Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria UC

Modelización

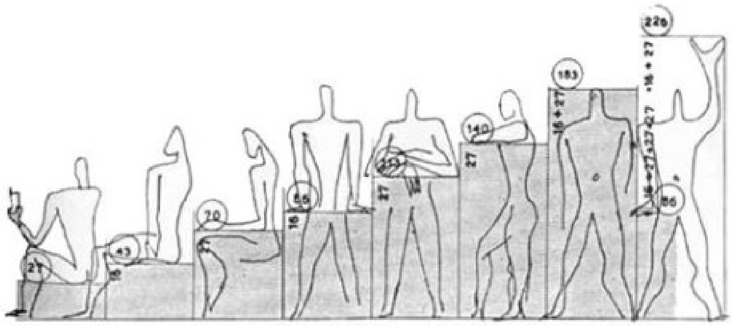
y

Educación Matemática

TRABAJO FIN DE MÁSTER

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

JUNIO 2013



alumna: Tania Zubiaurre Mier

directora: María José González López

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La matemática es una materia que se considera imprescindible en la formación de cada persona y que se utiliza todos los días en cualquier ámbito, aunque no seamos conscientes de ello. Hay muchos idiomas, pero solo uno universal: las matemáticas. Sin ellas no seríamos capaces de realizar nuestra rutina diaria. Organizan el tiempo, miden las distancias, calculan el peso. La naturaleza y el cuerpo humano están estructurados por patrones. En definitiva, sin las matemáticas no podríamos vivir.

Me voy a ocupar de la modelización porque es un tema que debería potenciarse en el actual sistema educativo. Gómez (2000; p.22) dice que “la modelización matemática consiste en formular un problema real en términos matemáticos, resolverlo si es posible e interpretar los resultados en los términos del problema y de la situación estudiada”. Es un vínculo entre el mundo real y el mundo matemático, y si conectamos ambos mundos lograremos que los estudiantes comprendan la importancia de esta materia en la sociedad. Es posible modelar la realidad y llegar al alumnado con problemas que se puedan encontrar a lo largo de su vida y, de este modo, enseñarles a utilizar las matemáticas para encontrar las posibles soluciones.

Uno de los problemas más complejos que enfrenta la educación en el ámbito de las matemáticas tiene relación con esto. Los estudiantes practican esta materia en un contexto matemático que tiene muy poca vinculación con el mundo real, por lo que la formación académica no les permite enfrentarse con éxito a las situaciones que se encontrarán en la vida diaria. Los resultados de los estudiantes españoles en las pruebas Pisa corroboran esta afirmación (PISA, 2009). La enseñanza matemática se reduce a los propios problemas matemáticos y no se relaciona con otras materias o con el mundo cotidiano, como tantas veces repite el currículo.

Los conceptos y procedimientos matemáticos deben enseñarse con vistas al futuro, puesto que pocas son las personas que usan los contenidos matemáticos de forma habitual. Si el aprendizaje se centra en la modelización, puede conseguirse que el alumnado asimile en profundidad dichos contenidos. Seguramente al cabo de un tiempo se terminen olvidando las circunstancias de su uso, pero al menos se recordará cual es su función. (Camacho, Gámez, González, Recio, 2010).

Nuestra labor como docentes será que los alumnos adquieran unos conocimientos mínimos, pero además que sean capaces de pensar por sí mismos, por lo que fomentar su creatividad también será una labor fundamental. Hay que animarles a tener ideas originales y diferentes; que se equivoquen por sí mismos y aprendan de los errores; que desarrollen su capacidad de razonamiento y argumentación. Trabajamos bajo la hipótesis de que la modelización potencia todas estas cualidades.

Los objetivos específicos de este trabajo son:

- Hacer una revisión bibliográfica sobre la noción de modelización matemática.
- Analizar la presencia de la modelización en el currículo de matemáticas de secundaria.
- Valorar la importancia de la modelización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Ver en qué medida el contexto en que se plantea un problema –contexto matemático versus contexto cotidiano- influye en el éxito al resolverlo.

Una vez descrito el proceso de modelización y fijados los objetivos específicos, pasamos a describir la estructura del trabajo. Empezaremos haciendo un breve repaso por los referentes teóricos de la modelización. En la siguiente parte nos centraremos en la modelización dentro del currículo de la Ley Orgánica de la Educación, desde el punto de vista de las competencias y de los contenidos. A continuación estudiaremos la importancia de la modelización en la enseñanza de las matemáticas y estudiaremos alguna práctica de modelización. Para acabar, presentaremos una experimentación que hemos realizado con estudiantes de cuarto de secundaria y analizaremos los resultados obtenidos. Finalmente explicaremos las conclusiones del trabajo realizado.

1. REFERENTES TEÓRICOS

En los últimos años se está cambiando la visión acerca de la enseñanza de las matemáticas. Gravemejer (1994) dice que en los años 70, Freudenthal impulsó la Educación Matemática Realista (Realistic Mathematics Education) como respuesta a la necesidad, percibida en todo el mundo, de reformar la enseñanza de las matemáticas. La base de esta teoría es la idea de que las matemáticas han de tener un valor humano y deben estar conectadas con la realidad, ser cercanas a los alumnos y con valor relevante en la sociedad. El uso de contextos realistas se convirtió en una de las características determinantes de este enfoque de la educación matemática y recoge las bases de la modelización. Por otro lado también propone que la educación matemática no debe presentar esta materia como un sistema cerrado sino como una actividad. Esta idea sugiere que los estudiantes deben ir descubriendo las matemáticas por ellos mismos, encontrando su utilidad en la vida diaria. Como última idea, señala que los alumnos deberían aprender a matematizar.

En el estudio PISA (2003), el marco matemático cree que aprender a matematizar es esencial para el alumnado. La matematización, descrita como el proceso de hacer matemáticas, implica como punto de partida traducir los problemas desde el contexto cotidiano al matemático. Esto es lo que se conoce como matematización horizontal y se apoya en las siguientes actividades:

- Identificar las matemáticas relevantes que aparecen en el problema.
- Esquematizar.
- Visualizar dicho problema de diferentes formas.
- Encontrar las relaciones y patrones involucrados.
- Descubrir los aspectos comunes en distintos contextos.
- Traducir el problema del mundo real al matemático.

Una vez trasferido el problema a una expresión matemática se puede continuar con el proceso, realizando actividades en las que utiliza conceptos y habilidades matemáticas. Esta parte se denomina matematización vertical e incluye:

- Usar distintas representaciones.
- Refinar y ajustar modelos.
- Usar y combinar distintos modelos.
- Formular nuevos conceptos matemáticos.
- Generalizar.

Jan De Lange (1989) defiende que la matematización es una actividad organizativa y estructurada mediante la cual se utilizan conocimientos adquiridos para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas. Añade que la matematización está íntimamente ligada a la reflexión y solo será eficiente si va acompañada de la oportunidad de discutir y cooperar. El alumno debe realizar su propio proceso de matematización, discutir con sus compañeros e interpretar los resultados. A partir de esto, De Lange propone un esquema sobre el carácter de las matemáticas:

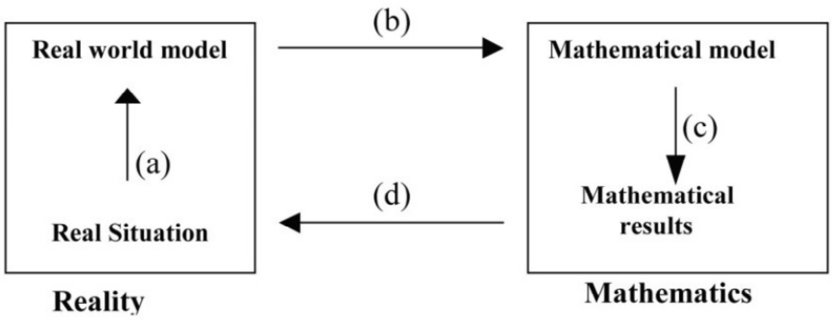
Matematización en aplicaciones → mundo real → matematización y reflexión

→ Abstracción y formalización → matematización en aplicaciones.

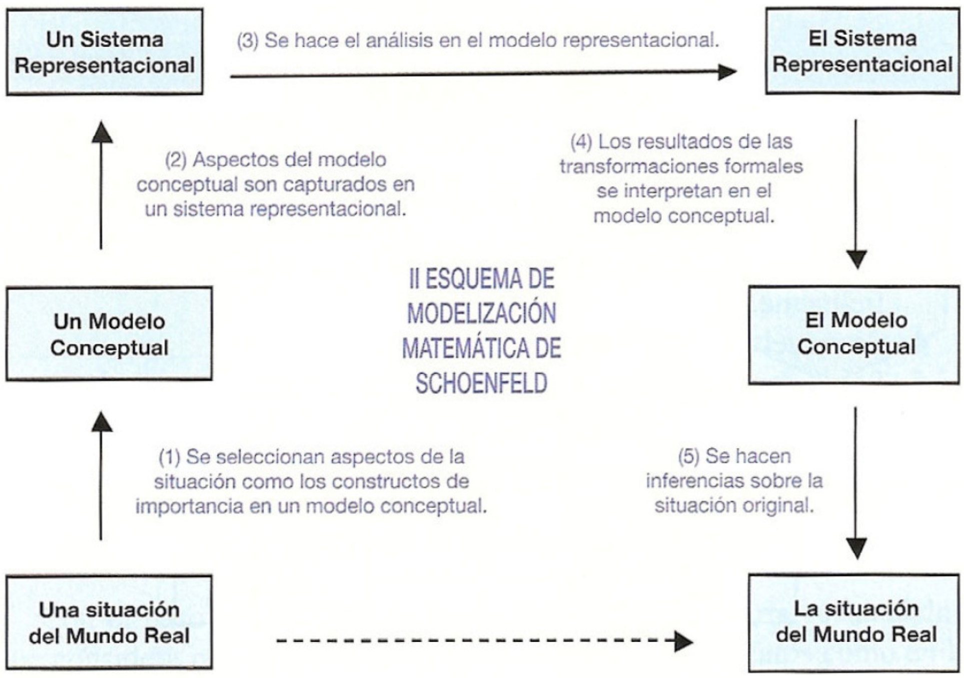
Este esquema está fundamentado en el esquema de modelización, pero De Lange da un peso mayor al acto de reflexionar, por encima de los modelos obtenidos. Con el hecho de regresar al inicio del esquema tras la reflexión, propone que los conceptos puedan ser aplicados en otras situaciones reales. En definitiva, De Lange propone que las matemáticas además de conocerlas, hay que utilizarlas.

Por otra parte Blum (1996), desde el comienzo de su carrera en el campo de la didáctica de las matemáticas, ha creído que la conexión del mundo real y la modelización es un componente necesario para una comprensión adecuada y completa de las matemáticas, así como de la educación matemática moderna. Se ha acordado que la enseñanza de las matemáticas no se debe reducir a sólo ejemplos basados en la realidad, sino que éstas deben desempeñar un papel central en la educación. Detrás de la aplicación de procedimientos matemáticos estándar en el contexto del mundo real, los problemas de modelización son considerados cada vez más importantes.

Blum (1996) junto con Kaiser (1996) consideran que dentro de los problemas complejos extra-matemáticos se trabaja basando la relación entre el mundo real y las matemáticas en un modelo. Un proceso de modelización se realiza sobre la base del siguiente procedimiento: una situación del mundo real es el punto de partida del proceso. Entonces la situación es idealizada (a), es decir, simplificada o estructurada con el fin de obtener un modelo del mundo real. A continuación, este modelo del mundo real se matematiza (b), es decir, se traduce en matemática la situación original. Las consideraciones matemáticas durante el modelo matemático producen resultados matemáticos (c), que deben ser reinterpretados en el contexto de la situación real (d). La adecuación de los resultados debe ser revisada, es decir validada. En el caso de llegar a una solución insatisfactoria, lo que sucede frecuentemente en la práctica, este proceso debe realizarse de nuevo. A continuación podemos ver el esquema de Blum sobre el proceso de la modelización.

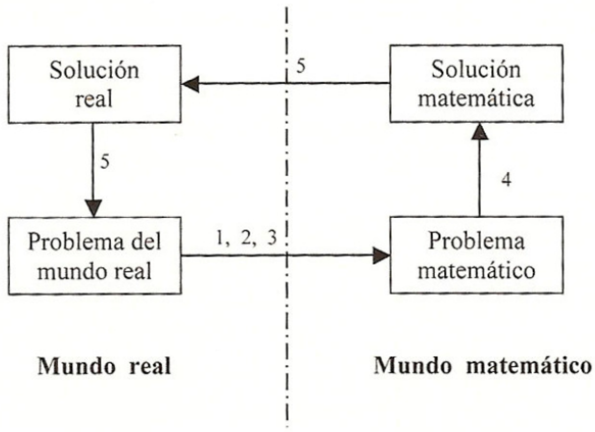


Schoenfeld (1985), inspirado en las ideas de Polya, diseña uno de los modelos más completos para la resolución de problemas. En este modelo distingue cuatro fases: análisis, exploración, ejecución y comprobación. En la fase de análisis se examinan los casos particulares y se simplifica el problema. En la fase de exploración se deben examinar problemas equivalentes y replantear el problema en base a ello. Una vez ejecutado el problema, habrá que comprobar la solución, indicando si es válida según los criterios específicos o si se puede utilizar para generar algo ya conocido. Además, Schoenfeld (1992) añade que la diferencia entre el procedimiento de los expertos y de los principiantes es que los expertos utilizan la metacognición, es decir, auto-regulan su propio aprendizaje. Los principiantes a menudo experimentan sin estructura y cancelan después de algún tiempo sin éxito. Por otro lado, los expertos revisan sus estrategias y llegan a una solución con el mismo o incluso menos esfuerzo. Todas estas ideas le llevarán, años más tarde, a reflexionar sobre la idea de modelización y a realizar varios esquemas. El segundo de ellos, data de 2002 e introduce la idea de que la realidad nunca es abstraída directamente, sino que es filtrada por unos mecanismos de consciencia o inconsciencia. La última fase del modelo recibe información de la situación real de partida.



En PISA (2003) se utiliza un fundamento teórico para la matemática que comprende 5 fases:

- El punto de partida es un problema real.
- Está estructurado según conceptos matemáticos.
- Se va reduciendo la realidad poco a poco a través de procedimientos que la transforman en un problema matemático.
- Se resuelve el problema matemático.
- Se valida e interpreta la solución y las limitaciones que pueda tener.



En este planteamiento de Pisa, las tres primeras fases que implican el cambio de lo real a lo matemático son bastante densas.

Otros autores han centrado su estudio sobre la modelización reflexionando sobre las competencias que están implícitas en ella, como es el caso de Mogen Niss o de Katja Maaβ.

Mogen Niss (1989), vinculado a la Escuela de la Matemática Realista, considera que la modelización matemática es entendida como el arte de aplicar las matemáticas a situaciones de la vida real. En esta definición aparecen como relevantes las habilidades para la construcción de modelos, mientras que de Lange propone la reflexión como el hecho más importante.

Niss (2003) distingue entre competencia general (competencia matemática) y ocho competencias vinculadas a esta competencia general matemática. En el marco del informe PISA están involucradas estas competencias matemáticas específicas que define Niss:

- Pensar matemáticamente
- Plantear y resolver problemas matemáticos
- Modelizar matemáticamente
- Razonar matemáticamente
- Representar entidades matemáticas
- Manejar símbolos matemáticos y formalismos
- Comunicar en, con y sobre matemáticas
- Hacer uso de materiales de apoyo y herramientas

Por otro lado, Katja Maaβ (2006), se basa en las teorías de modelización de Blum y Kaiser pero su estudio se centra en las competencias que se desarrollan trabajando con la modelización:

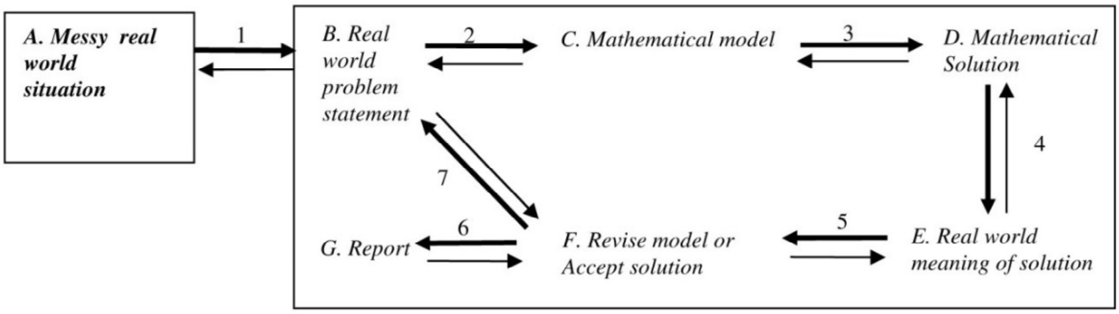
- Competencias para entender el verdadero problema y para establecer un modelo basado en la realidad.
- Las competencias para establecer un modelo matemático del modelo real.
- Las competencias para resolver cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático.
- Competencias para interpretar los resultados matemáticos en una situación real.
- Competencias para validar la solución.

En relación al desarrollo de las competencias de modelización, la necesidad de desarrollar la metacognición, entendida como el conocimiento sobre el propio pensamiento o la autorregulación en la solución de problemas, siempre ha estado a debate.

La metacognición puede ser de tres formas: explicativa, procedimental o motivacional. La explicativa contiene el conocimiento sobre la forma de pensar y las estrategias a seguir para resolver un problema. La procedimental contiene la planificación y el juicio, es decir, el control de las propias acciones. Y la motivacional se refiere a aquellas condiciones necesarias para el uso de la metacognición, como la fuerza de voluntad.

Para el desarrollo de la metacognición en la escuela, la clase debe diseñarse apropiadamente: la metacognición no puede desarrollarse sin relación con el conocimiento de la materia, sino más bien al mismo tiempo. La metacognición podría ser un importante factor que influye en el desarrollo de competencias de modelización.

En base a estas ideas que expone Maaβ (2006); Galbraith y Stillman (2006) realizaron un estudio sobre la modelización, orientado hacia aquello que hacen los estudiantes cuando resuelven o no problemas de modelización y hacia la toma de decisiones del profesorado y de sus intervenciones, con la intención de capturar lo que está pasando en la mente de las personas a medida que trabajan en las tareas de modelización.



1. La comprensión, la estructuración y la simplificación del contexto
2. Suponiendo, formulación, matematización
3. Trabajo matemáticamente
4. Interpretación de la producción matemática
5. Comparación, crítica y validación.
6. Justificación (si se considera el modelo insatisfactorio)
7. Revisión del proceso (si se considera el modelo insatisfactorio).

Se diferencia de otros esquemas en el hecho de que aparecen flechas en dirección inversa para enfatizar que el proceso de modelización está lejos de ser lineal o unidireccional, sino que siempre tiene la presencia de la actividad metacognitiva reflexiva.

Como hemos visto, han sido varios los autores que han reflexionado acerca de la modelización. Podemos afirmar que es un tema que ha tomado protagonismo en los últimos años y que es concebido como una nueva herramienta didáctica para mejorar la educación matemática de hoy en día, tanto a nivel de competencias como a nivel de conocimientos, lo que da pie al siguiente apartado sobre la modelización en la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.

2. LA MODELIZACIÓN EN EL CURRÍCULO: COMPETENCIAS Y CONTENIDOS

COMPETENCIAS BÁSICAS

La Ley Orgánica de Educación incorpora por primera vez en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, las competencias básicas que cada alumno deberá alcanzar al finalizar dicha etapa educativa. Estas competencias se entienden como los *"conocimientos, capacidades y actitudes que los ciudadanos precisan para su realización y desarrollo personal, la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo"* (BOC, 2007).

Se pretende que todos los alumnos, una vez que hayan finalizado la etapa secundaria obligatoria, hayan adquirido estas competencias y sean capaces de utilizar el aprendizaje en cualquier situación de la vida.

Según el *Decreto 57/2007* de 10 de mayo (BOC, 2007), se establecen ocho competencias básicas, donde la competencia matemática es una de ellas. A continuación vamos a hacer una pequeña vinculación entre cada una de estas ocho competencias básicas y la modelización, para ver cómo ésta contribuye a la adquisición de cada una de ellas.

Competencia en comunicación lingüística: El currículo describe el lenguaje como una herramienta de comunicación cuya finalidad es comprender la realidad. Esto quiere decir que a través de la modelización se puede adquirir y fomentar esta competencia. La competencia lingüística se utiliza continuamente formulando y expresando ideas, sobre todo en las primeras y últimas fases de la modelización.

Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico: La modelización exige analizar e identificar las características relevantes de una situación real y trabajar a partir de ellas para llegar a una posible solución que debe ser interpretada y validada en un contexto cotidiano. Con esto podemos afirmar que esta competencia estará implícita en todo el proceso de modelización.

Tratamiento de la información y competencia digital: En nuestra experimentación no ha habido suficiente tiempo para involucrarnos en el mundo tecnológico, pero en un ejercicio de larga duración de modelización será una herramienta esencial para buscar información e incluso utilizar diversos programas informáticos, como Derive, GeoGebra o Excel, que ayuden al alumnado en esta labor. La incorporación de herramientas tecnológicas en un gran apoyo didáctico.

Competencia social y ciudadana: En ocasiones la modelización se llevará a cabo de manera individual, pero la mayor parte de las veces se realizará en pequeños grupos. De este modo los alumnos deberán poner en común sus ideas, colaborar los unos con los otros, etc. En definitiva, este trabajo fomenta la integración social. Además, deberán tomar decisiones y aprender de sus propios errores, a través de todo el proceso del modelizado.

Competencia en expresión cultural y artística: La modelización puede entenderse como una forma de arte, puesto que es un trabajo único de cada alumno o grupo de alumnos donde la iniciativa personal y la creatividad forman un papel fundamental. A través del proceso de la modelización se crea una obra personal que muestra las capacidades de cada alumno.

Aprender a Aprender: Las actuales clases de matemáticas están enfocadas para que los alumnos realicen ejercicios de resolución inmediata o problemas de enunciado, pero sin profundizar mucho en ellos, con una visión de aprendizaje a corto plazo. Mientras que la modelización permite al alumno adentrarse en un tema e investigar en él, adquiriendo un conocimiento con vistas al futuro. Los alumnos practicarán la reflexión y la argumentación. Estos nuevos problemas que resuelven a través de la modelización, serán la base para resolver futuros problemas de la vida cotidiana.

Autonomía e iniciativa personal: La mayoría de las prácticas se llevarán a cabo en grupos, estando el profesor en un segundo plano. En principio, les dará unas instrucciones a seguir, pero con el paso del tiempo llegará a ser un simple asesor y en muchos casos un mero observador. Por esto, el alumno podrá adquirir independencia y deberá aprender a tomar sus propias decisiones, fomentando de este modo su autonomía. Esta competencia es muy importante adquirirla al finalizar la etapa secundaria puesto que el alumno debe enfrentarse solo al mundo real.

