Facultad
de
Ciencias

Conjunto de Julia de una aplicación polinomial

(Julia set of a polynomial map)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Yaiza Quintana Ruiloba

Directora: Nuria Corral Pérez

Septiembre - 2022

Resumen

Si consideramos las sucesión que se obtiene al componer una aplicación polinomial consigo misma, los puntos en los que esta sucesión no es normal son los puntos del conjunto de Julia de este polinomio. Este conjunto de puntos coincide la clausura de los puntos periódicos repelentes de la aplicación polinomial. En este trabajo vamos demostrar que estos dos conjuntos son iguales y describir las propiedades del conjunto de Julia.

Palabras clave: Conjunto de Julia, punto periódico, sucesión normal, puntos repelentes

Abstract

If we consider the sequence obtaining by iterating a polynomial map, the points in which this sequence is not normal are the points of the Julia set of this polynomial map. This set coincides with the closure of the repelling points of the polynomial map. We will prove that both sets are equal and we will describe properties of the Julia set of a polynomial map.

Key words: Julia set, periodic point, normal succesion, repelling points

Índice

1. Introducción

Uno de los métodos matemáticos más importantes para resolver ecuaciones es el método de Newton el cual es un proceso de iteración. A pesar de este método de ser gran utilidad, no siempre es el mejor, ya que en algunos casos puede que no converga a algunas raíces. Por este motivo en el siglo XIX, se empezaron a estudiar las distintas propiedades de las sucesiones creadas al iterar una función consigo misma para ver a que pueden converger y a que no. Y así, comenzó el estudio del conjunto de Julia de una función.

Gaston Julia (1893-1978) y Pierre Fatou (1879-1929) estudiaron el comportamiento de las sucesiones creadas al iterar funciones analíticas en el plano complejo y así crearon los conjuntos de Julia y de Fatou. Más adelante, en los 70 años, gracias a su trabajo se empezó a investigar otro conjunto, el conjunto de Mandelbrot. Este conjunto resultó muy interesante en la época ya que se parecía a los fractales además de compartir algunas de sus propiedades. Más tarde, en el año 1998, se demostró que el conunto de Mandelbrot no era un fractal.

El conjunto de Julia ha sido de bastante importancia para la teoría del caos, ya que por ejemplo, el estudio del conjunto de Julia condujo a la idea de un punto atractor, que son los puntos a los cuales converge a la sucesión formada por la iteración de la función evaluada en otros puntos. Esta definición, al igual que la de punto repulsivo es muy importante para este estudio.

Si consideramos la sucesión obtenida por la iteración de una función polinomial, el conjunto de Julia de la función está formado por los puntos donde dicha sucesión no es normal

Para mejorar el entendimiento de este conjunto hemos empezado el trabajo con una introducción del plano complejo. Primero de la topológia de este ya que será necesaria para entender las propiedades que se van a ir demostrando del conjunto de Julia. Después se continua con funciones y sucesiones de variable en variable compleja y distintas propiedades de estas que nos serán de bastante utilidad para luego poder probar mejor las propiedades del conjunto de Julia. Y también una introducción al dinamismo ya que como ya se ha indicado antes tiene mucha relación con este conjunto.

Por último, en el trabajo vamos a hablar un poco del conjunto de Mandelbrot, un conjunto que nació de la idea del de Julia como hemos explicado antes. Este conjunto está formado por los $c \in \mathbb{C}$ tal que el conjunto de Julia de $q_c(z) = z^2 + c$ es un conjunto conexo.

2. Variable compleja

2.1. Topología

Vamos a empezar haciendo un recordatorio de topología en el plano complejo. La topología usual en el espacio topológico $\mathbb{C}$ es la que está inducida si identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ de la siguiente manera: dado $z \in \mathbb{C}$ podemos escribir z como $z = z_1 + iz_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ y podemos definir la siguiente biyección

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z & \longmapsto & (z_1, z_2) \end{array}$$

Luego, la topología usual en $\mathbb{C}$ es la inducida por la métrica usual en $\mathbb{R}^2$. Dados dos puntos cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ de forma que $z = z_1 + iz_2$ y $w = w_1 + iw_2$ con z_1, z_2, w_1, $w_2 \in \mathbb{R}$, entonces la distancia entre z y w está dada por

$$d(z, w) := |z - w| = \sqrt{(z_1 - w_1)^2 + (z_2 - w_2)^2}$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = z_1 + iz_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ se denota $Re(z) = z_1$ y $Im(z) = z_2$.

La topología usual en $\mathbb{C}$ es la generada por la base de abiertos $\mathcal{B}$ formada por los discos abiertos $\mathbb{D}_{z_0}^r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, es decir, $\mathcal{B}$ esta dada por

$$\mathcal{B} = \{\mathbb{D}_z^r : z \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

Otras nociones básicas de topología que podemos recordar son las dadas en la siguiente definición:

Definición 2.1. Sea (X, τ) un espacio topológico.

- Se denomina *clausura* de un subconjunto A de X a la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Denotamos $\overline{A}$ a la clausura de A.
- Se denomina *interior* de un subconjunto A de X a la unión de todos los abiertos contenidos en A. Denotamos A° al interior de A.
- Diremos que V es un *entorno* de un punto $x \in X$ si cumple que $x \in A \subset X$ para algún A subconjunto abierto.
- Un punto $x \in X$ es un punto de *acumulación* de un subconjunto $A \subset X$ si todo entorno de x contiene algún punto de A diferente de x. Denotamos A' al conjunto de puntos de acumulación de A.

- Un punto $x \in X$ es un punto *aislado* de un subconjunto $A \subset X$ si el único punto de A que está contenido en todo entorno de x es él mismo, esto es, si $x \in A \setminus A'$.

- Un punto $x \in X$ está en la *frontera* de un subconjunto $A \subset X$ si todo entorno V de x interseca a A y $X \setminus A$. El conjunto de puntos frontera se denomina *frontera.* Denotamos ∂A a la frontera de A.

- Un subconjunto A de X se dice que es *cerrado* si es igual a su clausura, es decir, si $\overline{A} = A$.

A partir de ahora vamos a denotar $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, al disco abierto de centro el 0 y radio 1, y $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ será la clausura de $\mathbb{D}$. Y como hemos dicho antes $\mathbb{D}_{z_0}^r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, es el disco abierto de radio r y centro z_0 y $\overline{\mathbb{D}}_{z_0}^r$ su clausura.

Definición 2.2. Una *sucesión de números complejos* es una aplicación

$$\begin{array}{rccl} z: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & n & \longmapsto & z(n) = z_n \end{array}$$

La sucesiones las representamos $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Una de las nociones más importantes en el estudio de sucesiones es la de convergencia. Una sucesión se dice *convergente* si o converge a un punto o converge al infinito. La noción de tender a infinito tiene sentido hablar de ella en espacios métricos no acotado como es el caso que estamos estudiando, el de $\mathbb{C}$.

