x + 10$ $2 = 4x + 10$ $-8 = 4x$ $-2 = x$	$4(x - 2) + 2x + 10 = 2(3x + 1) + 4x + 8$ $4(x - 2) + 2x + 2 = 2(3x + 1) + 4x$ $4x - 8 + 2x + 2 = 6x + 2 + 4x$ $6x - 6 = 10x + 2$ $-6 = 4x + 2$ $-8 = 4x$ $-2 = x$

[a] All xs stand for variables; all other letters were replaced with numbers.

Tabla 6. Comparativa de diferentes métodos resolutivos (Rittle-Johnson & Star, 2007)

Se crearon varios conjuntos de ecuaciones con diferentes metodologías de resolución presentadas una frente a la otra en la misma lámina (3 láminas). Cada paso metodológico fue etiquetado. Al final de la página aparecían dos preguntas que pedían a los alumnos realizar una comparativa de dos de los ejemplos. Estas láminas constituyeron el material de trabajo de las parejas de condición comparativa.

De manera similar se crearon paquetes, con un total de 24 ecuaciones, las 12 anteriores más 12 isomorfas (6 láminas), con una única metodología de resolución, que fueron utilizadas por las parejas de condición secuencial. Ambos métodos de resolución fueron incluidos en las láminas, pero presentados en diferentes láminas. También se llevó a cabo un etiquetado de los pasos. Al final de cada página se proponía una pregunta a responder.

Durante el desarrollo de las 2 sesiones troncales se pidió a los alumnos que se enfrentaran a cada ejercicio propuesto por separado, comparando sus respuestas con sus correspondientes parejas y preguntando en caso de que estas respuestas no fueran iguales. El profesor del grupo y dos miembros del equipo de investigación circulaban por la clase respondiendo dudas o preguntas de los alumnos y asegurándose de que estos cumplían las instrucciones del proyecto. Cada pareja trabajaba a su ritmo y no se esperaba de ellas que acabaran el paquete de ejercicios al completo. Al final de las dos sesiones se distribuyeron deberes para hacer en casa, los mismos para todos los estudiantes.

La última sesión de las 4 que comprendían la actuación de campo fue dedicada a la realización de la prueba o posttest. La prueba utilizada para evaluar al alumnado tanto en el pretest como en el posttest fue el idéntica. El examen fue diseñado para evaluar competencias en tres ámbitos: el de los procedimientos, el de la flexibilidad y el del conocimiento conceptual.

Table 2
Sample Items for Assessing Procedural Knowledge, Flexibility, and Conceptual Knowledge

Problem type	Sample items	Scoring
Procedural knowledge		
Familiar ($n = 4$)	$-1/4\ (x - 3) = 10$ $5(y - 12) = 3(y - 12) + 20$	1 pt for each correct answer.
Transfer ($n = 4$)	$0.25\ (t + 3) = 0.5$ $-3(x + 5 + 3x) - 5(x + 5 + 3x) = 24$	1 pt for each correct answer.
Flexibility		
Generating multiple methods ($n = 2$)	Solve this equation in two different ways: $4(x + 2) = 12$	1 pt if two different, correct solutions.
Recognize multiple methods ($n = 2$)	For the equation $2(x + 1) + 4 = 12$, identify all possible steps that could be done next. (4 choices)	1 pt for each correct choice.
Evaluate nonconventional methods ($n = 2$)	$3(x + 2) = 12$ $x + 2 = 4$	
	a. What step did the student use to get from the first line to the second line?	a. 1 pt if correctly identify step.
	b. Do you think that this way of starting this problem is (a) a very good way; (b) OK to do, but not a very good way; (c) not OK to do?	b. 2 pts for choice a, 1 pt for choice b.
	c. Explain your reasoning.	c. 3 pts if justify and say quicker/easier; 2 pts for quicker/easier; 1 pt if don't reject, but prefer alternative.
Conceptual knowledge ($n = 6$)	1. If m is a positive number, which of these is equivalent to (the same as) $m + m + m + m$? (Responses are: $4m$; m^4; $4(m + 1)$; $m + 4$.)	1 pt for selecting $4m$.
	2. Here are two equations: $213x + 476 = 984$ $213x + 476 + 4 = 984 + 4$	
	a. Without solving either equation, what can you say about the answers to these equations? (Responses are: both answers are the same; both answers are different; I can't tell without doing the math.)	a. 1 pt for selecting "both answers are the same."
	b. Explain your reasoning.	b. 2 pts if justify that same thing done to both sides doesn't change value of x, 1 pt if note that 4s cancel out.

Note. pt = point.

Tabla 7. Ejemplos de elementos de evaluación en los tres ámbitos (Rittle-Johnson & Star, 2007)

Para asegurar la fidelidad de la ejecución al diseño del proyecto se realizó con carácter previo un guión de cada sesión y se verificó durante la actuación que las ideas principales de este guión eran presentadas en el aula sin añadir información extra. Además, uno de los miembros del equipo controló en todo momento que ninguna pareja recibía un nivel de ayuda mayor al resto.

El sistema de extracción de datos de las pruebas de nivel fue muy sofisticado, distinguiéndose, como hemos dicho, componentes de evaluación en los tres ámbitos de estudio. Se utilizó el coeficiente Alpha de Cronbach (media ponderada) (Tavakol & Dennick, 2011) para medir la fiabilidad de los resultados, es decir, cada elemento evaluado se codificó de modo que su puntuación se vio afectada por dicho coeficiente de ponderación. La evaluación consideró ambas pruebas de nivel, pretest y posttest, siendo el progreso de cada alumno lo que representó el dato final a analizar. Nótese que se eligió la variable progreso antes que el resultado absoluto de la prueba final (posttest). Se optó por analizar esta variable por ser más fácil de interpretar.

