Grado en Economía
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Cantabria

Métodos matemáticos de optimización aplicados al problema del transporte

Mathematical optimization methods applied to the transport problem.

Autor: Lara Vélez Riancho
Director del TFG: Patricia Gómez García
Julio 2022

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE TABLAS EN ANEXOS

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es llevar cabo un estudio del método Simplex para el caso particular del problema del transporte. Para ello, se formula un ejemplo aplicado al tráfico aéreo nacional, donde se detalla la elaboración de la función objetivo, junto con las restricciones, variables y demás componentes del problema. Como introducción se muestra brevemente el origen de la investigación de operaciones. A continuación, se describen las características principales de la programación lineal como modelo matemático que representa el problema. Se muestra el método Simplex como procedimiento general para resolver problemas de programación lineal y se presenta su análisis teórico. Se describe lo que en investigación de operaciones se denomina *problema del transporte* con el cual poder definir nuestro ejemplo de estudio, y se mostrará cómo resolverlo a través del método Simplex de transporte. Asimismo, se incluirán anexos con la recolección de tablas de datos de nuestro problema y la descripción de los métodos de cálculo de los mismos para una mejor comprensión. Una vez validado el método Simplex de transporte, para finalizar, se aportan las conclusiones que argumentan y demuestran la importancia del método analizados, en la toma de decisiones.

ABSTRACT

The main objective of this paper is to present a study of the Simplex method for the case of the transport problem. For this, an example applied to national air traffic is formulated; where the elaboration of the objective function is detailed, together with the restrictions, variables and other components of the problem. This study is presented as an introduction to briefly show the origin of operations research. Next, the main characteristics of linear programming are described as a mathematical model that represents the problem. The Simplex method is shown as a general procedure to solve linear programming problems and its theoretical analysis is presented. What is called in operations research is described: 'transport problem' with which to define our study problem and it will be shown how to solve it through the Simplex transport method. Likewise, annexes will be included with the collection of data tables of our problem and description of the calculation methods of the same for a better understanding. Once the Simplex method of transport has been validated. Finally, the conclusions that argue and demonstrate the importance of the analyzed method in decision making are provided.

1. INTRODUCCIÓN

La *investigación de operaciones* es una técnica cuyo objetivo es resolver problemas de toma de decisiones sobre la operativa de una organización o entidad. Aplica métodos analíticos avanzados y el método científico para ayudar a seleccionar la mejor decisión posible.

El objetivo de una organización es maximizar su rendimiento global con unos recursos limitados. En este contexto, la investigación de operaciones surge con el fin de resolver el problema de la asignación de los recursos disponibles de forma eficaz a las diferentes actividades de dichas organizaciones.

Debido a la complejidad de los distintos tipos de organizaciones y de los objetivos propuestos, la investigación de operaciones necesita de cálculos complejos. Por tanto, busca aplicar el método científico para resolver estas asignaciones de recursos y la maximización de beneficios (Cobo Ortega, 1995).

2. EVOLUCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

El origen de la investigación de operaciones se sitúa en la Segunda Guerra Mundial, debido a que los gobiernos contaban con recursos bélicos limitados para la multitud de objetivos y maniobras militares a ejecutar. Por tanto, se encontraron con el problema de decidir qué operaciones debían realizar.

Finalizada la guerra, llegó la explosión industrial, que provocó un aumento considerable del tamaño y complejidad de las organizaciones y complicó su gestión. Dado el éxito de la investigación de operaciones en el ámbito militar, se decidió aplicar el método al sistema de toma de decisiones en las organizaciones. Concretamente en 1947, es cuando surge el *método Simplex* para resolver problemas de programación lineal, gracias a George B. Dantzig. (Hillier y Lieberman, 2015).

3. PROCESO DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

El proceso comienza por la observación minuciosa de la organización y la formulación del problema. Con estos datos se crea un modelo científico matemático. Se parte de la hipótesis de que el modelo será una representación precisa del problema real, que permitirá que las conclusiones obtenidas sean válidas. Una vez optimizado el modelo matemático, se llevarán a cabo los experimentos necesarios para validar el modelo.

La investigación de operaciones siempre intenta buscar una mejor solución para el problema en cuestión, la cual se denomina *solución óptima*. Se habla de una mejor solución y no la mejor solución dado que es posible que existan muchas soluciones que puedan considerarse como las mejores.

Los componentes principales del modelo de investigación operativa son: las variables de decisión, las restricciones y un criterio objetivo para elegir una mejor solución. El resultado final es un modelo matemático en el cual se relacionan las variables con las restricciones y la función objetivo. Para dar solución a este modelo se ha de obtener el valor de las variables de decisión que optimizan el valor de la función objetivo y que cumplen el conjunto de restricciones. Así se obtiene la posible solución óptima.

4. PROGRAMACIÓN LINEAL

La *programación lineal* (PL) es una de las técnicas de modelización y resolución de problemas más empleadas en la investigación operativa. En un programa lineal, la función objetivo y las restricciones son lineales (Cobo Ortega, 1995):

$$Función\ objetivo:\ Maximizar:\ z = f(x)\quad Minimizar: z = f(x)$$

$$Restricciones:\ \ g_i(x) \geq b_i\quad g_i(x) \leq b_i\ g_i(x) = b_i$$

$$i = 1, \ldots, m\ siendo\ g_i\ una\ función\ lineal\ en\ x$$

En consecuencia, un problema de Programación Lineal puede escribirse de la siguiente forma (Cánovas, Huertas y Sempere, 2010, p. 173):

$$\begin{aligned} &(PL)\ Min\ f(x) = c'x \\ &s.a\ a'_j x \leq b_j\ , j\ \in D \\ &a'_i x\ =\ b_i, i\ \in I \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Donde $D, I\ \in N,\ D \cap I = \emptyset,\ |D| <\ \infty, |I| < \infty\ , c, a_k \in R^n\ , b_k \in R\ k \in D \cup I$

$c: vector\ de\ coeficientes\ de\ la\ funcion\ objetivo$

$a: vector\ de\ coeficientes\ de\ la\ restricción$

El *conjunto factible* del programa lineal es (Cánovas, Huertas y Sempere, 2010):

$$F = \left\{x \in R^n \middle| a'_j x \leq b_j,\ j \in D, a'_i x = b_i, i \in I \right\}$$

Teniendo en cuenta la definición de un semiespacio y un hiperplano (Cánovas, Huertas y Sempere, 2010):

Semiespacio:

$$S = \{x \in R^n | c^t x \leq x\alpha\ ;\ \alpha \epsilon R, c^t \epsilon R^n, c^t \neq 0\}\ S.Inferior$$

$$S = \{x \in R^n | c^t x \geq x\alpha\ ;\ \alpha \epsilon R, c^t \epsilon R^n, c^t \neq 0\}\ S.Superior$$

Hiperplano:

$$H = \{x \in R^n | c^t x = \alpha\ ;\ \alpha \epsilon R, c^t \epsilon R^n, c^t \neq 0\}$$

Podemos observar que, en la Programación Lineal, el conjunto factible resulta ser la intersección de semiespacios cerrados, determinados por hiperplanos, ambos conjuntos convexos (Cánovas, Huertas y Sempere, 2010):

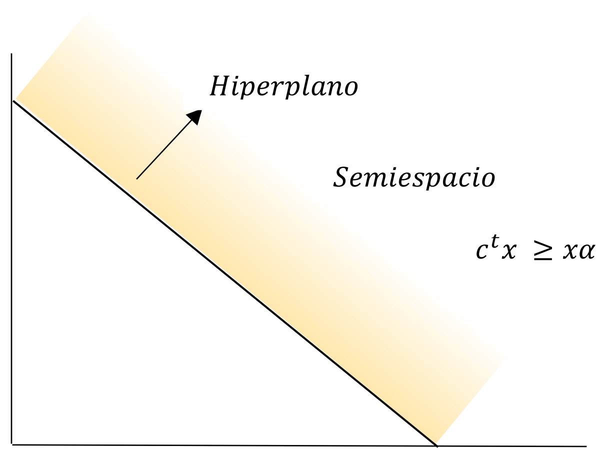

Figura 5.1. Conjunto factible
(Cánovas , María Josefa; Huertas, Víctor; Sempere, María, 2010)

Los programas lineales tienen las siguientes propiedades (Cobo, 1995):

a) La región factible es la intersección de semiespacios e hiperplanos. Para que exista solución, dicha región debe estar acotada.
b) “Todo programa lineal es un programa convexo, con lo cual, todo optimo es global” (Cobo, 1995, p. 189). Además, el óptimo, u óptimos, se alcanzan en la frontera de la región factible.
c) El óptimo, si existe, se alcanza, al menos, en un vértice de la región factible.
d) La solución no siempre es única. Pero si existen varios puntos solución, también lo es cualquier combinación lineal convexa.

5. REPRESENTACIÓN MATRICIAL Y ESTÁNDAR DEL PROGRAMA LINEAL

Cobo (1995) establece la *formulación estándar* de un programa lineal:

$$\begin{cases} Min\, c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2, \dots, n$$

donde se supone que el número de variables es mayor o igual que el número de restricciones de igualdad $(n \geq m)$ y, sin perdida de generalidad, $b_i \geq 0$ para todo $i = 1,2, \dots, m$.

A partir de esta expresión podemos deducir los siguientes elementos:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y establecer la *formulación estándar matricial*:

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Todo programa lineal puede expresarse en la forma estándar. Para ello hay que efectuar los siguientes cambios (Cobo, 1995):

1) Si se trata de maximizar una función, se minimiza la opuesta. En el caso de que la función objetivo sea esta:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + d$$

alcanza el mínimo en el mismo punto que la función:

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

La única diferencia estará en el valor que toma cada función en este punto:

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) + d$$

2) Las restricciones de desigualdad se transforman en igualdad, introduciendo nuevas variables, las *variables de holgura* (Cobo Ortega, 1995):

$$\text{Si } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \text{ existe } y \geq 0 \text{ tal que:}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y = b_i$$

$$\text{O, si } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \text{ existe } y \geq 0 \text{ tal que:}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - y = b_i$$

3) En el caso de que alguna de las variables x_i del problema no cumpliera la condición de no negatividad, se sustituiría por la diferencia de dos variables no negativas:

$$x_i = y_i - z_i \text{ donde } y_i, z_i \geq 0$$

4) Por último, se multiplicaría por el valor -1 la correspondiente ecuación de la restricción con el fin de garantizar:

$$b_i \geq 0 \;\; i = 1,2,\ldots;m.$$

Una vez realizadas estas transformaciones, tendremos dos tipos de variables:

- *Variables naturales* o propias del programa.
- *Variables de holgura*.

De este modo, se tiene como resultado un Programa Lineal de forma estándar con las siguientes características:

1) Se minimiza una función lineal homogénea.
2) Todas las restricciones del problema son restricciones de igualdad con término independiente mayor o igual a 0.
3) Sus variables de decisión solo pueden tomar valores no negativos.

6. SOLUCIÓN BÁSICA DEL PROGRAMA LINEAL

Tomamos como referencia el programa lineal en forma matricial estándar (Cobo Ortega, 1995):

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

donde "A es una matriz de m filas (restricciones) y n columnas (variables), siendo $n \geq m$". (Cobo Ortega, 1995, p. 197). La razón de que $n \geq m$, es que normalmente, las restricciones que están expresadas como desigualdad pasen a formularse como igualdad introduciendo variables de holgura.

Se supondrá que la matriz A tiene rango *m*, lo que establece que cualquier submatriz de A de *m* columnas tenga determinante no nulo. Además, con ese rango, no habrá restricciones redundantes o contradictorias.

Toda submatriz de A formada por *m* columnas y con determinante no nulo, se denomina *matriz básica*.

La importancia de la matriz básica está en que es ésta la que origina lo que se conoce como solución *básica.*

El procedimiento de obtención de la solución básica se describe en Cobo (1995). Se considera B una matriz básica de A, formada por las primeras *m* columnas de A. Tenemos, entonces:

$$A = (B|D)$$

$$A \in M_{mxn} \qquad B \in M_{mxm} \qquad D \in M_{mx(n-m)}$$

Del mismo modo, las variables de decisión también pueden dividirse y expresarse como:

$$x = \binom{x_B}{x_D}, x_B \in R^m, x_D \in R^{n-m}$$

- Las *m* variables del vector x_B se denominan *variables básicas* y corresponden a las columnas de la matriz básica.
- Las *n-m* variables restantes, x_D, son las *variables no básicas*.

Las soluciones factibles cumplen:

$$Ax = b \rightarrow (B|D)\begin{pmatrix} x_B \\ x_D \end{pmatrix} = Bx_B + Dx_D = b$$

$$x_B = B^{-1}b + B^{-1}Dx_D$$

Si $x_D = 0$

$$x_B = B^{-1}b$$

Se obtiene la *solución básica:*

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución básica puede ser:

1. *Factible*, cuando $x_B \geq 0$, todas las variables básicas son positivas o nulas.
2. *Infactible*: alguna variable básica es negativa.

Y:

1. *Degenerada*: alguna de las variables básicas es nula.
2. *No degenerada:* todas las variables básicas son estrictamente positivas.

El número máximo de soluciones básicas es (Cobo Ortega, 1995):

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Cobo (1995, p. 203), a través de la demostración del siguiente teorema:

$$Las\ soluciones\ básicas\ factibles\ del\ programa\ lineal:$$

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$se\ corresponden\ con\ los\ vértices\ de\ la\ region\ factible\ dada\ por\ restricciones$$

Prueba que toda solución básica factible es un vértice y que todo vértice es una solución básica factible. Lo que nos lleva al *Teorema fundamental de la programación lineal* (Cobo, 1995, p. 206): “Dado un programa lineal en forma estándar, si existe solución óptima, ésta se alcanza al menos sobre una de las soluciones básicas factibles.”

7. EL MÉTODO SIMPLEX

En este apartado, se enuncia el procedimiento de resolución denominado *Método Simplex*. En este método, se parte de una solución básica factible y nos desplazaremos por soluciones básicas adyacentes que mejoren, o al menos no empeoren el valor de la función objetivo. Este mismo procedimiento, será, el que con ciertas y necesarias modificaciones se utilizará como base para solucionar nuestro modelo de transporte. (Hillier y Lieberman, 2015)

Como se indica en el apartado anterior, es propiedad de todo programa lineal alcanzar el óptimo en una de sus soluciones básicas factibles, siendo finito el número de estas. Por lo que~~,~~ un método básico de resolución de un programa lineal es el cálculo y recopilación de todas las soluciones básicas factibles, para escoger aquella que minimice la función objetivo.

Este método se complica enormemente cuando se quiere trabajar con problemas con gran cantidad de variables.

Como remedio a esto, en 1947 George. B. Dantzing, conceptualiza uno de los métodos más comunes y conocidos para resolver problemas de programación lineal, el método Simplex.

Se basa en la idea principal de encontrar la solución óptima sin necesidad de calcular todas las soluciones básicas factibles. En Cobo (1995) se describen los pasos a seguir:

- **Paso 1.** Se parte de una solución básica factible inicial.
- **Paso 2.** Conocer si esa solución básica factible es óptima.
- **Paso 3.** Si la solución básica factible no es óptima, encontrar otra solución que haga que el valor de la función objetivo disminuya o no aumente.
- **Paso 4.** Repetir el proceso anterior hasta encontrar una solución básica factible óptima.

Son necesarios (Cobo, 1995):

a) Un *test de optimalidad*, con el cual poder reconocer cuando una solución básica factible es óptima.

b) Un sistema de paso de una solución a otra, que mejore el valor de la función objetivo.

7.1. TEST DE OPTIMALIDAD

Cobo (1995) describe el test de optimalidad empleado en nuestro método Simplex. Consideramos nuestro programa lineal expresado en su forma estándar matricial:

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Si tenemos una solución básica factible:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix} \; x_B \geq 0$$

con matriz de base asociada B y el vector:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_D \end{pmatrix} \;\; x_D \geq 0$$

para que este vector sea factible debe cumplir:

$$Ax = b \;\; \rightarrow \; Bx_B + Dx_D = b$$

Por lo que entonces se puede obtener:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D$$

donde D es la submatriz de A obtenida al eliminar las columnas de la matriz base. A partir de esta expresión se puede calcular el valor de la función objetivo en el punto x:

$$\begin{aligned} cx = c_B x_B + c_D x_D = c_B(B^{-1}b - B^{-1}Dx_D) + c_D x_D = \\ = c_B B^{-1}b + (c_D - c_B B^{-1}D)x_D \end{aligned} \qquad (1.2)$$

donde c_B y c_D son los dos componentes del vector c según la distinción entre variables básicas y no básicas. En esta expresión se aprecian dos sumandos:

a. $c_B B^{-1}b$: valor de la función objetivo en la solución básica inicial.
b. $(c_D - c_B B^{-1}D)x_D$: refleja el aumento o disminución que manifiesta la función objetivo al modificar las variables no básicas. Si el valor disminuye, la solución básica inicial no es óptima.

En conclusión, tomando el vector en relación con la expresión (1.2):

$$r = \; c_D - c_B B^{-1}D$$

- Si alguna de los componentes de r es negativa, el punto $(x_B, 0)$ no es óptimo, pues para valores positivos de la componente x_D, se disminuye el valor de la función objetivo.
- Si todos los componentes de r son positivos, con $x_D = 0$ se obtiene el óptimo, pues cualquier valor positivo que tomen las componentes de x_B hace aumentar el valor de la función objetivo.

Por lo cual, se obtiene el siguiente teorema (Cobo, 1995, p. 209):

$$\textit{Una solucion básica factible es óptima si y solo si}:$$

$$r = c_D - c_B B^{-1} D \geq 0$$

donde *r* se conoce como *vector de costes reducidos*.

7.2. CAMBIO DE SOLUCIÓN BÁSICA

El método Simplex pasa de una solución básica a otra mejorando el valor de la función objetivo. Esto se lleva a cabo anulando una de las variables básicas, y transformando una de las variables no básica en básica, adquiriendo valor positivo Consideramos de nuevo:

$$r = c_D - c_B B^{-1} D$$

$$cx = c_B B^{-1} b + (c_D - c_B B^{-1} D) x_D$$

7.2.1. Variable que pasa a ser básica

Si uno de los componentes de r es negativo, el valor óptimo puede mejorarse incluyendo como variable básica la correspondiente variable no básica de x_D. Sin embargo, cuando son varios los componentes de r que son negativos, se debe elegir el de mayor valor absoluto e incorporar a la base la correspondiente variable no básica. (Cobo, 1995)

7.2.2. Valor que debe tomar dicha variable

Para determinar el valor de la nueva variable, primero se parte del supuesto de que $r_k < 0$ es la componente negativa de mayor valor absoluto del vector r. De este modo, se debe dar un valor positivo a la variable x_{Dk} para convertirla en básica. Para calcular ese valor se recurre a la expresión:

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} D x_D$$

Siendo entonces $x_{Dk} > 0$ y el resto de las variables no básicas permanecen con valor nulo:

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} D \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_{Dk} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} D_k x_{D_k}$$

Esta ecuación puede expresarse más abreviadamente de la siguiente forma (Cobo, 1995), siendo y_i las m componentes que forman el vector $B^{-1}D_k$:

$$\begin{pmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B^{-1}b)_1 \\ (B^{-1}b)_2 \\ \vdots \\ (B^{-1}b)_{\mathrm{m}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} x_{Dk}$$

- Si $y_i \leq 0$, al aumentar el valor de x_{Dk} también aumenta x_{Bi}, y en consecuencia la variable x_{Bi} no llega anularse nunca dando valores positivos a x_{Dk}.
- Si $y_i > 0$, x_{Bi} decrece hasta anularse al dar valores positivos cada vez mayores a la variable x_{Dk}. Concretamente, para anular x_{Bi}, x_{Dk} debería tomar el valor (Cobo, 1995):
-

$$x_{Dk} = \frac{(B^{-1}b)_i}{y_i}$$

- x_{Dk} tomará el primer valor que haga que una de las variables básicas se anule (Cobo, 1995):

$$x_{Dk} = \min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{y_i} \middle| y_i > 0\right\} = \frac{(B^{-1}b)_r}{y_r}$$

La variable x_{Br} deja de ser básica.

En caso de no existir ninguna componente $y_i > 0$, el programa lineal no tiene solución óptima finita. La solución básica no es óptima y no puede encontrarse otra alternativa que mejore el valor de la función objetivo del problema.

Sin embargo, en caso de existir una componente $y_i > 0$, con el procedimiento antes enunciado se obtiene una nueva solución básica factible. Es óptima si supera el test de optimalidad. Si no, supone una mejora del valor de la función objetivo y nos acercamos a la solución óptima.

Si la solución básica no es óptima, se procede a repetir el proceso de sustitución y mejora. En un número finito de pasos se alcanza el óptimo, si existe. (Cobo Ortega, 1995).

En la siguiente figura se muestra la representación esquemática del algoritmo Simplex:

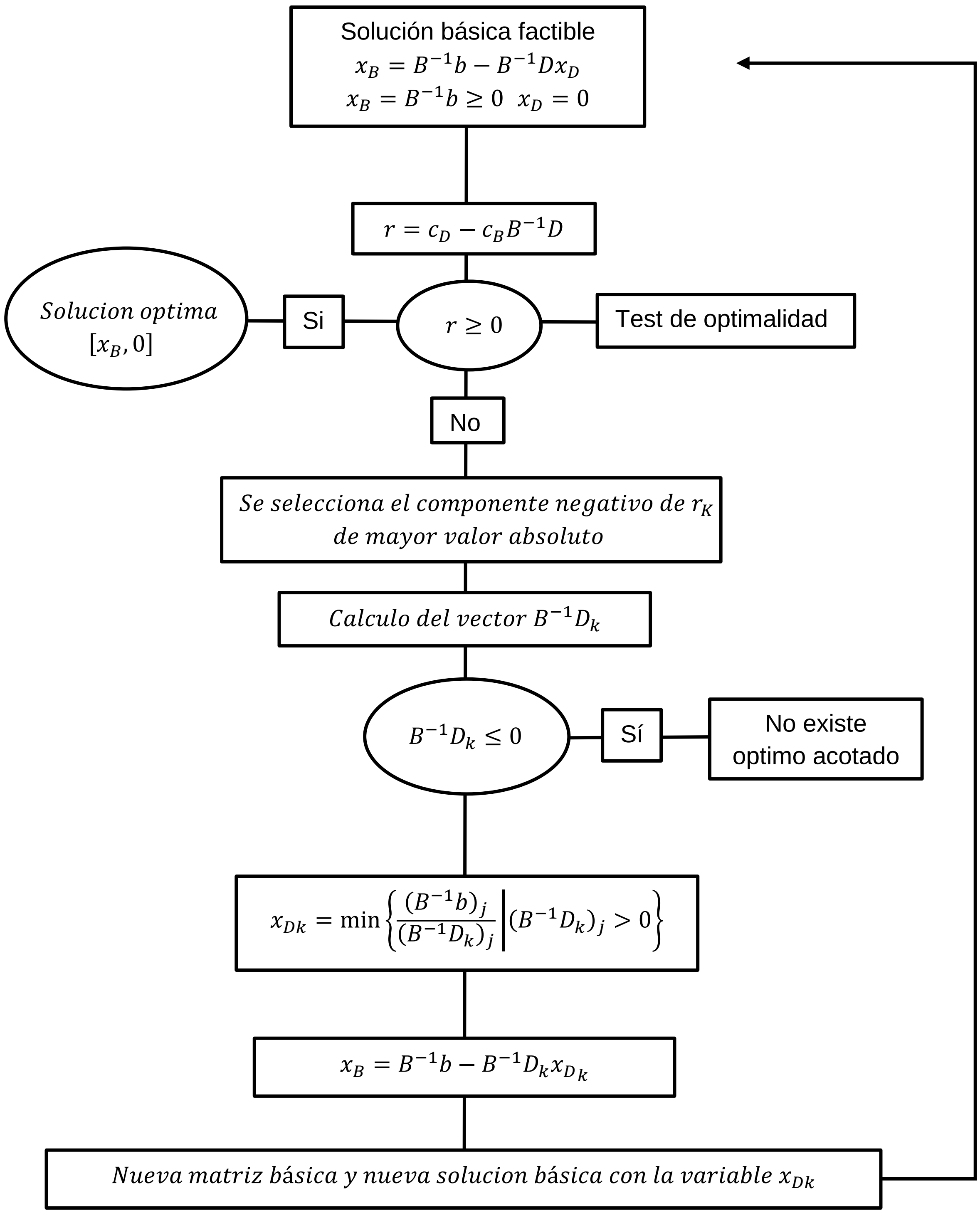

Figura 7.1. Representación esquemática del algoritmo Simplex (Cobo Ortega, 1995, p. 213)

8. EL MODELO DEL TRANSPORTE

Uno de los modelos de mayor importancia dentro de la investigación de operaciones es el *problema del transporte*. Este problema es planteado por Hitckcock y Koopmans (1947), para ser tratado posteriormente por George B. Dantzig (1963).

