Detección de las Oscilaciones Acústicas de los Bariones en la Estructura a Gran Escala del Universo

(*Detection of Baryon Acoustic Oscillations in the Large-Scale Structure of the Universe)*

Mikel Martin Barandiaran

Santander, Septiembre 2022

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
Grado en Física

Facultad de Ciencias
Universidad de Cantabria

Director: Patricio Vielva Martínez

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a Patricio su inestimable ayuda a lo largo de todo el proceso que supone hacer un trabajo como este. No solo ya por las continuas correcciones o recomendaciones, sino por tomarse el tiempo de sentarse a hablar y compartir su experiencia para darme otra perspectiva del mundo de la investigación.

Bestalde, ezin ditut aipatu gabe utzi azken bost urte hauetan hainbeste ikusi ez arren beti ere hor egon diren pertsona horiek guztiak. Horregatik, beraz, nire eskerrik beroenak etxekoei eta betiko lagunei. Aupa zuek!

Finalmente, como no podía ser de otra manera, reservo un lugar especial para las personas que han hecho de Santander mi segunda casa y de estos últimos 5 años una etapa increíble. Por las tardes en el Bule, las comidas en el Bracho y alguna que otra noche de fiesta. Tafalla, Emdbräu Team, Molineros y Angeleros... ya sabéis quienes sois. ¡Volveremos!

En Santander, a 12 de septiembre de 2022

Abstract

Baryon Acoustic Oscillations and their imprint in the Large Scale Structure of the Universe were first detected about two decades ago. Since then cosmologists have had a new opportunity to study the physics of the early Universe, which in conjunction with other probes such as the CMB and primordial nucleosynthesis has further confirmed the success of the Λ-CDM model and has served for a more precise determinantion of various cosmological parameters that the aforementioned theoretical framework depends on. In this work we explore a new way to determine and constrain certain cosmological parameters from the detection of BAO, making use of a mathematical tool common in signal processing: wavelets. In particular, starting from an analytical context we derive a phenomenological relation between some parameters associated to a special family of wavelets and the cosmological parameters $(\Omega_b/\Omega_m, \Omega_m h^2)$, a relation that can later be used to infer actual values of those cosmological constants from galaxy surveys.

Keywords: Cosmology, Large Scale Structure, Wavelets, Baryon Acoustic Oscillations, Cosmological Parameters.

Resumen

Las Oscilaciones Acústicas de Bariones y sus efectos en la Estructura a Gran Escala del Universo fueron detectados observacionalmente por primera vez hace poco menos de dos décadas. Desde entonces los cosmólogos han tenido una nueva ventana para estudiar la física del Universo temprano, que en combinación con otras evidencias como el CMB o la nucleosíntesis primordial ha permitido constatar el éxito del modelo Λ-CDM y ha ayudado a determinar con más precisión varios de los parámetros cosmológicos que rigen dicho marco teórico. En este trabajo exploramos una nueva manera de determinar parámetros cosmológicos a partir de la detección de las BAO, haciendo para ello uso de una herramienta matemática típica en la teoría de procesamiento de señales: las wavelet. En particular, partiendo de un contexto analítico establecemos una relación fenomenológica entre unos parámetros asociados a una familia especial de wavelets y el par de parámetros cosmológicos $(\Omega_b/\Omega_m, \Omega_m h^2)$, una relación que luego puede ser usada para inferir valores de dichos parámetros cosmológicos a partir de cartografiados de galaxias.

Palabras Clave: Cosmología, Estructura a Gran Escala, Wavelets, Oscilaciones Acústicas de Bariones, Parámetros Cosmológicos.

Índice

Capítulo 1

Introducción: Contexto y Motivación

La base de la cosmología moderna, tal y como la entendemos hoy en día, nace durante la primera mitad del siglo XX de la mano de grandes físicos como Einstein, Friedmann o Hubble. El desarrollo de la Relatividad General asentó las bases teóricas para entender el comportamiento del Universo en su conjunto, mientras que las ecuaciones de Friedmann y las observaciones de Hubble proporcionaron un modelo mediante el cual se abrieron las puertas a entender la evolución y expansión del cosmos. Esta cosmología moderna se consolida, tomando la forma que conserva a grandes rasgos hasta el presente, durante la segunda mitad de dicho siglo, en gran parte debido a una revolución instrumental y observacional sin precedentes. Esta revolución puso a disposición de astrónomos y cosmólogos grandes cantidades de datos que pusieron a prueba las predicciones teóricas que hasta la fecha existían únicamente como meros artificios matemáticos, al mismo tiempo que desveló nueva fenomenología que hubo que integrar dentro del marco teórico.

Esta era de *cosmología de precisión* se corona con el modelo Λ-CDM, comúnmente aceptado como el "Modelo Estándar" de la cosmología actual. En esta teoría se asume que la RG es la manera correcta de describir la gravedad a grandes escalas y que el contenido del Universo se divide en 3 grandes componentes: 1) Energía oscura 2) Materia oscura y 3) Materia ordinaria/bariónica. Las predicciones del modelo son muy sensibles a la cantidad relativa entre estas 3 componentes, y una gran parte de los proyectos cosmológicos actuales está enfocado a la determinación de dichas proporciones relativas. Algunos de los resultados más actuales que se manejan fueron proporcionados por la misión Planck de la ESA en el año 2018:

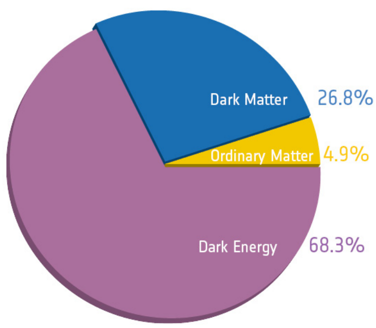

Figura 1.1: Proporciones relativas del contenido energético del universo. Las componentes de radiación y curvatura se asumen despreciables. Fuente: misión Planck, [1].

La naturaleza última de la materia oscura sigue siendo una gran incógnita para la comunidad física a día de hoy, por no hablar de la naturaleza de la energía oscura. Por tanto, tal y como muestra la Figura 1.1, la parte del contenido del Universo que vemos y entendemos es relativamente pequeña. No obstante, al entender medianamente bien las interacciones y propiedades de la materia bariónica, incluso representando una fracción minoritaria del contenido total, las consecuencias de su presencia se pueden detectar mediante diversos efectos astrofísicos y cosmológicos, pudiendo así determinar su abundancia relativa en el cosmos. Entender correctamente las interacciones de la materia a nivel microscópico es fundamental para el desarrollo de la cosmología. Y es que la cosmología actual no se puede entender sin incorporar la física de partículas en la ecuación, pues es imprescindible para entender los procesos ocurridos durante las primeras etapas de nuestro Universo, como pueden ser la nucleosíntesis, el Fondo Cósmico de Microondas u otros procesos primigenios que se describen en el Capítulo 2.

El otro pilar sin el cual no podemos entender gran parte de la investigación actual en cosmología es el uso de simulaciones y procesado de datos por ordenador. El rápido crecimiento de la capacidad de computación a lo largo de las últimas décadas ha permitido llevar a cabo simulaciones numéricas que permiten poner a prueba y jugar con diferentes aspectos de la teoría, haciendo que, de cierta manera, la cosmología pase de ser una ciencia puramente observacional a una ciencia algo más “experimental”.

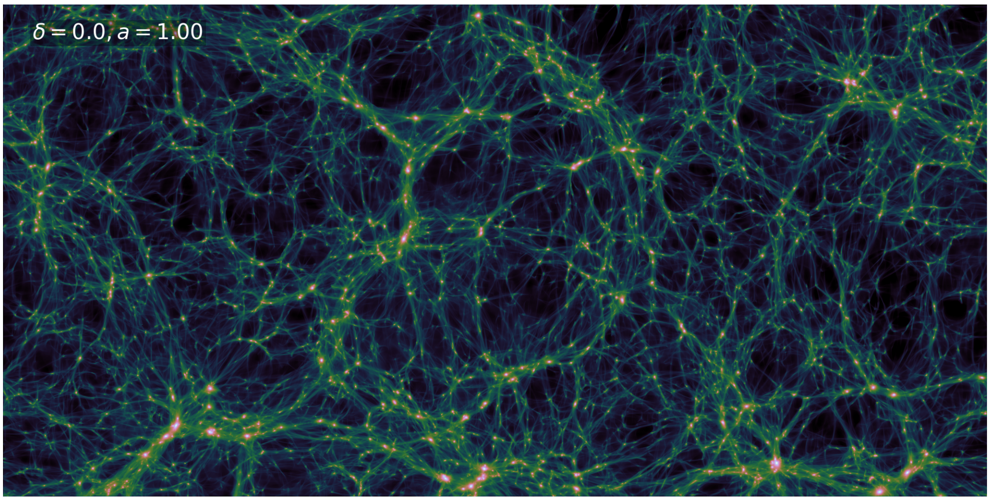

Figura 1.2: Snapshot de una simulación de la estructura a gran escala del universo.

En este trabajo estudiamos el remanente de uno de los procesos primigenios del universo temprano: el efecto de las Oscilaciones Acústicas Bariónicas (BAO, por sus siglas en inglés) en la distribución de materia a gran escala. En concreto nos centramos en las llamadas *BAO shells*, pequeñas sobre-densidades de materia en forma de cascarones esféricos alrededor de regiones de alta densidad. Entre otras cosas nos interesa caracterizar dichas estructuras en cuanto a sus dimensiones se refiere, ya que el radio típico de las BAO-shells puede emplearse como una *standard ruler*[1]. Otra razón por la cual es interesante estudiar estas estructuras es el hecho de que permiten imponer restricciones en algunos de los parámetros cosmológicos que configuran el modelo Λ-CDM.

El efecto de las BAO se detecta observacionalmente por primera vez en el año 2005, tal y como presentaron varios colaboradores del Sloan Digital Sky Survey (SDSS) en [3] o el equipo del 2dF

[1] Ver [2]

Galaxy Redshift Survey en [4], a través de la función de correlación de la distribución de galaxias en el Universo. Desde entonces se ha seguido estudiando dichas estructuras desde distintos puntos de vista y hoy en día rigen el diseño y planificación de varios futuros cartografiados de galaxias. Uno de los trabajos en los que se estudian estas estructuras, y en gran parte el punto de partida de este Trabajo de Fin de Grado, es [5]. En él se detectan las BAO-shells directamente en el espacio real, empleando para ello técnicas propias del ámbito de las wavelets y procesamiento de señales. En particular, introducen una nueva familia de wavelets diseñadas específicamente para detectar las BAO-shells, que bautizan como BAOlets. Estas dependen de dos parámetros artificiales, R y s, y a lo largo de la publicación se estudia qué valores para dichos parámetros maximizan la convolución de la wavelet con distintos tipos de señales: perfiles teóricos, simulaciones por ordenador y datos reales de cartografiados de galaxias.

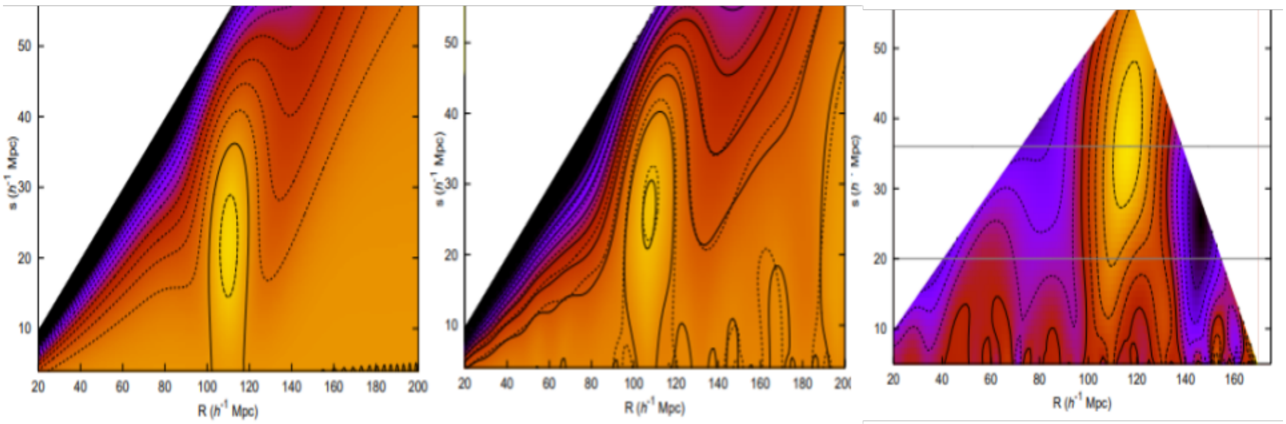

Figura 1.3: Coeficientes de convolución de la BAOlet presentados en [5]. Izquierda: para perfil teórico según Λ-CDM. Centro: para una simulación del MICE. Derecha: para un sample del SDSS.