Definición 2.3. Sea $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos. Si para cada entorno U de z existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$, $z_n \in U$, entonces la sucesión $\{z_n\}_n$ *converge al punto z.*

Sea $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos. Si para todo $M > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $|z_n| > M$, se tiene que $\{z_n\}_n$ *converge al infinito.*

Las sucesiones en variable compleja pueden verse como dos sucesiones de números reales, una dada por la parte real de los términos de la sucesión y otra por la parte imaginaria. Es decir, una sucesión de $\mathbb{C}$ converge si a un punto o al infinito si cuando es vista como una sucesión de $\mathbb{R}^2$ lo hace. Por lo tanto, los límites y la convergencia y divergencia de una sucesión de complejos son:

- $\lim_{n\to\infty} z_n = a + bi$, sí y solo sí, el $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = a$ y $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = b$. Es decir, la sucesión de números complejos converge, sí y solo sí, al verlo como dos sucesiones de números reales ambas convergen.

- $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, sí y solo sí, el $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Es decir, la sucesión de números converge al infinito, sí y solo sí, su módulo lo hace.

Definición 2.4. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos y sea $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función creciente. Se llama *subsucesión* de $\{z_n\}_n$ a $\{z_{\tau(n)}\}_{\tau(n)}$. Podemos escribir $n_k = \tau(k)$ se denota $\{z_{n_k}\}_{n_k}$.

Definición 2.5. Una sucesión $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$ se dice que es una *sucesión de Cauchy* sí para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_n, z_m) < \varepsilon$ para todo $n, m > N$.

Definición 2.6. Un espacio métrico (X, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente en X con la distancia d.

Recordemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, el espacio $\mathbb{R}^k$ con la distancia usual es un espacio completo. Como una sucesión en $\mathbb{C}$ converge si, y solo si, esta sucesión converge cuando se ve como una sucesión en $\mathbb{R}^2$, entonces $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio completo. Ahora vamos a ver alguna propiedad importante de los espacios completos.

Teorema 2.7 (Teorema del encaje de Cantor)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

- *(X, d) es un espacio métrico completo.*
- *Si $\{K_n\}_n \subset X$ es una sucesión de subconjuntos de X tal qué para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que K_n es un conjunto cerrado no vacío, $K_n \subset K_{n-1}$ y la sucesión de sus diámetros tiende a 0 cuando n tiende a infinito, entonces $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$ es exactamente igual a un punto.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en el libro [20] en las páginas 75-78.

Definición 2.8. Un conjunto A de un espacio topológico (X, τ) se denomina conjunto *perfecto* si es cerrado y no tiene puntos aislados, es decir, todo punto de A es un punto de acumulación.

El siguiente resultado describe el cardinal de los subconjuntos perfectos de $\mathbb{C}$.

Teorema 2.9. *Todo conjunto perfecto $A \subset \mathbb{C}$, distinto del vacío, es no numerable.*

Demostración. Primero vamos a ver que si un conjunto perfecto A tiene puntos de acumulación, es decir, es distinto de vacío, entonces es un conjunto infinito. Además la intersección de cualquier entorno de un punto de acumulación con A también tiene infinitos puntos.

Supongamos que $A = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ es un conjunto finito y elegimos un punto de acumulación $w \in A'$. Sea $\epsilon_i = \frac{|w-z_i|}{2}$ y tomamos $\epsilon = \text{mín}_i\{\epsilon_i : \epsilon_i > 0\}$ entonces tenemos que $D_w^\epsilon \cap (A \backslash \{w\}) = \emptyset$, lo cual contradice con que w es un punto de acumulación. Si existiese un entorno V de w con $V \cap A = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$, repitiendo el proceso anterior, encontramos un entorno de w que no interseca a A, luego $V \cap A$ tiene que ser infinito.

Luego si A es un conjunto perfecto no vacío, tiene puntos de acumulación y por lo tanto es infinito. Ahora vamos a demostrar por reducción al absurdo que A no es numerable. La idea de esta demostración se encuentra en [19], aunque en esta referencia se prueba para un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Supongamos que A es numerable, entonces se puede escribir como $A = \{z_1, z_2, ..., z_n, ...\}$ y construimos una sucesión de entornos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la forma siguiente:

Empezamos con $V_1 = \mathbb{D}^1_{z_1}$ el cual es un entorno de z_1 y está acotado. Como z_1 es un punto de acumulación de A, hay infinitos elementos de A en V_1. Seleccionamos uno de esos elementos que podemos suponer que es $z_2 \in A$. Sea $|z_1 - z_2| = \epsilon_1 < 1$, tomamos $r_2 < \text{mín}\{1 - \epsilon_1, \epsilon_1\}$ y consideramos $V_2 = \mathbb{D}^{r_2}_{z_2}$ que es un entorno acotado de z_2, verificando:

- $V_2 \cap A \neq \emptyset$, ya que $z_2 \in V_2$
- $\overline{V}_2 \subset V_1$ porque $\overline{V_2} \subset V_1$: ya que si tomamos $z \in \overline{V_2}$, tenemos que

  $$|z - z_1| \leq |z - z_2| + |z_2 - z_1| \leq r_2 + \epsilon_1 < 1$$

  y por lo tanto tenemos que $z \in V_1$.
- $z_1 \notin \overline{V}_2$ porque tenemos que $|z_1 - z_2| = \epsilon_1 > r_2$

Como z_2 es un punto de acumulación de A, sabemos que hay infinitos elementos en $V_2 \cap A$. Podemos suponer que $z_3 \in V_2 \cap A$ y de forma similar al caso anterior podemos construir un entorno acotado V_3 de z_3 que cumpla que $V_3 \cap A \neq \emptyset$, $\overline{V}_3 \subset V_2$ y que $z_2 \notin \overline{V_3}$. Luego repitiendo este mismo proceso para cada n, podemos construir un entorno acotado V_n de cada z_n que verifica:

- $V_n \cap A \neq \emptyset$
- $\overline{V}_n \subset V_{n-1}$
- $z_{n-1} \notin \overline{V}_n$

Podemos consideramos el conjunto cerrado $K_n = \overline{V}_n \cap A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que cada K_n es no vacío porque tenemos que $z_n \in K_n$. La familia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos compactos debido a que estos son conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{C}$, son cerrados por ser intersección de cerrados y acotados por estar contenidos en otro conjunto acotado $\overline{V_n}$. Luego tenemos una familia K_n de conjuntos compactos no vacíos que verifican

$$\cdots \subset K_n \subset K_{n-1} \subset \cdots \subset K_1$$

Y como $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo, por el teorema del encaje de Cantor (teorema 2.7) tenemos que $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Pero como $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \subset A$, entonces debe existir al menos un n_0 tal que $z_{n_0} \in \cap_{n=1}^{\infty} K_n$, pero esto no es posible ya que $z_{n_0} \notin K_{n_0-1}$ porque $z_{n_0} \notin \overline{V}_{n_0}$ debido a como se han construido los entornos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

También para este trabajo va a ser muy relevante la noción de conexión.

Definición 2.10. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un *espacio conexo* si no existe un par A, B de conjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos tal que $A \cup B = X$.