En este informe (Dantzig, August 1963, p. 300) se presenta el modelo como un programa lineal que representa el envío desde *m* orígenes de un producto homogéneo que debe ser puesto a disposición en *n* destinos. Así, el origen i debe poner a disposición o enviar la cantidad exacta de producto b_i, mientras que el destino *j* debe recibir la cantidad exacta de producto a_j. Además, asume que la demanda total es igual a la oferta total:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$$

Por lo tanto, la oferta y la demanda están en equilibrio y la función objetivo es lineal con parámetro conocido c_{ij}, que expresa el coste de envío de x_{ij}, variable bidimensional que representa las unidades que se envían del origen i al destino j. Con esto, el problema consiste en determinar la cantidad exacta de producto que se envía desde el origen *i* al destino *j* de manera que la disponibilidad de oferta se agote y la demanda se satisfaga, todo a un coste mínimo (Dantzig, agosto 1963, p. 302; Hillier y Lieberman, 2015, p. 293).

Los autores Hillier y Lieberman (2015, p. 304) muestran el método Simplex mejorado para solucionar el problema del transporte. Se describe el problema del transporte como un tipo especial de programación lineal que puede resolverse realizando ciertas variaciones, a través del método Simplex antes descrito; y se expone el procedimiento para dar con el resultado. A continuación, lo aplicaremos a un caso particular.

9. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Para nuestro análisis, se han tomado los vuelos del tráfico aéreo entre los 7 aeropuertos nacionales con más actividad e interés dentro del espacio aéreo nacional: Madrid, Barcelona, Palma de Mallorca, Málaga, Tenerife, Ibiza y Lanzarote para la aerolínea Air Europa.

El objetivo es poder determinar el número de vuelos de salida de cada aeropuerto, que deben ofrecerse el año próximo, a fin conseguir el beneficio máximo de la compañía en los vuelos entre esos 7 aeropuertos, para la compañía seleccionada. Con este proceso se muestra cómo a través del método Simplex, se puede planificar el itinerario anual de la compañía.

Nuestro modelo se trata de una aplicación especial de la programación lineal, el denominado problema de transporte. Será estudiada, como mostraba George B. Dantzig, la distribución de un producto homogéneo, en nuestro caso los vuelos de salida, desde un conjunto de orígenes a un conjunto de destinos, de modo que se satisfagan las demandas de los destinos y las ofertas de los orígenes, no superándose las disponibilidades de estas. Todo a un máximo beneficio.

A continuación, se presenta la formulación general del modelo del transporte (Salas, 2017, p. 271):

$m = Número\ de\ orígenes$
$n = Número\ de\ destinos$
$b_i = Oferta\ del\ origen\ i\ (i = 1,2,3,\dots,m)$.
$a_j = Demanda\ del\ destino\ j\ (j = 1,2,3,\dots,n)$.
$c_{ij} = Coste\ unitario\ de\ transporte\ de\ una\ unidad\ del\ origen\ i$
$(i = 1,2,3,\dots,m)\ al\ destino\ j\ (j = 1,2,3,\dots,n)$.
$x_{ij} = Variable\ de\ decisión\ que\ muestra\ la\ cantidad\ enviada\ del\ origen\ i$

Consiste en determinar la cantidad, en nuestro caso de vuelos, que deben salir de m orígenes hasta n destinos. Donde, se conoce la oferta de cada origen y la demanda de cada destino. El objetivo es minimizar los costes totales de transporte creados por la cantidad enviada de cada origen a cada destino. Se expresa la formulación lineal de este modelo de forma generalizada de la siguiente manera (Salas, 2017):

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$Sujeto\ a$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq b_i, \qquad i = 1,\dots,m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq a_j, \qquad j = 1,\dots,n.$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,\dots,m.\ \ j = 1,\dots,n.$$

En este trabajo se ha planteado un problema de maximización de beneficios. Para poder trabajar este problema se hace necesario transformar la función objetivo en su opuesta. Los problemas son equivalentes, pues los puntos en el que la función alcanza un máximo son los mismos en el que su opuesta alcanza un mínimo (Hillier y Lieberman, 2015, p. 113):

$$Max\ f(x) = -Min\ [-f(x)]$$

$$Zmax = c_{ij}\ x_{ij} \quad equivale\ a\ minimizar \quad Zmin = -c_{ij}\ x_{ij}$$

$$sujetos\ al\ mismo\ conjunto\ de\ restricciones:$$

$$Zmax = -Zmin$$

Se enuncia la forma estándar del problema de transporte (Salas, 2017, p. 272):

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} -c_{ij}x_{ij}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i \quad , i = 1, \dots, m.\ \ j = 1, \dots, n.$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m.\ \ j = 1, \dots, n.$$

En los Anexos I, II, III se detallan los datos referentes a ingresos y costes por vuelo. En el Anexo IV se muestra la tabla con los beneficios totales por vuelo. En los Anexos V y VI se proporcionan los datos de disponibilidad y de demanda de cada aeropuerto.

Función objetivo:

$$-c_{ij}x_{ij}$$

$$= -\left(\overline{\begin{matrix}Precio\ medio\\ billete\end{matrix}}_{ij} \times Numero\ de\ asientos\ - \begin{matrix}Costes\ Fijos\\ Personal\end{matrix}_{ij} - Costes\ Trayecto_{ij}\right) \times\ x_{ij}$$

$$=$$

$$\overline{\begin{matrix}Precio\ medio\\ billete\ Business\end{matrix}}_{ij} \times 22 + \overline{\begin{matrix}Precio\ medio\\ billete\ Turista\end{matrix}}_{ij} \times 274$$

$$-\left(\overline{\begin{matrix}Coste\ Salarial\\ Primer\ Piloto\end{matrix}} + \overline{\begin{matrix}Coste\ Salarial\\ Segundo\ Piloto\end{matrix}} + 6\ \times\ \overline{Coste\ salarial\ TCP}\right)$$

$$-\left(\begin{matrix}Consumo\ de\\ combustible\end{matrix}_{ij} \times Precio\ Jet\ A\right)$$

$m = Número\ de\ origenes.$
$n = Número\ de\ destinos.$
$b_i = Oferta\ del\ origen.$
$a_j = Demanda\ del\ destino.$
$c_{ij} = Beneficio\ unitario\ del\ vuelo\ con\ origen\ i\ y\ destino\ j.$
$x_{ij} = Variable\ de\ decisión\ que\ denota\ la\ cantidad.$
$de\ vuelos\ con\ origen\ i\ y\ destino\ j.$

$$Número\ de\ origenes = m = 7$$

$$Números\ de\ destinos = n = 7$$

$$Oferta\ del\ origen = b_i = \begin{pmatrix} 16.919 \\ 3.204 \\ 10.447 \\ 1.854 \\ 4.928 \\ 2.875 \\ 1.289 \end{pmatrix}$$

$$Demanda\ del\ destino = a_j = \begin{pmatrix} 16.020 \\ 3.126 \\ 10.427 \\ 1.831 \\ 4.913 \\ 2.875 \\ 1.288 \end{pmatrix}$$

$$Beneficio\ unitario\ de\ transporte\ de\ una\ unidad\ del\ origen\ i\ al\ destino\ j =$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -13.659 & -12.790 & -6.873 & -3.781 & -11.833 & -4.643 \\ -16.475 & 0 & -14.917 & -11.156 & -6.272 & -13.574 & -10.802 \\ -11.466 & -15.365 & 0 & -8.649 & -1.901 & -11.273 & -24 \\ -7.484 & -6.024 & -5.038 & 0 & -2.692 & -5.760 & -3.876 \\ -6.727 & -5.246 & -3.971 & -2.563 & 0 & -746 & -4.306 \\ -14.371 & -16.786 & -12.233 & -7.414 & -1.143 & 0 & -1.228 \\ -3.965 & -3.342 & -626 & -3.750 & -3.850 & -4.427 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Variable\ de\ decision\ que\ denota\ la\ cantidad\ de\ vuelos\ de\ salida\ del\ origen\ i\ al\ destino\ j =$$

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} & X_{17} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} & X_{27} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} & X_{36} & X_{37} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{45} & X_{46} & X_{47} \\ X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} & X_{56} & X_{57} \\ X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & X_{66} & X_{67} \\ X_{71} & X_{72} & X_{73} & X_{74} & X_{75} & X_{76} & X_{77} \end{pmatrix}$$

Estos, serán los datos de partida (Salas, 2017, p. 272):

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{J=1}^{n} -c_{ij}x_{ij}$$

$Sujeto\ a$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m. \;\; j = 1, \dots, n.$$

Para garantizar la factibilidad de las soluciones obtenidas o poder resolver el problema a través del método Simplex para el problema del transporte, se han de verificar las siguientes hipótesis (Kyprianou, 2008):

1) Para que el problema de transporte tenga solución, es condición necesaria y suficiente que la oferta total sea igual a la demanda total:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_i$$

Si esto no se cumple, se agrega una fila (origen) ficticia o columna (destino) ficticia, de acuerdo con el caso concreto:

- Si el sumatorio de las demandas es mayor que el de las ofertas se genera un origen ficticio al cual se le asocia una oferta equivalente a
- $\sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i$.

- Si el sumatorio de las ofertas es mayor que el de las demandas se genera un destino ficticio al cual se le asocia una demanda igual a $\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j$.

2) Todo problema de transporte equilibrado tiene una solución factible básica y esta solución tiene $m + n - 1$ variables positivas como máximo.

Con estos datos, se puede calcular una estimación de las salidas de la compañía Air Europa.

El procedimiento, los pasos básicos y criterios para resolver el problema son semejantes a los indicados por el método Simplex. No obstante, en lugar de utilizar la tabla Simplex regular, se establece una estructura adecuada a la forma matricial del modelo para llevar a cabo los cálculos (Salas, 2017, p. 274):

		Destinos j							
		1	2	3	4	5	6	7	
Orígenes i		Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Oferta del origen b_j
1	Madrid Barajas	$-c_{11}$	$-c_{12}$	$-c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	$-c_{16}$	$-c_{17}$	b_1
		X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	
2	Barcelona El Prat	$-c_{21}$	$-c_{22}$	$-c_{23}$	$-c_{24}$	$-c_{25}$	$-c_{26}$	$-c_{27}$	b_2
		X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	
3	Palma de Mallorca	$-c_{31}$	$-c_{32}$	$-c_{33}$	$-c_{34}$	$-c_{35}$	$-c_{36}$	$-c_{37}$	b_3
		X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}	X_{37}	
4	Málaga	$-c_{41}$	$-c_{42}$	$-c_{43}$	$-c_{44}$	$-c_{45}$	$-c_{46}$	$-c_{47}$	b_4
		X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	X_{45}	X_{46}	X_{47}	
5	Tenerife	$-c_{51}$	$-c_{52}$	$-c_{53}$	$-c_{54}$	$-c_{55}$	$-c_{56}$	$-c_{57}$	b_5
		X_{51}	X_{52}	X_{53}	X_{54}	X_{55}	X_{56}	X_{57}	
6	Ibiza	$-c_{61}$	$-c_{62}$	$-c_{63}$	$-c_{64}$	$-c_{65}$	$-c_{66}$	$-c_{67}$	b_6
		X_{61}	X_{62}	X_{63}	X_{64}	X_{65}	X_{66}	X_{67}	
7	Lanzarote	$-c_{71}$	$-c_{72}$	$-c_{73}$	$-c_{74}$	$-c_{75}$	$-c_{76}$	$-c_{77}$	b_7
		X_{71}	X_{72}	X_{73}	X_{74}	X_{75}	X_{76}	X_{77}	
Demanda del destino a_i		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	

Tabla 10.1. Tabla del modelo general del problema de transporte.

En esta tabla aparecen reflejados:

- Los m orígenes, ordenados en sentido vertical en la primera columna. La oferta b_i , correspondiente a cada origen, en la última columna.
- Los n destinos ordenados en sentido horizontal en la primera fila. La demanda a_i ,correspondiente a cada destino, en la última fila.
- En el cuerpo de la tabla ocupando mxn celdas los valores -c_{ij}. Para facilidad y agilidad en la expresión se han incluido debajo de cada fila, una adicional, correspondiente al valor de cada variable de decisión x_{ij}.

Con esto, la tabla correspondiente a nuestro modelo es la siguiente:

		Destinos j							
		1	2	3	4	5	6	7	
Orígenes i		Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Oferta del origen
1	Madrid Barajas	0	-13.659	-12.790	-6.873	-3.781	-11.833	-4.643	16.191
		X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	
2	Barcelona El Prat	-16.475	0	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	-10.802	3.204
		X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	
3	Palma de Mallorca	-11.466	-15.365	0	-8.649	-1.901	-11.273	-24	10.447
		X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}	X_{37}	
4	Málaga	-7.484	-6.024	-5.038	0	-2.692	-5.760	-3.876	1.854
		X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	X_{45}	X_{46}	X_{47}	
5	Tenerife	-6.727	-5.246	-3.971	-2.563	0	-746	-4.306	4.928
		X_{51}	X_{52}	X_{53}	X_{54}	X_{55}	X_{56}	X_{57}	
6	Ibiza	-14.371	-16.786	-12.233	-7.414	-1.143	0	-1.228	2.875
		X_{61}	X_{62}	X_{63}	X_{64}	X_{65}	X_{66}	X_{67}	
7	Lanzarote	-3.965	-3.342	-626	-3.750	-3.850	-4.427	0	1.289
		X_{71}	X_{72}	X_{73}	X_{74}	X_{75}	X_{76}	X_{77}	
Demanda del destino		16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	

Tabla 10.2. Tabla del modelo general del problema de transporte con costes c_{ij} y variables de decisión x_{ij}.

Comprobando la condición de equilibrio del problema, se puede comprobar que el sumatorio de la oferta es mayor al sumatorio de las demandas:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 40.510 \quad \sum_{i=1}^{m} b_i = 40.788 \ \ donde \ \sum_{i=1}^{m} b_i \ \geq \ \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Para equilibrar el problema será necesario incluir un destino ficticio con beneficio asociado nulo, al cual se le asocia una demanda igual al siguiente valor:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j = 278$$

Así queda la tabla con oferta y demanda ya equilibradas:

		Destinos j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i		Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen
1	Madrid Barajas	0	-13.659	-12.790	-6.873	-3.781	-11.833	-4.643	0	16.191
		X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	
2	Barcelona El Prat	-16.475	0	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	-10.802	0	3.204
		X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}	
3	Palma de Mallorca	-11.466	-15.365	0	-8.649	-1.901	-11.273	-24	0	10.447
		X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}	X_{37}	X_{38}	
4	Málaga	-7.484	-6.024	-5.038	0	-2.692	-5.760	-3.876	0	1.854
		X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	X_{45}	X_{46}	X_{47}	X_{48}	
5	Tenerife	-6.727	-5.246	-3.971	-2.563	0	-746	-4.306	0	4.928
		X_{51}	X_{52}	X_{53}	X_{54}	X_{55}	X_{56}	X_{57}	X_{58}	
6	Ibiza	-14.371	-16.786	-12.233	-7.414	-1.143	0	-1.228	0	2.875
		X_{61}	X_{62}	X_{63}	X_{64}	X_{65}	X_{66}	X_{67}	X_{68}	
7	Lanzarote	-3.965	-3.342	-626	-3.750	-3.850	-4.427	0	0	1.289
		X_{71}	X_{72}	X_{73}	X_{74}	X_{75}	X_{76}	X_{77}	X_{78}	
Demanda del destino		16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	40.510

Tabla 10.3. Tabla del modelo general del problema de transporte en equilibrio de oferta y demanda con costes c_{ij} y variables de decisión x_{ij}.

Con el método Simplex, se necesita una solución básica factible inicial a partir de la cual, paso a paso, alcanzar la optimalidad. Se puede obtener por varios métodos:

- Método de la Esquina Noroeste (MEN).
- Método de Coste Mínimo (MCM).
- Método de Aproximación de Vogel (MAV).

9.1. MÉTODO DE LA ESQUINA NOROESTE

A continuación, se exponen los pasos que se han de seguir y que describen el procedimiento (Hillier y Lieberman, 2015, p. 307; Salas, 2017, p. 273; Ríos Insua, et al., 2006, p. 193):

Paso 1. Se busca en la tabla y selecciona la esquina noroeste, la esquina superior izquierda correspondiente a x_{11}. Para determinar la primera asignación, se toma esta celda con $origen$ 1 y $destino$ 1, y se le asigna una cantidad igual al $Min\,\{a_1, b_1\}$.

Paso 2. El valor otorgado a x_{11} se debe restar del valor de la demanda a_1 y de la oferta b_1, de las cuales una quedará igualada a cero. Por lo que, la oferta de la fila 1 o la demanda de la columna 1 aparecerá cubierta. Es posible que, en caso de coincidir demanda y oferta, ambas queden reducidas a cero. En tal caso, se satura únicamente una de ellas y la otra queda con disponibilidad cero.

Paso 3. Si b_1 pasa a tomar valor cero, se pasa a la fila 2 y columna 1, para asignarle a x_{21} ~~,~~el valor igual al $Min\,\{a_1 - x_{11}, b_2\}$. Por el contrario, si a_1 pasase a tomar valor cero, se pasa a la fila 1 y columna 2, para darle a x_{12} el valor igual al $Min\,\{a_2, b_1 - x_{11}\}$.

Paso 4. El valor dado a la variable se resta de la respectiva oferta y demanda. De esta manera, siempre ocurrirá que una oferta o una demanda se convertirá en cero o nula y, por lo tanto, por cada asignación se saturará una fila o una columna.

Paso 5. Como las filas o columnas saturadas pasan a no tenerse en cuenta en la asignación, se continua con el procedimiento antes descrito hasta llegar a la fila m y columna n, para asignarle valor a la variable x_{mn}. Todo esto, teniendo en cuenta que cuando quede una única fila o columna; las ofertas o demandas restantes solo tendrán el lugar que quede disponible para ser asignadas.

Se ofrece a continuación, la tabla con la primera solución básica factible generada por el método de la esquina noroeste. El procedimiento completo se describe en el Anexo. VII.

		Destinos j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i		Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen
1	Madrid Barajas	0	-13.659	-12.790	-6.873	-3.781	-11.833	-4.643	0	16.191
		16.020	171							
2	Barcelona El Prat	-16.475	0	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	-10.802	0	3.204
			2.985	219						
3	Palma de Mallorca	-11.466	-15.365	0	-8.649	-1.901	-11.273	-24	0	10.447
				10.208	239					
4	Málaga	-7.484	-6.024	-5.038	0	-2.692	-5.760	-3.876	0	1.854
					1.592	262				
5	Tenerife	-6.727	-5.246	-3.971	-2.563	0	-746	-4.306	0	4.928
						4.651	277			
6	Ibiza	-14.371	-16.786	-12.233	-7.414	-1.143	0	-1.228	0	2.875
							2.598	277		
7	Lanzarote	-3.965	-3.342	-626	-3.750	-3.850	-4.427	0	0	1.289
								1.011	278	
Demanda del destino		16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	40.510

Tabla 10.4. Solución básica factible generada por el método de la Esquina Noroeste.

La solución obtenida por el método de la esquina Noroeste y extraída de la tabla anterior determina las siguientes salidas:

	Origen	Destino	N.º de vuelos	Variable asignada	Beneficio $-c_{ij}$
1	Madrid Barajas	Madrid Barajas	16.020	x_{11}	0
2	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	171	x_{12}	13.659
3	Barcelona El Prat	Barcelona El Prat	2.985	x_{22}	0
4	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	219	x_{23}	14.917
5	Palma de Mallorca	Palma de Mallorca	10.208	x_{33}	0
6	Palma de Mallorca	Málaga	239	x_{34}	8.649
7	Málaga	Málaga	1.592	x_{44}	0
8	Málaga	Tenerife	262	x_{45}	2.692
9	Tenerife	Tenerife	4.651	x_{55}	0
10	Tenerife	Ibiza	277	x_{56}	746
11	Ibiza	Ibiza	2.598	x_{66}	0
12	Ibiza	Lanzarote	277	x_{67}	1.228
13	Lanzarote	Lanzarote	1.011	x_{77}	0
14	Lanzarote	Ficticio	278	x_{78}	0

Tabla 10.5. Descripción de la solución básica factible generada por el método de la Esquina Noroeste.

No es una solución muy coherente como solución e interpretación de nuestro problema, pues siete de ellas asignan valores a las celdas con un mismo origen y destino y con un beneficio asociado igual a cero, $-c_{ij} = 0$. Esto no será problema, porque únicamente se trata de una solución de partida a partir de la cual poder iniciar el proceso de búsqueda del óptimo.

Se trata de una solución no degenerada, pues ninguna de las variables básicas es igual a cero. Además, se puede comprobar que el número de variables básicas, 14, es igual a $m + n - 1 = 7 + 8 - 1 = 14$.

La solución, asimismo, genera unos beneficios totales iguales a 8.921.725 €, determinados por la función objetivo y las variables básicas, haciendo referencia a la función objetivo original sin transformar:

$$\begin{aligned} Z = 0(16.020) - 13.659(171) - 0(2.985) - 14.917(219) - 0(10.208) - 8.649(239) \\ - 0(1.592) - 2.692(262) - 0(4.651) - 746(277) - 0(2.598) \\ - 1.228(277) - 0(1.011) - 0(278) = -8.921.725 \end{aligned}$$

$$-Z = 8.921.725\ €$$

9.2. MÉTODO DE COSTE MÍNIMO

A continuación, se exponen los pasos que se han seguido y que describirán el procedimiento que determina el método de coste mínimo (Ríos Insua, et al., 2006, p. 198):

.