La recogida de datos no fue exclusiva de las pruebas inicial y final sino que se llevó a cabo a lo largo de todo el proceso. Como ya se ha comentado, una vez resuelto cada ejercicio el alumno debía compartir y describir la respuesta al compañero además de enunciar la correspondiente pregunta de cada lámina. Se les pedía que escribieran las respuestas pero además se grababan las conversaciones para extraer datos cualitativos adicionales. Durante el proceso manipulativo, en el que los alumnos se enfrentaban a la batería de ejercicios previamente diseñados, el profesor enfatizaba el hecho de que existen múltiples métodos resolutivos. Se contó el número de ejercicios realizado por cada alumno ponderándolo positivamente en aquellos casos en los que el alumno usó el método más eficiente.

Tras la toma de datos de campo y un análisis exhaustivo de estos se extrajeron una serie de interesantes conclusiones. Por una parte, los resultados de ambos grupos experimentaron una mejora en el posttest. Además los resultados aportan evidencia de que la comparación de métodos de resolución de problemas derivó en mayores mejoras en dos de las tres variables estudiadas:

el conocimiento de procedimientos y la flexibilidad; así como resultados similares en la tercera, el conocimiento conceptual.

Los estudiantes que ejercitaron la comparación de estrategias tuvieron mejores rendimientos a la hora de resolver problemas de características similares a las propuestas durante las sesiones previas, pero también encarando problemas con los que no estaban familiarizados. Además fueron capaces de generar estrategias múltiples de resolución y de encontrar atajos de cálculo con mayor consistencia que los estudiantes que trabajaron de manera secuencial. De alguna manera la técnica de comparación sirvió para que los estudiantes recordaran lo que habían aprendido los dos días previos.

Se puede decir que el trabajo llevado a cabo por Jon Star y sus colaboradores finalizó con éxito, y que significó un sólido primer paso hacia la evidencia de que las técnicas comparativas de estrategias de resolución tienen una influencia positiva en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, se abrieron una serie de interrogantes dignos de ser investigados más a fondo. Todavía quedaba por demostrar el beneficio que estas técnicas pueden aportar bajo otras condiciones de campo, en otros ambos de las matemáticas, aplicadas a estudiantes de otras edades, etc. Además surge la duda de qué tipos de comparaciones son más adecuados y de cuál es el modo más idóneo de incorporar estas técnicas a las dinámicas tradicionales.

Desde su actuación en Tennesse, Star y su equipo han trabajado en otros colegios privados y públicos en Michigan, Tennessee and Massachusetts, tratando de corroborar los resultados iniciales y buscando respuestas a preguntas complementarias, que permitan ampliar los descubrimientos y ayuden a entender con más rigor el beneficio de los procesos discutidos en su trabajo de investigación.

III. UNA EXPERIENCIA DURANTE EL PRÁCTICUM

Como se mencionó en la introducción, la idea de este trabajo surge tras la intervención de Jon Star en las Quintas Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Cantabria, en la que presentó la conferencia inaugural: *Promoviendo la Flexibilidad Matemática*. Durante dicha conferencia Jon explicó los resultados a los que su equipo de investigación había llegado tras varias actuaciones experimentales en el marco de la educación de Secundaria en relación al concepto de flexibilidad en las matemáticas y a la dicotomía existente entre el conocimiento conceptual y el procedimental.

Con este trabajo se ha querido hacer una modesta adaptación, siguiendo algunas de las líneas generales, del experimento acometido por Jon Star (véase sección II-c), al ámbito de la Educación Secundaria en España, con el propósito de comprobar si algunos de los resultados obtenidos pueden ser extrapolables a otros contextos académicos.

a. Centro. Contexto

La actuación fue puesta en práctica en un Instituto de Enseñanza Secundaria y en un grupo de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología con alumnos de edades entre los 16 y 18 años. El grupo estaba compuesto por un total de 18 alumnos y, en términos generales, tenía un nivel de competencias en matemáticas bastante alto en relación al nivel medio del centro, sin embargo dos de los estudiantes obtuvieron el título de ESO con las Matemáticas de 4º de ESO suspensas y arrastran cierto lastre. Además dos alumnos están repitiendo curso.

El profesor actual de matemáticas les había acompañado en los últimos dos cursos académicos. La dinámica habitual que él ponía en práctica estaba basada en la resolución de problemas. Tras una breve sesión expositiva de 10 minutos donde explicaba nociones básicas sobre los contenidos a ser abordados por los alumnos, uno de los estudiantes salía a la pizarra y encaraba un problema escogido cuidadosamente de antemano por el profesor. A partir de ahí se iniciaba un debate donde todos los miembros de la clase participaban, bien proponiendo ideas, bien preguntando para aclarar sus dudas. El profesor les guiaba en el proceso y aprovechaba momentos claves para introducir componentes teóricos que permitieran el avance en la materia. Según se pudo apreciar los estudiantes respondían bien a esta dinámica y mostraban interés por aprender. El profesor conseguía mantener su atención y crear un espacio de trabajo óptimo y motivador.

En ningún momento se llevaban a cabo tareas o trabajos cooperativos donde los estudiantes trabajaran por su cuenta. Como se ha visto en la sección anterior, una parte de la actuación acometida por Jon Star, y que se ha hecho extensiva al presente trabajo, será la resolución de ejercicios por parejas; Esto supuso un cambio substancial en el proceso enseñanza-aprendizaje del aula.

El conocimiento procedimental tenía tanto peso o más que el entendimiento de conceptos y los estudiantes eran aconsejados sobre la necesidad de estudiar fórmulas y expresiones que constituyan un apoyo funcional a la hora de hacer uso de sus competencias matemáticas. La propia programación del centro incidía en la importancia de la "*realización de ejercicios para alcanzar automatismos"* como metodología didáctica práctica. Sin embargo, no se mencionaban en ningún momento las técnicas de comparación de estrategias o procedimientos a la hora de resolver problemas.