Sea X un espacio topológico, llamaremos $\mathcal{C}$ al conjunto de los subconjuntos conexos de X y ordenamos a $\mathcal{C}$ con la inclusión y a los elementos maximales los llamaremos componentes conexas.

Definición 2.11. Un espacio topológico X es *totalmente disconexo* si y sólo si los únicos conjuntos conexos no vacíon son los conjuntos unipuntuales.

Por último, otra noción que nos será de utilidad es la de conjunto de Cantor. Para ver más detalles de este conjunto y sus propiedades se puede consultar el libro [20].

Definición 2.12. El *conjunto de Cantor* admite dos definiciones equivalentes:

- Es el conjunto de puntos en el intervalo real [0,1] que tienen expresión en base 3 en la cual no se utiliza el número 1.
- El conjunto que se obtiene de [0,1] al eliminar en cada paso del conjunto al segmento abierto correspondiente al tercio central de cada intervalo

En general decimos que un conjunto es de Cantor si es homeomorfo al conjunto Cantor de la definición previa.

2.2. Funciones en variable compleja

Vamos a empezar definiendo y enunciando las nociones importantes de variable compleja que necesitaremos usar más tarde. Vamos a seguir el libro [3].

Definición 2.13. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Una función $f : A \to \mathbb{C}$ si dice que es *analítica* si localmente tiene una expresión en serie de potencias, es decir, si para cada $z_0 \in A$, existe un disco $\mathbb{D}^{\delta}_{z_0} \subset A$, con $\delta > 0$, tal que

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(z - z_0)^i$$

para todo $z \in \mathbb{D}^{\delta}_{z_0}$.

Definición 2.14. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto. Decimos que A es un lo llamaremos *dominio* si es un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$.

Las funciones en variable compleja se pueden ver como suma de funciones en variable real. Como hemos hecho antes podemos identificar $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ y un abierto de $A \subset \mathbb{C}$ corresponde a un abierto $\widehat{A} \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 2.15. Una función $f : A \to \mathbb{C}$, se dice *derivable* o *diferenciable* en z_0 si existe el límite $f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Se dice *holomorfa* en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ si es derivable para todo $z \in A$. Si este límite existe para todo punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se dice que la función f es una función e*entera*. Es decir, una función es entera si es derivable en todo punto de $\mathbb{C}$.

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función. Si $z = x + iy$ podemos ver la función como dos funciones de $\mathbb{R}$, es decir, podemos definir las funciones $u, v : \widehat{A} \to \mathbb{R}$ tales que $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ y $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$.

Teorema 2.16. *Sean $f : A \to \mathbb{C}$ una función y $u(x, y)$ y $v(x, y)$ las funciones en variable real asociadas a f. La siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *f es derivable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$*
- *u y v son diferenciables en el punto (x_0, y_0), verificando que:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Teorema 2.17. *Una función en variable compleja es analítica, sí y solo sí, es holomorfa.*

A continuación vamos a enunciar algunas propiedades de las funciones holomorfas que nos serán útiles más adelante.

Lema 2.18 (Lema de Schwarz)**.** *Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad y sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces $f(z)$ verifica que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

Teorema 2.19. *Sea f una función analítica definida en un dominio A. Si la función f es constante en algún abierto de A, entonces f es constante en A.*

Por último en esta sección vamos a enunciar algunos teoremas importantes a la hora de trabajar con polinomios.

Teorema 2.20 (Teorema fundamental del álgebra)**.** *Todo polinomio de grado $d > 0$ con coeficientes complejos tiene d raíces, contando la multiplicidad de las raíces.*

Teorema 2.21 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Si U es un subconjunto abierto conexo del plano complejo $\mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante, entonces f es una función abierta, es decir, si V es un subconjunto abierto de U entonces $f(V)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.*

La demostración de este teoremas la podemos encontrar en la referencia [6]

Teorema 2.22 (Teorema principal de compacidad)**.** *Si K es un subconjunto compacto del plano complejo $\mathbb{C}$ y $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua, entonces $f(K)$ es compacto.*

Teorema 2.23 (Teorema de la aplicación cerrada)**.** *Si K es un subconjunto compacto del plano complejo $\mathbb{C}$ y $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua, entonces f es una función cerrada, es decir, si M es un subconjunto cerrado de K entonces $f(M)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$.*

Estos dos últimos teoremas salen de las tres siguientes propiedades topológicas:

- La imagen de un compacto por una aplicación continua es compacto.
- Todo compacto de un espacio de Hausdorff es compacto.
- Todo espacio métrico es un espacio Hausdorff.

Teorema 2.24 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea $A \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica. Supongamos que $f(a) = b$ con $f'(a) \neq 0$, entonces existen abiertos $U, V \subset \mathbb{C}$ tales que $a \in U, b \in V$ y $f : U \to V$ es una función biyectiva y por lo tanto tiene inversa $f^{-1} : V \to U$ que también es analítica.*

2.3. Sucesiones de funciones en variable compleja

Recordemos ahora algunos nociones importantes para el estudio de sucesiones de funciones:

Definición 2.25. Una *sucesión de funciones* definida en A es una aplicación que a cada número natural n le hace corresponder una función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Usaremos el símbolo $\{f_n\}_n$ para representar la sucesión de funciones dada por la asociación:

$$n \longmapsto f(n) = f_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.26. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : A \to \mathbb{C}$ y sea $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función creciente. Se llama *subsucesión* de $\{f_n\}_n$ a $\{f_{\tau(n)}\}_{\tau(n)}$ y si denotamos $n_k = \tau(k)$ se puede escribir $\{f_{n_k}\}_{n_k}$.

Ahora vamos a estudiar los distintos tipos de convergencia y sus propiedades para las sucesiones de funciones complejas.

Definición 2.27. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones definida en un dominio A. Se dice que $\{f_n\}_n$ *converge* o *converge puntualmente* a la función f en A, si lo hace para cada z fijo, es decir, para cada $z \in A$, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Y se dice que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge al infinito* en A si para todo $M > 0$, existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$|f_n(z)| > M$$

para todo $z \in A$.

Definición 2.28. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones definida en un dominio A. Se dice que la sucesión $\{f_n\}_n$ *converge uniformemente* a f en A si f_n converge puntualmente a f en A, y además, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon$$

para todo $N > n$ y para todo $z \in A$.

A los dos tipos de convergencia nombrados anteriormente a veces se les denomina convergencias globales en A. Más adelante veremos otro tipo de convergencia que es la convergencia local.

También podemos observar que para al igual que las sucesiones de números complejos, las sucesiones de funciones en variable compleja pueden verse como dos sucesiones de funciones reales. Como hemos definido antes $f_n = u_n + iv_n$. Se tiene que

- La sucesión de funciones converge tanto forma puntual como de forma uniforme, sí y solo sí, al verlo como dos funciones reales ambas convergen con el mismo tipo de convergencia.
- La sucesión de funciones converge tanto forma puntual como de forma uniforme en un punto al infinito, sí y solo sí, su módulo lo hace.