COMPETENCIA MATEMÁTICA

Una vez establecida la relación entre la modelización y las competencias básicas, vamos a analizar con más detenimiento la competencia matemática, puesto que es la que más nos interesa.

Dentro de esta competencia son numerosas las referencias a la vida cotidiana o a la realidad. Cada conocimiento, capacidad o actitud que describe se asocia con su aplicación en un contexto real. Por lo tanto, se espera que los alumnos sean capaces de actuar en una serie de situaciones utilizando las matemáticas que han aprendido en los centros escolares.

La modelización no se menciona explícitamente en ningún momento pero está implícita en todo el desarrollo. A través de ella se trabajarán las destrezas matemáticas que se pretenden potenciar y el tipo de problemas reales que se pretenden abordar, lo que fomentará estas habilidades o conocimientos que el alumno debe poseer al finalizar la etapa educativa.

En cualquier párrafo del Decreto mencionado las referencias a la conexión con la realidad son constantes, pero hemos elegido el último puesto que es una síntesis de todo ello. Dice que esta competencia *"supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad"* (op.cit.7504).

Habla de razonamiento, comprensión o argumentación, entre otras cosas. En el aula de secundaria, cuando un alumno resuelve un problema, suele aplicar la fórmula que aparece en el libro de texto en esa misma página y no tiene que pensar más allá de relacionar los datos que aparecen en el enunciado, donde casi siempre se utilizan todos ellos. Con la modelización no es así. El alumno debe comprender el objetivo del ejercicio y la situación en la que se modeliza. También debe razonar sobre aquellos datos que el enunciado menciona y saber cuales deberá utilizar o cuales deberá descartar. A cada paso que dé, tendrá que argumentar sobre la solución a la que ha llegado y si es o no válida. Por lo tanto, la modelización potenciará la adquisición de la competencia matemática. Los alumnos alcanzarán los conocimientos mínimos para ser capaces de relacionar los problemas matemáticos con los problemas del mundo real.

CONTENIDOS

De igual modo que hemos relacionado la modelización con la adquisición de las competencias básicas, vamos a hacer lo propio en lo referente a los contenidos.

La distribución de contenidos en el currículo distingue seis grandes bloques de orientación académica, que se repiten a lo largo de los cuatro cursos de la educación secundaria obligatoria, pero van variando e incrementando su dificultad según pasan los cursos.

Según el currículo, los alumnos deben conocer procesos matemáticos y aplicarlos en la vida cotidiana. Pero es una labor complicada utilizar aquello que se ha aprendido en el aula en una situación real cuando nunca se ha estudiado de este modo. El problema es que las matemáticas en sí mismas se estudian antes que sus posibles aplicaciones en el mundo real y en la mayoría de los casos estas aplicaciones no llegan a desarrollarse. La apuesta por la modelización debe ser una oportunidad para corregir, en la práctica docente, ciertos problemas en la distribución de los contenidos. Por lo tanto, es necesario fomentar este tipo de actividades en el aula. La modelización se refiere a la consideración de problemas abiertos, auténticos y complejos relacionados con la realidad. Los contenidos matemáticos intervienen en las tareas de modelización pero es su coordinación a través de estrategias de resolución de problemas lo que distingue estas tareas de las demás.

Los conceptos matemáticos pueden enseñarse con la finalidad de comprender y solucionar una situación real problemática. El proceso que se lleva a cabo durante la modelización permite profundizar en la comprensión de estos conceptos. Esto implica que, una vez finalizada la etapa secundaria, los alumnos serán capaces de relacionarlos con cualquier actividad o situación de su vida diaria de forma autónoma.

ESTUDIO PISA

El currículo vigente es sometido a evaluaciones externas a través de las cuales se determina su adecuación a lo que la sociedad espera que los estudiantes aprendan. Una de las evaluaciones que más trascendencia ha tenido en los últimos tiempos es la desarrollada por la OCDE, conocida como estudio PISA. El estudio PISA (Pisa, 2003; 2009), se concibe como una herramienta para contribuir al desarrollo del capital humano de los países miembros de la OCDE. La evaluación PISA permite obtener indicadores sobre la alfabetización de los escolares en términos de los conocimientos y destrezas necesarios para la vida adulta. Dicho estudio se lleva a cabo mediante la evaluación de las competencias de los escolares de 15 años en lectura comprensiva, matemáticas y ciencias.

Se evalúan conocimientos y destrezas que no proceden, en general, de los currículos de cada país, más bien se juzgan aquellos que se consideran esenciales para la vida adulta.

En matemáticas se evalúa la *competencia matemática* (OCDE, 2004), entendida como el conjunto de capacidades de cada individuo para analizar y razonar acerca de una variedad de situaciones, de modo que entiendan el papel que en la vida real tienen las matemáticas.

Esta competencia matemática se puede desglosar en siete competencias específicas, cuya base son las ideas de Niss, expuestas anteriormente. Una de las competencias específicas es modelar. PISA establece que incluye las capacidades de:

- Estructurar el campo o situación que se va a modelar.
- Traducir la realidad a una estructura matemática.
- Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.
- Trabajar con un modelo matemático.
- Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.
- Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados.

- Dirigir y controlar el proceso de modelización.

Las competencias PISA se entienden como las capacidades de los alumnos para analizar y razonar en una serie de situaciones. La evaluación de las pruebas tiene la finalidad de detectar si los estudiantes han adquirido estas competencias y saben desenvolverse en actividades cotidianas. Los alumnos deben ser capaces de dar respuestas a determinados problemas reales, por lo que la modelización será una pieza clave. Será indispensable que el alumno analice y comprenda una situación inicial para traducirla a una estructura matemática. Después tendrá que trabajar esta estructura matemática para llegar a un resultado, que deberá interpretar y analizar, validando o no la posible solución.

Con esto podemos afirmar que PISA tiene la finalidad de evaluar si el alumno es capaz de utilizar sus conocimientos matemáticos, más que dominar los conceptos aprendidos. Esto quiere decir que el aprendizaje debe centrarse en el significado funcional del proceso matemático.

3. ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN

La modelización es un tema que está a debate en los últimos años como una estrategia de mejora de la educación, debido principalmente a su adecuación a los objetivos de cada etapa del currículo a través de la conexión con la vida real, ser una herramienta motivadora o dar apoyo a la diversidad.

Otro punto importante es considerar la modelización como una nueva herramienta de enseñanza que despierta el interés y la motivación de los alumnos. Últimamente se habla mucho de la desmotivación del alumnado y de profesores que no se adaptan a los nuevos tiempos. La modelización puede acabar con esta discusión, puesto que conectar la realidad con las matemáticas es algo sencillo y que puede atraer la atención del alumnado.

Una de las aportaciones que nos proporciona la modelización es el enriquecimiento que produce, desde el punto de vista didáctico, en el proceso de resolución de problemas. La creatividad tiene un lugar preeminente dentro del proceso de dicho proceso. Las ideas deben nacer en la mente de los alumnos y el profesor debe actuar tan solo como un guía.

Hay que añadir que utilizando la modelización en clase se atiende a la diversidad en el aula. Las prácticas de modelización se realizan en pequeños grupos. Con esta forma de trabajo, cada uno puede aportar al grupo en función de sus capacidades y además aprender los unos de los otros. Pero para ello hay que ver qué tipo de actividad se adapta mejor a cada alumnado, además de los objetivos que se pretenden alcanzar.

Por otro lado, no todo son ventajas. Aun no está clara su forma de evaluación de manera satisfactoria o el tiempo de preparación de las prácticas por parte del profesor. La búsqueda y selección de problemas adecuados es quizá la labor más compleja y la que más tiempo requiere. Es difícil encontrar ejercicios que representen situaciones cotidianas en los cuales el alumno deba organizar, estructurar, determinar la matemática relevante, resolver el problema y devolver una respuesta coherente. Dados que estas dos ideas son los principales inconvenientes, será interesante profundizar en ellas.

Referente a la evaluación podemos afirmar que la modelización está ligada al planteamiento y a la resolución de problemas, entre otras competencias. Éstas expresan objetivos de aprendizaje a largo plazo, por lo que no debería ser preciso realizar evaluaciones frecuentes. La evaluación puede apoyarse en controles o entregas intermedias, y así aprovechar para estudiar la situación del alumno durante todo el proceso de modelización. Lo principal es que dicha evaluación sea objetiva. Una manera de lograrlo es especificando desde el principio los criterios que se van a evaluar en el proceso.

De la Fuente (2010) dice que desde el punto de vista de la enseñanza, el proceso que sigue el alumno durante la modelización es similar al que vive un matemático en el desarrollo de una investigación, con la diferencia del nivel de los conocimientos. Con este planteamiento, tanto alumnado como profesorado, pueden adentrarse en la verdadera naturaleza del conocimiento matemático, reviviendo el proceso de su creación y descubrimiento. Ruiz (2010) añade que el alumno aprende pero también el docente, puesto que la formación del profesor de matemáticas no incluye la competencia de modelización. Este la ha ido adquiriendo a lo largo de su formación y casi siempre realiza las modelizaciones identificando los problemas con otros que ya conoce.

Para acabar con este tema, es importante mencionar los tipos de maneras de enseñar modelización. Galbraith (1989), propuso tres métodos:

- Aplicaciones generales: el profesor ha enseñado el modelo y los estudiantes lo aplican a una serie de ejercicios. Esto es lo que se viene haciendo en la actualidad en las aulas de secundaria y no va más allá de traducir a lo matemático y resolverlo, sin llegar a reflexionar.
- Modelización estructurada: en este caso se usan todas las etapas de la modelización y el profesor ejerce un gran control.
- Modelización abierta: los alumnos deben trabajar el problema con la ayuda del docente limitada puesto que el profesor no controla las matemáticas elegidas por los alumnos.

PRÁCTICAS DE MODELIZACIÓN ABIERTA

Dado que este último tipo de modelización es el que más beneficios puede reportarnos, vamos a mencionar brevemente algunos ejemplos. Hemos elegido tres prácticas de modelización llevadas a cabo en Australia, Argentina, y Alemania para comprobar cómo la modelización es igual en todas las partes del mundo.

El primer ejemplo está sacado de una publicación de Henry & McAuliffe (1994) y es titulado *Drying Out.*

En Australia hay muchos lagos que están secos la mayor parte del tiempo y solo se llenan durante cortos periodos después de lluvias, como el Lago Eyre. Cuando el lago está lleno de agua, ¿cuánto tiempo tarda en vaciarse?

Una vez comprendido el enunciado, los estudiantes hicieron una tormenta de ideas en cada grupo, una serie de suposiciones y decidieron cuáles serían las variables a trabajar. En este caso son el tamaño y la profundidad del lago, la temperatura del ambiente y el nivel de evaporación, la vegetación y los animales, o la salinidad.

Lo siguiente fue formular el problema en términos matemáticos. Debatirán en grupos, harán un listado de los cálculos que necesitan y analizarán los datos de los que disponen, como el volumen del Lago Eyre o el tanto por ciento de evaporación por día. Algún grupo optó por tomar el lago como un volumen cilíndrico mientras que otros lo asemejaron a un tronco de cono. Al final, los alumnados determinaron que los cálculos que necesitaban eran el área del lago, el área de su base, el radio y la profundidad del lago, la pérdida de profundidad debida a la evaporación y las pérdidas por filtraciones.

Para llegar a la solución matemática plantearon una hoja de cálculo que calcula la pérdida de volumen al final de la jornada y a continuación se ajusta y repite los cálculos con el nuevo volumen. La solución llegará el día que ese volumen sea negativo.

Una vez obtenida la solución, volvieron al punto de partida para ver si esa solución se encontraba dentro de las suposiciones que habían hecho y cumplía con el objetivo del ejercicio, es decir, interpretaron y validaron la solución. Una vez satisfechos con la solución, pueden validar el modelo y ajustar la hoja de cálculo para otros problemas similares. Valdrá con modificar las variables.

Para finalizar, los estudiantes debieron explicar sus ejercicios y debatir con el resto de la clase. Esta fue la parte más evaluable puesto que los estudiantes expresaron sus ideas matemáticas, el proceso seguido y sus conclusiones.

La conclusión obtenida en esta prueba fue que se necesita modelización abierta para equipar a nuestros alumnos con confianza necesaria para aplicar las matemáticas en sus vidas diarias.

El segundo ejemplo es una experiencia de Reid, Etcheverry, Roldán y Gareis (2010) con alumnos de 15 años en un instituto de La Pampa, Argentina. La clase se dividirá en grupos de no más de cuatro personas.

En la fiesta de despedida de los alumnos del tercer año, organizada por los estudiantes de segundo, se va a realizar un brindis. Se ha hecho una donación de vajilla descartable y hay copas de distintas formas y tamaños. ¿Qué cantidad de bebida, como mínimo, se tendría que disponer para que todos pudiesen tomar una copa en el brindis?

Como punto de partida estaba el número de alumnos y las diferentes formas que podía tener una copa y se relacionaba con distintos cuerpos geométricos. A partir de ahí se calculaba el volumen de cada una, pero llegaban a la duda de hasta qué altura llegaría el líquido dentro de cada copa. Realizaron una investigación bibliográfica y búsquedas a través de internet.

Las diferentes soluciones van desde que las copas tienen forma esférica y se llena 2/3 parte, a que hay copas esféricas y cilíndricas, y ambas se llenan hasta la mitad. Una vez llegaron a esta conclusión en términos matemáticos, debieron validar la solución y exponer oralmente sus resultados para ver si eran o no correctos.

La intervención docente estuvo orientada a que los alumnos explorasen los diferentes cuerpos geométricos y que los combinaran entre sí. Los alumnos pudieron comprobar el significado de cada uno de ellos y además continuaron explorando su clasificación y características fundamentales. También construyeron las diferentes copas con cartulina y dibujaron sobre el papel la marca del líquido de modo que estudiaron si las copas estaban llenas o solo un cuarto, un medio u otra fracción de líquido.

Los estudiantes se mostraron motivados para construir los cuerpos geométricos y relacionarlos con cuerpos reales. Algún alumno mencionó que los problemas de este tipo eran divertidos. El docente llegó a la conclusión de que el proceso de matematización necesario para construirlo estuvo al alcance de estos alumnos.

El tercer y último ejemplo, lo presenta Kaiser (2004). La experiencia fue llevada a cabo en la Universidad Politécnica de Kaiserslautern durante el semestre de invierno de 2001/02 en un instituto de Hamburgo con estudiantes de 17-18 años. Trabajaron de forma independiente en grupos de 4-5, y los profesores intervinieron lo mínimo posible.

En una estación de esquí, se dan una serie de accidentes graves. Disponemos de tres helicópteros de rescate de la Cruz Blanca para ayudar a las personas tan pronto como sea posible, ¿cuál sería la posición óptima para colocar cada helicóptero?

A los estudiantes se les entregó un mapa con su localización y una tabla con las coordenadas y frecuencias de accidentes.

Se simplifica el problema a buscar la posición óptima para cada uno de los tres helicópteros que atienden a los accidentes en una estación de esquí lo más rápido posible. El primer paso fue la transición en el modelo real para que los alumnos desarrollaran varias definiciones acerca de lo que significa un posicionamiento óptimo en relación con diversos criterios, como por ejemplo que el accidentado no debía esperar más de 10 minutos al helicóptero; que los helicópteros debían volar el mismo número de operaciones; o que mediante el uso de los datos disponibles como punto de partida, las distancias deben ser mínimas.

El siguiente paso fue la transformación a un modelo matemático, para lo cual debían dividir el área en tres partes. En función de la definición elegida de optimización se desarrollaron diversas soluciones. En la mayoría de grupos siguieron un solo criterio pero otros grupos siguieron más de uno y crearon problemas matemáticos mucho más complejos. Las soluciones fueron estas:

-Minimizar la longitud de los caminos de forma geométrica. El centro de gravedad se decidió por una ponderación de las coordenadas de los lugares accidentados con las frecuencias de accidentes.

-Asistir lo más rápido posible. El área de dividió en tres áreas circulares y cada helicóptero se colocó en el centro del círculo correspondiente. La superposición de las regiones sería atendida por el helicóptero de uso menos frecuente. Esta solución era principalmente una gráfica.

-Ayudar lo más rápido posible pero utilizando la misma capacidad de helicópteros. La estación se dividió en tres áreas, según paralelismos y los helicópteros se situaron en el centro de gravedad.

Tras estas posibles soluciones, los alumnos las verificaron de acuerdo con la situación inicial y la verosimilitud de los resultados fue examinada. Al principio los alumnos creían que se les exigían muchas cosas y se sentían inseguros, pero al final estaban fuertemente identificados con los resultados y los defendían con convicción y entusiasmo.

Las conclusiones al finalizar la experiencia fueron que la mayoría de alumnos, pese a haber sido un largo proceso, participaron activamente en todo momento y al final expresaron su satisfacción de haber llegado a una solución. Se produjo un cambio en la manera de ver las matemáticas antes y después de la actividad, tanto en profesores como en alumnos. Otra idea obtenida es que no hace falta ser un alumno talentoso para realizar este tipo de actividades.

4. EXPERIMENTACIÓN

Tras estudiar las teorías sobre modelización y algunos ejemplos de cómo se han llevado a la práctica, llega el turno de verlo por nosotros mismos. Debido a la escasez de tiempo solo hemos podido realizar una pequeña experimentación para comprobar si los estudiantes de secundaria trabajan mejor en contexto cotidiano o en contexto matemático. Para ello les hemos pedido que realicen dos pruebas. Ambas contenían dos ejercicios sencillos y los estudiantes debían resolverlos. Primero lo resolvieron en contexto de la vida real y unos días más tarde en contexto matemático, siendo siempre los mismos datos. Después hemos comparado los resultados y eso nos ha llevado a la obtención de una serie de conclusiones.

4.1. OBJETIVOS DE LA EXPERIMENTACIÓN

Los objetivos específicos de la experimentación realizada son:

- Determinar si los alumnos utilizan mejor las matemáticas al relacionarlas con problemas de la vida real o al trabajarlas en el contexto matemático.

- Evidenciar si encuentran más dificultades en uno u otro contexto.

- Comprobar si su rendimiento académico (calificaciones altas, medias o bajas en matemáticas) está relacionado con su capacidad para utilizar las matemáticas en contexto.

4.2. LA MUESTRA SELECCIONADA

La investigación se ha llevado a cabo en un instituto público de enseñanza secundaria situado en un entorno rural de la zona occidental de la comunidad de Cantabria durante el mes de abril de 2013.

En este centro hay tres grupos de cuarto de secundaria y hemos realizado la experiencia en el correspondiente al que cursa las matemáticas de la opción A, es decir, en esta clase están aquellos alumnos que tienen la intención de realizar el bachillerato de letras. Este grupo está formado por diecinueve alumnos, de los cuales ninguno ha repetido cuarto pero uno sí repitió tercero. Tres alumnos comenzaron el curso con las matemáticas pendientes de tercero pero las recuperaron en un examen que tuvo lugar en febrero.

El alumnado de esta clase es heterogéneo y en la asignatura de matemáticas trabaja en grupos cooperativos de cuatro personas formados de manera equilibrada, es decir, en cada grupo hay un alumno con altas capacidades, un alumno con dificultades en la materia y dos alumnos medios.

La prueba se ha llevado a cabo dentro de la unidad didáctica de *sistemas de ecuaciones* en el bloque de álgebra. Los alumnos habían visto previamente el tema de polinomios y el tema de ecuaciones e inecuaciones. También habían visto el tema de sistemas de ecuaciones lineales en tercero de secundaria.

4.3. LOS INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

Para conseguir los objetivos pretendidos, hemos diseñado dos pruebas individuales (Anexo 1). La primera prueba consistió en resolver dos ejercicios en contexto cotidiano: un ejercicio A y un ejercicio B. Días más tarde, se les entregó otro folio con la segunda prueba, compuesta por dos problemas en contexto matemático: un ejercicio A y un ejercicio B.

Los ejercicios A de cada prueba guardan relación entre sí, puesto que tienen los mismos datos. Serán resueltos por alguno de los tres métodos numéricos de resolución de sistemas de ecuaciones: sustitución, igualación, reducción. Los ejercicios B de cada prueba también tienen los mismos datos y serán resueltos por el método gráfico. Al tener los mismos datos en cada tipo de ejercicio, la comparación será más fiable.

4.4. CONDICIONES DE LA REALIZACIÓN DE LAS PRUEBAS

La primera prueba se realizó el 17 de abril y dispusieron de veinte minutos para realizar ambos ejercicios. Se les entregó un folio con los dos ejercicios en contexto cotidiano para realizar de manera individual, siguiendo con la temática del equipo de atletismo. El día 22 de abril, se les entregó el folio correspondiente a la segunda prueba, con los dos ejercicios en contexto matemático para realizar individualmente. También dispusieron de veinte minutos.

En ambas pruebas les pedí que pusieran su nombre puesto que necesitaba saber de quién era cada una para poder realizar la posterior comparación. En el momento de realizar esta prueba les avise de que no contaría para nota y que simplemente era para ver el nivel que tenían. Una vez en recogidas las resoluciones de los estudiantes, se ha sustituido el nombre de los estudiantes por un número, para que así permanezcan en el anonimato.

4.5. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS

Los resultados se han representado en una tabla de datos. Cada fila corresponde a un alumno y cada columna corresponde a una fase de resolución del problema. A continuación vamos a explicar con más exactitud estas dos dimensiones.

En lo referente a las filas, en cada una de ellas aparecen los datos correspondientes a cada alumno. Los alumnos han sido ordenados de forma decreciente según su nota en el examen correspondiente a la unidad didáctica de sistemas de ecuaciones lineales. Los hemos clasificado en tres grupos en función de las calificaciones obtenidas en este examen:

- Calificaciones altas: 7´5 o superior; compuesto por 7 alumnos.
- Calificaciones medias: entre el 5 y el 7´5; compuesto por 6 alumnos.
- Calificaciones bajas: 5 o inferior; compuesto por 6 alumnos.

A la hora de dar el corte y que un alumno pertenezca a uno u otro grupo se ha tenido en cuenta que las calificaciones estuvieran de acuerdo a las capacidades matemáticas de cada alumno. Hay que añadir que la autora ha estado presente durante dos meses en el aula con estos alumnos, por lo que los conoce personalmente y sabe en qué grado dominan la materia. Se puede decir que en el grupo de calificaciones altas están aquellos alumnos que no suelen tener dificultades en esta materia y en el de calificaciones bajas pasa lo contrario, estando estos 6 alumnos siempre en el límite del aprobado.

