



**Facultad
de
Ciencias**

**Existencia y unicidad de solución del
problema de Cauchy**
(Existence and uniqueness of solutions for the Cauchy
problem)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Jana Bontempini Rey

Director: Delfina Gómez Gandarillas

Septiembre 2022

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mi familia por su apoyo durante todos estos años. En concreto, agradecer mi padre, a mi hermana Estela, a mi Ita, a mi tía Ana, a Mario y, especialmente, a mi madre, por todo.

También les quiero dar las gracias a mis amigos y compañeros que me han ayudado y apoyado durante estos cuatro años, pues no he llegado hasta aquí yo sola. Gracias por las risas, las cartas en los descansos, los apuntes, las dudas tontas, el caos antes de los exámenes, las salas de trabajo en grupo en las que pasábamos el día, y todas las veces que hicimos el ridículo juntos.

Por otro lado, quería agradecerle a Delfina por toda su ayuda, por guiarme a lo largo de todo el transcurso de este trabajo y por la paciencia que ha tenido conmigo.

Además, me gustaría mencionar a Marián, gracias por no rendirte conmigo, no sé qué hubiera sido de mí sin tu ayuda. Gracias también a Ana, por darme el empujoncito que no sabía que necesitaba.

Finalmente, no puedo irme sin darle las gracias a aquellas que siempre estuvieron conmigo, a las que me ayudaron en todos los malos momentos, siempre. A Linda, a Sydney, y a Nia. Sin ellas no estaría aquí hoy.

Resumen

El problema de Cauchy o de condiciones iniciales asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias aparece con frecuencia en Física y otras ciencias. El cálculo de sus soluciones no siempre es sencillo y en ocasiones no existen. Surge así la necesidad de demostrar previamente si existen soluciones y, en tal caso, si se trata de una única solución. El objetivo de este trabajo es estudiar con detalle diversos teoremas que permiten garantizar la existencia y unicidad de soluciones de un problema de Cauchy de primer orden. Dichos resultados proporcionan además diferentes aproximaciones de las soluciones que se aplicarán a algunos ejemplos.

Abstract

The Cauchy problem or initial conditions problem associated with a system of ordinary differential equations appears often in Physics and other sciences. The computation of its solutions is not always an easy task and sometimes they do not exist. Thus, the need arises to previously prove whether there exist solutions and, if so, whether it is a unique solution or not. The goal of this project is to study in detail several theorems that allow us to assert the existence and uniqueness of solution of a first-order Cauchy problem. These results also provide different approximations of the solutions that will be applied to some examples.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Algunos conceptos básicos	3
1.2. Teorema de Arzelà-Ascoli	7
1.3. Teoremas de punto fijo	16
2. Existencia de soluciones: Teoremas de Cauchy-Peano	19
2.1. Problema de Cauchy. Forma integral	19
2.2. Existencia de solución local	21
2.3. Existencia de solución global	29
3. Teoremas de existencia y unicidad de soluciones	34
3.1. Unicidad de solución	34
3.2. Existencia y unicidad de solución local	38
3.3. Existencia y unicidad de solución global	44
Referencias bibliográficas	50

Introducción

Al inicio del siglo XIX tuvieron lugar numerosos avances matemáticos importantes, especialmente en el campo del análisis, transformándolo en una teoría más abstracta, profunda y genérica. Así, gracias a matemáticos como Bolzano, Cauchy o Gauss, comenzaron a verse numerosas lagunas, dándole más importancia a la rigurosidad en lugar de centrarse en ideas geométricas o basadas en la Física. Con ello, se dotó de una formulación exacta a conceptos como el de límite o continuidad [4], se establecieron los criterios de convergencia para series numéricas, etc.

Estos nuevos avances y métodos también tuvieron repercusiones en la teoría de ecuaciones diferenciales, surgiendo el problema de existencia de soluciones. Cauchy se encargó de definir el problema de valores iniciales y de asegurarse de que éste quedase «completamente determinado», como él mismo escribió, surgiendo así los conocidos como problemas de Cauchy. Esto contrastaba con las ideas que se habían seguido en el siglo XVIII, donde se asumía la existencia de soluciones generales, buscándolas directamente.

Dichos problemas de Cauchy se obtienen al dotar a una ecuación diferencial ordinaria de unas ciertas condiciones iniciales, y aparecen con frecuencia en ciencias como la Física. Un ejemplo sencillo en este campo es el problema del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, donde se parte de la posición y velocidad iniciales del objeto y se pretende calcular su posición pasado un cierto tiempo.

En múltiples ocasiones, el cálculo de las soluciones de estos problemas de Cauchy no es sencillo, como por ejemplo en el problema

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y^2(x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

En otros casos, dicho cálculo ni siquiera es necesario, y solo interesa averiguar si existe alguna solución y, en tal caso, si es única o no. Esto puede deberse a la influencia de la condición inicial tomada, pues en ejemplos como el siguiente resulta que un cambio en esta condición lleva a resultados muy distintos:

$$a) \begin{cases} x^2 y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x^2 y'(x) = y^2(x) \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x^2 y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Así, en el ejemplo *a)* no existen soluciones, mientras que en el ejemplo *b)* existe una única solución, que es $y \equiv 0$. Por otro lado, en el ejemplo *c)* existen infinitas soluciones, que vienen dadas de la forma $y(x) = x/(1 - cx)$ con $c \in \mathbb{R}$, junto con $y \equiv 0$.

Por todo ello, surge el interés en buscar condiciones que permitan asegurar que existe alguna solución y que ésta es única, que es el objetivo de este trabajo. Así, en esta memoria se estudian

diversos resultados que garantizan la existencia y unicidad de solución de un problema de Cauchy, demostrándolos en detalle, relacionándolos entre sí y aplicándolos a algunos ejemplos explicativos.

Para esto, se considerará una ecuación diferencial de primer orden escrita de la forma $y'(x) = f(x, y(x))$, junto con la restricción $y(x_0) = y_0$, y se construirán unas determinadas sucesiones de funciones, con el objetivo de que converjan a una cierta función que verifique la forma integral del problema de Cauchy. Esto se debe a la equivalencia que se da entre verificar dicha ecuación integral y ser solución del problema de Cauchy. Esta relación es de gran interés y será utilizada constantemente, ya que las ecuaciones integrales presentan una ventaja sobre las ecuaciones diferenciales: la dependencia continua de los datos.

En este trabajo, se comienza desarrollando algunas ideas y resultados previos, antes de proceder con los dos principales teoremas de existencia. Por último, se concluye la memoria incorporando nuevos resultados que también tienen en cuenta la unicidad de solución. Así, se presentan tres formas distintas de aproximar una misma solución: las poligonales de Euler, los iterantes de Picard y unas funciones que denominaremos ϕ_k , dadas por Tonelli. Esto aporta diversas novedades respecto al grado, incluyendo conceptos básicos no trabajados con anterioridad, como la equicontinuidad, y resultados no estudiados como el Teorema de Arzelà-Ascoli. Además, tampoco se han visto con rigor las demostraciones aportadas, pese a que sí se han utilizado resultados como los teoremas de Cauchy-Peano o Picard-Lindelöf en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

La memoria está dividida en tres capítulos. En el primer capítulo, se empieza estudiando en profundidad los conceptos básicos que serán utilizados en el resto del trabajo, como, por ejemplo, la equicontinuidad uniforme de una sucesión. Además, se prueban resultados como el Teorema de Arzelà-Ascoli o el Teorema del punto fijo de Banach, que permiten probar la convergencia de las aproximaciones.

Después, en el segundo capítulo, tras definir la forma integral de un problema de Cauchy y relacionarlo con la búsqueda de soluciones del mismo, se muestra en detalle la prueba que presentó Cauchy y mejoró Peano para asegurar la existencia de solución y que únicamente requiere la continuidad de la función f . Dicha prueba utiliza las conocidas como poligonales de Euler para generar una sucesión de funciones que se aproxime a una solución local, es decir, una solución definida en un intervalo que depende de la condición inicial. Más adelante, se da una versión “global” del teorema anterior, que además de la continuidad de f también requiere que esté acotada, probando la existencia de al menos una solución definida en un intervalo fijo a través de una nueva sucesión de aproximaciones.

Para finalizar, en el tercer y último capítulo, se introduce el concepto de función lipschitziana respecto de una variable, que permite probar la unicidad de solución. Esto se traslada a dos nuevos resultados relacionados con los teoremas anteriores, los teoremas de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf, tanto local como global, donde se necesita que f sea tanto continua como lipschitziana respecto de y para obtener que existe una única solución. Esto se lleva a cabo gracias a los denominados iterantes de Picard, que se utilizan para, de nuevo, aproximar la solución buscada.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos algunas definiciones y resultados que utilizaremos a lo largo del trabajo. La finalidad es dejar claros ciertos conceptos clave que serán utilizados más adelante, como los de continuidad uniforme y equicontinuidad, con la ayuda de diversos ejemplos, y probar algunos resultados como el Teorema de Arzelà-Ascoli o el Teorema del punto fijo de Banach. En definitiva, veremos las principales herramientas que necesitaremos para llevar a cabo el objetivo del trabajo, es decir, para poder demostrar los principales teoremas de existencia y unicidad de solución de un problema de Cauchy asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Para ello, seguiremos de forma genérica las referencias [4], [9] y [11], con la ayuda puntual de otras referencias como [5], [6] y [8].

Antes de comenzar, conviene aclarar que vamos a trabajar principalmente en el espacio vectorial \mathbb{R}^n con $n \in \mathbb{N}$, por lo que necesitamos establecer una forma de medir el tamaño o magnitud de los vectores en este espacio. Diversos resultados que vamos a demostrar se verifican para cualquier norma definida sobre \mathbb{R}^n , como la norma 1, la norma euclídea o la norma infinito, debido a que todas las normas son equivalentes en \mathbb{R}^n . Sin embargo, por cuestiones de simplicidad y salvo que se indique lo contrario, nosotros utilizaremos mayoritariamente la norma o distancia euclídea $|\cdot|_2$, que representaremos directamente como $|\cdot|$. Recordemos que la norma euclídea viene dada por

$$|x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

para cualquier $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

1.1. Algunos conceptos básicos

En esta sección, nos vamos a centrar en definir algunos conceptos importantes como la continuidad uniforme, equicontinuidad, acotación uniforme y convergencia uniforme, junto con ejemplos que nos ayudarán a dejar claras estas definiciones. Todo esto nos resultará clave en la sección 1.2 para poder estudiar el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6, y los teoremas de existencia y unicidad tanto local como global, que veremos en los capítulos 2 y 3. Nos basaremos principalmente en las referencias [4], [5] y [9] para el desarrollo de esta sección.

En primer lugar, vamos a recordar la definición de acotación uniforme para una sucesión de funciones cualquiera, seguida de algunos ejemplos sencillos.

Definición 1.1.1. (Acotación uniforme). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en E si existe un $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_k(x)| \leq M$.

Ejemplo 1.1.2.

- I) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = \cos(kx)$ es uniformemente acotada, ya que $|f_k(x)| = |\cos(kx)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- II) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = x/k$ es uniformemente acotada en $[0, 1]$, ya que $|f_k(x)| = |x/k| \leq 1, \forall x \in [0, 1]$.

Claramente, vemos que la acotación uniforme de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ implica acotación puntual en cada $x \in E$, pero no al revés. Esto se aprecia fácilmente en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.3. La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = \cos(k)/x^2$ es acotada puntualmente para cada $x \in (0, 1)$, pero no es acotada uniformemente, pues siempre se puede encontrar un valor de x más próximo al 0 que aumente el valor de la cota M .

Antes de introducir el concepto de equicontinuidad uniforme, vamos a recordar las definiciones de continuidad y continuidad uniforme en un conjunto.

Definición 1.1.4. (Continuidad). La función $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice continua puntualmente en $x_1 \in E$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_2 \in E$ y $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Se dice que f es continua en el conjunto E si es continua en todo punto $x_1 \in E$.

Definición 1.1.5. (Continuidad uniforme). La función $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en E si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in E$ y $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Vemos que la continuidad uniforme es más exigente que la continuidad en E . Esto se debe a que en la continuidad uniforme el δ será el mismo en todo E , mientras que en la continuidad en E vemos que δ puede depender de cada punto de E . Ambos tipos de continuidad son equivalentes si E es un conjunto compacto. Podemos ver más claras estas diferencias en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1.6.

- I) La función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x) = x$ es uniformemente continua en $[0, 1]$, pues basta tomar $\delta = \varepsilon$, por lo que también es continua en dicho intervalo.
- II) La función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x) = x^2$ es continua en su dominio de definición pero no es uniformemente continua en él: dado $\varepsilon > 0$ y dado cualquier $\delta > 0$, tomamos $x_1 \in (0, +\infty)$ y $x_2 = x_1 + \delta/2$, de manera que $|x_1 - x_2| = |x_1 - x_1 - \delta/2| = \delta/2 < \delta$, y entonces,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| x_1^2 - \left(x_1 + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right| = \left| x_1^2 - x_1^2 - \delta x_1 - \frac{\delta^2}{4} \right| = \delta x_1 + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon,$$

pues x_1 puede ser tan grande como queramos, luego f no es uniformemente continua en $(0, +\infty)$. Observamos que $E = (0, +\infty)$ no es compacto.

Ahora, introduciremos la definición de equicontinuidad uniforme. Es importante resaltar que a lo largo de todo el trabajo nos referiremos a este tipo de equicontinuidad cuando hablemos de una sucesión equicontinua.

Definición 1.1.7. (Equicontinuidad uniforme). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente equicontinua en E si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos $x_1, x_2 \in E$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \varepsilon$.

Se puede apreciar que el concepto de equicontinuidad uniforme surge de las definiciones de continuidad y continuidad uniforme anteriores, añadiendo una uniformidad respecto de k . Así, observamos que dada $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ equicontinua, tenemos que las funciones f_k son uniformemente continuas, para cada $k \in \mathbb{N}$. Además, observamos que la continuidad uniforme, en general, no implica equicontinuidad, pues ésta se define respecto de $k \in \mathbb{N}$.

Una propiedad interesante que nos será de utilidad es que si la sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cumple que existe $M > 0$ tal que

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in E, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

entonces $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua. Esto se debe a que, fijado ε , podemos tomar $\delta = \varepsilon/M$ y, volviendo a la definición de equicontinuidad, si $|x_1 - x_2| < \varepsilon/M$, entonces

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| < M\delta = M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

por lo que efectivamente $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua.

Veamos ahora algunos ejemplos de sucesiones equicontinuas y no equicontinuas.

Ejemplo 1.1.8.

- 1) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = x^k$ no es equicontinua en $[0, 1]$: tenemos que

$$|f_k(1) - f_k(x)| = 1 - x^k \quad \forall x \in [0, 1],$$

y si tomamos $\varepsilon = 1/2$ vemos que dado un $\delta \in (0, 1)$ tan pequeño como queramos, el punto $x = 1 - \delta/2$ verifica que $|1 - x| < \delta$ pero

$$1 - x^k = 1 - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^k > \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

para k lo suficientemente grande. Sin embargo, para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, f_k sí es uniformemente continua, por ser $[0, 1]$ compacto.

Por otro lado, sí que es equicontinua en el intervalo $[0, 1/2]$, puesto que al no incluir el punto $x = 1$ no tenemos el problema de que, a medida que aumenta k , los valores de $f_k(x)$ para $x \in [0, 1)$ se vayan alejando cada vez más de $f_k(1) = 1$, que es lo que rompe la equicontinuidad en $[0, 1]$. Esto se puede ver de forma más intuitiva en la Figura 1.1.

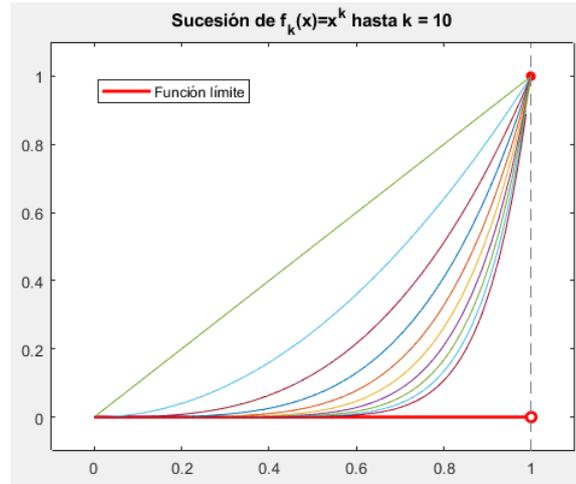


Figura 1.1: Gráfica de las funciones dadas por $f_k(x) = x^k$ con k desde 1 hasta 10 y su función límite f , en rojo.

- II) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = \text{sen}(x/k)$ es equicontinua en $[0, 1]$: por el teorema del valor medio tenemos que

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| = |f'_k(t)||x_1 - x_2|,$$

para cierto $t \in [0, 1]$ y sabemos que

$$|f'_k(t)| = \left| \frac{1}{k} \cos\left(\frac{t}{k}\right) \right| \leq 1,$$

por lo que cumple la propiedad (1.1) para $M = 1$ y, por tanto, es equicontinua en $[0, 1]$.

- III) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = \text{sen}(kx)/x$ no es equicontinua en $(0, 1)$. Para $k > 4$, tomamos las sucesiones

$$x_k = \frac{\pi}{k} \quad \text{y} \quad x'_k = \frac{\pi + 1}{k},$$

de manera que $x_k, x'_k \in (0, 1)$ y

$$|x_k - x'_k| = \frac{1}{k}.$$

Así, fijado ε y para cualquier $\delta > 0$, podemos tomar k suficientemente grande tal que $1/k < \delta$ y

$$\frac{k \text{sen}(1)}{\pi + 1} > \varepsilon.$$

De esta manera, se tiene que $|x_k - x'_k| = 1/k < \delta$ y

$$\begin{aligned} |f_k(x_k) - f_k(x'_k)| &= \left| \frac{\text{sen}(kx_k)}{x_k} - \frac{\text{sen}(kx'_k)}{x'_k} \right| = \left| \frac{\text{sen}(\pi)}{\frac{\pi}{k}} - \frac{\text{sen}(\pi + 1)}{\frac{\pi + 1}{k}} \right| = k \left| -\frac{\text{sen}(\pi + 1)}{\pi + 1} \right| \\ &= k \left| \frac{\text{sen}(\pi) \cos(1) + \cos(\pi) \text{sen}(1)}{\pi + 1} \right| = k \left| \frac{-\text{sen}(1)}{\pi + 1} \right| = k \frac{\text{sen}(1)}{\pi + 1} > \varepsilon. \end{aligned}$$

A continuación, repasaremos la definición de convergencia puntual y convergencia uniforme, ya que se trata de unos conceptos que se utilizarán con frecuencia más adelante.

Definición 1.1.9. (Convergencia puntual). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente en E si la sucesión $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente para todo $x \in E$.

Definición 1.1.10. (Convergencia uniforme). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en E a una función $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un k_0 tal que si $k \geq k_0$, entonces para todo $x \in E$ se tiene que $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$.

Vemos que la convergencia uniforme implica convergencia puntual, pero no al revés, pues la uniforme es un tipo de convergencia más fuerte, dado que ε y k_0 no dependen del punto x . Una propiedad interesante es que si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente a una función f entonces ésta ha de ser continua (ver, por ejemplo, la página 17 de [11]). Esto diferencia a la convergencia uniforme de la puntual, como vemos en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 1.1.11.