Este método, aporta mejores soluciones que el método de la esquina noroeste, pues se centra en asignar cantidades en las variables x_{ij} (rutas) con menores costes:

Paso 1. Se busca en la tabla y se selecciona la celda con el menor coste, en este caso $c_{62} = -16.786$, la correspondiente a x_{62}. Para determinar la primera asignación, se toma dicha celda con origen 6 y destino 2, y se le asigna una cantidad igual al $Min\,\{a_2, b_6\}$, el máximo de cantidad que se puede asignar.

Paso 2. El valor otorgado a x_{62} se debe restar del valor de la demanda a_2 y de la oferta b_6, de las cuales una quedara igualada a cero. Por lo cual, la fila 6 o columna 2 quedará saturada. Es posible que en caso de coincidir demanda y oferta ambas queden en cero. En tal caso, se satura únicamente una de ellas y la otra queda con disponibilidad cero.

Paso 3. En cualquier caso, actualizando el valor de la demanda a_2 y de la oferta b_6, y descartada la fila o columna saturada, se vuelve a proceder como en el paso 1 y se busca en la tabla la celda con el siguiente menor coste, correspondiente a la x_{21}. Para, al igual que se hizo con la primera selección, tomar la celda con origen 2 y destino 1, y asignarle una cantidad igual al $Min\,\{a_1, b_2\}$, el máximo a poder asignar.

Paso 4. El valor dado a la variable se resta de la respectiva oferta y demanda. De esta manera, siempre ocurrirá que una oferta o una demanda se convertirá en cero o nula. Por lo tanto, por cada asignación se saturará una fila o una columna.

Paso 5. Como las filas o las columnas saturadas pasan a no tenerse en cuenta en la asignación; se continua con el procedimiento antes descrito hasta quedar con una única posibilidad de asignación en fila i y columna j, para asignarle valor a las variables x_{ij}. Todo esto, teniendo en cuenta que cuando quede una única fila o columna, las ofertas o demandas restantes solo tendrán el lugar que quede disponible para ser asignadas.

Se ofrece a continuación la tabla con la primera solución básica factible generada por el método del coste mínimo. El procedimiento se describe en el Anexo VIII.

		Destinos j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i		Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13.659	-12.790	-6.873	-3.781	-11.833	-4.643	0	16.191
				10.427	1.831		2.875	1.058		
2	Barcelona El Prat	-16.475	0	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	-10.802	0	3.204
		3.206								
3	Palma de Mallorca	-11.466	-15.365	0	-8.649	-1.901	-11.273	-24	0	10.447
		10.166	281							
4	Málaga	-7.484	-6.024	-5.038	0	-2.692	-5.760	-3.876	0	1.854
		1.854								
5	Tenerife	-6.727	-5.246	-3.971	-2.563	0	-746	-4.306	0	4.928
		796				3.624		230	278	
6	Ibiza	-14.371	-16.786	-12.233	-7.414	-1.143	0	-1.228	0	2.875
			2.875							
7	Lanzarote	-3.965	-3.342	-626	-3.750	-3.850	-4.427	0	0	1.289
						1.289				
Demanda del destino a_j		16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	40.510

Tabla10.6. Solución básica factible obtenida por el método del Coste Mínimo.

La solución obtenida por el método del coste mínimo y extraída de la tabla anterior determina las siguientes salidas:

	Origen	Destino	N.º de vuelos	Variable asignada	Beneficio $-c_{ij}$
1	Ibiza	Barcelona El Prat	2.875	x_{62}	-16.786
2	Barcelona El Prat	Madrid Barajas	3.204	x_{21}	-16.475
3	Palma de Mallorca	Barcelona El Prat	281	x_{32}	-15.365
4	Madrid Barajas	Palma de Mallorca	10.427	x_{13}	-12.790
5	Madrid Barajas	Ibiza	2.875	x_{16}	-11.833
6	Palma de Mallorca	Madrid Barajas	10.166	x_{31}	-11.466
7	Málaga	Madrid Barajas	1.854	x_{41}	-7.484
8	Madrid Barajas	Málaga	1.831	x_{14}	-6.873
9	Tenerife	Madrid Barajas	796	x_{51}	-6.727
10	Madrid Barajas	Lanzarote	1.058	x_{17}	-4.643
11	Tenerife	Lanzarote	230	x_{57}	-4.306
12	Lanzarote	Tenerife	1.289	x_{75}	-3.850
13	Tenerife	Tenerife	3.624	x_{55}	0
14	Tenerife	Ficticio	278	x_{58}	0

Tabla 10.7. Descripción de la solución básica factible generada por el método del Coste Mínimo.

Esta solución, como se puede comprobar, es más plausible que la obtenida por el método anterior de la esquina noroeste. Se puede observar cómo, esencialmente, por este método se asigna vuelos a las 12 rutas origen i destino j con menor coste. Destacando las rutas de Madrid a Palma de Mallorca con 10.427 vuelos y la ruta opuesta Palma de Mallorca a Madrid con 10.166, ostentando estas dos rutas un total de lo que supone el 50,83% del total de vuelos demandados.

Se trata de una solución no degenerada, pues ninguna de las variables básicas es igual a cero. Además, se puede comprobar que el número de variables básicas, 14, equivale a $m + n - 1 = 7 + 8 - 1 = 14$.

La solución genera unos beneficios totales iguales a: $431.987.591$ €, superiores a los obtenidos con el método anterior, y determinados por la función objetivo y las variables básicas, haciendo referencia a la función objetivo original sin transformar:

$$\begin{aligned} Z = -12.790(10.427) - 6.873(1.831) - 11.833(2.875) - 4.643(1.058) - 16.475(3.204) \\ - 11.466(10.166) - 15.365(281) - 7.484(1.854) - 6.727(796) \\ - 0(3.624) - 4.306(230) - 0(278) - 16.786(2.875) - 3.850(1.289) \\ = -431.987.591 \end{aligned}$$

$$-Z = 431.987.591$$

9.3. MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE VOGEL

A continuación, se presentan los pasos que describen el último de los métodos que se van a utilizar, el método de aproximación de Vogel. Este método; aunque no es tan sencillo como los dos anteriores, para obtener una primera solución básica factible, genera una solución más cercana al coste mínimo que ambos. Para ello se han de seguir los siguientes pasos (Hillier y Lieberman, 2015, p. 308; Ríos Insua, et al., 2006, p. 195; Salas, 2017, p. 279):

Paso 1. Se empieza calculando lo que el modelo denomina medidas de penalización, se identifican los dos costes de menor valor por fila y columna. Una vez identificados estos dos valores se restan y el resultado será la penalización de cada fila i y columna j .

Paso 2. Una vez ya calculadas las penalizaciones, se identifica la fila *i* o columna *j* con mayor valor.

Paso 3. En esa misma fila *i* o columna *j* a la que corresponde la mayor penalización, se selecciona la celda con menor coste de transporte.

Paso 4. En la celda x_{ij} seleccionada en el paso anterior es en la que se asigna la cantidad máxima posible, correspondiente al $Min\{a_j, b_i\}$.

Paso 5. El valor dado a la variable x_{ij} se resta de la respectiva demanda y oferta $a_j - x_{ij}$ y $b_i - x_{ij}$. De este modo, siempre ocurrirá que una oferta o una demanda se convertirá en cero o nula y, por lo tanto, por cada asignación se saturará una fila i o una columna j. En este caso, la fila o columna saturada se descartan, mientras que la fila o columna no saturada se sigue teniendo en cuenta para futuras asignaciones.

Paso 6. Como las filas o las columnas saturadas pasan a ser descartadas y a no tenerse en cuenta en las asignaciones siguientes, se continua con el procedimiento antes descrito hasta tener disponible solamente una fila o una columna. Así, la oferta o demanda restante únicamente tendrá un lugar posible para ser asignada. Entonces, el procedimiento concluye asignando a esa cantidad de oferta b_i o demanda a_j, a la celda que queda disponible dentro de la última fila o columna libre.

Se ofrece a continuación la tabla con la primera solución básica factible generada por el método del coste mínimo. El procedimiento completo se describe en el Anexo IX:

		Destinos j								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i		Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13.659	-12.790	-6.873	-3.781	-11.833	-4.643	0	16.191
				10427		2889	2875			
2	Barcelona El Prat	-16.475	0	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	-10.802	0	3.204
					1831	85		1.288		
3	Palma de Mallorca	-11.466	-15.365	0	-8.649	-1.901	-11.273	-24	0	10.447
		7.291	3.156							
4	Málaga	-7.484	-6.024	-5.038	0	-2.692	-5.760	-3.876	0	1.854
		926				650			278	
5	Tenerife	-6.727	-5.246	-3.971	-2.563	0	-746	-4.306	0	4.928
		4.928								
6	Ibiza	-14.371	-16.786	-12.233	-7.414	-1.143	0	-1.228	0	2.875
		2.875								
7	Lanzarote	-3.965	-3.342	-626	-3.750	-3.850	-4.427	0	0	1.289
						1.289				
Demanda del destino a_j		16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	40.510

Tabla 10.8. Solución básica factible obtenida por el método de Aproximación de Vogel.

La solución obtenida por el método de aproximación de Vogel y extraída de la tabla anterior determina las siguientes salidas:

	Origen	Destino	N.º de vuelos	Variable asignada	Beneficio $-c_{ij}$
1	Barcelona El Prat	Lanzarote	1.288	x_{27}	-10802
2	Palma de Mallorca	Barcelona El Prat	3.156	x_{32}	-15365
3	Tenerife	Madrid Barajas	4.928	x_{51}	-6727
4	Barcelona El Prat	Málaga	1.831	x_{24}	-11156
5	Barcelona El Prat	Tenerife	85	x_{25}	-6272
6	Ibiza	Madrid Barajas	2.875	x_{61}	-14371
7	Madrid Barajas	Palma de Mallorca	10.427	x_{13}	-12790
8	Madrid Barajas	Ibiza	2.875	x_{16}	-11833
9	Palma de Mallorca	Madrid Barajas	7.291	x_{31}	-11466
10	Málaga	Madrid Barajas	926	x_{41}	-7484
11	Lanzarote	Tenerife	1.289	x_{75}	-3850
12	Madrid Barajas	Tenerife	2.889	x_{15}	-3781
13	Málaga	Tenerife	650	x_{45}	-2692
14	Málaga	Ficticio	278	x_{48}	0

Tabla 10.9. Descripción solución básica factible obtenida por el método de Aproximación de Vogel.

Esta solución es también más razonable que la obtenida por el método de la esquina noroeste. En este caso se comprueba que, a diferencia del método anterior, se asignan vuelos a las 12 rutas origen *i* y destino *j* con menor coste c_{ij}, de la fila i o columna j con el mayor coste de penalización, valor que muestra el coste de oportunidad obtenido por no asignar unidades a transportar en determinada posición x_{ij} de dicha fila o columna. Destaca, en este caso, la ruta de Madrid a Palma de Mallorca con 10.427 vuelos, ostentando el resto de las rutas menos de 8.000 vuelos.

Se trata de una solución no degenerada, pues ninguna de las variables básicas es igual a cero. Además, se puede comprobar que el número de variables básicas, 14, es igual y equivale a $m + n - 1 = 7 + 8 - 1 = 14$.

La solución genera unos beneficios totales iguales a $433.377.707€$ determinados por la función objetivo y las variables básicas, haciendo referencia a la función objetivo original sin transformar:

$$
\begin{aligned}
Z = -12.790(10.427) - 3.781(2.889) - 11.833(2.875) - 11.156(1.831) - 6.272(85) \\
- 10.802(1.288) - 11.466(7.291) - 15.365(3.156) - 7.484(926) \\
- 2.692(650) - 0(278) - 6.727(4.928) - 14.371(2.875) - 3.850(1.289) \\
= -433.377.707
\end{aligned}
$$

$$-Z = 433.377.707$$

9.4. SOLUCIÓN ÓPTIMA

Una vez se ha obtenido una solución básica inicial con los tres métodos, se ha de verificar si es óptima; si no lo fuera se debe avanzar hacia tal solución óptima hasta alcanzarla. El procedimiento es la prueba de optimalidad estándar del método Simplex para el problema del transporte (Hillier y Lieberman, 2015, p. 313; Salas, 2017, p. 285):

Paso 1. Test de optimalidad

En primer lugar, se ha de realizar la prueba de optimalidad a la primera solución básica factible. Si ésta fuera óptima se habría alcanzado el óptimo y no se necesita continuar. En el método Simplex, la solución óptima la determina el valor, $Z_J - C_J$. Así, la prueba de optimalidad estándar del método Simplex para el problema del transporte se expresa (Hillier y Lieberman, 2015, p. 312) como:

$$\begin{gathered} Una\ solución\ básica\ factible\ (BF)\ es\ optima\ sí\ y\ solo\ si \\ c_{ij} - u_i - v_j \geq 0\ para\ toda\ (i,j)\ tal\ que\ x_{ij}\ es\ no\ básica. \end{gathered}$$

$c_{ij} - u_i - v_j$ corresponde a la tasa de aumento de Z (función objetivo) y, por tanto, siendo nuestra función objetivo una función de costes, expresa la tasa de aumento de la Z (función objetivo) si se aumenta el valor de esa variable no básica a más de cero.

Con esto, se puede observar cómo, si alguna de las tasas de mejoramiento no fuese positiva, la solución no sería óptima, pues la entrada de variables no básicas con $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ en la solución básica supondría una disminución de valor de Z (función objetivo) y, por lo tanto, una disminución coste de nuestro problema.

Para llevar a cabo la prueba de optimalidad, como la variable x_{ij} es bidimensional, se han de calcular los valores para todas las variables no básicas o celdas sin asignación de la tabla.

Para ello, se añade a la tabla del modelo general del problema de transporte una fila con los costes ficticios v_j asociados a las posiciones (*j*=1,…,*n*) y una columna que muestra los costes ficticios u_i asociados a las posiciones (*i*=1,…,*m*), que permiten calcular los índices de mejora para las celdas correspondientes a variables no básicas x_{ij}:

$$\begin{gathered} z_{ij} = u_i + v_j \\ c_{ij} - z_{ij} \geq 0 \\ La\ solución\ es\ optima\ si\ todos\ los: \\ c_{ij} - u_i - v_j \geq 0 \end{gathered}$$

de modo que la suma de los costes u_i y v_j sea igual a los valores de la matriz z_{ij} asociada a los de costes de las variables no básicas x_{ij} a través de las diferentes soluciones, $z_{ij} = u_i + v_j$.

Para calcular los valores de u_i y v_j para la solución básica factible, como el valor de $c_{ij} - u_i - v_j$ debe de ser cero si x_{ij} es básica, entonces u_i y v_j satisfacen el conjunto de ecuaciones:

$$c_{ij} = u_i + v_j \; para\ cada\ (i, j)\ tal\ que\ x_{ij}\ es\ básica$$

Existen $m + n - 1$ variables básicas y, por tanto, hay $m + n - 1$ ecuaciones de este tipo. Como el número de incógnitas u_i y v_j es $m + n$, se asigna un valor arbitrario a cualquiera de estas variables sin incumplir las ecuaciones. Nosotros hemos tomado la opción de establecer $u_1 = 0$ y determinar las complementarias v_j a partir de cada variable básica de la fila. Así, se puede ir calculando el valor de cada u_i y v_j, para posteriormente calcular $z_{ij} - u_i - v_j$ y poder determinar si la solución es óptima.

Paso 2. Determinación de la variable que entra a la base

En caso de no haber obtenido una solución óptima en el paso anterior, pues uno o más $c_{ij} - u_i - v_j < 0$, se ha de seleccionar la variable no básica que entra a la base. Se selecciona la variable no básica con el mayor valor negativo en términos absolutos:

$$Mayor\ valor\ negativo\ en\ términos\ absolutos$$
$$c_{ij} - z_{ij}.$$

Paso 3. Determinación circuito positivo + y negativo -

Una vez seleccionada la variable no básica que entra a la base, se tendrá en cuenta que dicha celda que entra pasará a tener asignación, es decir, valor positivo (+). Para que esta tenga asignación, una celda correspondiente a una variable básica localizada en la misma fila *i* o columna *j* deberá disminuir su asignación en esa misma cuantía, esto es, valor negativo (-).

Derivada de la disminución en la asignación de esta segunda celda correspondiente a una variable básica, se deberá aumentar en esa misma cuantía otra celda correspondiente a una variable básica, o sea, valor positivo (+) establecida en la misma fila i o columna j que la segunda celda.

Así, se debe determinar un ciclo o circuito cerrado + y - entre celdas de variables básicas asignadas, que permita ajustar las asignaciones y mantener equilibradas las asignaciones a_j y b_i en la tabla.

Paso 4. Determinación de la variable que sale de la base

Determinadas las celdas seleccionadas de variables básicas en el ciclo que han de disminuir en su asignación, con signo negativo (-), se selecciona aquella con menor valor asignado.

Paso 5. Determinar la nueva solución

Una vez seleccionada la asignación menor de las celdas de variables básicas con signo negativo (-), se suma y resta su valor según el signo (+) o (-) de las celdas del circuito.

Paso 6. Nuevo test de optimalidad

Se lleva a cabo la prueba de optimalidad a esta nueva solución, calculando de nuevo $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, a las nuevas asignaciones.

Si esta no fuera óptima, se debe repetir de nuevo el procedimiento. Sin embargo, si superara el test de optimalidad, se habría alcanzado el óptimo y se finalizaría con el proceso.

De este modo, se ha llevado a cabo el proceso descrito anteriormente para la búsqueda del optimo, partiendo de las soluciones básicas obtenidas por los métodos: esquina noroeste, coste mínimo y aproximación de Vogel. Todos los pasos se han detallado en los Anexos X, XI y XII.

Con esto, se obtiene las soluciones optimas que se muestran a continuación:

Solución óptima obtenida por el método Simplex a través de la solución básica factible resultado del Método de la Esquina Noroeste

	Destino j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Origen i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
			1119	10427		1770	2875			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		6579	2037		1831					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		3362				0		1288	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda a_j	16020	3156	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Tabla 10.10. Solución óptima obtenida por el método Simplex a partir de la solución básica factible resultado del Método de la Esquina Noroeste

<u>Solución óptima obtenida por el método Simplex a través de la solución básica factible resultado del Coste Mínimo</u>

	Destino j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Origen i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
			1119	10427		1770	2875			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		6579	2037		1831					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		3362						1288	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda a_j	16020	3156	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Tabla 10.11. Solución óptima obtenida por el método Simplex a partir de la solución básica factible resultado del Método del Coste Mínimo.

Solución óptima obtenida por el método Simplex a través de la solución básica factible resultado del Método de Aproximación de Vogel

	Destino j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Origen i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
			1119	10427		1770	2875			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		6579	2037		1831					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		3362						1288	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda a_j	16020	3156	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Tabla 10.12. Solución óptima obtenida por el método Simplex a partir de la solución básica factible resultado del Método de Aproximación de Vogel

Tras mostrar las tres soluciones optimas, únicamente se puede observar lo que sería matemáticamente evidente, la solución obtenida en los tres procedimientos es la misma y es la solución óptima a nuestro problema de transporte. Así, la diferencia se encuentra en que el número de iteraciones en el proceso de la Esquina Noroeste es mayor, con 14 iteraciones. mientras que, en el proceso con la solución básica factible obtenida por el método del Coste Mínimo, se realizan 5 iteraciones; y en el proceso que parte del Método de Aproximación de Vogel se llevan a cabo 6 iteraciones. Lo que significa que las soluciones que requieran más iteraciones están más alejadas del óptimo y son menos deseables.

Esto permite señalar que es preferible obtener la solución básica factible inicial a partir del Método de Aproximación de Coste Mínimo, teniendo en cuenta que la solución básica inicial obtenida por el método de aproximación de Vogel ofrece un mayor beneficio para nuestra función objetivo.

Así, se puede determinar la solución óptima de forma más descriptiva y visual, determinando el aeropuerto de origen y destino, así como el número de vuelos de las determinadas rutas, de donde se ha excluido la asignación sobrante asignada a la columna ficticia:

	Origen	Destino	Número de vuelos	c_{ij}	Beneficio asociado a la asignación $-c_{ij}x_{ij}$
1	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	1.119	-13.659	15.284.421 €
2	Madrid Barajas	Palma de Mallorca	10.427	-12.790	133.361.330 €
3	Madrid Barajas	Tenerife	1.770	-3.781	6.692.370 €
4	Madrid Barajas	Ibiza	2.875	-11.833	34.019.875 €
5	Barcelona El Prat	Madrid	3.204	-16.475	52.785.900 €
6	Palma de Mallorca	Madrid Barajas	6.579	-11.466	75.434.814 €
7	Palma de Mallorca	Barcelona El Prat	2.037	-15.365	31.298.505 €
8	Palma de Mallorca	Málaga	1.831	-8.649	15.836.319 €
9	Málaga	Tenerife	1.854	-2.692	4.990.968 €
10	Tenerife	Madrid	3.362	-6.727	22.616.174 €
11	Tenerife	Lanzarote	1.288	-4.306	5.546.128 €
12	Ibiza	Madrid	2.875	-14.371	41.316.625 €
13	Lanzarote	Tenerife	1.289	-3.850	4.962.650 €

Tabla 10.13. Solución óptima resumida por rutas, números de vuelos y beneficio.

Esta será la solución óptima del problema de transporte estimado. La solución, asimismo, genera unos beneficios totales iguales a 444.146.079€, determinados por la función objetivo y las variables básicas, haciendo referencia a la función objetivo original sin transformar:

$$\begin{aligned} Z = -13.659(1.119) - 12.790(10.427) - 3.781(1.770) - 11.833(2.875) - 16.475(3.204) \\ - 11.466(6.579) - 15.365(2.037) - 8.649(1.831) - 2.692(1.854) \\ - 6.727(3.362) - 4.306(1.288) - 0(278) - 14.371(2.875) - 3.850(1.289) \\ = -444.146.079 \end{aligned}$$

$$-Z = 444.146.079\ €$$

10. CONCLUSIONES

La motivación principal de este estudio es alcanzar y poder adquirir una solución óptima de un modelo estimado, a través de un programa lineal de maximización de beneficios en el contexto de vuelos entre aeropuertos para una compañía aérea. Se ha basado dicho modelo en el método de transporte y se ha resuelto mediante el método Simplex adaptado.

Se ha podido comprobar cómo este procedimiento ha permitido llegar a dicha solución óptima. Este método, como se ha mostrado, es un útil e interesante instrumento para resolver problemas de carácter real, como puede ser la economización de rutas de transporte y toma de decisiones. Puede tener una importante interpretación económica para la entidad interesada en llevar a cabo el estudio. Algo que se quiere resaltar, y que viene siendo amparado por la importancia del legado del método Simplex en la programación lineal.