En lo referente a las columnas, se estructuran según una serie de fases, que han sido adaptadas de Blum y Kaiser (1996). Cuando queremos resolver un problema matemático debemos seguir una serie de pasos, y según el tipo de ejercicio, las fases a seguir serán unas u otras. En base a estas fases hemos creado una tabla que completaremos con las soluciones dadas por los alumnos. A continuación describimos en qué consiste cada fase:

- Fase 1: paso de lo verbal a lo matemático.
- Fase 2: método que se lleva a cabo.
- Fase 3: proceso de resolución.
- Fase 4: solución.
- Fase 5: interpretación de la solución
- Fase 6: validación de la solución.

Tenemos dos tablas de datos, una por cada tipo de ejercicio: A (resuelto de forma numérica) o B (resuelto de forma gráfica). En cada tabla, cada fase ha sido dividida en dos, en función del contexto del problema; en rojo aparecen los datos del contexto cotidiano y en azul los del matemático. Y dentro de cada contexto hay dos columnas. La columna de la izquierda responderá a la pregunta: “¿ha realizado esta fase el alumno?” y se completa con un “sí” o un “no”. La columna de la derecha irá acompañada de un uno, si la respuesta es afirmativa y además el proceso es correcto; de un cero, si la respuesta es afirmativa pero el proceso es incorrecto; o de un cero, si la respuesta es negativa. A continuación se pueden ver los tres resultados posibles:

- Si, correcto: 1.
- Sí, incorrecto: 0.
- No: 0.

Cabe destacar que los resultados de una fase no heredan los errores de fases anteriores. Por ejemplo, si un alumno ha realizado la primera fase de forma incorrecta, tendrá un “sí 0”. Y si realiza correctamente la fase 3 en base a los datos incorrectos de su fase 1, será calificado como “sí 1”.

La fase 2 no aparece en la tabla al haber usado todos los alumnos el método impuesto en el enunciado por lo que consideramos que no tiene relevancia de cara a nuestro estudio. Por su parte, la fase 6 tampoco ha aparecido, es decir, ningún estudiante ha dado una validación al ejercicio porque en el aula no se les exige que lo hagan.

A continuación aparecen las cuatro tablas que recogen los resultados obtenidos. Las dos primeras corresponden a los resultados obtenidos por todos los alumnos en función de sus respuestas para el ejercicio A y el ejercicio B, respectivamente. La tercera y cuarta tabla se corresponden con una síntesis de los resultados obtenidos en función de los grupos de alumnos, según sus calificaciones.

	Fase 1				Fase 3				Fase 4				Fase 5			
	Cotidiano		Matemát.		Cotidiano		Matemát.		Cotidiano		Matemát.		Cotidiano		Matemát.	
Alumno 1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 2	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 3	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Alumno 4	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 5	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 6	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Alumno 7	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Grupo Bajo:		**7**		**7**		**7**		**7**		**7**		**7**		**7**		**5**
Alumno 8	sí	1	sí	1	sí	0	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Alumno 9	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Alumno 10	sí	1	sí	1	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Alumno 11	sí	1	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Alumno 12	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Alumno 13	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Grupo Medio:		**6**		**6**		**4**		**4**		**6**		**6**		**6**		**0**
Alumno 14	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0	no	0
Alumno 15	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Alumno 16	sí	1	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 17	sí	1	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 18	sí	1	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	no	0	no	0
Alumno 19	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0
Grupo Alto:		**6**		**6**		**3**		**6**		**6**		**6**		**4**		**2**
Total		**19**		**19**		**14**		**17**		**19**		**19**		**17**		**7**

Tabla 1: Resultados de cada alumno en los Ejercicios A

	Fase 1				Fase 3				Fase 4				Fase 5			
	Cotidiano		Matemát.		Cotidiano		Matemát.		Cotidiano		Matemát.		Cotidiano		Matemát.	
Alumno 1	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 2	sí	0	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 3	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 4	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 5	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 6	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 7	sí	0	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Calif. Altas:		**4**		**3**		**7**		**7**		**7**		**7**		**7**		**7**
Alumno 8	sí	0	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 9	no	0	sí	0	no	0	sí	1	no	0	sí	1	no	0	no	0
Alumno 10	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 11	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 12	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	no	0	sí	1
Alumno 13	sí	1	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Calif.Medias:		**3**		**1**		**5**		**6**		**5**		**6**		**4**		**5**
Alumno 14	sí	0	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 15	sí	0	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 16	no	0	sí	0	no	0	sí	1	no	0	sí	1	no	0	no	0
Alumno 17	sí	0	sí	0	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1	sí	1
Alumno 18	no	0	no	0	no	0	no	0	no	0	no	0	no	0	no	0
Alumno 19	no	0	sí	0	no	0	sí	1	no	0	sí	1	no	0	sí	1
Calif. Bajas:		**0**		**0**		**3**		**5**		**3**		**5**		**3**		**4**
Total		**7**		**4**		**15**		**18**		**15**		**18**		**14**		**16**

Tabla 2: Resultados de cada alumno en los Ejercicios B

	Cotidiano				Matemático			
	Fase 1	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 1	Fase 3	Fase 4	Fase 5
Calif. Altas	7	7	7	7	7	7	7	5
Calif. Medias	6	4	6	6	6	4	6	0
Calif. Bajas	6	3	6	4	6	6	6	2
Total	**19**	**14**	**19**	**17**	**19**	**17**	**19**	**7**

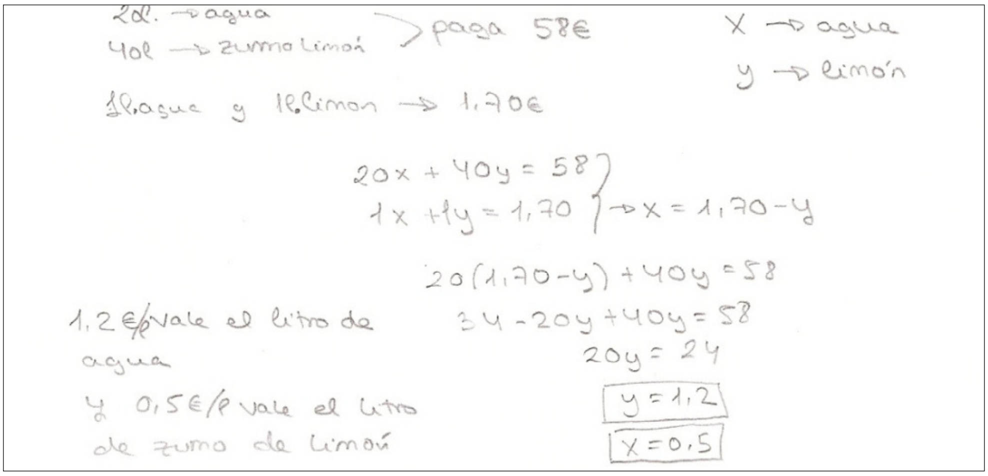
Tabla 3: Resultados por grupos en función de sus calificaciones. Ejercicios A

	Cotidiano				Matemático			
	Fase 1	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 1	Fase 3	Fase 4	Fase 5
Calif. Altas	4	7	7	7	3	7	7	7
Calif. Medias	3	5	5	4	1	6	6	5
Calif. Bajas	0	3	3	3	0	5	5	4
Total	**7**	**15**	**15**	**14**	**4**	**18**	**18**	**16**

Tabla 4: Resultados por grupos en función de sus calificaciones. Ejercicios B

En el Anexo 2 de este trabajo se pueden ver las pruebas de un alumno de cada grupo de calificaciones en contexto cotidiano y en contexto matemático. En ese mismo anexo, en la versión digital aparecen recogidas todas las pruebas. A continuación vamos a ver la manera de evaluar cada ejercicio a través de la prueba 1 del alumno 7.

En el ejercicio A ha realizado correctamente el ejercicio. Ha relacionado cada componente con una incógnita, ha realizado el proceso correctamente hallando la solución correcta y además ha dado la interpretación. En la tabla tiene un “sí 0” en todas las fases del ejercicio.


20l. → agua
40l → zumo limón
paga 58€
X → agua
y → limón
1l agua y 1l limon → 1,70€

$$\left.\begin{array}{l} 20x + 40y = 58 \\ 1x + 1y = 1,70 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1,70 - y$$

$$20(1,70 - y) + 40y = 58$$

$$34 - 20y + 40y = 58$$

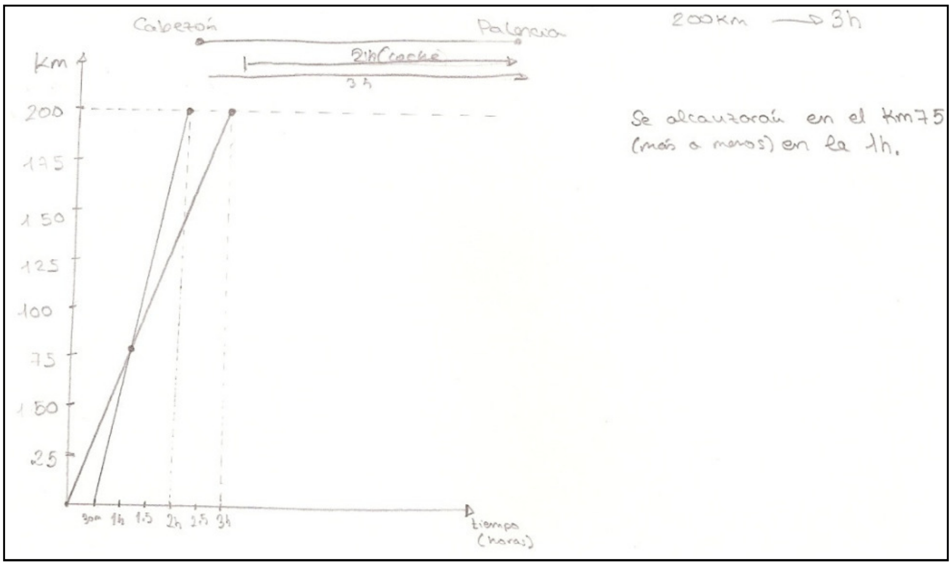
$$20y = 24$$

$$\boxed{y = 1,2}$$

$$\boxed{x = 0,5}$$

1,2 €/l vale el litro de agua
y 0,5 €/l vale el litro de zumo de limón

Prueba 1. Ejercicio A. Alumno 7



Prueba 1. Ejercicio B. Alumno 7

En el ejercicio B realiza incorrectamente la primera fase, por lo tanto se califica como “sí 0”. En función de los datos que ha traducido, realiza el proceso de resolución de manera correcta y halla la solución adecuada. También realiza la interpretación, por lo que estas últimas fases serán calificadas como “sí 1”.

4.6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En función de los resultados obtenidos en las tablas de datos, vamos a realizar un análisis cuantitativo. Empezaremos analizando los resultados en general, tomando la clase compuesta por los 19 alumnos como un todo. Por un lado estudiaremos los ejercicios A y por otro los ejercicios B, a la vez que nos fijamos en cada una de las fases que constituyen el proceso. Una vez hecho esto, pasaremos a analizar en profundidad los datos correspondientes a cada uno de los tres grupos, también teniendo en cuenta las diferentes fases.

4.6.1. Resultados en general

La siguiente tabla es una síntesis de los resultados obtenidos al analizar las pruebas relacionadas por cada alumno.

	Cotidiano				Matemático			
	Fase 1	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 1	Fase 3	Fase 4	Fase 5
Ejercicios A	19	14	19	17	19	17	19	7
Ejercicios B	7	15	15	14	4	18	18	16

Tabla 5: Resumen general de cada ejercicio

Los ejercicios A de cada prueba, los saben plantear y resolver todos los alumnos en los dos contextos. Todos han sabido traducir el enunciado al lenguaje matemático, realizado el proceso de resolución y han dado una solución aunque en algún caso no ha sido el correcto. Hasta este punto, los datos de los que disponemos son similares en ambos contextos, pero en la fase 5 se produce un dato llamativo.

En la fase 5, correspondiente a la interpretación de la solución, en el contexto cotidiano 17 de los 19 alumnos que dieron la solución han hecho además su correspondiente interpretación y a cada valor de *x* e *y* lo han relacionado con el zumo de limón o el agua; mientras que en el contexto matemático solo 7 de los 19 han interpretado la solución, el resto se ha limitado a dejarlo en función de *x* e *y*, sin mencionar que cada incógnita se corresponde con cada uno de los números demandados.

Por otro lado, en los ejercicios de tipo B podemos sacar más conclusiones, sobre todo de la fase 1. Antes de nada hay que mencionar que los alumnos debían dibujar su propia gráfica y disponían de reglas para dibujarla pero gran parte del alumnado lo hizo a mano alzada y de una manera aproximada. Por este motivo, varios alumnos no realizan correctamente esta fase debido a que las gráficas están mal divididas o les falta exactitud. Por lo tanto, se ha decidido profundizar en esta fase y contabilizar el número de alumnos que falla por falta de exactitud o por no saber dibujar las rectas correctas. En la tabla observamos que solo 7 de los alumnos en el contexto cotidiano y 4 en el matemático, realizan correctamente la primera fase, pero si tenemos en cuenta la falta de exactitud la cifra aumenta a 9 y 15, respectivamente.

La fase 3 y la fase 4 han sido realizadas correctamente en base a los datos que cada uno planteó en la fase 1, esto quiere decir que aquellos alumnos que plantearon correctamente el ejercicio supieron hallar la solución correcta. Por otro lado, aquellos alumnos que plantearon el ejercicio de forma errónea también llegaron a la solución correspondiente en función de las rectas dibujadas, aunque, obviamente, no obtuvieron la solución correcta.

Al contrario que sucedía en los ejercicios de tipo A, la interpretación de la solución en los ejercicios de tipo B ha sido realizada por un número similar de alumnos y no aporta ninguna conclusión determinante.

Si observamos la tabla 5 de la página anterior, hay tres valores que llaman la atención sobre el resto y son los correspondientes a la fase 1 del método gráfico en ambos contextos y a la fase 5 del contexto matemático de los ejercicios A. El resto de valores se mantienen superiores a la mitad de la muestra. Con esto podemos afirmar que en los sistemas de ecuaciones, la mayor dificultad que encuentran los alumnos es traducir el enunciado al lenguaje matemático al utilizar el método gráfico.

Todo esto nos ha llevado a repasar las pruebas y hacer una tabla correspondiente al número de alumnos que realizan cada fase, pero en esta ocasión de forma correcta, en base a la traducción del enunciado al lenguaje matemático, a la solución dada y a la interpretación de dicha solución.

	Ejercicios A						Ejercicios B					
	Cotidiano			Matemático			Cotidiano			Matemático		
	Tradu.	Soluc.	Interp.	Tradu.	Soluc.	Interp.	Tradu.	Soluc.	Interp.	Tradu.	Soluc.	Interp.
Calif. Altas	7	7	7	7	7	5	4	4	4	3	3	3
Calif. Medias	6	4	4	6	4	0	3	3	3	1	1	1
Calif. Bajas	6	3	2	6	6	2	0	0	0	0	0	0
Total	**19**	**14**	**13**	**19**	**17**	**7**	**7**	**7**	**7**	**4**	**4**	**4**

Tabla 6: Resumen de los procesos correctos del alumnado.

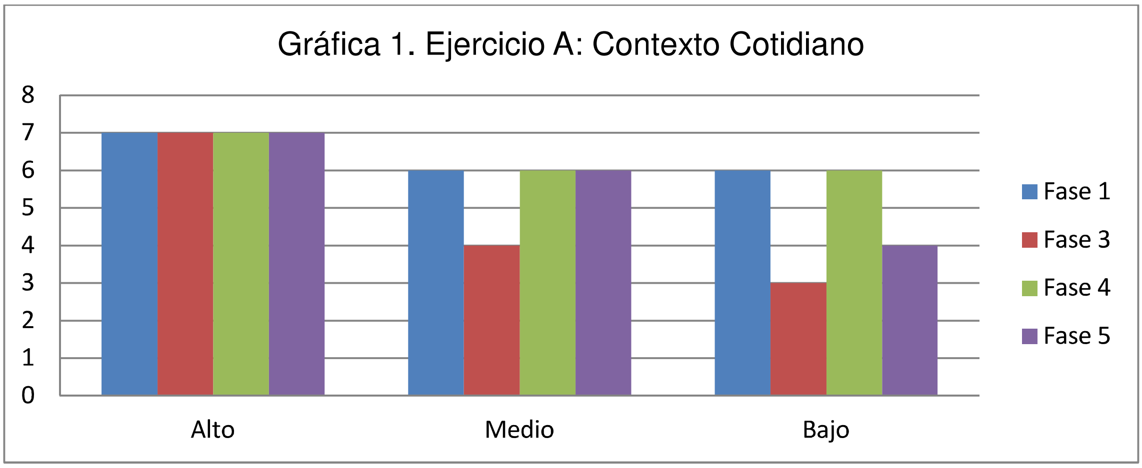
En los ejercicios A, todos los alumnos realizan correctamente la traducción del enunciado, pero el fallo se produce en la resolución del ejercicio. La fase 5 referente a la interpretación de la solución sigue teniendo datos similares a nuestro anterior análisis.

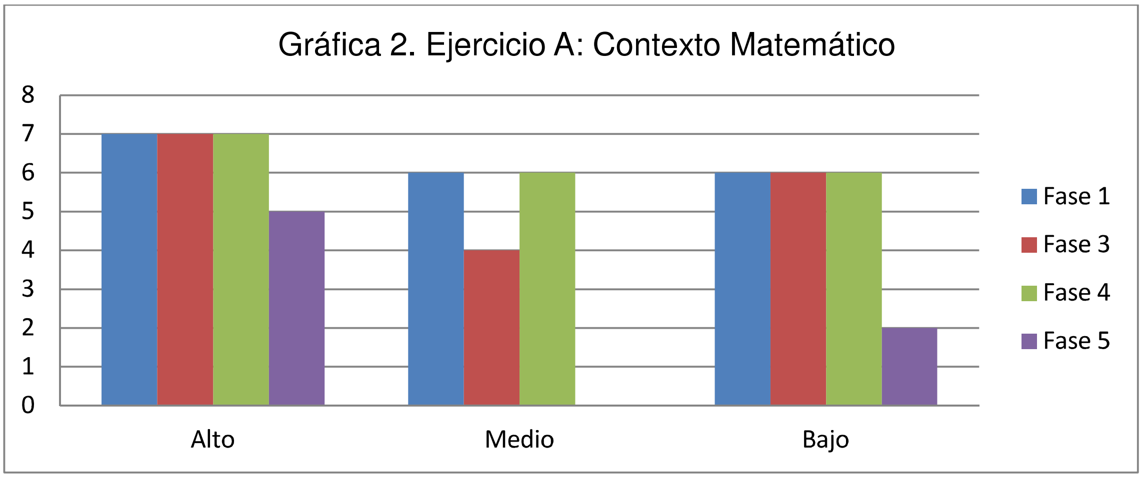
Por su parte, en los ejercicios B volvemos a la idea de que el mayor problema se produce a la hora de traducir el enunciado al lenguaje matemático, además del hecho de que muchas gráficas fueron dibujadas sin la precisión necesaria. El mayor descubrimiento de esta tabla, es que aquellos alumnos que realizan bien esta primera fase, realizan correctamente el resto del ejercicio, debido posiblemente a que una vez que tienen las dos rectas es muy fácil hallar el punto de corte.

Tras el análisis general, vamos a centrar nuestra atención en cada uno de los tres grupos en los que hemos dividido a los alumnos según sus calificaciones (altas, medias, bajas).

4.6.2. Resultados según los tres grupos. Ejercicios de tipo A

Estudiando a todos los alumnos como un todo, este tipo de ejercicio ha sido realizado correctamente por la mayoría de ellos, siendo lo más llamativo la falta de interpretación en el contexto matemático. Ahora vamos a analizar este hecho en función del tipo de alumnado. Para ellos vamos a apoyarnos en las siguientes gráficas que nos permiten visualizar aquellos datos más relevantes.





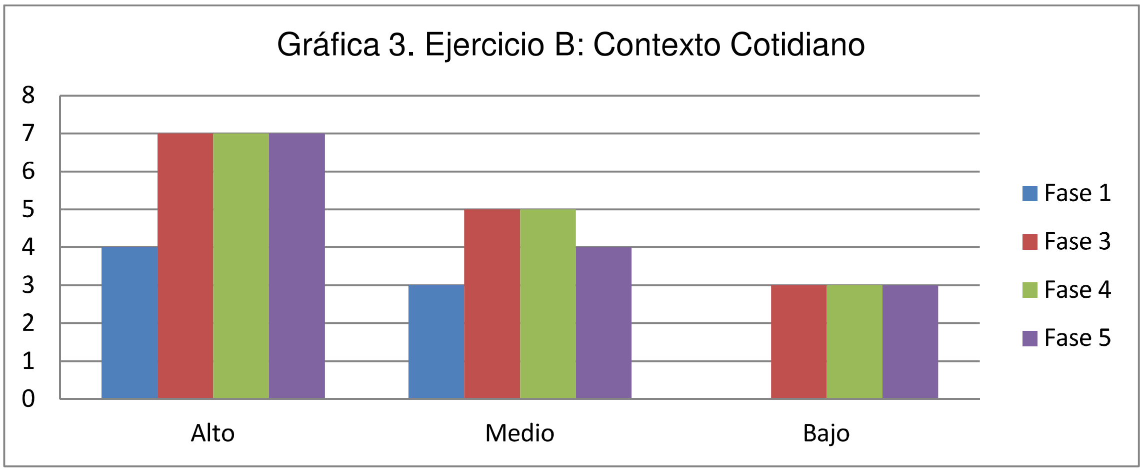
En el grupo de calificaciones altas, todos los alumnos han realizado correctamente el ejercicio y solo 2 de 7 no han interpretado el resultado en el contexto matemático. En el grupo de calificaciones medias, todos han planteado bien el ejercicio pero 2 alumnos han tenido algún fallo en el proceso de resolución en ambos contextos, mientras que la interpretación ha sido realizada por todos ellos en el contexto cotidiano, ninguno la ha realizado en el contexto matemático. Este hecho llama mucho la atención. En el grupo de calificaciones bajas, también han planteado correctamente el ejercicio todos los miembros pero ha habido fallos en el proceso de resolución. La interpretación ha sido realizada por 4 alumnos en el contexto cotidiano y solo por 2 en el matemático.