- I) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = x/k$ converge puntualmente a la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Además, también converge uniformemente a dicha función, pues dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/k_0 < \varepsilon$ y para todos $k \geq k_0$ y $x \in [0, 1]$ se tiene que

$$|f(x) - f_k(x)| = \left| 0 - \frac{x}{k} \right| = \frac{x}{k} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

- II) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = x^k$ converge puntualmente a la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Sin embargo, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no es uniformemente convergente, dado que podemos fijar $0 < \varepsilon < 1$ y, dado $\delta > 0$, tomamos los puntos $x = 1$ y $x' = 1 - \delta$ tal que $|x - x'| = |1 - (1 - \delta)| = \delta$, pero

$$|f_k(x) - f_k(x')| = 1 - (1 - \delta)^k > \varepsilon,$$

para k suficientemente grande. Observamos que las funciones f_k son continuas en $[0, 1]$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pero su límite puntual f no lo es (ver Figura 1.1).

1.2. Teorema de Arzelà-Ascoli

En esta sección vamos a introducir el Teorema de Arzelà-Ascoli, un resultado que nos será de utilidad más adelante. Este teorema afirma que dada una sucesión equicontinua y uniformemente acotada $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de funciones definidas en un conjunto acotado, entonces existe una subsucesión uniformemente convergente. Para poder demostrar este teorema hemos de ver primero algunos resultados y sus respectivas demostraciones. Para todo ello seguiremos las ideas que aparecen en las referencias [4] y [11].

Comenzaremos recordando el Principio de Selección de Cantor e introduciendo el denominado Principio de Propagación.

Teorema 1.2.1. (Principio de Selección de Cantor). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en E y sea $D \subset E$ numerable. Entonces, existe una subsucesión de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que converge en D .

No vamos a demostrar este principio dado que ya se ha visto en varias ocasiones a lo largo de la carrera, aunque su demostración también se puede encontrar en la página 64 de la referencia [4].

Teorema 1.2.2. (Principio de Propagación). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua en E y convergente en $D \subset E$, y tal que D es denso en E . Entonces, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en E .

Demostración. Queremos ver que la sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente en E , es decir, por definición de convergencia puntual, que $(f_k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para todo $a \in E$. Como \mathbb{R}^n es completo, probar la convergencia puntual de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equivalente a ver que $(f_k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy para todo $a \in E$.

Sea $a \in E$, tenemos que probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $k, j \geq k_0$ se cumple que

$$|f_k(a) - f_j(a)| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis de que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua en E , sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $|a - x| < \delta$ para $x \in E$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|f_k(a) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como D es denso en E , sabemos que existe $d \in D$ tal que se cumple $|a - d| < \delta$, por lo que

$$|f_k(a) - f_k(d)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, por el mismo razonamiento anterior, también obtenemos que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$|f_j(d) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fijado ese $d \in D$ que verifica $|a - d| < \delta$, aplicando la desigualdad triangular a (1.2), tenemos que, para todo $k, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_k(a) - f_j(a)| &= |f_k(a) - f_k(d) + f_k(d) - f_j(d) + f_j(d) - f_j(a)| \leq \\ &\leq |f_k(a) - f_k(d)| + |f_k(d) - f_j(d)| + |f_j(d) - f_j(a)|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por otro lado, sabemos que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en D , por lo que $(f_k(d))_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y, entonces, existe k_0 tal que para todo $k, j \geq k_0$,

$$|f_k(d) - f_j(d)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De esta manera, dado un $a \in E$ fijo y un $\varepsilon > 0$ fijo, tomando k_0 en función de $d \in D$, hemos obtenido que para todo $k, j \geq k_0$ cada uno de los tres sumandos de la desigualdad (1.3) son menores que $\varepsilon/3$. Por lo tanto,

$$|f_k(a) - f_j(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $(f_k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y, por completitud, $(f_k(a))_{k \in \mathbb{N}}$ converge para todo $a \in E$. \square

A continuación vamos a estudiar un par de teoremas junto con un lema, obteniendo las últimas herramientas que necesitaremos para demostrar el Teorema de Arzelà-Ascoli. Vimos en el Teorema 1.2.2 que podemos obtener la convergencia puntual de una sucesión equicontinua en E , a partir de la convergencia en un conjunto denso $D \subset E$, pero con el siguiente teorema resultará que si tenemos además que E es acotado entonces esta convergencia será uniforme.

Teorema 1.2.3. *Sea $E \subset \mathbb{R}^m$ acotado y sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y tal que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua y convergente en E . Entonces, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en E .*

Demostración. Queremos demostrar que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en E . Para ello, basta probar que es uniformemente de Cauchy en E (ver, por ejemplo, Teorema 1.2.4 de [11]), es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 > 0$ tal que para todo $k, j \geq k_0$ se verifica que

$$|f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E. \quad (1.4)$$

En primer lugar, como $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua, sabemos que fijado un $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que si $|x - a| < \delta$ para $a, x \in E$, entonces,

$$|f_k(x) - f_k(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k.$$

Sumando cero y aplicando la desigualdad triangular en (1.4), tenemos que:

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f_j(x)| &= |f_k(x) - f_k(a) + f_k(a) - f_j(a) + f_j(a) - f_j(x)| \leq \\ &\leq |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f_j(a)| + |f_j(a) - f_j(x)|. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para poder continuar con la demostración, vamos a considerar la familia de las bolas abiertas de radio menor que δ , $\{B(a, \delta) : a \in E\}$. Como E es acotado, sabemos que \bar{E} es compacto, por ser cerrado y acotado en \mathbb{R}^m . Como la unión de estas bolas abiertas,

$$\bigcup_{a \in E} B(a, \delta),$$

recubre todo \bar{E} y sabemos que \bar{E} es compacto, tenemos que existe un número finito de puntos $a_1, a_2, \dots, a_N \in E$ tales que para todo $x \in E$ existe $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ con $|x - a_i| < \delta$; es decir,

$$E \subset \bigcup_{i=1}^N B(a_i, \delta).$$

Ahora, si tomamos $(f_k(a_i))_{k \in \mathbb{N}}$ para cada $i = 1, 2, \dots, N$, como $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en E , tenemos que existe $k(i)$ tal que si $k, j \geq k(i)$, entonces

$$|f_k(a_i) - f_j(a_i)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.6)$$

Sabemos que cualquier $x \in E$ estará a una distancia menor que δ de a_i para algún $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, al que llamamos a_{i_1} . Esto se debe a que la unión de las bolas $B(a_i, \delta)$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ cubre \bar{E} . Ahora, como para todo $x \in E$ sabemos que existe un $a_{i_1} \in E$ con $|x - a_{i_1}| < \delta$ y por la equicontinuidad de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tenemos que, para todo k, j , se cumple

$$|f_k(x) - f_k(a_{i_1})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |f_j(x) - f_j(a_{i_1})| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.7)$$

Tomando el máximo $k_0 = \max\{k(i) : i = 1, 2, \dots, N\}$, para $k, j \geq k_0$ resulta que $k, j \geq k(i_1)$ y, al ser $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, por lo visto en (1.6) obtenemos

$$|f_k(a_{i_1}) - f_j(a_{i_1})| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.8)$$

Por último, de (1.5), tomando $a = a_{i_1}$, tras aplicar tanto (1.7) como (1.8), obtenemos finalmente que

$$|f_k(x) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en E , con lo que es uniformemente convergente. \square

El recíproco de este teorema también es cierto si tomamos E compacto, como veremos a continuación en el Teorema 1.2.4, aunque la implicación que nos interesa para probar el Teorema de Arzelà-Ascoli es la dada en el Teorema 1.2.3.

Teorema 1.2.4. *Sea $E \subset \mathbb{R}^m$ compacto y sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde cada $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y tal que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en E . Entonces, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua y convergente en E .*

Demostración. Como vimos en la Sección 1.1, la convergencia uniforme implica convergencia puntual, con lo que solo queda por probar la equicontinuidad. Por tanto, queremos ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $x_1, x_2 \in E$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ y para todo k se cumple que

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \varepsilon. \quad (1.9)$$

Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ la función a la que converge uniformemente la sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Por la compacidad de E , sabemos que tanto las funciones f_k como la función f son uniformemente continuas, como se señaló en la Sección 1.1. Además, de la definición de que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f , tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 > 0$ tal que para todo $k \geq k_0$ y para todo $x \in E$ se verifica que

$$|f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.10)$$

Por otro lado, para $k < k_0$, sabemos que f_k es uniformemente continua en E , por lo que para todo $\varepsilon > 0$ tomamos un $\delta_k > 0$ para cada $k = 1, \dots, k_0 - 1$ tal que si $|x_1 - x_2| < \delta_k$ entonces se cumple

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.11)$$

De hecho, por tomar k un número finito de valores, podemos elegir $\hat{\delta}$ como el mínimo de todos los posibles δ_k con $k = 1, \dots, k_0 - 1$, de manera que si $|x_1 - x_2| < \hat{\delta}$ entonces obtenemos

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall k < k_0. \quad (1.12)$$

Como ya hemos obtenido (1.12), solo nos queda probar entonces que (1.9) se cumple para $k \geq k_0$. Como f es uniformemente continua en el compacto E , sabemos que existe $\tilde{\delta}$ tal que si $x_1, x_2 \in E$ con $|x_1 - x_2| < \tilde{\delta}$, entonces

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.13)$$

Ahora, aplicando la desigualdad triangular a (1.9), para $k \geq k_0$,

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq |f_k(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f_k(x_2)|.$$

Por (1.10) tenemos que los términos primero y tercero de la desigualdad anterior son menores que $\varepsilon/3$, y el segundo también lo es por (1.13). Por lo tanto, para $k \geq k_0$, obtenemos que

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Así, eligiendo $\delta = \min\{\hat{\delta}, \tilde{\delta}\}$, queda probado que se verifica (1.9) para todo k y para todo $x_1, x_2 \in E$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta$, por lo que efectivamente, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua. \square

Podemos relacionar estos teoremas con uno de los ejemplos vistos en la Sección 1.1, en el primer apartado del Ejemplo 1.1.8 y el segundo apartado del Ejemplo 1.1.11, en los que la sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f_k(x) = x^k$ converge puntualmente pero no uniformemente. En este ejemplo, $E = [0, 1]$ compacto y $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente, pero falla la condición de equicontinuidad.

A continuación, vemos el último resultado que necesitamos para probar el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6, y que afirma que dado un conjunto acotado de \mathbb{R}^m siempre existe un subconjunto numerable y denso en él.

Lema 1.2.5. *Sea $E \subset \mathbb{R}^m$ acotado. Entonces, existe $D \subset E$ numerable tal que D es denso en E .*

Demostración. Vamos a considerar la familia de bolas abiertas de radio $r = 1/k$ donde $k \in \mathbb{N}$, esto es, $B(x, r) = B(x, 1/k)$ con $x \in E$ y $k \in \mathbb{N}$. Comenzamos con $k = 1$, tomando $\{B(x, 1) : x \in E\}$. Sabemos que su unión

$$\bigcup_{x \in E} B(x, 1)$$

recubrirá todo \bar{E} , siendo además \bar{E} un conjunto compacto por ser cerrado y acotado en \mathbb{R}^m . Por tanto, sabemos que existe un número finito de elementos de E , $x_1^1, x_2^1, \dots, x_{k_1}^1 \in E$, de manera que dado un $x \in E$ cualquiera, $|x - x_i^1| < 1$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, k_1\}$.

Si ahora consideramos para $k = 2$ la familia de bolas abiertas de radio $1/2$, $\{B(x, 1/2) : x \in E\}$, siguiendo el mismo procedimiento, existen $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k_2}^2 \in E$ de manera que para cualquier $x \in E$ existe $i \in \{1, 2, \dots, k_2\}$ tal que $|x - x_i^2| < 1/2$.

Realizando este proceso sucesivamente, tomamos las bolas de radio $r = 1/s$ con $s \in \mathbb{N}$, $\{B(x, 1/s) : x \in E\}$. Por el mismo argumento, existen $x_1^s, x_2^s, \dots, x_{k_s}^s \in E$ tales que para todo $x \in E$ existe $i \in \{1, 2, \dots, k_s\}$ de manera que $|x - x_i^s| < 1/s$.

Ahora, basta considerar el conjunto

$$D = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \{x_1^s, x_2^s, \dots, x_{k_s}^s\},$$

que es unión numerable de conjuntos finitos y, por tanto, numerable.

Además, el conjunto D es denso en E , por construcción, ya que la unión de las bolas

$$\bigcup_{i=1}^{k_s} B\left(x_i^s, \frac{1}{s}\right)$$

recubre todo \bar{E} y, así, todo punto de E está a una distancia menor de $1/s$ de alguno de los centros x_i^s , para ciertos i y s . Por lo tanto, hemos obtenido un conjunto D numerable que además es denso en E . \square

Vistos y probados todos estos resultados, ya estamos en condiciones de introducir el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6, que demostramos a continuación.

Teorema 1.2.6. (Teorema de Arzelà-Ascoli). *Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una familia de funciones equicontinua y uniformemente acotada donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con E acotado. Entonces, existe una subsucesión de funciones $(f_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente en E .*

Demostración. En primer lugar, como E es acotado, por el Lema 1.2.5, sabemos que existe $D \subset E$ numerable y denso en E . Ahora, como D es numerable y por la hipótesis de que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en E , aplicamos el Principio de Selección de Cantor, Teorema 1.2.1, y obtenemos una subsucesión de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en D , a la que llamamos $(f_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$.

Por la equicontinuidad de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, por la existencia de una subsucesión $(f_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ convergente en D y por ser D denso en E , podemos aplicar el Principio de Propagación, es decir, el Teorema 1.2.2, y obtenemos que $(f_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ converge en E . Por último, por el Teorema 1.2.3, deducimos que $(f_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en E . \square

Observamos que pueden existir dos subsucesiones distintas de la sucesión de funciones dada, y ambas subsucesiones no tienen por qué converger a la misma función. Por lo tanto, pueden existir varias funciones f diferentes a las que convergen pese a partir de la misma sucesión general $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Esto lo podemos comprobar en el siguiente ejemplo, donde tomaremos dos subsucesiones diferentes y veremos que las funciones a las que convergen no son iguales.

Ejemplo 1.2.7. *Sea la sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde cada $f_k : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por*

$$f_k(x) = (-1)^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k.$$

Veamos, en primer lugar, que verifica las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema 1.2.6. Comenzamos probando que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia equicontinua. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$, y tomemos $x_1, x_2 \in [0, 1]$ cualesquiera tales que $|x_1 - x_2| < \delta$. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, por el Teorema del valor medio, sabemos que existe $t_k \in [x_1, x_2]$ tal que

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| = |f'_k(t_k)| |x_1 - x_2| = \left| (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{t_k}{k}\right)^{k-1} \right| |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon.$$

Por lo tanto, resulta que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua en $[0, 1]$. Además, como hemos definido cada f_k en el intervalo $[0, 1]$ acotado, sabemos que

$$|f_k(x)| = \left| (-1)^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \right| \leq 1,$$

para todos $x \in [0, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$, por lo que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ también es uniformemente acotada en $[0, 1]$. Así, por el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6, tenemos que existe al menos una subsucesión de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente en $[0, 1]$.

Comprobemos ahora que puede haber dos subsucesiones que converjan a dos funciones distintas. Esto lo podemos probar fácilmente tomando la subsucesión de los índices pares y la de los índices impares, es decir, $(f_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(f_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$, ya que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k} \left(1 - \frac{x}{2k}\right)^{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{2k}\right)^{2k} = e^{-x}$$

y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k-1} \left(1 - \frac{x}{2k-1}\right)^{2k-1} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{2k-1}\right)^{2k-1} = -e^{-x}.$$

Por lo tanto, hemos encontrado dos subsucesiones distintas de manera que una de ellas converge a la función e^{-x} y la otra a $-e^{-x}$, por lo que no convergen uniformemente a la misma función.

Por otro lado, existe un teorema que es casi un recíproco del Teorema de Arzelà-Ascoli, con la diferencia de que pasamos de tomar E acotado a pedir también que sea cerrado, exigiendo que sea compacto. Se trata del Teorema 1.2.8, que afirma lo siguiente.

Teorema 1.2.8. *Sea $E \subset \mathbb{R}^m$ compacto y sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en E . Entonces, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua.*

Demostración. La equicontinuidad de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se ha probado en el Teorema 1.2.4, luego falta ver que es uniformemente acotada. Como $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas y converge uniformemente a f , entonces f es continua. Por ser E compacto, esto implica que f está acotada en E . Por el mismo razonamiento, f_k también está acotada en E para cada $k \in \mathbb{N}$. Ahora, por reducción a lo absurdo, si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no es uniformemente acotada, entonces para todo $i \in \mathbb{N}$ existen $x_i \in E$ y $k_i \in \mathbb{N}$ tales que $|f_{k_i}(x_i)| > i$. Es posible que alguno de los valores de k_i con $i \in \mathbb{N}$ se repita un número infinito de veces, lo que implicaría que una de las funciones fuera no acotada; o que ningún k_i lo haga, en cuyo caso podríamos encontrar una subsucesión cuya norma vaya aumentando hasta infinito. Nuestro objetivo es llegar a contradicciones con la acotación de las funciones f_k desde ambos casos posibles:

- Si alguno de estos k_i , llamémosle k_{i_0} , se repite un número infinito de veces, entonces $|f_{k_{i_0}}(x_i)| > i$ para infinitos valores de i , por lo que una de las f_k , en concreto $f_{k_{i_0}}$, no es acotada, lo cual es una contradicción dado que E es compacto y cada f_k es continua.
- Si ninguno de los k_i se repite un número infinito de veces, entonces existe una subsucesión $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y una sucesión $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tales que $|f_{k_j}(x_{k_j})| \rightarrow \infty$. Entonces, como cada f_k es acotada, por ser E compacto, podemos aplicar el teorema de Bolzano-Weierstrass, que nos dice que toda sucesión acotada en \mathbb{R}^n tiene una subsucesión convergente. Así, deducimos que existe una subsucesión de $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a $x \in E$, a la que llamamos $(x_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$. Para finalizar, vamos a tomar un $s_0 \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para que, por la convergencia uniforme de f , se verifique

$$|f(x_{k_s}) - f_{k_s}(x_{k_s})| < 1 \quad \forall s \geq s_0. \quad (1.14)$$

Además, por la continuidad de f y por ser $(x_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$ convergente a x , también podemos elegir un $s_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que

$$|f(x) - f(x_{k_s})| < 1 \quad \forall s \geq s_1. \quad (1.15)$$

Ahora, aplicando la desigualdad triangular de la siguiente manera, tenemos que

$$|f(x) - f_{k_s}(x_{k_s})| \leq |f(x) - f(x_{k_s})| + |f(x_{k_s}) - f_{k_s}(x_{k_s})| \quad \forall s \geq \max\{s_0, s_1\}.$$

En la parte derecha de la desigualdad, el primer sumando es menor que 1 por la desigualdad (1.15). El segundo sumando es menor que 1 también, por (1.14). Por lo tanto, obtenemos que

$$|f(x) - f_{k_s}(x_{k_s})| < 2 \quad \forall s \geq \max\{s_0, s_1\},$$

y entonces f no es acotada, pues teníamos que $|f_{k_j}(x_{k_j})| \rightarrow \infty$, con lo que llegamos a una contradicción. Así, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ha de ser uniformemente acotada en E .