El siguiente resultado nos dice que para comprobar la convergencia uniforme de una sucesión de funciones basta hacerlo para los compactos contenidos en el abierto donde las funciones están definidas.

Proposición 2.29. *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones definidas en un abierto A. La sucesión converge uniformemente en A, sí y solo sí, converge uniformemente en cada conjunto compacto K contenido en A.*

Teorema 2.30. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a una función f en un dominio A, sí y solo sí, si existe una sucesión $\delta_n > 0$ en $\mathbb{R}$ con $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sup_{z\in A} |f(z) - f_N(z)| \leq \delta_n$$

para todo $n \geq n_0$

Veamos dos ejemplos para entender mejor las definiciones anteriores.

Ejemplo 2.31. Podemos ver que la sucesión de funciones $\{g_n\}_n$ definida por:

$$\begin{array}{cccc} g_n: & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{nz}{(n-1)} \end{array}$$

converge tanto puntual como uniformemente a $g(z) = z$. Esto lo podemos comprobar usando el teorema anterior:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z) - g_n(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left| z - \frac{nz}{(n-1)} \right| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|(n-1)z - nz|}{|(n-1)|} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|z|}{|(n-1)|} = \frac{1}{n-1}$$

Y si denotamos a $\delta_n = \frac{1}{n-1}$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$

Pero no todas las sucesiones de funciones que convergen puntualmente lo hacen uniformemente. En el siguiente ejemplo vamos a ver un caso en el que no ocurre así.

Ejemplo 2.32. Si consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ definida en $[0, 1]$, donde $[0, 1]$ es el segmento que une el 0 y el 1 en la recta real contenida en el plano complejo. Es decir de las funciones $f_n = u_n + iv_n$ consideramos solo la parte real, es decir $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cccc} f_n: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

Esta sucesión de funciones no converge uniformemente pero si lo hace de forma puntual a la función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1) \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Veamos que $\{f_n\}_n$ no converge uniformemente a f. Si lo hiciera, dado $\varepsilon > 0$, existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$z^n < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$ y cualquier $z \in (0, 1)$. Esto implicaría que que para todo $n \geq n_0$ se tendría $n \ln(z) < \ln(\varepsilon)$ para todo $z \in (0, 1)$ y por lo tanto

$$\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(z)} < n \text{ para todo } z \in (0,1)$$

Pero si elegimos la sucesión $\{z_k\}_k$ con $z_k = 1 - \frac{1}{1+k}$, tenemos que

$$\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(z_k)}$$

no está acotado.

Otra forma de ver que la sucesión $\{f_n\}_n$ no converge uniformemente es ver que como se muestra en la siguiente imagen, que si f se rodea con una banda de longitud ε ninguna de las imágenes de las funciones de la sucesión están dentro de la banda. Si la sucesión fuera uniformemente convergente, tendríamos que en la banda estaría todas las imágenes de f_k menos un número finito. Sin embargo este no es el caso como se muestra en la siguiente imagen:

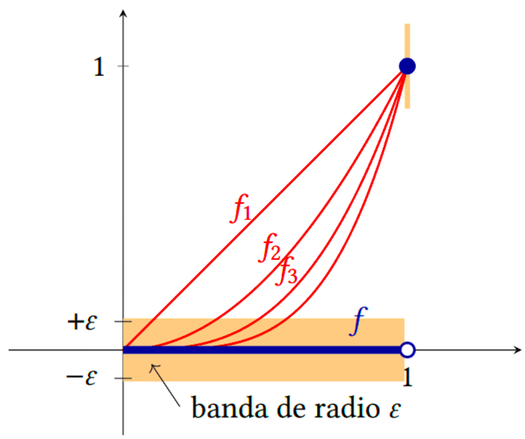

Figura 1: Gráfica de las sucesiones $\{f_k\}_k$ y f rodeada de una banda de anchura ε. correspondiente al ejemplo 2.32. Figura obtenida de [15]

Podemos observar que si $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones continuas en un dominio A que converge uniformemente a una función f, entonces f también es continua. El ejemplo anterior muestra que esta propiedad no es siempre cierta para la convergencia puntual.

Se tiene también la siguiente propiedad cuando tenemos convergencia uniforme de funciones:

Teorema 2.33 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sean f_n, con $n \in \mathbb{N}$, funciones holomorfas definidas en un conjunto abierto A. Si la sucesión $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f en los compactos de A, entonces la función f es holomorfa en A y la sucesión $\{f'_n\}_n$ formada por las derivadas de las funciones $\{f_n\}_n$, convergen uniformemente sobre compactos de A a f' la derivada de f.*

Se puede observar que este teorema implica que la sucesión dada por las derivada k-ésima de f_n converge uniformemente sobre compactos de A, a la derivada k-ésima de f.

A continuación vamos a introducir la noción de convergencia local.

Definición 2.34. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones definidas en un dominio A y sea V un subconjunto de A. Se dice que $\{f_n\}_n$ que *converge localmente* a f en V si para todo $z \in V$ existe un entono V_z de z tal que $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a la función continua f en V_z. Si para todo $z \in A$ existe un entorno V_z tal que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f en V_z se dice que la sucesión $\{f_n\}$ *converge localmente uniformemente* a f en V.

Es trivial que toda sucesión que converge globalmente en A también converge localmente pero no toda sucesión de funciones que converge localmente, converge globalmente. Veamos un ejemplo en el que no ocurre.

Ejemplo 2.35. Consideremos laa sucesión de funciones $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por:

$$f_n(z) = \begin{cases} z & \text{si} \quad |z| \leq n \\ n & \text{si} \quad n < |z| \end{cases}$$

Esta sucesión converge uniformemente localmente a $f(z) = z$ pero no converge uniformemente (globalmente) en $\mathbb{C}$. Podemos ver que $\{f_n\}_n$ no converge uniformemente de forma global en $\mathbb{C}$, ya que si tomamos $\varepsilon = 0{,}5$ para todo N, y si consideramos $z = n + 1$ entonces tenemos que

$$|f_n(z) - f(z)| = 1$$

por lo tanto la sucesión no converge uniformemente.

Por lo tanto la sucesión no converge uniformemente.

Ahora vamos a ver los diferentes criterios que hay al obtener una función f como límite de una sucesión $\{f_n\}_n$ y con alguno de estos ver que propiedades comparten las distintas f_n con f. En general si f es un límite de $\{f_n\}_n$ y si la convergencia es suficientemente fuerte f tendrá alguna de las propiedades de las funciones f_n.

Definición 2.36. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones definidas en un compacto K. Se dice que la familia $\mathcal{F}$ es *uniformemente equicontinua* en un punto $z_0 \in K$ sí para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $f \in F$ tenemos que:

$$|z - z_0| < \delta \text{ implica que } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Se dice que la familia $\mathcal{F}$ es *equicontinua* en K sí para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda $f \in F$ tenemos que:

para todo $z, w \in K$ con, $|z - w| < \delta$ se tiene que $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$.

Definición 2.37. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones definidas en un dominio A. Se dice que $\mathcal{F}$ está *puntualmente acotada* si para todo $z_0 \in A$ se tiene que:

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z_0)| < \infty$$

.