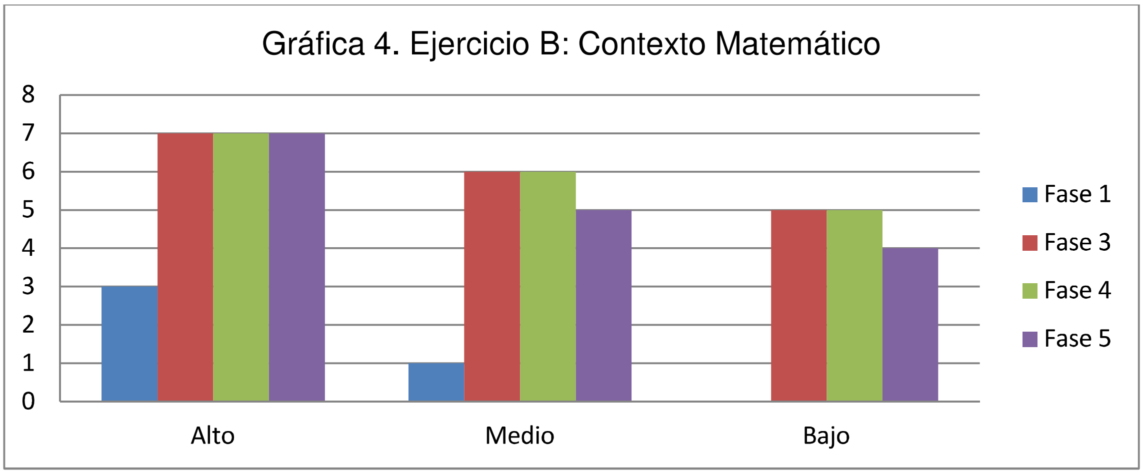
Podemos afirmar que en todos los grupos hay más alumnos que realizan la interpretación en el contexto cotidiano que en el matemático. Y el número de alumnos que lo interpretan va bajando a medida que baja el nivel de las calificaciones. Además, es sorprendente que en el grupo de calificaciones medias, ninguno lo haya interpretado en contexto matemático.

Esto puede llevarnos a pensar que los alumnos con altas capacidades realizan los ejercicios correctamente en ambos contextos, pero aquellos alumnos con menores capacidades se sienten más cómodos en el contexto cotidiano, al menos al utilizar alguno de los métodos numéricos.

4.6.3. Resultados según los tres grupos. Ejercicios de tipo B

Del mismo modo que hemos analizado los ejercicios de tipo A, haremos lo propio con los de tipo B, apoyándonos de nuevo en las gráficas siguientes. Así comprobaremos en qué fases se producen las mayores dificultades y dentro de qué grupos.





Llama mucho la atención que en la fase 1 de ambos contextos, ningún alumno del grupo de calificaciones bajas ha sabido colocar bien los cuatro puntos correspondientes a las dos rectas. Puesto que es un hecho sorprendente, vamos a analizar las hojas de ejercicios de estos 6 alumnos en ambos contextos. Comprobamos que en el contexto matemático solo 2 alumnos han dibujado algo similar a lo que el enunciado dictaba, mientras que en el contexto matemático, 5 de esos 6 alumnos sí han representado dos rectas similares a las que se pedían pero con algún error.

En los grupos de calificaciones medias y altas, los resultados obtenidos en ambos contextos son similares y la mayoría de fallos son producidos por falta de exactitud. A la hora de resolver el ejercicio y hallar el punto de corte correspondiente, no hay problemas con ningún alumno. Quienes hallaron dos rectas correctamente en la fase uno, hallaron el punto de corte correcto, mientras que aquellos alumnos que dibujaron mal las rectas, también realizaron bien el proceso de hallar en punto de corte, pero un punto erróneo puesto que arrastraban el fallo de la fase 1. En comparación con los alumnos con calificaciones bajas, los alumnos con calificaciones medias y altas han dibujado rectas similares a las correctas.

Analizando la fase 5, podemos afirmar que todos los alumnos con altas calificaciones han dado una interpretación de la solución en los dos contextos. En el caso de los grupos con calificaciones medias y bajas, casi todos los que plantearon el ejercicio han realizado la interpretación, pero no el 100% como ocurre con el grupo avanzado.

4.7. CONCLUSIONES DE LA EXPERIMENTACIÓN

Tras analizar los resultados obtenidos hemos llegado a una serie de conclusiones sobre el alumnado en general, sobre los diferentes tipos de alumnado y sobre sus principales dificultades al trabajar en situaciones de modelización.

Al analizar los resultados tomando al alumnado como un todo, hemos notado que para resolver un sistema de ecuaciones por medio de algún método numérico, los alumnos entienden mejor el ejercicio en contexto cotidiano antes que en el matemático. Un elevado número de alumnos ha dado su interpretación en el contexto cotidiano mientras que en el matemático solo lo han hecho unos pocos. Esto se debe al hecho de que encuentran el significado del ejercicio al tener que calcular el precio del agua y del zumo de limón, mientras que al hablarles de dos números cualesquiera no llegan a conectar el resultado con algo que tenga sentido.

Por el contrario, en el ejercicio de sistemas de ecuaciones resuelto por el método gráfico los alumnos tienen más éxito en contexto matemático. Esto es debido a que en el contexto cotidiano, debían traducir el enunciado a los cuatro puntos que les darían las dos rectas, mientras que en el contexto matemático, los puntos necesitaban menor traducción a las matemáticas, es decir, la traducción de lo verbal a lo matemático era instantánea mientras que en el primer caso debían razonarlo detenidamente. También cabe señalar que en el método gráfico, independientemente del contexto, quienes realizan bien la primera fase, realizan bien el resto del ejercicio.

Al estudiar al alumnado en función de sus calificaciones hemos comprobado que a los alumnos con altas calificaciones les resulta indiferente trabajar en uno u otro contexto ya que realizaron las pruebas sin dificultades significativas. Por otro lado, el grupo de calificaciones medias tampoco ha tenido grandes problemas, pero llama significativamente la atención el hecho de que ninguno haya interpretado la solución del ejercicio A en contexto matemático. Esto nos lleva a pensar que tal vez estos alumnos, que van bien en la materia de matemáticas pero no destacan en ella, necesiten encontrar un sentido a aquellos temas matemáticos que aprenden en clase.

El tercer grupo correspondiente al alumnado con calificaciones bajas resuelve de forma similar aquellos ejercicios del método numérico en ambos contextos, pero han sido más quienes han dado una interpretación en el contexto cotidiano. Tal vez les ocurra como a los alumnos del grupo medio y necesiten darle un significado a lo que están resolviendo para llegar a realizar todos los procedimientos. En lo referente al método gráfico, podemos decir que su mayor problema es traducir los datos de lo verbal a lo matemático, pero aquellos que no encuentran esa dificultad, no muestran suficiente interés o concentración para dibujar la gráfica con la necesaria precisión.

CONCLUSIONES

Un trabajo matemático basado en la modelización permite a los alumnos desarrollar una serie de capacidades que necesitaran en el mundo real. Los conceptos aprendidos a través de este sistema quedarán más afianzados que los impartidos hasta ahora donde no se les daba un sentido propio, por lo que los alumnos verán más allá de las matemáticas como una asignatura aburrida y liosa. Verán que puede llegar a ser útil e interesante, que se usa en cualquier situación. Es importante que el alumno relacione las matemáticas con la vida real pero también con otras asignaturas. Materias técnicas como física o dibujo técnico pueden ser utilizadas para aprender matemáticas y viceversa.

Desde el punto de vista del currículo, la modelización es una herramienta didáctica que ayuda a la adquisición de las competencias básicas, por lo tanto su implementación en el aula puede ser un objetivo a corto plazo. A través de la modelización, los estudiantes desarrollaran sus habilidades de argumentación y comunicación. Las pruebas PISA están más enfocadas a la modelización que el sistema educativo español, siendo la modelización una de las competencias específicas que establece el estudio PISA.

Un inconveniente de la modelización es que la formación del profesorado no está enfocada a este tipo de enseñanza por lo que también será un gran cambio en la práctica docente trabajar con este tipo de ejercicios. Hay que añadir que la evaluación puede ser complicada puesto que alguna práctica requiere varias semanas o meses. Pero esto tiene solución. El docente puede adaptarse a los nuevos tiempos, no es tan complicado. Además la tecnología jugará un papel importante en muchas ocasiones. Por otro lado, la evaluación puede llevarse de forma semanal a través de anotaciones sobre los procesos que siguen los alumnos o con entregas puntuales cada cierto tiempo. Si al final los alumnos acaban aprendiendo los contenidos mínimos y adquiriendo las competencias básicas podremos sentirnos satisfechos.

Las prácticas de modelización requieren un seguimiento constante y exhaustivo del trabajo de los estudiantes, pero a través de ellas se pueden detectar los errores de los alumnos. En este caso, el error puede ser visto como algo de lo que aprender, puesto que antes de finalizar el proceso de modelaje los estudiantes deben comprobar si la solución es adecuada de acuerdo al problema inicial. Si no lo es, deberán realizar de nuevo el ejercicio para ver donde han fallado y eso servirá por un lado, para corregir el ejercicio, y por otro para ver que es normal equivocarse y que no hay que tener miedo a hacerlo. De igual modo, si se utiliza bien puede ser una herramienta de apoyo a la diversidad.

La modelización además ayudará a fomentar la iniciativa personal y la toma de decisiones por parte del alumnado puesto que es un trabajo motivador y creativo, que le exige tomar un camino u otro en diferentes partes del ejercicio. Los alumnos irán más allá de la resolución de ejercicios de manera mecánica o aplicando las fórmulas que aparezcan en la misma página del libro de texto. Aprenderán modelos que utilizarán en posteriores problemas similares. Además, vinculando los problemas matemáticos con situaciones del día a día que les interesen y atraigan su atención como el caso de elegir la mejor tarifa telefónica o comprar billetes de avión por internet, podremos despertar su interés y lograr que estén más concentrados y con mejor predisposición durante las clases.

La principal conclusión que extraemos de la experimentación es que los alumnos con altas calificaciones realizan los ejercicios sin grandes dificultades en cualquier contexto; mientras que los alumnos con calificaciones medias o bajas entienden mejor el ejercicio a realizar con el método numérico si lo realizan en contexto cotidiano pero prefieren el contexto matemático para realizarlo de un modo gráfico porque fallan en el paso de lo verbal a lo matemático. Esto nos lleva a pensar que los alumnos realizan mejor los ejercicios de resolución inmediata en los que no haya que pensar mucho ni prestar especial cuidado en los detalles, como en el caso de dibujar la gráfica. Por lo tanto, la modelización será una pieza clave en la educación de los futuros estudiantes para ayudarles a pensar por sí mismos y a no esperar que el ejercicio se resuelva de forma instantánea. De este modo, al terminar la educación obligatoria serán personas mejor formadas y preparadas para enfrentarse al mundo real.

BIBLIOGRAFÍA

- Aravena, M.; Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios Pedagógicos XXXIII, nº2*, 7-25.
- Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*, 23, 15-38.
- Blum, W. (2002). ICMI STUDY 14; Applications and Modelling in Mathematics Education-Discussion Document, *Education Studies in Mathematics*, 51, 149-171.
- Camacho, M.; Gámez, J.L.; González, M.J.; Recio, T. (2010). Currículo de matemáticas y marco de competencias. *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, 69-75.
- Consejería de Educación, Cultura y Deporte. Gobierno de Cantabria. Real Decreto 57/2007, de 10 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria. *BOC, 101,* 7495-7615.
- De la Fuente, C. (2010). Aspectos didácticos de la modelización matemática. *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, 123-154.
- *De Lange, J. (1989):* Trends and Barriers to Applications and Modelling in Mathematics Curricula. In W. Blum, M. Niss, I. Huntley, (Eds.). *Modelling, applications and applied problem solving,* 196-204.
- Galbraith, P. (1989). From applications to modelling. In D. Blane & M. Evans, *Mathematical modelling for the senior years*, 78-86. Parkville: The Mathematical Association of Victoria.
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). *A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process*. ZDM, 38(2), 143-162.
- Galbraith, P.; Sillman, G.; Brown, J.; Edwards, I. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, 688-697. Volume 2
- Gómez, J. (2000). *Per un nou ensenyament de les matemàtiques*, CEAC.

- Gómez, J. (2008). *La innovación frente a la tradición: Reflexiones y retos en el noble oficio de educar*.
- González, M.J.; Jara, P.; Ortega, T.; Ruiz, J.F. (2010). Aspectos didácticos de la modelización matemática. *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, 275-283.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Freudenthal Institute, Utrecht.
- Kaiser, G. (1996): *Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion.
- Kaiser, G. (2005). Mathematical Modelling in School: Examples and Experiences. Paper presented at the Fourth Congress of the European society for Research in Mathematics Education (CERNE 4).
- Maaβ, K. (2006). *What are modelling competences?*, Z.M.D., Vol 38(2).
- Marín, A. (2010). Experiencias y reflexiones en torno al desarrollo de la competencia de Modelización matemática en Secundaria con apoyo de las Nuevas Tecnologías. *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, 77-121.
- Mina, M.; Esteley, C.; Cristante, A.; Marguet, I.(2005). *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. (pp. 295-304).
- Niss, M. (2003) Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. En Bernard L. Madison, B. L. and Steen L. A., Editors, Quantitative Literacy. *Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*. Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy held at the National Academy of Sciences in Washington, D.C. on December 1-2, 2001. /National Council on Education and the Disciplines Princeton, New Jersey, 2003. Págs. 215-220 .
- Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagtsis & Papastavridis (eds): *3rd Mediterranean Conference on mathematical education, 3-5 January 2003, Athens, Greece,* 115-124.
- Ortega, T. (2010). Modelización y construcción de enunciados. Un camino de ida y vuelta por las esferas de Dandelín. *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, 197-229.

- PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas. INECSE. Madrid.
- PISA 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos OCDE. Informe español._INECSE. Madrid.
- Reid, M.; Etcheverry, N.; Roldán, M.; Gareis, M. (2010). Modelización matemática en el aula: relato de una experiencia. *III REPEM Memorias*, 313-320. La Pampa, Argentina.
- Rico, L. (2010). Currículo de matemáticas y marco de competencias. *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, 11-25.
- Ruiz, J.F. (2010). Currículo de matemáticas y marco de competencias. *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, 155-195.
- Sabariego, P. (2013). *El viento Sur y su influencia en la salud mental de las personas*. 4º concurso escolar de trabajos de estadística ICANE.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in Mathematics. In D. Grouws (Eds.), Handbook for Research on mathematics teaching and learning (pp.334–370). New York.
- Sierra, L.; Juan, M.; García, L.; Gómez, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas.

ANEXO 1: PRUEBAS DE LA EXPERIMENTACIÓN

PRUEBA 1

EXPERIMENTACIÓN INDIVIDUAL. PRUEBA EN CONTEXTO COTIDIANO *17/04/13*

Ejercicio A

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, *calculad el precio de cada elemento.*

Ejercicio B

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. *Represéntalo gráficamente y averigua en qué kilómetro alcanzará el coche al autobús.*

PRUEBA 2

EXPERIMENTACIÓN INDIVIDUAL. PRUEBA EN CONTEXTO MATEMÁTICO *22/04/13*

Ejercicio A

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. *¿Cuáles son esos números?*

Ejercicio B

La recta r pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del eje x. La recta s corta al eje x en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). *¿En qué punto se cruzan ambas rectas?*

ANEXO 2: PRUEBAS RESUELTAS POR LOS ALUMNOS

A continuación se recogen las pruebas de los alumnos. Primero aparecerán las del contexto cotidiano y después las del contexto matemático.

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 1

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

x → precio de los litros de agua
y → precio de los litros de zumo

DATOS: 20l. agua + 40l. zumo } cuesta 58€
1l. + 1l. = 1'70 €

$$\begin{cases} 20x + 40y = 58 \\ x + y = 1'70 \rightarrow x = 1'70 - y \end{cases}$$

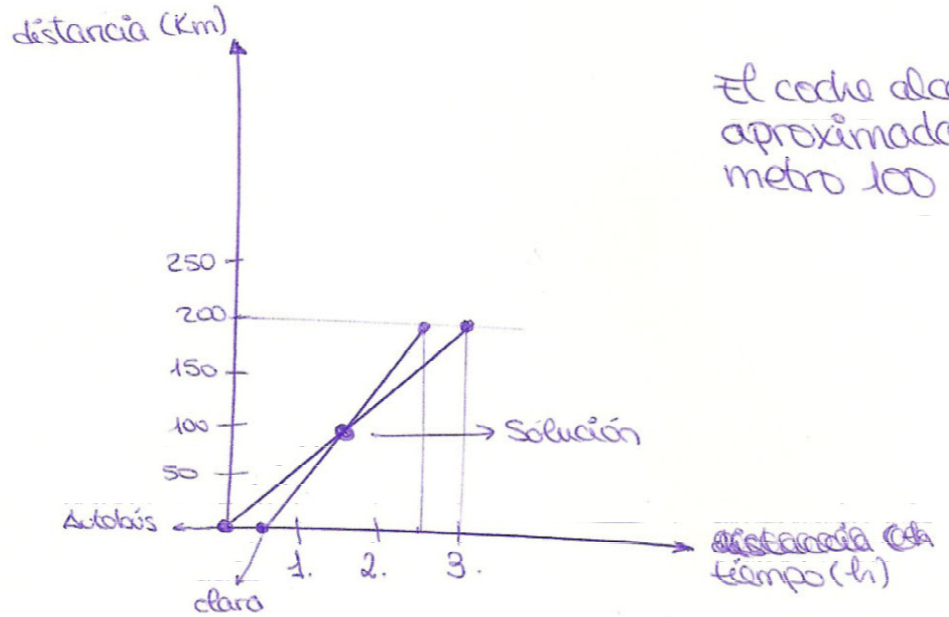
$$20(1'70 - y) + 40y = 58$$
$$34 - 20y + 40y = 58$$
$$20y = 24$$
$$\boxed{y = 1,2€}$$

$$x = 1'70 - 1,20$$
$$\boxed{x = 0'5€}$$

El precio del litro de agua es 0'5€ mientras que el precio del zumo de limón es 1'2€.

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

DATOS → Distancia entre Cabezón y Palencia es 200 Km
Autobús → 3h. en hacer 200Km
Clara → Sale media h. más tarde
→ Tarda 2h. en recorrer 200Km



El coche alcanza al autobús aproximadamente en el kilómetro 100

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 2

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

x = agua y = limon

$$\left.\begin{array}{l}20x + 40y = 58 \\ 1x + y = 1'70\end{array}\right\} \quad x = 1'70 - y$$

$$20(1'70 - y) + 40y = 58$$

$$34 - 20y + 40y = 58$$

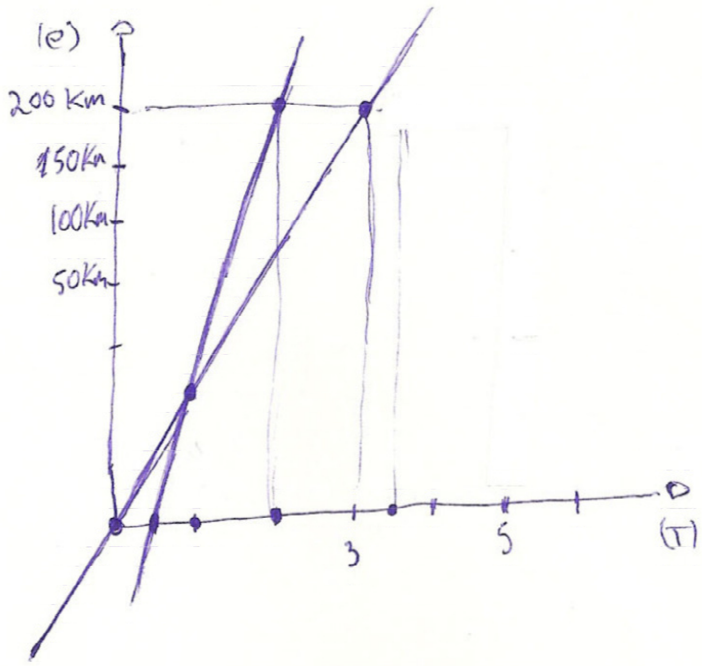
$$20y = 24$$

$$\boxed{y = 1'2€} \quad \boxed{x = 0'5€}$$

1'2 €/l vale el zumo de limon y 0'5 €/l vale el agua.

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

El coche alcanza al autobus en 1h.



EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 3

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

Agua = x ; zumo = y

$$\left.\begin{array}{l} 20x + 40y = 58 \\ 1x + 1y = 1'70 \end{array}\right\} x = 1'70 - 1y \rightarrow x = 1'7 - 1'2 \rightarrow x = 0'5$$

$$20(1'70 - 1y) + 40y = 58$$

$$34 - 20y + 40y = 58$$

$$20y = 24$$

$$y = 24/20 = 1'2 \rightarrow \boxed{y = 1'2}$$

$$\boxed{x = 0'5}$$

1'20€ el litro de zumo

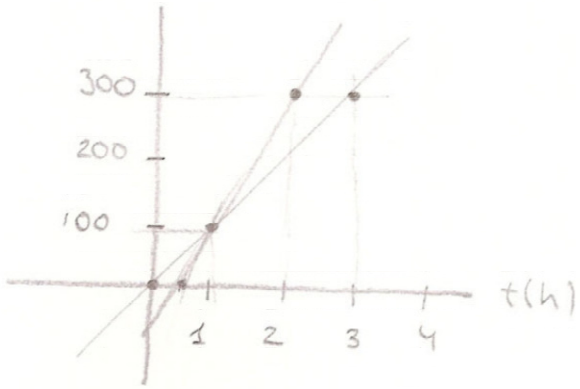
0'50€ el litro de agua

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

¿h le adelanta?

200 Kms → 3h

200kms → 2h saliendo 30m después



Clara y su padre alcanzarán el autobús al cabo de una hora.