Por lo tanto, queda probado que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es tanto equicontinua como uniformemente acotada en E . \square

Para finalizar esta sección, vamos a dar algunos ejemplos con los que comprobaremos que efectivamente tanto la condición de equicontinuidad como la de acotación uniforme, además de la acotación del conjunto E , son indispensables para obtener la convergencia uniforme en el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6.

Ejemplo 1.2.9.

- I) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = k$ es equicontinua, dado que para todo ε y para cualesquiera $x_1, x_2 \in [0, 1]$ siempre se va a dar $|f(x_1) - f(x_2)| = k - k = 0 < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo, no es uniformemente acotada, puesto que $k \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que al no cumplirse la condición de acotación uniforme no puede existir una subsucesión de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente. Sea $0 < \varepsilon < 1$, resulta que $|f_k(x) - f_j(x)| \geq 1 > \varepsilon$ para cualesquiera $k, j \in \mathbb{N}$ distintos y para todo $x \in [0, 1]$, por lo que no existe ninguna subsucesión que sea uniformemente de Cauchy y por lo tanto no existe ninguna subsucesión uniformemente convergente, ya que ambas condiciones son equivalentes en \mathbb{R} (ver página 7 de [10]). Además, tampoco existe ninguna subsucesión que converja puntualmente.

- II) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = x^k$ es uniformemente acotada, pues basta tomar $M = 1$ para que $|f_k(x)| = x^k \leq 1$ para todos $x \in [0, 1]$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, no es equicontinua, como se ha visto en el primer apartado del Ejemplo 1.1.8.

Veamos entonces que, como $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada pero no es equicontinua, no puede tener una subsucesión uniformemente convergente. Hemos visto en el segundo apartado del Ejemplo 1.1.11 que la sucesión $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge puntual pero no uniformemente a la función definida en $[0, 1]$ y dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Aunque existiera una subsucesión de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente en $[0, 1]$, solo podría converger a f , que no es continua. Esto implica, como ya se ha explicado con anterioridad, que esta convergencia no puede ser uniforme.

En la Figura 1.1 podemos comprobar que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es efectivamente uniformemente acotada en $[0, 1]$, pero no equicontinua. Por ello, vemos que no puede existir una subsucesión que converja uniformemente a f .

- III) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, k) \\ x - k & \text{si } x \in [k, k + 1) \\ 1 & \text{si } x \geq k + 1 \end{cases}$$

es uniformemente acotada, puesto que $|f_k(x)| \leq 1$ para todo x y para todo k . Además, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua, como demostramos a continuación. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$. Sean $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ tales que $|x_1 - x_2| < \delta$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1 > x_2$. Tenemos las siguientes posibilidades:

- Si $x_1, x_2 \in [0, k)$, entonces $|f_k(x_1) - f_k(x_2)| = 0 < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

- Si $x_1 \in [k, k + 1)$ y $x_2 \in [0, k)$, entonces

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| = |x_1 - k - 0| = x_1 - k < \delta = \varepsilon,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, donde la desigualdad se tiene por ser $x_2 \in [0, k)$ y $|x_1 - x_2| < \delta$.

- Si $x_1, x_2 \in [k, k + 1)$, entonces

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| = |x_1 - k - x_2 + k| = x_1 - x_2 < \delta = \varepsilon,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

- Si $x_1 \geq k + 1$ y $x_2 \in [k, k + 1)$, entonces

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| = |1 - x_2 + k| = k + 1 - x_2 < \delta = \varepsilon,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, donde la desigualdad se debe a dónde están situados tanto x_1 como x_2 y a que $|x_1 - x_2| < \delta$.

- Si $x_1, x_2 \geq k + 1$, entonces $|f_k(x_1) - f_k(x_2)| = 1 - 1 = 0 < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por último, nos queda comprobar que, a pesar de ser $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente acotada y equicontinua, no puede contener una subsucesión uniformemente convergente por no ser $[0, \infty)$ acotado, aunque sí converge puntualmente a la función nula. Como podemos ver en la Figura 1.2, esto se debe a que estamos trasladando el segmento definido en $[k, k + 1)$ que une el segmento $y = 0$ en $[0, k)$ con la semirrecta $y = 1$ en $[k + 1, \infty)$. Esta traslación siempre es de distancia 1, dado que estos segmentos son siempre paralelos entre sí, siendo imposible que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ o cualquier subsucesión de $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converja uniformemente.

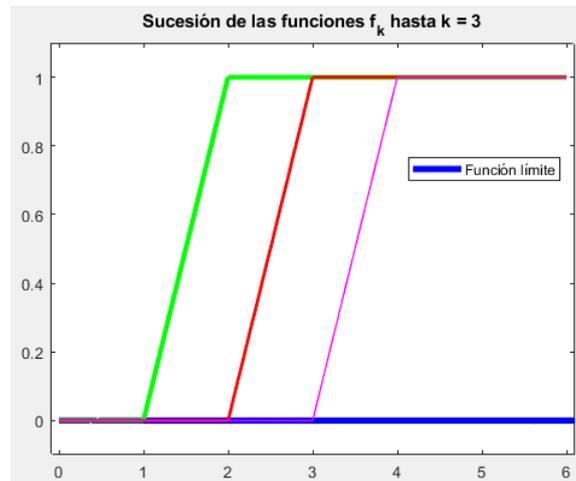


Figura 1.2: Gráfica de las funciones f_k para $k = 1, 2, 3$ en contraste con la función límite, en azul.

Dicho formalmente, tomamos $0 < \varepsilon < 1$ y $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, y entonces tenemos que $|f_{k+1}(k + 1) - f_k(k + 1)| = 1 > \varepsilon$, lo que implica que no existe ninguna subsucesión uniformemente de Cauchy, por lo que, de nuevo, deducimos que tampoco puede existir ninguna subsucesión uniformemente convergente.

1.3. Teoremas de punto fijo

Para finalizar este capítulo, vamos a definir las aplicaciones contractivas, que utilizaremos para encontrar puntos fijos, a través de los teoremas del punto fijo. En nuestro caso, nos centraremos principalmente en el Teorema del punto fijo de Banach, Teorema 1.3.4, pues es el que utilizaremos más adelante en el Capítulo 3. En general, nos basaremos en las referencias [4] y [11], además de otras referencias menos utilizadas como [6].

Por lo tanto, comencemos definiendo el concepto de aplicación contractiva, que vemos a continuación.

Definición 1.3.1. (Aplicación contractiva). Sea $T : E \rightarrow E$ una aplicación donde E es un espacio métrico con la métrica d . Se dice que T es una aplicación contractiva si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ y de manera que para todos $x_1, x_2 \in E$ se verifique

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2). \quad (1.16)$$

Señalemos que la definición de aplicación contractiva no se mantiene para cualquier métrica que se utilice en el espacio E (ver página 39 de [11]). Se puede generalizar a aplicaciones entre espacios métricos distintos, pero nosotros vamos a utilizar las aplicaciones contractivas para encontrar puntos fijos, con lo que estudiar esas generalizaciones en este trabajo carece de sentido.

Observamos que se tiene por definición que toda aplicación contractiva es continua. De hecho, probamos a continuación que esta continuidad es además uniforme.

Proposición 1.3.2. Sea $T : E \rightarrow E$ una aplicación contractiva donde E es un espacio métrico. Entonces, T es uniformemente continua.

Demostración. Queremos comprobar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in E$ y $d(x_1, x_2) < \delta$, entonces $d(T(x_1), T(x_2)) < \varepsilon$. Sea α tal que se verifica (1.16) para cualesquiera $x_1, x_2 \in E$ y sea $\varepsilon > 0$. Basta con tomar $\delta = \varepsilon$ y entonces para todos $x_1, x_2 \in E$ tenemos que

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon,$$

y queda así probado que T es uniformemente continua. \square

Antes de continuar, veamos algunos ejemplos sencillos de aplicaciones contractivas definidas sobre \mathbb{R} o un subconjunto de \mathbb{R} y con la distancia usual, $d(x, y) = |y - x|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.3.3.

- I) La aplicación $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x/2$ es contractiva en \mathbb{R} , como podemos comprobar fácilmente tomando $\alpha = 1/2$, ya que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$d(Tx, Ty) = |Ty - Tx| = \left| \frac{y}{2} - \frac{x}{2} \right| = \frac{|y - x|}{2} = \frac{d(x, y)}{2}.$$

- II) La aplicación $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $T(x) = \cos x$ es contractiva en $[0, 1]$. Dados $x, y \in [0, 1]$ cualesquiera, aplicando la fórmula de la resta de cosenos, tenemos que

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |\cos(y) - \cos(x)| = \left| -2 \operatorname{sen} \left(\frac{y-x}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{y+x}{2} \right) \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{y-x}{2} \right) \right| \left| \operatorname{sen} \left(\frac{y+x}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{y-x}{2} \right| \operatorname{sen}(1) = \operatorname{sen}(1) |y-x| = \operatorname{sen}(1) d(x, y), \end{aligned}$$

dado que $|\operatorname{sen}(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{R}$ y que $(y+x)/2 \leq 1$ por ser $x, y \leq 1$. Por lo tanto, tomando $\alpha = \operatorname{sen}(1)$ vemos que efectivamente T es contractiva en el intervalo $[0, 1]$.

III) La aplicación $T : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $T(x) = \ln(x)$ no es contractiva en $[1, \infty)$. Supongamos por reducción a lo absurdo que sí lo es, entonces existe $0 < \alpha < 1$ tal que $d(Tx, Ty) = |T(y) - T(x)| \leq \alpha|y - x| = \alpha d(x, y)$ para todos $x, y \in [1, \infty)$. Sea $z \in (1, 1/\alpha)$ fijo, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[1, z]$, existe $c \in (1, z)$ de manera que

$$|T(z) - T(1)| = |T'(c)||z - 1|.$$

Despejando y aplicando la hipótesis de que T es contractiva, obtenemos

$$\frac{1}{c} = |T'(c)| = \frac{|T(z) - T(1)|}{|z - 1|} \leq \alpha \Rightarrow 1 \leq \alpha c < \alpha z \Rightarrow z > \frac{1}{\alpha},$$

lo cual es absurdo.

Como ya hemos mencionado, para nosotros, la utilidad de las aplicaciones contractivas se reduce a la búsqueda de puntos fijos. Veamos ahora el Teorema del punto fijo de Banach, que nos garantiza tanto la existencia como la unicidad del punto fijo bajo la hipótesis de que E sea completo. Se trata de un teorema muy útil y con muchas aplicaciones, entre las cuales está uno de los teoremas de existencia y unicidad que veremos en el Capítulo 3.

Teorema 1.3.4. (Teorema del punto fijo de Banach). Sea $T : E \rightarrow E$ una aplicación contractiva donde E es un espacio métrico completo. Entonces, existe un único punto fijo para T , es decir, existe un único $x \in E$ tal que $T(x) = x$.

Demostración. Comencemos probando la existencia del punto fijo. Sea $x_0 \in E$ fijo. Definimos la sucesión dada por $x_1 = T(x_0)$ y

$$x_k = T(x_{k-1}), \quad \forall k > 1.$$

Veamos, en primer lugar, que la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como T es una aplicación contractiva, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$ y

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(T(x_k), T(x_{k-1})) \leq \alpha d(x_k, x_{k-1}).$$

Repetiendo sucesivamente este proceso, obtenemos que

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha d(x_k, x_{k-1}) \leq \alpha^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \dots \leq \alpha^k d(x_1, x_0).$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ y cualquier $p \in \mathbb{N}$, aplicando la desigualdad triangular, resulta que

$$\begin{aligned} d(x_{k+p}, x_k) &\leq d(x_{k+p}, x_{k+p-1}) + d(x_{k+p-1}, x_{k+p-2}) + \dots + d(x_{k+1}, x_k) \leq \\ &\leq (\alpha^{k+p-1} + \alpha^{k+p-2} + \dots + \alpha^k) d(x_1, x_0) = \left(\sum_{i=k}^{k+p-1} \alpha^i \right) d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

A continuación, como $0 < \alpha < 1$, podemos escribir el primer factor del último término como la diferencia de dos sumas geométricas, es decir,

$$\sum_{i=k}^{k+p-1} \alpha^i = \sum_{i=0}^{k+p-1} \alpha^i - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i = \frac{1 - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} - \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha}.$$

Por lo tanto, resulta que

$$d(x_{k+p}, x_k) = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon,$$

para k suficientemente grande, dado que $0 < \alpha < 1$. Así, tenemos que efectivamente la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como el espacio métrico E es completo, sabemos que existe el límite de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, al que llamamos x , y como T es uniformemente continua, tenemos que

$$T(x) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x,$$

por lo que x es un punto fijo de E .

Por último, veamos que este punto fijo es único. Supongamos por reducción a lo absurdo que existe otro punto fijo $y \in E$, $y \neq x$. Entonces, teniendo en cuenta que T es contractiva, si calculamos la distancia entre ambos puntos fijos obtenemos

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) < d(x, y),$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto, x es el único punto fijo de E . □

La demostración de este teorema es interesante, ya que nos proporciona un método para encontrar el único punto fijo. Esta idea nos será de utilidad en el Capítulo 3, a la hora de construir los denominados iterantes de Picard, pues nos van a proporcionar una sucesión que convergerá a la solución buscada del problema de Cauchy.

Un teorema similar al Teorema 1.3.4 es el siguiente, que nos garantiza la existencia de un punto fijo en el caso en el que E sea $B(0, 1)$. Una ventaja respecto al teorema anterior es que ahora nos basta con que T sea continua en lugar de contractiva. Su demostración en \mathbb{R}^2 se ha visto en la asignatura de Teoría Global de Superficies, mientras que su demostración en \mathbb{R}^n se puede encontrar, por ejemplo, en la referencia [4].

Teorema 1.3.5. (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Sea $T : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B(0, 1)$ una aplicación continua. Entonces, existe al menos un punto fijo para T .*

Otros teoremas del punto fijo se pueden encontrar en [6], pero nosotros no nos vamos a adentrar más en ellos, puesto que no es el objetivo del trabajo.

Capítulo 2

Existencia de soluciones: Teoremas de Cauchy-Peano

En este capítulo nos dedicaremos a desarrollar uno de los objetivos de este trabajo, que trata la demostración de dos teoremas de existencia de solución del problema de Cauchy, donde en uno de ellos la solución será local y en otro será global. Además, para ello, resultará clave el Teorema de Arzelà-Ascoli 1.2.6, por lo que podemos ver los dos principales resultados de este capítulo como aplicaciones de este teorema.

Como hemos mencionado, nos vamos a centrar en probar la existencia de soluciones, puesto que su cálculo a menudo se complica, ya que no siempre resulta sencillo resolver un problema de Cauchy. De hecho, en numerosas situaciones no nos interesa calcular las soluciones en sí, sino simplemente saber si existen o no, y si hay una única solución o varias. Es por ello que vamos a dedicar una gran parte del trabajo a estudiar diversos teoremas que nos permiten garantizar que un problema de Cauchy, bajo ciertas condiciones, tenga solución, y si ésta es única. Su unicidad, sin embargo, se estudiará en el Capítulo 3, donde tendremos que exigir nuevas condiciones.

Dividiremos este capítulo en tres secciones, de manera que cada una tendrá un objetivo distinto. En primer lugar, introduciremos el problema de Cauchy y su forma integral. Después, demostraremos el Teorema local de Cauchy-Peano en la Sección 2.2, seguido del Teorema global de Cauchy-Peano en la Sección 2.3. Para todo ello, nos serviremos principalmente de las referencias [4], [9], [11], junto con el apoyo de [1] y [8].

2.1. Problema de Cauchy. Forma integral

Vamos a dedicar esta sección a un breve repaso de la definición de problema de Cauchy, dejando clara la diferencia entre los dos tipos de soluciones que hemos mencionado, local y global. Además, estableceremos una equivalencia entre la búsqueda de las soluciones de un problema de Cauchy y las soluciones de una ecuación integral asociada, probando un resultado que será de gran utilidad en el resto del trabajo. Como ya hemos dicho, las principales referencias utilizadas son [4], [9] y [11].

En primer lugar, recordemos la definición de problema de Cauchy. En nuestro caso, consideraremos únicamente los problemas de Cauchy relativos a una ecuación diferencial vectorial de primer orden, que incluye tanto las ecuaciones diferenciales escalares de orden n , con $n \geq 1$,

como los sistemas de ecuaciones diferenciales. Recordemos que toda ecuación diferencial de orden n se puede escribir como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Definición 2.1.1. (Problema de Cauchy). Sea $f(x, y)$ una función $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea $(x_0, y_0) \in D$. Se denomina problema de Cauchy o problema de valores iniciales de primer orden al problema que consiste en buscar funciones $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con I un intervalo tal que $x_0 \in I$ e $y \in C^1$, que verifiquen la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y'(x) = f(x, y(x))$ para todo $x \in I$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

El problema de Cauchy se suele representar de la forma

$$(PC) \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

y en múltiples ocasiones nos referiremos al mismo como (PC) .

Las soluciones de un problema de Cauchy, en caso de existir, pueden ser locales o globales, en función de dónde estén definidas. La principal diferencia está en el conjunto en el que definimos la función f , dado que si tomamos un pequeño entorno de (x_0, y_0) solo podremos garantizar que la solución encontrada esté definida en un cierto intervalo, que dependerá de la condición inicial. Por otro lado, si tomamos como dominio de definición la banda dada por $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x_0 \in [a, b]$, cabe esperar que la solución sea global, es decir, que esté definida en todo $[a, b]$, sin depender de x_0 . Además del dominio, también serán importantes las propiedades que pidamos a la función f . Estas diferencias resultan clave, y es por ello que presentamos dos versiones distintas del Teorema de Cauchy-Peano, una garantiza la existencia de solución local y la otra afirma que existe al menos una solución global. Lo mismo ocurrirá en el Capítulo 3, donde volveremos a distinguir entre soluciones locales y globales.

A continuación, y para finalizar esta sección, vamos a probar una proposición que nos será de utilidad para demostrar la existencia y unicidad de solución de (PC) . En este resultado vemos que hay una gran relación entre la solución de un problema (PC) y la forma integral del mismo. La sustitución del problema diferencial por un problema integral será un procedimiento habitual en las demostraciones, debido a variación continua de la integración respecto a los datos del problema, cosa que no sucede con la derivación.

Proposición 2.1.2. Sea (PC) un problema de Cauchy donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua. Buscar una solución $y(x)$ de (PC) es equivalente a buscar una función $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en I que cumpla la siguiente igualdad:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds \quad \forall x \in I. \quad (2.1)$$

Demostración. Demostraremos la equivalencia anterior probando ambas implicaciones:

\Rightarrow) Sea $y(x)$ una solución del problema de Cauchy dado. Entonces, se cumple que $y'(x) = f(x, y(x))$ para todo $x \in I$ y obtenemos, integrando, que

$$\int_{x_0}^x y'(s) \, ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds \quad \forall x \in I$$

y, por la regla de Barrow,

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds \quad \forall x \in I.$$

Basta con despejar $y(x)$ y utilizar la condición inicial $y(x_0) = y_0$ en la igualdad anterior para obtener (2.1).