Así mismo, la simplicidad y sencillez de la modelización matemática del modelo, que lo hace tan interesante y práctico, también lo limita a la hora de poder interpretarlo y obtener conclusiones completamente fiables. Es recomendable la comparación de los resultados con observaciones empíricas del problema real. Algo que no ha sido posible en este caso, pero que es viable si el estudio lo realiza un profesional encargado por la entidad interesada en aplicar esta técnica, para su planificación, para economizar sus operaciones, distribuir sus recursos o tomar decisiones. La empresa tendrá amplio acceso a datos empíricos e información con la que reafirmar los resultados y conclusiones. De este modo, para el caso particular de nuestro estudio, la carencia de datos empíricos hace que la estimación sea subjetiva y únicamente útil como ejemplo.

Al aplicar el modelo del transporte al caso particular de una compañía aérea que quiere maximizar sus beneficios, observamos cómo, al ser organizaciones complejas, es posible que existan restricciones cuantitativas y cualitativas que no pueden expresarse de forma lineal. Por otro lado, se han considerado los precios de los billetes como fijos durante el año, algo no realista. Tampoco hemos tenido en cuenta, por su complejidad, múltiples costes en el problema real de la operativa de las aerolíneas, lo que menoscaba los resultados. Por último, queremos indicar que probablemente los costes no son en realidad lineales, lo que contradice la aproximación lineal. Esto pone en evidencia que, a veces, los programas de programación lineal no se adecuan a los problemas reales. Sin embargo, si este estudio y problema se plantea a corto plazo, donde los costes son fijos y con datos suficientes para poder cubrir las necesidades de análisis y aproximación del programa lineal al problema real, creemos que el método de transporte es un método de programación lineal factible.

ANEXOS

ANEXO I: DEFINICIÓN DE LOS VALORES DE INGRESO DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Precio de viaje clase Economy

Precio Medio Origen/Destino (€) Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	0,00	57,00	56,00	42,00	68,00	62,00	67,00
Barcelona El Prat	67,00	0,00	52,00	54,00	72,00	58,00	83,00
Palma de Mallorca	60,00	65,00	0,00	54,00	65,00	55,00	57,00
Málaga	47,00	49,00	35,00	0,00	44,00	43,00	46,00
Tenerife	72,00	76,00	74,00	54,00	0,00	64,00	25,00
Ibiza	65,00	72,00	52,00	50,00	62,00	0,00	57,00
Lanzarote	55,00	63,00	60,00	53,00	30,00	72,00	0,00
Para obtener el precio medio del billete solo ida, se ha consultado el precio del billete origen i destino j para la clase Economy a día: lunes, 7 de marzo de 2022 en previsión de siete días.							

Tabla I.1. Precio viaje ida clase Economy
Elaboración propia. Fuente: Flightconnections.com (7 de marzo 2022)

Precio de viaje clase Business

Precio Medio Origen/Destino (€) Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	0,00	292,00	286,00	155,00	127,00	139,00	115,00
Barcelona El Prat	296,00	0,00	319,00	308,00	328,00	208,00	325,00
Palma de Mallorca	176,00	178,00	0,00	175,00	198,00	96,00	204,00
Málaga	121,00	137,00	247,00	0,00	266,00	135,00	221,00
Tenerife	210,00	212,00	180,00	134,00	0,00	192,00	195,00
Ibiza	217,00	179,00	177,00	123,00	236,00	0,00	239,00
Lanzarote	232,00	235,00	194,00	127,00	112,00	196,00	0,00
Para obtener el precio medio del billete solo ida, se ha consultado el precio del billete origen i destino j para la clase Business a día: lunes, 7 de marzo de 2022 en previsión de siete días.							

Tabla I.2. Precio viaje ida clase Business.
Elaboración propia. Fuente: Flightconnections.com (7 marzo 2022)

Asientos 787-8 Air Europa

Una vez calculado el precio de los billetes; y tomando el modelo de avión, Boeing 787-8, perteneciente a la flota y modelo de vuelo común de la compañía Air Europa, se extrae el número de asientos que tendrá el avión de nuestro problema:

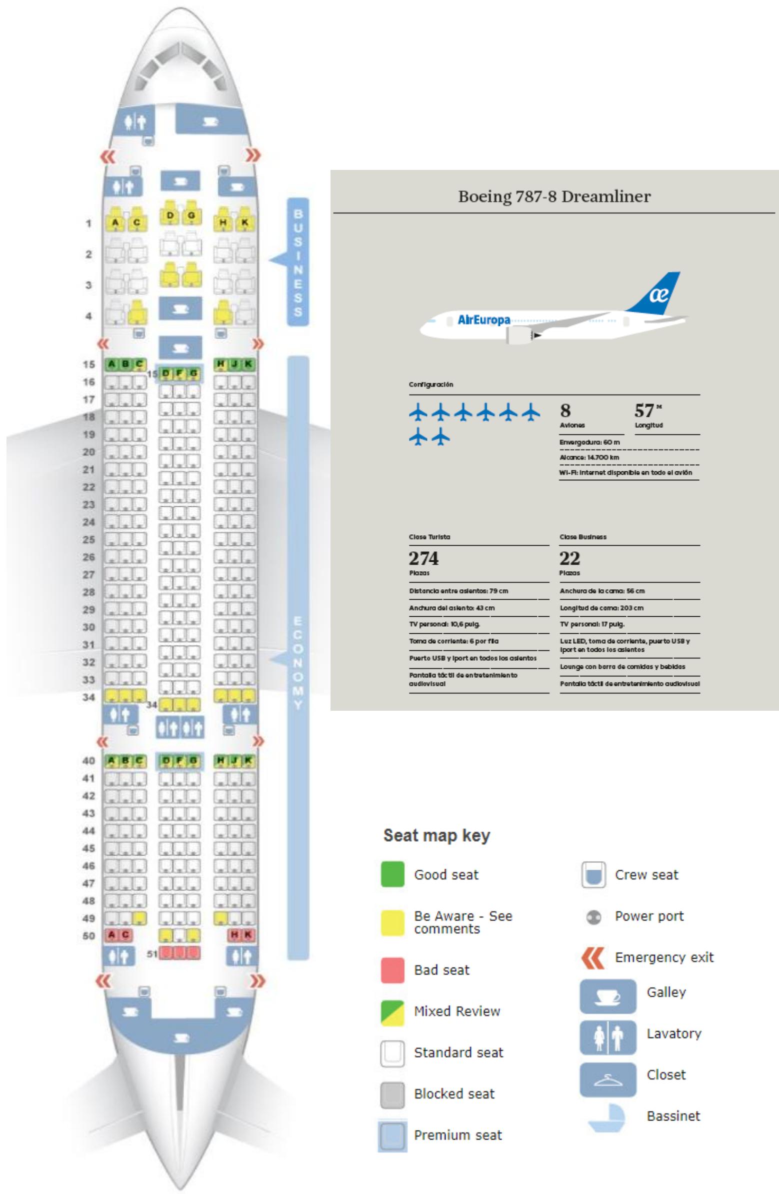

Figura I.3. Reproducción interior y distribución de asientos Boeing 787-8
Fuente: Boeing 787 Dreamliner Air Europa
http://agencias.aireuropa.com/grupos_webv2/comercial/pdf/boeing787dreamlineres.pdf (9 de marzo 2022)

Capacidad de pasajeros	Business	Turista
Número de pasajeros	22	274

Tabla I.3. Número de asientos por clase Boeing 787
Fuente: Boeing 787 Dreamliner Air Europa
http://agencias.aireuropa.com/grupos_webv2/comercial/pdf/boeing787dreamlineres.pdf. (9 de marzo 2022)

Ingreso total precio billete

	Ingreso total precio del billete en euros (€)						
Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	0	22042	21636	14918	21426	20046	20888
Barcelona El Prat	24870	0	21266	21572	26944	20468	29892
Palma de Mallorca	20312	21726	0	18646	22166	17182	20106
Málaga	15540	16440	15024	0	17908	14752	17466
Tenerife	24348	25488	24236	17744	0	21760	11140
Ibiza	22584	23666	18142	16406	22180	0	20876
Lanzarote	20174	22432	20708	17316	10684	24040	0
Se puede expresar la función de ingresos de los billetes por vuelo, como: $\overline{Precio\ medio\ billete\ Business_{ij}} \times 22 + \overline{Precio\ medio\ billete\ Turista_{ij}} \times 274$. Obteniendo los siguientes ingresos estimados fijos en euros por viajes salida i destino j.							

Tabla I.4. Ingreso total precio del billete.

ANEXO II: ESPECIFICACIÓN DEL COSTE ESTIMADO DEL COMBUSTIBLE

En cuanto a los costes de nuestro modelo, se estiman los de combustible de cada vuelo:

Modelo de avión del estudio

Modelo de avión:	Boeing
Modelo de fabricación:	787-8
Motor:	GEnx – 1B
Alcance o distancia máxima de vuelo:	Entre 14.800 km – 15.700 km
Máxima capacidad de combustible:	126.920 L
Consumo medio aproximado:	8,57 L/Km – 8,08L/Km
Velocidad crucero:	912km/h
Se toma como referencia el modelo de avión seleccionado para la estimación, Boeing 787-8 Dreamliner.	

Tabla II.1. Especificaciones modelo del avión.
Elaboración propia. Fuente: Boeing.es
https://www.boeing.es/productos-y-servicios/commercial-airplanes/787.page (9 de marzo de 2022)

Especificaciones técnicas Boeing 787-8 Dreamliner

Boeing 787-8 Dreamliner	
Capacidad	210 a 250 pasajeros en configuración de dos clases
Alcance	14.200 a 15.200 km
Configuración	Doble pasillo
Corte Transversal	574 cm
Envergadura alar	60 m
Longitud	57 m
Altura	17 m
Velocidad de crucero	0,85 Mach (912 Km/h)
Volumen total de carga	124.59 m^3
Peso máximo al despegue	227.930 kg
Hitos del programa	Lanzamiento del programa en abril de 2004 Inicio del montaje en 2006 Primer vuelo en diciembre de 2009 Primer entrega en septiembre 2011

Tabla II.2. Especificaciones técnicas modelo Boeing 787-8
Elaboración propia. Fuente: Boeing.es
https://www.boeing.es/productos-y-servicios/commercial-airplanes/787.page (9 de marzo de 2022)

Especificación del precio del combustible

Precio Jet A
3.34$/galón
Se ha consultado el precio del Jet A en el día: 21 de marzo de 2022, expresado en dólares por galón y se ha llevado a cabo la conversión a euros por litro,

Tabla II.3. Precio Jet A.
Fuente: Indemundi.com
https://www.indexmundi.com/es/precios-de-mercado/?mercancia=gasolina-de-aviacion.
(21 de marzo de 2022)

Tipo de cambio	
EUR/USD tasa promedio para abril 2022	1 € = 1,0784 $

Tabla II.4. Tipo de cambio.
Fuente: Investing.com https://es.investing.com/currencies/eur-usd
(21 de marzo de 2022)

Conversión de Galón a Litro	
GAL/L	1 galón = 3,78541 L

Tabla II.5. Equivalencia Galón/L.
Fuente: Metric-conversions.org
https://www.metric-conversions.org/.
(21 de marzo de 2022)

$$\frac{3{,}34\ \$}{galón} \times \frac{1\ galón}{3{,}78541\ L} \times \frac{1\ €}{1{,}0784\ \$} = {}^{0{,}8182€}/_{L}$$

Especificación de los costes derivados de las Normas de abastecimiento de combustible

Haciendo alusión al Reglamento (UE) nº 965/2012 de la Comisión, de 5 de octubre de 2012, por el cual, se establecen requisitos técnicos y procedimientos administrativos en relación con las operaciones aéreas (Comisión Europea, 2014) (EASA, 2012) (Comisión Europea, 2012), se han tenido en cuenta los puntos más sencillos de la normativa y se ha calculado el combustible estimado necesario para poder poner en marcha cada vuelo.

II.I. Consumo previsión 45 min de vuelo a velocidad crucero

Atendiendo a la normativa, en los vuelos de A a A: el operador especificará la cantidad mínima de combustible, que no deberá ser inferior a la cantidad necesaria para un vuelo de 45 minutos de duración.

Consumo medio aproximado:	8,57 L/Km – 8,08L/Km

Tabla II.I.6. Consumo medio estimado en L/Km

Velocidad crucero:	912Km/h

Tabla II.7. Velocidad crucero Boeing 878-8 Dreamliner. Fuente: Boeing.es.

$$\frac{8{,}57\;L}{km} \times \frac{912\;km}{h} = 7.815{,}84\;{}^{L}/_{h} = \;7.815{,}84\;{}^{L}/_{h} \times \frac{1h}{60\;min} = 130{,}27\,{}^{L}/_{min}$$

$$\frac{130{,}27\;L}{min} \times 45\,\mathrm{min} = 5.862{,}15\;L$$

II.II. Consumo de despegue

En los vuelos de A a B: el operador garantizará que el cálculo prevuelo del combustible utilizable necesario para el vuelo, incluya el combustible que se consume en el despegue.

<table>
<tr><td>Consumo medio aproximado:</td><td>8,57 L/Km – 8,08L/Km</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se toma como referencia los datos referentes a la aeronave, su consumo medio aproximado y su velocidad crucero. Se estima que en el despegue se consumirá un 30%-40% más que en el vuelo o trayecto y que se requiere una pista de al menos 2,5 Km para despegar y para aterrizar de forma segura (Bazer y Scharf, 2019).</td></tr>
</table>

Tabla II.8. Consumo medio en vuelo.

$$8{,}57\frac{L}{Km} \times 1{,}40 \;= 11{,}99L$$

$$11{,}99\frac{L}{Km} \times 2{,}50\;Km \;= 29{,}99L$$

II.III. Combustible para el trayecto

Distancia en millas entre aeropuertos

Distancia en Millas entre aeropuertos	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Tenerife	Málaga	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	0	299	339	268	1100	285	978
Barcelona El Prat	299	0	125	475	1362	171	1226
Palma de Mallorca	339	125	0	440	1328	86	1317
Tenerife	268	475	440	0	890	354	750
Málaga	1100	1326	1328	890	0	1385	168
Ibiza	285	171	86	354	1385	0	1264
Lanzarote	978	1226	1317	750	168	1264	0
El combustible necesario para llegar al destino y distancia media entre todos los aeropuertos del estudio. Como primer paso se ha obtenido la distancia en millas entre los aeropuertos de nuestro estudio:							

Tabla II.9. Distancia en millas entre aeropuertos seleccionados.
Elaboración propia Fuente: Flightconnections.com (9 de marzo de 2022)

Distancia en kilómetros entre aeropuertos

Distancia en Km entre aeropuertos	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Tenerife	Málaga	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	0	481,19	545,57	431,30	1770,27	458,66	1573,93
Barcelona El Prat	481,19	0	201,17	764,44	2191,92	275,20	1973,05
Palma de Mallorca	545,57	201,17	0	708,11	2137,20	138,40	2119,50
Tenerife	431,30	764,44	708,11	0	1432,31	569,71	1207,01
Málaga	1770,27	2133,98	2137,20	1432,31	0	2228,94	270,37
Ibiza	458,66	275,20	138,40	569,71	2228,94	0	2034,21
Lanzarote	1573,93	1973,05	2119,50	1207,01	270,37	2034,21	0
1 milla=1,60934 Km							

Tabla II.10. Distancia en Km entre aeropuertos seleccionados.
Elaboración propia Fuente: Flightconnections.com (9 de marzo de 2022)

Así, se calcula el consumo para el trayecto como:

$$\begin{matrix} Consumo\ medio \\ aproximado \end{matrix} \times Distancia\ en\ Km\ ruta\ entre\ aeropuertos_{ij}$$

$$8{,}57 \frac{L}{Km} \times Distancia\ en\ Km\ ruta\ entre\ aeropuertos_{ij}$$

Consumo trayecto entre aeropuertos

Consumo trayecto entre aeropuertos en (L)	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Tenerife	Málaga	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	0	393,71	446,38	352,89	1.448,44	375,28	1.287,79
Barcelona El Prat	4.123,82	0	1.724,01	6.551,22	18.784,76	2.358,44	16.909,05
Palma de Mallorca	4.675,50	1.724,01	0	6.068,50	18.315,83	1.186,12	18.164,12
Tenerife	3.696,27	6.551,22	6.068,50	0	12.274,92	4.882,38	10.344,03
Málaga	15.171,25	18.288,25	18.315,83	12.274,92	0	19.101,98	2.317,06
Ibiza	3.930,73	2.358,44	1.186,12	4.882,38	19.101,98	0	17.433,14
Lanzarote	13.488,62	16.909,05	18.164,12	10.344,03	2.317,06	17.433,14	0

Tabla II.11. Consumo en litro para el trayecto entre aeropuertos
Elaboración propia. Fuente: Flightconnections.com (9 de marzo de 2022)

El consumo de combustible total en nuestro problema podrá expresarse como el sumatorio:

$$\begin{matrix} Consumo\ de \\ combustible \end{matrix}_{ij} = \overline{\begin{matrix} Combustible \\ despegue \end{matrix}} + \begin{matrix} Combustible \\ trayecto \end{matrix}_{ij} + \overline{\begin{matrix} Combustible \\ de\ reserva\ 45\ min \end{matrix}}$$

Consumo total estimado combustible

Consumo total estimado combustible en (L)	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Tenerife	Málaga	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	0	6.285,85	6.338,52	6.245,03	7.340,58	6.267,42	7.179,93
Barcelona El Prat	10.015,96	0	7.616,15	12.443,36	24.676,9	8.250,58	22.801,19
Palma de Mallorca	10.567,64	7.616,15	0	11960,64	24.207,97	7.078,26	24.056,26
Tenerife	9.588,41	12.443,36	11.960,64	0	18.167,06	10.774,52	16.236,17
Málaga	21.063,39	24.180,39	24.207,97	18.167,06	0	24.994,12	8.209,2
Ibiza	9.822,87	8.250,58	7.078,26	10.774,52	24.994,12	0	23.325,28
Lanzarote	19.380,76	22.801,19	24.056,26	16.236,17	8.209,2	23.325,28	0

Tabla II.12. Consumo total estimado de combustible.
Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta el precio del Jet A en fecha 18 de abril, se puede calcular el Coste asociado al consumo de combustible:

$$\begin{matrix} Coste\ consumo\ de \\ combustible \end{matrix}_{ij} = \begin{matrix} Consumo\ de \\ combustible \end{matrix}_{ij} \times Precio\ Jet\ A$$

Consumo total estimado en trayecto entre aeropuertos

Coste total estimado asociado al consumo trayecto entre aeropuertos	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Tenerife	Málaga	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	0	8.195,06	8.646,45	7.845,24	17.234,06	8.037,07	15.857,34
Barcelona El Prat	8.195,06	0	6.231,53	10.181,16	20.190,64	6.750,62	18.655,93
Palma de Mallorca	8.646,45	6.231,53	0	9.786,20	19.806,96	5.791,43	19.682,83
Tenerife	7.845,24	10.181,16	9.786,20	0	14.864,29	8.815,72	13.284,44
Málaga	17.234,06	19.784,40	19.806,96	14.864,29	0	20.450,19	6.716,77
Ibiza	8.037,07	6.750,62	5.791,43	8.815,72	20.450,19	0	19.084,75
Lanzarote	15.857,34	18.655,93	19.682,83	13.284,44	6.716,77	19.084,75	0

Tabla II.13. Coste total estimado al consumo entre aeropuertos.
Fuente: Elaboración propia

ANEXO III: ESPECIFICACIÓN DE LOS VALORES DEL COSTE ESTIMADO DEL PERSONAL DE VUELO

Comenzando por el coste de personal, se cuenta con que el personal necesario para cada uno de los vuelos del modelo será:

Roles del personal de una cabina de un avión

Roles de personal		Número por vuelo
Comandante	También denominado capitán o primer piloto del vuelo.	1
Copiloto	Segundo piloto al mando es quien ocupa el asiento de la derecha en la cabina de vuelo del avión.	1
Tripulantes de Cabina de Pasajeros	Antes denominados azafatos o auxiliares de vuelo. Todos los aviones que estén configurados para con más de 19 asientos, es obligatorio que cuenten con un tripulante de cabina de pasajeros, TCP, para poder operar. A partir de 50 asientos ya deben de ir 2 auxiliares de vuelo a bordo, y por cada bloque de 50 asientos adicionales, un TCP más.	6

Tabla III.1. Plantilla y roles en el vuelo.
Fuente: https://europeanflyers.com/
(9 de marzo de 2022)

III.I. Salario del Primer Piloto

Salario Primer Piloto Air Europa: tablas salariales 2015 Air Europa

Primer Piloto					
NIVEL	TOTAL ANUAL	S. BASE (X14)	P.R. VIAJE (X14)	P. TRANSP. (X12)	P.A. técnica (x12)
N1AP1	87.716,48	3.167,47	2.375,61	158,37	684,41
N1BP1	86.903,50	3.167,47	2.317,54	158,37	684,41
N1CP1	86.090,52	3.167,47	2.259,47	158,37	684,41
N1P1	85.277,54	3.167,47	2.201,40	158,37	684,41
N2P1	84.465,82	3.167,47	2.143,42	158,37	684,41
N3P1	83.651,30	3.167,47	2.085,24	158,37	684,41
N4P1	82.838,32	3.167,47	2.027,17	158,37	684,41
N5P1	82.025,62	3.167,47	1.969,12	158,37	684,41
N6P1	81.212,64	3.167,47	1.911,05	158,37	684,41
N7P1	80.399,66	3.167,47	1.852,98	158,37	684,41
N8P1	79.586,54	3.167,47	1.794,90	158,37	684,41
Se consulta el convenio colectivo de la compañía Air Europa para poder estimar el salario medio estimado de cada trabajador y poder obtener el coste estimado del personal en cada vuelo. Empezando por el caso del primer piloto.					