El proceso de adaptación de la práctica experimental fue complejo; por un lado, presentaron diferencias notables de formato que requirieron cambios estructurales en el diseño de la actuación y que vinieron dadas por las circunstancias en el centro de prácticas:

- Número de alumnos: sólo 1 grupo de 18 alumnos. El hecho de que la muestra no fuera muy amplia hizo que se decidiera introducir una modificación significativa en la intervención. Mientras que Jon Star comparaba resultados entre alumnos, en función de su modo de trabajar en clase (de manera secuencial o comparando estrategias resolutivas) en el presente trabajo se ha prescindido de esa variable y simplemente se compara el rendimiento de los alumnos (en su totalidad) en función de los ejercicios propuestos, distinguiéndose entre ejercicios con mayor peso conceptual, otros para los cuales es necesario manejar procedimientos y por último aquellos donde se valora la flexibilidad.

- Edad del grupo: se trataba de un grupo de 1º de Bachillerato, de edades comprendidas entre los 16 y los 18 años. Hacía ya tiempo que habían descubierto el lenguaje simbólico del álgebra y otros elementos matemáticos con fuerte contenido de abstracción. En general se trataba de un grupo de buen nivel que aspiraba a acabar el Bachillerato y acceder a estudios universitarios en ámbitos científicos.
- Unidad didáctica predeterminada por las necesidades de programación: es un tema muy diferente al escogido en el proyecto de investigación de Jon Star. No tiene tanta carga procedimental y abarca un amplio espectro matemático. En él se encuentran implícitos los bloques de Álgebra, Análisis, Aritmética e incluso Estadística.
- Tiempo escaso a la hora de elaborar el diseño, análisis y conclusiones del trabajo: desde el momento que se conocieron cuáles serían las circunstancias en el aula hasta que se llevó a cabo la actuación apenas transcurrieron 2 semanas. A esto se añade el inconveniente de no poseer ninguna experiencia docente en el ámbito matemático y más concretamente en el de las Funciones Elementales.
- Restricciones de tiempo en el centro de trabajo (menor flexibilidad temporal en los grupos de Bachillerato): la programación de los grupos de Bachillerato está generalmente muy apretada y es difícil salirse de ella o incorporar elementos externos sin perjudicar a las unidades didácticas que se imparten a posteriori. Se dispuso de 5 sesiones convencionales donde se abordaron contenidos propios del currículo de Bachillerato y sólo 2 sesiones dedicadas a la realización de ejercicios, las cuales se aprovecharon para introducir el trabajo experimental de campo.
- Naturaleza y profundidad de los contenidos: se tuvo que adaptar los ejercicios experimentales al nivel del grupo, por lo que fue necesario elaborarlos o adaptarlos a medida que se iban impartiendo los contenidos de la unidad.

- Prioridad del proceso de aprendizaje del grupo de alumnos con respecto al experimento que estoy llevando a cabo: hubo que asegurarse que eran impartidos los contenidos propios de la unidad y no sólo ciertos aspectos de las Funciones Elementales que pudieran interesar para llevar a cabo la experimentación. Además se debía garantizar la equidad entre el alumnado, es decir, que todos los miembros de la clase gozaran de las mismas oportunidades de aprendizaje.

Por otro lado existían características inevitables que pueden condicionar los resultados y por lo tanto las conclusiones extraídas de la experiencia.

- Diferencias culturales.
- Diferencias de nivel académico de los protagonistas.
- Inexperiencia práctica como docente.

Estudiar el efecto de estos condicionantes representa una de las aspiraciones complementarias que Jon Star se planteaba tras la realización de su investigación en Tennesse (véase final sección II-c). Se ha considerado que el análisis de los efectos que estas diferencias puedan tener en los resultados de la investigación no corresponde al dominio de este trabajo, sino a un estudio más de mayor profundidad, más riguroso y con mayor número de recursos.

b. Planteamiento de la experiencia

Para resolver problemas matemáticos eficientemente es necesario que los estudiantes adquieran *flexibilidad.* En muchos casos es una característica que acabamos desarrollando sin haber sido ejercitada explícitamente. En el centro de prácticas IES Alisal, donde se llevó a cabo la investigación del presente trabajo, no se contemplan actividades de comparación de métodos resolutivos, y tampoco se fomenta de manera manifiesta el uso de la *flexibilidad* como un valioso instrumento pedagógico para enseñar las matemáticas. Aunque se disponen de datos al respecto, se sospecha que esta situación es extensible a la mayoría de centros educativos en la comunidad autónoma y en el estado.

Con este trabajo se ha pretendido hacer una valoración sobre la posibilidad de incorporar el concepto ideológico de la *flexibilidad* a un contexto de aula de matemáticas y analizar los efectos que éste puede tener en el aprendizaje de los alumnos y consecuentemente en sus resultados escolares. Para ello se integraron componentes asociados con la *experiencia adaptable* (véase sección II-b) en los contenidos de 7 sesiones de la asignatura de Matemáticas I, en 1º de Bachillerato, y se diseñaron una serie de ejercicios de refuerzo y una prueba final con el propósito de poder comparar los resultados en función de la naturaleza de cada tarea propuesta, ya fueran ejercicios meramente procedimentales, con un corte más conceptual o aquellos asociados a una mente matemática flexible.

Una de las limitaciones del presente estudio fue el marco matemático desde el cual se desarrollaría la actuación. El trabajo de Jon Star se centró en el álgebra y, más concretamente, en la resolución de ecuaciones de primer grado (otras experimentaciones llevadas a cabo por su equipo se enmarcan en el bloque de aritmética). Este bloque didáctico fue elegido intencionadamente, ya que encajaba a la perfección con el tema del estudio, debido a su abstracción, y por tener una naturaleza procedimental muy marcada.