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 4

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1'70 \\ 20x + 40y = 58€ \end{array}\right\} \quad x = 1'70 - y$$

x = ~~zumo~~ agua
y = zumo limón

$20\cdot(1'70 - y) + 40y = 58$

$34 - 20y + 40y = 58$

$20y = 58 - 34$

$20y = 24$

$\boxed{y = 1'2}$ el zumo

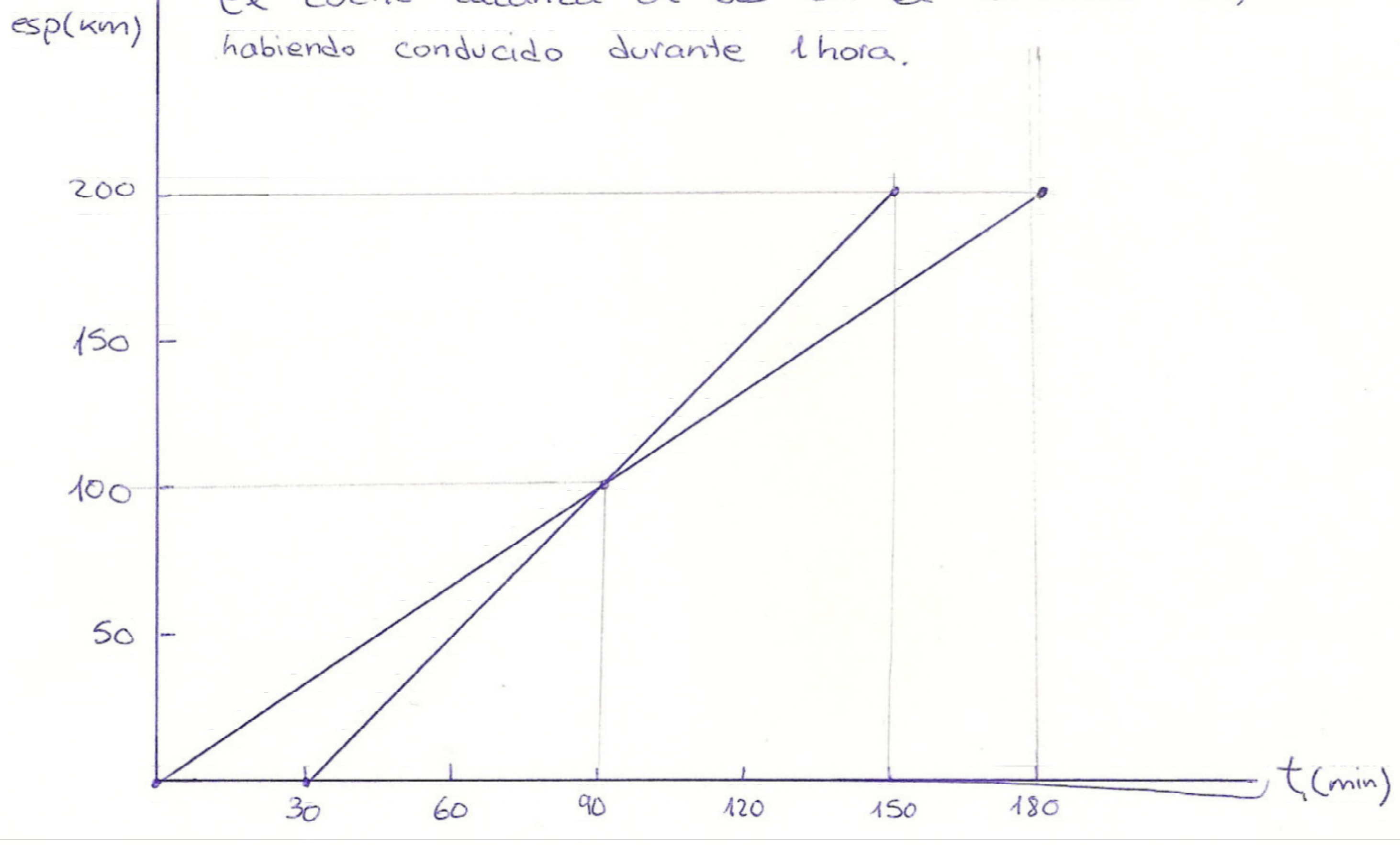
$x = 1'70 - 1'2$

$\boxed{x = 0'5}$ el agua ~~sale a~~

R= El agua sale a 50centimos y el zumo de limón a 1'20€

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

El coche alcanza al bus en el kilómetro 100, ~~a la~~ habiendo conducido durante 1hora.



EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 5

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

$$\left.\begin{array}{l} 20x + 40y = 58 \\ x + y = 1'70 \end{array}\right\} \quad x = 1'70 - y$$

x = agua (€/ℓ)
y = limón (€/ℓ)

$$20 \cdot (1'70 - y) + 40y = 58$$

$$34 - 20y + 40y = 58$$

$$20y = 24$$

$$y = \frac{24}{20}$$

$$\boxed{y = 1'20}$$

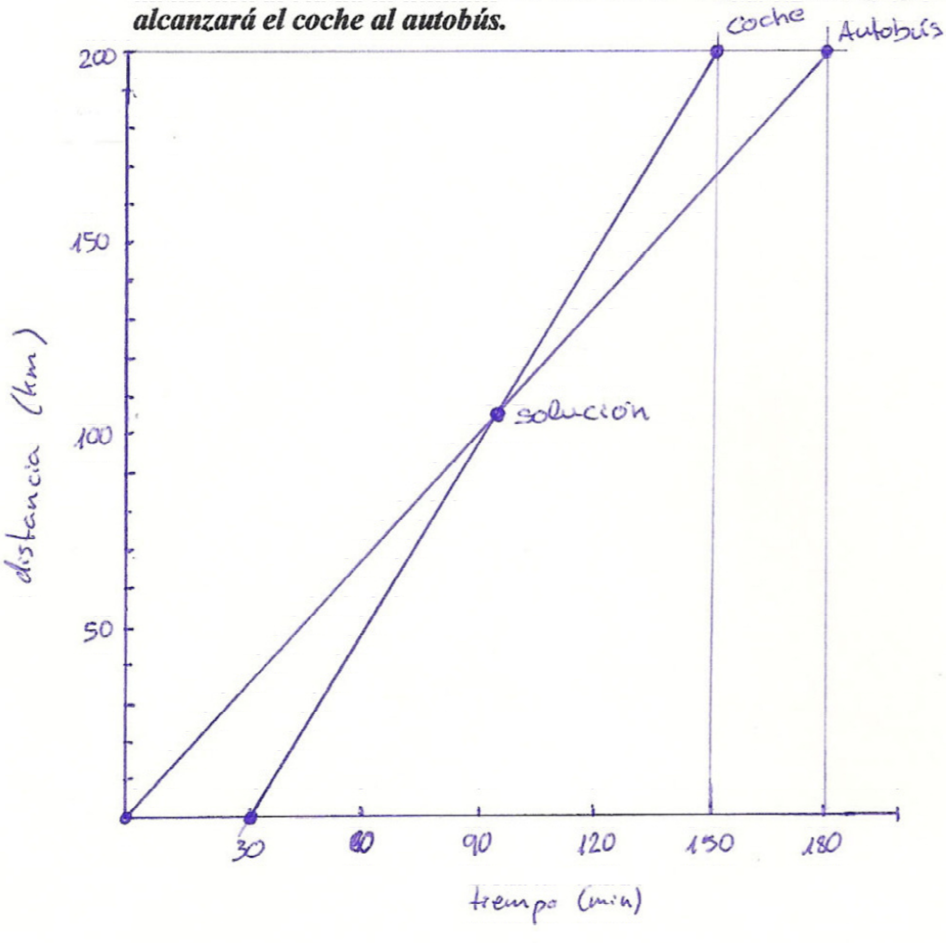
$$x = 1'70 - y$$

$$x = 1'70 - 1'20$$

$$\boxed{x = 0'50}$$

• El litro de agua está a 0'50€ y el de zumo de limón a 1'20€.

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***



• El coche alcanzará al autobús a los 90 minutos de la salida del 'bus, en el km 100 del trayecto.

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 6

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

$x \rightarrow$ agua.
$y \rightarrow$ zumo.

$$\begin{cases} 20x + 40y = 58 \\ x + y = 1'70 \end{cases} \rightarrow (\cancel{x = y})\ x = 1'70 - y$$

$$20(1'70 - y) + 40y = 58$$
$$34 - 20y + 40y = 58$$
$$20y = 24$$
$$\boxed{y = 1'2}$$

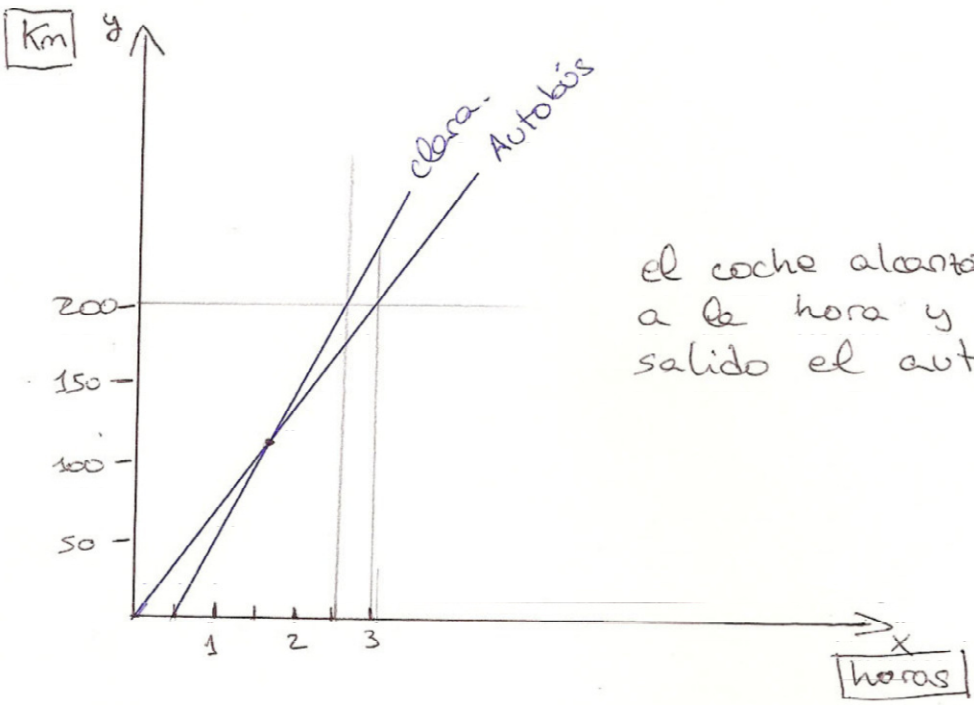
$$x = 1'70 - 1'2$$
$$\boxed{x = 0'5}$$

$\rightarrow$ los (~~veinte~~) litros de agua cuestan a 0'5 € cada litro, los veinte litros 10 €.

$\rightarrow$ los litros de zumo cuestan a 1'2 € cada litro, los cuarenta litros son a 48 €

$\rightarrow$ si sumamos 48 € más 10 € nos da el total de euros pagados que son 58 €

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***



el coche alcanza al autobús a la hora y media de haber salido el autobús.

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 7

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

2l. → agua
40l → zumo limón } paga 58€

x → agua
y → limón

1l.agua y 1l.limon → 1,70€

$$\left.\begin{aligned} 20x + 40y &= 58 \\ 1x + 1y &= 1,70 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 1,70 - y$$

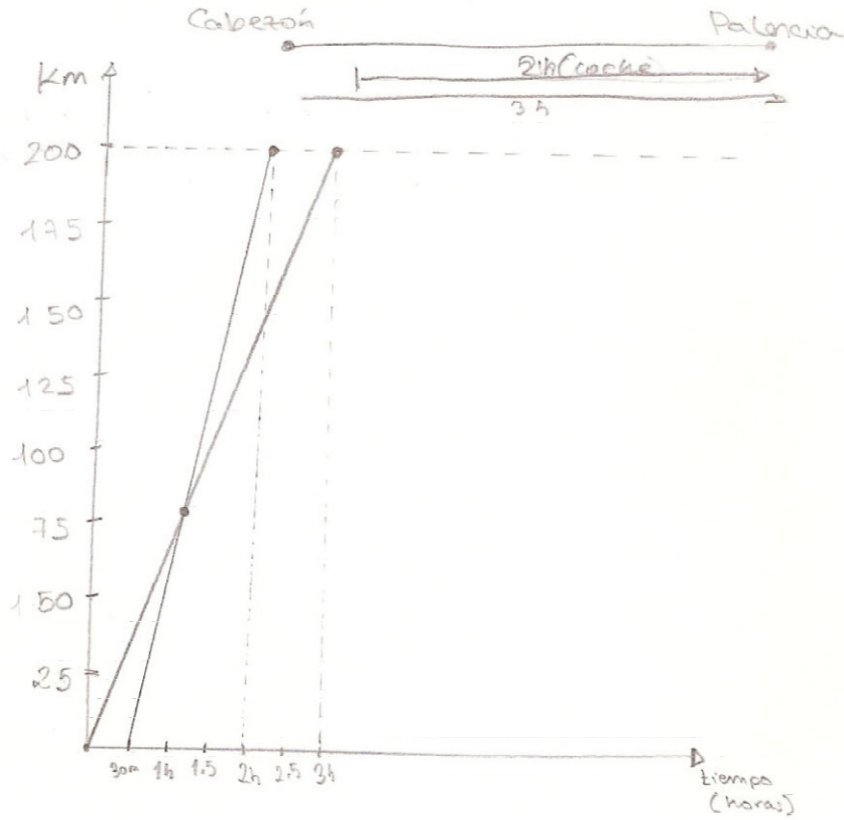
$$20(1,70-y) + 40y = 58$$
$$34 - 20y + 40y = 58$$
$$20y = 24$$
$$\boxed{y = 1,2}$$
$$\boxed{x = 0,5}$$

1,2 €/l vale el litro de agua

y 0,5€/l vale el litro de zumo de limón

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

200Km → 3h



Se alcanzarán en el km75 (más o menos) en la 1h.

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 8

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

DATOS:

- ¿Precio?
- 20l agua — 40l zumo — 58€
- 1l agua — 1l zumo — 1'70€

x= precio por cada litro de agua

y= precio por cada litro de zumo

0,5€ por litro de zumo.

1,9€ pol litro de agua

$\begin{cases} 20x + 40y = 58€ \\ x + y = 1'70€ \end{cases}$

$\frac{58-40y}{20} + y = 1'70$

$58 - 40y + y = 34$

$24 = 41y$

$0,5 = y$

$x = \frac{58-40y}{20}$

$x = \frac{58-40 \cdot 0,5}{20}$

$x = \frac{38}{20}$

$x = 1,9$

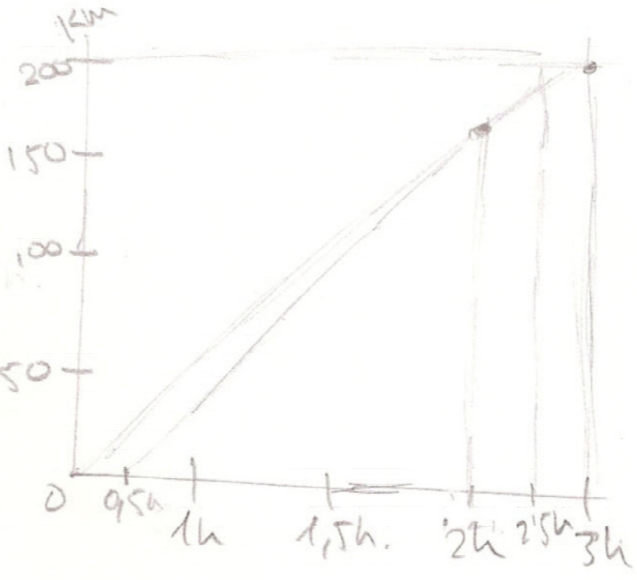
Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

DATOS:

- ¿Dónde alcanza el coche al bus?
- Cabezón — Palencia = 200km

Bus = 3h

Coche = sale media hora más tarde = 2h.



El coche alcanzará al bus en 2horas

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 9

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

$x = 0,5$ € precio del agua

$y = 1,2$ € precio del limón

x = agua
y = limón

20 litros de agua
y 40 litros de zumo.

todo 58 €

1 L de agua + 1 L de limón
cuesta 1,70 €

¿precio de cada elemento?

$$\left.\begin{array}{l} 20x + 40y = 58 \\ x + y = 1,70 \end{array}\right\} x = 1,70 - y$$

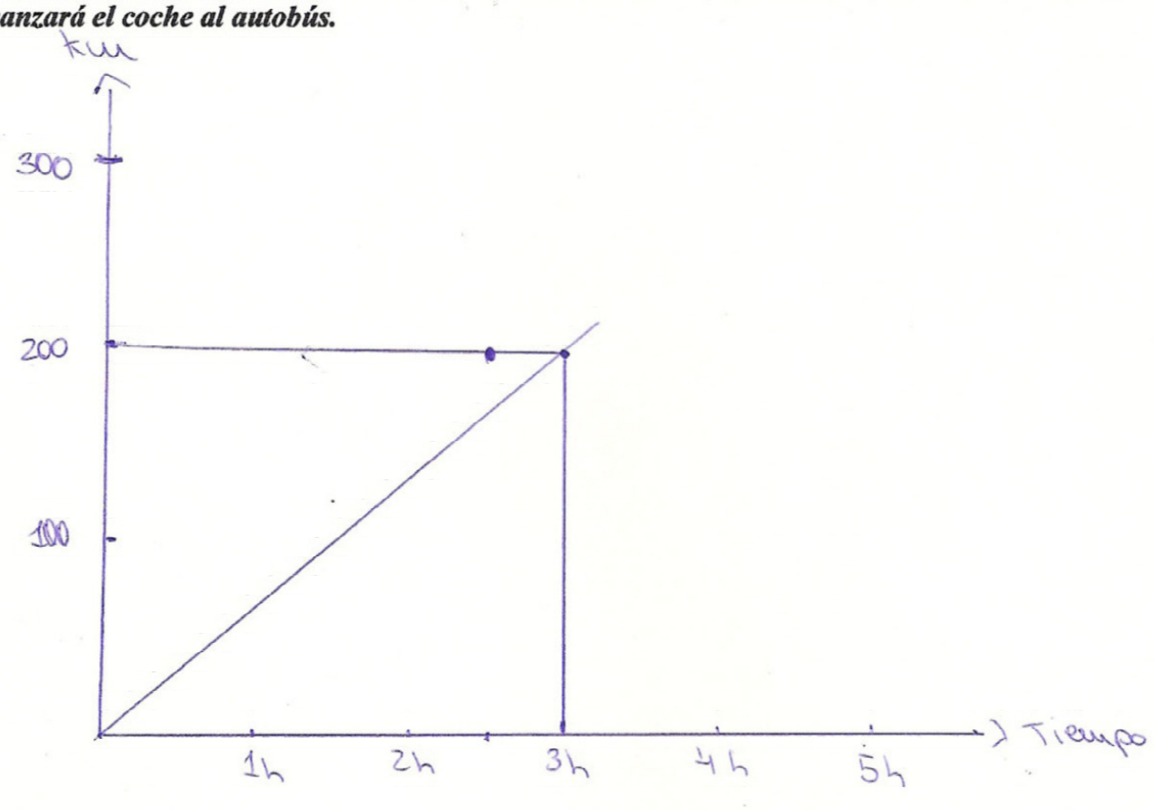
$20(1,70 - y) + 40y = 58$

$34 - 20y + 40y = 58$

$20y = 24$

$y = 1,2$

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***



EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 10

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

$$\begin{cases} 20x + 40y = 58 \\ x + y = 1'70 \end{cases}$$

x = agua

y = zumo de limón

$x = 1'70 - y \rightarrow 1{,}70 - 1{,}20 = \boxed{0{,}5\ €}$ es el precio de un litro de agua

$20(1{,}70 - y) + 40y = 58$

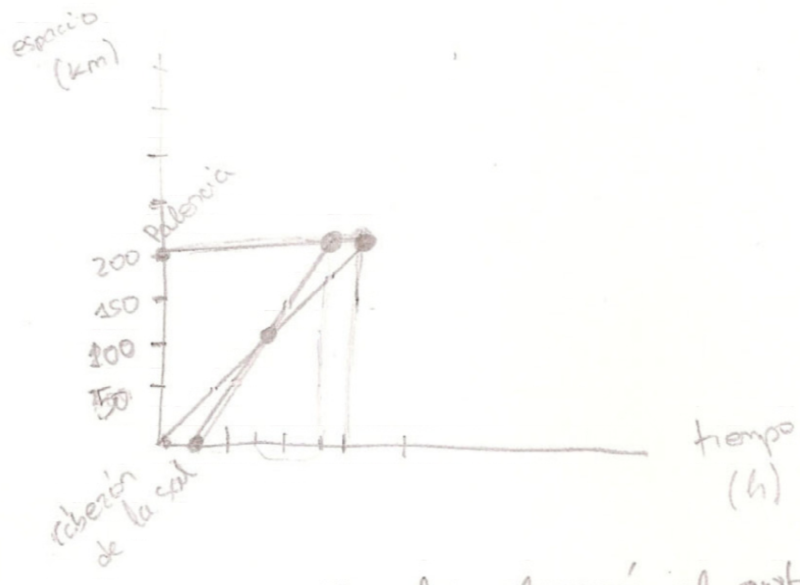
$34 - 20y + 40y = 58$

$20y = 58 - 34$

$20y = 24$

$y = \frac{24}{20} = \boxed{1{,}20\ €}$ es el precio de un litro de zumo de limón.

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***



El coche alcanzará al autobús a los 100 km de Cabezón de la sal, es decir, en mitad del trayecto pasada 1 h y media.

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 11

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

20l agua y 40 l zumo
paga 58

1l agua + 1l zumo = 1,70 €

X = agua
Y = zumo

$$\begin{cases} 20x + 40y = 58 \\ 1x + 1y = 1'70 \end{cases}$$

$$x = \frac{58 - 40y}{20}$$

$$x = \frac{58 - 40 \cdot 18,76}{20} =$$

$$\boxed{x = 20,48}$$

$$1\left(\frac{58 - 40y}{20}\right) + 1y = 1'70$$

$$\frac{58 - 40y}{20} + 1y = 1'70$$

$$\frac{58 - 40y + 20y}{20} = 1'70$$

$$40y + 20y = 1170 - 58 \cdot 20$$

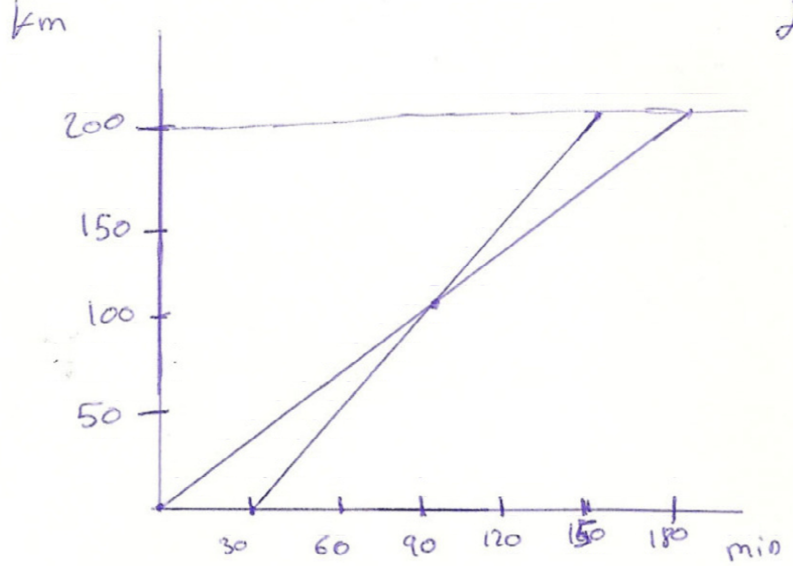
$$60y = -1126$$

$$y = \frac{-1126}{60}$$

$$\boxed{y = 18,76}$$

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

Palencia $\overline{\ 200km\ }$ Cabezón
Autobus tarda 3 horas
Coche tarda 2 y sale media hora tarde



El coche alcanzará al autobus a los 90 minutos, tras recorrer 100km.