Definición 2.38. Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones definida en K tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ existe una constante $M \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in K$, entonces se dice que la familia $\mathcal{F}$ está *acotada uniformemente.*

El siguiente resultado nos da una relación entre las sucesión que están puntualmente acotadas y son equicontinuas y su convergencia.

Teorema 2.39 (Teorema de Arzèla-Ascoli)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas en un conjunto compacto K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *Toda sucesión de funciones contenida en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformente en K.*
- *La familia $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada y es equicontinua en K.*

Otra versión de este teorema, que nos va a ser de utilidad más adelante es la siguiente.

Teorema 2.40. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas definidas en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *Toda sucesión de funciones contenida en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformente en compactos de U.*
- *La familia $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada en U y es equicontinua en cada punto de U.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en el libro [3].

Proposición 2.41. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones homolorfas en un abierto A en $\mathbb{C}$ que está acotada uniformemente en cada compacto de A. Entonces la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de U.*

Una de las maneras de definir el conjunto de Julia de un polinomio usa la noción de sucesión normal de funciones. Vamos a definir cuando una familia de funciones es normal.

Definición 2.42. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en A. Se dice que la familia de funciones analíticas $\mathcal{F}$ es *normal* en A si toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tiene un subsucesión que o bien, converge a una función $f : A \to \mathbb{C}$, uniformemente en cada subconjunto compacto de A o bien, la sucesión $\{f_n\}_n$ converge a infinito en A.

Dado un conjunto A, vamos a denotar $\mathcal{H}(A)$ a la familia formada por las funciones holomorfas en A.

A continuación enunciamos el teorema de Montel que caracteriza cuando una familia de funciones es normal.

Teorema 2.43 (Teorema de Montel)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia en $\mathcal{H}(U)$. La familia $\mathcal{F}$ es normal sí, y sólo si, la familia $\mathcal{F}$ está uniformemente acotada sobre compactos de U.*

El siguiene resultado es también conocido como teorema de Montel y nos da una propiedad que usaremos más adelante de las sucesiones de funciones que no verifican la propiedad de ser normales. Una prueba de este resultado la podemos encontrar en [10].

Teorema 2.44. *Dada una familia $\{f_n\}_n$ de funciones complejas en un dominio abierto A. Si $\{f_n\}_n$ no es normal entonces tenemos que para todo $w \in \mathbb{C}$, con como mucho una excepción, se tiene que $f_{n_0}(z) = w$ para algún $z \in \mathbb{C}$ y para alguna función $f_{n_0} \in \{f_n\}_n$.*

2.4. Introducción a la dinámica de un polinomio en variable compleja

Para esta sección vamos a seguir los apuntes [7]. La motivación de esta sección es estudiar el comportamiento en un punto dado de la iteración de una función $f : A \to \mathbb{C}$, es decir el comportamiento la sucesión $z_0, f(z_0), f(f(z_0)), f(f(f(z_0)))...$

A partir de ahora denotaremos f^k a la composición k veces de f, es decir,

$$f^k(z) = f \circ \overset{k)}{\cdots} \circ f(z) = f(f(...(f(z))).$$

Definición 2.45. La *órbita* de z_0 por f es la sucesión $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ donde $z_k = f^k(z_0)$ para $k = 1, 2, ...$ Al punto z_0 se le llama *punto inicial* o *condición inicial*.

Cuando la órbita de un punto sale de un conjunto se dice que la órbita *escapa* de ese conjunto, y cuando la órbita tiende a infinito de dice que *escapa a infinito*.

Dada una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, decimos que z_0 es un *punto fijo* de f si $f(z_0) = z_0$. Decimos que z_0 es un *punto periódico* si $f^p(z_0) = z_0$ para algún $p \geq 1$. Al p más pequeño tal que $f^p(z_0) = z_0$ se le denomina *periodo* de z_0 en f.

Dado un punto periódico z_0 de periodo p con $(f^p)'(z_0) = \lambda$, el punto z_0 se dice que es

- *atractivo* si $0 \leq |\lambda| < 1$; cuando $\lambda = 0$, se dice que z_0 es *superatractivo*;
- *indiferente* si $|\lambda| = 1$;
- *repelente* si $|\lambda| > 1$.

La órbita un punto periódico de periodo p es un *p-ciclo*. Esto es porque si z_0 es un punto periódico de periodo p y consideramos su órbita $\{z_k\}_k$, como $f^{np}(z_0) = z_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que

$$f^{2p}(z_0) = f^p(f^p(z_0)) = f^p(z_0) = z_0$$

y repitiendo este proceso vemos que $f^{np}(z_0) = z_0$, tenemos que

$$f^{pn+i}(z_0) = f^i(f^{pn}(z_0)) = f^i(z_0) = z_i$$

para todo $i = 1, \cdots, p-1$. Además si z_k está en el ciclo de z_0 tiene el mismo periodo que z_0. Tenemos que si z_k tiene que tener un periodo menor que p ya que

$$f^p(z_k) = f^p(f^k(z_0)) = f^k(f^p(z_0)) = f^k(z_0) = z_k$$

Si suponemos que el periodo de z_k es $l < p$ entonces tendríamos que

$$f^l(z_0) = f^l(f^{p-k}(z_k)) = f^{p-k}(f^l(z_k)) = f^{p-k}(z_k) = z_0$$

Y el periodo de z_0 sería l lo cual es absurdo.

Ejemplo 2.46. Dada la función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z^2 - 1 \end{array}$$

y el punto $z_0 = 0$, tendríamos el 2-ciclo $\{0, -1\}$. Esto es porque $f(0) = -1$ y $f^2(0) = f(-1) = 0$ y por lo tanto la órbita de 0 es la sucesión $0, -1, 0, -1, 0, -1 \cdots$.

A los ciclos generados por puntos periódicos atractivos (respectivamente para puntos indiferentes o repelentes) se les denota ciclos atractivos (respectivamente para puntos indiferentes o repelentes). Esto es por el siguiente teorema.

Teorema 2.47. *Los puntos en un n-ciclo son o todos atractivos o todos repelentes o todos indiferentes.*

Demostración. Consideramos una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con un punto periódico z_0 de periodo p. Aplicando la regla de la cadena a $g = f^p$ y obtenemos

$$g'(z) = f'(f^{p-1}(z)) \cdot f'(f^{p-2}(z)) \cdot ... \cdot f'(f(z)) \cdot f'(z)$$

Si evaluamos $z = z_0$ tenemos

$$g'(z_0) = f'(z_{p-1}) \cdot ... \cdot f'(z_1) \cdot f'(z_0)$$

es decir el valor de $g'(z_0)$ es igual al multiplicación de los valores de las derivadas en los puntos del ciclo. Si aplicamos este resultado al resto de puntos del ciclo obtenemos que

$$g'(z_0) = g'(z_1) = ... = g'(z_{p-1})$$

Y por lo tanto o todos los punto del ciclo son repelentes o todos atractivos o todos indiferentes. □

Definición 2.48. Dado un punto fijo atractivo w de f, podemos definir

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \to w \text{ cuando } k \to \infty\}$$

a este conjunto se le denomina la *cuenca de atracción* de w.