Al iniciar el periodo de prácticas en el centro el tutor de prácticas propuso trabajar sobre la unidad didáctica de "funciones elementales", que es la que cronológicamente correspondía con el momento, según el programa del curso, y la cual no está exclusivamente enmarcada en el bloque de algebra. Este tema de funciones tiene presencia también en los bloques de análisis, aritmética, e incluso estadística. El peso conceptual es notable y los ejercicios abordados no tienen tanto carácter procedimental como en la unidad de resolución de ecuaciones lineales.

El grupo ya había sido introducido a los conceptos de función y a las propiedades de las funciones el curso pasado, aunque de un modo más superficial con respecto a los contenidos que se supone deben ser abordados en este curso académico.

Las unidades abordadas inmediatamente antes a la de Funciones Elementales fueron Derivadas, Límites, Trigonometría; posteriormente sería sucedida por la unidad de Ecuaciones de la Recta. Esta cronología tiene bastante sentido: el haberse topado con la unidad de derivadas anteriormente les allanaría el camino a la hora de entender el concepto de pendiente o gradiente de la función y por tanto el crecimiento y decrecimiento. Era interesante, además, que tuvieran claros los conceptos de límite, infinito, algo que tiende a un número; esto les ayudaría a comprender contenidos relacionados que son propios de esta unidad, como la noción de asíntota o los extremos de la función. También era importante que dominaran la trigonometría a la hora de tratar las funciones trigonométricas.

La idea inicial fue que durante las 7 sesiones de las que se disponía para impartir la Unidad Didáctica de Funciones Elementales, se aprovecharían ciertos momentos para acentuar la importancia de la flexibilidad en las matemáticas, de disponer de diferentes recursos a la hora de encarar un problema y de ser creativo al resolverlo, sabiendo distinguir la opción más adecuada para cada caso. Además, se intentaría crear un ambiente de trabajo similar al desarrollado por Jon Star en su experimento (ver sección II-c), donde los alumnos trabajaran por parejas la comparación de estrategias de resolución. La octava sesión se utilizaría para realizar una prueba escrita que sirviera no sólo de elemento de evaluación del proceso de aprendizaje, sino también de recogida de datos de la investigación.

Como se acaba de mencionar, durante la elaboración de la unidad didáctica se tuvo que encajar el experimento de este trabajo y para ello encontrar elementos de la unidad donde incorporar la idea de *flexibilidad*. Pronto surgió el primer obstáculo: la unidad de “funciones elementales” no tiene un peso procedimental tan marcado como la de “ecuaciones de primer grado”. Además se encuentran ciertas dificultades a la hora de detectar elementos donde la flexibilidad no forme parte del proceso de aprendizaje tradicional. En este contexto el uso de diferentes sistemas de representación es obligado, lo cual conlleva que la idea de flexibilidad está siendo utilizada implícitamente.

Como resultado de las anteriores reflexiones se elaboró una secuencia de la intervención, que se desarrollaría de la siguiente manera:

En primer lugar se llevó a cabo una prueba inicial para que los alumnos la realizaran en casa, con el fin de familiarizarse con su nivel de partida y detectar carencias importantes. A diferencia de la prueba inicial llevada a cabo por Jon Star y su equipo, la propuesta en la actuación de este trabajo no fue idéntica a la prueba final. Durante el transcurso de las siguientes 5 sesiones se abordaron numerosos contenidos que fueron nuevos para los alumnos y de los cuales fueron examinados. No habría tenido mucho sentido incorporar estos contenidos a la prueba inicial ya que sencillamente se habrían quedado en blanco. Se pudo haber realizado esta prueba inicial tras presentar los contenidos teóricos y en condiciones idénticas a las que se utilizaron en la prueba final, sin embargo, debido a las limitaciones temporales se decidió descartar esta opción y dedicar el valioso tiempo a la dinámica por parejas que se explica más adelante.

Las 5 primeras sesiones tuvieron un carácter teórico-práctico. Se abordaron los contenidos propios de la unidad: propiedades de las funciones y tipología de las Funciones Elementales. Se procuró en estas sesiones mantener un estilo similar al que su profesor habitual acostumbraba durante el resto del curso. Se trataba de una breve explicación inicial de unos 15-20 minutos, la cual servía como recordatorio de lo visto el día anterior y a su vez presentación de nuevos contenidos.

Aunque en el fondo era un momento de estilo expositivo, se intentó enganchar a los alumnos, dirigiéndoles preguntas que fomentaran la participación. Algunas de estas preguntas eran improvisadas con el fin de potenciar el dinamismo y el diálogo entre el grupo, otras premeditadas en las que se hacía referencia a procedimientos alternativos o enfoques diferentes a la hora de encarar un problema. A medida que se preparaban los objetivos, contenidos, recursos y evaluación de la unidad didáctica se iban detectando elementos donde poder encajar la idea de flexibilidad. Por ejemplo, se hizo referencia a los beneficios de tener presente en todo momento el sistema de representación gráfico como recurso fundamental para encarar ciertos problemas. Otro ejemplo de este tipo de intervención podría ser el conocimiento de características de las funciones elementales a la hora de representarlas/identificarlas en el plano, como alternativa a dar/comprobar valores, es decir, sabemos que la función exponencial del tipo $y=a^x$ pasará siempre por el punto (0,1), será creciente en todo su dominio y tiende a cero para $x=-\infty$.