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 12

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

x=agua
y=zumo limón

$$\begin{cases} x+y=1'70 \\ 20x+40y=58 \end{cases}$$

$x=1'70-y$

$20(1'70-y)+40y=58$

$34 \quad -20y+40y=58$

$20y=58-34$

$y=\frac{24}{20}$

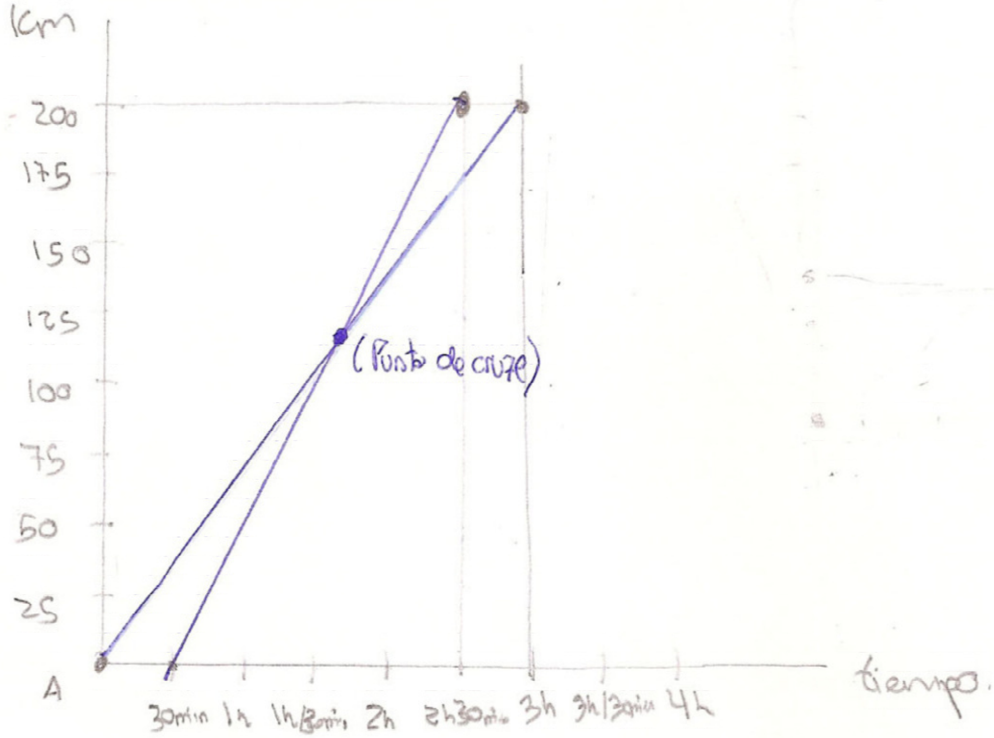
$y=1'2$ € l por el zumo limon

$x+1'2=1'70$

$x=1'70-1'2$

$x=0'5$ € l de agua.

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***



EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 13

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

$20x + 40y = 58$

$x + y = 1'70 \qquad x = 1'70 - y$

x = agua

y = zumo de limón

$20(1'70 - y) + 40y = 58$

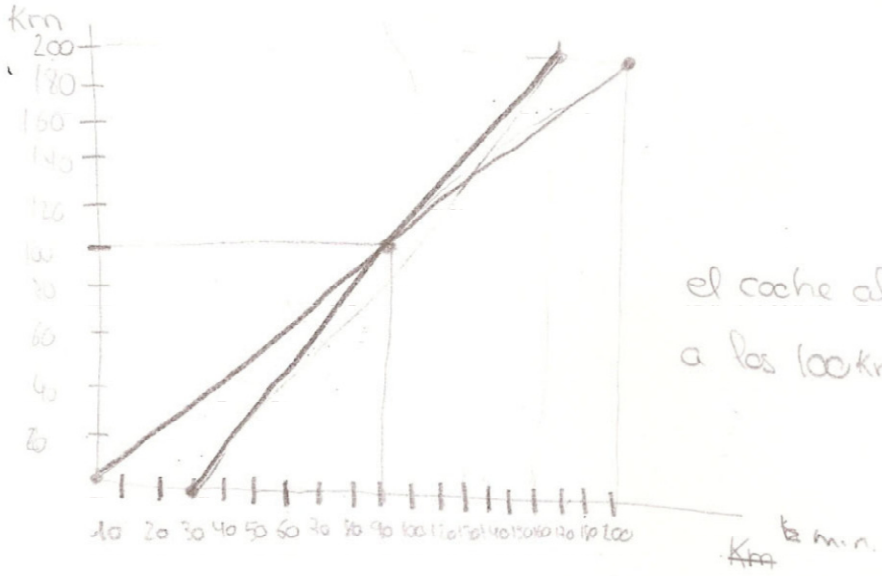
$34 - 20y + 40y = 58$

$20y = 24$

$y = \frac{24}{20} = \boxed{1'2}$ € zumo limón

$\boxed{x = 0'50}$ € agua

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

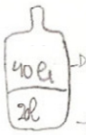


el coche alcanzara al autobus a los 100km

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 14

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***



→ Zumo de limón
→ Agua
= 58 euros

X = precio del zumo
y = precio del agua

	litros	euros	litros	euros
Zumo	40	58	1	1'70
agua	20		1	

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1'70 \\ 40x + 20y = 58 \end{array}\right\} \quad x = 1'70 - y$$

$$40(1'70 - y) + 20y = 58$$

$$\boxed{x = 1'2 \text{ euros}}$$

→ $40(1'70 - y) + 20y = 58$

$68 - 40y + 20y = 58$

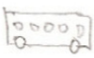
$-20y = -10$

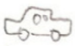
$y = \frac{10}{20}$

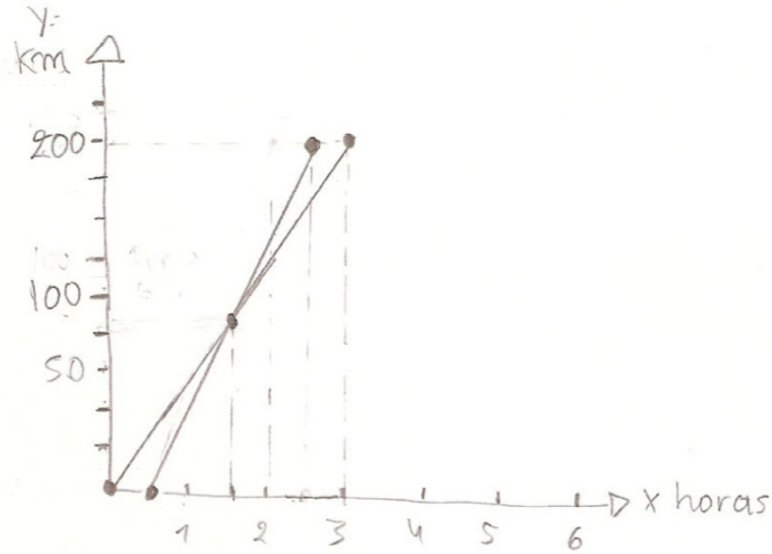
$$\boxed{y = 0'5 \text{ euros}}$$

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

cabezón ——— 200 km

 = 3 horas

\# sale 1/2 hora mas tarde  = 2 horas



se encuentran en el km 73 a a las 1:30 horas del autobús y 1:00 h. del coche

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 15

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

¿Precio de cada elemento?

20 l de agua 40 l de zumo 58 €

1 l + 1 l costa 1´70 €

X → Agua

y → Zumo

$$\left.\begin{array}{l} 20x + 40y = 58 \\ x + y = 1'70 \end{array}\right\} \quad x = 1'70 - y$$

$$20(1'70 - y) + 40y = 58$$

$$34 - 20y + 40y = 58$$

$$20y = 24$$

$$y = \frac{24}{20} = 1,2 \text{ Zumo}$$

$$x = 1'70 - 1,2$$

$$x = 0,5 \text{ el agua}$$

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

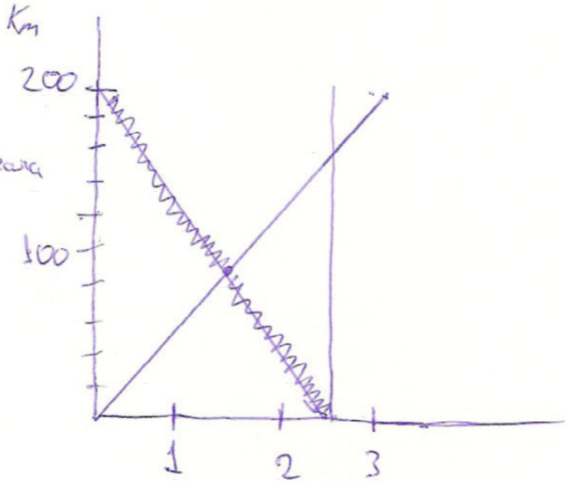
~~Representación~~

~~Representación~~

¿Punto en que alcanzara el coche al autobús?

200 Km → 3 h

30 más tarde pero tarda 2 horas



~~Se la cruzara a la 1 y media más o menos en el Km 90~~

Se lo cruzara a los 160 Km

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 16

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

¿ precio de cada?

20 l de agua
40 l de zumo → 58 €

Si mezclase un litro de agua con 1 l de zumo de limón costaría 1,70 €

1,24 €/litro de agua
0,83 € / litro de zumo

x = € agua
y = € zumo de limón

$$\begin{cases} 20x + 40y = 58 \\ 1x + 1y = 1{,}70 \end{cases}$$

$$x = \frac{58 - 40y}{20} \qquad x = \frac{1{,}70 - 1y}{1}$$

$$\frac{58 - 40y}{20} = \frac{1{,}70 - 1y}{1}$$

$$1(58 - 40y) = 20(1{,}70 - 1y)$$

$$58 - 40y = 34 - 20y$$

$$58 - 34 = -20y + 40y$$

$$24 = 20y$$

$$\boxed{y = \frac{20}{24} = 0{,}83 €/l}$$

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

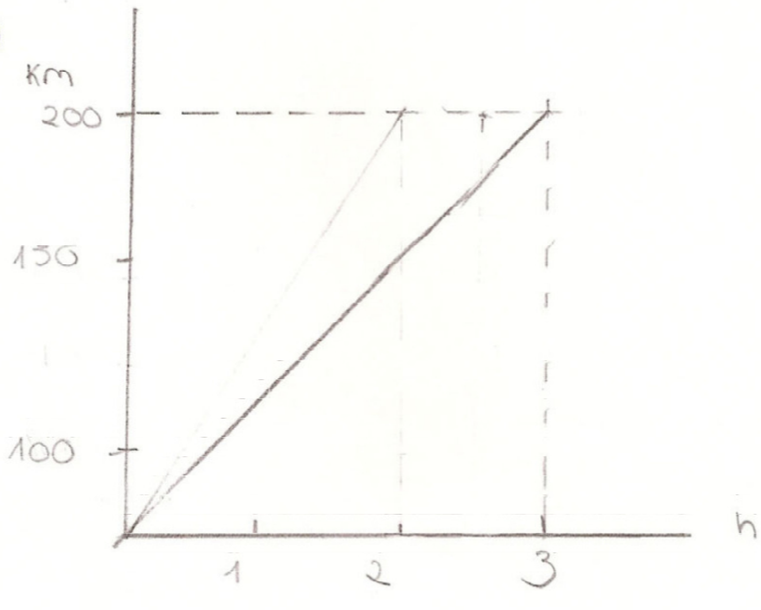
¿ en qué punto alcanzará el coche al autobús?

200 km desde Cabezón a Palencia.

El autobús tarda 3 h

El coche sale media hora más tarde

Tarda 2 h



EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 17

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

20l agua y 20l de zumo paga 58€
la mezcla costaria 1,70 €
¿Precio de cada elemento?

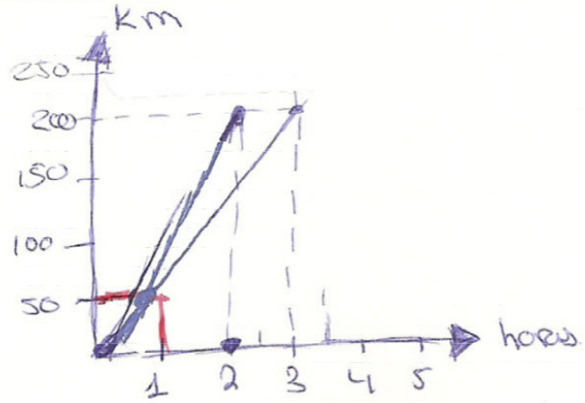
x=litros de agua
y= litros de zumo

$$20x+40y=58$$
$$1x+\cancel{1}y=1{,}70 \rightarrow x=1{,}70-1y$$
$$20(1{,}70-\cancel{1y})+40y=58$$
$$34-20y+40y=58$$
$$-20y+40y=58-34$$
$$20y=24$$
$$\boxed{y=1{,}19}$$

$$1{,}70-1\cdot 1{,}19=$$
$$\boxed{1{,}33=x}$$

1,33 es el precio del agua ; 1,19 precio del zumo.

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***



coinciden en el kilometro 50 y 1 hora de viaje.

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 18

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

Calcular el precio de cada elemento

- 20 l agua
- 40 l zumo
- Agua más zumo = 58€

x = agua
y = zumo

$$\begin{cases} 20x + 40y = 58 \\ x + y = 1'70 \end{cases} \quad x = 1'70 - y \qquad x = 1'70 - 0{,}6$$

$$\boxed{x = 1{,}16}$$

$$20(1'70 - y) + 40y = 58$$

$$34 - y + 40y = 58$$

$$39y = 24$$

$$y = \frac{24}{39}$$

$$\boxed{y = 0{,}6€}$$

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***

Representarlo gráficamente y averiguar en qué punto alcanzará el coche al autobús.

- 200 km.
- El autobús tarda tres horas
- Salen media hora más tarde.
- Realizan el viaje en 2 horas

EJERCICIO INDIVIDUAL

ALUMNO 19

El entrenador crea su propia bebida energética para sus atletas. Por veinte litros de agua y cuarenta litros de zumo de limón paga 58 euros. Sabiendo que si se mezclase un litro de agua con uno de zumo de limón la mezcla costaría 1´70 euros, ***calculad el precio de cada elemento.***

20 l de agua
40 l de zumo de limón → 58€

X = agua
Y = zumo de limón

Mezcla 1 l agua y 1 l zumo costaría 1'70. $\boxed{y = 1,2}$ $\boxed{x = 0'5}$

€ el litro de zumo.

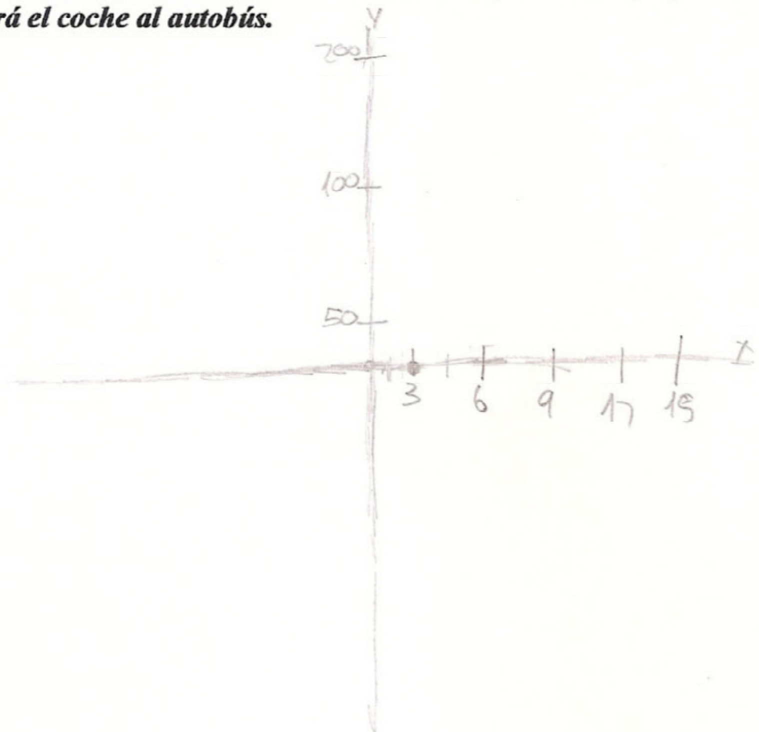
€ el litro de agua

Reducción

$$\left.\begin{array}{l} 20x + 40y = 58 \\ x + y = 1'70 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-20)} \begin{array}{r} \cancel{20x} + 40y = 58 \\ -\cancel{20x} - 20y = -34 \\ \hline 20y = 24 \end{array}$$

$y = 1,2$

Hay una carrera en Palencia, a 200 kilómetros de distancia desde Cabezón de la Sal. El autobús es muy lento y tarda tres horas en hacer el trayecto. Clara no ha llegado a tiempo de coger el autobús, por lo que su padre decide llevarla en coche hasta Palencia. Salen media hora más tarde que el autobús pero realizan el viaje en dos horas. ***Representalo gráficamente y averigua en qué punto alcanzará el coche al autobús.***



EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 1

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

Un nº + otro = 1'70

20 veces el primero + 40 veces el segundo = 58

1er nº → x
2º nº → y

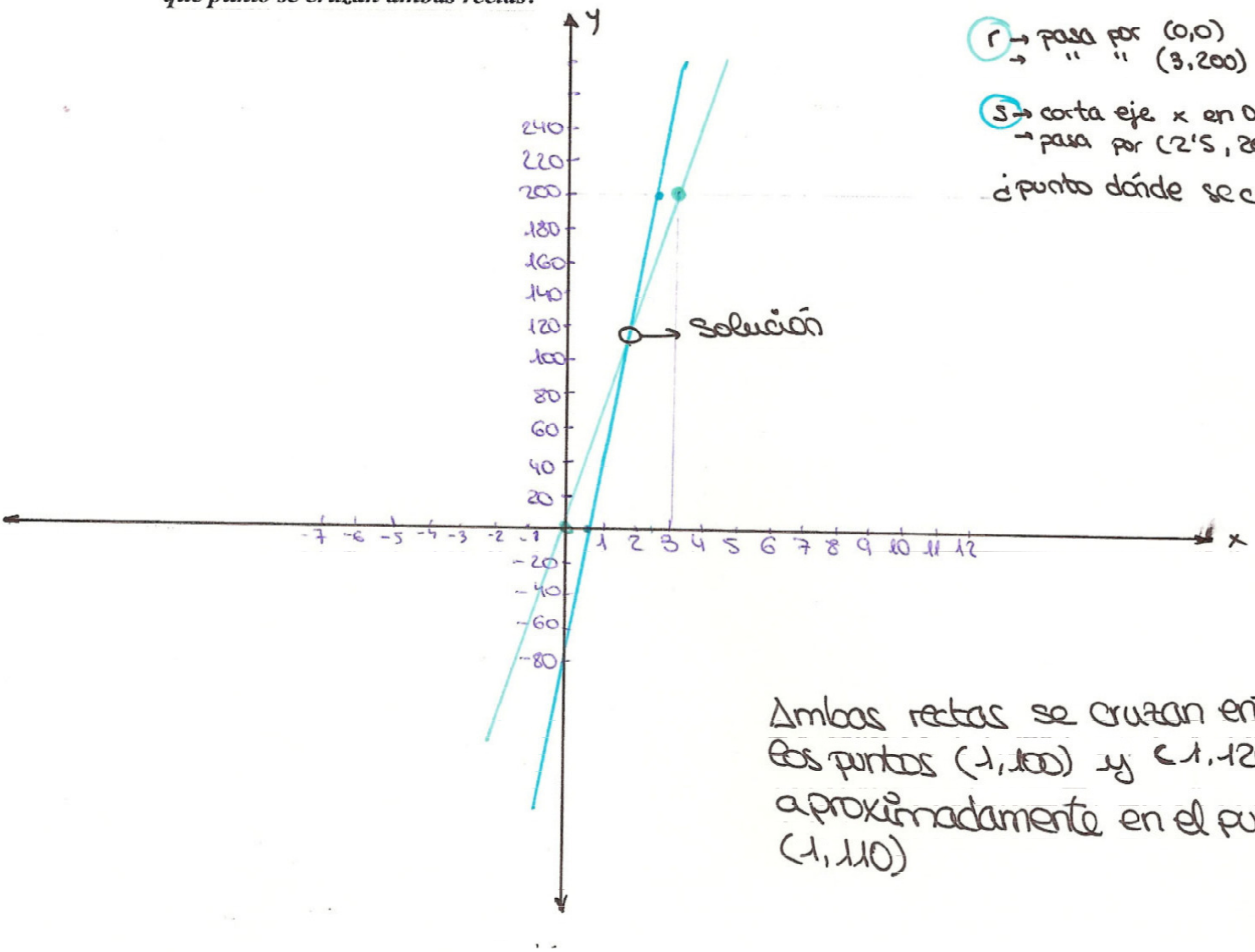
$$\begin{cases} x + y = 1'70 \rightarrow x = 1'70 - y \\ 20x + 40y = 58 \end{cases}$$

$20(1'70 - y) + 40y = 58$
$34 - 20y + 40y = 58$
$20y = 24$
$\boxed{y = 1,2}$

$x = 1'70 - 1'20$
$\boxed{x = 0'5}$

Los números son 1,2 y 0'5.

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



r → pasa por (0,0)
→ " " (3,200)

s → corta eje x en 0,5
→ pasa por (2'5, 200)

¿punto dónde se cruzan?

Ambas rectas se cruzan entre los puntos (1,100) y (1,120) aproximadamente en el punto (1,110)

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 2

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

x: 1º número y: 2º número

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1'70 \\ 20x+40y=58 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=1'70-y \\ 20(1'70-y)+40y=58 \end{array}$$

$$34-20y+40y=58$$

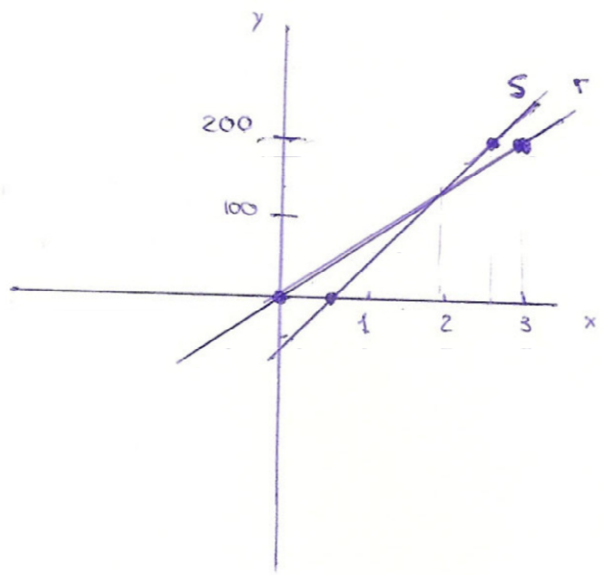
$$20y=24$$

$$\boxed{y=1'2} \quad \boxed{x=0'5}$$

El primer número es 0'5 y el segundo 1'2.