Definición 2.49. Un *sistema dinámico* es un par (X, f) tal que X es un espacio métrico y $f : X \to X$ es una aplicación de X.

Un sistema dinámico se llama *transitivo* si para $x, y \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un $z \in X$ cuya órbita por f contiene a un punto a distancia ε de x y a otro a distancia ε de y.

Un ejemplo de un dinámico sistema transitivo sería un sistema (X, f) que tenga una órbita densa en X ya que por definición va a contener puntos a distancia menor que cualquier $\varepsilon > 0$ de cualquier punto de X.

Definición 2.50. Un sistema dinámico (X, f) se dice que *depende sensiblemente de la condición inicial* si existe una constante $\lambda > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $y \in X$ tal que $d(x, y) < \epsilon$ pero existe un k tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \lambda$.

Definición 2.51. Un sistema dinámico (X, f) se llama *caótico* si cumple que

- el conjunto de puntos periódicos es denso,
- es un sistema transitivo,
- es un sistema que depende sensiblemente de la condición inicial.

El motivo de estudio de los conjuntos caóticos es porque pueden ser difíciles de tratar computacionalmente, esto es debido no lo puedes descomponer en dos sistemas que se puedan analizar separadamente. Pero sin embargo, al contener los puntos periódicos, tiene una cantidad de puntos de los cuales se puede predecir el comportamiento.

Teorema 2.52. *Si (X, f) es un sistema dinámico y f es una aplicación continua cuyo conjunto de puntos periódicos es denso en X y además el sistema es transitivo, entonces f tiene una dependencia sensible de la condición inicial.*

La demostración de este último teorema se puede encontrar en la revista [2].

3. Conjuto de Julia

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar las distintas propiedades del conjunto de Julia $J(f)$ de una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por un polinomio de grado mayor o igual que 2. Para esto hay que considerar la sucesión de funciones $\{f^k\}_k$, obtenida componiendo el polinomio con si mismo.

Como veremos más adelante en más detalle en la definición 3.3, el conjunto de Julia de f está formado por los puntos en los que la sucesión $\{f^k\}_k$ no es normal (ver la definición 2.42).

Este conjunto tiene relación con los punto periódicos repelentes, de hecho el conjunto de Julia de f una función polinomial es igual es igual a la clausura del conjunto formado por los puntos periódicos repelentes de f. Esto lo probaremos en el teorema 3.15.

En este trabajo vamos a centrarnos en el estudio del conjunto de Julia para funciones polinomiales y vamos a estudiar los polinomios de grado mayor o igual a 2. Esto es porque para los polinomios de grado 0 o 1 el conjunto de Julia es muy simple como explicaremos a continuación. Para estudiar estos ejemplos vamos a usar no solo la definición de conjunto de Julia si no que además la propiedad de que el conjunto de Julia es igual a la clausura de los puntos periódicos repelentes:

- En el caso de que f esté definida por un polinomio de grado 0, es decir, $f(z) = c$, vemos que al iterar f nos queda la misma constante porque $f \circ f(z) = c$ y por lo tanto $f^k(z) = c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la sucesión $\{f^k\}_k$ es normal en todo punto del dominio. Y como el conjunto de Julia son los puntos en los que la sucesión no es normal, el conjunto de Julia de un polinomio de grado 0 sería igual al vacío.

- Si $f(z) = z$, tenemos que $f^k(z) = z$. Por lo tanto, al igual que en el caso anterior, la sucesión $\{f^k\}_k$ es normal en todo punto y el conjunto de Julia es igual al vacío.

- Por último si $f(z) = a_1 z + a_0$ está dada por un polinomio de grado 1, usando el teorema fundamental del álgebra (ver teorema 2.20) vamos a ver que tiene un único punto periódico $z_0 = \frac{-a_0}{a_1 - 1}$. Al tener un único punto periódico el conjunto de Julia será o igual a z_0 o igual al vacío, esto va a depender de si z_0 es un punto repelente en cuyo caso el Julia será la clausura de z_0 que es z_0, en otro caso el conjunto de Julia es el vacío, ya que la clausura de vacío es el vacío. Primero observemos que si z_0 es punto fijo de f también lo es de f^p.

  Por último, veamos que z_0 es un punto fijo de f si z_0 es raíz de $f(z) - z$. Como f^p tiene grado uno para todo $p \in \mathbb{N}$, entonces $f^p(z) - z$ tiene también grado 1 y por el teorema fundamental del álgebra sólo tiene un punto fijo que debe coincidir con el punto fijo z_0 de f. Luego f tiene un único punto periódico que está dado por su punto fijo. Por lo tanto el conjunto de Julia de f es igual o a un punto o al vacío.

Sin embargo cuando el grado es mayor o igual que dos, el conjunto de Julia de un polinomio varía mucho y de hecho se parece a fractales en el plano complejo. Ver por ejemplo la Figura 2:

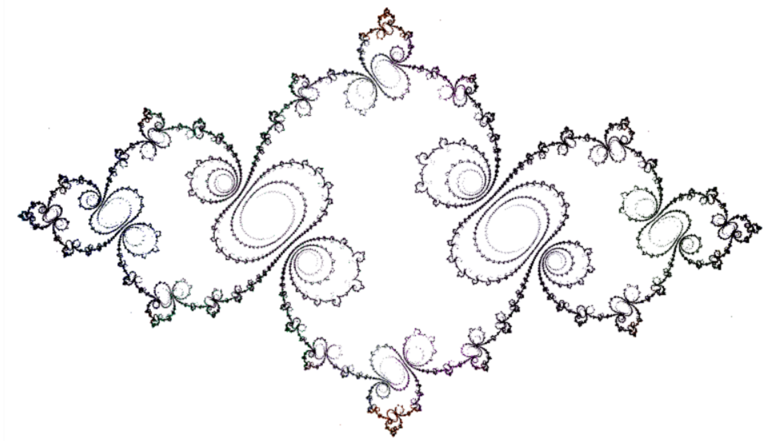

Figura 2: Conjunto de Julia para $f(z) = z^2 - 0{,}750357820200574 + 0{,}047756163825227i$. Imagen obtenida de [17]

Los dos siguientes resultados nos ayuda a ilustrar muy bien la relación entre los puntos atractivos o repelentes y la convergencia de la sucesión de $\{f^n\}_n$. Estos resultados se han obtenido de la referencia [18].

Teorema 3.1. *Sea z_0 un punto fijo atractivo de una función homolorfa f, entonces existe un disco abierto $\mathbb{D}^r_{z_0}$ con radio $r > 0$ y centrado en z_0 tal que para todo $z \in \mathbb{D}^r_{z_0}$, se tiene que $f^n(z) \in \mathbb{D}^r_{z_0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = z_0$ para todo $z \in \mathbb{D}^r_{z_0}$.*

Demostración. Como z_0 es un punto fijo atractivo de f tenemos que $|f'(z_0)| < 1$. Y por lo tanto $|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} < 1$.