Grafica la función $y = x^2 - 4x + 1$

Método 1 → Completando cuadrados:

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$y = (x^2 - 4x + 1) + (4 - 4)$$

$$y = (x^2 - 4x + 4) + (1 - 4)$$

$$y = (x - 2)^2 - 3$$

- *Se trata de la parábola $y = x^2$ desplazada según un vector = (2,-3)*

Método 2 → Fórmula general

- *Encontramos las raíces de la función, es decir, los puntos de corte con el eje x mediante la fórmula general:*

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- *Sabemos que la parábola se abre hacia arriba y conocemos la abscisa del vértice.*
- *Podemos conocer fácilmente la ordenada del vértice substituyendo en la expresión algebraica de la parábola*
- *Conociendo el vértice y los dos puntos de corte es fácil dibujar la parábola.*

Método 2 → Utilizando la fórmula del vértice

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a} \qquad y = f\left(\frac{-b}{2a}\right)}$$

- *Sabiendo que la parábola tiene la misma forma que $y = x^2$ es fácil graficar la función cuadrática*

Ilustración 1. Ejemplo de ejercicio con múltiples estrategias de resolución

Los restantes 25-30 minutos se dedicaron a ejercicios de complejidad progresiva resueltos en la pizarra. Se sacó partido a los ejercicios para introducir conceptos y procedimientos novedosos con los cuales los alumnos no estaban familiarizados. Además se siguió haciendo hincapié en la importancia de manejar diferentes métodos de resolución y ser flexible y creativo a la hora de encarar problemas. Generalmente existe más de una manera de encarar un problema y ciertas estrategias son más eficientes que otras. Hubo que asegurarse que los ejercicios cumplían los requisitos del currículo pero a la vez servían para incorporar la idea de *flexibilidad* a la unidad (véase ilustración 1). Éstos se alternaron con ejercicios convencionales donde la flexibilidad resolutiva no era determinante.

Antes de acabar la segunda y la quinta sesión se repartieron entre los alumnos una serie de ejercicios referidos a la materia ya impartida para que los alumnos trabajaran por su cuenta en casa. En esos ejercicios se introdujeron problemas con varios posibles métodos de resolución aunque los alumnos no eran conscientes de esto. Se analizaron los procedimientos que utilizaron valorando la creatividad e innovación de las que hicieron uso.

Ejercicio 3

De todos los pares números que suman 18, ¿cuál es el par cuyo producto es máximo?

Ilustración 2. Ejemplo que ejercicio de refuerzo

Las sesiones seis y siete de la unidad, previas a la prueba de evaluación, se dedicaron a una dinámica similar a la realizada por Jon Star en su intervención en Tennesse. Los 18 alumnos que asistieron a clase se distribuyen por parejas y a todas ellas les fue entregado una batería de ejercicios relacionados con la unidad didáctica impartida. Se pretendió que los alumnos se enfrentasen a las tareas autónomamente y posteriormente interactuaran con su pareja para discutir su estrategia a la hora de resolver cada problema. Las tareas propuestas incluyeron ejercicios procedimentales, otros más conceptuales y otros que ponían a prueba la flexibilidad de los alumnos (véanse ilustraciones 1, 2 y 3).

Ejercicio 2. La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0ºC, y en la Fahrenheit es 32ºF. La temperatura de ebullición del agua es 100ºC, que equivale a 212ºF.

a) Encuentra la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas y represéntala.
b) Expresa en grados centígrados 86ºF

Ilustración 3. Ejemplo de ejercicio de flexibilidad

Con ayuda del profesor habitual se hizo un seguimiento del desarrollo de la sesión circulando por la clase y respondiendo circunstancialmente a preguntas y dudas de la misma manera que lo hacía el equipo de Jon Star. En determinados momentos, se hicieron intervenciones en la pizarra para aclarar alguna duda a nivel de grupo pero en general las parejas trabajaban autónomamente y sólo de manera ocasional necesitaban dirigirse a los profesores.

La última sesión fue dedicada a la realización de la prueba final:

1. *Obtén la expresión de la recta que para por los puntos P(0,3) Q(1000,503)* — 2.5p

2. *a) ¿Cuál es la función inversa de $f(x) = a^x$? ¿y de $g(x)=a^{x/3}$?* — 2.5p

   b) Si f(x) pasa por el punto (2,100) ¿Conoces un punto de $f^{-1}(x)$? ¿Los conoces todos?

3. *a) ¿Qué característica comparten las curvas de las siguientes funciones:* — 2.5p

   $h(x)=2x^2$; $i(x)=2x^2+3$?

   b) ¿Qué traslación ha sufrido i(x) con respecto de h(x)?

4. *Indica verdadero o falso:* — 2.5p

a) Las funciones seno y coseno son simétricas con respecto al eje x.	V	F
b) La función de proporcionalidad inversa está definida en todo R – {0}.	V	F
c) Una recta vertical representa una función constante.	V	F
d) El recorrido de la función $y = \sqrt[3]{x}$ es todo R	V	F
e) j(x)=cos(3x) tiene un periodo mayor que k(x)=3cos(x)	V	F

Ilustración 4. Prueba Final o Post-test

Fue una prueba individual compuesta por cuatro ejercicios de similares características a las realizadas durante el transcurso de las 7 sesiones previas. La ilustración 4 muestra los contenidos de esta prueba.

Los 4 apartados propuestos en esta prueba final gozaron de una categoría, en función de si se trataba de ejercicios meramente procedimentales, de carácter más conceptual o ejercicios donde se puede encajar y valorar la flexibilidad del alumno al plantear diferentes estrategias de resolución.

El primer ejercicio tuvo un carácter procedimental pero interesó considerarlo como ejercicio donde la flexibilidad jugaba un papel importante. Los alumnos hicieron este tipo de tarea durante el desarrollo de la unidad didáctica y se les explicó la posibilidad de utilizar varios métodos de resolución. Tenían la opción de plantear un sistema de ecuaciones para obtener los parámetros de la recta $y=mx+n$ o podían utilizar la expresión punto-pendiente de la recta (en este caso la solución más eficiente).

El segundo ejercicio tuvo elementos puramente procedimentales (apartado a), como es la obtención de la función inversa, y elementos donde se conjuga el peso conceptual, el procedimental y la idea de flexibilidad (sección 2). Con un punto de la función $f(x)=a^x$ puedo obtener el valor de a.