Tabla III.2. Tabla salarial primer piloto. (15 de febrero de 2022)
Fuente: Resolución de 10 de octubre de 2017, de la Dirección General de Empleo, por la que se registra y publica el IV Convenio colectivo de Air Europa Líneas Aéreas, SAU, y los tripulantes técnicos de vuelo. BOE. Núm. 256 martes 24 de octubre de 2017 Sec. III. Pág. 102427

Se calcula el coste salarial del primer piloto teniendo en cuenta:

$$\begin{aligned} &Salario\ Primer\ piloto\ (Total\ anual)_{ij} \\ &= \overline{Salario\ Base} \times 14\ Pagas + \overline{P.R.Viaje} \times 12\ Pagas \\ &+ \overline{P.Transporte} \times 12\ Pagas + \overline{P.A.Técnica} \times 12\ Pagas \end{aligned}$$

Se obtiene lo indicado en la primera columna de la tabla salarial, y que calculando la media o promedio:

$$\begin{matrix} Salario\ Medio \\ Primer\ Piloto \end{matrix} = \frac{\sum \begin{matrix} Salario\ Primer\ piloto \\ (Total\ anual)ij \end{matrix}}{n} = \frac{920.167,94\ €}{11} = 83.651,63€$$

Teniendo en cuenta las horas mensuales según convenio:

$$\begin{matrix} Coste\ Salarial \\ Primer\ Piloto\ Air\ Europa \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} Salario\ Medio\ Primer \\ Piloto\ Total\ Anual \end{matrix}}{12\ Meses \times 160\ Horas\ mensuales\ según\ convenio} = 43,57€/Hora$$

III.II. Salario del Segundo piloto

Se consulta el convenio colectivo de la compañía Air Europa para poder estimar el salario medio, en este caso del copiloto:

Salario segundo piloto Air Europa: tablas salariales Air Europa

Segundo Piloto					
NIVEL	TOTAL ANUAL	S. BASE (X14)	P.R. VIAJE (X14)	P. TRANSP. (X12)	P.A. técnica (x12)
N1AP2	67.022,52	2.217,23	1.847,71	158,37	684,41
N1BP2	66.209,26	2.217,23	1.789,62	158,37	684,41
N1CP2	65.396,14	2.217,23	1.731,54	158,37	684,41
N1P2	64.583,16	2.217,23	1.673,47	158,37	684,41
N2P2	63.770,46	2.217,23	1.615,42	158,37	684,41
N3P2	62.957,48	2.217,23	1.557,35	158,37	684,41
N4P2	62.144,36	2.217,23	1.499,27	158,37	684,41
N5P2	61.331,10	2.217,23	1.441,18	158,37	684,41
N6P2	60.518,40	2.217,23	1.383,13	158,37	684,41
N7P2	59.705,42	2.217,23	1.325,06	158,37	684,41
N8P2	58.892,58	2.217,23	1.267,00	158,37	684,41
N9P2	50.601,58	1.847,69	1.055,82	158,37	671,00
N9P2bis	43.381,36	1.575,97	900,55	158,37	567,47

Tabla 14. Tabla salarial segundo piloto. (15 de febrero de 2022)
Fuente: Resolución de 10 de octubre de 2017, de la Dirección General de Empleo, por la que se registra y publica el IV Convenio colectivo de Air Europa Líneas Aéreas, SAU, y los tripulantes técnicos de vuelo. BOE Núm. 256 martes 24 de octubre de 2017 Sec. III. Pág. 102427 y Pág. 102428.

Se calcula el coste salarial del segundo piloto teniendo en cuenta únicamente:

$$\begin{aligned} &Salario\ Segundo\ piloto\ (Total\ anual)_{ij} \\ &= \overline{Salario\ Base} \times 14\ Pagas + \overline{P.R.Viaje} \times 12\ Pagas \\ &+ \overline{P.Transporte} \times 12\ Pagas + \overline{P.A.Técnica} \times 12\ Pagas \end{aligned}$$

Donde se obtiene lo indicado en la primera columna de la tabla salarial, y que calculando la media o promedio:

$$\begin{matrix} Salario\ Medio \\ Segundo\ Piloto \end{matrix} = \frac{\sum \begin{matrix} Salario\ Segundo\ piloto \\ (Total\ anual)ij \end{matrix}}{n} = \frac{786.513{,}82\ €}{13} = 60.501{,}06€$$

Teniendo en cuenta las horas mensuales según convenio:

$$\begin{matrix} Coste\ Salarial \\ Segundo\ Piloto\ Air\ Europa \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} Salario\ Medio\ Segundo \\ Piloto\ Total\ Anual \end{matrix}}{12\ Meses \times \begin{matrix} 160\ Máx\ Horas\ mensuales \\ según\ convenio \end{matrix}} = 31{,}51€/Hora$$

III.III. Salario de los TCP

En último lugar y al igual que se hizo con anterioridad, se pasa a calcular el salario medio, en este caso, del TCP o tripulantes de cabina de pasajeros:

<u>Salario TCP Air Europa</u>
<u>Tabla Salarial 2015</u>
<u>Air Europa</u>

NIVEL	SUBNIVEL	TOTAL ANUAL	S. BASE (X14)	P.R. VIAJE (X14)	P. TRANSP. (X12)
NIV1A		25.583,03	664,50	1025,06	160,77
NIV1B		25.002,02	664,50	983,63	160,77
NIV1C		24.424,35	664,50	942,29	160,77
NIV1		23.861,66	664,50	902,10	160,77
NIV2		23.263,61	664,50	859,38	160,77
NIV3		22.684,79	664,50	818,04	160,77
NIV4		22.105,23	664,50	776,04	160,77
NIV5		21.525,37	664,50	785,21	160,77
NIV6		20.945,52	664,50	693,81	160,77
NIV7		20.411,23	664,50	655,64	160,77
NIV7 bis		19.787,14	664,50	611,06	160,77
NIV8	I	19.717,84	664,50	611,06	155,00
NIV8	II	13.107,70	543,33	269,84	143,61
NIV8	III	12.084,32	500,91	248,77	132,40

Tabla 15. Tabla salarial auxiliar de vuelo (15 de febrero de 2022)
Fuente: Resolución de 3 de julio de 2015, de la Dirección General de Empleo, por la que se registra y publica el Convenio colectivo de tripulantes de cabina de pasajeros de Air Europa Líneas Aéreas, SAU BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO. Núm. 172 lunes 20 de julio de 2015

Se calcula el coste salarial del segundo piloto teniendo en cuenta únicamente:

$$\begin{aligned} &Salario\ TCP\ (Total\ anual)_{ij} \\ &= \overline{Salario\ Base} \times 14\ Pagas + \overline{P.R.Viaje} \times 14\ Pagas \\ &+ \overline{P.Transporte} \times 12\ Pagas \end{aligned}$$

Donde se obtiene lo indicado en la primera columna de la tabla salarial, y que calculando la media o promedio:

$$\begin{matrix} Salario\ Medio \\ TCP \end{matrix} = \frac{\sum \begin{matrix} Salario\ TCP \\ (Total\ anual)ij \end{matrix}}{n} = \frac{294.503{,}81\ €}{14} = 21.035{,}99€$$

Teniendo en cuenta las horas mensuales según convenio:

$$\begin{matrix} Coste\ Salarial \\ TCP\ Air\ Europa \end{matrix} = \frac{\begin{matrix} Salario\ Medio \\ TCP\ Total\ Anual \end{matrix}}{12\ Meses \times \begin{matrix} 160\ Horas\ mensuales \\ según\ convenio \end{matrix}} = 10{,}96€/Hora$$

Complementariamente, se ha extraído la duración de los vuelos de origen i destino j de la compañía para calcular el coste total estimado de personal de cada viaje:

<u>Duración viaje ida Air Europa</u>

Duración viaje ida Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	-	1h 20 min	1h 25 min	1h 25 min	2h 55 min	1h 15min	2h 45 min
Barcelona El Prat	1h 25min	-	50 min	1h 40 min	3h 25 min	1h	3h 05min
Palma de Mallorca	1h 25min	55 min	-	1h 30 min	3h 15 min	50 min	2h 50 min
Málaga	1h 30min	1h 40min	1h 25 min	-	2h 30 min	1h 15min	2h 10 min
Tenerife	2h 45min	3h 15min	3h 15min	2h 15min	-	4h	50min
Ibiza	1h 15min	55 min	50	1h 15 min	4h 10 min	-	4h
Lanzarote	2h 30min	3h 05min	2h 50min	2h	50 min	3h 45 min	-

Tabla 16. Duración del viaje solo de ida
Fuente: Flight Connections https://www.flightconnections.com/es
(9 de marzo de 2022)

Para, obtener la tabla con el coste total estimado de personal de cada viaje origen i destino j:

$$\begin{matrix} Coste\ total \\ personal \\ vuelo \end{matrix}_{ij} = \left(\overline{\begin{matrix} Coste\ Salarial \\ Primer \\ Piloto \end{matrix}} + \overline{\begin{matrix} Coste\ Salarial \\ Segundo \\ Piloto \end{matrix}} + 6 \times \overline{\begin{matrix} Coste \\ salarial\ TCP \end{matrix}} \right) \times \begin{matrix} Duración \\ vuelo \end{matrix}$$

<u>Coste total personal</u>

Coste total personal del vuelo Air Europa estimado en euros (€)	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	-	187,79	199,52	199,52	410,78	176,05	387,31
Barcelona El Prat	199,52	-	117,37	234,73	481,20	143,19	434,26
Palma de Mallorca	199,52	129,10	-	211,26	457,73	117,37	399,05
Málaga	211,26	234,73	199,52	-	352,10	176,05	305,15
Tenerife	387,31	457,73	457,73	316,89	-	563,36	117,37
Ibiza	176,05	129,10	117,37	176,05	586,83	-	563,36
Lanzarote	352,10	434,26	399,05	281,68	117,37	528,15	-

Tabla 17. Coste total del personal.
Fuente: Elaboración propia

ANEXO IV: MATRIZ DE BENEFICIO

Con lo que, como se obtuvo previamente se vuelve a trasladar la matriz de beneficios que muestra la tabla y que define el beneficio de cada vuelo con origen i destino j:

$$\overline{\begin{matrix}Precio\ medio\\ billete\ Business_{ij}\end{matrix}} \times 22 + \overline{\begin{matrix}Precio\ medio\\ billete\ Turista\ _{ij}\end{matrix}} \times 274$$

$$-\left(\overline{\begin{matrix}Coste\ Salarial\\ Primer\\ Piloto\end{matrix}} + \overline{\begin{matrix}Coste\ Salarial\\ Segundo\\ Piloto\end{matrix}} + 6 \times \overline{\begin{matrix}Coste\\ salarial\ TCP\end{matrix}}\right) \times \begin{matrix}Duración\\ vuelo\end{matrix}$$

$$-\left(\begin{matrix}Consumo\ de\\ combustible_{ij}\end{matrix} \times Precio\ Jet\ A\right)$$

<u>Beneficio estimado vuelos ida</u>

	Matriz beneficio estimado en euros (€)						
Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas		13659,17	12790,01	6873,27	3781,18	11832,89	4643,38
Barcelona El Prat	16475,44		14917,08	11156,09	6272,17	13574,17	10801,82
Palma de Mallorca	11466,01	15365,35		8648,54	1901,33	11273,22	24,12
Málaga	7483,53	6024,09	5038,28		2691,63	5760,21	3876,38
Tenerife	6726,65	5245,91	3971,33	2562,84		746,42	4305,85
Ibiza	14370,89	16786,26	12233,22	7414,21	1142,95		1227,86
Lanzarote	3964,59	3341,82	626,12	3749,85	3849,85	4427,07	
Se muestran los resultados obtenidos sin redondeo							
	Matriz beneficio estimado en euros (€)						
Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote
Madrid Barajas	-	13659	12790	6873	3781	11833	4643
Barcelona El Prat	16475	-	14917	11156	6272	13574	10802
Palma de Mallorca	11466	15365	-	8649	1901	11273	24
Málaga	7484	6024	5038	-	2692	5760	3876
Tenerife	6727	5246	3971	2563	-	746	4306
Ibiza	14371	16786	12233	7414	1143	-	1228
Lanzarote	3965	3342	626	3750	3850	4427	-
Se muestran los resultados obtenidos con redondeo.							

Tabla 18. Matriz de beneficio del modelo estimado.

ANEXO V: OFERTA DEL ORIGEN

Nuestro problema consiste en determinar el número de vuelos desde m orígenes a n destinos, que nos proporcionen los máximos beneficios. Para determinar la disponibilidad de cada aeropuerto de origen, se ha considerado el número total de salidas de vuelos comerciales de la compañía Air Europa con origen y destino en los siete aeropuertos nacionales analizados. Los datos son del año 2019:

Salidas compañía Air Europa 2019:

Salidas cualquier compañía 2019 Todas las compañías	$Total\ de\ Salidas_{\ i}$ $\sum Salidas_{ij}$
Madrid Barajas	16.191
Barcelona El Prat	3.204
Palma de Mallorca	10.447
Málaga	1.854
Tenerife	4.928
Ibiza	2.875
Lanzarote	1.289

Tabla V.1. Total de salidas vuelos comerciales Air Europa en 2019
Fuente: AENA
https://wwwssl.aena.es/csee/Satellite?c=Pageycid=1445456135502ypagename=Estadisticas%2FEstadisticas
(9 de marzo de 2022)

ANEXO VI: DEMANDA DEL DESTINO

Para determinar la demanda de cada aeropuerto de llegada, se ha tomado como dato el número total de llegadas de la compañía Air Europa a los siete aeropuertos analizados, durante año 2019. Se ha considerado el número total de llegadas de vuelos comerciales de la compañía Air Europa con origen y destino en los siete aeropuertos nacionales analizados. Los datos son del año 2019.

Llegadas compañía Air Europa 2019

Llegadas año de referencia 2019	$\frac{Total\ de\ Llegadas\ _i}{\sum Llegadas_{ij}}$
Madrid Barajas	16.020
Barcelona El Prat	3.156
Palma de Mallorca	10.427
Málaga	1.831
Tenerife	4.913
Ibiza	2.875
Lanzarote	1.288

Tabla VI.1. Total de llegadas vuelos comerciales Air Europa en 2019.
Fuente: AENA
https://wwwssl.aena.es/csee/Satellite?c=Pageycid=1445456135502ypagename=Estadisticas%2FEstadisticas
(9 de marzo de 2022)

ANEXO VII. MÉTODO DE ESQUINA NOROESTE

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
	Demanda del destino a_j	16020	3156	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Se elabora la tabla de transporte, donde se expresan: los costes de cada vuelo origen *i* y destino *j*, la oferta total asociada a cada origen *i* y la demanda total asociada a cada destino *j*. Como el problema no está en equilibrio, pues la oferta total de orígenes es mayor que la demanda, se introduce una columna de destino ficticio y costes nulos en las celdas c_{ij} asociadas a ella.

El Método de Esquina Noroeste (MEN), comienza tomando la posición de la tabla situada más al noroeste, x_{11}, en la posición $(1,1)$ y asignando en ella la máxima cantidad posible de unidades, cantidad que será el mínimo entre la demanda de destino a_1 y la disponibilidad del origen b_1. En este caso, $x_{11} = Min\,\{16.191, 16.020\} = 16.020$. A continuación, la demanda $a_1$queda reducida a cero y por tanto saturada la columna 1, y la disponibilidad del origen b_1 queda igualada a $b_1 - x_{11} = 171$.

En consecuencia, se tiene la tabla:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	171
		16.020	171							
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		-								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		-								
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
		-								
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		-								
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		-								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		-								
	Demanda del destino a_j	0	3156	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Se repite el procedimiento con esta tabla

Ahora, la esquina noroeste corresponde a la x_{12}, en la posición $(1,2)$. La cantidad que se asigna a esta posición es $x_{12} = Min\{171,3.156\} = 171$. La disponibilidad de oferta b_1, se anula, lo que significa que se satisface la fila 1. Asimismo, la demanda a_2 se reduce a $a_2 = 3.156 - x_{12} = 2.985$.

Tendremos la tabla siguiente:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	0
		16.020	171	-	-	-	-	-	-	
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		-	2.985							
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		-								
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
		-								
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		-								
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		-								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		-								
	Demanda del destino a_j	0	2985	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Descartando la fila 1 y la columna 1, al pasar a ser nula su disponibilidad, se tiene esta nueva tabla.

Ahora, la esquina noroeste corresponde a la x_{22}, en la posición $(2,2)$. La cantidad que se asigna a esta posición es $x_{22} = Min\{3.204, 2.985\} = 2.985$. Una vez, reducidas la disponibilidad de demanda a_2, esta se anula, lo que significa que se satisface la columna 2. Asimismo, la oferta b_2 se reduce a 309, $b_2 = 3.204 - x_{22} = 219$.

Queda así esta tabla

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	0
		16.020	171	-	-	-	-	-	-	
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	219
		-	2.985	219						
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		-	-							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
		-	-							
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		-	-							
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		-	-							
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		-	-							
	Demanda del destino a_j	0	0	10427	1831	4913	2875	1288	278	

De esta tabla, se descarta la columna 2 al quedar saturada y satisfecha. Se repite el procedimiento del paso anterior.

Ahora, la esquina noroeste corresponde a la x_{23}, en la posición $(2,3)$. La cantidad que se asigna a esta posición es $x_{23} = Min\{219, 10.427\} = 219$. Una vez hecha la asignación, se comprueba que se anula la disponibilidad de oferta b_2 y se satura la fila 2. Por otro lado, la demanda a_3 se reduce $a_3 - x_{23} = 10.427 - 219 = 10.208$.

Continuando con el procedimiento, queda con la siguiente tabla:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	0
		16.020	171	-	-	-	-	-	-	
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0
		-	2.985	219						
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0
		-	-	10.208	239					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	0
		-	-	-	1.592	262				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0
		-	-			4.651	277			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0
		-	-				2.598	277		
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		-	-							
	Demanda del destino a_j	0	0	0	0	0	0	1.011	278	

En los casos que se iguale $a_j = b_i$, $x_{66} = Min\{2.598, 2.598\}$, como ocurre en $a_6 = b_6$ se satura tanto la demanda $a_6 = 0$ como la oferta $b_6 = 0$. Por lo tanto, se puede elegir arbitrariamente. Para nuestro problema, se elige descartar la columna 6

Se ha seguido el mismo proceder para cada celda x_{ij} con asignación, hasta llegar a tener esta tabla, donde únicamente faltan por asignar las celdas x_{77} $_y$ x_{78}.

Se obtiene la solución básica factible que se muestra en esta tabla:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	0
		16.020	171	-	-	-	-	-	-	
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0
		-	2.985	219	-	-	-	-	-	
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0
		-	-	-10.208	-239	-	-	-	-	
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	0
		-	-	-	1.592	262	-	-	-	
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0
		-	-	-	-	4.651	277	-	-	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0
		-	-	-	-	-	2.598	277	-	
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	0
		-	-	-	-	-	-	1.011	278	
	Demanda del destino a_j	0	0	0	0	0	0	0	0	

El beneficio asociado a esta solución es:

$$Beneficio = -Z = -[0(16.020) - 13.659(171) - 0(2.985) - 14.917(219) - 0(10.208) - 8.649(239) - 0(1.592) - 2.692(262) - 0(4.651) - 746(277) - 0(2.598) - 1.228(277) - 0(1.011) - 0(278)] = 8.921.725.$$

ANEXO VIII. MÉTODO DEL COSTE MÍNIMO (MCM)

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
			2.875							
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
	Demanda del destino a_j	16020	3156	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Se comienza estableciendo la tabla de transporte, donde se expresan, los costes de cada vuelo origen *i* destino *j*, la oferta total asociada a cada origen *i* y la demanda total asociada a cada destino. Como el problema no está en equilibrio, pues la oferta total de orígenes es mayor que la demanda, se introduce una columna de destino ficticio y costes nulos en las c_{ij} asociadas a ella.

Según este método, se trata simplemente de asignar la máxima cantidad posible, según la disponibilidad de la oferta b_i y demanda a_j a la celda de la tabla con el menor coste c_{ij} asociado, de manera iterativa hasta realizar todas las asignaciones. Comienza tomando la posición de la tabla con menor coste, $c_{62} = -16.786$, asociado a la variable x_{62} y se asigna en ella la máxima cantidad posible de unidades, que será el mínimo entre la demanda de destino a_2 y la disponibilidad del origen b_6. En este caso, $x_{62} = Min\{2.875, 3.156\} = 2.875$. A continuación, se reducen en ese valor asignado la demanda a_2, $a_2 - x_{62} = 281.$ y la disponibilidad del origen b_1, que queda reducida a cero y por tanto satura la fila 6.

Como resultado se obtiene la siguiente tabla:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3.204	-	-	-	-	-	-	-	
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0
		-	2.875	-	-	-	-	-	-	
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
	Demanda del destino a_j	16020	281	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Se descarta la fila 6 al quedar saturada y satisfecha. Se repite el procedimiento con esta tabla.

Se toma la siguiente posición de la tabla con menor coste, $c_{21} = -16.475$, asociado a la variable x_{21} y se asigna en ella la máxima cantidad posible de unidades, que será el mínimo entre la demanda de destino a_1 y la disponibilidad del origen b_2. En este caso, $x_{21} = Min\{3.204, 16.020\} = 3.204$. A continuación, se reducen en ese valor asignado la demanda a_1, $a_1 - x_{21} = 16.020 - 3.204 = 12.816$. En cuanto a la disponibilidad de la oferta del origen b_1, queda reducida a cero y por tanto satura la fila 2.

Se toma de nuevo la tabla con las demanda y disponibilidades actualizadas:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3.204	-	-	-	-	-	-	-	
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0
		-	2.875	-	-	-	-	-	-	
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
	Demanda del destino a_j	16020	281	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Como anteriormente, se toma la siguiente posición de la tabla con menor coste, $c_{32} = -15.365$, asociado a la variable x_{32} y se asigna en ella la máxima cantidad posible de unidades, que será el mínimo entre la demanda de destino a_2 y la disponibilidad del origen b_3. En este caso, $x_{32} = Min\{10.447, 281\} = 281$. A continuación, se reducen en ese valor asignado la disponibilidad de oferta b_3, $b_3 - x_{32} = 10.447 - 281 = 10.166$. Asimismo, la demanda de destino a_2, al reducirse, se llega a anular y por tanto satura la columna 2 al quedar la demanda totalmente satisfecha.

Estos mismos pasos serán los que se han de seguir hasta ir dando valor a las 14 variables básicas, del menor coste c_{ij} al mayor dentro de esas 11 asignaciones que quedan pendientes.

Tabla que obtenemos en el paso previo al último:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	0
		-	-	10.427	1.831	-	2.875	1.058	-	
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0
		3.204	-	-	-	-	-	-	-	
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0
		10.166	281	-	-	-	-	-	-	
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	0
		1.854	-	-	-	-	-	-	-	
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		796	-	-	-		-	230		
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0
		-	2.875	-	-	-	-	-	-	
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	0
		-	-	-	-	1.289	-	-	-	
	Demanda del destino a_j	0	0	0	0	3.624	0	0	278	

Únicamente quedan pendientes de satisfacer: una demanda $a_5 = 3.624$ que solamente se puede asignar en la celda x_{55} al que le corresponde un coste $c_{55} = 0$ y una demanda $a_8 = 278$ que sólo puede asignarse en la celda x_{58}. Las asignaciones previas a esta situación se han ido dando del coste menor posible de c_{ij} al mayor. Reduciendo cada demanda a_j y disponibilidad de oferta b_i en función del valor de cada asignación.

Se tiene la solución básica factible que se muestra en esta tabla:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	0
		-	-	10.427	1.831	-	2.875	1.058	-	
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0
		3.204	-	-	-	-	-	-	-	
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0
		10.166	281	-	-	-	-	-	-	
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	0
		1.854	-	-	-	-	-	-	-	
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		796	-	-	-	1.011	-	230	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0
		-	2.875	-	-	-	-	-	-	
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	0
		-	-	-	-	1.289	-	-	-	
	Demanda del destino a_j	0	0	0	0	3.624	0	0	278	

El beneficio asociado a esta solución es:

$$Beneficio = -Z = -[-12.790(10.427) - 6.873(1.831) - 11.833(2.875) - 4.643(1.058) - 16.475(3.204) - 11.466(10.166) - 15.365(281) - 7.484(1.854) - 6.727(796) + 0(1.011) - 4.306(230) + 0(278) - 16.786(2.875) - 3.850(1.289)] = 431.987.591.$$

.