Tal y como se menciona en el propio artículo, el método de detección mediante wavelets presenta varias ventajas en comparación con otras técnicas de detección de BAO diferentes como pueden ser el uso del espectro de potencias y/o función de autocorrelación. Por ejemplo, al tener las wavelets media cero, la estadística derivada de ellas es independiente del nivel del fondo o background de la muestra, lo cual es un aspecto delicado a tratar al emplear la función de autocorrelación.

El objetivo de este trabajo es ir un paso más allá e intentar ligar los parámetros óptimos (R, s) de la BAOlet con parámetros cosmológicos del modelo Λ-CDM, con el fin, en última instancia, de imponer restricciones y limitaciones a los valores que estos últimos parámetros puedan tomar. Para ello se ha buscado una relación empírica entre los parámetros (R_{max}, s_{max}) y $(\Omega_b/\Omega_m, \Omega_m h^2)$ mediante perfiles teóricos proporcionados por una función de transferencia analítica, con la idea de que de esta manera la determinación de los parámetros óptimos de la BAOlet para muestras extraídas de cartografiados de galaxias proporcione rangos de valores plausibles para los parámetros cosmológicos.

Con la idea de presentar un trabajo lo más autocontenido posible, se destina buena parte del mismo a presentar y discutir los formalismos teóricos en los que se engloba este Trabajo de Fin de Grado. En el Capítulo 2 se revisan conceptos cosmológicos que se imparten típicamente en un curso de grado y se introducen algunas nociones más avanzadas relativas a la formación de estructuras. En el Capítulo 3 centramos la atención en las wavelets, una herramienta matemática que durante las últimas décadas ha cobrado especial relevancia en distintos ámbitos de la ciencia (entre los que se encuentra la cosmología) y que empleamos en este trabajo para detectar las oscilaciones acústicas bariónicas en la estructura a gran escala del Universo. En el Capítulo 4 se expone la parte original de este trabajo, explicando cómo reproducimos los resultados de [5], mostrando la metodología seguida para relacionar los distintos parámetros involucrados y estudiando la validez del método propuesto, estimando las incertidumbres asociadas. Finalmente, en el Capítulo 5 extraemos algunas conclusiones de los resultados mostrados en el capítulo anterior, y dibujamos una hoja de ruta con los que serían los próximos pasos a dar en el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 2

Estructura a Gran Escala Del Universo

Este primer capítulo está destinado a recordar e introducir conceptos relativos a la estructura a gran escala del Universo, sirviendo como marco teórico bajo el cual se desarrolla el trabajo. En particular, revisaremos algunas ideas básicas de la cosmología que luego nos permitirán introducir nociones elementales acerca de la formación de estructuras. Aunque el trabajo se centre en las *BAO shells*, es importante tener presentes los mecanismos generales que controlan la formación de estructuras en el Universo a gran escala, las evidencias que las respaldan y las herramientas teóricas que tenemos a nuestra disposición para describirlas, pues el efecto de las oscilaciones acústicas se encuentra superpuesta al resto de fenómenos que rigen la distribución de la materia en el cosmos.

Para este capítulo seguimos principalmente a [6] y [7]. Aun siendo libros escritos en la década de los 90 y principios del 2000, respectivamente, la teoría que aquí exponemos sigue siendo ampliamente aceptada.

2.1 Λ-CDM y Cosmología Moderna

El paradigma cosmológico actual se sustenta en gran parte sobre tres pilares observacionales:

1. La expansión acelerada del Universo.

2. El Fondo Cósmico de Microondas y sus anisotropías.

3. La abundancia relativa de elementos ligeros tras la recombinación.

Estas evidencias observacionales justifican directa o indirectamente muchas de las afirmaciones que sostiene la Teoría del Big Bang.

La primera de ellas, afianzada en la década de los 90 gracias a mediciones de brillo de supernovas, evidencia que nuestro Universo no es estático, y que de hecho, se está expandiendo de manera acelerada. De la presente expansión acelerada se deduce que el Universo temprano tuvo que ser mucho más denso y caliente, lo cual dio lugar a varios fenómenos físicos de especial interés.

El segundo pilar observacional, la estadística asociada al Fondo Cósmico de Microondas (CMB por sus siglas en inglés) y sus anisotropías primarias, abre la posibilidad de conocer las propiedades de dicho universo temprano, a la vez que consolida los argumentos a favor de la existencia de lo que llamamos materia oscura.

Finalmente, la determinación de la abundancia relativa de elementos ligeros como el hidrógeno, deuterio, helio o litio a través de observaciones de galaxias lejanas u entornos donde se haya producido poca nucleosíntesis estelar proporciona determinaciones eficientes de distintos parámetros cosmológicos que parecen estar en consonancia con distintas estimaciones mediante otros métodos.

El marco teórico más extendido para explicar toda esta fenomenología es el modelo Λ-CDM (*Lambda Cold Dark Matter*). A continuación recordamos los conceptos básicos asociados a esta teoría:

Partiendo de Principio Cosmológico, que asume la homogeneidad e isotropía del Universo a escalas suficientemente grandes, se llega a la forma genérica de la métrica que un universo de dicho tipo debiera tener, que se conoce como **métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)**:

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = c^2dt^2 - a^2(t)\left[\frac{d\sigma^2}{1-k\sigma^2} - \sigma^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right], \tag{2.1}$$

donde σ es una coordenada radial comóvil adimensional y $\kappa \in \{-1, 0, +1\}$ distingue los tres tipos de geometría que puede tener el espacio-tiempo: cerrada, plana o abierta (se asume que todo el Universo tiene la misma curvatura). Esta métrica describe un universo isótropo, homogéneo y conexo por caminos (no necesariamente simplemente conexo).

La función $a(t)$ que aparece en la expresión 2.1 se conoce como *factor de escala*, y es la cantidad que relaciona las distancias comóviles con las distancias físicas/propias. Una cantidad relacionada con esta última es el famoso parámetro de Hubble, $H(t)$, la cual contiene información sobre cómo de rápido se alejan distintas regiones del espacio en función de la distancia que las separa. Se relaciona con el factor de escala mediante una sencilla expresión:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\,.$$

Al mismo tiempo, el factor de escala también tiene una estrecha relación con otra cantidad de uso común en la cosmología: el *redshift*. Si un fotón es emitido en un tiempo t_e y recibido por un observador en un tiempo posterior t_o, este habrá sufrido un corrimiento relativo z que viene dado por

$$z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1.$$

Visto el importante papel que juega en esta descripción del cosmos, conocer cómo cambia el factor de escala a lo largo del tiempo es crucial para entender la dinámica del Universo. Combinando la forma de la métrica FLRW con las ecuaciones de campo de Einstein se llega a las ecuaciones de Friedmann, que ligan la evolución del parámetro de escala, y por tanto de la expansión del Universo, al contenido de energía del mismo, a través de las siguientes expresiones:

$$\frac{\dot{a}^2 + \kappa c^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \tag{2.3}$$

En general, las ecuaciones 2.2 y 2.3 son un sistema de ecuaciones diferenciales que junto con la condición inicial habitual $a(t_0) = 1$, siendo t_0 el tiempo cosmológico a día de hoy, y una ecuación de estado que relacione la densidad ρ y la presión p, determinan la evolución temporal del factor de escala. Es importante recalcar que la densidad ρ de las ecuaciones anteriores contempla todas las distintas formas de energía contenidas en el Universo: la densidad de materia, la de radiación, energía oscura... y que cada una de ellas evoluciona de manera diferente a lo largo del tiempo [1].

Reordenando la ecuación 2.2 y teniendo en cuenta que es válida para el tiempo actual (que denotamos por el subíndice 0), se tiene una manera interesante de determinar el tipo de curvatura del universo, ya que

$$\kappa = \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 - H_0^2\right)$$

y la determinación del signo de κ se reduce a la comparación de la densidad total actual ρ_0 con un valor especial que llamamos **densidad crítica**:

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} .$$

Así, si $\rho_0 > \rho_{crit,0}$ el Universo tendrá una curvatura positiva y si $\rho_0 < \rho_{crit,0}$ la curvatura será negativa. Una de las implicaciones más importantes del tipo de curvatura del Universo es que determina la futura expansión del Universo: si $\kappa \leq 0$ la expansión del cosmos es eterna mientras que si $\kappa > 0$ puede ocurrir que la expansión del Universo llegue a detenerse. La mayoría de las evidencias observacionales, no obstante, son compatibles con un modelo de Universo plano, es decir, $\kappa = 0$.

Aprovechando el concepto de densidad crítica es habitual definir y manejar los parámetros de densidad Ω, que sirven para hacer comparaciones relativas entre los distintos tipos de densidad de energía. Así, el parámetro de densidad de un tipo X de energía se define como

$$\Omega_X = \frac{\rho_{X,0}}{\rho_{crit,0}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\rho_X.$$

Si la densidad de energía del Universo es igual a la densidad crítica, la suma de todos los parámetros de densidad deber ser igual a la unidad, $\sum_i \Omega_i = 1$. Para que esto sea así incluso en los casos en los que la densidad no sea exactamente igual a la densidad crítica, se introduce también un parámetro de densidad Ω_κ debido a la curvatura, que puede tomar valores tanto positivos como negativos. Para la densidad de materia es habitual diferenciar si es de tipo bariónico u oscuro:

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm}.$$

Uno de los principales retos actuales de la cosmología es la determinación de las distintas constantes que parametrizan el modelo Λ-CDM, entre los que se encuentran estos **parámetros de densidad** Ω. Otra de las constantes principales a determinar es el valor actual del parámetro de Hubble, H_0, aunque es más habitual trabajar con su versión adimensional h, que se define como

[1] Es bastante directo ver que $\rho_m \propto a^{-3}$, mientras que hay diferentes maneras de comprobar que $\rho_{rad} \propto a^{-4}$. En general $\rho(t) \propto a(t)^\gamma$ y el exponente γ depende del tipo de energía considerado. Al aplicar este comportamiento diferente según el tipo de energía a las ecuaciones de Friedmann observamos que en distintas épocas del Universo "dominan" distintos tipos de energía.

$$H_0 = 100 \cdot h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}.$$

2.2 Teoría de Perturbaciones

A grandes rasgos podemos pensar que la métrica FLRW y las ecuaciones de Friedmann proporcionan una descripción del Universo a orden cero. Cuando se añaden pequeñas perturbaciones en el Universo homogéneo los efectos gravitatorios tienden a acumular materia alrededor de dichas perturbaciones, constituyendo así el primer paso en la formación de estructuras. Asumiendo que estas desviaciones de la homogeneidad son "pequeñas", las ecuaciones pertinentes se pueden linealizar y proporcionan una descripción de la dinámica del Universo a primer orden.

Para hablar de desviaciones en la densidad de materia respecto al background la densidad absoluta $\rho(\mathbf{r}, t)$ no es la magnitud más adecuada, y es mucho más común emplear una versión relativa, que llamamos **contraste de densidad**:

$$\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t) - \overline{\rho}(t)}{\overline{\rho}(t)} ,$$

donde $\overline{\rho}(t)$ denota el promedio espacial de la densidad para un tiempo cosmológico t. En general el régimen lineal es aplicable si $|\delta(\mathbf{r}, t)| \ll 1$, es decir, si la desviación de la media es pequeña. Como es razonable asumir que durante las épocas tempranas del Universo este era bastante homogéneo, y según el Principio Cosmológico lo sigue siendo hoy en día a escalas espaciales lo suficientemente grandes, estos dos son los escenarios principales en los que la teoría de perturbaciones lineales cobra mayor importancia.

A escalas espaciales más pequeñas el tratamiento lineal deja de ser válido y los efectos gravitacionales no lineales toman mayor importancia. El régimen no lineal en general no admite un tratamiento analítico bueno y comúnmente se recurre a simulaciones de N cuerpos y/o simulaciones hidrodinámicas para estudiar estos aspectos de la formación de estructuras. El hecho de que el régimen lineal empiece a escalas pequeñas es especialmente relevante a la hora de entender la formación de galaxias y cúmulos de galaxias, pues sugiere un crecimiento jerarquizado de estructuras: los objetos más masivos surgen de la fusión de objetos más pequeños que ya han evolucionado según la teoría no lineal.

En el régimen lineal la evolución del contraste de densidad se puede aproximar a primer orden como

$$\delta(\mathbf{r}, t) = D_+(t) \cdot \delta(\mathbf{r}, t_0) = D_+(t) \cdot \delta_0(\mathbf{r}) , \tag{2.4}$$

donde la función $D_+(t)$ se conoce como factor de crecimiento.

La teoría de perturbaciones cosmológica es una teoría estocástica, y como tal los resultados y herramientas que proporciona dicha teoría son de carácter probabilista. Una herramienta matemática clave para entender la distribución de materia en el Universo es la función de autocorrelación a dos puntos $\xi(r, t)$, que se define como

$$\xi(r, t) = \frac{1}{V} \int \delta(\mathbf{r}, t)\delta(\mathbf{r'}, t) d\mathbf{r}, \qquad r = ||\mathbf{r} - \mathbf{r'}||. \tag{2.5}$$

De forma más general la función de autocorrelación a dos puntos depende del vector de posición $\mathbf{r}$, y no de su módulo r. Sin embargo, el argumento de que vivimos en un universo isótropo justifica la expresión 2.5.