Luego existe un $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ y una constante $\lambda < 1$ tal que si $|z - z_0| < r$ tenemos que

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - z_0| \leq \lambda|z - z_0|$$

En particular $|f(z) - z_0| \leq \lambda r < r$ y por lo tanto $f(z) \in \mathbb{D}^r_{z_0}$.

Si iteramos f en $z \in \mathbb{D}^r_{z_0}$ siguiendo la ecuación anterior vemos que

$$|f^2(z) - f(z_0)| = |f^2(z) - z_0| \leq \lambda|f(z) - z_0|$$

y si seguimos iterando tenemos

$$|f^n(z) - z_0| < \lambda^n|z - z_0| < \lambda^n r < r$$

y por lo tanto $f^n(z) \in \mathbb{D}^r_{z_0}$. Además como $\lambda < 1$, cuando n tiende a infinito, podemos observar que

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(z) - z_0| \leq \lim_{n\to\infty} \lambda^n |z - z_0| = 0$$

y por lo tanto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(z) = z_0.$$

□

Se puede observar que este resultado también es cierto si el punto es superatractivo.

También tenemos un resultado análogo para los puntos repelentes, es decir que si un punto z es un punto fijo repelente existe un $n \in \mathbb{N}$ para el que $f^n(z)$ no está en el disco.

Teorema 3.2. *Sea z_0 un punto fijo repelente de una función homolorfa f. Entonces existe un disco abierto $\mathbb{D}^r_{z_0}$ con radio positivo r y centrado en $z_0 \in \mathbb{D}^r_{z_0}$ tal que para todo $z \in \mathbb{D}^r_{z_0} \setminus \{z_0\}$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) \notin \mathbb{D}^r_{z_0}$.*

Demostración. Siguiendo el mismo argumento que se ha usado para el teorema anterior, tenemos que existe un $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ y una constante $\lambda > 1$ tal que si $|z - z_0| < r$ tenemos que

$$|f(z) - z_0| \geq \lambda |z - z_0|.$$

Ahora si asumimos que $f^{n-1}(z) \in \mathbb{D}^r_{z_0}$ y hacemos inducción tenemos que

$$|f^n(z) - z_0| \geq \lambda^n |z - z_0|.$$

Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{n-1}(z) \in \mathbb{D}^r_{z_0}$, esto nos da contradicción porque como $\lambda > 1$, si $z \neq z_0$ podemos encontrar un n_0 con $\lambda^{n_0}|z - z_0| > r$ y por lo tanto

$$|f^{n_0}(z) - z_0| \geq \lambda^{n_0} |z - z_0| > r$$

en contra con la hipótesis de $f^{n_0}(z) \in \mathbb{D}^r_{z_0}$. □

Por último añadir que un ejemplo de motivación de la investigación del conjunto de Julia y sus propiedades, le podemos encontrar en la referencia [14] y fue el desarrollo del método de Newton. El método de Newton sirve para encontrar soluciones aproximadas de una ecuación $f(z)$ que se basa en la composición de $N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ consigo misma hasta encontrar los puntos fijos de $N(z)$ que son la solución de $f(z)$. Lo interesante de este método es ver en que puntos converge a una raíz y a cual converge. De hecho el conjunto de Julia de $N(z)$ son precisamente los puntos fijos de $N(z)$ con los que no se converge con el método de Newton a una solución.

3.1. Definición y propiedades del Conjunto de Julia

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación dada por un polinomio de grado $d \geq 2$. Para estudiar las propiedades del conjunto de Julia de f necesitamos usar las propiedades de funciones normales introducidas en la sección 2. Por este motivo introducimos la siguiente definición de conjunto de Julia.

Definición 3.3. Llamamos *conjunto de Julia* de f al conjunto

$$J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{la familia } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ no es normal en } z\}$$

Al complementario de $J_0(f)$ se le llama *conjunto de Fatou*:

$$F_0(f) = \mathbb{C} \setminus J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que existe un conjunto abierto } V \text{ con } z \in V \text{ y tal que } \{f^k\}_k \text{ es normal en } V\}$$

Observemos que $F_0(f)$ es un conjunto abierto.

El objetivo de esta sección es demostrar que como hemos dicho antes, el conjunto de Julia de un polinomio f es igual al conjunto

$$J(f) = \overline{\{z \in \mathbb{C} : z \text{ es un punto periódico repelente de } f\}}$$

es decir, $J_0(f) = J(f)$ esto lo probaremos en el teorema 3.15.

Ahora vamos a demostrar distintas propiedades del conjunto de Julia de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación polinomial de grado igual o mayor que 2. Vamos a seguir principalmente el capitulo 14 del libro [9]

Para poder probar que el conjunto de Julia es no vacío necesitamos la siguiente propiedad de las aplicaciones polinomiales de grado mayor o igual que 2.

Lema 3.4. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación polinomial de grado $d \geq 2$ donde escribimos $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$ con $a_d \neq 0$. Dado $\lambda > 1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, existe una constante real $R > 0$ que depende solo del grado d y de los coeficientes a_i tal que si $z \notin \overline{\mathbb{D}}_0^R$ entonces*

$$|f(z)| \geq \lambda |z|$$

En particular, si $z \notin \overline{\mathbb{D}}_0^R$, tenemos que

$$\lim_{d \to \infty} |f^d(z)| = \infty.$$

Demostración. Veamos primero que si tenemos que $\lambda > 1$, existe un $R \in \mathbb{R}$ tal que si $|z| > R$ entonces
$$|f(z)| > \lambda |z|.$$
Usando la desigualdad triangular, tenemos que
$$|a_d z^d| \leq |f(z)| + (|a_{d-1}z^{d-1}| + \cdots + |a_1 z| + |a_0|)$$

Si suponemos que $|z| > 1$, entonces $|z|^{d-1} \geq |z|^k$ para $0 \leq k \leq d-1$, y de la desigualdad anterior obtenemos que
$$|a_d z^d| \leq |f(z)| + (|a_{d-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)|z^{d-1}| = |z^d| \left((|a_d| - \frac{C}{|z|} \right)$$
Por lo tanto
$$|f(z)| \geq |a_d z^d| - (|a_{d-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)|z^{d-1}|$$
Si denotamos $C = \sum_{i=0}^{d-1} |a_i|$, entonces
$$f(z) \geq |a_d z^d| - (|a_{d-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)|z^{d-1}| = |z^d| \left(|a_d| - \frac{C}{|z|} \right)$$
Luego, si tomamos $R = \text{máx}\left\{1, \frac{2C}{|a_d|}, \left(\frac{2\lambda}{|a_d|}\right)^{\frac{1}{(d-1)}}\right\}$ y $|z| > R$, obtenemos
$$|f(z)| \geq |z^d| \cdot \frac{|a_d|}{2} = |z| \cdot \frac{|a_d|}{2} |z|^{d-1} > \lambda |z|$$
como queríamos. Ahora vamos a probar la segunda afirmación utilizando la primera. Observamos que
$$|f^d(z)| \geq \lambda^d |z| \geq \lambda^d R$$