ANEXO IX. MÉTODO DE APROXIMACIÓN DE VOGEL

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
	Demanda del destino a_j	16020	3156	10427	1831	4913	2875	1288	278	

Se establece la tabla de transporte, donde se expresan, los costes de cada vuelo origen *i* destino *j*, la oferta total asociada a cada origen *i* y la demanda total asociada a cada destino *j*. Como el problema no está en equilibrio, pues la oferta total de orígenes es mayor que la demanda, se introduce una columna de destino ficticio y costes nulos en las celdas c_{ij} asociadas a ella.

En primer lugar, se comienza determinando las penalizaciones de la fila (PFi) atribuidas a la disponibilidad de oferta b_i y las penalizaciones de la columna (PCj) asociadas a la demanda a_j, obtenidas como el valor absoluto resultado de la diferencia entre los dos menores costes de cada $\text{fila } i$ y $\text{columna } j$, respectivamente. Se colocan estos valores en una columna y una fila añadida a la tabla, obteniendo una tabla ampliada, con la que poder empezar a trabajar en las asignaciones y obtención de las variables básicas.

Paso 1. Así se dispone de la siguiente tabla:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	-12.790	-13.659	869
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	-14.917	-16.475	1.558
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	-11.466	-15.365	3.899
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-6.024	-7.484	1.460
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	-5.246	-6.727	1.481
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	-14.371	-16.786	2.415
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.965	-4.427	462
	Demanda del destino a_j	16020	3156	10427	1831	4913	2875	1288	278				
	Coste más bajo 1	-14.371	-15.365	-12.790	-8.649	-3.850	-11.833	-4.643	0				
	Coste más bajo 2	-16.475	-16.786	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	-10.802	0				
	PCj	2.104	1.421	2.127	2.507	2.422	1.741	6.159	0				

A continuación, se identifica la fila o columna con mayor penalización, que será PC_7 con valor 6.159 y destacado en la tabla en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa columna, que es la celda correspondiente a x_{27}, con un coste $c_{27} = -10.802$. Así, se asigna a ella la mayor cantidad posible de unidades dada por $x_{27} = Min(3.204, 1.288) = 1.288$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 2, b_2 y la demanda a_7, correspondiente a la columna 7, que quedara anulada y por ende satisfecha, saturándose.

Paso 2. Se obtiene la tabla:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	-12.790	-13.659	869
								-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	1.916	-14.917	-16.475	1.558
								1.288					
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	-11.466	-15.365	3.899
			3.156					-					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-6.024	-7.484	1.460
								-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	-5.246	-6.727	1.481
								-					
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	-14.371	-16.786	2.415
								-					
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.965	-4.427	462
								-					
	Demanda del destino a_j	16020	3156	10427	1831	4913	2875	0	278				
	Coste más bajo 1	-14.371	-15.365	-12.790	-8.649	-3.850	-11.833	0	0				
	Coste más bajo 2	-16.475	-16.786	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	0	0				
	PCj	2.104	1.421	2.127	2.507	2.422	1.741	0	0				

A continuación, se identifica la fila o columna con mayor penalización, que será PF_3 con valor 3.899 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{32}, con un coste $c_{32} = -15.365$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dada por $x_{32} = Min\ (10.447, 3.156) = 3.156$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 3, b_3 y la demanda de la columna 2, que quedara anulada y por ende satisfecha, saturándose la columna.

Paso 3. A partir de lo anterior la tabla quedará como se muestra a continuación:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	-11.833	-12.790	957
			-					-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	1.916	-14.917	-16.475	1.558
			-					1.288					
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	7.291	-11.273	-11.466	193
			3.156					-					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-5.760	-7.484	1.724
			-					-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	-3.971	-6.727	2.756
		4.928	-					-					
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	-12.233	-14.371	2.138
			-					-					
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.965	-4.427	462
			-					-					
	Demanda del destino a_j	16020	0	10427	1831	4913	2875	0	278				
	Coste más bajo 1	-14.371	0	-12.790	-8.649	-3.850	-11.833	0	0				
	Coste más bajo 2	-16.475	0	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	0	0				
	PCj	2.104	0	2.127	2.507	2.422	1.741	0	0				

A continuación, se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PF_5 con valor 2.756 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{51}, con un coste $c_{51} = -6.727$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dada por $x_{51} = Min\ (4.928, 16.020) = 4.928$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 5, b_5 , que quedará anulada y satisfecha, por lo que se saturará y la demanda de la columna 1, a_1, que disminuirá en 4.928, pasando a tomar el valor 11.092.

Paso 4. La tabla quedara como se muestra a continuación:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	-11.833	-12.790	957
			-					-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	1.916	-14.917	-16.475	1.558
			-		1.831			1.288					
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	7.291	-11.273	-11.466	193
			3.156					-					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-5.760	-7.484	1.724
			-					-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	-12.233	-14.371	2.138
			-					-					
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.965	-4.427	462
			-					-					
	Demanda del destino a_j	11.092	0	10427	1831	4913	2875	0	278				
	Coste más bajo 1	-14.371	0	-12.790	-8.649	-3.850	-11.833	0	0				
	Coste más bajo 2	-16.475	0	-14.917	-11.156	-6.272	-13.574	0	0				
	PCj	2.104	0	2.127	2.507	2.422	1.741	0	0				

Al igual que en pasos anteriores, se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PC_4 con valor 2.507 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{24}, con un coste $c_{24} = -11.156$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{24} = Min\ (1.916, 1.831) = 1.831$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 2, b_2 y la demanda a_4, de la columna 4, que quedara anulada y por ende satisfecha, saturándose.

Paso 5. De este modo, la tabla obtenida es:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	-11.833	-12.790	957
			-		-			-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	85	-14.917	-16.475	1.558
			-		1.831	85		1.288					
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	7.291	-11.273	-11.466	193
			3.156		-			-					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-5.760	-7.484	1.724
			-		-			-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	-12.233	-14.371	2.138
			-		-			-					
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.965	-4.427	462
			-		-			-					
	Demanda del destino a_j	11.092	0	10427	0	4913	2875	0	278				
	Coste más bajo 1	-14.371	0	-12.790	0	-3.850	-11.833	0	0				
	Coste más bajo 2	-16.475	0	-14.917	0	-6.272	-13.574	0	0				
	PCj	2.104	0	2.127	0	2.422	1.741	0	0				

De nuevo se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PC_5 con valor 2.422 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{25}, con un coste $c_{25} = -6.272$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{25} = Min\ (85, 4.913) = 85$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 2, b_2, que quedara anulada y satisfecha, pasando a saturarla y la demanda a_5 de la columna 5.

Paso 6. La tabla que se obtiene es la siguiente:

Orígenes i	Destinos j / Compañía Air Europa	1 Madrid Barajas	2 Barcelona El Prat	3 Palma de Mallorca	4 Málaga	5 Tenerife	6 Ibiza	7 Lanzarote	8 Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	-11.833	-12.790	957
			-		-			-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	7.291	-11.273	-11.466	193
			3.156		-			-					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-5.760	-7.484	1.724
			-		-			-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	-12.233	-14.371	2.138
		2.875	-		-			-					
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.965	-4.427	462
			-		-			-					
	Demanda del destino a_j	11.092	0	10427	0	4.828	2875	0	278				
	Coste más bajo 1	-11.466	0	-12.233	0	-3.781	-11.273	0	0				
	Coste más bajo 2	-14.371	0	-12.790	0	-3.850	-11.833	0	0				
	PCj	2.905	0	557	0	2.422	560	0	0				

Igualmente se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PC_1 con valor 2.905 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{61}, con un coste $c_{61} = -14.371$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{61} = Min\,(2.875, 11.092) = 2.875$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 6, b_6, que quedara anulada y satisfecha, pasando a saturarla y la demanda, a_1, correspondiente a la columna 1.

Paso 7. La tabla obtenida es:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	-11.833	-12.790	957
			-	10.427	-			-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	7.291	-11.273	-11.466	193
			3.156		-			-					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-5.760	-7.484	1.724
			-		-			-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0	0	0	0
		2.875	-	-	-	-	-	-	-				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.965	-4.427	462
			-		-			-					
	Demanda del destino a_j	8.217	0	10427	0	4.828	2875	0	278				
	Coste más bajo 1	-7.484	0	-5.038	0	-3.781	-11.273	0	0				
	Coste más bajo 2	-11.466	0	-12.790	0	-3.850	-11.833	0	0				
	PCj	3.982	0	7.752	0	69	560	0	0				

En este paso, de nuevo, se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PC_3 con valor 7.752 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{13} con un coste $c_{13} = -12.790$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{13} = Min\,(16.191, 10.427) = 10.427$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 1, b_1 y la demanda a_3 de la columna 3, que quedara anulada y satisfecha, pasando a saturarla.

Paso 8. A partir de lo anterior la tabla quedará como se muestra a continuación:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	5.764	-3.781	-11.833	8.052
			-	10.427	-		2.875	-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	7.291	-11.273	-11.466	193
			3.156	-	-			-					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-5.760	-7.484	1.724
			-	-	-			-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0	0	0	0
		2.875	-	-	-	-	-	-	-				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.965	-4.427	462
			-	-	-			-					
	Demanda del destino a_j	8.217	0	0	0	4.828	2875	0	278				
	Coste más bajo 1	-7.484	0	0	0	-3.781	-11.273	0	0				
	Coste más bajo 2	-11.466	0	0	0	-3.850	-11.833	0	0				
	PCj	3.982	0	0	0	69	560	0	0				

En este paso de nuevo, se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PF_1 con valor 8.052 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{16} con un coste $c_{16} = -11.833$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{16} = Min\,(5.764, 2.875) = 2.875$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 1, b_1 y la demanda a_6 de la columna 6, que quedara anulada y satisfecha, pasando a saturarla a partir de ahora.

Paso 9. Así, la tabla quedará como se muestra a continuación:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	2.889	0	-3.781	3.781
			-	10.427	-		2.875	-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	7.291	-1.901	-11.466	9.565
		7.291	3.156	-	-		-	-					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-2.692	-7.484	4.792
			-	-	-		-	-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0	0	0	0
		2.875	-	-	-	-	-	-	-				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.850	-3.965	115
			-	-	-		-	-					
	Demanda del destino a_j	8.217	0	0	0	4.828	0	0	278				
	Coste más bajo 1	-7.484	0	0	0	-3.781	0	0	0				
	Coste más bajo 2	-11.466	0	0	0	-3.850	0	0	0				
	PCj	3.982	0	0	0	69	0	0	0				

En este paso, nuevamente se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PF_3 con valor 9.565 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{31} con un coste $c_{31} = -11.466$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{31} = Min\,(7.291, 8.217) = 7.291$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 3, b_3 que quedara anulada y satisfecha, pasando a saturarla y la demanda de la columna $1, a_1$.

Paso 10. De este modo, la tabla quedará como se muestra a continuación:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	2.889	0	-3.781	3.781
			-	10.427	-		2.875	-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0	0	0	0
		7.291	3.156	-	-	-	-	-	-				
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	-2.692	-7.484	4.792
		926	-	-	-		-	-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0	0	0	0
		2.875	-	-	-	-	-	-	-				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	-3.850	-3.965	115
			-	-	-		-	-					
	Demanda del destino a_j	926	0	0	0	4.828	0	0	278				
	Coste más bajo 1	-3.965	0	0	0	-3.781	0	0	0				
	Coste más bajo 2	-7.484	0	0	0	-3.850	0	0	0				
	PCj	3519	0	0	0	69	0	0	0				

Como se hizo en los pasos anteriores, se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PF_4 con valor 4.792 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{41} con un coste $c_{41} = -7.484$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{41} = Min\,(1.854,\ 926) = 926$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 4, b_4 y la demanda de la columna $1, a_1$, que quedara anulada y satisfecha, pasando a saturarla a partir de ahora.

Paso 11. Tras lo anterior, la tabla quedara como se muestra a continuación:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	2.889	0	-3.781	3.781
		-	-	10.427	-		2.875	-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0	0	0	0
		7.291	3.156	-	-	-	-	-	-				
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	928	0	-2.692	2.692
		926	-	-	-		-	-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0	0	0	0
		2.875	-	-	-	-	-	-	-				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	0	-3.850	3.850
		-	-	-	-	1.289	-	-					
	Demanda del destino a_j	0	0	0	0	4.828	0	0	278				
	Coste más bajo 1	0	0	0	0	-3.781	0	0	0				
	Coste más bajo 2	0	0	0	0	-3.850	0	0	0				
	PCj	0	0	0	0	69	0	0	0				

Como se hizo con anterioridad, se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PF_7 con valor 3.850 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{75} con un coste $c_{75} = -3.850$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{75} = Min\ (1.289, 4.828\ ) = 1.289$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 7, b_7 que quedara anulada y satisfecha, pasando a saturarla a partir de ahora y la demanda de la columna 5, a_5.

Paso 12. Con todo esto, la tabla quedará como se muestra a continuación:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	2.889	0	-3.781	3.781
		-	-	10.427	-	2.889	2.875	-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0	0	0	0
		7.291	3.156	-	-	-	-	-	-				
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	928	0	-2.692	2.692
		926	-	-	-		-	-					
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0	0	0	0
		2.875	-	-	-	-	-	-	-				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	0	0	0	0
		-	-	-	-	1.289	-	-	-				
	Demanda del destino a_j	0	0	0	0	3.539	0	0	278				
	Coste más bajo 1	0	0	0	0	-2.692	0	0	0				
	Coste más bajo 2	0	0	0	0	-3.781	0	0	0				
	PCj	0	0	0	0	1089	0	0	0				

Como se hizo con anterioridad, se identifica la fila o columna con mayor penalización que será PF_1 con valor 3.781 y destacado en color rosa. Posteriormente, se ha de elegir la posición de menor coste dentro de esa fila, que es la celda correspondiente a x_{15} con un coste $c_{15} = -3.781$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades dado por $x_{15} = Min\ (2.889, 3.539) = 2.889$. Posteriormente, se procede a reducir la disponibilidad de la fila 1, b_1 que quedara anulada y satisfecha, pasando a saturarla a partir de ahora y la demanda de la columna 5, a_5.

Paso 13. Así, la tabla quedara como se muestra a continuación:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	0	0	0	0
		-	-	10.427	-	2.889	2.875	-	-				
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0	0	0	0
		7.291	3.156	-	-	-	-	-	-				
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	928	0	-2.692	2.692
		926	-	-	-	650	-	-	278				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0	0	0	0
		2.875	-	-	-	-	-	-	-				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	0	0	0	0
		-	-	-	-	1.289	-	-	-				
	Demanda del destino a_j	0	0	0	0	3.539	0	0	278				
	Coste más bajo 1	0	0	0	0	0	0	0	0				
	Coste más bajo 2	0	0	0	0	-2.692	0	0	0				
	PCj	0	0	0	0	2.692	0	0	0				

Ahora, se puede comprobar que únicamente queda por asignar la celda x_{45} en la posición $(4{,}5)$ la única que tiene un índice de penalización distinto a cero y correspondiente a un coste $c_{45} = -2.692$. Así, se asigna en ella la mayor cantidad posible de unidades que falten por asignar, en este caso 650. Por otro lado, la celda a falta de asignar de toda la tabla, x_{48}, contendrá las 278 correspondientes al desequilibrio entre oferta y demanda, cantidad que supone la última asignación del problema.

Paso 14. Obtención solución. De este modo, se tiene la solución básica factible que se muestra en esta tabla:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8				
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	Coste más bajo 1	Coste más bajo 2	PFi
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	0	0	0	0
		-	-	10.427	-	2.889	2.875	-	-				
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	0	0	0	0
		-	-	-	1.831	85	-	1.288	-				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	0	0	0	0
		7.291	3.156	-	-	-	-	-	-				
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	928	0	-2.692	2.692
		926	-	-	-	650	-	-	278				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	0	0	0	0
		4.928	-	-	-	-	-	-	-				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	0	0	0	0
		2.875	-	-	-	-	-	-	-				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	0	0	0	0
		-	-	-	-	1.289	-	-	-				
	Demanda del destino a_j	0	0	0	0	3.539	0	0	278				
	Coste más bajo 1	0	0	0	0	0	0	0	0				
	Coste más bajo 2	0	0	0	0	-2.692	0	0	0				
	PCj	0	0	0	0	2.692	0	0	0				

El beneficio asociado a esta solución es:

$$\text{Beneficio} = -Z = -[-12.790(10.427) - 3.781(2.889) - 11.833(2.875) - 11.156(1.831) - 6.272(85) - 10.802(1.288) - 11.466(7.291) - 15.365(3.156) - 7.484(926) - 2692(650) + 0(278) - 6.727(4.928) - 14.371(2.875) - 3.850(1.289)] = 433.377.707.$$

ANEXO X. RESOLUCIÓN DEL MODELO Y MEJORA DE LA SOLUCION FACTIBLE BÁSICA OBTENIDA POR EL MÉTODO DE LA ESQUINA NOROESTE

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
		16.020	171	-	-	-	-	-	-	
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		-	2.985	219	-	-	-	-	-	
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		-	-	10.208	-239	-	-	-	-	
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
		-	-	-	1.592	262	-	-	-	
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		-	-	-	-	4.651	277	-	-	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		-	-	-	-	-	2.598	277	-	
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		-	-	-	-	-	-	1.011	278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Se parte de la solución básica factible obtenida a partir del Método de Esquina Noroeste, y se evalúa si es óptima. Para llevar a cabo esta evaluación se realiza una prueba de optimalidad al conjunto de variables de la tabla. Esto se hará, calculando los $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, de las variables no básicas. Pues como se sabe en las variables básicas $c_{ij} - u_i - v_j = 0$.

Paso 1.

-

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		16.020	171	-	-	-	-	-	-			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{22} - v_2$	13.659
		-	2.985	219	-	-	-	-	-			
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{33} - v_3$	28.576
		-	-	10.208	-239	-	-	-	-			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{44} - v_4$	37.225
		-	-	-	1.592	262	-	-	-			
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{55} - v_5$	39.917
		-	-	-	-	4.651	277	-	-			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{66} - v_6$	40.663
		-	-	-	-	-	2.598	277	-			
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{77} - v_7$	41.891
		-	-	-	-	-	-	1.011	278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{23} - u_2$	$c_{34} - u_3$	$c_{45} - u_4$	$c_{56} - u_5$	$c_{67} - u_6$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13.659	-28.576	-37.225	-39.917	-40.663	-41.891	-41.891			

Como se ha indicado, a partir de la solución básica factible que muestra la tabla anterior, se pasa a crear la tabla correspondiente a la prueba de optimalidad, y se calculan los costes ficticios u_i y v_j, para, a partir de estos poder obtener las expresiones $c_{ij} - u_i - v_j$, que determinen de optimalidad de la solución.

Para calcular los costes ficticios o reducidos u_i y v_j, se empieza dando valor cero a $u_1 = 0$, con esto, se obtiene un sistema de 14 ecuaciones: $u_i + v_j = c_{ij}$. Con este valor $u_1 = 0$ y a partir de los costes de las variables con asignación en la primera fila, fila 1, c_{11} y c_{12}, se puede calcular $v_1 = c_{11} - u_{11}$ y $v_2 = c_{12} - u_1$ e ir calculando uno a uno todos los valores u_i y v_j.

Paso 2. Test de optimalidad 1.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	-	+							16.191	$u_1 = 0$	0
		0	0	15786	30352	36136	28830	37248	41891			
2	Barcelona El Prat		-	+						3.204	$c_{22} - v_2$	13.659
		-30134	0	0	12410	19986	13430	17430	28232			
3	Palma de Mallorca			-	+					10.447	$c_{33} - v_3$	28.576
		-40042	-30282	0	0	9440	814	13291	13315			
4	Málaga				-	+				1.854	$c_{44} - v_4$	37.225
		-44709	-29590	-13687	0	0	-2322	790	4666			
5	Tenerife					-	+			4.928	$c_{55} - v_5$	39.917
		-46644	-31504	-15312	-5255	0	0	-2332	1974			
6	Ibiza	+					-			2.875	$c_{66} - v_6$	40.663
		-55034	-43790	-24320	-10852	-1889	0	0	1228			
7	Lanzarote									1.289	$c_{77} - v_7$	41.891
		-45856	-31574	-13941	-8416	-5824	-5655	0	0			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{23} - u_2$	$c_{34} - u_3$	$c_{45} - u_4$	$c_{56} - u_5$	$c_{67} - u_6$	$c_{78} - u_8$			
	v_j	0	-13.659	-28.576	-37.225	-39.917	-40.663	-41.891	-41.891			

Como se ha indicado, una solución básica factible será óptima solo si se cumple que para todas las variables no básicas $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$.

Con los cálculos ya efectuados e indicados en sus celdas, se comprueba que la solución no es óptima. Al comprobar que la solución no es óptima, se ha de seleccionar la variable no básica que entra a la base; esta será la que tenga un mayor valor $c_{ij} - u_i - v_j$ negativo en términos absolutos pues contribuye en una mayor medida respecto a los otros costes a disminuir el coste total, que se busca minimizar. Este valor corresponde a la variable x_{61} con un coste asociado $c_{61} - u_6 - v_1 = -55.034$. Una vez seleccionada la variable que entra en la base, se ha de confeccionar un ciclo/circuito de reacción en cadena que compense las variaciones de asignar valor a la variable entrante y donde se definan variables receptoras $(+)$ y donadoras $(-)$. Gracias a este circuito, de las variables donadoras, se selecciona aquella con un menor valor, que pasará a anularse y ser la variable básica saliente.

Paso 3. Iteración 1. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
		-	+							
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
		16.020	171	-	-	-	-	-	-	
			-	+						
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		-	2.985	219	-	-	-	-	-	
				-	+					
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		-	-	10.208	-239	-	-	-	-	
					-	+				
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
		-	-	-	1.592	262	-	-	-	
						-	+			
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		-	-	-	-	4.651	277	-	-	
		+					-	+		
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		-	-	-	-	-	2.598	277	-	
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		-	-	-	-	-	-	1.011	278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Observando el circuito $(+)$ y $(-)$; se presta atención a las celdas donadoras $(-)$ y se selecciona aquella celda con menor valor asignado, esto es, $x_{44} = 1.592$ que será la variable que salga de la base al anularse. Asimismo, atendiendo al signo en el circuito, a las variables receptoras $(+)$ se le sumará una cantidad equivalente al valor a la variable saliente x_{44}. Por el contrario, a las donadoras $(-)$ se le restará. Se obtiene así la solución básica factible con una iteración.