Una información equivalente a la que proporciona la función de autocorrelación viene dada por el **espectro de potencias** $P(k,t)$. El espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, que se puede simplificar a

$$(2\pi)^3 P(k,t)\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k'}) = \langle\tilde{\delta}(\mathbf{k},t)\tilde{\delta}(\mathbf{k'},t)\rangle, \qquad k = ||\mathbf{k}-\mathbf{k'}||,$$

donde $\tilde{\delta}(\mathbf{k},t)$ denota a su vez la transformada de Fourier del contraste de densidad y δ^3 es la Delta de Dirac. El espectro de potencias es especialmente relevante, ya que proporciona una caracterización estadística completa de un tipo concreto de procesos estocásticos: los campos gaussianos. Este tipo de campos son de uso habitual en la teoría de formación de estructuras cosmológicas, ya que se suele asumir que las fluctuaciones cuánticas pre-inflacionarias, las causantes de las perturbaciones en el Universo homogéneo, se pueden modelar de este modo.

Mientras que las amplitudes de cada modo de Fourier se mantengan pequeñas, es decir, $|\tilde{\delta}(\mathbf{k},t)| \ll 1$, el régimen lineal es aplicable, y por tanto cada modo de Fourier evoluciona de manera independiente [2]. A primer orden, en vista de 2.4, el espectro de potencias se puede aproximar como

$$P(k,t) = D_+^2(t)\cdot P_0(k).$$

Determinar un perfil primordial $P_0(k)$ para el espectro de potencias es un problema que requiere incorporar física del periodo inflacionario. Una elección típica para dicho perfil inicial es el de Harrison-Zeldovich, que toma la forma de una ley de potencias $P_{HZ}(k) = Ak^n$, donde $n \approx 1$ es una elección habitual.

Un aspecto importante a tener en cuenta es que existen varios procesos físicos que pueden suprimir el crecimiento de las inhomogeneidades iniciales que sirven de semilla para la formación de distintas estructuras cósmicas. El efecto de la presión a pequeñas escalas, la interacción con partículas relativistas o el imperfecto acoplamiento de la radiación con la materia bariónica, entre otros fenómenos, tienen como efecto neto[3] alterar la forma del perfil primordial del espectro de potencias, por lo que se introduce una corrección a través de una **función de transferencia** $T(k)$, que solo depende del número de ondas:

$$P_0(k) = P_{HZ}(k)\cdot T^2(k).$$

En [9] presentan una aproximación analítica de la función de transferencia, asumiendo un modelo cosmológico Λ-CDM adiabático y que incluye todos los efectos bariónicos, que será relevante durante el trascurso del trabajo. La expresión de la que parten para calcularla es la siguiente:

$$T(k) = \frac{\tilde{\delta}(k,z=0)\tilde{\delta}(0,z=\infty)}{\tilde{\delta}(k,z=\infty)\tilde{\delta}(0,z=0)}\,.$$

[2] Con más detalle en [8, Cap. 3]

[3] para el caso de unas fluctuaciones iniciales gaussianas y homogéneas

La versión analítica que proponen tiene la forma de una combinación baricéntrica de dos funciones de transferencia de origen bariónico y no-bariónico:

$$T(k) = \frac{\Omega_b}{\Omega_m} \cdot T_b(k) + \frac{\Omega_{dm}}{\Omega_m} \cdot T_{dm}(k). \tag{2.6}$$

Cada una de estas funciones de transferencia es a su vez una complicada sucesión de composiciones de funciones ajustadas empíricamente a simulaciones numéricas que acumulan una gran cantidad de constantes arbitrarias, pero incorpora, no obstante, diferentes efectos físicos en su forma funcional [4]. En última instancia esta función de transferencia depende de dos parámetros, que están estrechamente relacionados con algunos parámetros cosmológicos "básicos" del modelo Λ-CDM. En concreto, estos parámetros son la razón del parámetro de densidad bariónico respecto al de densidad de materia total, Ω_b/Ω_m, y el producto del parámetro de densidad de materia por la constante de Hubble reducida al cuadrado, $\Omega_m h^2$.

La variación de estos parámetros, a los cuales de ahora en adelante nos referiremos también como cosmológicos, afecta de manera cualitativa a la forma de la función de transferencia, como se puede observar en la Figura 2.1.

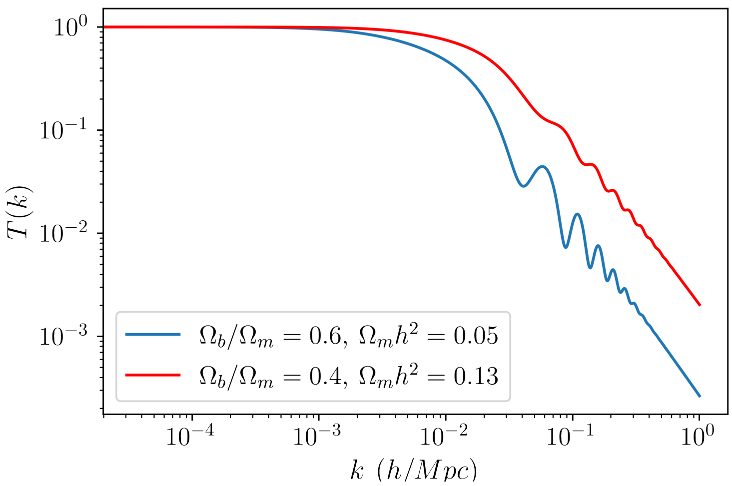

Figura 2.1: Función de transferencia analítica de [9] para distintos parámetros cosmológicos.

Tanto la amplitud de las oscilaciones como la posición de los picos que se aprecian en la figura anterior dependen de los parámetros cosmológicos. La utilidad de esta función de transferencia analítica reside en que, tal y como se explica en [5], el perfil de densidad esperado entorno a una inhomogeneidad inicial de tipo puntual [5] es justamente la transformada inversa de Fourier de dicha función:

$$\rho(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}[\, T(k)\,](\mathbf{r}).$$

Así, para cada par de valores de $(\Omega_b/\Omega_m, \Omega_m h^2)$ es posible determinar un perfil de densidad para la

[4] Entre otros: las oscilaciones acústicas, el Compton drag, diferentes procesos de damping...

[5] Sería más realista asumir unas inhomogeneidades gaussianas, pero se complicarían los cálculos.

materia acumulada alrededor de una perturbación inicial en el universo homogéneo. Al incorporar las funciones de transferencia los efectos bariónicos, estos perfiles deberían reflejar el efecto de las oscilaciones acústicas bariónicas. En la siguiente figura mostramos los perfiles asociados a las funciones de transferencia de la Figura 2.1:

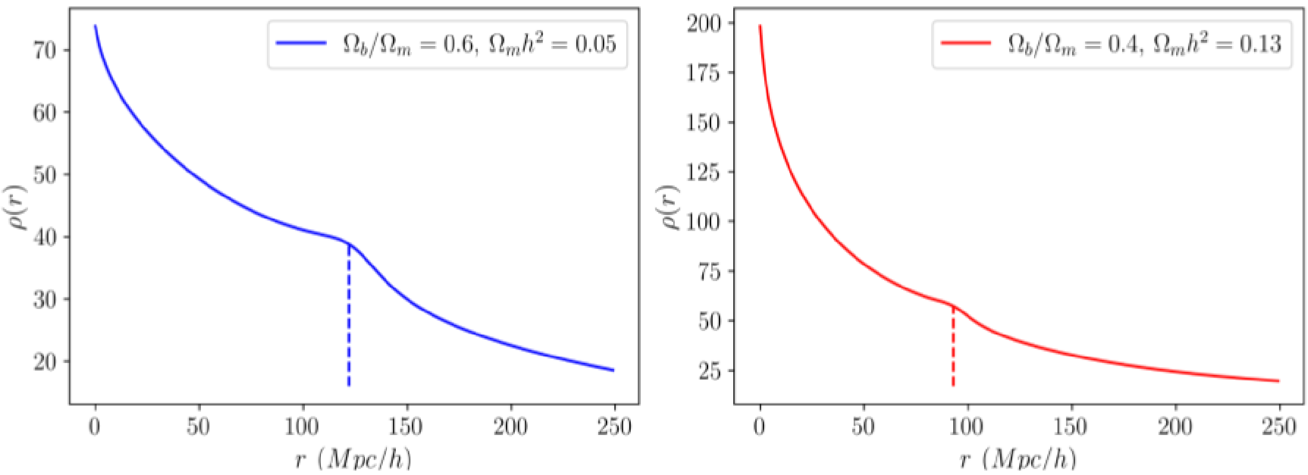

Figura 2.2: Perfiles de densidad correspondientes a las funciones de transferencia mostradas en la Figura 2.1. En línea discontinua se marcan las posiciones aproximadas de las sobredensidades debidas a las BAO-shells.

Como se aprecia en la Figura 2.2 la posición y la prominencia de la sobredensidad causada por las BAO-shell depende en gran medida de los parámetros cosmológicos.

2.3 Universo Temprano: Plasma, Nucleosíntesis y CMB

Si nuestro Universo hoy en día se está expandiendo, es decir, el factor de escala $a(t)$ está creciendo, las ecuaciones de Friedmann nos dicen que en el pasado el Universo debió ser mucho más pequeño, y por tanto, más denso y caliente. En las etapas iniciales del cosmos la temperatura era lo suficientemente alta como para que la materia bariónica contenida en ella estuviera en estado de plasma, ya que la radiación electromagnética era lo suficientemente energética como para prevenir la formación de átomos neutros (recordamos que $\rho_{rad} \propto a^{-4}$, luego era la "energía dominante" en este Universo primigenio).

La temperatura del Universo en los primeros momentos después del Big Bang era tan elevada que las interacciones fundamentales no eran capaces de congregar las partículas fundamentales en estructuras más complejas, manteniéndose en un estado de plasma formado por quarks y gluones. A medida que el Universo se enfrió la fuerza nuclear fuerte confinó los quarks en estructuras bariónicas como protones y neutrones. Se cree que cuando el Universo tenía una edad de entre 10 segundos y 20 minutos el rango de temperatura fue el adecuado para, por un lado, darse procesos de fusión entre estos nucleones, y por otro, permitir la generación de deuterio, que a su vez habilita la producción de He^3,He^4 y Li^7. La abundancia relativa en la que estos elementos ligeros fueron producidos depende fuertemente de la densidad bariónica, pues a grandes rasgos determina la frecuencia con la que los nucleones colisionaban y reaccionaban entre ellos.

Teniendo en cuenta el ratio inicial de protones y neutrones (donde el Modelo Estándar tiene algo que decir) y la intensidad de la interacción entre bariones y fotones (que básicamente depende de la densidad bariónica Ω_b), es posible deducir la abundancia relativa de estos elementos ligeros en las primeras etapas del Universo, como muestra la Figura 2.3:

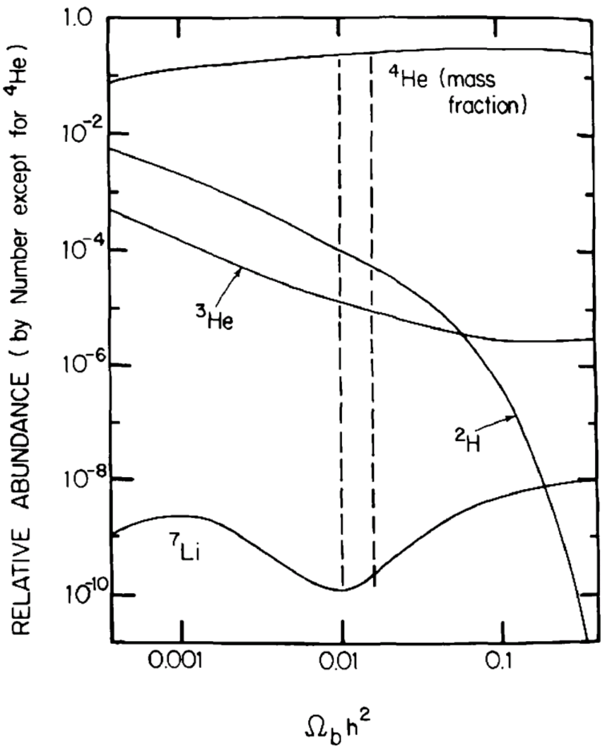

Figura 2.3: Abundancia relativa teórica de distintos elemento ligeros según el parámetro de densidad bariónico. Imagen tomada de [6].

Las medidas experimentales de estas abundancias relativas en entornos adecuados [6] proporciona un método para estimar la densidad bariónica del Universo en épocas tempranas, que además coincide con otras estimaciones independientes como las extraídas a partir del Fondo Cósmico de Microondas.

El Fondo Cósmico de Microondas ha constituido toda una revolución dentro del mundo de la cosmología. Desde su descubrimiento al principio de la década de los 60, esta radiación electromagnética de $\lambda \sim 1.9$ mm proveniente de todas las direcciones del cielo ha sido sujeto de numerosos estudios cosmológicos. Tras la época de recombinación el medio en el que se movían los fotones se volvió neutro, "liberando" así la luz que estaba en constante dispersión con las diferentes partículas cargadas.