\Leftarrow) Sea $y(x)$ continua en I tal que verifique (2.1). Derivando esta igualdad, cosa que podemos hacer por el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que $y'(x) = 0 + f(x, y(x))$ para todo $x \in I$. Además, vemos claramente que y es una función de clase \mathcal{C}^1 , dado que su derivada $f(x, y(x))$ es continua. Asimismo, sustituyendo $x = x_0$ en (2.1), tenemos que $y(x_0) = y_0 + 0 = y_0$. Por lo tanto, $y(x)$ es solución del problema de Cauchy (PC). \square

2.2. Existencia de solución local

A lo largo de esta sección trataremos el primer teorema de existencia de solución del problema de Cauchy que veremos en este trabajo, donde nos basaremos en la forma integral del problema de Cauchy (Proposición 2.1.2), en las conocidas como poligonales de Euler y en el Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema 1.2.6), para probar la existencia de solución local definida en un cierto intervalo. La referencia que ha resultado de mayor utilidad en esta sección ha sido [9].

Teorema 2.2.1. (Teorema local de Cauchy-Peano). *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y D es un entorno de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fijado. Entonces, existe al menos una solución local de (PC) y está definida en el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, con $h = \min\{a, b/M\}$, siendo $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset D$ y $M = \max_R |f(x, y)|$.*

Demostración. Para probar este resultado vamos a utilizar las denominadas poligonales de Euler, que definiremos a continuación.

Fijado $k \in \mathbb{N}$, queremos dividir el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ donde $h = \min\{a, b/M\}$ en $2k$ subintervalos de igual longitud. Para ello, tomamos $h_k = h/k$. Así, los subintervalos tendrán sus correspondientes extremos en los puntos

$$x_{i,k} = x_0 + i h_k, \quad i = -k, -k + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k - 1, k.$$

De esta manera, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$x_0 - h = x_{-k,k} < x_{-k+1,k} < \dots < x_{-1,k} < x_{0,k} = x_0 < x_{1,k} < \dots < x_{k-1,k} < x_{k,k} = x_0 + h.$$

Estos puntos que hemos encontrado nos servirán como la primera coordenada de los vértices de las poligonales de Euler que vamos a definir a continuación.

Para cada k , definimos, en primer lugar,

$$p_k(x_{0,k}) = p_k(x_0) = y_0.$$

Ahora, ya fijada la poligonal como el valor de la condición inicial $y(x_0) = y_0$, la extendemos a los subintervalos situados a la derecha de x_0 ; es decir, aquellos subintervalos contenidos en $[x_0, x_0 + h]$. Comenzamos en el intervalo $(x_0, x_{1,k}]$, donde la idea que vamos a seguir consiste en obtener un segmento contenido en la recta con pendiente la función f evaluada en (x_0, y_0) y ajustada para que pase por (x_0, y_0) . Es decir,

$$p_k(x) = p_k(x_0) + (x - x_0)f(x_0, p_k(x_0)), \quad x \in (x_0, x_{1,k}].$$

Extendiendo esta misma idea al caso general, suponiendo ya definida la poligonal en $x_{i,k}$, para $i \in \{0, \dots, k-1\}$, tendremos en $(x_{i,k}, x_{i+1,k}]$ la ecuación de una recta que tendrá como pendiente

la función f evaluada en el punto anterior, $f(x_{i,k}, p_k(x_{i,k}))$, y que pasa por $(x_{i,k}, p_k(x_{i,k}))$. Es decir,

$$p_k(x) = p_k(x_{i,k}) + (x - x_{i,k})f(x_{i,k}, p_k(x_{i,k})), \quad x \in (x_{i,k}, x_{i+1,k}].$$

Ahora, pasamos a definir de manera análoga la poligonal en los subintervalos situados a la izquierda de x_0 , contenidos en $[x_0 - h, x_0]$. En primer lugar, en $[x_{-1,k}, x_0)$ tomamos

$$p_k(x) = p_k(x_0) + (x - x_0)f(x_0, p_k(x_0)), \quad x \in [x_{-1,k}, x_0),$$

que está en la misma recta que el segmento definido para $x \in (x_0, x_{1,k}]$. Esto se debe a que ambos segmentos tienen como extremo común el vértice (x_0, y_0) y tienen la misma pendiente, pues en ambos casos partimos de x_0 al calcular $p_k(x)$, aunque en distintas direcciones.

En general, para $i \in \{0, \dots, k-1\}$, suponiendo ya definida la poligonal en $x_{-i,k}$, tomamos en $[x_{-i-1,k}, x_{-i,k})$ el segmento definido por

$$p_k(x) = p_k(x_{-i,k}) + (x - x_{-i,k})f(x_{-i,k}, p_k(x_{-i,k})), \quad x \in [x_{-i-1,k}, x_{-i,k}),$$

siguiendo la misma idea que antes.

A continuación, en la Figura 2.1 vemos la representación gráfica de una de estas poligonales que acabamos de definir. En este caso, para simplificar, representamos la poligonal en dos dimensiones, y tomamos $k = 3$. Aquí, suponemos que $h = \min\{a, b/M\} = a$ y vemos que la poligonal está definida en $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ y tiene $2k = 6$ segmentos definidos en los correspondientes subintervalos de I .

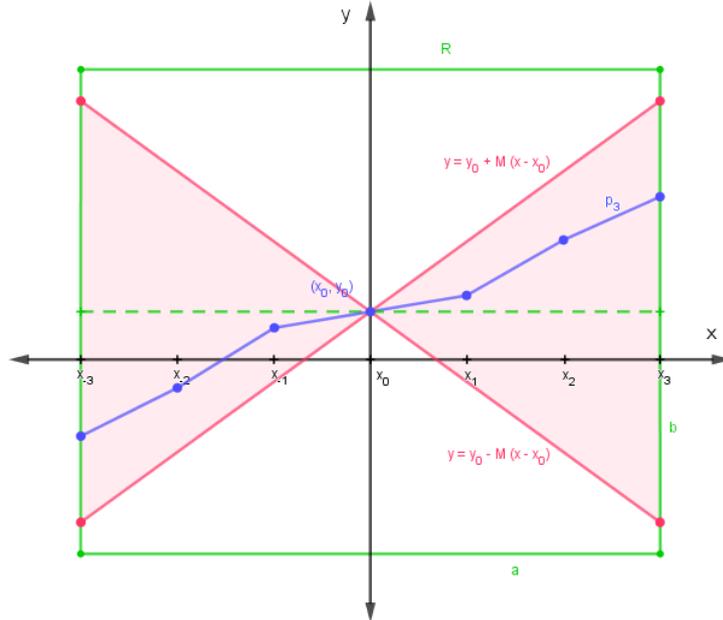


Figura 2.1: Representación gráfica de la poligonal p_k con $k = 3$, en azul, las rectas $y = y_0 \pm M(x - x_0)$ en magenta, y el rectángulo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ en verde, donde $h = a$.

Por otro lado, en la Figura 2.2 tenemos una gráfica con el caso en el que $h = \min\{a, b/M\} = b/M < a$. Al ser $h < a$, vemos que el intervalo en el que está definida la poligonal es más pequeño que $[x_0 - a, x_0 + a]$.

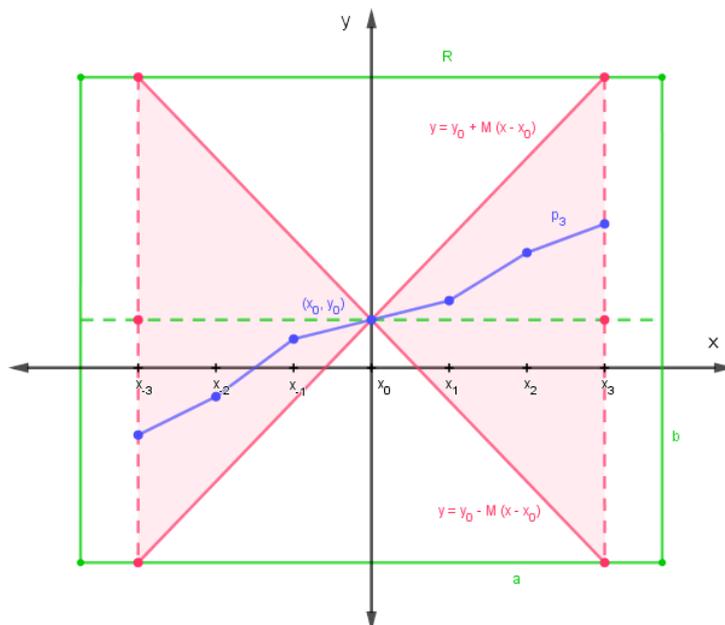


Figura 2.2: Representación gráfica de la poligonal p_k con $k = 3$, en azul, las rectas $y = y_0 \pm M(x - x_0)$ en magenta, y el rectángulo R en verde, donde $h = b/M$.

De esta manera, los valores de a y b nos ayudan a encontrar el intervalo I en el que definir las poligonales y , más adelante, la solución del problema de Cauchy. Notemos que al ser $M = \max_R |f(x, y)|$ las poligonales nunca se van a salir de las secciones en magenta delimitadas por las rectas $y = y_0 \pm M(x - x_0)$, dado que la pendiente de cada segmento nunca puede ser, en valor absoluto, mayor que M .

Viendo las gráficas anteriores, parece razonable pensar en cómo serían las poligonales a medida que vamos aumentando el valor de k . Evidentemente el número de segmentos que forman cada poligonal aumentará con el incremento de k , pero, ¿qué pasa cuando $k \rightarrow \infty$? Podríamos pensar que estas poligonales quizás tiendan cuando $k \rightarrow \infty$ a una función que verifique la ecuación diferencial $y'(x) = f(x, y(x))$ y sea solución del problema de Cauchy (PC). Veremos que ocurre así para una subsecuencia de dichas poligonales. Para ello, necesitamos aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6, visto en el capítulo anterior, para lo cual hemos de verificar que se cumplen las siguientes hipótesis sobre la sucesión de poligonales $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

- 1) **Bien definida:** Hemos definido las poligonales a través de la función f , que está definida en el conjunto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, evaluando esta función en ciertos puntos $(x, p_k(x))$, $x \in I$. Por ello, para probar que p_k está bien definida, tenemos que asegurarnos de que todos los puntos $(x, p_k(x))$ están en D .

Por hipótesis, sean $a, b > 0$ y sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset D$. Vamos a probar directamente que todos los puntos $(x, p_k(x))$ con $x \in I$ pertenecen a R , por lo que también estarán en D . Como el punto $(x_0, p_k(x_0)) \in R$, pues $p_k(x_0) = y_0$, definimos

$$\tilde{h} = \sup\{\rho \in [0, h] : \forall x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho], (x, p_k(x)) \in R\}.$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la función $q_k : [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma que

$$q_k(x) = \begin{cases} f(x_{-i,k}, p_k(x_{-i,k})) & \text{si } x \in [x_{-i-1,k}, x_{-i,k}) \\ f(x_0, y_0) & \text{si } x = x_0 \\ f(x_{-i,k}, p_k(x_{-i,k})) & \text{si } x \in (x_{i,k}, x_{i+1,k}]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Como q_k toma los valores de $f(x, y)$ en puntos $(x, y) \in R$, podemos decir que $|q_k(x)| \leq M$ con $x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]$, siendo $M = \max_R |f(x, y)|$. En realidad, $q_k(x)$ es la derivada a trozos de $p_k(x)$, por cómo la hemos definido. Notemos que la poligonal $p_k(x)$ es continua y que su derivada, $q_k(x)$, es continua a trozos en $[x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]$. Por ello, si $x \in [x_0, x_0 + \tilde{h}] \subset I$ existe un i tal que $x \in (x_{i,k}, x_{i+1,k}]$ y, así, si aplicamos sucesivamente la definición de la poligonal, tenemos que

$$\begin{aligned} p_k(x) &= p_k(x_{i,k}) + (x - x_{i,k})f(x_{i,k}, p_k(x_{i,k})) = p_k(x_{i,k}) + \int_{x_{i,k}}^x \underbrace{f(x_{i,k}, p_k(x_{i,k}))}_{q_k(s)} ds = \\ &= p_k(x_{i-1,k}) + \int_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} q_k(s) ds + \int_{x_{i,k}}^x q_k(s) ds = \dots = y_0 + \int_{x_0}^x q_k(s) ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

De esta manera, si $x \in [x_0, x_0 + \tilde{h}]$, tendremos que

$$|p_k(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x q_k(s) ds \right| \leq \max_{x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]} |q_k(x)| |x - x_0| \leq M\tilde{h} \leq Mh \leq b, \quad (2.4)$$

aplicando que $\tilde{h} \leq h$ por definición de \tilde{h} , que M es no negativo y que h es como mucho b/M por definición de h . De forma análoga se prueba para $x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0]$.

Ya hemos mencionado que $\tilde{h} \leq h$, pero si suponemos que $\tilde{h} < h$ entonces tendríamos que $|p_k(x) - y_0| < b$ para todo $x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]$ y $\tilde{h} < h \leq a$, pues h no puede ser mayor que a por definición. Sin embargo, esto entra en contradicción con nuestra definición de \tilde{h} , dado que podríamos encontrar un valor mayor de \tilde{h} , \hat{h} , tal que para todo punto x en el intervalo $[x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$ se cumpla que $(x, p_k(x)) \in R$. Por ello, ha de ser $\tilde{h} = h$, lo que implica que las poligonales $p_k(x)$ están contenidas en R y, por tanto, también en D .

- 2) Equicontinuidad: Para $x, x' \in [x_0 - h, x_0 + h]$ distintos, tenemos que

$$|p_k(x) - p_k(x')| = \left| \int_x^{x'} q_k(s) ds \right| \leq M|x - x'| \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donde la igualdad se deduce de (2.3) y la desigualdad se tiene por ser M cota superior de q_k . Por la desigualdad (1.1) y la propiedad vista allí, esto implica que la sucesión de poligonales $(p_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua.

- 3) Uniformemente acotada: Sumando cero a $p_k(x)$ y aplicando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$|p_k(x)| = |p_k(x) - y_0 + y_0| \leq |p_k(x) - y_0| + |y_0|. \quad (2.5)$$

Por (2.4), sabemos que $|p_k(x) - y_0| \leq b$ para $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, y aplicando (2.5) obtenemos

$$|p_k(x)| \leq b + |y_0|,$$

por lo que $(p_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Además, necesitamos comprobar la condición de que $E \subset \mathbb{R}$ sea acotado. En nuestro caso, $E = I = [x_0 - h, x_0 + h]$, que es claramente un intervalo acotado. Ahora, aplicando el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6, tenemos que existe una subsucesión de poligonales $(p_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a una cierta función p , continua en I . Sin embargo, aún tenemos que probar que esta función p es solución del problema (PC). Para ello, veremos, en primer lugar, que $(q_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en I a q , donde $q(x) = f(x, p(x))$, $x \in I$. Después, en segundo lugar, utilizaremos esta convergencia uniforme para probar que p verifica la ecuación integral correspondiente a nuestro problema de Cauchy, y aplicando la Proposición 2.1.2 obtendremos finalmente que p es solución de (PC).

- 1) Para probar que $(q_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a q en I , tenemos que comprobar que, para todo $\varepsilon > 0$ existe j_0 tal que si $j \geq j_0$, para todo $x \in I$ se cumple que

$$|q_{k_j}(x) - f(x, y(x))| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Como f es continua en $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ compacto, también es uniformemente continua en él, por lo que existe δ_1 que cumple que si $(x, y), (x', y') \in R$ y $|x - x'| + |y - y'| < \delta_1$, entonces $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon/2$. Además, como p es continua en el intervalo compacto I , también es uniformemente continua en él, por lo que existe δ_2 con $\delta_2 < \delta_1/2$ y tal que si $x, x' \in I$ y $|x - x'| < \delta_2$, entonces $|p(x) - p(x')| < \delta_1/2$.

Ahora, como $(p_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a p , sabemos que existe j_0 tal que para $j \geq j_0$ se verifica $|p_{k_j}(x) - p(x)| < \delta_1$ para $x \in I$. Además, podemos tomar j_0 tal que $h/k_j < \delta_2$ para $j \geq j_0$. Por ello, si $x \in I$ entonces $x \in (x_{i, k_j}, x_{i+1, k_j}]$ para algún i , y se tiene

$$\begin{aligned} |q_{k_j}(x) - f(x, p(x))| &= |f(x_{i, k_j}, p_{k_j}(x_{i, k_j})) - f(x, p(x))| \leq \\ &\leq |f(x_{i, k_j}, p_{k_j}(x_{i, k_j})) - f(x_{i, k_j}, p(x_{i, k_j}))| + |f(x_{i, k_j}, p(x_{i, k_j})) - f(x, p(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para $j \geq j_0$, donde la primera desigualdad resulta de sumar cero y aplicar la desigualdad triangular, mientras que la segunda desigualdad resulta de aplicar la continuidad uniforme de f y p al segundo término y la convergencia uniforme de $(p_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ con la continuidad uniforme de f al primer término.

- 2) Veamos que $p(x)$ verifica la forma integral de (PC), es decir, la ecuación (2.1). Por (2.3), tenemos que

$$p_{k_j}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x q_{k_j}(s) ds.$$

Basta con tomar límites cuando $j \rightarrow \infty$ a ambos lados de la igualdad, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, dado que $|q_{k_j}| \leq M$, y también que $(q_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a q con $q(x) = f(x, p(x))$, por lo que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x q_{k_j}(s) ds = \int_{x_0}^x \lim_{j \rightarrow \infty} q_{k_j}(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, p(s)) ds.$$

Así, obtenemos finalmente que

$$p(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, p(s)) ds,$$

y, efectivamente, $p(x)$ verifica la ecuación integral del problema de Cauchy.

Por lo tanto, aplicando la Proposición 2.1.2, obtenemos que $p(x)$ es solución del problema de Cauchy y, así, queda probado el Teorema de existencia local de Cauchy-Peano. \square

Observamos que, aunque hemos demostrado que existe una solución para (PC) obteniéndola mediante la convergencia de una sucesión de poligonales, no necesariamente toda solución del problema (PC) es límite de alguna sucesión de poligonales de Euler [7]. Un contraejemplo es el siguiente, conocido como ejemplo de Peano.

Ejemplo 2.2.2. *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = 3y^{\frac{2}{3}}(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

donde $x \in \mathbb{R}$. Se puede comprobar que todas las poligonales de Euler coinciden directamente con la solución trivial $y \equiv 0$, debido a que $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ e $y_0 = 0$, y al calcular $p_k(x)$ obtenemos siempre cero, por lo que la solución $y(x) = x^3$ no puede ser límite de ninguna sucesión de poligonales. Notemos que ya hemos encontrado dos soluciones de (2.6), por lo que el Teorema local de Cauchy-Peano, Teorema 2.2.1, no es suficiente para conseguir la unicidad de solución, por lo que tendremos que exigir alguna hipótesis adicional, como veremos en el Capítulo 3.

Para finalizar esta sección, veamos algunos ejemplos sencillos de aplicación del Teorema 2.2.1, donde compararemos la evolución de las poligonales de Euler para ciertos valores de k con la solución de cada problema de Cauchy. Además, en el primer ejemplo, compararemos los errores absolutos y relativos cometidos al calcular dichas poligonales.