Paso 4. Solución básica factible iterada. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		14.428	1.763	-	-	-	-	-	-			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{22} - v_2$	13659
		-	1.393	1.811	-	-	-	-	-			
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{33} - v_3$	28576
		-	-	8.616	1.831	-	-	-	-			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	-17809
		-	-	-	0	1.854	-	-	-			
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{56} - v_6$	-15117
		-	-	-	-	3.059	1.869	-	-			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		1.592	-	-	-	-	1.006	277	-			
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{77} - v_7$	-13143
		-	-	-	-	-	-	1.011	278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{23} - u_2$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{66} - u_6$	$c_{67} - u_6$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-28576	-37225	15117	14371	13143	13143			

Con esto, se vuelve a realizar el test de optimalidad sobre esta solución, y todo el proceso descrito anteriormente se repetirá en cada una de las iteraciones hasta que en la prueba de optimalidad se demuestre que la solución obtenida es óptima, y se puede finalizar el proceso.

Test de optimalidad 2.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	0	15786	30352	-18898	-26204	-17786	-13143	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	-30134	0	0	12410	-35048	-41604	-37604	-26802	3.204	$c_{22} - v_2$	13659
3	Palma de Mallorca	-40042	-30282	0	0	-45594	-54220	-41743	-41719	10.447	$c_{33} - v_3$	28576
4	Málaga	-44709	-29590	-13687	0	0	-2322	790	4666	1.854	$c_{45} - v_5$	-17809
5	Tenerife	8390	23530	39722	49779	0	0	-2332	1974	4.928	$c_{56} - v_6$	-15117
6	Ibiza	0	11244	30714	44182	-1889	0	0	1228	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	9178	23460	41093	46618	-5824	-5655	0	0	1.289	$c_{77} - v_7$	-13143
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{23} - u_2$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{66} - u_6$	$c_{67} - u_6$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-28576	-37225	15117	14371	13143	13143			

Iteración 2. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	-	+							16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
		14428	1763							
2	Barcelona El Prat		-	+						3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
			1393	1811						
3	Palma de Mallorca			-			+			10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
				8616	1831					
4	Málaga	+								1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
						1854				
5	Tenerife									4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
						3059	1869			
6	Ibiza	+					-			2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		1592					1006	277		
7	Lanzarote									1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
								1011	278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 3. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		13422	2769									
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{22} - v_2$	13659
			387	2817								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{33} - v_3$	28576
				7610	1831		1006					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	36411
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{56} - v_6$	39103
						3059	1869					
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		2598						277				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{77} - v_7$	-13143
								1011	278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{23} - u_2$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{67} - u_6$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-28576	-37225	-39103	-39849	13143	13143			

Test de optimalidad 3.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	0	15786	30352	35322	28016	-17786	-13143	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	-30134	0	0	12410	19172	12616	-37604	-26802	3.204	$c_{22} - v_2$	13659
3	Palma de Mallorca	-40042	-30282	0	0	8626	0	-41743	-41719	10.447	$c_{33} - v_3$	28576
4	Málaga	-43895	-28776	-12873	814	0	-2322	-53430	-49554	1.854	$c_{45} - v_5$	36411
5	Tenerife	-45830	-30690	-14498	-4441	0	0	-56552	-52246	4.928	$c_{56} - v_6$	39103
6	Ibiza	0	11244	30714	44182	52331	54220	0	1228	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	9178	23460	41093	46618	48396	48565	0	0	1.289	$c_{77} - v_7$	-13143
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{23} - u_2$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{67} - u_6$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-28576	-37225	-39103	-39849	13143	13143			

Iteración 4. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	-	+							16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
		13422	2769							
2	Barcelona El Prat		-	+						3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
			387	2817						
3	Palma de Mallorca			-			+			10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
				7610	1831		1006			
4	Málaga									1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
						1854				
5	Tenerife						-	+		4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
						3059	1869			
6	Ibiza	+						-		2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		2598						277		
7	Lanzarote									1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
								1011	278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 4. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		13145	3046									
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{22} - v_2$	13659
			110	3094								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{33} - v_3$	28576
				7333	1831		1283					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	36411
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{56} - v_6$	39103
						3059	1592	277				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		2875						0				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{77} - v_7$	43409
								1011	278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{23} - u_2$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-28576	-37225	-39103	-39849	-43409	-43409			

Test de optimalidad 4.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	0	15786	30352	35322	28016	38766	43409	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	-30134	0	0	12410	19172	12616	18948	29750	3.204	$c_{22} - v_2$	13659
3	Palma de Mallorca	-40042	-30282	0	0	8626	0	14809	14833	10.447	$c_{33} - v_3$	28576
4	Málaga	-43895	-28776	-12873	814	0	-2322	3122	6998	1.854	$c_{45} - v_5$	36411
5	Tenerife	-45830	-30690	-14498	-4441	0	0	0	4306	4.928	$c_{56} - v_6$	39103
6	Ibiza	0	11244	30714	44182	52331	54220	56552	57780	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	-47374	-33092	-15459	-9934	-8156	-7987	0	0	1.289	$c_{77} - v_7$	43409
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{23} - u_2$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-28576	-37225	-39103	-39849	-43409	-43409			

Iteración 5. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	-	+							16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
		13145	3046							
2	Barcelona El Prat		-	+						3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
			110	3094						
3	Palma de Mallorca			-			+			10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
				7333	1831		1283			
4	Málaga									1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
						1854				
5	Tenerife						-	+		4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
						3059	1592	277		
6	Ibiza									2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		2875						0		
7	Lanzarote	+						-		1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
								1011	278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 5. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		13035	3156									
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{23} - v_3$	-33715
			0	3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{36} - v_6$	-18798
				7223	1831		1393					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	-10963
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{57} - v_7$	-8271
						3059	1482	387				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
		110						901	278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{33} - u_3$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{56} - u_5$	$c_{77} - u_7$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	18798	10149	8271	7525	3965	3965			

Test de optimalidad 5.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	17240	47374	0	12410	19172	12616	18948	29750	3.204	$c_{23} - v_3$	-33715
3	Palma de Mallorca	7332	17092	0	0	8626	0	14809	14833	10.447	$c_{36} - v_6$	-18798
4	Málaga	3479	18598	-12873	814	0	-2322	3122	6998	1.854	$c_{45} - v_5$	-10963
5	Tenerife	1544	16684	-14498	-4441	0	0	0	4306	4.928	$c_{57} - v_7$	-8271
6	Ibiza	0	11244	-16660	-3192	4957	6846	9178	10406	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	0	14282	-15459	-9934	-8156	-7987	0	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{33} - u_3$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{56} - u_5$	$c_{77} - u_7$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	18798	10149	8271	7525	3965	3965			

Iteración 5. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas									16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
		13035	3156							
2	Barcelona El Prat									3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
			0	3204						
3	Palma de Mallorca			-			+			10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
				7223	1831		1393			
4	Málaga									1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
						1854				
5	Tenerife						-	+		4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
						3059	1482	387		
6	Ibiza	-		+						2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		2875		0						
7	Lanzarote	+						-		1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
		110						901	278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 6. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		13035	3156									
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{23} - v_3$	-17055
			0	3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{33} - v_3$	-2138
				6322	1831		2294					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	5697
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{56} - v_6$	8389
						3059	581	1288				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		1974		901								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
		1011							278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{63} - u_6$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	2138	-6511	-8389	-9135	-12695	3965			

Test de optimalidad 6.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	0	-14928	-362	4608	-2698	8052	-3965	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	580	30714	0	12410	19172	12616	18948	13090	3.204	$c_{23} - v_3$	-17055
3	Palma de Mallorca	-9328	432	0	0	8626	0	14809	-1827	10.447	$c_{33} - v_3$	-2138
4	Málaga	-13181	1938	-12873	814	0	-2322	3122	-9662	1.854	$c_{45} - v_5$	5697
5	Tenerife	-15116	24	-14498	-4441	0	0	0	-12354	4.928	$c_{56} - v_6$	8389
6	Ibiza	0	11244	0	13468	21617	23506	25838	10406	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	0	14282	1201	6726	8504	8673	16660	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{63} - u_6$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	2138	-6511	-8389	-9135	-12695	3965			

Iteración 6. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
		13035	3156							
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
			0	3204						
				-			+			
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
				6322	1831		2294			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
		+					-			
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
						3059	581	1288		
		-		+						
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		1974		901						
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		1011							278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 7. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		13035	3156									
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{23} - v_3$	-17055
			0	3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{33} - v_3$	-2138
				5741	1831		2875					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	-9419
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	-6727
		581				3059		1288				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		1393		1482								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
		1011							278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{63} - u_6$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	2138	-6511	6727	-9135	2421	3965			

Test de optimalidad 7

.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	0	-14928	-362	-10508	-2698	-7064	-3965	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	580	30714	0	12410	4056	12616	3832	13090	3.204	$c_{23} - v_3$	-17055
3	Palma de Mallorca	-9328	432	0	0	-6490	0	-307	-1827	10.447	$c_{33} - v_3$	-2138
4	Málaga	1935	17054	2243	15930	0	12794	3122	5454	1.854	$c_{45} - v_5$	-9419
5	Tenerife	0	15140	618	10675	0	15116	0	2762	4.928	$c_{51} - v_1$	-6727
6	Ibiza	0	11244	0	13468	6501	23506	10722	10406	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	0	14282	1201	6726	-6612	8673	1544	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{63} - u_6$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	2138	-6511	6727	-9135	2421	3965			

Iteración 7. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
		-		+						
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
		13035	3156							
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
			0	3204						
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
				5741	1831		2875			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		581				3059	0	1288		
		+		-						
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		1393		1482						
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		1011							278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 8. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		11553	3156	1482								
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{23} - v_3$	-2127
			0	3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{33} - v_3$	12790
				5741	1831		2875					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	-9419
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	-6727
		581				3059	0	1288				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
		1011							278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-12790	-21439	6727	-24063	2421	3965			

Test de optimalidad 8.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	0	0	14566	-10508	12230	-7064	-3965	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	-14348	15786	0	12410	-10872	12616	-11096	-1838	3.204	$c_{23} - v_3$	-2127
3	Palma de Mallorca	-24256	-14496	0	0	-21418	0	-15235	-16755	10.447	$c_{33} - v_3$	12790
4	Málaga	1935	17054	17171	30858	0	27722	3122	5454	1.854	$c_{45} - v_5$	-9419
5	Tenerife	0	15140	15546	25603	0	30044	0	2762	4.928	$c_{51} - v_1$	-6727
6	Ibiza	0	11244	14928	28396	6501	38434	10722	10406	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	0	14282	16129	21654	-6612	23601	1544	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-12790	-21439	6727	-24063	2421	3965			

Iteración 8. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
		-		+						
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
		11553	3156	1482						
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
			0	3204						
		+		-						
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
				5741	1831		2875			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		581				3059	0	1288		
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		1011							278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 8. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		5812	3156	7223								
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{23} - v_3$	-2127
				3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	-11466
		5741			1831		2875					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	-9419
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	-6727
		581				3059	0	1288				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
		1011							278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-12790	2817	6727	193	2421	3965			

Test de optimalidad 9.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	0	0	-9690	-10508	-12026	-7064	-3965	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	-14348	15786	0	-11846	-10872	-11640	-11096	-1838	3.204	$c_{23} - v_3$	-2127
3	Palma de Mallorca	0	9760	24256	0	2838	0	9021	7501	10.447	$c_{31} - v_1$	-11466
4	Málaga	1935	17054	17171	6602	0	3466	3122	5454	1.854	$c_{45} - v_5$	-9419
5	Tenerife	0	15140	15546	1347	0	5788	0	2762	4.928	$c_{51} - v_1$	-6727
6	Ibiza	0	11244	14928	4140	6501	14178	10722	10406	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	0	14282	16129	-2602	-6612	-655	1544	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-12790	2817	6727	193	2421	3965			

Iteración 9. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
		-		+						
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
		5812	3156	7223						
		+		-						
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
				3204						
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		5741			1831		2875			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		581				3059		1288		
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		1011							278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 9. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
		2608	3156	10427								
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-16475
		3204		0								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	-11466
		5741			1831		2875					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	-9419
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	-6727
		581				3059		1288				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
		1011							278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-12790	2817	6727	193	2421	3965			

Test de optimalidad 10.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	0	0	-9690	-10508	-12026	-7064	-3965	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	30134	14348	2502	3476	2708	3252	12510	3.204	$c_{21} - v_1$	-16475
3	Palma de Mallorca	0	9760	24256	0	2838	0	9021	7501	10.447	$c_{31} - v_1$	-11466
4	Málaga	1935	17054	17171	6602	0	3466	3122	5454	1.854	$c_{45} - v_5$	-9419
5	Tenerife	0	15140	15546	1347	0	5788	0	2762	4.928	$c_{51} - v_1$	-6727
6	Ibiza	0	11244	14928	4140	6501	14178	10722	10406	2.875	$c_{61} - v_1$	-14371
7	Lanzarote	0	14282	16129	-2602	-6612	-655	1544	0	1.289	$c_{71} - v_1$	-3965
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{11} - u_1$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{36} - u_3$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	0	-13659	-12790	2817	6727	193	2421	3965			

Iteración 10. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	-					+			
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
		2608	3156	10427						
2	Barcelona El Prat									
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204		0						
3	Palma de Mallorca	+					-			
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		5741			1831		2875			
4	Málaga									
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife									
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		581				3059		1288		
6	Ibiza									
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote									
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		1011							278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 10. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			3156	10427			2608					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-4449
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{36} - v_6$	560
		8349			1831		267					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	2607
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5299
		581				3059		1288				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-2345
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{71} - v_1$	8061
		1011							278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	-12026	-13659	-12790	-9209	-5299	-11833	-9605	-8061			

Test de optimalidad 11.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	12026	0	0	2336	1518	0	4962	8061	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	18108	2322	2502	3476	2708	3252	12510	3.204	$c_{21} - v_1$	-4449
3	Palma de Mallorca	0	-2266	12230	0	2838	0	9021	7501	10.447	$c_{36} - v_6$	560
4	Málaga	1935	5028	5145	6602	0	3466	3122	5454	1.854	$c_{45} - v_5$	2607
5	Tenerife	0	3114	3520	1347	0	5788	0	2762	4.928	$c_{51} - v_1$	5299
6	Ibiza	0	-782	2902	4140	6501	14178	10722	10406	2.875	$c_{61} - v_1$	-2345
7	Lanzarote	0	2256	4103	-2602	-6612	-655	1544	0	1.289	$c_{71} - v_1$	8061
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	-12026	-13659	-12790	-9209	-5299	-11833	-9605	-8061			

Iteración 11. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
			3156	10427			2608			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		8349			1831		267			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
		+				-				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		581				3059		1288		
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
		-				+				
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		1011							278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 11. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			3156	10427			2608					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-4449
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{36} - v_6$	560
		8349			1831		267					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	2607
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5299
		1592				2048		1288				
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-2345
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	1449
						1011			278			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	-12026	-13659	-12790	-9209	-5299	-11833	-9605	-1449			

Test de optimalidad 12.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	12026	0	0	2336	1518	0	4962	1449	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	18108	2322	2502	3476	2708	3252	5898	3.204	$c_{21} - v_1$	-4449
3	Palma de Mallorca	0	-2266	12230	0	2838	0	9021	889	10.447	$c_{36} - v_6$	560
4	Málaga	1935	5028	5145	6602	0	3466	3122	-1158	1.854	$c_{45} - v_5$	2607
5	Tenerife	0	3114	3520	1347	0	5788	0	-3850	4.928	$c_{51} - v_1$	5299
6	Ibiza	0	-782	2902	4140	6501	14178	10722	3794	2.875	$c_{61} - v_1$	-2345
7	Lanzarote	6612	8868	10715	4010	0	5957	8156	0	1.289	$c_{75} - v_5$	1449
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{78} - u_7$			
	v_j	-12026	-13659	-12790	-9209	-5299	-11833	-9605	-1449			

Iteración 12. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
			3156	10427			2608			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		8349			1831		267			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
						-			+	
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		1592				2048		1288		
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
						+			-	
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1011			278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 12. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			3156	10427			2608					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-4449
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{36} - v_6$	560
		8349			1831		267					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	2607
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5299
		1592				1770		1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-2345
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	1449
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-12026	-13659	-12790	-9209	-5299	-11833	-9605	-5299			

Test de optimalidad 13.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	12026	0	0	2336	1518	0	4962	5299	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	18108	2322	2502	3476	2708	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-4449
3	Palma de Mallorca	0	-2266	12230	0	2838	0	9021	4739	10.447	$c_{36} - v_6$	560
4	Málaga	1935	5028	5145	6602	0	3466	3122	2692	1.854	$c_{45} - v_5$	2607
5	Tenerife	0	3114	3520	1347	0	5788	0	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5299
6	Ibiza	0	-782	2902	4140	6501	14178	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-2345
7	Lanzarote	6612	8868	10715	4010	0	5957	8156	3850	1.289	$c_{75} - v_5$	1449
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-12026	-13659	-12790	-9209	-5299	-11833	-9605	-5299			

Iteración 13. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
			-				+			
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
			3156	10427			2608			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
			+				-			
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		8349			1831		267			
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		1592				1770		1288	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 13. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			2889	10427			2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
		8349	267		1831							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	341
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
		1592				1770		1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-817
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3033	-11833	-7339	-3033			

Test de optimalidad 14.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	9760	0	0	70	-748	0	2696	3033	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	4588	2502	3476	4974	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
3	Palma de Mallorca	0	0	14496	0	2838	2266	9021	4739	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
4	Málaga	1935	7294	7411	6602	0	5732	3122	2692	1.854	$c_{45} - v_5$	341
5	Tenerife	0	5380	5786	1347	0	8054	0	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
6	Ibiza	0	1484	5168	4140	6501	16444	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
7	Lanzarote	6612	11134	12981	4010	0	8223	8156	3850	1.289	$c_{75} - v_5$	-817
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3033	-11833	-7339	-3033			

Iteración 14. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
			-			+				
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
			2889	10427			2875			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
		-	+							
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		8349	267		1831					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
		+				-				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		1592				1770		1288	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 14. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			1119	10427		1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
		6579	2037		1831							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
		3362				0		1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

Test de optimalidad 15.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	9760	0	0	70	0	0	2696	3033	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	4588	2502	4224	4974	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
3	Palma de Mallorca	0	0	14496	0	3586	2266	9021	4739	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
4	Málaga	1187	6546	6663	5854	0	4984	2374	1944	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	5786	1347	748	8054	0	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
6	Ibiza	0	1484	5168	4140	7249	16444	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
7	Lanzarote	5864	10386	12233	3262	0	7475	7408	3102	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

Solución óptima.

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			1119	10427		1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
		6579	2037		1831							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
		3362				0		1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

ANEXO XI. RESOLUCIÓN DEL MODELO Y MEJORA DE LA SOLUCION FACTIBLE BÁSICA OBTENIDA POR EL MÉTODO DE COSTES MÍNIMOS

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
				10427	1831		2875	1058		
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		10166	281							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
		1854								
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		796				3624		230	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
			2875							
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Se parte de la solución básica factible obtenida a partir del Método de Costes Mínimos, y se evalúa si es óptima. Para llevar a cabo esta evaluación se realiza una prueba de optimalidad al conjunto de variables de la tabla. Esto se hará, calculando los $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, de las variables no básicas. Pues como se sabe en las variables básicas $c_{ij} - u_i - v_j = 0$.

Paso 1.

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	1831		2875	1058				
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-9411
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	-4402
		10166	281									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{41} - v_1$	-420
		1854										
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{57} - v_7$	337
		796				3624		230	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{62} - v_2$	-5823
			2875									
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-3513
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{51} - u_5$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{17} - u_1$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-7064	-10963	-12790	-6873	-337	-11833	-4643	-337			

Como se ha indicado, a partir de la solución básica factible que muestra la tabla anterior, se pasa a crear la tabla correspondiente a la prueba de optimalidad, y se calculan los costes ficticios u_i y v_j, para, a partir de estos poder obtener las expresiones $c_{ij} - u_i - v_j$, que determinen de optimalidad de la solución.

Para calcular los costes ficticios o reducidos u_i y v_j; se empieza dando valor cero a $u_1 = 0$, con esto, se obtiene un sistema de 14 ecuaciones: $u_i + v_j = c_{ij}$, con este valor $u_1 = 0$ y a partir de los costes de las variables con asignación en la primera fila, fila 1, c_{13}, c_{14}, c_{16} y c_{17}, se puede calcular $v_3 = c_{13} - u_1$, $v_4 = c_{14} - u_1$, $v_6 = c_{16} - u_1$ y $v_7 = c_{17} - u_1$ y uno a uno todos los valores u_i y v_j.

Paso 2. Test de optimalidad 1.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas					+		-		16.191	$u_1 = 0$	0
		7064	-2696	0	0	-3444	0	0	337			
2	Barcelona El Prat									3.204	$c_{21} - v_1$	-9411
		0	20374	7284	5128	3476	7670	3252	9748			
3	Palma de Mallorca									10.447	$c_{31} - v_1$	-4402
		0	0	17192	2626	2838	4962	9021	4739			
4	Málaga									1.854	$c_{41} - v_1$	-420
		0	5359	8172	7293	-1935	6493	1187	757			
5	Tenerife					-		+		4.928	$c_{57} - v_7$	337
		0	5380	8482	3973	0	10750	0	0			
6	Ibiza									2.875	$c_{62} - v_2$	-5823
		-1484	0	6380	5282	5017	17656	9238	6160			
7	Lanzarote									1.289	$c_{75} - v_5$	-3513
		6612	11134	15677	6636	0	10919	8156	3850			
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{51} - u_5$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{55} - u_5$	$c_{16} - u_1$	$c_{17} - u_1$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-7064	-10963	-12790	-6873	-337	-11833	-4643	-337			

Como se ha indicado, una solución básica factible será óptima solo si se cumple que para todas las variables no básicas $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$. Con los cálculos ya efectuados e indicados en sus celdas, se comprueba que la solución no es óptima.

Al comprobar que la solución no es óptima, se ha de seleccionar la variable no básica que entra a la base; esta será la que tenga un mayor valor $c_{ij} - u_i - v_j$ negativo en términos absolutos pues contribuye en una mayor medida respecto a los otros costes a disminuir el coste total, que se busca minimizar. Este valor corresponde a la variable x_{15} en la posición $(1{,}5)$ con un coste asociado $c_{15} - u_1 - v_5 = -3.444$.

Una vez seleccionada la variable que entra en la base, se ha de confeccionar un ciclo/circuito de reacción en cadena que compensen las variaciones de asignar valor a la variable entrante, donde se definan variables receptoras $(+)$ y donadoras $(-)$. Gracias a este circuito, de las variables donadoras, se selecciona aquella con un menor valor, que pasará a anularse y ser la variable básica saliente.

Paso 3. Iteración 1. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas					+		-		
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
				10427	1831		2875	1058		
2	Barcelona El Prat									
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
3	Palma de Mallorca									
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		10166	281							
4	Málaga									
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
		1854								
5	Tenerife					-		+		
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		796				3624		230	278	
6	Ibiza									
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
			2875							
7	Lanzarote									
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
		-	-	-	-	-	-	1.011	278	
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Observando el circuito $(+)$ y $(-)$; se presta atención a las celdas donadoras $(-)$ y se selecciona aquella celda con menor valor, esto es, $x_{17} = 1.058$ que será la variable que salga de la base al anularse. Asimismo, atendiendo al signo en el circuito, a las variables receptoras $(+)$ se le sumará una cantidad equivalente al valor a la variable saliente x_{17}. Por el contrario, a las donadoras $(-)$ se le restara, obteniendo así la solución básica factible con una iteración.