El hecho de que los fotones estuvieran en constante dispersión con los electrones del plasma y la alta frecuencia de interacción implica que, aunque bajara la temperatura del plasma, el baño de fotones estaba en aproximado equilibrio termodinámico en todo momento, en particular, justo antes de que la temperatura del plasma disminuyese lo suficiente como para que electrones, protones y neutrones se recombinasen para formar átomos ligeros. Este estado de equilibrio de los fotones sugiere que la distribución energética del CMB debería seguir una distribución del tipo cuerpo negro, y efectivamente,

[6] La posterior actividad estelar puede alterar estas abundancias relativas. El deuterio, no obstante, no es producido por las estrellas, únicamente destruido, por lo que es un indicador especialmente interesante.

distintas misiones que han estudiado el CMB lo confirman.

En la Figura 2.4 mostramos el gran acuerdo existente entre la teoría y la observación:

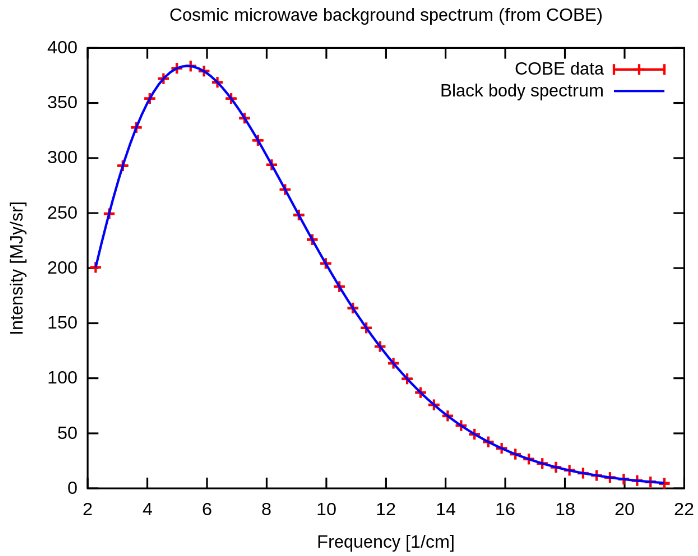

Figura 2.4: Intensidad de la radiación del CMB en función de la frecuencia. En rojo, medidas del satélite COBE de la NASA. En azul, un espectro de cuerpo negro correspondiente a $T = 2.726$ K.

Un descubrimiento clave, tal vez el más importante, en el estudio del CMB fue darse cuenta de que realmente no es uniforme en todas las direcciones. El desarrollo de instrumentación cada vez más sensible permitió constatar que esta radiación primordial presenta pequeñas fluctuaciones angulares, es decir, presenta cierta anisotropía. El estudio estadístico de estas anisotropías contiene mucha información acerca de distintos parámetros cosmológicos y es una de las evidencias observacionales más importantes a favor del modelo Λ-CDM. En concreto, una de las validaciones más contundentes de la teoría del Big Bang viene dada por el espectro de potencias angulares del CMB: tomando las fluctuaciones angulares de temperatura $\delta T/T : (\theta, \phi) \to \mathbb{R}$ del mismo y descomponiéndolo como una serie de armónicos esféricos del tipo

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{l,m} Y_l^m(\theta, \phi) \ ,$$

la cantidad $C_l = \langle |a_{l,m}|^2 \rangle$ caracteriza de manera estadística las fluctuaciones angulares de temperatura[7]. El hecho de que C_l no tenga una dependencia efectiva en m es consecuencia del Principio Cosmológico y la isotropía del Universo: al no haber una dirección de observación privilegiada el promedio no puede depender del número azimutal m.

Un detalle adicional a tener en cuenta son los modos de polarización de los fotones del CMB. Las hay de dos tipos, las llamadas E-modes y B-modes, y el espectro de potencias angular correspondiente a cada una de ellas es diferente. Lo interesante es que estudiar la polarización del CMB permite estudiar

[7]En realidad el cálculo del espectro de potencias angular es algo más complicado, pues coexisten varios fenómenos físicos que influyen en las anisotropías que se miden en el CMB, como pueden ser nuestra velocidad peculiar respecto al rest-frame del CMB, interacciones de los fotones del CMB en su trayectoria hasta la Tierra etc.

fenómenos tan peculiares como el *weak lensing* o las ondas gravitacionales primordiales.

En la siguiente figura mostramos el aspecto típico del espectro angular de potencias para las fluctuaciones de temperatura del CMB:

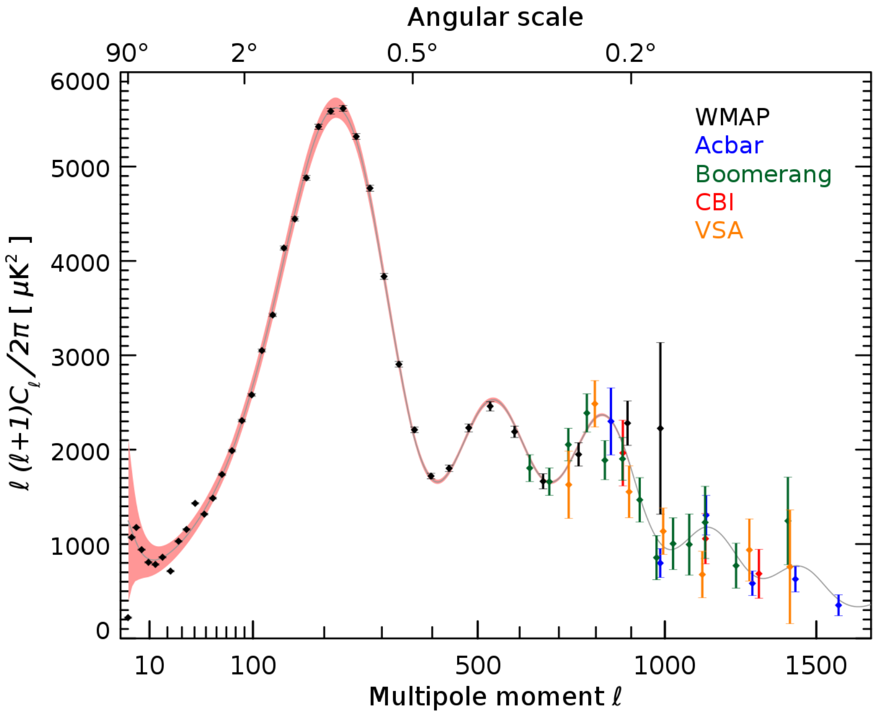

Figura 2.5: Espectro de potencias angular del CMB. La banda roja representa lo que predice el modelo Λ-CDM.

La posición y amplitud relativa de los picos y valles que se observan en la Figura 2.5 es sensible a los distintos parámetros de densidad del modelo Λ-CDM. Las fluctuaciones de temperatura del CMB son realmente pequeñas, por lo que emplear el CMB para determinar parámetros cosmológicos requiere de una gran precisión instrumental. Actualmente, los datos más precisos que disponemos del Fondo Cósmico de Microondas son los proporcionados por el satélite Planck de la Agencia Espacial Europea.

2.4 Oscilaciones Acústicas de Bariones

Las características del plasma del Universo temprano dieron lugar al fenómeno cuyo remanente estudiamos en este trabajo. En dicha época las fuerzas gravitatorias tenían la capacidad de comprimir el plasma de las regiones próximas a las inhomogeneidades de mayor densidad sobre el fondo uniforme, mientras que la creciente presión de radiación (recordamos que de efecto notable en esta época) en dichas zonas diluía las sobredensidades de la región ejerciendo una fuerza en el sentido contrario. La interacción entre estas dos tendencias opuestas originó ondas acústicas que se propagaban en el plasma de bariones y fotones del Universo primigenio.

La materia oscura, al no interaccionar electromagnéticamente, no es afectada por la presión de radiación y tiende a acumularse entorno a las inhomogeneidades iniciales por efectos puramente gravitatorios. La propagación de las ondas acústicas en el plasma se detiene abruptamente en el momento de la recombinación: cuando la temperatura baja lo suficiente como para permitir la nucleosíntesis, la radiación electromagnética se desacopla de los bariones. A partir del momento de recombinación tanto la zona de materia oscura concentrada en el origen de la inhomogeneidad como las regiones de materia bariónica arrastrada por la onda acústica siguen creciendo gravitacionalmente. El resultado, en tiempos más tardíos, es la presencia de una gran sobredensidad en la zona central donde se originó la inhomogeneidad, rodeado de un cascarón esférico ligeramente sobredenso que llamamos BAO-shell.

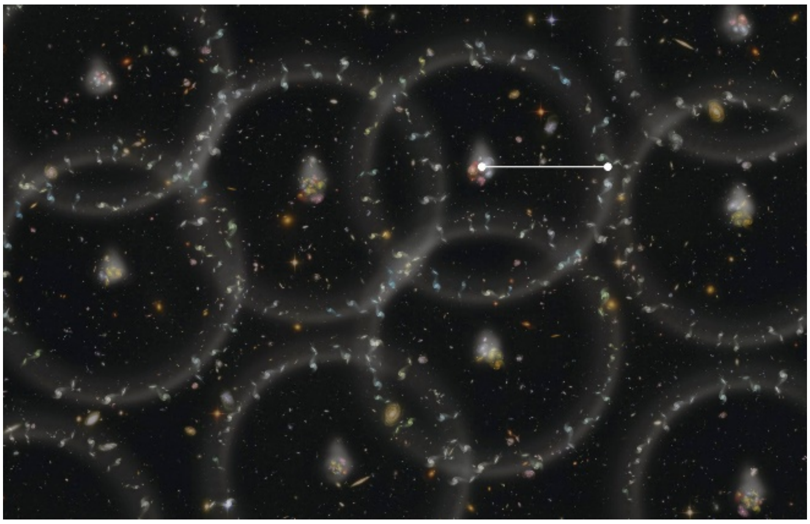

Figura 2.6: Impresión artística de varias BAO-shell. Fuente: NASA.

La distancia máxima que las ondas acústicas pudieron recorrer en el plasma, y por tanto el radio típico que uno esperaría encontrar para las BAO shells hoy en día, está fijado por el **horizonte de sonido** r_s (*sound horizon*) en el momento de la recombinación. Este se define justamente como la distancia comóvil que una onda acústica pudo haber recorrido antes del desacoplamiento de los fotones con los bariones y es una escala fija, una standard ruler, en cualquier modelo cosmológico:

$$r_s = \int_0^{t_{rec}} c_s(1+z)dt',$$

siendo c_s la velocidad de la onda. Según la misión Planck, el valor del horizonte de sonido en el momento de la recombinación es de r_s =144.57±0.22 Mpc = 97.82±0.15 Mpc/h.

Desde el punto de vista teórico, la propagación de las ondas acústicas en el plasma está gobernada por una ecuación diferencial de segundo orden que recuerda claramente a un oscilador armónico amortiguado y forzado:

$$\ddot{\delta}_b + \overbrace{\frac{\dot{R}}{1+R}}^{Damping}\dot{\delta}_b + k^2 c_s^2\, \delta_b = \underbrace{F(k,t)}_{Forzado}, \tag{2.7}$$

donde $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma$ y $F(k,t)$ es una función que incluye un potencial gravitatorio. El desarrollo mediante el cual se llega a la ecuación 2.7 se puede encontrar en [10, pp. 6-7]. A grandes rasgos, el término de amortiguamiento proviene de la expansión del universo, mientras que el término de forzado tiene que ver con perturbaciones en el potencial gravitatorio. Vista la presencia de distintos parámetros cosmológicos en la ecuación 2.7, entre otros ρ_b, la teoría nos dice que a partir del estudio de las BAO es posible extraer información acerca de dichos parámetros.

Capítulo 3

Wavelets: Teoría y Aplicaciones

Las wavelets son hoy en día una herramienta de uso cotidiano en el ámbito del procesamiento de señales. La teoría asociada a ellas no es especialmente reciente (se empiezan a desarrollar en profundidad en la primera mitad del siglo XX) y surge, de cierta manera, como la extensión natural de la teoría asociada a las transformadas de Fourier. No obstante, durante el último par de décadas ha resurgido el interés por ellos en distintos ámbitos de la física, entre los que se encuentra la cosmología. Para la teoría elemental nos hemos basado principalmente en [11] y [12].

3.1 Idea General

Como adelantamos en la introducción del capítulo la teoría de las wavelets guarda estrecha relación con la teoría del análisis harmónico. Una manera especialmente útil de pensar en las series y transformadas de Fourier es adoptando el punto de vista del análisis funcional: viendo el conjunto de exponenciales complejas $\{e^{2\pi inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ como una base ortonormal de $L^2(0,1)$ (con el producto escalar definido de la manera habitual), los coeficientes de las series de Fourier no son más que las proyecciones de una función respecto de los elementos de la base. El caso de las transformadas de Fourier es totalmente análogo, simplemente haciendo el paso de lo discreto a lo continuo y cambiando los sumatorios por integrales.