Ejemplo 2.2.3. *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = x + y$ está definida en \mathbb{R}^2 , entorno de $(0, 0)$. En primer lugar, podemos calcular fácilmente la solución de este problema, que viene definida por

$$y(x) = e^x - 1 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Apliquemos ahora el Teorema 2.2.1. Podemos tomar $a, b = 1$ de manera que $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, $M = 2$ y $h = b/M = 1/2$. Así, la solución que queremos aproximar estará definida en el intervalo $I = [-1/2, 1/2]$. Notemos que, si tomamos $a = 1$ y $b = s$ cualquiera, resulta que $M = s + 1$ y $h = \min\{1, s/(s + 1)\} = s/(s + 1)$, que converge a 1 cuando s tiende a infinito. De hecho, para dos valores cualesquiera de a y b , seguimos obteniendo que $h < 1$. Por ello, con este método solo podemos garantizar la existencia de solución en un intervalo $I = [-h, h] \subset [-1, 1]$.

El intervalo obtenido con el Teorema 2.2.1 es muy pequeño en comparación con el dominio de definición de la solución, por lo que nos conviene encontrar otros resultados un poco más exigentes que nos permitan garantizar la existencia de solución en un intervalo más grande. Esto lo veremos en dos resultados posteriores: el Teorema global de Cauchy-Peano, Teorema 2.3.1, y el conocido como Teorema global de Picard-Lindelöf, Teorema 3.3.1.

Ahora, en la Figura 2.3, compararemos las poligonales hasta $k = 5$ y $k = 10$ para comprobar su evolución y cómo efectivamente se aproximan a la solución.

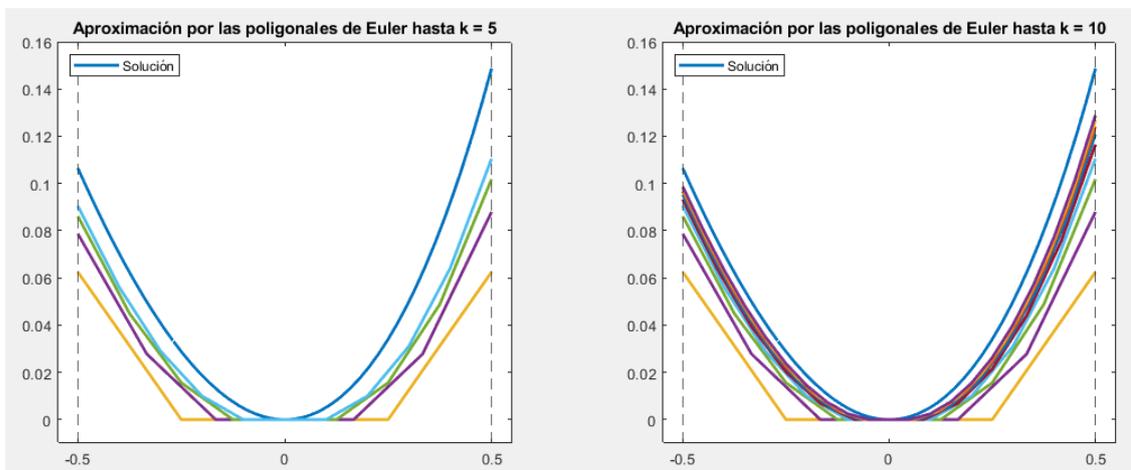


Figura 2.3: Poligonales de Euler hasta $k = 5$ y $k = 10$.

Podemos observar en la Figura 2.3 que las primeras poligonales obtenidas para valores de k muy bajos son aproximaciones muy simples, como era de esperar dado que comenzamos usando muy pocos segmentos para aproximar la curva. Notemos que estas poligonales se sitúan debajo de la solución local, y que a medida que aumentamos k se van acercando de forma uniforme, lo que se distingue con más claridad en la gráfica a la izquierda, al haber solo cuatro poligonales.

Al aumentar un poco el número de segmentos que componen la poligonal, vemos que las aproximaciones son cada vez mejores, habiendo un gran contraste al aumentar el valor de k en solo 5 unidades hasta 10, como vemos en la Figura 2.3. También podemos ver cómo las poligonales se van juntando más entre sí, sugiriendo la convergencia uniforme que se prueba, por el Teorema de Cauchy-Peano 2.2.1.

Esta idea de aproximar la solución buscada mediante las poligonales de Euler nos puede recordar al método numérico simple de Euler, donde se parte del punto (x_0, y_0) para calcular estimaciones de los puntos siguientes, a través de la recurrencia $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$ con $k \in \mathbb{N}$. Este proceso tiene un error de orden $O(h_k)$, siendo $h_k = h/k$ el paso o distancia entre cada par de puntos consecutivos.

Esto nos lleva a pensar en cómo serán los errores relativos y absolutos de las poligonales de Euler, en comparación con los verdaderos valores de la solución $y(x)$. Por ello, comparamos en el Cuadro 2.1, para cada valor de k , el máximo valor de la diferencia, en valor absoluto, de la solución y la poligonal. Dicho máximo se alcanza en el extremo $\hat{x} = 1/2$.

k	$p_k(\hat{x})$	\hat{x}	$y(\hat{x})$	E_A	E_R
1	0	0.5	0.1487	0.1487	1
2	0.0625	0.5	0.1487	0.0862	0.5798
3	0.0880	0.5	0.1487	0.0608	0.4085
4	0.1018	0.5	0.1487	0.0469	0.3155
5	0.1105	0.5	0.1487	0.0382	0.2569

Cuadro 2.1: Comparación de errores para los primeros valores de k .

Como era de esperar, tanto los errores absolutos E_A como los errores relativos E_R descienden a medida que aumenta el valor de k , lo cual refleja que efectivamente las poligonales se van aproximando más a la solución.

Ejemplo 2.2.4. Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y^2(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ está definida en \mathbb{R}^2 , entorno de $(0, 0)$. En este caso, no se conoce la solución del problema, por lo que no podremos comprobar cómo se aproximan a la misma sino que tendremos que imaginarnos la curva solución a partir de las poligonales.

De nuevo, elegimos $a, b = 1$ de manera que $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset D$, $M = 2$ y $h = b/M = 1/2$. De esta forma, la solución desconocida que vamos a aproximar está definida en el intervalo $I = [-1/2, 1/2]$. Al igual que en el apartado anterior, para todo $a, b > 0$ resulta que $h < 1$, por lo que siempre se verifica $I \subset [-1, 1]$.

A continuación, en la Figura 2.4, representamos las poligonales para ver cómo evolucionan.

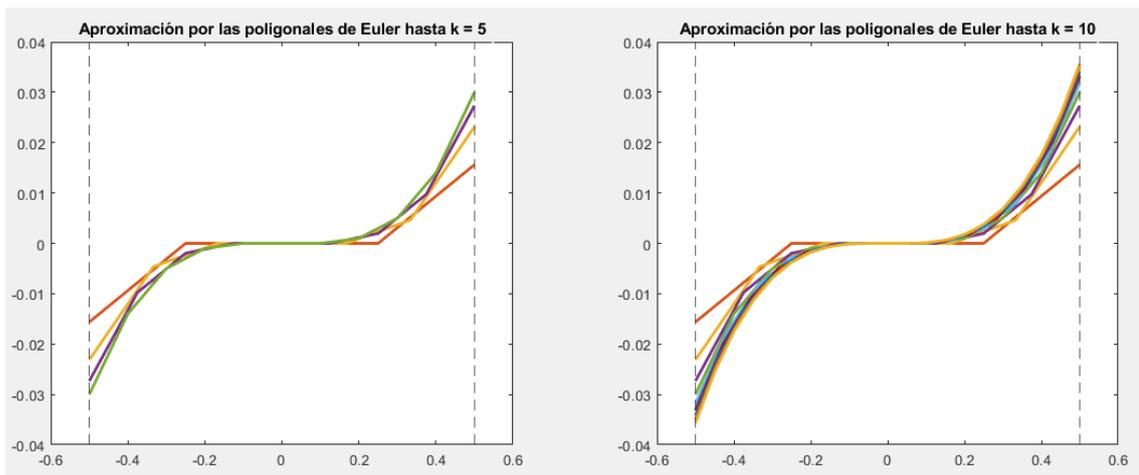


Figura 2.4: Poligonales de Euler hasta $k = 5$ y $k = 10$.

A partir de la Figura 2.4 nos podemos ir haciendo una idea de cómo va a ser la solución a la que se van acercando las poligonales, por el Teorema de Cauchy-Peano 2.2.1. Al aumentar el valor de k , vamos viendo cómo las poligonales se van juntando más entre sí, convergiendo poco a poco a una solución.

Notemos que en el Ejemplo 2.2.3 hemos obtenido que el intervalo I en el que podemos definir la solución del problema a través del Teorema 2.2.1 siempre está contenido en $[-1, 1]$, pese a que su solución está definida en todo \mathbb{R} . Se trata de un claro ejemplo en el cual este teorema puede no ser suficiente, y esto nos lleva a querer encontrar soluciones globales, a través de resultados que impongan más condiciones, como veremos en la Sección 2.3 con el Teorema global de Cauchy-Peano, Teorema 2.3.1, y en el Capítulo 3 con el Teorema global de Picard-Lindelöf, Teorema 3.3.1.

Por último, en el Ejemplo 2.2.5 introducimos brevemente el interés en la prolongabilidad de soluciones, pese a que no lo vamos a trabajar en esta memoria. Se pueden encontrar diversos resultados relativos a la prolongabilidad de soluciones en las referencias [4] y [9], entre otros.

Ejemplo 2.2.5. Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = y^2$ está definida en \mathbb{R}^2 , entorno de $(0, 1)$. Su solución es la función

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-\infty, 1).$$

El Teorema local de Cauchy-Peano, Teorema 2.2.1, solo nos permite definirla en un intervalo $I = [-h, h] \subset [-1, 1]$ centrado en $x_0 = 0$. Sin embargo, si volvemos a aplicar dicho teorema tomando como condición inicial, por ejemplo, el punto $(-1/2, y(-1/2)) = (-1/2, 2/3)$, podríamos obtener un nuevo intervalo I . Así, aplicando este método sucesivamente, podríamos extender el dominio en el que podemos definir la solución. Este proceso se conoce como prolongar una solución.

2.3. Existencia de solución global

A continuación, vemos una versión ligeramente distinta del Teorema 2.2.1, donde vamos a pedir que la función f esté definida en una banda $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ y que además de continua esté acotada. Este resultado nos permite garantizar la existencia de una solución definida en todo el intervalo $[a, b]$, y es por ello que llamamos Teorema global de Cauchy-Peano al Teorema 2.3.1. Para su demostración definimos una sucesión de funciones distintas de las poligonales de Euler y que, por el Teorema de Arzelà-Ascoli, el Teorema 1.2.6, tiene una subsucesión que converge a una función que verifica la forma integral de Cauchy. Señalemos que, existen otras demostraciones distintas del mismo teorema (ver páginas 89-90 de [4]), aunque hemos elegido la siguiente por ser una aplicación más del Teorema 1.2.6.

Teorema 2.3.1. (Teorema global de Cauchy-Peano). Sea (PC) un problema de Cauchy donde $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y acotada, tal que $x_0 \in [a, b]$, con $a < b$. Entonces, existe al menos una solución de (PC) y está definida en el intervalo $[a, b]$.

Demostración. Teniendo en cuenta la forma integral de (PC) , vamos a definir una nueva sucesión de funciones a partir de la cual podamos llegar a la solución buscada. Comenzaremos tomando esta sucesión $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en el intervalo $[x_0, b]$, a la derecha de x_0 y, después, repetiremos el mismo proceso en $[a, x_0]$.

En primer lugar, en el intervalo $[x_0, b]$, tomamos $h_k := (b - x_0)/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y definimos

$$\phi_k(x) := \begin{cases} y_0 & \text{si } x_0 \leq x \leq x_0 + h_k \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds & \text{si } x_0 + h_k < x \leq b. \end{cases} \quad (2.7)$$

Esto es, para cada k , la función toma el valor inicial y_0 en todos los puntos hasta $x_0 + h_k$ y, a partir de ahí, vamos añadiendo la integral de la función f evaluada entre x_0 y x menos el paso h_k . Notemos que, a medida que aumenta el valor de k , el valor de $x - h_k$ se va aproximando más a x , con lo que nos acercamos más a la función que queremos encontrar como solución del problema.

Notemos que realmente ϕ_k está definida a trozos de tamaño h_k , de manera que primero la definimos en $[x_0, x_0 + h_k]$, luego extendemos la definición a $[x_0 + h_k, x_0 + 2h_k]$, después a $[x_0 + 2h_k, x_0 + 3h_k]$, y así sucesivamente, hasta $[x_0 + (k-1)h_k, b]$. De esta manera,

- Para $k = 1$, tenemos que $\phi_1(x) = y_0$ en todo $[x_0, b]$.
- Para $k = 2$, tenemos $h_2 = (b - x_0)/2$ y entonces $\phi_2(x) = y_0$ si $x_0 \leq x \leq (x_0 + b)/2$.
Por otro lado, en el caso $(x_0 + b)/2 < x \leq b$, como $x_0 \leq s \leq x - (b - x_0)/2$ entonces obtenemos que $x_0 < s \leq (x_0 + b)/2$, donde $\phi_2(s)$ ya está definida, tomando el valor de y_0 . Así, tenemos

$$\phi_2(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x_0 \leq x \leq \frac{x_0+b}{2} \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-h_2} f(s, y_0) ds & \text{si } \frac{x_0+b}{2} < x \leq b. \end{cases}$$

- Para $k = 3$, tenemos $h_3 = (b - x_0)/3$ y entonces $\phi_3(x) = y_0$ si $x_0 \leq x \leq x_0 + h_3$.
El caso $x_0 + h_3 < x \leq b$ realmente se divide en dos partes de tamaño h_3 . Así, distinguimos los intervalos $x_0 + h_3 < x \leq x_0 + 2h_3$ y $x_0 + 2h_3 < x \leq b$.
En primer lugar, si $x_0 + h_3 < x \leq x_0 + 2h_3$, como $x_0 \leq s \leq x - h_3$ entonces obtenemos que $x_0 < s \leq x_0 + h_3$, donde $\phi_3(s)$ ya está definida y toma el valor de y_0 .
Ahora, en $x_0 + 2h_3 < x \leq b$, como $x_0 \leq s \leq x - h_3$ entonces obtenemos que $x_0 < s \leq x_0 + 2h_3$, donde ya hemos definido $\phi_3(s)$ en los casos anteriores.
Finalmente, nos queda

$$\phi_3(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x_0 \leq x \leq x_0 + h_3 \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-h_3} f(s, y_0) ds & \text{si } x_0 + h_3 < x \leq x_0 + 2h_3 \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-h_3} f(s, \phi_3(s)) ds & \text{si } x_0 + 2h_3 < x \leq b. \end{cases}$$

Así, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se puede probar que todos los puntos $(s, \phi_k(s))$ en los que evaluamos f ya los tenemos definidos previamente, por lo que las funciones ϕ_k están bien definidas. Además, son funciones continuas, ya que, fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 + h_k)^+} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0 + h_k - h_k} f(s, \phi_k(s)) ds = y_0,$$

y esto también se cumple en cada subintervalo de $[x_0 + h_k, b]$, por ser f continua.

Ahora que hemos definido estas funciones ϕ_k , veamos que la sucesión $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ verifica las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6.

Veamos, en primer lugar, que se trata de una sucesión equicontinua. Como sabemos que f es una función acotada, sabemos que existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y) \in [x_0, b] \times \mathbb{R}^n$. Entonces, por cómo hemos definido $\phi_k(x)$, tenemos que, para todo k y para todos $x, x' \in [x_0, b]$,

$$|\phi_k(x) - \phi_k(x')| \leq M|x - x'|. \quad (2.8)$$

Esto lo podemos comprobar por casos, suponiendo que $x > x'$:

- Si $x, x' \in [x_0, x_0 + h_k]$ entonces $\phi_k(x) = \phi_k(x') = y_0$, por lo que $|\phi_k(x) - \phi_k(x')| = 0$.
- Si $x' \in [x_0, x_0 + h_k]$ pero $x \in (x_0 + h_k, b]$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi_k(x) - \phi_k(x')| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds - y_0 \right| = \left| \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right| \leq \\ &\leq M|x_0 - x + h_k| \leq M|x - x'|. \end{aligned}$$

- Si $x, x' \in (x_0 + h_k, b]$, entonces resulta que

$$\begin{aligned} |\phi_k(x) - \phi_k(x')| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds - y_0 - \int_{x_0}^{x'-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right| = \\ &= \left| \int_{x'-h_k}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right| \leq M|x - x'|. \end{aligned}$$

Esto implica por (1.1) que $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua.

Por otro lado, también se cumple que

$$|\phi_k(x)| \leq |y_0| + M(b - x_0),$$

lo que podemos comprobar tomando x_0 , aplicando la desigualdad triangular y teniendo en cuenta (2.8) y que $|x - x_0| \leq b - x_0$:

$$|\phi_k(x)| = |\phi_k(x) - y_0 + y_0| \leq |\phi_k(x) - y_0| + |y_0| \leq M|x - x_0| + |y_0| \leq M(b - x_0) + |y_0|.$$

Así, $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ también es uniformemente acotada.

Por tanto, tomando $E = [x_0, b]$ acotado, tenemos las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 1.2.6, y obtenemos que existe una subsucesión que llamamos $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ y que converge uniformemente en $[x_0, b]$ a una cierta función $\phi : [x_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, que queremos que sea solución de (PC).

Ahora, para $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$, deducimos directamente de la definición (2.7) que

$$\phi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_m(s)) ds - \int_{x-h_m}^x f(s, \phi_m(s)) ds. \quad (2.9)$$

Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, lo que podemos hacer por ser $|f(x, y)| \leq M$ en $[x_0, b] \times \mathbb{R}^n$, y teniendo en cuenta posteriormente que f es continua y que $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función ϕ , tenemos que para todo $x \in [x_0, b]$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, \phi_m(s)) ds = \int_{x_0}^x \lim_{m \rightarrow \infty} f(s, \phi_m(s)) ds = \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds. \quad (2.10)$$

Además, como $|f(x, \phi)| \leq M$, tenemos que

$$0 \leq \left| \int_{x-h_m}^x f(s, \phi_m(s)) ds \right| \leq Mh_m,$$

y, aplicando límites cuando m tiende a infinito, se tiene que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x-h_m}^x f(s, \phi_m(s)) ds = 0. \quad (2.11)$$

Por último, basta con aplicar límites cuando m tiende a infinito en (2.9), teniendo en cuenta la convergencia de $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ a la función ϕ , junto con las deducciones (2.10) y (2.11):

$$\phi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_m(s)) ds - \int_{x-h_m}^x f(s, \phi_m(s)) ds \right) =$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds - 0.$$

Por lo tanto, para todo $x \in [x_0, b]$, se cumple

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds,$$

con lo que, por la Proposición 2.1.2, $\phi(x)$ ha de ser solución de (PC) para $x \in [x_0, b]$.

Análogamente, en el intervalo $[a, x_0]$ obtenemos una nueva sucesión $(\tilde{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde el paso es $\tilde{h}_k = (x_0 - a)/k$. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{\phi}_k(x) := \begin{cases} y_0 & \text{si } x_0 - h_k \leq x \leq x_0 \\ y_0 - \int_{x+h_k}^{x_0} f(s, \tilde{\phi}_k(s)) ds & \text{si } a \leq x < x_0 - h_k. \end{cases} \quad (2.12)$$

Así, repitiendo el mismo proceso, encontramos una solución $\tilde{\phi}$ de (PC) definida en $[a, x_0]$.