- Método 1: Conociendo "a" puedo hallar cualquier punto de f(x). Los alumnos habían sido instruidos sobre la simetría (con respecto a la bisectriz del primer cuadrante) que caracteriza a las funciones inversas.
- Método 2: si sabían obtener la función inversa, $f^{-1}(x)=\log_a(x)$, y además conocen "a", pueden hallar cualquier punto de dicha función.

El ejercicio 3-a tuvo mayor peso conceptual. Para responder a esta pregunta los alumnos debían haber entendido el concepto de apertura en una parábola y la semejanza entre dos parábolas con el mismo coeficiente en el término cuadrático.

El ejercicio 3-b podía ser enfocado de varias maneras (véase ilustración 1), por eso se incluyó entre aquellos que trabajan la flexibilidad.

Por último se puede observar un claro carácter conceptual en los apartados 4-b, 4-c y 4-d y una naturaleza más procedimental en los 4-a y 4-e.

c. Resultados y análisis de la experiencia

Tras un primer contacto (1ª sesión de la unidad) y tras corregir la **prueba inicial** que los alumnos hicieron en su casa, se llegó a la conclusión de que existían ciertas carencias a nivel de conceptos y procedimientos en muchos de los alumnos, sin embargo el nivel medio del grupo era mejor de lo esperado. Por lo general eran capaces de identificar correspondencias entre el sistema gráfico y el algebraico y dominaban razonablemente algunas propiedades de las funciones, tales como el dominio, el recorrido, el crecimiento y los extremos. Algo que sorprendió fue que, a pesar de estar familiarizados con el concepto de función y saber verbalizarlo, en muchos casos cometían errores a la hora de distinguir la función en el plano o en su expresión algebraica.

Durante el trascurso de las siete sesiones de la unidad didáctica los alumnos respondieron bien a las técnicas que se emplearon para fomentar la flexibilidad. Por fortuna todos los alumnos asistieron a clase, muchos participaron cuando se abrió el debate sobre diferentes estrategias de resolución, la gran mayoría hicieron las tareas propuestas para casa y mostraron una actitud positiva durante las últimas dos sesiones de trabajo por parejas, antes de la prueba final. Se pudo apreciar también cómo los contenidos abordados iban calando.

Los rendimientos en la **prueba de evaluación** fueron muy variados, aunque en su mayoría bastante positivos en lo que se refiere a la nota final. A continuación se muestra una tabla (tabla 9) con los resultados desglosados por ejercicio.

	Ejercicio 1	Ejercicio 2		Ejercicio 3		Ejercicio 4					
	1.1	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	Nota Final
1	✓	×	×	✓	✓	×	✓	×	✓	×	6
2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	8,5
3	✓	×	×	×	×	×	✓	×	×	✓	3,5
4	✓	✓	×	✓	×	×	✓	✓	✓	✓	6,4
5	☑	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	8,75
6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	9,5
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	9,5
8	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	9,5
9	✓	☑	×	✓	×	✓	✓	×	×	×	6
10	☑	✓	×	×	×	✓	✓	×	✓	×	4
11	✓	✓	☑	✓	✓	✓	×	×	✓	✓	8,4
12	×	✓	×	×	×	✓	✓	✓	×	×	3
13	✓	×	×	×	×	✓	×	×	✓	✓	4
14	✓	✓	×	☑	×	✓	×	×	✓	✓	6
15	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	8,25
16	✓	✓	×	×	✓	✓	×	×	✓	✓	6,5
17	✓	×	×	×	✓	×	✓	×	×	✓	4,75
18	✓	✓	×	☑	✓	×	×	×	×	×	5,6

Tabla 8. Resultados de la prueba final desglosados por apartados

	Flexibilidad	×	Respuesta incorrecta
	Puramente procedimental	☑	Respuesta parcialmente correcta
	Conceptual	✓	Respuesta correcta

En un primer momento, se decidió hacer un análisis en el que se llevara a cabo un recuento general de los aciertos correspondientes a cada categoría de ejercicios. La puntuación de cada ejercicio no fue valorada en este análisis estadístico, simplemente se consideró el número de ejercicios acertados en relación al número de ejercicios de cada tipología, para todos los alumnos de la clase. Los siguientes resultados provienen de los datos extraídos de la prueba final:

- Acierto ejercicios de naturaleza procedimental: 60%
- Acierto ejercicios de flexibilidad: 66%
- Acierto ejercicios de naturaleza conceptual: 57%

Seguidamente, se realizó el mismo análisis distinguiendo entre alumnos con mejores y peores rendimientos. Se obtuvo la siguiente tabla.

	Proc.	Flex.	Conc.
9 mejores	0,81	0,81	0,75
9 peores	0,39	0,50	0,39
Total	0,60	0,66	0,57

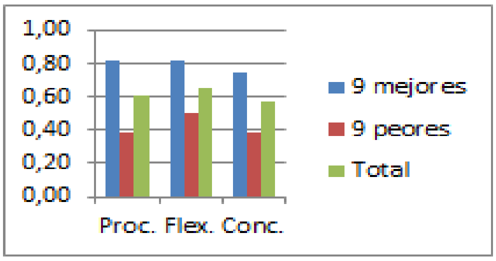


Tabla 9. Resultados en tanto por uno del recuento de respuestas acertadas en prueba final.