La idea de la teoría de wavelets es emplear otras bases ortonormales del espacio en cuestión. Así, al calcular los coeficientes de una función en esa base, o lo que es lo mismo, al descomponer una señal como combinación de elementos de la base, se puede obtener información relevante de la misma. De la misma manera que las transformadas de Fourier identifican las frecuencias predominantes presentes en una señal, una *transformada de wavelet* genérica refleja con qué elementos de la base empleada tiene mayor similitud la función que se transforma.

Una ventaja importante de las transformadas de wavelet frente a la transformada de Fourier clásica es que los elementos de la base que emplea el análisis harmónico, los senos y los cosenos, no están localizados en el espacio, por lo que no son del todo adecuados para detectar detalles agudos en la función a estudiar. Como solución a dicha falta de localización surge la noción de transformada de Fourier con ventana (*windowed FT*), que trunca los senos y cosenos a un intervalo de la recta real. De esta manera se abre la opción de realizar un análisis *multiresolución* de una señal dada: no solo se caracterizan las frecuencias predominantes en ella, sino que también se obtiene su ubicación en el tiempo.

Al introducir este nuevo grado de libertad los elementos de una base de wavelets ya no quedan caracterizados simplemente por un parámetro de escala (lo que comúnmente se denota por k, el número de onda, propio del dominio de las frecuencias) sino que hace falta introducir un nuevo parámetro de traslación, que lo sitúe en el dominio temporal (o espacial, dependiendo del caso). Una idea clave a la hora de construir familias de wavelets es que estas se pueden generar a partir de traslaciones y dilaciones de una función madre:

$$\psi_{t,d}(x) = \phi\left(\frac{x-t}{d}\right).$$

En general no cualquier función madre $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ genera de este modo una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$: existen ciertas restricciones al respecto, como plasma por ejemplo el Teorema de Balian-Low ([11, Tma. 2.1]).

Las wavelets ya se han utilizado previamente como herramienta matemática en algunos campos de la cosmología. Por ejemplo son típicos las "Mexican Hat" o "Haar Wavelet".

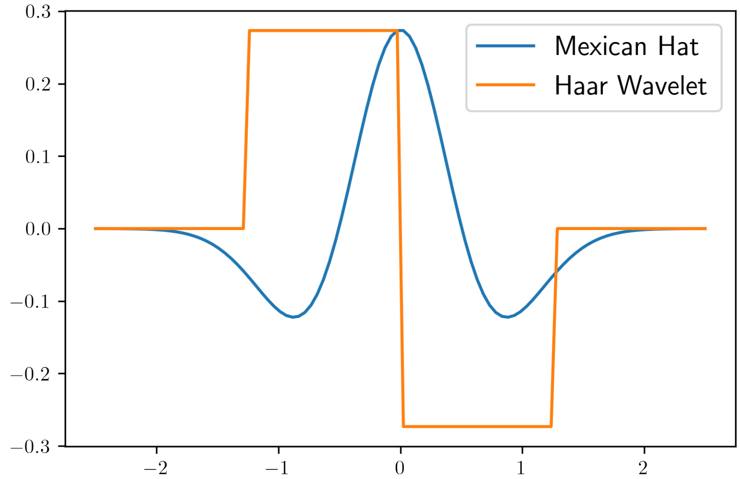

Figura 3.1: Representación gráfia de las mencionadas wavelets clásicas.

Estas se han empleado, entre otras cosas, para detectar desviaciones de la gaussianidad en el universo temprano[1] o para filtrar las fuentes de radiación indeseadas en el CMB[2].

Como ocurre con las transformadas de Fourier, en una transformada de wavelet la información relevante asociada a una señal está codificada en los coeficientes asociados a cada elemento de la base:

$$c_{t,d} = \langle \phi, \psi_{t,d} \rangle = \int \phi(r)\psi^*_{t,d}(r)dr.$$

La diferencia principal será que estos coeficientes dependen de dos parámetros, y por tanto su representación gráfica habitual es un mapa de colores bidimensional. La Figura 3.2 muestra un ejemplo de dicho mapa:

[1]Ver [13]
[2]Ver [14]

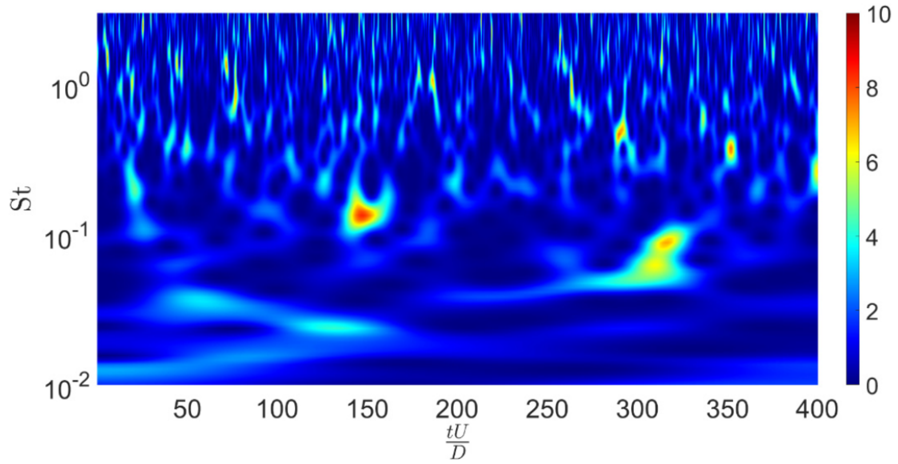

Figura 3.2: Ejemplo de mapa de coeficientes de una transformada de wavelet aplicado en un escenario de mecánica de fluidos. Fuente: [15]

Estos coeficientes a veces los llamaremos de convolución, pues si uno fija un parámetro de *scaling* d_0, entonces los coeficientes asociados a dicho parámetro fijo se obtienen como la convolución de la wavelet asociada con la función/señal a estudiar:

$$c_{d_0}(t) = \int \phi(r)\psi^*_{d_0}(r-t)dr.$$

De la misma manera que las notas musicales se pueden caracterizar por su frecuencia fundamental o característica, la cual se manifiesta como un pico en el espectrograma del sonido [3], un pico en el mapa de coeficientes de una seña al ser filtrada por una familia de wavelets significa que la señal contiene "features" que resemblan o que resuenan con la wavelet correspondiente a los parámetros de traslación y dilación asociados al pico. Cuanto más pronunciado sea el pico, mayor similitud guardarán la señal y la wavelet correspondiente.

Una vez introducidos los conceptos generales asociados a la teoría de wavelets, pasamos a estudiar las wavelets específicas que nos interesan en este trabajo.

3.2 BAOlet

Las BAOlet son una familia de wavelets diseñadas específicamente para detectar las "BAO-shells" en la estructura a gran escala del Universo introducidas en [5]. Son funciones radiales que vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\psi_{R,S}(r) = \frac{\alpha_{R,S}}{4\pi r^2}\left[2B_3\left(2\cdot\frac{r-R}{S}\right) - B_3\left(\frac{r-R}{S}\right)\right],$$

donde la función $B_3(x)$ se conoce como *B-spline de tercer grado* y viene dada por

[3]Un espectrograma típico de ejes temporal y frecuencia no deja se ser una mapa de coeficientes de wavelet para la transformada de Fourier.

$$B_3(x) = \frac{1}{12}\left(|x-2|^3 - 4|x-1|^3 + 6|x|^3 - 4|x+1|^3 + |x+2|^3\right),$$

mientras que $\alpha_{R,S}$ es una constante de normalización para garantizar que

$$||\psi_{R,S}||^2 = \int |\psi_{R,S}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = 1.$$

El parámetro R juega el papel de parámetro de traslación, mientras que S es evidentemente el parámetro de *scaling*. Las Figuras 3.3 y 3.4 muestran representaciones gráficas de la BAOlet para unos parámetros de traslación y dilación dados:

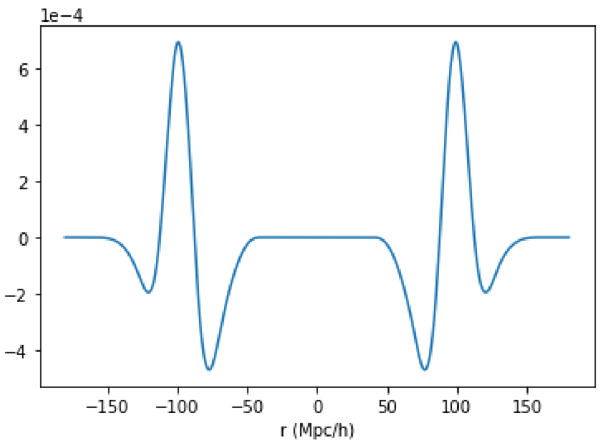

Figura 3.3: Representación gráfica de una BAOlet de parámetros $R = 100$ Mpc/h y $S = 30$ Mpc/h.

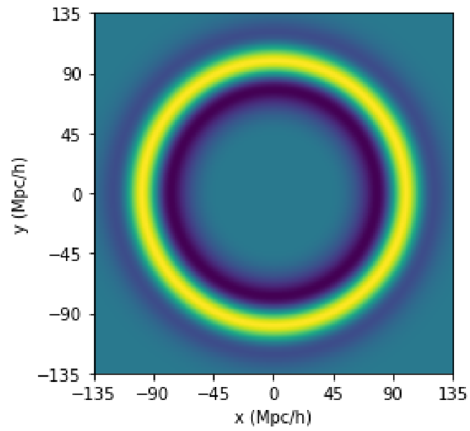

Figura 3.4: Corte transversal de una BAOlet tridimensional con $R = 100$ Mpc/h y $S = 30$ Mpc/h.

A efectos prácticos, el parámetro R dicta dónde se sitúa el pico positivo de la BAOlet, mientras que una variación en el parámetro S afecta a la anchura de dicho pico. La Figura 3.5 ilustra esta dependencia:

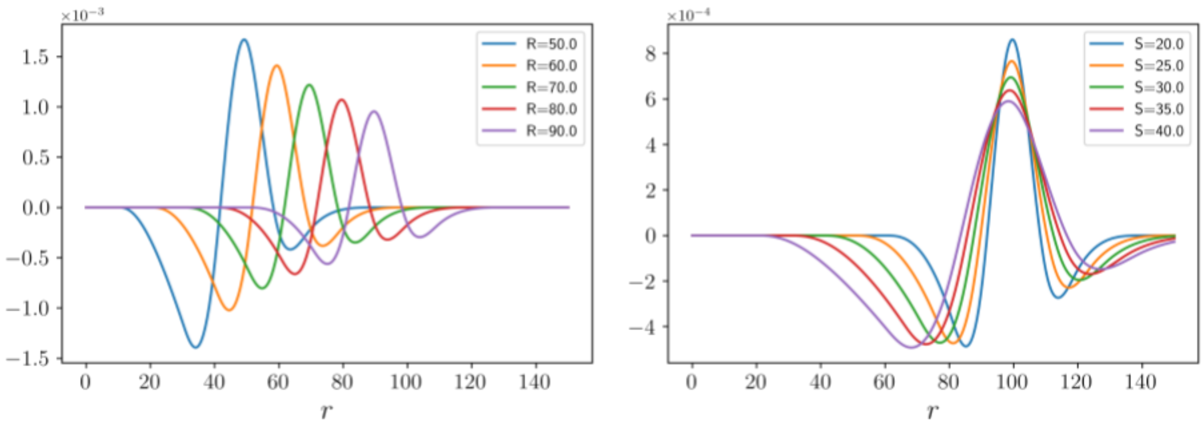

Figura 3.5: En la izquierda, distintas BAOlet para un valor $S = 20$ fijo. En la derecha, varias BAOlets para un valor $R = 100$ fijo.

Muchas de las buenas propiedades de la BAOlet son atribuibles a las buenas propiedades del B-spline, como por ejemplo que tenga un soporte compacto. Es importante recalcar que no toda posible elección de pares de parámetros R, S resulta en una BAOlet "buena": para los casos en los que $R - 2S < 0$ la función no converge en $r = 0$. Además, para el caso en el que $R > 2S$ la zona central de la BAOlet es idénticamente nula, lo cual es una propiedad deseable para que el método de detección de las *shells* no se vea condicionado por la presencia de las sobredensidades centrales, ya que estas introducirían un sesgo a la hora de detectar los cascarones esféricos.

Para que las BAOlets puedan captar la señal asociada a las BAO shells lo ideal sería calcular los coeficientes de la transformada de un campo de densidades centrado en una gran sobredensidad, puesto que sabemos que las ondas acústicas se originaron alrededor de inhomogeneidades primordiales que han ido creciendo gravitacionalmente. Para trabajar con perfiles teóricos esto no supone ningún inconveniente, pues $r = 0$ corresponde al centro de la región masiva, pero requerirá algo más de atención si se quiere trabajar con simulaciones o cartografiados de galaxias.