Notemos que $h_k = \tilde{h}_k$ en el caso en el que $[a, b]$ sea simétrico respecto de x_0 . \square

Hemos visto que este teorema se demuestra obteniendo la solución del problema de Cauchy aproximando por funciones definidas a trozos, al igual que el Teorema local de Cauchy-Peano, Teorema 2.2.1, que utiliza las poligonales de Euler. Claramente, las aproximaciones que se utilizan en cada uno de estos dos teoremas son distintas. A continuación, presentamos un ejemplo en el cual vamos a construir algunos términos de la sucesión.

Ejemplo 2.3.2. *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \cos^2(y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = \cos^2(y)$ está definida, es continua y acotada en cualquier banda de la forma $[-n, n] \times \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. Por ello, podemos aplicar el Teorema 2.3.1, obteniendo que existe al menos una solución del problema que está definida en $[-n, n]$ para todo $n \in \mathbb{R}$, y por tanto en \mathbb{R} . De hecho, podemos calcular su solución, que viene dada por

$$\phi(x) = \arctan(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vamos a estudiar cómo serían las aproximaciones ϕ_k de la solución para los primeros valores de k , siguiendo las definiciones dadas en (2.7) y (2.12) con $[a, b] = [-n, n]$ para un $n \in \mathbb{N}$ fijo. Notemos que $x_0 = 0$ es el punto medio de $[-n, n]$, con lo que $h_k = \tilde{h}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

- Para $k = 1$, claramente tenemos que $\phi_1(x) = 0$ para todo $x \in [-n, n]$.
- Para $k = 2$, tenemos que $h_2 = \tilde{h}_2 = n/2$. En $[0, n]$, a la derecha de $x_0 = 0$, tenemos que $\phi_2(x) = 0$ si $0 \leq x \leq n/2$. En el caso $n/2 < x \leq n$, como $0 \leq s \leq x - n/2$ resulta que $0 \leq s \leq n/2$, por lo que estamos integrando $f(s, 0) = \cos^2(0) = 1$. Por lo tanto, la función $\phi_2(x)$ será

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n}{2} \\ x - \frac{n}{2} & \text{si } \frac{n}{2} < x \leq n. \end{cases}$$

Análogamente, en $[-n, 0]$, obtenemos

$$\tilde{\phi}_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{n}{2} \leq x \leq 0 \\ x + \frac{n}{2} & \text{si } -n \leq x < -\frac{n}{2}. \end{cases}$$

- Para $k = 3$, tenemos que $h_3 = \tilde{h}_3 = n/3$. De nuevo, empezando por $[0, n]$, resulta que

$$\phi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n}{3} \\ 0 + \int_0^{x-\frac{n}{3}} f(s, \phi_3(s)) ds & \text{si } \frac{n}{3} < x \leq \frac{2n}{3} \\ 0 + \int_0^{x-\frac{n}{3}} f(s, \phi_3(s)) ds & \text{si } \frac{2n}{3} < x \leq n. \end{cases}$$

En el caso $n/3 < x \leq 2n/3$, como $0 \leq s \leq x - n/3$, entonces estamos integrando respecto de s cuando $0 \leq s \leq n/3$, por lo que integramos $f(s, 0) = 1$, y nos queda la función $x - n/3$. Por otro lado, si $2n/3 < x \leq n$, donde $0 \leq s \leq x - n/3$, vamos a integrar en los intervalos $0 \leq s \leq n/3$ y $n/3 \leq s \leq 2n/3$. Por tanto,

$$0 + \int_0^{x-\frac{n}{3}} f(s, \phi_3(s)) ds = \int_0^{\frac{n}{3}} f(s, 0) ds + \int_{\frac{n}{3}}^{x-\frac{n}{3}} \cos^2\left(s - \frac{n}{3}\right) ds = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2x - \frac{4n}{3}\right).$$

Finalmente, nos queda

$$\phi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{n}{3} \\ x - \frac{n}{3} & \text{si } \frac{n}{3} < x \leq \frac{2n}{3} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2x - \frac{4n}{3}\right) & \text{si } \frac{2n}{3} < x \leq n. \end{cases}$$

Análogamente, en $[-n, 0]$, obtenemos

$$\tilde{\phi}_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{n}{3} \leq x \leq 0 \\ x + \frac{n}{3} & \text{si } -\frac{2n}{3} \leq x < -\frac{n}{3} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2x + \frac{4n}{3}\right) & \text{si } -n \leq x < -\frac{2n}{3}. \end{cases}$$

Como vemos, en cuanto aumentamos un poco el valor de k el desarrollo de las funciones $\phi_k(x)$ y $\tilde{\phi}_k(x)$ se vuelve demasiado complicado como para hacer los cálculos a mano.

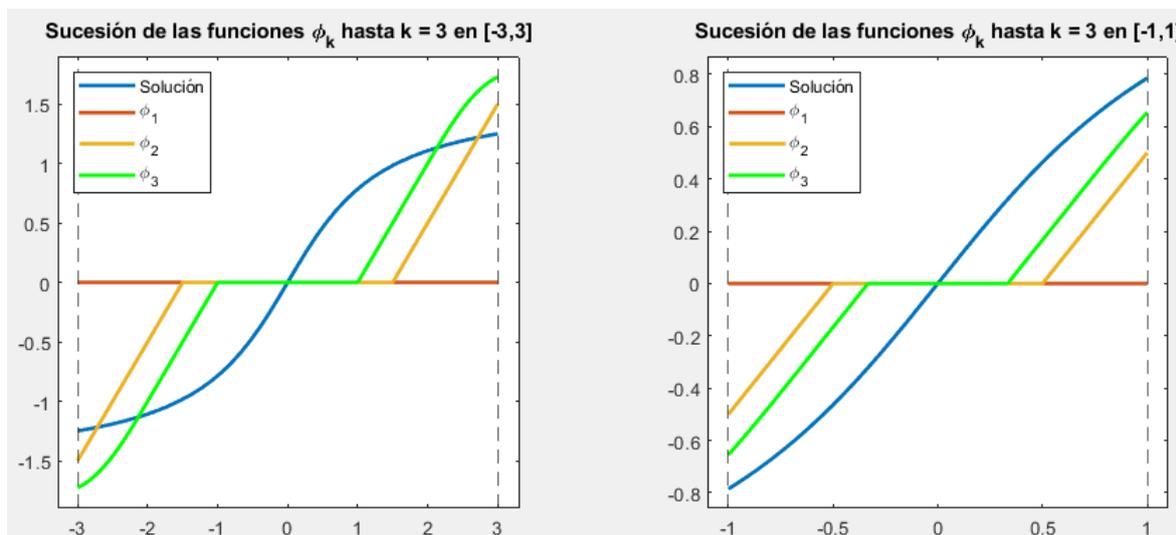


Figura 2.5: Gráfica de las funciones ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 , junto con la función solución.

En la Figura 2.5 vemos la representación gráfica de estas funciones que acabamos de calcular en los intervalos $[-1, 1]$ y $[-3, 3]$. Vemos que para los primeros valores de k las aproximaciones son peores a medida que n aumenta, con lo que necesitaríamos tomar un k bastante mayor para poder acercarnos a la solución.

Capítulo 3

Teoremas de existencia y unicidad de soluciones

Hemos visto en el capítulo anterior algunos teoremas que nos garantizan la existencia de soluciones de un problema de Cauchy. En este capítulo, vamos a ampliar estos resultados para probar también la unicidad de solución, añadiendo la condición de que f sea lipschitziana. De nuevo, veremos tanto la versión local como la global, junto con algunos ejemplos y aplicaciones. Para todo ello, seguiremos principalmente las referencias [4], [9], [11], [12], entre otras.

3.1. Unicidad de solución

En esta sección, vamos a introducir las definiciones de función lipschitziana y localmente lipschitziana respecto de una variable en un conjunto. Trabajaremos bastante sobre estos conceptos, mediante ejemplos y observaciones, dado que van a resultar clave en las secciones posteriores. Además, repasaremos la conocida como desigualdad de Gronwall, que utilizaremos para demostrar el último resultado que veremos en esta sección, que nos permitirá probar la unicidad de solución bajo una cierta condición. Las principales fuentes en las que nos basaremos son [4], [6], [9], [11].

Veamos, en primer lugar, qué significa que una función sea lipschitziana o localmente lipschitziana respecto de una variable.

Definición 3.1.1. (Función lipschitziana). Sea $f(x, y)$ una función tal que $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que f es lipschitziana o globalmente lipschitziana respecto de y en E si existe una constante $L > 0$ tal que para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in E$ se cumple que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \quad (3.1)$$

Definición 3.1.2. (Función localmente lipschitziana). Sea $f(x, y)$ una función tal que $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que f es localmente lipschitziana respecto de y en E si para todo $(x, y) \in E$ existe un entorno $D \subset E$ de (x, y) de manera que f es lipschitziana en D .

Además, esta constante que nos permite determinar si una función es lipschitziana recibe el nombre de constante de Lipschitz, como vemos en la siguiente definición.

Definición 3.1.3. (Constante de Lipschitz). Llamamos constante de Lipschitz al valor de L que verifica la condición (3.1).

Notemos que la constante de Lipschitz correspondiente a una función $f(x, y)$ lipschitziana respecto de y no es única, ya que si $(x, y_1), (x, y_2) \in E$ entonces

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \leq (L + s)|y_1 - y_2|, \quad (3.2)$$

para cualquier $s \in \mathbb{N}$.

Como es de esperar, si una función f es globalmente lipschitziana respecto de y entonces también lo es localmente, pero no al revés. Esto se debe a que si una función es localmente lipschitziana, existe una constante de Lipschitz para f en un entorno de cada punto de E , pero no siempre podemos acotar todas estas constantes. Esto lo podemos ver en el segundo apartado del Ejemplo 3.1.4, junto con otros ejemplos donde aplicamos estos conceptos.

Ejemplo 3.1.4.

- I) La función $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^2$ es lipschitziana con constante de Lipschitz 2 en $\mathbb{R} \times [0, 1]$ tanto local como globalmente, puesto que

$$|y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq 2|y_1 - y_2|,$$

para todos $y_1, y_2 \in [0, 1]$.

- II) La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^n$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$ es localmente lipschitziana en \mathbb{R}^2 pero no lo es globalmente. Dados $y_1, y_2 \in A$ compacto de \mathbb{R} ,

$$|y_1^n - y_2^n| \leq |y_1 - y_2|(|y_1|^{n-1} + |y_1|^{n-2}|y_2| + \dots + |y_1||y_2|^{n-2} + |y_2|^{n-1}) \leq L_A|y_1 - y_2|,$$

pues el segundo factor está acotado en A por una constante que depende del conjunto A , a la que llamamos L_A . Es por ello que f es localmente lipschitziana respecto de y .

Sin embargo, no podemos acotar este valor de L_A de manera que la condición de Lipschitz se verifique en todo \mathbb{R} . Si hacemos que la norma de y_1 tienda a infinito, resulta que

$$|y_1|^{n-1} \rightarrow \infty,$$

para $n \geq 2$, con lo que f no es globalmente lipschitziana respecto de y en \mathbb{R}^2 .

- III) La función $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{y} + x$ no es localmente lipschitziana en $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Supongamos por reducción a lo absurdo que sí lo es, entonces, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $y_1, y_2 \in [0, 1]$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|\sqrt{y_1} + x - \sqrt{y_2} - x| = |\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Sin embargo, si tomamos $y_2 = 0$, tenemos que

$$|\sqrt{y_1}| \leq L|y_1| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y_1}} \leq L,$$

pero resulta que, si hacemos que $y_1 \in (0, 1)$ tienda a cero, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{y_1}} \rightarrow \infty,$$

lo cual es absurdo. Por tanto, f no es localmente lipschitziana respecto de y en $\mathbb{R} \times [0, 1]$ y tampoco lo es globalmente.

Notemos que aunque una función $f(x, y)$ sea lipschitziana respecto de y en E , esto no significa que también sea continua en E , puesto que no se establece ninguna condición entre dos puntos de la forma (x_1, y) y (x_2, y) distintos. Lo mismo se tiene si f es localmente lipschitziana, por el mismo motivo. Un contraejemplo donde comprobamos todo esto es el siguiente.

Ejemplo 3.1.5. La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} -y & \text{si } x \leq 0 \\ y & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

claramente no es continua en los puntos con $x = 0$, $y \neq 0$. Sin embargo, si tomamos $\varepsilon > 0$ cualquiera, $\delta = \varepsilon$ y los puntos (x, y_1) , (x, y_2) tales que $|y_1 - y_2| < \delta$ y con $x \leq 0$, tenemos que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |-y_1 + y_2| < \delta = \varepsilon$. Por otro lado, si tomamos los puntos (x, y_1) , (x, y_2) con $x > 0$ tales que $|y_1 - y_2| < \delta$, resulta que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 - y_2| < \delta = \varepsilon$, luego también se verifica la condición necesaria para que f sea lipschitziana respecto de y . Por lo tanto, f es lipschitziana respecto de y en \mathbb{R}^2 (y , por ello, también lo es localmente), pero no es continua en \mathbb{R}^2 .

Además, como es lógico, la continuidad de una función $f(x, y)$ no implica que ésta sea lipschitziana respecto de y , como se puede ver en el tercer apartado del Ejemplo 3.1.4, por lo que la condición de Lipschitz, local o global, no implica continuidad, y tampoco se cumple su recíproco.

Sin embargo, si $f : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con E abierto verifica que todas sus derivadas parciales existen y son continuas, entonces tenemos que f es localmente lipschitziana respecto de y . La prueba de esta propiedad se puede encontrar en la página 121 de [9] y en la página 52 de [12]. El recíproco no se cumple, teniendo como contraejemplo el Ejemplo 3.1.5. Además, si E es convexo y estas derivadas parciales también están acotadas entonces f será globalmente lipschitziana respecto de y en E . Su demostración se puede encontrar en la página 40 de [9] y en la página 52 de [12], donde también se incluye la prueba del recíproco.

A continuación repasamos el conocido como Lema de Gronwall o Desigualdad de Gronwall, que ya se ha visto y demostrado en la asignatura de Teoría Cualitativa de EDO [3], motivo por el cual no incluiremos su demostración en esta memoria, aunque se puede encontrar en [11]. Dada una función real u acotada superiormente por una función integral que depende de u , este lema nos permite obtener una nueva cota que no dependa de u , sino de otras funciones ϕ y k definidas en el mismo intervalo.

Lema 3.1.6. (Desigualdad de Gronwall). Sean $u, \phi, k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones continuas, con $k(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Si se verifica que

$$0 \leq u(x) \leq \phi(x) + \int_a^x k(s)u(s) ds \quad \forall x \in [a, b],$$

entonces

$$0 \leq u(x) \leq \phi(x) + \int_a^x k(s)\phi(s)e^{\int_s^x k(z) dz} ds \quad \forall x \in [a, b].$$

Este lema nos resultará clave a la hora de demostrar el siguiente resultado, el Teorema 3.1.7, ya que nos permitirá probar la unicidad de solución de un problema de Cauchy.

Teorema 3.1.7. *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función lipschitziana respecto de y en D , con $(x_0, y_0) \in D$. Si $y_1, y_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son dos soluciones de (PC) con $x_0 \in I$ e I un intervalo, entonces $y_1(x) = y_2(x)$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Sea $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Como y_1 e y_2 son soluciones de (PC), sabemos que $v(x_0) = y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0$. Además, si derivamos la función v obtenemos que

$$v'(x) = y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)),$$

con $x \in I$. Ahora, aplicando normas y teniendo en cuenta que f es lipschitziana respecto de y en D , resulta que para todo $x \in I$ se tiene

$$|v'(x)| = |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq L|y_1(x) - y_2(x)| = L|v(x)|. \quad (3.3)$$

Por tanto, si $x \geq x_0$ entonces

$$|v(x)| = |v(x) - v(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x v'(s) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |v'(s)| ds \leq \int_{x_0}^x L|v(s)| ds,$$

con lo que nos basta con aplicar la Desigualdad de Gronwall, Lema 3.1.6, de manera que $u(x) = |v(x)|$, $\phi(x) = 0$ y $k(x) = L > 0$. Así, obtenemos que

$$0 \leq |v(x)| \leq \int_{x_0}^x 0 ds = 0,$$

y entonces ha de ser $v(x) = 0$ para todo $x \in I$ con $x \geq x_0$, lo que implica que $y_1(x) = y_2(x)$.

Análogamente, para $x < x_0$ y teniendo en cuenta la desigualdad (3.3), resulta

$$|v(x)| = |v(x_0) - v(x)| = \left| \int_x^{x_0} v'(s) ds \right| \leq \int_x^{x_0} |v'(s)| ds \leq \int_x^{x_0} L|v(s)| ds,$$

y por el Lema 3.1.6, tomando las mismas funciones $u(x)$, $\phi(x)$ y $k(x)$ que en el caso $x \geq x_0$, obtenemos que $v(x) = 0$ para $x < x_0$.

Así, tenemos que $y_1(x) = y_2(x)$ para todo $x \in I$ y, por lo tanto, queda probado que ambas soluciones han de ser la misma, por lo que el problema de Cauchy (PC) tiene una única solución. \square

Podemos relacionar este resultado con el Ejemplo 2.2.2, donde teníamos la función $f(x, y) = 3y^{2/3}$ con la condición inicial $y(0) = 0$. Gracias al Teorema 3.1.7 podemos deducir que f no es lipschitziana respecto de y en \mathbb{R} , puesto que si lo fuera el correspondiente problema de Cauchy tendría una única solución, pero ya vimos en el Ejemplo 2.2.2 que tanto la función $y \equiv 0$ como $y(x) = x^3$, con $x \in \mathbb{R}$, son soluciones del problema.

Recordemos los teoremas local y global de Cauchy-Peano, es decir, los Teoremas 2.2.1 y 2.3.1, donde a través de unas ciertas sucesiones aproximábamos y encontrábamos al menos una solución de un problema (PC). Si a cualquiera de estos dos teoremas le añadimos la condición de que la función f sea lipschitziana, en virtud del Teorema 3.1.7 que la solución encontrada es además única.

3.2. Existencia y unicidad de solución local

En esta sección nos vamos a centrar en probar el Teorema local de Picard-Lindelöf, que nos va a garantizar la existencia de una única solución local de (PC), definida en un entorno de x_0 . Así, obtendremos el mismo resultado que cuando aplicamos el Teorema local de Cauchy-Peano (Teorema 2.2.1) con el Teorema 3.1.7, pese a que vamos a utilizar funciones distintas para aproximar la solución, los conocidos como iterantes de Picard. Además, veremos un par de ejemplos en los que aplicaremos este resultado y comprobaremos su veracidad. Para ello, nos basamos generalmente en las referencias [4], [9], [11].

Antes de comenzar con el primer teorema de existencia y unicidad, vamos a probar el conocido como Criterio de Weierstrass o Prueba M de Weierstrass, que nos permite garantizar la convergencia uniforme de una serie de funciones. Esto nos servirá para poder demostrar después la existencia y unicidad de solución local, en el primer teorema de Picard-Lindelöf.

Proposición 3.2.1. (Criterio de Weierstrass). *Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $|f_k(x)| \leq M_k$ para cada k y para todo $x \in E$. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniforme y absolutamente en E .*

Demostración. Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $|f_k(x)| \leq M_k$ para todo k y todo $x \in E$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, entonces, por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ también converge, luego $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge absolutamente para todo $x \in E$. Nos queda por comprobar que esta convergencia es uniforme.