Paso 4. Solución básica factible iterada. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	1831	1058	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-5967
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	-958
		10166	281									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{41} - v_1$	3024
		1854										
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{55} - v_5$	3781
		796				2566		1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{62} - v_2$	-2379
			2875									
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{51} - u_5$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-10508	-14407	-12790	-6873	-3781	-11833	-8087	-3781			

Se vuelve a realizar el test de optimalidad sobre esta solución, y todo el proceso descrito anteriormente se repetirá en cada una de las iteraciones hasta que en la prueba de optimalidad se demuestre que la solución obtenida es óptima, y se puede finalizar el proceso.

Test de optimalidad 2.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	10508	748	0	0	0	0	3444	3781	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	3840	1684	3476	4226	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-5967
3	Palma de Mallorca	0	0	13748	-818	2838	1518	9021	4739	10.447	$c_{31} - v_1$	-958
4	Málaga	0	5359	4728	3849	-1935	3049	1187	757	1.854	$c_{41} - v_1$	3024
5	Tenerife	0	5380	5038	529	0	7306	0	0	4.928	$c_{55} - v_5$	3781
6	Ibiza	-1484	0	2936	1838	5017	14212	9238	6160	2.875	$c_{62} - v_2$	-2379
7	Lanzarote	6612	11134	12233	3192	0	7475	8156	3850	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{51} - u_5$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-10508	-14407	-12790	-6873	-3781	-11833	-8087	-3781			

Iteración 2. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
				10427	1831	1058	2875			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		10166	281							
		-				+				
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
		1854								
		+				-				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		796				2566		1288	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
			2875							
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 3. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	1831	1058	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-5967
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	-958
		10166	281									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{55} - v_5$	3781
		2650				712		1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{62} - v_2$	-2379
			2875									
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{51} - u_5$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-10508	-14407	-12790	-6873	-3781	-11833	-8087	-3781			

Test de optimalidad 3.

$z_{ij}-c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	10508	748	0	0	0	0	3444	3781	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	3840	1684	3476	4226	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-5967
3	Palma de Mallorca	0	0	13748	-818	2838	1518	9021	4739	10.447	$c_{31} - v_1$	-958
4	Málaga	1935	7294	6663	5784	0	4984	3122	2692	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	5038	529	0	7306	0	0	4.928	$c_{55} - v_5$	3781
6	Ibiza	-1484	0	2936	1838	5017	14212	9238	6160	2.875	$c_{62} - v_2$	-2379
7	Lanzarote	6612	11134	12233	3192	0	7475	8156	3850	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{51} - u_5$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-10508	-14407	-12790	-6873	-3781	-11833	-8087	-3781			

Iteración 3. Se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
				10427	1831	1058	2875			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
		-	+							
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		10166	281							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		2650				712		1288	278	
		+	-							
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
			2875							
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 4. Realizada la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	1831	1058	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-5967
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	-958
		7291	3156									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{55} - v_5$	3781
		2650				712		1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-3863
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{51} - u_5$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-10508	-14407	-12790	-6873	-3781	-11833	-8087	-3781			

Test de optimalidad 4.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	10508	748	0	0	0	0	3444	3781	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	3840	1684	3476	4226	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-5967
3	Palma de Mallorca	0	0	13748	-818	2838	1518	9021	4739	10.447	$c_{31} - v_1$	-958
4	Málaga	1935	7294	6663	5784	0	4984	3122	2692	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	5038	529	0	7306	0	0	4.928	$c_{55} - v_5$	3781
6	Ibiza	0	1484	4420	3322	6501	15696	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-3863
7	Lanzarote	6612	11134	12233	3192	0	7475	8156	3850	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{51} - u_5$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-10508	-14407	-12790	-6873	-3781	-11833	-8087	-3781			

Iteración 4. Se tiene la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas				-	+				16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
				10427	1831	1058	2875			
2	Barcelona El Prat									3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
		3204								
3	Palma de Mallorca	-			+					10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
		7291	3156							
4	Málaga									1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
						1854				
5	Tenerife	+				-				4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
		2650				712		1288	278	
6	Ibiza									2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		2875								
7	Lanzarote									1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 5. Tras la iteración se tiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	1119	1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6785
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{34} - v_4$	-1776
		6579	3156		712							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	2963
		3362						1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4681
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9690	-13589	-12790	-6873	-3781	-11833	-7269	-2963			

Test de optimalidad 5.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	9690	-70	0	0	0	0	2626	2963	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	4658	2502	4294	5044	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-6785
3	Palma de Mallorca	0	0	14566	0	3656	2336	9021	4739	10.447	$c_{34} - v_4$	-1776
4	Málaga	1117	6476	6663	5784	0	4984	2304	1874	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	5856	1347	818	8124	0	0	4.928	$c_{51} - v_1$	2963
6	Ibiza	0	1484	5238	4140	7319	16514	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-4681
7	Lanzarote	5794	10316	12233	3192	0	7475	7338	3032	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9690	-13589	-12790	-6873	-3781	-11833	-7269	-2963			

Iteración 5. Así, se presenta la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
			+		-					
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
				10427	1119	1770	2875			
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		3204								
			-		+					
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		6579	3156		712					
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		3362						1288	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 5. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			1119	10427		1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
		6579	2037		1831							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
		3362						1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

Test de optimalidad 6.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	9760	0	0	70	0	0	2696	3033	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	4588	2502	4224	4974	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
3	Palma de Mallorca	0	0	14496	0	3586	2266	9021	4739	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
4	Málaga	1187	6546	6663	5854	0	4984	2374	1944	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	5786	1347	748	8054	0	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
6	Ibiza	0	1484	5168	4140	7249	16444	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
7	Lanzarote	5864	10386	12233	3262	0	7475	7408	3102	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

Solución óptima.

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			1119	10427		1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
		6579	2037		1831							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
		3362						1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

ANEXO XII. RESOLUCIÓN DEL MODELO Y MEJORA DE LA SOLUCION FACTIBLE BÁSICA OBTENIDA POR EL MÉTODO DE APROXIMACION DE VOGEL

Paso 1.

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427		2889	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{25} - v_5$	-2491
					1831	85		1288				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	-2893
		7291	3156									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
		926				650			278			
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	1846
		4928										
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-5798
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{41} - u_4$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{24} - u_2$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{27} - u_2$	$c_{48} - u_4$			
	v_j	-8573	-12472	-12790	-8665	-3781	-11833	-8311	-1089			

Como se ha indicado, a partir de la solución básica factible que muestra la tabla anterior, se pasa a crear la tabla correspondiente a la prueba de optimalidad, y se calculan los costes ficticios u_i y v_j, para, poder obtener las expresiones $c_{ij} - u_i - v_j$, que determinen la optimalidad de la solución.

Para calcular los costes ficticios o reducidos u_i y v_j, se empieza dando valor cero a $u_1 = 0$. Con esto, se obtiene un sistema de 14 ecuaciones: $u_i + v_j = c_{ij}$. A partir del valor $u_1 = 0$ y de los costes de las variables con asignación en la primera fila, c_{13}, c_{15} y c_{16}, se puede calcular $v_3 = c_{13} - u_1$, $v_5 = c_{15} - u_1$ y $v_6 = c_{16} - u_1$ e ir calculando uno a uno todos los valores u_i y v_j.

Paso 2. Test de optimalidad 1.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	8573	-1187	0	1792	0	0	3668	1089	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	+ -5411	14963	364	0	- 0	750	0	3580	3.204	$c_{25} - v_5$	-2491
3	Palma de Mallorca	0	0	15683	2909	4773	3453	11180	3982	10.447	$c_{31} - v_1$	-2893
4	Málaga	+ 0	5359	6663	7576	+ 0	4984	3346	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	6973	4256	1935	9241	2159	-757	4.928	$c_{51} - v_1$	1846
6	Ibiza	0	1484	6355	7049	8436	17631	12881	6887	2.875	$c_{61} - v_1$	-5798
7	Lanzarote	6612	11134	15677	6636	0	10919	8156	3850	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{41} - u_4$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{24} - u_2$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{27} - u_2$	$c_{48} - u_4$			
	v_j	-8573	-12472	-12790	-8665	-3781	-11833	-8311	-1089			

Como se ha indicado, una solución básica factible será óptima solo si se cumple que para todas las variables no básicas $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$. Con los cálculos ya efectuados e indicados en sus celdas, se comprueba que la solución no es óptima.

Al comprobar que la solución no es óptima, se ha de seleccionar la variable no básica que entra a la base; esta será la que tenga un mayor valor $c_{ij} - u_i - v_j$ negativo en términos absolutos pues contribuye en una mayor medida respecto a los otros costes a disminuir el coste total, que se busca minimizar. Este valor corresponde a la variable x_{21} en la posición $(2,1)$ con un coste asociado $c_{21} - u_2 - v_1 = -5.411$.

Una vez seleccionada la variable que entra en la base, se ha de confeccionar un ciclo/circuito de reacción en cadena que compensen las variaciones de asignar valor a la variable entrante, donde se definan variables receptoras $(+)$ y donadoras $(-)$. Gracias a este circuito, de las variables donadoras, se selecciona aquella con un menor valor, que pasará a anularse y ser la variable básica saliente.

Paso 3. Iteración 1. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas									16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
				10427		2889	2875			
2	Barcelona El Prat	+				-				3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
					1831	85		1288		
3	Palma de Mallorca									10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
		7291	3156							
4	Málaga	-				+				1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
		926				650			278	
5	Tenerife									4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
		4928								
6	Ibiza									2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		2875								
7	Lanzarote									1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Observando el circuito $(+)$ y $(-)$; se presta atención a las celdas donadoras $(-)$ y se selecciona aquella celda con menor valor, esto es, $x_{25} = 85$ que será la variable que salga de la base al anularse. Asimismo, atendiendo al signo en el circuito, a las variables receptoras $(+)$ se le sumará una cantidad equivalente al valor a la variable saliente x_{25}. Por el contrario, a las donadoras $(-)$ se le restará. Se obtiene así una solución básica factible.

Paso 4. Solución básica factible iterada. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427		2889	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-7902
		85			1831			1288				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	-2893
		7291	3156									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
		841				735			278			
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	1846
		4928										
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-5798
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{41} - u_4$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{24} - u_2$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{27} - u_2$	$c_{48} - u_4$			
	v_j	-8573	-12472	-12790	-3254	-3781	-11833	-2900	-1089			

Con esto, se vuelve a realizar el test de optimalidad sobre esta solución, y todo el proceso descrito anteriormente se repetirá en cada una de las iteraciones hasta que en la prueba de optimalidad se demuestre que la solución obtenida es óptima, y se puede finalizar el proceso.

Test de optimalidad 2.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	8573	-1187	0	-3619	0	0	-1743	1089	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	5775	0	5411	6161	0	8991	3.204	$c_{21} - v_1$	-7902
3	Palma de Mallorca	0	0	15683	-2502	4773	3453	5769	3982	10.447	$c_{31} - v_1$	-2893
4	Málaga	0	5359	6663	2165	0	4984	-2065	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	6973	-1155	1935	9241	-3252	-757	4.928	$c_{51} - v_1$	1846
6	Ibiza	0	1484	6355	1638	8436	17631	7470	6887	2.875	$c_{61} - v_1$	-5798
7	Lanzarote	4677	9199	12233	-427	0	7475	2969	1158	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{41} - u_4$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{24} - u_2$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{27} - u_2$	$c_{48} - u_4$			
	v_j	-8573	-12472	-12790	-3254	-3781	-11833	-2900	-1089			

Iteración 2. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas				+	-				16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
				10427		2889	2875			
2	Barcelona El Prat	+			-					3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
		85			1831			1288		
3	Palma de Mallorca									10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
		7291	3156							
4	Málaga	-				+				1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
		841				735			278	
5	Tenerife									4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
		4928								
6	Ibiza									2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		2875								
7	Lanzarote									1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 2. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	841	2048	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{24} - v_4$	-4283
		926			990			1288				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	726
		7291	3156									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1576			278			
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5465
		4928										
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-2179
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{21} - u_2$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{27} - u_2$	$c_{48} - u_4$			
	v_j	-12192	-16091	-12790	-6873	-3781	-11833	-6519	-1089			

Test de optimalidad 3.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	12192	2432	0	0	0	0	1876	1089	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	2156	0	1792	2542	0	5372	3.204	$c_{24} - v_4$	-4283
3	Palma de Mallorca	0	0	12064	-2502	1154	-166	5769	363	10.447	$c_{31} - v_1$	726
4	Málaga	3619	8978	6663	5784	0	4984	1554	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	3354	-1155	-1684	5622	-3252	-4376	4.928	$c_{51} - v_1$	5465
6	Ibiza	0	1484	2736	1638	4817	14012	7470	3268	2.875	$c_{61} - v_1$	-2179
7	Lanzarote	8296	12818	12233	3192	0	7475	6588	1158	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{21} - u_2$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{27} - u_2$	$c_{48} - u_4$			
	v_j	-12192	-16091	-12790	-6873	-3781	-11833	-6519	-1089			

Iteración 3. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas				+	-				16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
				10427	841	2048	2875			
2	Barcelona El Prat	+			-					3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
		926			990			1288		
3	Palma de Mallorca									10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
		7291	3156							
4	Málaga					+			-	1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
						1576			278	
5	Tenerife	-							+	4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
		4928								
6	Ibiza									2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		2875								
7	Lanzarote									1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 3. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	1119	1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{24} - v_4$	-4283
		1204			712			1288				
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	726
		7291	3156									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5465
		4650							278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-2179
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{21} - u_2$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{27} - u_2$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-12192	-16091	-12790	-6873	-3781	-11833	-6519	-5465			

Test de optimalidad 4.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	12192	2432	0	0	0	0	1876	5465	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	2156	0	1792	2542	0	9748	3.204	$c_{24} - v_4$	-4283
3	Palma de Mallorca	0	0	12064	-2502	1154	-166	5769	4739	10.447	$c_{31} - v_1$	726
4	Málaga	3619	8978	6663	5784	0	4984	1554	4376	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	3354	-1155	-1684	5622	-3252	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5465
6	Ibiza	0	1484	2736	1638	4817	14012	7470	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-2179
7	Lanzarote	8296	12818	12233	3192	0	7475	6588	5534	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{21} - u_2$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{27} - u_2$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-12192	-16091	-12790	-6873	-3781	-11833	-6519	-5465			

Iteración 4. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
				10427	1119	1770	2875			
		+						-		
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		1204			712			1288		
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		7291	3156							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
		-						+		
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		4650							278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 4. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	1119	1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{24} - v_4$	-4283
		2492			712							
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{31} - v_1$	726
		7291	3156									
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5465
		3362						1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-2179
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{21} - u_2$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-12192	-16091	-12790	-6873	-3781	-11833	-9771	-5465			

Test de optimalidad 5.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	12192	2432	0	0	0	0	5128	5465	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	2156	0	1792	2542	3252	9748	3.204	$c_{24} - v_4$	-4283
3	Palma de Mallorca	0	0	12064	-2502	1154	-166	9021	4739	10.447	$c_{31} - v_1$	726
4	Málaga	3619	8978	6663	5784	0	4984	4806	4376	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	3354	-1155	-1684	5622	0	0	4.928	$c_{51} - v_1$	5465
6	Ibiza	0	1484	2736	1638	4817	14012	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-2179
7	Lanzarote	8296	12818	12233	3192	0	7475	9840	5534	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{21} - u_2$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-12192	-16091	-12790	-6873	-3781	-11833	-9771	-5465			

Iteración 5. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191
				10427	1119	1770	2875			
		+			-					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204
		2492			712					
		-			+					
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447
		7291	3156							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854
						1854				
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928
		3362						1288	278	
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875
		2875								
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 5. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
				10427	1119	1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6785
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{34} - v_4$	-1776
		6579	3156		712							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	2963
		3362						1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4681
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9690	-13589	-12790	-6873	-3781	-11833	-7269	-2963			

Test de optimalidad 6.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	9690	-70	0	0	0	0	2626	2963	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	4658	2502	4294	5044	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-6785
3	Palma de Mallorca	0	0	14566	0	3656	2336	9021	4739	10.447	$c_{34} - v_4$	-1776
4	Málaga	1117	6476	6663	5784	0	4984	2304	1874	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	5856	1347	818	8124	0	0	4.928	$c_{51} - v_1$	2963
6	Ibiza	0	1484	5238	4140	7319	16514	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-4681
7	Lanzarote	5794	10316	12233	3192	0	7475	7338	3032	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{32} - u_3$	$c_{13} - u_1$	$c_{14} - u_1$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9690	-13589	-12790	-6873	-3781	-11833	-7269	-2963			

Iteración 6. Así, se plantea la siguiente iteración:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8	
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i
1	Madrid Barajas		+		-					16.191
		0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	
				10427	1119	1770	2875			
2	Barcelona El Prat									3.204
		-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	
		3204								
3	Palma de Mallorca		-		+					10.447
		-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	
		6579	3156		712					
4	Málaga									1.854
		-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	
						1854				
5	Tenerife									4.928
		-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	
		3362						1288	278	
6	Ibiza									2.875
		-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	
		2875								
7	Lanzarote									1.289
		-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	
						1289				
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278	

Solución básica factible 6. Tras la iteración se obtiene la siguiente solución básica factible iterada:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			1119	10427		1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
		6579	2037		1831							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
		3362						1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

Test de optimalidad 7.

$z_{ij} - c_{ij}$	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	9760	0	0	70	0	0	2696	3033	16.191	$u_1 = 0$	0
2	Barcelona El Prat	0	20374	4588	2502	4224	4974	3252	9748	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
3	Palma de Mallorca	0	0	14496	0	3586	2266	9021	4739	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
4	Málaga	1187	6546	6663	5854	0	4984	2374	1944	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
5	Tenerife	0	5380	5786	1347	748	8054	0	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
6	Ibiza	0	1484	5168	4140	7249	16444	10722	7644	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
7	Lanzarote	5864	10386	12233	3262	0	7475	7408	3102	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

Solución óptima:

	Destinos j	1	2	3	4	5	6	7	8			
Orígenes i	Compañía Air Europa	Madrid Barajas	Barcelona El Prat	Palma de Mallorca	Málaga	Tenerife	Ibiza	Lanzarote	Ficticio	Oferta del origen b_i	$u_i = c_{ij} - v_j$	u_i
1	Madrid Barajas	0	-13659	-12790	-6873	-3781	-11833	-4643	0	16.191	$u_1 = 0$	0
			1119	10427		1770	2875					
2	Barcelona El Prat	-16475	0	-14917	-11156	-6272	-13574	-10802	0	3.204	$c_{21} - v_1$	-6715
		3204										
3	Palma de Mallorca	-11466	-15365	0	-8649	-1901	-11273	-24	0	10.447	$c_{32} - v_2$	-1706
		6579	2037		1831							
4	Málaga	-7484	-6024	-5038	0	-2692	-5760	-3876	0	1.854	$c_{45} - v_5$	1089
						1854						
5	Tenerife	-6727	-5246	-3971	-2563	0	-746	-4306	0	4.928	$c_{51} - v_1$	3033
		3362						1288	278			
6	Ibiza	-14371	-16786	-12233	-7414	-1143	0	-1228	0	2.875	$c_{61} - v_1$	-4611
		2875										
7	Lanzarote	-3965	-3342	-626	-3750	-3850	-4427	0	0	1.289	$c_{75} - v_5$	-69
						1289						
	Demanda del destino a_j	16.020	3.156	10.427	1.831	4.913	2.875	1.288	278			
	$v_j = c_{ij} - u_i$	$c_{31} - u_3$	$c_{12} - u_1$	$c_{13} - u_1$	$c_{34} - u_3$	$c_{15} - u_1$	$c_{16} - u_1$	$c_{57} - u_5$	$c_{58} - u_5$			
	v_j	-9760	-13659	-12790	-6943	-3781	-11833	-7339	-3033			

11. BIBLIOGRAFÍA

Arsham, H. y Kahn, A. B., 1989. A Simplex-Type Algorithm for General Transportation Problems: An Alternative to Stepping-Stone. *Journal of the Operational Research Society Volume 40,* pp. 581-590.

Bazer, S. y Scharf, L., 2019. *https://www.quora.com/.* [En línea]
Disponible en : https://www.quora.com/How-much-fuel-is-burned-during-take-off-until-an-aircraft-reaches-normal-cruising-speed-Is-this-the-most-fuel-consuming-part-of-the-flight (9 de marzo de 2022)

Best, M. J. y Ritter, K., 1985. *Linear programming.* Englewood Cliffs, New York: Prentice Hall.

Cánovas , María Josefa; Huertas, Víctor; Sempere, María, 2010. *Optimización Matemática Aplicada.* San Vicente, Alicante: Editorial Club Universitario (ECU).

C. E., 2012. *Reglamento (UE) nº 965/2012 de la Comisión.* s.l., DOUE-L-2012-81989, p. 1 a 148.

C. E., 2014. *REGLAMENTO (UE) No 379/2014 DE LA COMISIÓN.* Parlamento Europeo y del Consejo, s.n.

Cobo Ortega, Á., 1995. *Optimización Matemática.* Santander.

Comisión Europea, 2014. *REGLAMENTO (UE) No 379/2014 DE LA COMISIÓN.* Parlamento Europeo y del Consejo, s.n.

Craven, B. D., 1963. A Generalization of the Transportation Method of Linear Programming.. *Journal of the Operational Research Society, 14.2,* pp. 157-166.

Dantzig, G. B., August 1963. *Linear Programming and Extensions,* Estados Unidos: Unites States Air Force Project Rand Published by Princeton University Press.

Dantzig, G. B. y Thapa, M. N., 2003. *Linear programming: Theory and extensions (Vol. 2)..* New York: Springer.

EASA, 2012. *Commission Regulation (EU) No 965/2012 of 5 October 2012 - Air Operations.* S.L., s.n.

Fernández González, V. y Zelaia Jauregui, A., 2011. *Investigacion Operativa. Programacion Lineal [2011/06] Tema 4-Tema 6.*:Universidad del País Vasco UPV/EHU.

Hillier, F. S. y Lieberman, G. J., 2015. *Investigación de Operaciones Décima Edición.* Madrid: Mc Graw Hill Education.

Kyprianou, A. E., 2008. *MA30087/50087: Optimisation methods of operational research,* Bath. Reino Unido.: Department of Mathematical Sciences. University of Bath.

Quintas, I. y Sánchez Guevara, I., 2012. *Programación lineal: El modelado, las aplicaciones y la interpretación.* México: Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco.

Ríos Insua, S. y otros, 2006. *Problemas de Investigación Operativa. Programación Lineal y Extensiones..* Madrid, España: RA-MA Editorial.

Salas, H. G., 2017. *Programación lineal aplicada.* Bogotá, Colombia: ECOE Ediciones.

Vanderbei, R. J., 2001. *Linear Programming: Foundations and Extensions.* Princeton: Department of Operations Research and Financial Engineering, Princeton University.