La idea principal en el diseño de las wavelet es que el parámetro R de cierta manera guarda relación con el horizonte de sonido r_s, y que el parámetro S refleja prominencia de las ondas acústicas. Explotar esta relación entre los parámetros artificiales de la BAOlet y parámetros cosmológicos con sentido físico ha sido la principal motivación de nuestro trabajo.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan y desgranan los resultados obtenidos durante el trascurso de este trabajo y las técnicas empleadas para ello. Tal y como venimos anunciando en los anteriores capítulos, el punto de partida de nuestro trabajo es el artículo [5]. Basándonos en las ideas que allí se presentan, seguimos una vía diferente y exploramos la posibilidad de usar el coeficiente de las BAOlet para determinar parámetros cosmológicos.

En primer lugar se ha tratado de reproducir la función de transferencia analítica que se emplea en dicha publicación, y a partir de ella el mapa de coeficientes de convolución de la BAOlet con el perfil de densidad correspondiente a dicha función de transferencia, pero utilizando unos parámetros cosmológicos fiduciales más actualizados. En particular, se ha trabajado con los valores que se muestran en [1, Tabla 2].

El siguiente paso ha sido hallar una relación fenomenológica entre los parámetros maximizantes del coeficiente BAOlet y los parámetros cosmológicos de interés. En concreto, para cada par de parámetros cosmológicos en un rango dado se han hallado los parámetros (R, S) de la BAOlet con mayor coeficiente de convolución con el perfil de densidad correspondiente, mediante un algoritmo de minimización basado en el descenso de gradiente. Una vez establecida la correspondencia, visto el comportamiento de la relación existente (Figura 4.2) se ha buscado un ajuste lineal que relaciones ambos pares de parámetros. Este ajuste sirve como una herramienta para estimar parámetros cosmológicos a partir de cartografiados de galaxias: hallando los coeficientes máximos de la transformada de BAOlet de los datos proporcionados por un cartografiado de galaxias, el modelo lineal proporciona un par de valores de los parámetros cosmológicos.

Finalmente, en aras de cuantificar la posible validez del método, se han hecho algunas estimaciones del rango de error que el método de determinación de parámetros cosmológicos pudiera tener, bien por razones metodológicas u observacionales.

4.1 Reproducción de resultados

En primer lugar hemos reproducido el mapa de color con los coeficientes de convolución de la BAOlet con el perfil de densidad obtenido a partir de unos parámetros cosmológicos fiduciales (equivalente al panel izquierdo de la Figura 1.3). Estos han sido los valores que hemos tomado:

$$\Omega_b = 0.0490, \qquad \Omega_m = 0.3111, \qquad h = 0.6766.$$

Los valores fiduciales que utilizan en el artículo de referencia difieren ligeramente de los que tomamos nosotros, lo que explica las ligeras diferencias en el aspecto de ambas figuras:

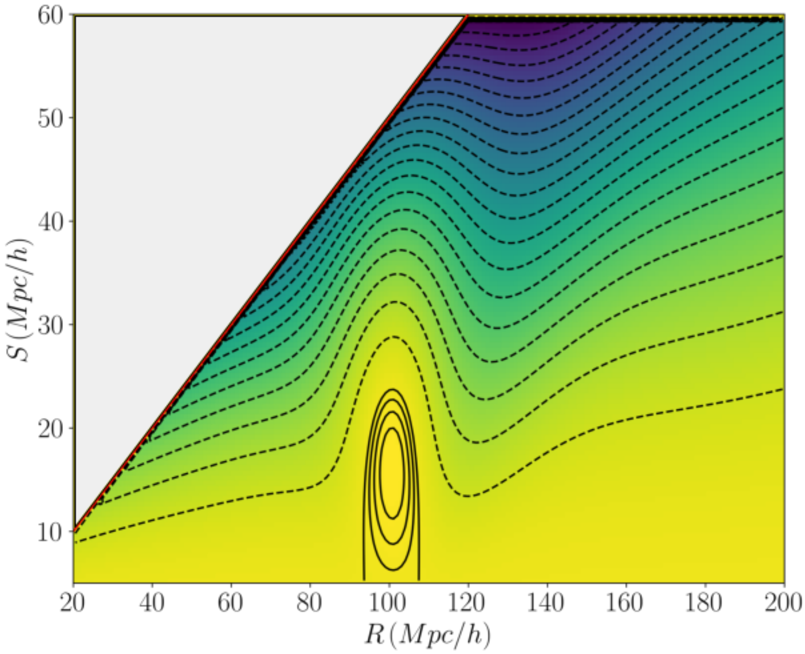

Figura 4.1: Coeficientes de convolución de la BAOlet para el perfil de densidad fiducial. La región superior izquierda no se explora porque en dicha zona $R < 2S$ y la BAOlet no tiene un buen comportamiento.

El valor máximo de la Figura 4.1 se alcanza para $R_{max} = 100.6$ Mpc/h, $S_{max} = 15.8$ Mpc/h. Que este valor de R_{max} sea próximo al valor del horizonte de sonido que damos en la Sección 2.4 es una buena señal. Aun así, es importante recalcar que a priori el parámetro R no es exactamente equivalente a dicho horizonte, simplemente guarda estrecha relación con él, por lo que tampoco buscamos que coincidan exactamente.

4.2 Relación entre parámetros BAOlet y parámetros cosmológicos

El próximo paso ha sido obtener una relación $(\Omega_b/\Omega_m, \Omega_m h^2) \longleftrightarrow (R_{max}, S_{max})$, simplemente repitiendo el procedimiento que da lugar a la Figura 4.1, pero como no nos interesa calcular todos los coeficientes, empleamos un método de optimización.

En primera instancia no está claro si esta relación entre ambos pares de parámetros es una correspondencia biyectiva, uno-a-uno, pudiendo resultar en degeneraciones de los parámetros para algunos valores concretos. No obstante, al menos en el rango de valores considerados, que el determinante de la matriz de la ecuación 4.1 sea no nulo sugiere que la relación no está degenerada.

Asumiendo la validez de la correspondencia en el ámbito analítico, el objetivo de nuestro método es estimar los parámetros cosmológicos de nuestro Universo a partir de valores de R_{max}, S_{max} obtenidos al filtrar datos observacionales con las versiones tridimensionales de la BAOlet.

4.2.1 Optimización del coeficiente BAOlet

Con el fin de establecer una correspondencia válida entre los dos pares de parámetros que nos ocupan hemos calculado los parámetros (R_{max}, S_{max}) para 2500 pares de parámetros cosmológicos distintos. Para acelerar el proceso de calcular el pico del mapa de coeficientes, en vez de obtener todos los coeficientes y determinar el máximo hemos empleado una rutina de optimización básica basada en el descenso del gradiente. Con una tolerancia de $\varepsilon = 0.005$, el método de optimización converge en menos de 10 iteraciones y menos de 30 evaluaciones de la función a optimizar. Para evitar que el método optimizador evalúe coeficientes para pares de parámetros (R, S) con $R < 2S$ se han impuesto unas cotas para dichos parámetros: $85 \leq R \leq 140$, $5 \leq S \leq 35$.

Para su representación gráfica mostramos en la Figura 4.2 la variación de cada uno de los parámetros de la BAOlet por separado, manteniendo cada vez uno de los parámetros cosmológicos fijos:

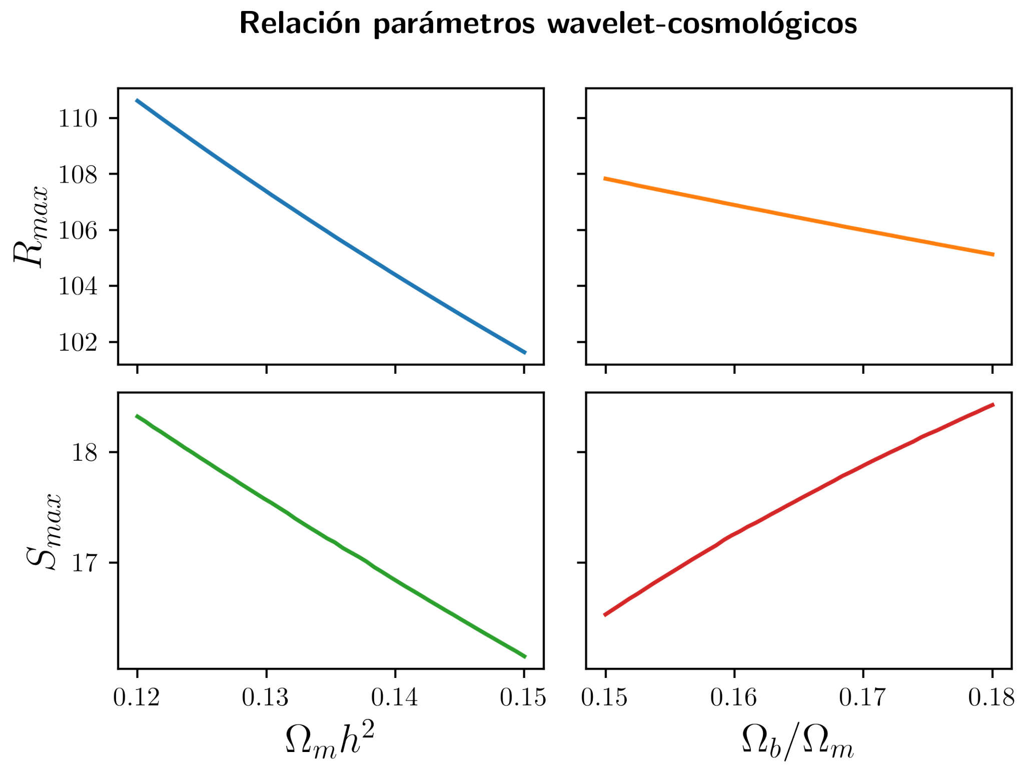

Figura 4.2: Variación de los parámetros (R_{max}, S_{max}) que maximizan la convolución con el perfil de densidad en función de los parámetros cosmológicos. En cada una de las dos columnas se ha mantenido constante el parámetro cosmológico que no varía en el eje horizontal.

En esta Figura 4.2 hemos elegido valores arbitrarios a los que mantener constantes en cada columna los parámetros cosmológicos que no varían en el eje horizontal. Es importante recalcar que, si bien pueden cambiar las pendientes o términos independientes, en general el comportamiento es lineal independientemente de los valores a los que se mantienen fijos los parámetros cosmológicos que no varían.

4.2.2 Ajustes de parámetros

Visto el comportamiento básicamente lineal de tanto R_{max} y S_{max} en función de nuestros parámetros cosmológicos, tal y como refleja la Figura 4.2, proponemos una relación fenomenológica entre los dos pares de parámetros de tipo lineal, ya que si (R, S) depende de manera lineal de $(\Omega_b/\Omega_m, \Omega_m h^2)$, la relación inversa también debe ser de tipo lineal:

$$\Omega_b/\Omega_m = \alpha_R \cdot R_{max} + \alpha_S \cdot S_{max} + \alpha_0,$$
$$\Omega_m h^2 = \beta_R \cdot R_{max} + \beta_S \cdot S_{max} + \beta_0.$$

Para determinar los coeficientes del ajuste se ha planteado un problema de regresión lineal multivariable por mínimos cuadrados, obteniendo los siguientes valores aproximados:

$$\begin{pmatrix} \Omega_b/\Omega_m \\ \Omega_m h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00293 & 0.01186 \\ -0.00246 & -0.00358 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{max} \\ S_{max} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.26907 \\ 0.45696 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Como era de esperar por el aspecto de la Figura 4.2, 3 de los elementos de la matriz de coeficientes son negativos y 1 positivo. Cabe destacar la clara relación entre R_{max} y ambos parámetros cosmológicos: la presencia de un R_{max} elevado, y por ende de un horizonte de sonido más alto, corresponde a valores más pequeños de Ω_b/Ω_m y $\Omega_m h^2$.

4.2.3 Validez del Método

El método que hemos presentado se basa en varias aproximaciones y/o suposiciones, por lo que contiene varias imperfecciones. Para empezar, la expresión analítica de la función de transferencia que adoptamos de [9] no es exacta, y puede diferir ligeramente al ser comparada con simulaciones numéricas. No obstante, tal y como se comenta en el propio artículo, para valores de Ω_b/Ω_m menores de 0.5 la aproximación es "buena" y los errores decrecen cuando lo hace también Ω_b/Ω_m. Puesto que hemos trabajado con valores de dicho parámetro menores que 0.2, asumimos que la imprecisión de la función de transferencia es despreciable.

Por otro lado, es probable que la relación entre los dos pares de parámetros no sea exactamente lineal y por tanto el modelo que proponemos necesariamente comete errores en las predicciones. Para cuantificar la validez del ajuste lineal medimos el error cuadrático medio de las predicciones de los parámetros cosmológicos respecto a los valores empleados para generar la función de trasferencia:

$$\sigma^2_{met,i} = \sum_j (\hat{p}_{ij} - p_{i_j})^2, \qquad i = 1, 2\ ,$$

donde, por simplificar la notación, $p_1 = \Omega_b/\Omega_m$ y $p_2 = \Omega_m h^2$. Los resultados que se obtienen son:

$$\frac{\sigma_{met,1}}{\langle p_1 \rangle} = 0.47\%, \qquad\qquad \frac{\sigma_{met,2}}{\langle p_2 \rangle} = 0.23\%.$$

Estas incertidumbres en las predicciones del ajuste lineal son puramente metodológicas y se basan en situaciones ideales en las que el perfil de densidad se puede obtener de manera perfecta. Para estimar la incertidumbre total con la que el método podría predecir los valores de los parámetros cosmológicos involucrados en situaciones reales es importante considerar también las incertidumbres experimentales presentes en cartografiados de galaxias que puedan incorporar la señal de las BAO shells.