Como $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un k_0 tal que para todo $m, p \geq k_0$ con $p > m$ se tiene que $\sum_{k=m+1}^p M_k < \varepsilon$. Entonces, para $x \in E$ cualquiera y tomando las sumas parciales, $S_p(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)$, tenemos que

$$|S_p(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=1}^p f_k(x) - \sum_{k=1}^m f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^p f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^p |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^p M_k < \varepsilon,$$

luego las sumas parciales forman una sucesión uniformemente de Cauchy en E . Ahora, como $S(x)$ es el límite de las sumas parciales, pasando al límite de la expresión anterior, se tiene

$$|S(x) - S_m(x)| = \left| \lim_{p \rightarrow \infty} S_p(x) - S_m(x) \right| = \lim_{p \rightarrow \infty} |S_p(x) - S_m(x)| \leq \varepsilon,$$

por lo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente en E . □

A continuación, vamos a enunciar y demostrar el Teorema local de Picard-Lindelöf, que afirma la existencia y unicidad de una solución local del problema de Cauchy (PC). Para ello, necesitaremos que la función f sea continua y lipschitziana. Definiremos los conocidos como iterantes de Picard, que nos servirán para aproximar la solución buscada, haciendo uso del Criterio de Weierstrass, Proposición 3.2.1, y de la forma integral de (PC), aplicando la Proposición 2.1.2.

Teorema 3.2.2. (Teorema local de Picard-Lindelöf). *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y lipschitziana respecto de y en D , con D entorno de (x_0, y_0) . Entonces, existe una única solución local de (PC) y está definida en el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, con $h = \min\{a, b/M\}$, siendo $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset D$ y $M = \max_R |f(x, y)|$.*

Demostración. Sea el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. Tomamos una función $g_0(x)$ continua definida en I y con $g_0(x) = y_0$. Por inducción, definimos cada g_{k+1} con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de manera que

$$g_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, g_k(s)) ds \quad \forall x \in I. \quad (3.4)$$

Estas funciones son precisamente las conocidas como iterantes de Picard, con las que queremos aproximar la solución.

En primer lugar, probamos que dichas funciones están bien definidas, para lo que basta comprobar que $(x, g_k(x)) \in R$ para todo $x \in I$, por ser f continua en D y $R \subset D$. Claramente, g_0 lo verifica por definición. Ahora, si tomamos $x \in I = [x_0 - h, x_0 + h]$ y suponemos que se cumple para g_k con $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$|g_{k+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, g_k(s)) ds \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

donde la primera desigualdad se tiene por ser $M = \max_R |f(x, y)|$, la segunda por estar $x \in I$, y la tercera por definición de h . Por tanto, obtenemos que $(x, g_{k+1}(x)) \in R$ para todo $x \in I = [x_0 - h, x_0 + h] \subset [x_0 - a, x_0 + a]$ y las funciones g_k están bien definidas. Además, claramente son continuas en I .

Ahora veamos que estas funciones convergen uniformemente a una función continua en I . Sea

$$N = \max_{x \in I} |g_1(x) - g_0(x)|$$

y sea L la constante de Lipschitz de f . Notemos que $N \leq Mh$. Entonces, se tiene la siguiente propiedad:

$$|g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq NL^k \frac{|x - x_0|^k}{k!}. \quad (3.5)$$

Vamos a comprobarlo por inducción sobre k . Para $k = 0$ se cumple por definición de N . Supongamos que la desigualdad (3.5) se verifica para $k - 1$ y vamos a probarla para k . Supongamos que $x \geq x_0$, entonces

$$\begin{aligned} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x (f(s, g_k(s)) - f(s, g_{k-1}(s))) ds \right| \leq \int_{x_0}^x L|g_k(s) - g_{k-1}(s)| ds \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x LNL^{k-1} \frac{|s - x_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq NL^k \int_{x_0}^x \frac{(s - x_0)^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq NL^k \frac{(x - x_0)^k}{k!} = NL^k \frac{|x - x_0|^k}{k!}, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se tiene por definición de g_{k+1} y g_k , la segunda por ser f lipschitziana, y la tercera desigualdad por la hipótesis inductiva. Por otro lado, si $x < x_0$, basta cambiar los límites de integración, es decir,

$$\begin{aligned} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x (f(s, g_k(s)) - f(s, g_{k-1}(s))) ds \right| \leq \int_x^{x_0} L|g_k(s) - g_{k-1}(s)| ds \leq \\ &\leq \int_x^{x_0} LNL^{k-1} \frac{|s - x_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq NL^k \int_x^{x_0} \frac{(x_0 - s)^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq NL^k \frac{(x_0 - x)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Notemos que, si tomamos $|g_p(x) - g_k(x)|$ donde $p, k \in \mathbb{N}$ no necesariamente consecutivos, se puede obtener una cota sobre $|y(x) - g_k(x)|$, es decir, sobre el error cometido al aproximar la solución.

Ahora, dado que $x \in I = [x_0 - h, x_0 + h]$,

$$NL^k \frac{|x - x_0|^k}{k!} \leq NL^k \frac{h^k}{k!} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} N \frac{(Lh)^k}{k!} = Ne^{Lh},$$

resulta, aplicando el Criterio de Weierstrass 3.2.1 a $(g_{k+1} - g_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, que la siguiente serie

$$g_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x))$$

converge uniformemente en I a una función que denominamos y definida en I y que además es continua. Notemos que las sumas parciales de $\sum_{k=0}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x))$ son precisamente las funciones $g_k(x)$. Por tanto, tenemos que la sucesión $(g_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge uniformemente a y en I .

Nos queda ver que esta función y que hemos obtenido verifica la forma integral del problema de Cauchy (2.1). En primer lugar, como $(g_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge uniformemente a y en el intervalo I , tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ y para todo $s \in I$ se verifica que

$$|g_k(s) - y(s)| < \varepsilon.$$

Además, como f es lipschitziana, tomando $k \geq k_0$ y $s \in I$ se tiene que

$$|f(s, g_k(s)) - f(s, y(s))| \leq L|g_k(s) - y(s)| < L\varepsilon.$$

Así, obtenemos que, si llamamos $F_k(x) = f(x, g_k(x))$ y $F(x) = f(x, y(x))$, entonces $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a F en I . Por ello, como $|f(s, g_k(s))| \leq M$ podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada, y resulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, g_k(s)) ds = \int_{x_0}^x \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, g_k(s)) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Por último, teníamos por definición de g_k la igualdad (3.4), a la que podemos aplicar límites cuando k tiende a infinito, obteniendo

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{k+1}(x) = y_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, g_k(s)) ds = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds,$$

que es la forma integral del problema de Cauchy (2.1), por lo que efectivamente la función y es solución local del problema en el intervalo I , quedando así probada la existencia de solución.

Por último, nos queda comprobar que esta solución es también única, pero esto lo deducimos aplicando el Teorema 3.1.7. Por lo tanto, ya hemos demostrado la existencia y unicidad de solución de (PC). \square

Observamos que este teorema nos pide las mismas condiciones que necesitábamos en el Teorema local de Cauchy-Peano 2.2.1, exigiendo además que f sea una función lipschitziana, condición que habíamos añadido para tener la unicidad de la solución, como hemos visto en el Teorema 3.1.7. Por lo tanto, ahora tenemos dos opciones distintas para garantizar la existencia y unicidad de solución local, pues podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Peano 2.2.1 para obtener la existencia de solución seguido del Teorema 3.1.7 para garantizar su unicidad o aplicar directamente el Teorema local de Picard-Lindelöf 3.2.2. Pese a que ambos métodos generan sucesiones que se aproximan a la solución, está claro que las poligonales de Euler son mucho más sencillas de construir, mientras que el cálculo de los iterantes de Picard se vuelve bastante complicado tras unas pocas iteraciones, debido a la integral que se calcula en cada paso.

A continuación vamos a aplicar este teorema a algunos ejemplos, donde veremos que, efectivamente, el cálculo de los iterantes de Picard se puede complicar rápidamente en comparación con las poligonales de Euler. Estos ejemplos serán los mismos que los vistos en el Ejemplo 2.2.3 y en el Ejemplo 2.2.4, con el fin de recalcar esta diferencia y así comprobar las diferentes aproximaciones que obtenemos con cada método.

Ejemplo 3.2.3. *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = x + y$ está definida en \mathbb{R}^2 , entorno de $(0, 0)$. De nuevo, recordemos, como ya hemos visto en el Ejemplo 2.2.3, que la solución del problema está definida en todo \mathbb{R} y viene dada por

$$y(x) = e^x - 1 - x.$$

Antes de aplicar el Teorema local de Picard-Lindelöf, Teorema 3.2.2, tenemos que comprobar que f es lipschitziana respecto de y en \mathbb{R}^2 para así obtener la existencia y unicidad de solución, pero esto es trivial, dado que si $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ entonces

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x + y_1 - x - y_2| = |y_1 - y_2|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, f es continua en \mathbb{R}^2 , luego podemos aplicar dicho teorema y, efectivamente, existe una única solución local del problema.

Ahora, si tomamos $a, b = 1$ de manera que $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, $M = 2$ y $h = b/M = 1/2$, entonces, la solución buscada está definida en $I = [-1/2, 1/2]$. Sin embargo, recordemos del Ejemplo 2.2.3 que, aplicando este teorema, solo podemos garantizar que la solución esté definida en $[-h, h] \subset [-1, 1]$ con $h < 1$. Calculemos ahora los iterantes de Picard g_k para algunos valores de k .

- En primer lugar, $g_0 = y_0 = 0$ para todo $x \in I$.
- Para $k = 0$, obtenemos

$$g_1(x) = 0 + \int_0^x f(s, 0) ds = \int_0^x s ds = \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 1$, tenemos

$$g_2(x) = 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^2}{2}\right) ds = \int_0^x \left(s + \frac{s^2}{2}\right) ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 2$, tenemos

$$g_3(x) = 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}\right) ds = \int_0^x \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}\right) ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 3$, tenemos

$$g_4(x) = 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24}\right) ds = \int_0^x \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24}\right) ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!},$$

para todo $x \in I$.

Observamos que, en este caso, podemos escribir cada iteración como

$$g_{k+1}(x) = \sum_{i=2}^{k+2} \frac{x^i}{i!} \quad \forall x \in I,$$

y si escribimos el desarrollo de Taylor de la solución del problema nos damos cuenta de que

$$y(x) = e^x - 1 - x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} - 1 - x = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \forall x \in I,$$

y vemos claramente que $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{k+1}(x) = y(x)$.

Como vimos en la Sección 2.3, realmente la solución está definida en \mathbb{R} . De hecho, como veremos posteriormente en la Sección 3.3, estas aproximaciones también son válidas en intervalos mayores, gracias al Teorema global de Picard-Lindelöf, Teorema 3.3.1. Por ello, en la Figura 3.1 a) representamos los iterantes de Picard en un intervalo mayor, $I = [-3, 3]$, para que además se puedan distinguir mejor las curvas.

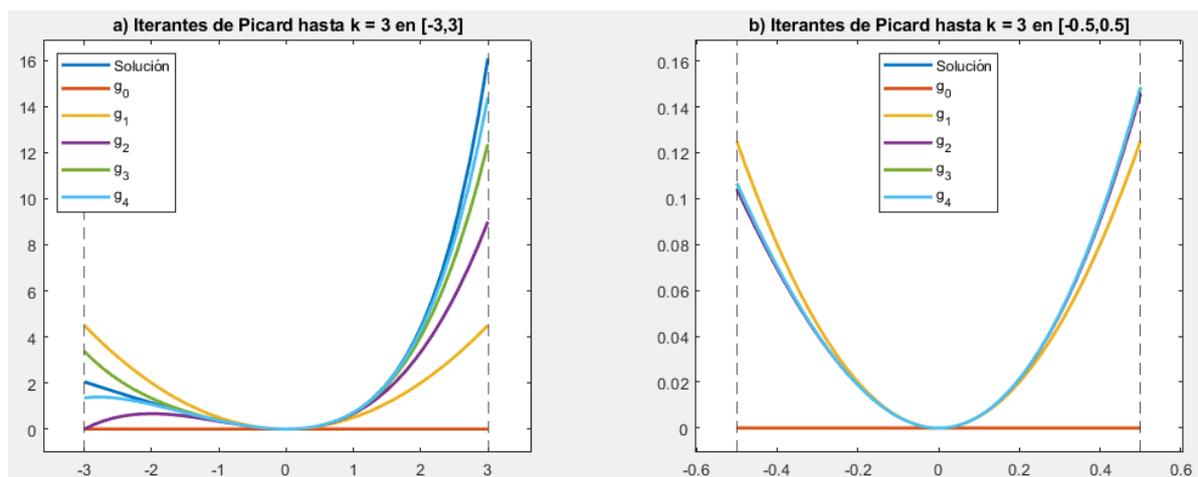


Figura 3.1: Iterantes de Picard hasta $k = 3$.

Observamos en la Figura 3.1 que efectivamente los iterantes se van aproximando cada vez más a la solución, representada en azul oscuro, con lo que podemos deducir visualmente la convergencia de esta sucesión a la solución en el intervalo dado.

Si comparamos los iterantes de Picard de la Figura 3.1 b) con las poligonales de Euler representadas en la Figura 2.3, vemos claramente que la velocidad de convergencia de los iterantes es mucho mayor, pues solo necesitamos unos pocos valores de k para que la función solución no se distinga de sus aproximaciones, mientras que en el Capítulo 2 esto no ocurría.

Ejemplo 3.2.4. Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y^2(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ está definida en \mathbb{R}^2 , y concretamente en $D = (-2, 2) \times (-2, 2)$, entorno de $(0, 0)$. Recordemos que la solución del problema no es conocida.

Veamos ahora si podemos aplicar el Teorema 3.2.2, es decir, si f es continua, que claramente lo es, y si es lipschitziana respecto de y en D . Esto también se cumple, ya que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq 4|y_1 - y_2|,$$

para todos $y_1, y_2 \in (-2, 2)$ y para todo $x \in (-2, 2)$, por lo que existe una única solución del problema, definida en el intervalo I .

Tomamos, por ejemplo, $a, b = 1$ de manera que $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset D$, $M = 2$ y $h = b/M = 1/2$, por lo que $I = [-1/2, 1/2]$. Al igual que en el ejemplo anterior, vamos a calcular algunas de los primeros iterantes de Picard, para analizar cómo evolucionan:

- Claramente, $g_0 = y_0 = 0$ para todo $x \in I$.
- Para $k = 0$, tenemos

$$g_1(x) = 0 + \int_0^x f(s, 0) ds = \int_0^x s^2 ds = \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 1$, tenemos

$$g_2(x) = 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^3}{3}\right) ds = \int_0^x \left(s^2 + \frac{s^6}{9}\right) ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} g_3(x) &= 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^3}{3} + \frac{s^7}{63}\right) ds = \int_0^x \left(s^2 + \frac{s^6}{9} + \frac{s^{14}}{63^2} + \frac{2s^{10}}{3 \cdot 63}\right) ds = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{33 \cdot 63} + \frac{x^{15}}{63^2 \cdot 15} \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Observamos que, pese a ser f una función polinomial, el número de integrales a calcular por cada iteración aumenta notablemente, y ya no resulta tan obvio escribir su expresión general. Además, cabe resaltar que, como no podemos expresar la solución del problema, tampoco podemos comprobar visualmente la convergencia de las iteraciones a dicha solución.

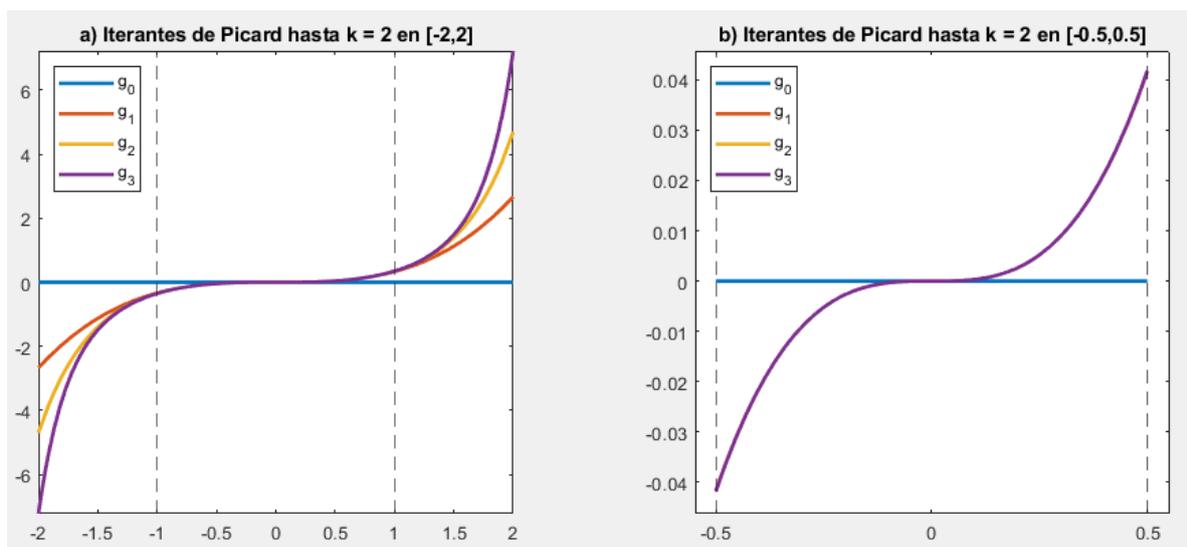


Figura 3.2: Iterantes de Picard hasta $k = 2$.

En la Figura 3.2 podemos ver la representación gráfica de los iterantes de Picard que acabamos de calcular, definidos en $I = [-h, h] \subset [-1, 1]$. Notemos que en dicho intervalo todas las curvas excepto g_0 se aproximan bastante entre sí, resultando difícil diferenciarlas, como vemos en b). Sin embargo, es importante tener en cuenta que, en este caso y a diferencia del ejemplo anterior, no podemos utilizar el Teorema 3.3.1 para ampliar el intervalo de definición de las aproximaciones, dado que $f(x, y) = x^2 + y^2$ no es lipschitziana respecto de y en ninguna banda de la forma $[a, b] \times \mathbb{R}$, $a < b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

En la Figura 3.2 b) ya nos cuesta diferenciar los iterantes g_1 , g_2 y g_3 , prueba de lo poco que tardan en aproximarse a la solución, especialmente si los comparamos con las poligonales de Euler de la Figura 2.4.

En ambos ejemplos hemos visto que la velocidad de convergencia de los iterantes de Picard es mucho mayor que la de las poligonales de Euler. Sin embargo, la dificultad del cálculo de los iterantes puede suponer una gran desventaja, junto con el hecho de que se trate de una sucesión iterativa, puesto que para llegar a un cierto g_{k_0} con $k_0 \in \mathbb{N}$ hemos de calcular primero los g_k para todos los valores de $k \in \mathbb{N}$ con $k < k_0$, cosa que no ocurría con las poligonales.

3.3. Existencia y unicidad de solución global

En esta sección vamos a dar la versión global del Teorema local de Picard-Lindelöf, Teorema 3.2.2, obteniendo una única solución de (PC), definida en un intervalo fijo, sin depender de la condición inicial. Continuaremos aplicando este resultado al mismo ejemplo que dimos en la sección anterior, el Ejemplo 2.3.2, y después veremos otra aplicación de este teorema: los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Para todo ello, nos basaremos principalmente en las referencias [4], [9], [11].