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***

Se cruzan en el punto (2, 150)



EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 3

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

x + y = 1´70 } x = 1´70 − y → x = 1´7 − 1´2

x + ~~20 + y + 40x = 58~~

20x + 40y = 58

$\boxed{x = 0´5}$

1´70 + ~~y~~ 20 + y + 40 = 58

20 (1´70 − y) + 40y = 58

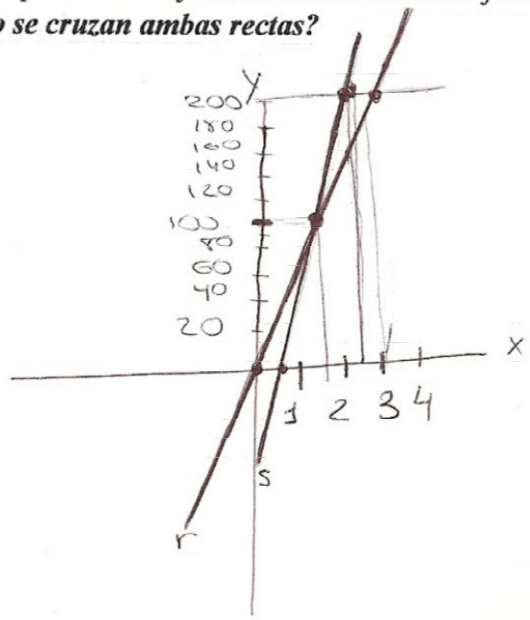
34 − 20y + 40y = 58

20y = 24

y = 24/20

$\boxed{y = 1´2}$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2’5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



Estas dos rectas se cruzan en el punto (1´5, 100).

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 4

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1'70 \\ 20x+40y=58 \end{array}\right\} \quad x=1'70-y$$

$$x=1'70-1'2$$

$$\boxed{x=0'5}$$

$$20\cdot(1'70-y)+40y=58$$

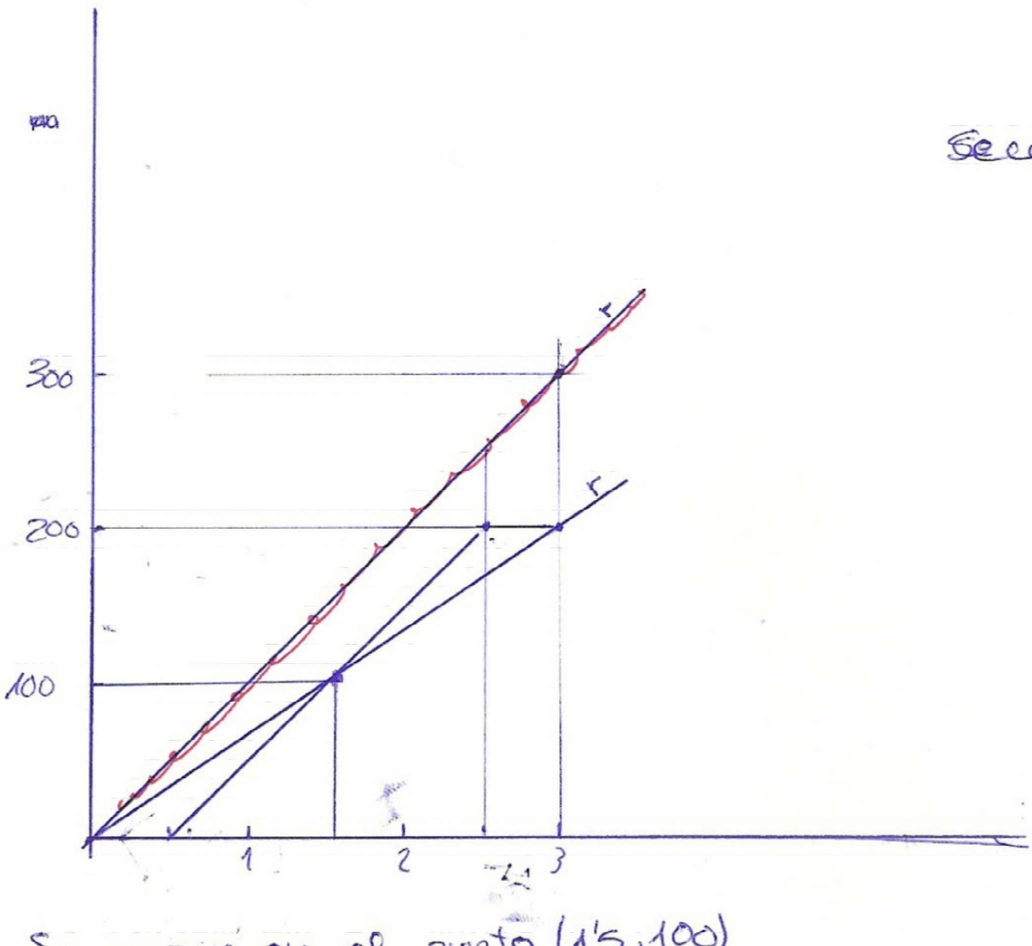
$$34-20y+40y=58$$

$$20y=24$$

$$\boxed{y=1'2}$$

Los números son 0'5 y 1'2

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



Se cruzan

Se cruzan en el punto (1'5, 100)

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 5

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1'70 \\ 20x+40y=58 \end{array}\right\} \quad x=1'70-y$$

$$20\cdot(1'70-y)+40y=58$$

$$34-20y+40y=58$$

$$34+20y=58$$

$$20y=24$$

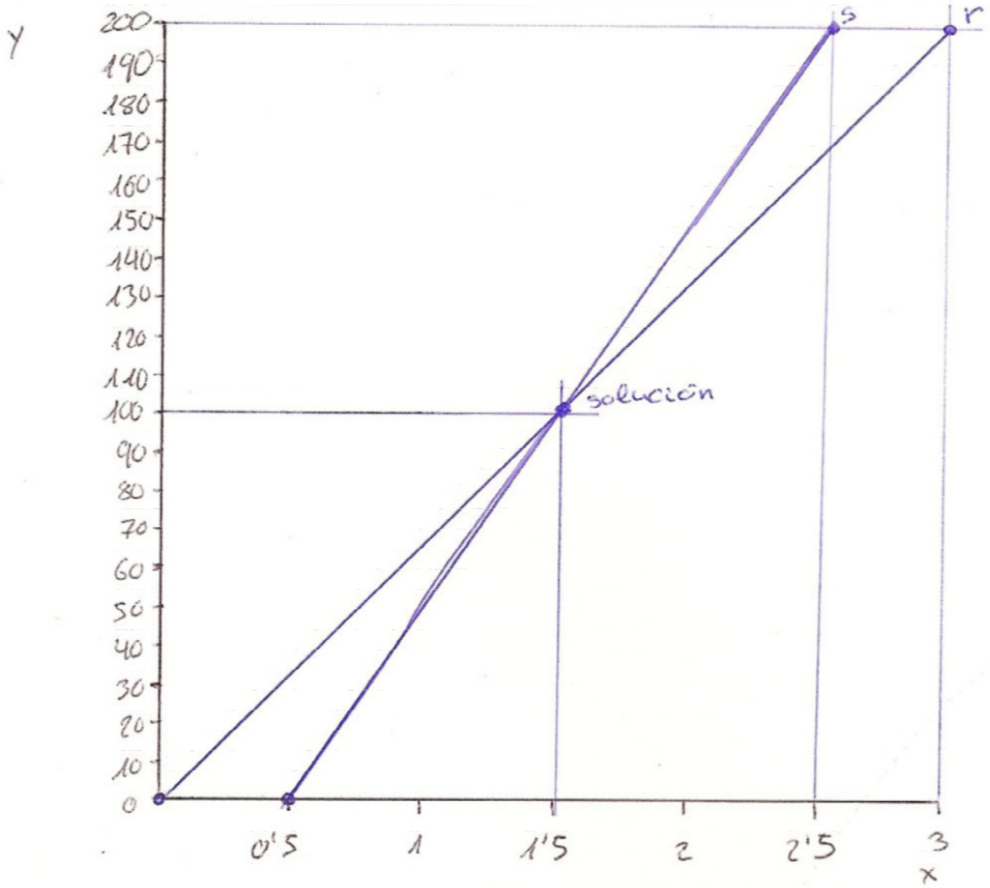
$$\boxed{y=1'20}$$

$$x=1'70-1'20$$

$$\boxed{x=0'50}$$

• Estos números son 0'5 y 1'2.

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



• Las rectas r y s se cruzan en un punto de coordenadas 100, 1'5.

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 6

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

x → un número
y → otro número

$$\begin{cases} x + y = 1'70 \\ 20x + 40y = 58 \end{cases} \longrightarrow x = 1'70 - y$$

$$x = 1'70 - 1'2$$

$$\boxed{x = 0'5}$$

$$\Downarrow$$

$$20(1'70 - y) + 40y = 58$$

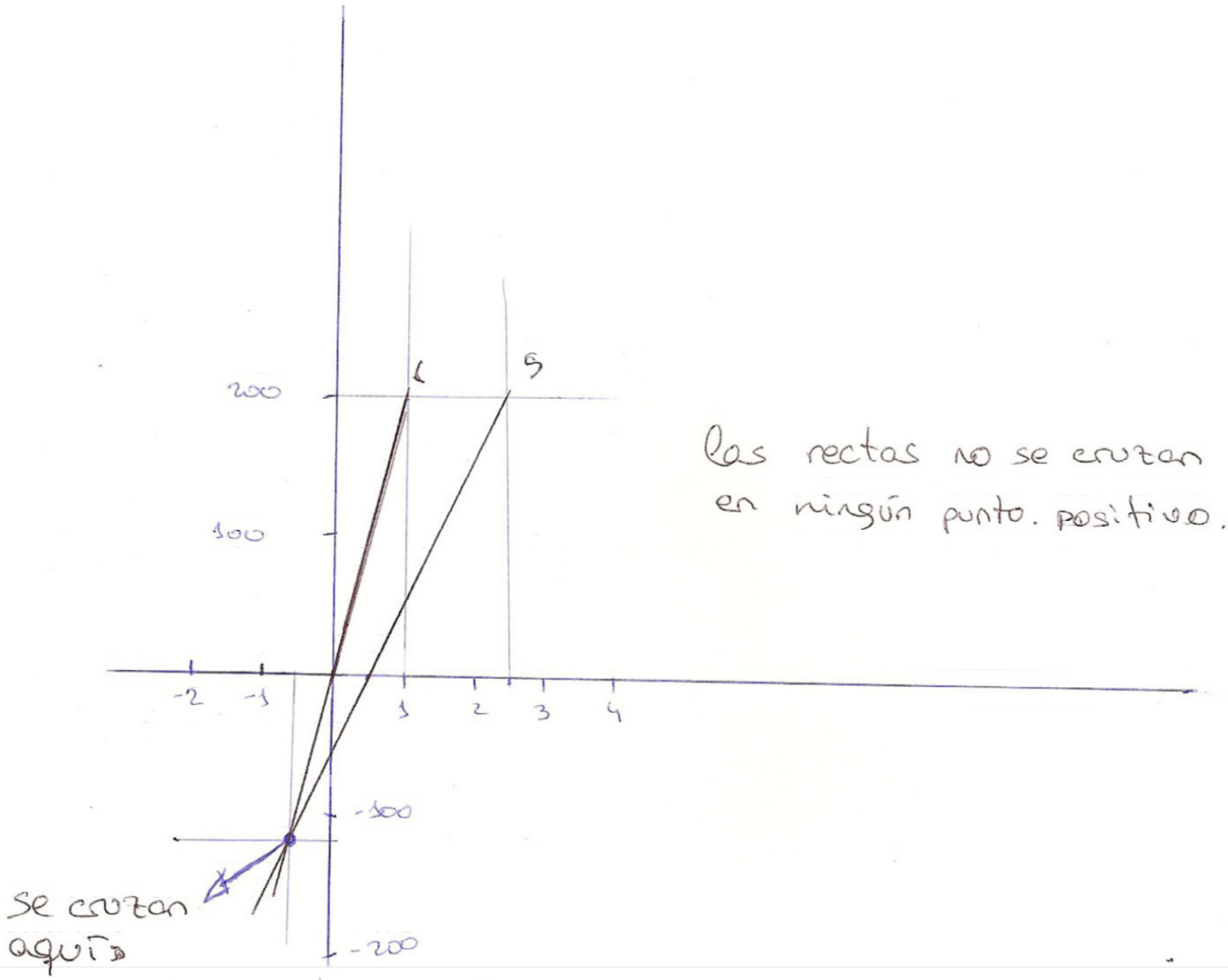
$$34 - 20y + 40y = 58$$

$$-20y + 40y = 58 - 34$$

$$20y = 24$$

$$\boxed{y = 1'2}$$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 7

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

$x \to$ un número

$y \to$ otro número

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1{,}70 \\ 20x + 40y = 58 \end{array}\right\} \to x = 1{,}70 - y \qquad \boxed{x = 0{,}5}$$

$$20(1{,}70 - y) + 40y = 58$$

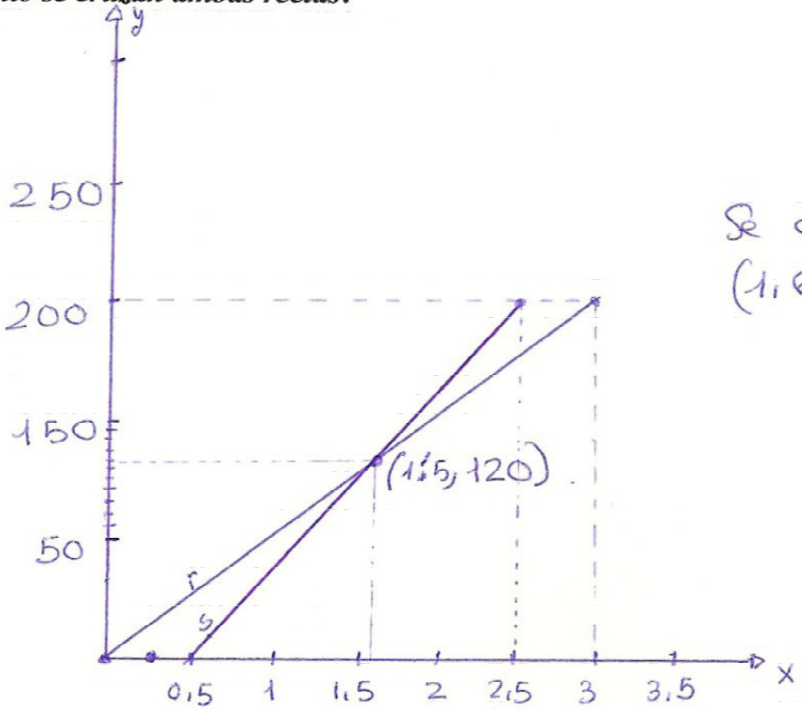
$$34 - 20y + 40y = 58$$

$$20y = 24$$

$$\boxed{y = 1{,}2}$$

Los números son 0,5 y 1,2

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



Se cruzan en el punto (1,6, 120).

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 8

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

DATOS:
- ¿Nº?
- 2nº = 1'70
- 20nº + 40nº = 58.

x = nº
y = otro nº.

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1'70 \\ 20x+40y &= 58 \end{aligned}\right\} \quad x = 1'70 - y. = 1'70 - 0,4. = 1'3.$$

$20 \cdot 1'70 - y + 40y = 58.$

$34 - 20y + 40y = 58$

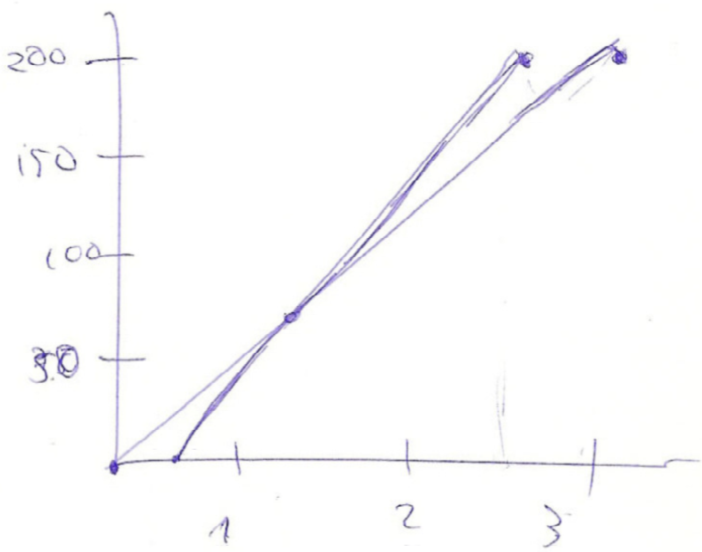
$34 - 60y = 58.$

$-60y = 24.$

$y = -0,4.$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1'3 \\ y &= 0,4 \end{aligned}}$$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



se cortan en el punto. (1,2; 75)

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 9

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

x= primer número

y= Segundo número

$x+y=1,70$

$20x+40y=58$

$x=1,70-y$

$20(1,70-y)+40y=58$

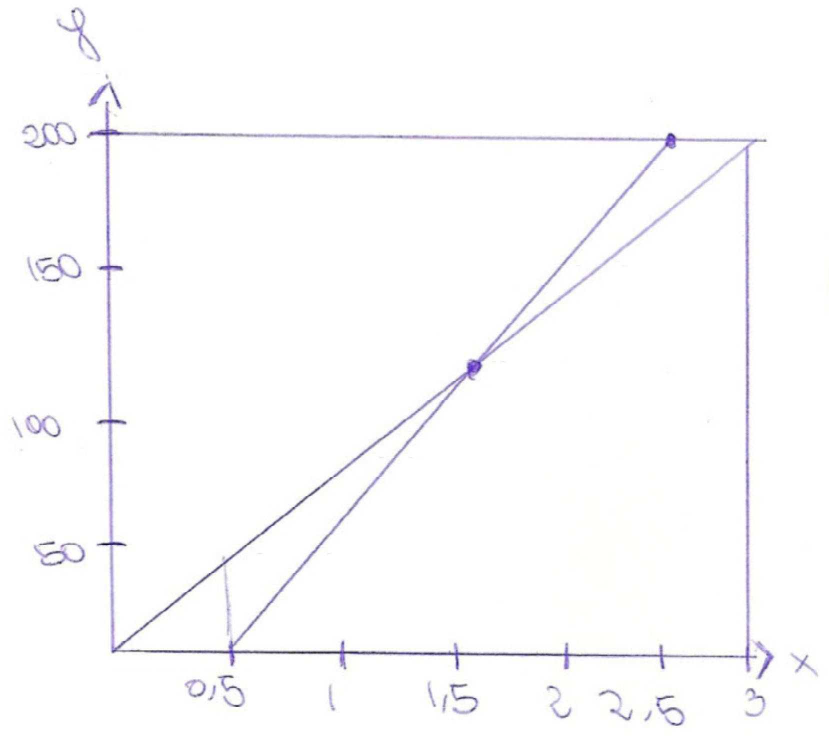
$34-20y+40y=58$

$20y=24$

$\boxed{y=1,2}$

$\boxed{\begin{array}{l} x=0,5 \\ y=1,2 \end{array}}$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



$(1,5,120)$

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 10

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

$$\begin{cases} x+y = 1'70 \\ 20x + 40y = 58 \end{cases}$$

$x = 1'70 - y \longrightarrow x = 1'70 - 1,4 = \boxed{0,3}$

$2(1'70 - y) + 40y = 58$

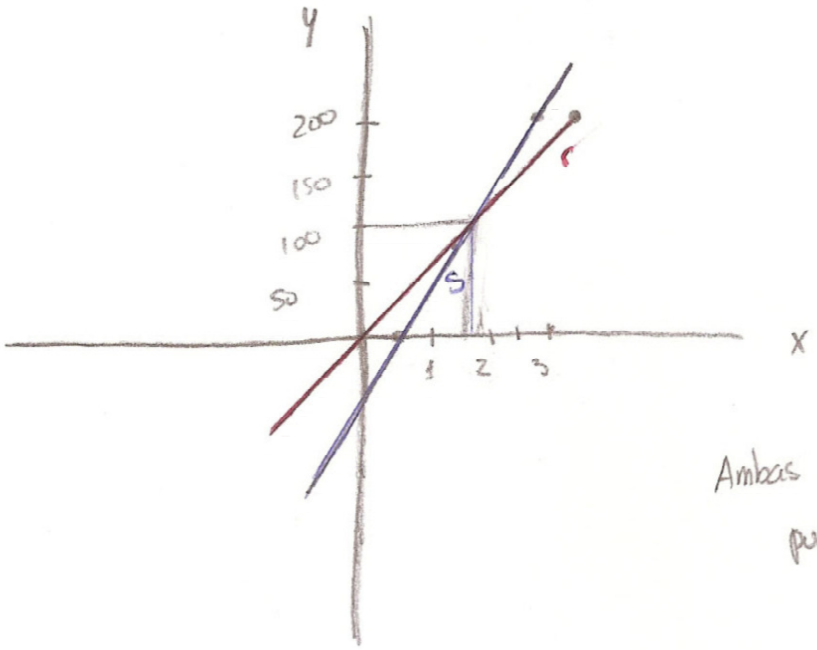
$3,4 - 2y + 40y = 58$

$-2y + 40y = 58 - 3,4$

$38y = 54,6$

$y = \dfrac{54,6}{38} = \boxed{1,4}$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



Ambas rectas se cruzan en el punto (1,75, 100)