Dado que no todos los ejercicios del examen tuvieron la misma importancia, se tomó la decisión de realizar un análisis estadístico análogo donde se respetaran las puntuaciones de cada ejercicio. En este caso, para cada categoría, obtenemos el porcentaje del total de puntos posibles obtenidos. E igualmente distinguiremos entre el total de la clase y los dos extremos (con mejores y peores rendimientos). Los resultados son similares, como vemos a continuación:

	Proc.	Flex.	Conc.
9 mejores	0,85	0,95	0,79
9 peores	0,50	0,50	0,37
Total	0,67	0,73	0,58

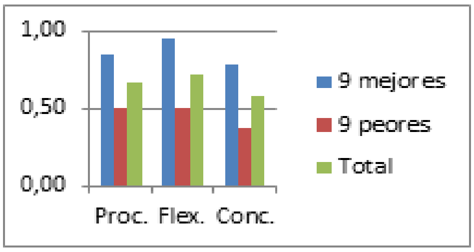


Tabla 10. Resultados en tanto por uno de la puntuación en la prueba final

Se puede apreciar como las puntuaciones correspondientes a ejercicios de flexibilidad están situadas en lo más alto de la tabla, tanto en el análisis global como al analizar los resultados de los estudiantes con mejores y peores rendimientos. Además los resultados más pobres corresponden a los ejercicios con mayor peso conceptual.

Para, a partir de los datos obtenidos, poder extraer resultados indicativos del progreso que ha experimentado el grupo, se deberían haber cumplido las siguientes condiciones: por un lado, los alumnos (antes de la intervención educativa realizada) deberían haber partido de unos niveles conceptuales, procedimentales y de flexibilidad parecidos; por otro, debería de haber existido un equilibrio de dificultad entre los ejercicios de cada disciplina del conocimiento en la prueba final.

Se echó en falta, al analizar los resultados de la prueba, la existencia de un caso control, que no hubiera estado sometido a ninguna actuación, para poder llevar a cabo un estudio comparativo. En la investigación de Jon Star la muestra de población que representaba el caso control eran aquellos alumnos que realizaban tareas de un modo secuencial (tradicional). Su proceso de aprendizaje no se veía alterado de manera significativa, en contraste con aquellas parejas que trabajaban la comparación de estrategias, lo cual suponía una adulteración importante de sus dinámicas habituales. Aunque siempre existe un componente de incertidumbre en los datos estadísticos, el haber dispuesto de estos datos hubiese tenido un efecto positivo en la fiabilidad de la investigación, además de haber significado un apoyo importante a la hora de interpretar resultados.

Aunque existieron diferencias substanciales en toda la investigación y, más concretamente, entre las técnicas de análisis de resultados empleadas por Jon Star (párrafo anterior) y las del presente trabajo, los resultados obtenidos en ambas investigaciones tienen un cierto grado de semejanza y muestran que la puesta en marcha de técnicas de comparación de métodos resolutivos en las dinámicas de clase tienen una influencia más positiva sobre el conocimiento procedimental y la flexibilidad que sobre el conocimiento conceptual.

Este resultado es generalizable a todos los alumnos de la clase, como se puede apreciar al distinguir entre datos de alumnos con mejores y perores puntuaciones globales en el test.

IV. CONCLUSIONES

La labor experimental llevada a cabo en este trabajo no ha gozado del rigor y la meticulosidad propios de un proyecto de investigación de nivel, sin embargo, ha servido como evidencia de que técnicas novedosas, asociadas al ejercicio de la *flexibilidad*, pueden ser fácilmente incorporadas a las dinámicas de trabajo habituales en un aula de matemáticas de secundaria, sin suponer un trastorno en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En primer lugar fue necesario entender los "entresijos" del conocimiento matemático, revisar la bibliografía y las hipótesis formuladas por investigadores contrastados, y hacer un minucioso análisis del trabajo de referencia llevado a cabo por Jon Star y sus colaboradores.

El proceso de adaptación del experimento desarrollado en este Trabajo Fin de Máster, a pesar de ser bastante somero, no ha sido nada trivial y ha conllevado un trabajo de diseño importante. Esto es una indicación clara de la necesidad de sentar unas bases sobre el proceso de enseñanza, en lo que respecta a la *flexibilidad*, para poder formar al docente con carácter previo a cualquier actuación llevada a cabo en el aula.

Para ello, antes sería interesante hacer una réplica más ajustada del proyecto de Jon Star (incluso explorando nuevos horizontes) en el contexto educativo español, con el propósito de obtener conclusiones elocuentes sobre las técnicas más adecuadas para trabajar la competencia en *flexibilidad* y las ventajas e inconvenientes de utilizar este tipo de técnicas. De este modo se seguirían cimentando las bases del sistema de enseñanza, integrando el principio de la *flexibilidad* a sus fundamentos como posible recurso pedagógico.

También sería importante hacer un estudio exhaustivo del curriculum de Educación Secundaria y Bachillerato para identificar aquellos contenidos donde este tipo de técnicas tengan mejor cabida y cuyos resultados puedan ser más fácilmente evaluados.

La valoración personal que hago de este Trabajo Fin de Máster es muy positiva. Creo que representa una tarea muy idónea para introducir al alumno, futuro profesional docente, en el mundo de la investigación. Creo que si esta meta es llevada a cabo con éxito, supone un paso fundamental en el desarrollo formativo de aquél, proporcionándole autonomía a la hora de seguir educándose, dándole seguridad a la hora tomar decisiones y fomentando su creatividad en el marco de la enseñanza.

Durante su elaboración se han ejercitado numerosas competencias que gozan de una notable relevancia con la profesión del docente. Además, ha supuesto una oportunidad envidiable para poner en práctica algunos de los conocimientos y actitudes abordados durante el modulo genérico del máster.

Considero también de suma importancia la disponibilidad y labor de guía que los directores han tenido en el desarrollo de este trabajo a la hora de aconsejar, proponer ideas, proporcionar recursos, identificar errores, descartar estrategias, hacer seguimiento, opinar, etc., para todos y cada uno de los pasos acometidos. Su papel de apoyo ha sido fundamental en el proceso de aprendizaje activo en el que he participado y me servirá como ejemplo en mi futura práctica docente.