Veamos primero el Teorema global de Picard-Lindelöf, que requiere la condición de que f sea continua y lipschitziana, a diferencia de las hipótesis del Teorema global de Cauchy-Peano, Teorema 2.3.1, que nos exigía que f fuera tanto continua como acotada. Su demostración se basa en definir un nuevo espacio vectorial con una determinada norma y aprovechar que este espacio es completo para definir una aplicación contractiva y deducir que existe un único punto fijo, que será la solución de (PC).

Teorema 3.3.1. (Teorema global de Picard-Lindelöf). *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y lipschitziana respecto de y en su dominio de definición, con $x_0 \in [a, b]$. Entonces, existe una única solución de (PC) y está definida en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración. Sea $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en $[a, b]$ y con espacio de llegada \mathbb{R}^n . Definimos en V la siguiente norma: sea $y \in V$ una función cualquiera, entonces

$$|y|_V = \sup\{e^{-K|x-x_0|}|y(x)| : x \in [a, b]\},$$

donde K es una constante tal que $K > L$, siendo L la constante de Lipschitz de f . Se tiene que $(V, |\cdot|_V)$ es un espacio de Banach, es decir, un espacio vectorial normado completo. En efecto, comprobemos en primer lugar que $|\cdot|_V$ es una norma. Dado $y \in V$ cualquiera, resulta obvio que $|y|_V \geq 0$ y que $|y|_V = 0$ si y solo si $y = 0$, por definición. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$|\alpha y|_V = \sup\{e^{-K|x-x_0|}|\alpha y(x)| : x \in [a, b]\} =$$

$$= \sup\{|\alpha|e^{-K|x-x_0|}|y(x)| : x \in [a, b]\} = |\alpha||y|_V,$$

con lo que solo nos queda comprobar que verifica la desigualdad triangular. Sean $y_1, y_2 \in V$ dos funciones, teniendo en cuenta la desigualdad triangular para la norma euclídea, resulta que

$$\begin{aligned} |y_1 + y_2|_V &= \sup\{e^{-K|x-x_0|}|y_1(x) + y_2(x)| : x \in [a, b]\} \leq \\ &\leq \sup\{e^{-K|x-x_0|}(|y_1(x)| + |y_2(x)|) : x \in [a, b]\} \leq \\ &\leq \sup\{e^{-K|x-x_0|}|y_1(x)| : x \in [a, b]\} + \sup\{e^{-K|x-x_0|}|y_2(x)| : x \in [a, b]\} = |y_1|_V + |y_2|_V. \end{aligned}$$

Veamos que las normas $|\cdot|_V$ y $|\cdot|_\infty$ son equivalentes, donde $|\cdot|_\infty$ viene dada por $|y|_\infty = \sup\{|y(x)| : x \in [a, b]\}$ para cualquier función $y \in V$. Nos basta con tomar

$$\alpha = \min\{e^{-K(b-x_0)}, e^{-K(x_0-a)}\}$$

para que se verifique

$$\alpha|\cdot|_\infty \leq |\cdot|_V \leq |\cdot|_\infty,$$

con lo que efectivamente ambas normas son equivalentes. Por ello y por ser $(V, |\cdot|_\infty)$ completo, resulta que $(V, |\cdot|_V)$ también ha de serlo.

A continuación, definimos la aplicación $T : V \rightarrow V$ tal que para $y \in V$ se tiene

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad x \in [a, b].$$

Como f es continua en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, claramente Ty es una función continua en $[a, b]$ para todo $y \in V$ y T está bien definida. Veamos ahora que T es una aplicación contractiva, con lo que podremos aplicar el Teorema 1.3.4 y obtener que existe un único punto fijo, que es la solución de (PC), en virtud de la Proposición 2.1.2.

Tomando dos funciones $y_1, y_2 \in V$ cualesquiera, tenemos para $x_0 \leq x \leq b$ que

$$\begin{aligned} e^{-K|x-x_0|}|Ty_1(x) - Ty_2(x)| &= e^{-K(x-x_0)} \left| \int_{x_0}^x (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x e^{-K(x-x_0)} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds = \int_{x_0}^x e^{-K(x-s)} e^{-K(s-x_0)} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \end{aligned}$$

por definición de T . Ahora, vamos a acotar la integral, teniendo en cuenta que f es lipschitziana respecto de y en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ y la definición de $|\cdot|_V$. Así, el término anterior es menor o igual que

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^x e^{-K(x-s)} e^{-K(s-x_0)} L|y_1(s) - y_2(s)| ds \leq L \int_{x_0}^x e^{-K(x-s)} |y_1 - y_2|_V ds = \\ &= L|y_1 - y_2|_V e^{-Kx} \int_{x_0}^x e^{Ks} ds = \frac{L}{K}|y_1 - y_2|_V (1 - e^{-K(x-x_0)}) \leq \frac{L}{K}|y_1 - y_2|_V. \end{aligned}$$

Análogamente, para $a \leq x < x_0$ obtenemos que

$$e^{-K(x_0-x)}|Ty_1(x) - Ty_2(x)| \leq \frac{L}{K}|y_1 - y_2|_V.$$

Por lo tanto, utilizando de nuevo la definición de $|\cdot|_V$, resulta que

$$|Ty_1 - Ty_2|_V \leq \frac{L}{K}|y_1 - y_2|_V.$$

Dado que hemos tomado $K > L$ y entonces $L/K < 1$, tenemos que T es una aplicación contractiva, y por el Teorema del punto fijo de Banach, Teorema 1.3.4, obtenemos que existe un único punto fijo en V , que es la solución del problema.

Sabemos que, en este caso, la sucesión construida en el Teorema 3.2.2 y que proporciona el punto fijo, y por tanto la solución de (PC), es precisamente la formada por los iterantes de Picard (ver (3.4)), tomando como punto inicial el valor en la condición inicial del problema. \square

La idea de esta demostración también se puede trasladar al Teorema local de Picard-Lindelöf, Teorema 3.2.2, definiendo $\tilde{V} = \mathcal{C}([x_0 - h, x_0 + h], B)$ con $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq b\}$ y tomando la aplicación $\tilde{T} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ tal que

$$\tilde{T}y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

para todo $y \in \tilde{V}$. Así, deduciendo que \tilde{T} es contractiva y aplicando el Teorema 1.3.4, quedaría probada una nueva demostración de la existencia y unicidad de solución local de (PC), como se explica en la página 126 de [5].

Veamos ahora que podemos aplicar este teorema al Ejemplo 2.3.2 y obtener que la solución que habíamos encontrado es, efectivamente, única. Otra opción es aplicar el Teorema global de Cauchy-Peano, Teorema 2.3.1, seguido del Teorema 3.1.7, aunque para ello, aparte de comprobar que f es lipschitziana, también hemos de asegurarnos de que sea acotada. Por ello, vemos que el Teorema 3.3.1 es la opción menos exigente para obtener la existencia y unicidad de una solución definida en $[a, b]$.

Ejemplo 3.3.2. *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \cos^2(y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = \cos^2(y)$ está definida y es continua en cualquier banda de la forma $[-n, n] \times \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. Además, f es lipschitziana respecto de y en $[-n, n] \times \mathbb{R}$, ya que si tomamos $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ cualesquiera y $x \in [-n, n]$, entonces,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\cos^2(y_1) - \cos^2(y_2)| = |\operatorname{sen}(y_1 + y_2) \operatorname{sen}(y_1 - y_2)| \leq |y_1 - y_2|,$$

dado que $|\operatorname{sen}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema global de Picard-Lindelöf, Teorema 3.3.1, para cualquier dominio de la forma $[-n, n] \times \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$ y obtener que existe una única solución, que está definida en $[-n, n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto en todo \mathbb{R} . Como hemos visto en el Ejemplo 2.3.2, dicha solución viene dada por

$$\phi(x) = \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Además, podemos calcular los iterantes de Picard para algunos valores de $k \in \mathbb{N}$. Tomemos, por ejemplo, el intervalo $I = [-n, n]$ con $n \in \mathbb{N}$.

- En primer lugar, $g_0 = y_0 = 0$ para todo $x \in I$.
- Para $k = 0$, obtenemos

$$g_1(x) = 0 + \int_0^x f(s, 0) ds = \int_0^x 1 ds = x \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 1$, tenemos

$$g_2(x) = 0 + \int_0^x f(s, s) ds = \int_0^x \cos^2(s) ds = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) \quad \forall x \in I.$$

En la Figura 3.3 podemos ver la representación de los iterantes que hemos calculado en los intervalos $[-1, 1]$ y $[-3, 3]$. Si la comparamos con la Figura 2.5 observamos que ambas sucesiones son muy distintas, obteniendo varias formas de aproximar la misma solución.

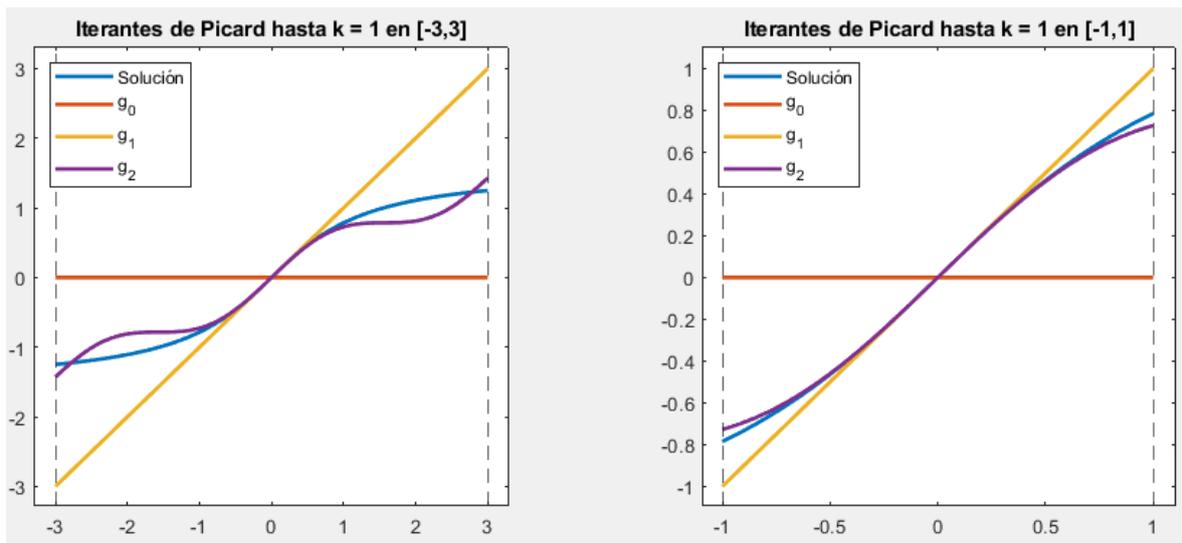


Figura 3.3: Gráfica de los iterantes de Picard hasta $k = 1$, junto con la función solución.

Para completar esta sección, vamos a estudiar una aplicación del Teorema global de Picard-Lindelöf, Teorema 3.3.1. Veremos cómo este teorema también nos garantiza la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy formado por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, junto con algunos ejemplos básicos concretos. Nos basaremos principalmente en las referencias [9] y [11], junto con la referencia [2].

Sea el sistema lineal

$$y'(x) = A(x)y(x) + c(x) \tag{3.6}$$

donde los coeficientes vienen dados a través de la matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ con $i, j = 1, \dots, n$ y el vector $c(x) = (c_i(x))$ con $i = 1, \dots, n$, ambos formados por funciones continuas definidas en un intervalo $[a, b]$. Además, tenemos el vector $y(x) = (y_i(x))$ con $i = 1, \dots, n$ como variable.

Dadas la matriz $A(x)$ y el vector $c(x)$ de tamaños $n \times n$ y n , respectivamente, podemos considerar el problema de Cauchy siguiente, añadiendo al sistema (3.6) la condición inicial $y(x_0) = y_0$, de manera que

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y(x) + c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

para ciertos $x_0 \in [a, b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.3. *Sea el problema de Cauchy (3.7) de manera que (x_0, y_0) es un punto cualquiera de $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ y $a_{ij}, c_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas. Entonces, existe una única solución de (3.7) y está definida en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración. Definimos la función $f(x, y) = A(x)y + c(x)$ en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$. Sabemos que la función f es continua en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ por serlo $A(x)$ y $c(x)$ en $[a, b]$. Además, como la matriz $A(x)$ está definida en un intervalo cerrado, todas las funciones a_{ij} con $i, j = 1, \dots, n$ han de estar acotadas en él, por lo que sabemos que existe un $M > 0$ tal que $|a_{ij}(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, $i, j = 1, \dots, n$. Por ello, dados $y, z \in \mathbb{R}^n$, existe $L > 0$ tal que para todo $x \in [a, b]$ se tiene que

$$|f(x, y) - f(x, z)| = |A(x)(y - z)| \leq L|y - z|,$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$, con lo que la función f es lipschitziana respecto de y en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ y podemos aplicar el Teorema global de Picard-Lindelöf, Teorema 3.3.1, obteniendo que existe una única solución del problema (3.7), definida en $[a, b]$. \square

Veamos ahora un ejemplo donde podemos aplicar este resultado.

Ejemplo 3.3.4. *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y_1'(x) = -y_2(x) + 2e^{2x} \\ y_2'(x) = y_1(x) - e^{2x} \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1 \end{cases}$$

formado por un sistema lineal no homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas, y_1 e y_2 . Si escribimos los coeficientes del sistema y su término independiente en su forma matricial,

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad b(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix},$$

vemos que ambos son continuos para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que podemos aplicar el Teorema 3.3.3 con $[a, b] = [-n, n]$ y $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, y obtenemos que existe una única solución del problema, definida en $[-n, n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto en todo \mathbb{R} , que es la solución dada.

Fácilmente, se puede calcular dicha solución, que viene dada por

$$\begin{cases} y_1(x) = -\operatorname{sen}(x) + e^{2x} \\ y_2(x) = \cos(x). \end{cases}$$

Una consecuencia del Teorema 3.3.3 es el conocido como Teorema de estructura del espacio de soluciones de sistemas lineales homogéneos, que afirma que el espacio formado por todas las soluciones del sistema

$$y'(x) = A(x)y(x)$$

es un espacio vectorial de dimensión n , como vemos a continuación.

Teorema 3.3.5. *Sea el conjunto*

$$S = \{y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : y'(x) = A(x)y(x), \quad x \in [a, b]\}$$

formado por todas las soluciones del sistema $y'(x) = A(x)y(x)$. Entonces, S es un espacio vectorial de dimensión n .

Demostración. En primer lugar, veamos que S es un espacio vectorial. Dadas $y, z \in S$ dos soluciones del sistema definidas en $[a, b]$, podemos ver que entonces se tiene que $\lambda_1 y + \lambda_2 z \in S$ para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, puesto que

$$(\lambda_1 y + \lambda_2 z)'(x) = \lambda_1 y'(x) + \lambda_2 z'(x) = \lambda_1 A(x)y(x) + \lambda_2 A(x)z(x) = A(x)(\lambda_1 y(x) + \lambda_2 z(x)),$$

por lo que S es un espacio vectorial. Nos queda por comprobar que su dimensión es exactamente n , para lo cual tenemos que ver que tiene una base de n vectores. Denotamos por $\{e_1, \dots, e_n\}$ a la base canónica de \mathbb{R}^n y consideramos para cada $i = 1, \dots, n$ el problema de Cauchy que viene dado por

$$\begin{cases} \phi_i'(x) = A(x)\phi_i(x) \\ \phi_i(x_0) = e_i \end{cases} \quad (3.8)$$

y su respectiva solución ϕ_i , que sabemos que existe, es única y está definida en $[a, b]$ por el Teorema 3.3.3. Veamos que $\mathcal{B} = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ es una base de S , es decir, que es un sistema generador linealmente independiente de S .

- Sistema generador: Dada $z \in S$ una solución cualquiera del sistema $y'(x) = A(x)y(x)$, vamos a comprobar que se puede escribir en función de los elementos de \mathcal{B} . En primer lugar, tenemos que

$$z(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i,$$

para ciertos $\lambda_i \in \mathbb{R}$, dado que $z(x_0) \in \mathbb{R}^n$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base de \mathbb{R}^n . Ahora, tomamos $\bar{z}(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x)$, que es solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \bar{z}'(x) = A(x)\bar{z}(x) \\ \bar{z}(x_0) = z(x_0), \end{cases} \quad (3.9)$$

puesto que es el de soluciones y

$$\bar{z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = z(x_0).$$

Por lo tanto, $z(x) = \bar{z}(x)$ para todo $x \in [a, b]$, ya que por el Teorema 3.3.3 el problema (3.9) tiene solución única, por lo que $z(x)$ se puede expresar a partir de elementos de \mathcal{B} , que es lo que queríamos probar.

- Linealmente independiente: Basta con comprobar que si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\lambda_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Esto se comprueba fácilmente teniendo en cuenta que si la igualdad a la izquierda se cumple para todo x , entonces también se verifica para x_0 , por lo que

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i,$$

por ser ϕ_i solución de (3.8). Así, como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica, obtenemos que $\lambda_i = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Por lo tanto, queda comprobado que S es un espacio vectorial de dimensión n . \square

Bibliografía

- [1] E. A. Coddington. *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Compañía Editorial Continental S.A., 1976.
- [2] D. Gómez, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Universidad de Cantabria, 2019.
- [3] D. Gómez, *Teoría cualitativa de EDO*, Universidad de Cantabria, 2021.
- [4] M. de Guzmán. *Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría de estabilidad y control*, Alhambra, 1987.
- [5] M. de Guzmán, I. Peral, M. Walias. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Alhambra, 1978.
- [6] F. Llorente. *Teoremas de punto fijo para aplicaciones contractivas y no expansivas* [en línea], Universidad de Sevilla. Disponible en <https://idus.us.es/bitstream/handle/11441/77538/Llorente%20Gunowski%20F%C3%A1tima%20TFG.pdf?sequence=1&isAllowed=y#:~:text=Proposici%C3%B3n%201.1.2%20Toda%20aplicaci%C3%B3n,Demostraci%C3%B3n>. Accedido en 07-2022.
- [7] C. Martínez, M. A. Sanz. *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Reverté S. A., 1991.
- [8] M. Molero, A. Salvador, T. Menárguez, L. Garmendia. *Existencia y unicidad de soluciones* [en línea], Universidad Politécnica de Madrid. Disponible en http://www2.camino.upm.es/Departamentos/matematicas/fdistancia/pie/Analisis%20matematico/Temas/C08_Existencia_Soluciones.pdf. Accedido en 07-2022.
- [9] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo. *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill, 1995.
- [10] R. Payá. *Sucesiones de funciones* [en línea], Universidad de Granada. Disponible en: https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/An%C3%A1lisis%20II/Apuntes_01.pdf. Accedido en 06-2022.
- [11] I. Peral, M. Walias. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Universidad Autónoma de Madrid, 2002.
- [12] Varios. *Introducción a las ecuaciones y sistemas diferenciales ordinarios. Métodos elementales de integración* [en línea], Universidad de Sevilla, Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico. Disponible en: <http://departamento.us.es/edan/php/asig/GRAMAT/GMEDO/ApuntesEDO.pdf>. Accedido en 08-2022.