Al no haber tratado directamente con simulaciones o datos observacionales reales hemos tenido que recurrir a una estimación más sencilla, tal vez algo *naive*, del efecto que las incertidumbres observacionales pudieran tener en las predicciones del método. La idea ha sido introducir algo de ruido en la función de transferencia, un ruido que de cierta manera incorpora las incertidumbres típicas en cartografiados de galaxias, y se ha medido la variabilidad del método ante tal ruido. En concreto, se ha seguido el siguiente procedimiento:

1. Se han tomado como valores fiduciales para Ω_b y Ω_m los proporcionados por la misión Planck, por ser considerados como una de las mejores estimaciones hasta la fecha. Se les ha asignado una incertidumbre a dichos parámetros, pero en vez de tomar las que proporciona dicha misión, se ha optado por estimarlos de una manera que refleje mejor las incertidumbres típicas en un cartografiado de galaxias. En particular, se les han asignado los mismos errores relativos que dichos parámetros presentan en [16, Tabla II] (el *Dark Energy Survey Year 3 Results*), uno de los cartografiados de galaxias más completos y recientes, con información de unas 300 millones de galaxias. La razón por la que asignamos las incertidumbres de dicha manera es que el método de las BAOlet deberá trabajar directamente con el campo de densidades inferido por cartografiados de galaxias y las limitaciones instrumentales que estas presentan. La misión Planck obtuvo sus resultados a partir de las anisotropías del CMB, que se han medido con alto grado de precisión, y por tanto las incertidumbres asociadas a sus resultados son menores de las que presenta el experimento DES. Los errores relativos en los parámetros de densidad de materia bariónica y total del cartografiado DES son del 17% y 7%, respectivamente.

2. A partir del punto anterior se calculan valores fiduciales $\overline{p_1}, \overline{p_2}$ para los parámetros ${}^{\Omega_b}/_{\Omega_m}$ y $\Omega_m h^2$, y las incertidumbres asociadas σ_1, σ_2 se obtienen por simple propagación de errores.

3. Se han sampleado $N = 500$ pares aleatorios de parámetros cosmológicos con la siguiente distribución:
$$ {}^{\Omega_b}/_{\Omega_m} \sim \mathcal{N}(\overline{p_1}, \sigma_1), \qquad \Omega_m h^2 \sim \mathcal{N}(\overline{p_2}, \sigma_2), $$
y para cada una de ellas se ha calculado la función de transferencia analítica $T(k)$ correspondiente.

4. Con las N funciones de transferencia del apartado anterior se ha calculado, para cada número de onda k, la función de transferencia media $\overline{T}(k)$ y su desviación estándar σ_k:

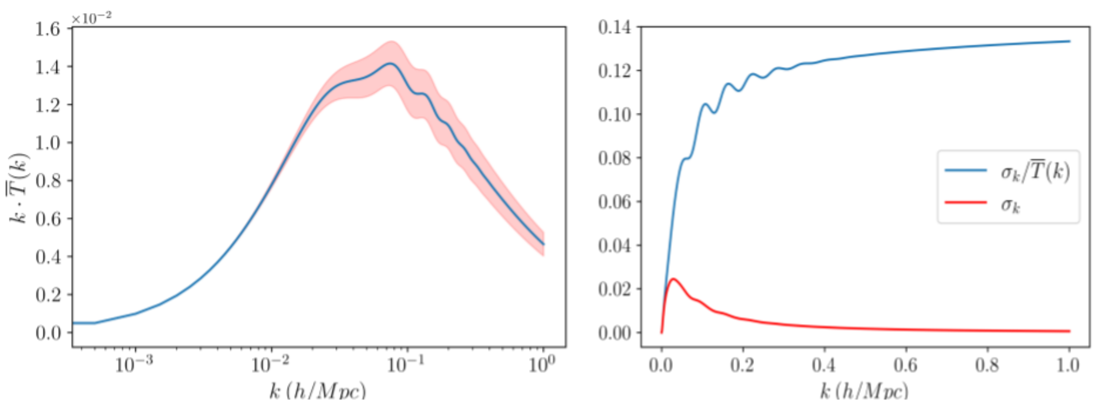

Figura 4.3: En la izquierda, la función de transferencia media de las N iteraciones con banda de incertidumbre igual a la desviación estándar, todo ello multiplicado por el número de onda k. En la derecha, la desviación estándar absoluta (rojo) y relativa respecto a la media (azul), en función de k.

5. Se han generado $n = 1500$ funciones de transferencia ruidosas, tomando para cada valor de k[1] un valor aleatorio con distribución

$$T(k) \sim \mathcal{N}(\overline{T}(k), \sigma_k).$$

6. Para cada función de transferencia ruidosa se ha hecho una predicción de los parámetros cosmológicos subyacentes, obteniendo para ello los parámetros (R_{max}, S_{max}) del coeficiente máximo.

A partir de las n predicciones del modelo se ha estudiado el error cometido por el mismo. En las Figuras 4.4 y 4.5 se muestra la distribución de los errores:

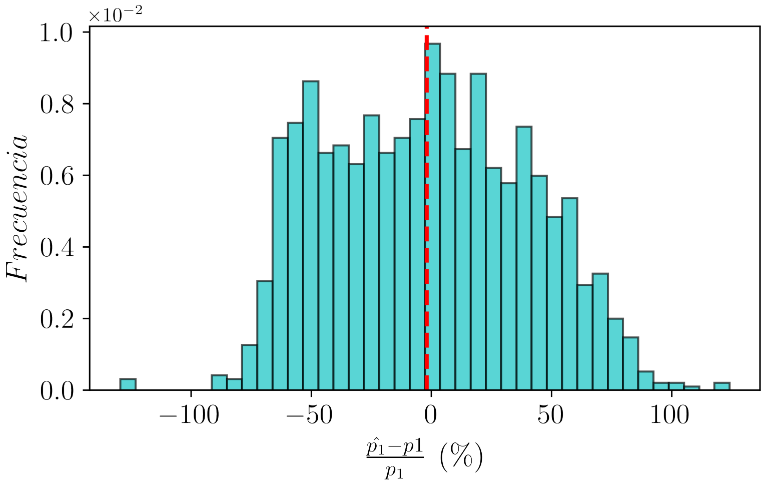

Figura 4.4: Histograma de los errores relativos cometidos por la predicción a la hora de estimar Ω_b/Ω_m a partir de funciones de transferencia ruidosas. En rojo, la media del error relativo.

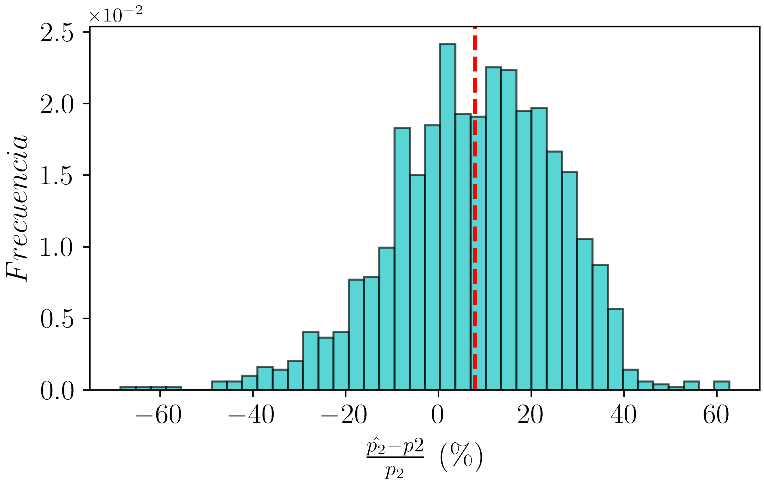

Figura 4.5: Histograma de los errores relativos cometidos por la predicción a la hora de estimar $\Omega_m h^2$ a partir de funciones de transferencia ruidosas. En rojo, la media del error relativo.

[1] La independencia entre las elecciones aleatorias para distintos valores de k se escuda en el Principio Cosmológico de homogeneidad e isotropía.

Para el parámetro Ω_b/Ω_m el sesgo relativo ha sido de $\mu_1 = -1.97\%$ y la desviación estándar de $\sigma_{obs,1} = 41.61\%$. Para el parámetro $\Omega_m h^2$ el sesgo relativo ha sido de $\mu_1 = 7.83\%$ y la desviación estándar de $\sigma_{obs,2} = 17.71\%$. Tal y como discutiremos en el siguiente capítulo, este método particular de introducir incertidumbre en la función de transferencia es bastante simplista: ignora otras contribuciones al error total como la varianza cósmica o sistemática particular de un cartografiado dado, que en particular podrían afectar a la incertidumbre para valores de k bajos.

Asumiendo el simple escenario en el que las incertidumbres metodológicas y observacionales son independientes, la incertidumbre porcentual típica esperable de nuestro método es

$$\sigma_{tot}^2 = \sigma_{met}^2 + \sigma_{obs}^2.$$

Puesto que en ambos casos $\sigma_{met} \ll \sigma_{obs}$, la incertidumbre total con la que el método puede hacer predicciones se estima como $\sigma_{tot,i} \approx \sigma_{obs,i}$, $i = 1, 2$.

Capítulo 5

Conclusiones y Líneas Futuras

En este trabajo se ha presentado un método para determinar parámetros cosmológicos a partir de la detección de Oscilaciones Acústicas de Bariones en la Estructura a Gran Escala del Universo. Partiendo del método que presentan en [5], se han reproducido algunos de los resultados del mismo y se ha dado un paso más en el uso de las wavelets para extraer información cosmológica a partir de la distribución de materia en el Universo.

5.1 Análisis de Resultados

Para los parámetros cosmológicos fiduciales que presenta la misión Plank en [1] con el método de las BAOlet se ha obtenido un par de parámetros (R_{max}, S_{max}) que está en consonancia con el valor para el horizonte de sonido que dan en el mismo artículo.

El método propuesto en este trabajo se basa en una relación empírica entre unos parámetros "artificiales" (los asociados a las BAOlet) y unos parámetros cosmológicos de especial interés en el marco teórico del modelo Λ-CDM. Esta relación a su vez está sujeta a la aproximación analítica de la función de transferencia que presentan en [9]. La bondad del método, por tanto, está intrínsecamente limitada por la capacidad descriptiva del modelo teórico. En particular, las herramientas teóricas como la función de transferencia son de carácter probabilista, general, mientras que muestro Universo observable y las estructuras que en ella habitan son una realización concreta. En otras palabras, el método no tiene en cuenta la varianza cósmica.

Otro aspecto que limita la precisión del método propuesto es que se asume que los perfiles de densidad corresponden simplemente a las transformadas de Fourier de la funciones de transferencia. Esto es así si se asume que la perturbación inicial en el universo homogéneo viene descrita por una delta de Dirac, lo cual queda lejos de ser realista (ya venimos comentando que lo habitual es fijar las condiciones iniciales mediante un Campo Aleatorio Gaussiano, GRF por sus siglas en inglés).

La suposición de que la relación entre los dos pares de parámetros de interés es lineal parece estar justificada, al menos en los rangos de parámetros considerados, en vista de los pequeños errores metodológicos asociados al ajuste, pues ambos están por debajo del medio punto porcentual.

En cuanto a la susceptibilidad a las incertidumbres observacionales, parece que el método de determinación que proponemos presenta mayores problemas. Ante unas incertidumbres de entrada del 18.4% y 7.0% para los parámetros cosmológicos pertinentes, las predicciones del método han presentado unas incertidumbres del 41.6% y 17.7% respectivamente, lo que supone un incremento por un factor de 2.5, aproximadamente.

Las razones por las cuales ocurren estas amplificaciones pueden ser varias. Por ejemplo, los parámetros Ω_b/Ω_m y $\Omega_m h^2$ no son realmente independientes, aunque lo hayamos asumido a la hora de generar los pares aleatorios y estimar sus incertidumbres observacionales. Por otro lado, el perfil de densidad y en particular la posición del pico asociado a las ondas acústicas es bastante sensible a las oscilaciones que presenta la función de transición para valores de $k \sim 0.1$ h/Mpc. Tal y como muestra la Figura 4.3 el ruido que hemos introducido en la función de transferencia es significativo en esas escalas ($> 10\%$) y al asignar el ruido de manera independiente para cada k, la función de transferencia resultante puede deteriorase más de lo que cabría esperar por errores observacionales/instrumentales. Finalmente, cabe comentar que se ha optado por introducir el ruido en la función de transferencia porque es el único elemento del modelo que depende explícitamente de los parámetros cosmológicos, y por tanto la única vía de introducir incertidumbres observacionales. Este ruido se transfiere al perfil de densidad a través de una transformada de Fourier, de una manera que a priori no podemos describir con claridad. En un cartografiado de galaxias real las posibles incertidumbres instrumentales, como el error en la medida del *redshift* o el efecto de la función de selección radial, son incertidumbres asociadas directamente al espacio real. Es por ello que nuestra estimación de la incertidumbre observacional asociada al método puede ser poco realista.