Toda la investigación y la actuación de campo llevados a cabo en el desarrollo de este trabajo, no son más que un primer y tímido paso en el aprendizaje de un tema con un vasto trasfondo pedagógico, sin embargo han dejado un poso importante en mi manera de ver la enseñanza de las matemáticas. Por una parte, la *flexibilidad* asociada a la pedagogía es algo que, a partir de ahora, siempre tendré presente como recurso educativo. Si dispongo de la oportunidad de ejercer como profesor en un futuro no dudaré en profundizar en la materia y seguir experimentando en esta línea, con el propósito de entender con mayor certeza los mecanismos que gobiernan la adquisición de competencias asociadas con la flexibilidad y el sistema de relaciones entre estas competencias y los conocimientos conceptuales y procedimentales.

Por otra parte, el trabajo me ha servido para darme cuenta del papel decisivo que la investigación juega en el ámbito de la educación, del dinamismo implícito en los procesos de enseñanza-aprendizaje y de la necesidad de formar parte activa del tejido investigador para garantizar tanto la salud de nuestro propio ejercicio docente como la robustez del aparato global educativo.

V. BIBLIOGRAFÍA

Boletin Informativo de SMPC. (2012-2013). Obtenido de Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria: http://www.sociedadmatematicacantabria.es/boletin/Boletin14_SMPC.pdf

Wikipedia. (18 de Abril de 2013). Recuperado el 06 de Mayo de 2013, de Adaptive expertise: http://en.wikipedia.org/wiki/Adaptive_expertise

Anderson, J. R. (1992). Automaticity and the ACT* theory. *American Journal of Psychology, 105(2)*, 165-180.

Anderson, J. R., & Lebiere, C. (1998). *The atomic components of thought.* Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Ausubel, D. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View.* New York: Holt, Rinehart & Winston.

Beaton, A. E., Mullis, I. V., Martin, M. O., Gonzales, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1996). *Mathematics achievement in the middle years: IEA's third international mathematics and science study.* Boston: Center for the Study of Testing, Evaluation, a.

Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving twodigit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93*, 627-638.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(1)*, 3-20.

Carroll, W. M. (2000). Invented computational procedures of students in a Standards-based curriculum. *Journal of Mathematical Behavior, 18(2)*, 111-121.

de Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist, 31(2)*, 105-113.

Feltovich, P. J., Spiro, R. J., & Coulson, R. (1997). Issues of expert flexibility in contexts characterized by complexity and change. En P. J. Feltovich, R. J. Spiro, & R. Coulson, *Expertise In Context* (págs. 126-146). Menlo Park, California: AAAI Press.

Gott, S., Hall, P., Pokorny, A., Dibble, E., & Glaser, R. (1992). A naturalistic study of transfer: Adaptive expertise in technical domains . *Intelligence, Cognition, and Instruction.*, 258-288.

Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor.* Madrid: Pirámide.

Hatano, G., & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. *Child development and education in Japan* , 262–272.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hilsdale: NJ: Lawrence.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics* (págs. 1-27). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Holyoak, K. J. (1991). Symbolic Connectionism: Toward third-generation theories of expertise In K. A. Ericsson & J. Smith (Eds.) Toward a General Theory of Expertise. *Prospects and Limits. Cambridge, UK: Cambridge University Press.*, 301-335.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 390-419). New York: Simon & Schuster.

Mercier, E. M., & Higgings, S. E. (2013). Collaborative learning with multi-touch technology: Developing adaptive expertise. Learning and Instruction. *Learning and Instruction, 25*, 13-23.

Ministerio de Educación, C. y. (2013). *TEDs Informe Español. Estudio Internacional sobre la Formación Inicial en Matemáticas de los Maestros. Análisis Secundario.* Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Ministerio de Educación, P. S. (11 de Junio de 2008). Boletin Oficial del Estado. *ORDEN ESD/1729/2008*. Madrid, España.

Polya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* New York.: Wiley.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. . *Journal of Educational Psychology. 99(3),* , 561-574.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93(2)*, 346-362.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Cogan, L. S., Jakwerth, P. M., & Houang, R. T. (1999). *Facing the consequences: Using TIMMS for a closer look at U.S. mathematics and science education.*

Schwartz, D. L., Bransford, J. D., & Sears, D. (2005). Efficiency and innovation in transfer. En D. L. Schwartz, J. D. Bransford, & D. Sears, *Transfer of Learning from a modern multidisciplinary perspective* (págs. 1-51). Greenwich: CT, Information Age Publishing.

Shiffrin, R. M., & Schneider, W. (1977). Controlled and automatic human information processing: II. Perceptual learning, automatic attending, and a general theory. *Psychological Review, 84.*, 127-190.

Siegler, J., & Shrager, R. S. (September 1998). A Model of Chidren Strategy Choices and Strategy Discoveries. *American Psychological Science, 9*(5), 405-410.

Star, J. (2000). On the Relationship Between Knowing and Doing in Procedural Learning. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.). *Fourth International Conference of the Learning Sciences (pp. 80-86).* (págs. 80-86). Mahwah: NJ: Erlbaum.

Star, J. R. (2000). On the Relationship Between Knowing and Doing in Procedural Learning. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.). *Fourth International Conference of the Learning Sciences (pp. 80-86).* (págs. 80-86). Mahwah: NJ: Erlbaum.

Star, J. R. (2001). Re-conceptualizing procedural knowledge: Innovation and flexibility inequation solving. *American Educational Research Association.* New Orleans: University of Michigan.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2007). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, 1-15.

Tavakol, M., & Dennick, R. (2011). Making sense of Cronbach's alpha. *International Journal of Medical Education. 2*, 53-55.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology in Education, 24*(3), 335-359.

Willis, J. (2010). Learning to Love Math. En *Chapter 1. Reversing Math Negativity with an Attitude Makeover.* Association for Supervision & Curriculum Development.