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 11

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

$x = 1^{o}$ $y = 2^{o}$

$$\begin{cases} x + y = 1{,}70 \\ 20 \cdot x + 40 \cdot y = 58 \end{cases}$$

$x = 1{,}70 - y$

$20 \cdot (1{,}70 - y) + 40 \cdot y = 58$

$34 - 20y + 40y = 58$

$-20y + 40y = 58 - 34$

$20y = 24$

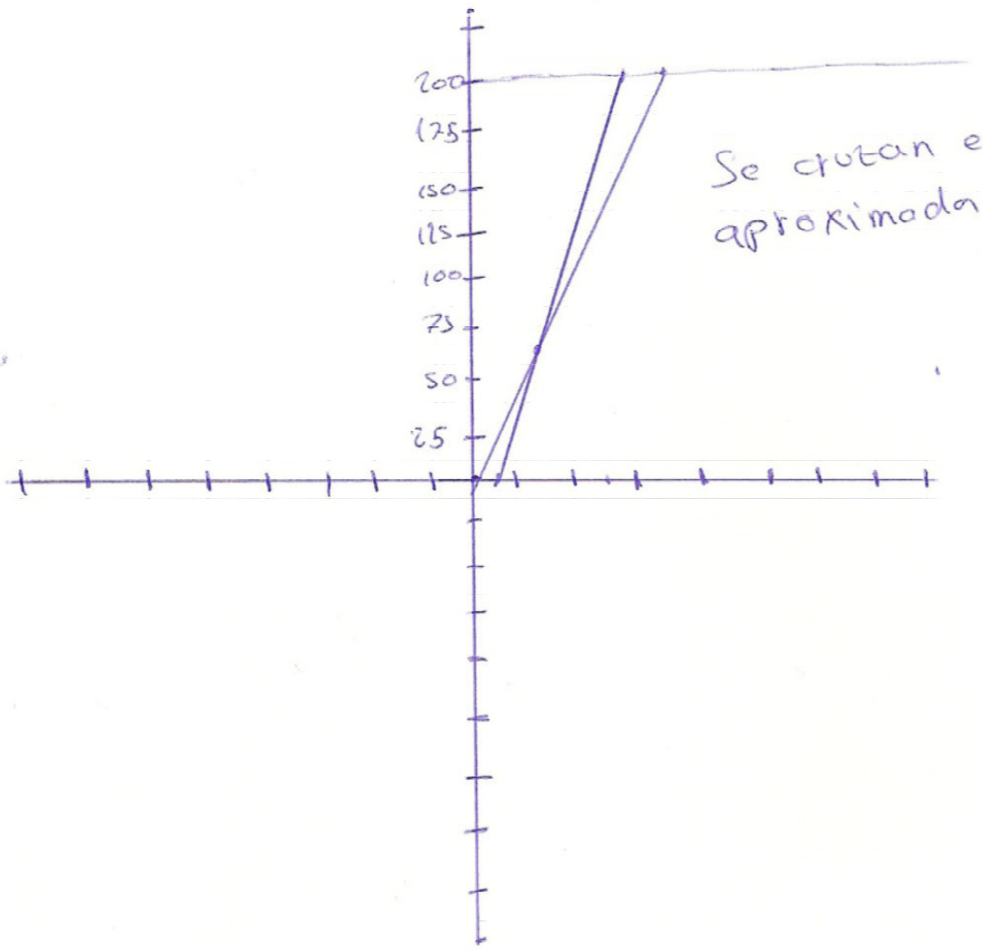
$y = \frac{24}{20} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$x = 1{,}70 - 1{,}2$

$x = 0{,}5$

$\boxed{y = 1{,}2}$ $\boxed{x = 0{,}5}$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



Se cruzan en el punto (1'5, 60) aproximadamente

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 12

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

$x+y=1'70$

$20x+40y=58$

$x=1'70-y$

$20(1'70-y)+40y=58$

$34-20y+40y=58$

$20y=58-34$

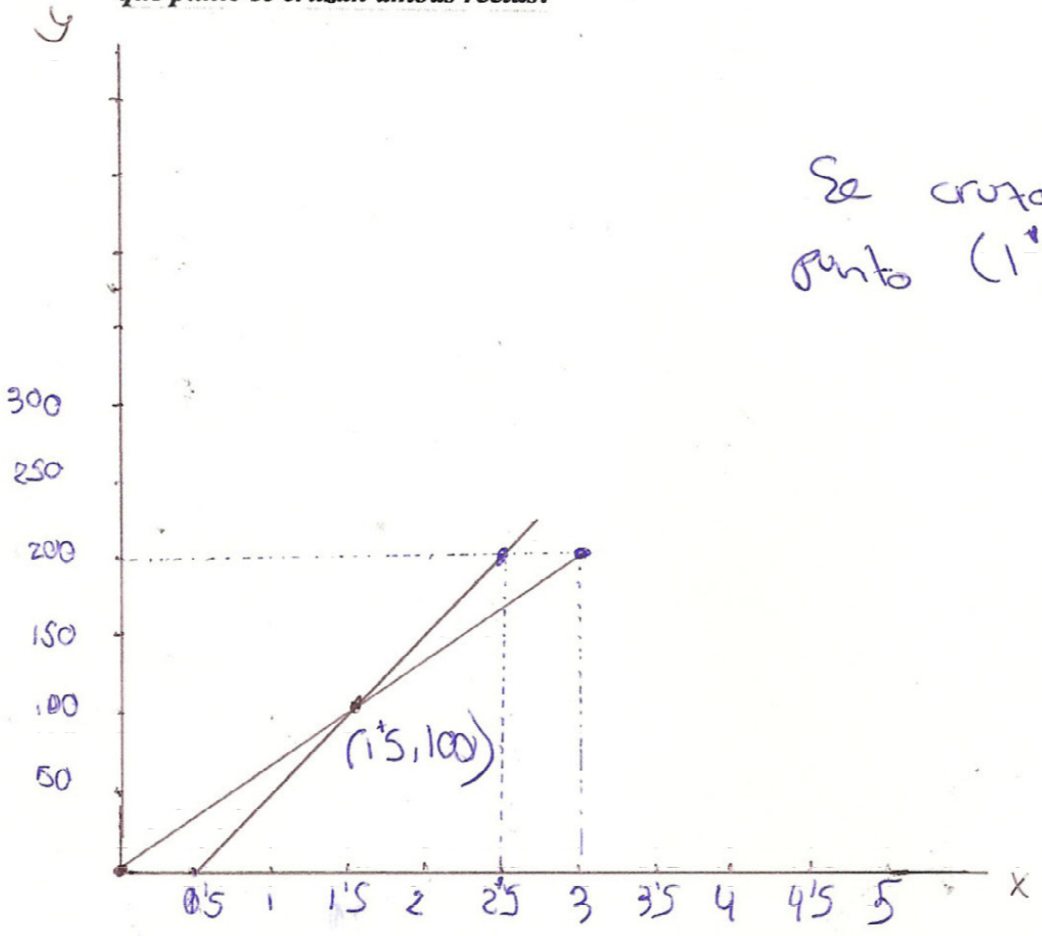
$y=\frac{24}{20}$

$\boxed{y=1'2}$

$x=1'70-1'2$

$\boxed{x=0'5}$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). *¿En qué punto se cruzan ambas rectas?*



Se cruzan en el punto (1'5,100)

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 13

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

$x + y = 1'70$ $\quad x = 1'70 - y \quad — \quad x = 1'70 - 1'20$

$20x + 40y = 58$

$20(1'70 - y) + 40y = 58$

$34 - 20y + 40y = 58$

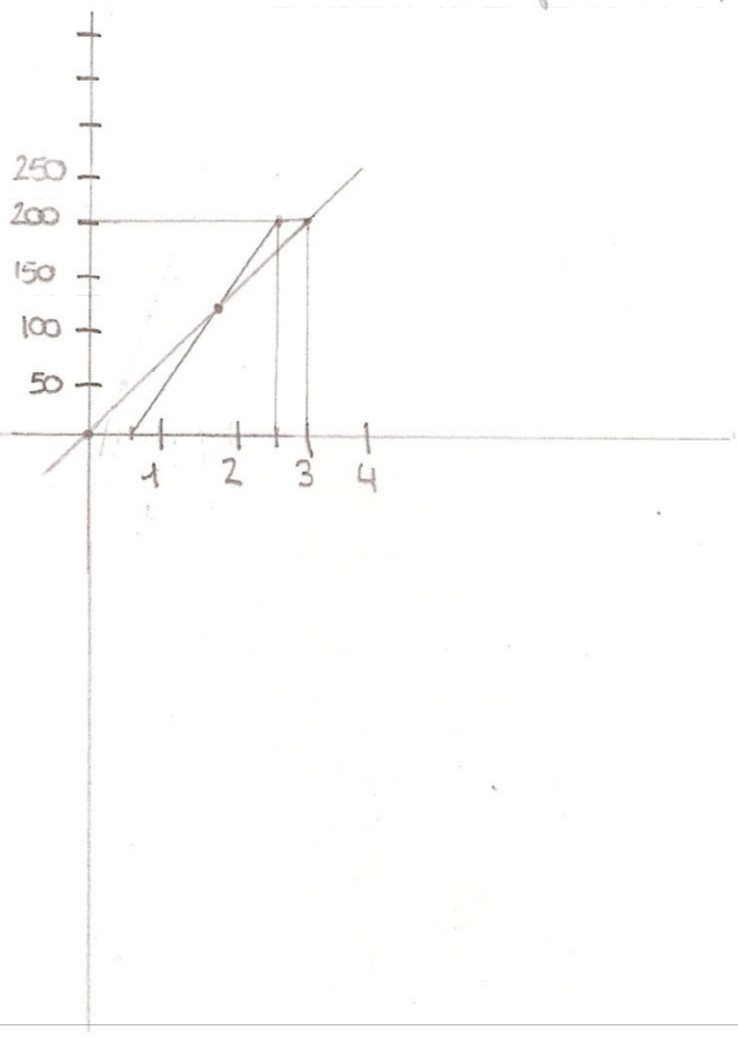
$20y = 24$

$y = \frac{24}{20} = \boxed{1'2}$

$x = \boxed{0'50}$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***

se cruzan en el punto $(1'8, 120)$



EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 14

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

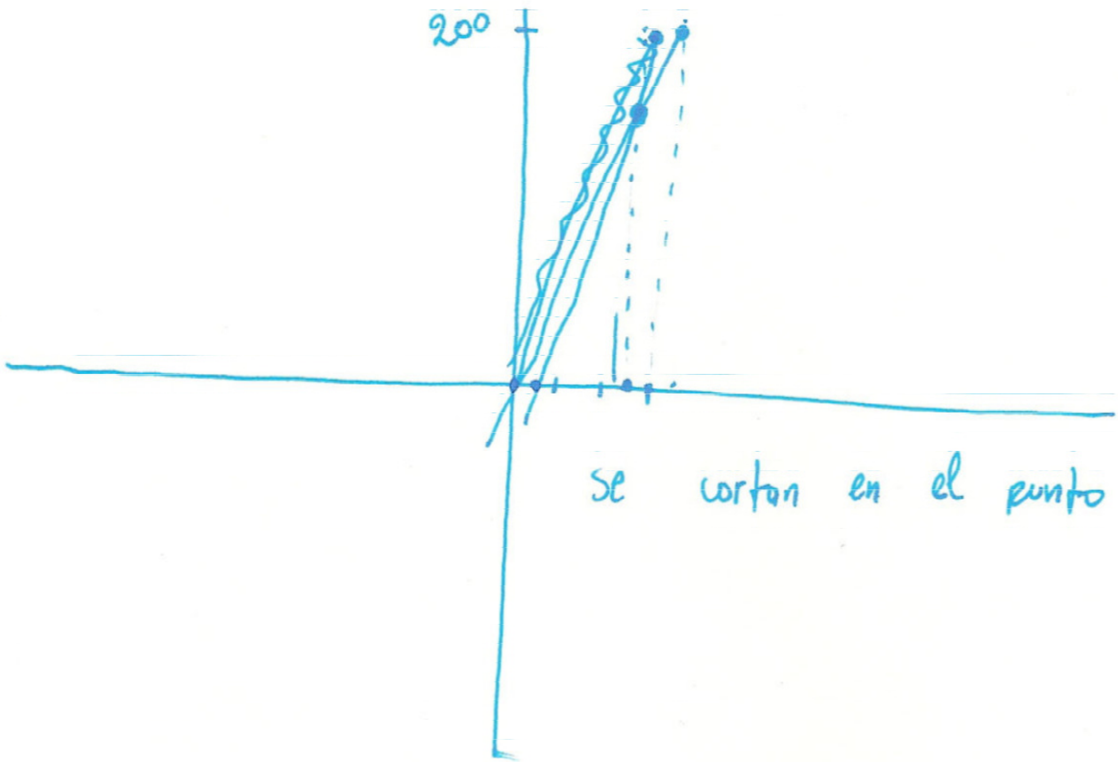
x: 1er número
y: 2do número

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1'70 \\ 20x+40y=58 \end{array}\right\} \quad x=1'70-y \rightarrow 1'70-1'2$$

$$x = \cancel{100'3}\ \ 0'5$$

$$20(1'70-y)+40y=58$$
$$34-20y+40y=58$$
$$20y=58-34$$
$$y=\frac{24}{20}=1'2$$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



se corton en el punto 2'2. aprox

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 15

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1'70 \\ x20+y40=58 \end{array}\right\} \quad x=1'70-y$$

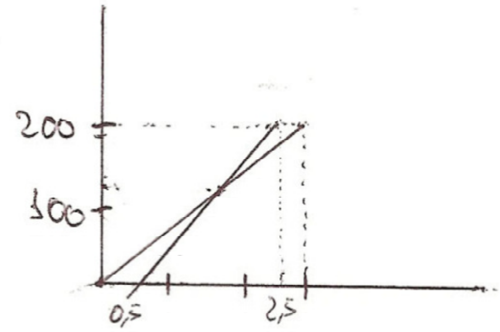
$$20(1'70-y)+y40=58$$

$$34-20y+40y=58$$

$$20y=24 \qquad x=1'70-1{,}2$$

$$y=\frac{24}{20}=1{,}2 \qquad x=0{,}5$$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



Coincide en el (1,5 , 150)

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 16

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

¿dos números?

La suma es 1,70

La suma de 20 veces el 1º más 40 del segundo es 58

$x =$ 1er número

$y =$ 2º número

$$\begin{cases} x + y = 1{,}70 \\ 20x + 40y = 58 \end{cases} \qquad x = 1{,}70 - y \qquad x = \frac{58 - 40y}{20}$$

$x = x$

$1{,}70 - y = \frac{58 - 40y}{20}$

$20(1{,}70 - y) = 58 - 40y$

$34 - 20y = 58 - 40y$

$-20y + 40y = 58 - 34$

$20y = 24 \qquad y = \frac{24}{20}$

$\boxed{y = 1{,}2}$

$x = 1{,}70 - 1{,}2$

$\boxed{x = 0{,}5}$

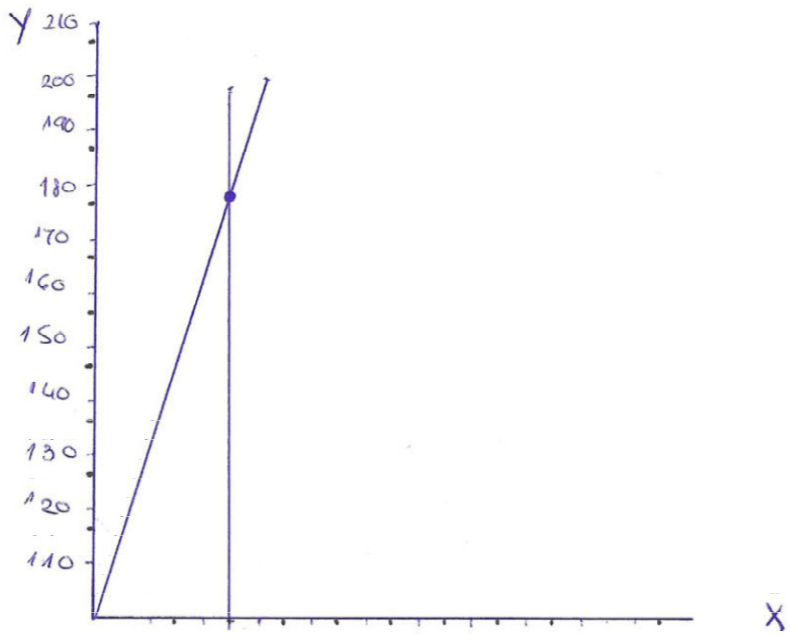
El 2º número es 1,2 y el 1º es 0,5.

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***

¿en qué punto se cruzan?

Recta r: pasa por el origen y el punto 200 respecto al punto 3 del eje x.

Recta s: corta al eje x en 0,5 y pasa por el punto (2,5, 200).



EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 17

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

¿que números son?

-2 números suman 1,70

- 20 veces el 1º, 40 veces el 2º es 58.

x= 1º número

y=2º número

$$\begin{cases} x+y=1{,}70 \rightarrow x=1{,}70-y \\ 20x+40y=58 \end{cases}$$

$20(1{,}70-y)+40y=58$

$34-20y+40y=58$

$-20y+40y=58-34$

$20y=24$

$\boxed{y\ 1{,}2}$

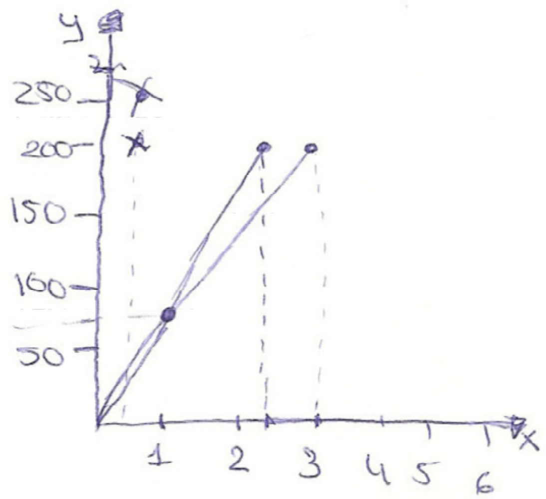
$1{,}70-1{,}2=$

$\boxed{x=0{,}5}$

1,2 es el 2º número

0,5 es el 1º número

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



* se encuentran en el metro 70 y el Punto 1

• ¿Punto se encuentran?

2 rectas: "r y s"

Recta r = Altura 200 y eje x 3

Recta s = Punto (2,5,200)

EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 18

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

¿Cuáles son esos números?

- Suma dos numeros es 1'70
- Suma de 20veces el primero más 40 veces el sejundo es 58

$$\begin{cases} x + y = 1'70 \quad x = 1'70 - y \\ 20x + 40y = 58 \end{cases}$$

$$20(1'70 - y) + 40y = 58$$

$$34 - 20y + 40y = 58$$

$$20y = 24$$

$$\boxed{y = 1{,}2}$$

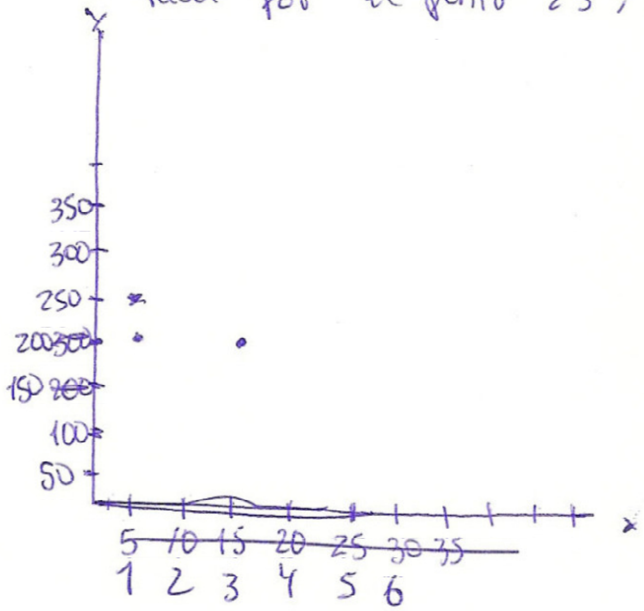
$$x = 1'70 - 1{,}2$$

$$\boxed{x = 0{,}5}$$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***

¿Punto se cruzan ambas rectas?

- Recta r pasa por un punto situado a una altura de 200
- Respecto al punto 3 del eje x
- recta s corta al eje x en 0,5
- Pasa por el punto 2'5 , 200.



EJERCICIO INDIVIDUAL **22/04/13**

ALUMNO 19

La suma de dos números es 1´70, mientras que la suma de veinte veces el primero más cuarenta veces el segundo es 58. ¿Cuáles son esos números?

x = un nº
y = otro nº } = 1'70

Sustitución

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1'70 \\ 20x + 40y &= 58 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 1'70 - y$$

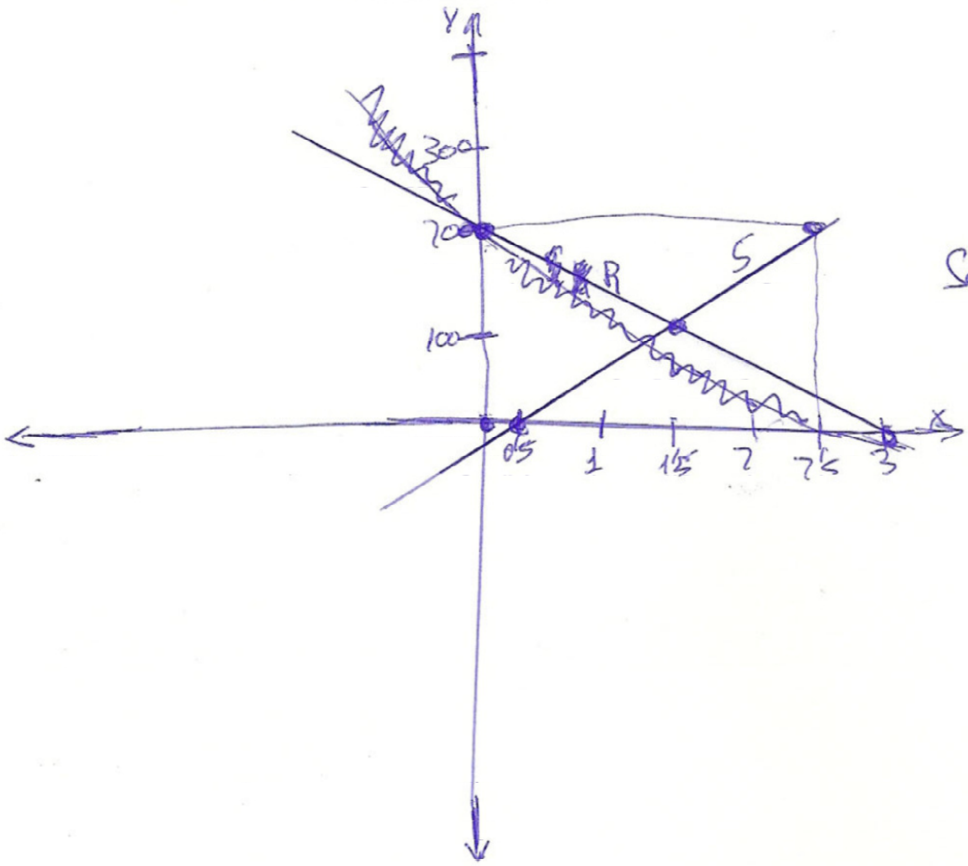
↓

$20 \cdot (1'70 - y) + 40y = 58$

$34 - 20y + 40y = 58$

$20y = 24$ $\boxed{y = 1,2}$ $\boxed{x = 0'5}$

La recta *r* pasa por el origen de coordenadas y por otro punto situado a una altura de 200 respecto al punto 3 del *eje x*. La recta *s* corta al *eje x* en 0.5 y pasa por el punto (2'5, 200). ***¿En qué punto se cruzan ambas rectas?***



Se cortan en (1'5, 100)