De todas maneras, es importante recalcar que no es de extrañar que nuestro método presente errores más grandes comparado con otros métodos: otros proyectos de Estructura a Gran Escala emplean varios observables de manera simultánea para determinar parámetros cosmológicos y sus intervalos de confianza, mientras que nuestro método se basa únicamente en el coeficiente BAOlet. El método que presentamos no aspira a ser un método más preciso que los ya existentes, si no que juega un papel alternativo y complementa a los dichos métodos.

5.2 Líneas futuras en esta dirección

El siguiente paso natural en el desarrollo de este trabajo sería aplicar el método que proponemos a simulaciones numéricas y cartografiados de galaxias actuales, filtrando los datos con BAOlets tridimensionales y obteniendo así valores para (R_{max}, S_{max}) con los que hacer predicciones de los parámetros cosmológicos. De todas formas, este paso de lo analítico a lo numérico requeriría considerar ciertos aspectos importantes.

En primer lugar, una de las ventajas principales de haber trabajado con las versiones analíticas de los perfiles con simetría esférica es la reducción de las integrales numéricas correspondientes de 3 dimensiones a 1 dimensión, acelerando significativamente los procesos de cálculo. Efectuar cálculos análogos a los que hemos realizado para determinar los coeficientes de convolución en tres dimensiones, especialmente si se quiere garantizar un mínimo de precisión, requerirá una capacidad de computo significativamente mayor.

Por otro lado, una dificultad añadida al tratar con campos de densidad genéricos es identificar los centros de las sobredensidades alrededor de las cuales uno espera encontrar la señal de las BAO: efectuar la transformada de wavelet a un campo de densidad centrado en un punto arbitrario del espacio seguramente no proporcione información relevante. En [5] emplean las galaxias rojas luminosas (LRGs por sus siglas en inglés) como trazadoras de los centros de halos de materia oscura, lo cual está justificado en [17].

Hay que recordar que en la aproximación analítica el perfil de densidad tiene simetría esférica y por tanto la corona de densidad asociada a las oscilaciones acústicas es uniforme angularmente. En la realidad, es cierto que existe una mayor probabilidad de encontrar pares de galaxias separadas por una distancia marcada por el horizonte de sonido, pero para un halo concreto dado la corona no es en general uniforme angularmente, y por lo común tendrá solamente algún cumulo de galaxias concentrado en una dirección dada. Además, el hecho de que solo se pueda observar una realización dada del perfil de densidad implica que este tendrá errores observacionales que impiden recuperarlo de manera perfecta. La solución a esta falta de suavidad y simetría esférica en simulaciones y cartografiados está en repetir la transformada de BAOlet tomando distintos centros del campo de densidad basado en las LRGs y tomar la media de los coeficientes. A efectos prácticos, esto equivale a efectuar la transformada de wavelet a un campo de densidad efectivo que se obtiene de apilar los perfiles que se encuentran alrededor de halos y centros de zonas de alta densidad, de manera que, estadísticamente, el perfil de densidad efectivo presenta una mayor simetría esférica en la distribución de la materia. Las Figuras 5.1 y 5.2 tratan de ilustrar estos conceptos:

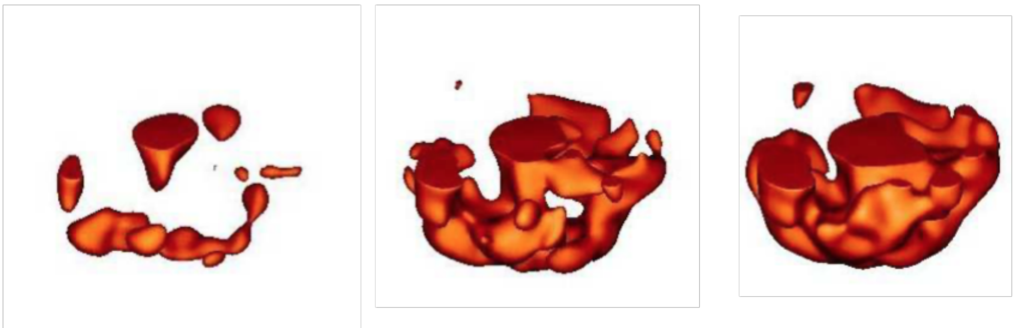

Figura 5.1: Apilamiento de varios campos de densidad centrados en LRGs. De izquierda a derecha, se colorean regiones de $\delta < 1.24, 1.18, 1.13$. Se muestra solo la mitad inferior por claridad. Fuente: [5]

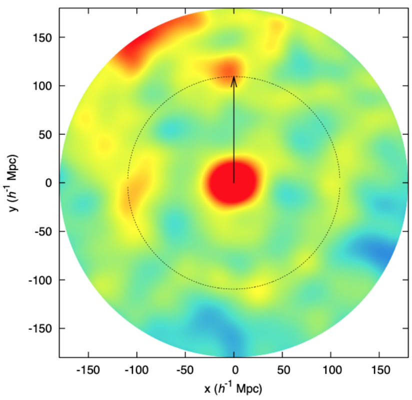

Figura 5.2: Un corte transversal del apilamiento mostrado en la figura anterior. En rojo, las zonas de mayor densidad. El círculo con rayas intermitentes tiene como radio un valor estimado de r_s. Fuente: [5].

Hemos mencionado algunas de las grandes diferencias entre la aplicación de las wavelets en el ámbito analítico y en el ámbito de simulaciones/cartografiados, pero existen más detalles menos evidentes que también habría que tener en cuenta.

En cuanto a la validez del método, si se quiere validar el mismo está claro que se deberían estudiar otros métodos más sofisticados para estimar unos errores más realistas ante incertidumbres observacionales/instrumentales. La manera en la que se ha estimado la sensibilidad del ajuste a dichas incertidumbre es ciertamente algo simple, y antes de descartar la validez del método habría que tomar en consideración los aspectos resaltados en el último párrafo de la sección anterior.

5.2.1 Matched Filters

Durante el transcurso de este trabajo se han contemplado distintas maneras de explotar el potencial de las wavelet y la teoría asociada al tratamiento de señales para la caracterización de las BAO-shells. Asociada a la idea de wavelets, se exploró la posibilidad de emplear y se dieron los primeros pasos para usar los llamados *matched filters*. Estos filtros son propios de la teoría asociada al procesamiento de señales, y a grandes rasgos, son filtros que, para una señal o *feature* dada, maximizan el *signal-to-noise ratio (SNR)* en presencia de un ruido estocástico gaussiano.

En particular, si la señal a detectar viene dada en el espacio de Fourier por $S(k)$ y esta se encuentra mezclada en un background con espectro de potencias $P(k)$, el *matched filter* F asociado a la señal vendrá determinada, en el espacio de Fourier, por la siguiente expresión:

$$F(k) = \frac{S(k)}{P(k)} \; .$$

Puesto que por definición son los mejores filtros para detectar las señales correspondientes en un fondo gaussiano, en el ámbito de la detección de BAOs una idea natural sería buscar los *matched filter* correspondiente a la señal bariónica de la BAO, ya que tendrían una capacidad de detección mejor que las BAOlet [1]. En nuestro caso la señal asociada a la BAO vendría dada por la parte bariónica de la función de transferencia de 2.6, $T_b(k)$, mientras que el espectro de potencias del background en el que se encuentra inmerso sería proporcional al cuadrado de la parte no-bariónica de dicha función de transferencia. Por tanto:

$$F_{BAO}(k) = \frac{T_b(K)}{|T_{dm}(k)|^2} \; .$$

En la Figura 5.3 mostramos el aspecto de algunos *matched filters* en el espacio real para algunos pares de parámetros cosmológicos:

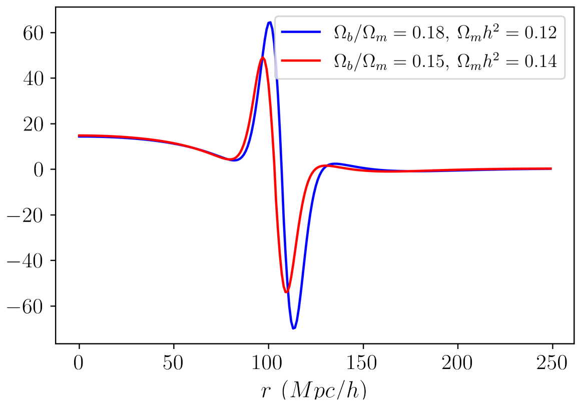

Figura 5.3: Matched filters asociadas a la señal bariónica para dos pares distintos de parámetros cosmológicos.

[1] A escalas de varias decenas de Mpc asumir la gaussianidad del fondo es una suposición asumible.

A primera vista ya se aprecia que estos filtros guardan parecido con las BAOlet, con un pico prominente a una distancia aproximada igual al horizonte de sonido, pero hay algunas diferencias notables. Por un lado está el comportamiento cuando r es pequeño: las BAOlets están diseñadas para ser idénticamente nulas para valores de r menores que $R - 2S$, y por tanto son "ciegas" a lo que pueda haber en el centro de las regiones de alta densidad, mientras que los *matched filter* parecen capturar parte de la presencia de bariones en dichas regiones centrales. Por otro lado, las BAOlet toman valores negativos a ambos lados del pico principal, mientras que los *matched filter* solo lo hacen a un lado del mismo.

Estos *matched filters* pueden ser usados, de la misma manera que las BAOlets, para caracterizar las BAO-shells: estudiando los coeficientes de convolución de un campo de densidades respecto a una familia de *matched filters*, el máximo coeficiente debería estar asociado al filtro proveniente de los parámetros cosmológicos subyacentes. Las preguntas a responder en este sentido serían, por un lado, cómo de bien pueden estos filtros detectar la señal asociada a las BAO y si lo hacen mejor que las BAOlets, y por otro, cómo de robusto sería emplear los filtros con simulaciones numéricas y/o cartografiados de galaxias. Estas son cuestiones que, al igual que aplicar las BAOlets en cartografiados de galaxias actuales, quedan por explorar en un futuro.

Bibliografía

[1] Planck Collaboration. "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters". In: *Astronomy & Astrophysics* 641 (2020), A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910.

[2] D.J. Eisenstein. "Dark energy and cosmic sound". In: *New Astronomy Reviews* 49.7-9 (2005), pp. 360–365. DOI: 10.1016/j.newar.2005.08.005.

[3] D.J. Eisenstein et al. "Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies". In: *The Astrophysical Journal* 633.2 (2005), pp. 560–574. DOI: 10.1086/466512.

[4] S. Cole et al. "The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications". In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 362.2 (2005), pp. 505–534. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2005.09318.x.

[5] P. Arnalte-Mur et al. "Wavelet analysis of baryon acoustic structures in the galaxy distribution". In: *Astronomy & Astrophysics* 542 (2012), A34. DOI: 10.1051/0004-6361/201118017.

[6] P.J.E. Peebles. *Principles of physical cosmology*. Princeton series in physics. Princeton, N.J: Princeton University Press, 1993.

[7] S. Dodelson. *Modern cosmology*. San Diego, Calif: Academic Press, 2003.

[8] T. Theuns. *Physical Cosmology*. https://sites.astro.caltech.edu/~george/ay127/Theuns_cosmology.pdf.

[9] D. J. Eisenstein and W. Hu. "Baryonic Features in the Matter Transfer Function". In: *The Astrophysical Journal* 496.2 (1998), pp. 605–614. DOI: 10.1086/305424.

[10] F. Montanari and R. Durrer. "Analytic approach to baryon acoustic oscillations". In: *Physical Review D* 84.2 (2011), p. 023522. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.023522.

[11] E. Hernández and G. Weiss. *A First Course on Wavelets*. Vol. 25. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1996. DOI: 10.1201/9781420049985.

[12] S.G. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1999.

[13] J.D. McEwen et al. "Cosmological Applications of a Wavelet Analysis on the Sphere". In: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 13.4 (2007), pp. 495–510. DOI: 10.1007/s00041-006-6918-8.

[14] J. González-Nuevo et al. "The Mexican hat wavelet family: application to point-source detection in cosmic microwave background maps: The Mexican hat wavelet family". In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 369.4 (2006), pp. 1603–1610. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2006.10442.x.

[15] R. Camussi and S. Meloni. "On the Application of Wavelet Transform in Jet Aeroacoustics". In: *Fluids* 6.8 (2021). DOI: 10.3390/fluids6080299.

[16] T.M.C. Abbott et al. “Dark Energy Survey Year 3 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing”. In: *Physical Review D* 105.2 (2022), p. 023520. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.023520.

[17] Z. Zheng et al. “Halo Occupation Distribution Modeling of Clustering of Luminous Red Galaxies”. In: *The Astrophysical Journal* 707.1 (2009), pp. 554–572. DOI: 10.1088/0004-637X/707/1/554.