Luego, como $\lambda > 1$ y $R > 0$, obtenemos que para cualquier $|z| > R$ se verifica
$$\lim_{d \to \infty} |f^d(z)| = \infty$$
Con lo que quedaría todo demostrado. □

Lema 3.5. *El conjunto de Julia $J_0(f)$ no es un conjunto vacío.*

Demostración. Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Supongamos que $J_0(f) = \emptyset$. Entonces, para todo $r > 0$, la familia $\{f^k\}_k$ es normal en el disco $\mathbb{D}_0^r$, ya que $\mathbb{D}_0^r \subset F_0(f)$. Al ser f una función polinomial de grado mayor o igual que 2, cogiendo un r suficientemente grande, se tiene $\mathbb{D}_0^r$ contiene al menos un $z_0 \in \mathbb{C}$ en el cual $\lim_{k\to\infty} |f^k(z_0)| = \infty$, como hemos probado en el lema 3.4, y además $\mathbb{D}_0^r$ contiene a un punto fijo w de f, por el teorema 2.20, si elegimos un r suficientemente grande. Luego se tiene que $f(w) = w$ y por lo tanto $f^k(w) = w$ para todo k. Lo anterior es imposible por el teorema de Montel (teorema 2.43) ya que la familia $\{f^k\}_k$ es normal es $\mathbb{D}_0^r$, si y solo si, la familia $\{f^k\}_k$ está uniformemente acotada en los conjuntos compactos de $\mathbb{D}_0^r$. Pero existe un compacto en el cual están contenidos z_0 y w, y cualquier subsucesión de $\{f^k\}_k$ en este compacto no puede converger uniformemente a una función acotada ya que tiene un punto en el cual converge a infinito, ni puede converger a infinito ya que tiene un punto fijo en el cual la función no va a converger a infinito. Por lo tanto esto contradice normalidad de $\{f^k\}_k$ en el compacto. □

Lo siguiente que vamos a demostrar es que le conjunto de Julia es un conjunto compacto:

Lema 3.6. *Si f es una función polinomial, entonces $J_0(f)$ es compacto.*

Demostración. Como hemos observado antes, el complementario de $J_0(f)$ es abierto y por lo tanto $J_0(f)$ es cerrado. Como $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_d z^d$ es un polinomio de grado $d \geq 2$, por el lema 3.4, tenemos que existe un $r > 0$ tal que si $z \notin \mathbb{D}_0^r$, se tiene que $\lim_{k\to\infty} |f^k(z)| = \infty$. Tomando conjunto abierto $D = \{z : |z| > r\}$, vemos que $\{f^k\}_k$ converge uniformemente a ∞ en D, y por definición $\{f^k\}_k$ es normal en D, por lo tanto $D \subset F_0(f)$, lo que quiere decir que $J_0(f) \subset \mathbb{C} \setminus D = \overline{\mathbb{D}_0^r}$ y tenemos que $J_0(f)$ es un conjunto acotado.

Por último, como $J_0(f)$ es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$ es un conjunto compacto. □

El siguiente resultado prueba la invarianza del conjunto de Julia por una función polinomial f y por su contraimagen f^{-1}. Hemos seguido la demostración de [18] (teorema 3.2).

Lema 3.7. *El conjunto de Julia de f verifica que $z \in J_0(f)$, sí y solo sí, $f(z) \in J_0(f)$.*

Demostración. Veamos que $z \in \mathbb{C} \setminus J_0(f)$ si, y sólo si, $f(z) \in \mathbb{C} \setminus J_0(f)$.

Vamos $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(w) = z$. Tenemos que $f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de w. vamos a probar que $\{f^k\}_k$ es normal en $f^{-1}(U)$. Sea K un conjunto compacto contenido en $f^{-1}(U)$. Como F ves continua, $f(K)$ es un conjunto compacto contenido en $f^{-1}(U)$. Como f es continua, $f(K)$ es un conjunto compacto contenido en U. Luego existe una subsucesión $\{f^{k-i}\}_{k_i}$ que converge uniformemente en $f(K)$. Esto implica que la subsucesión $\{f^{k_i+1}\}_{k_i}$ converge uniformemente en K. Luego $w \in \mathbb{C} \setminus J_0(f)$.

Veamos ahora que si $z \in \mathbb{C} \setminus J_0(f)$ entonces $f(z) \in \mathbb{C} \setminus J_0(f)$. Usando la caracterización dada por el teorema 2.40, tenemos que la familia $\{f^k\}_k$ está puntualmente acotada en U y es equicontinua en cada punto de U. Como f es una aplicación abierta por el teorema 2.21, entonces tenemos que $f(U)$ es un entorno abierto de $f(z)$. Veamos que la familia $\{f^k\}_k$ está puntualmente acotada en $f(U)$ y es equicontinua en cada punto de $f(U)$.

Sea $w_0 \in F(U)$, entonces existe $u_0 \in U$ tal que $f(u_0) = w_0$. Como $\{f^k\}_k$ está puntualmente acotada en U, entonces $\sup_k |f^k(u_0)| < \infty$, y por lo tanto $\sup_k |f^k(w_0)| < \infty$. Luego $\{f^k\}_k$ está puntualmente acotada en $f(U)$. Veamos $\{f^k\}_k$ es equicontinua en w_0. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $|u - u_0| < \delta$ con $u \in U$ se tiene que $|f^k(u) - f^k(u_0)| < \varepsilon$ para todo

$k \in \mathbb{N}$. tenemos que $f(\mathbb{D}_{u_0}^{\delta} \cap U)$ es un conjunto abierto contenido en U con $w_0 \in f(\mathbb{D}_{u_0}^{\delta} \cap U)$, luego existe $\delta_0 > 0$ tal que $\mathbb{D}_{u_0}^{\delta} \subset f(\mathbb{D}_{u_0}^{\delta} \cap U)$. Luego, si $|w - w_0| < \delta_0$, entonces existe $u \in U$ con $|u - u_0| < \delta$ y $f(u) = w$, por lo tanto $|f^k(w) - f^k(w_0)| = |f^{k+1}(u) - f^{k+1}(u_0)| < \varepsilon$ para todo k, con lo que queda demostrado que la familia es equicontinua. $\square$

Observación 3.8. Del teorema anterior se deduce que

$$J_0(f) = f(J_0(f)) = f^{-1}(J_0(f)). \tag{1}$$

Esta propiedad también se verifica para el conjunto de Fatou, ya que $z \in J_0(f)$, si y solo si, $f(z) \in J_0(f)$, entonces $z \in \mathbb{C} \setminus J_0(f) = F_0(f)$, si y solo si, $f(z) \in \mathbb{C} \setminus J_0(f) = F_0(f)$. por lo tanto,

$$F_0(f) = f(F_0(f)) = f^{-1}(F_0(f)) \tag{2}$$

Lema 3.9. *El conjunto de Julia $J_0(f)$ de f es igual al conjunto de Julia de la composición de f consigo misma p veces, es decir,*

$$J_0(f^p) = J_0(f).$$

Demostración. Vamos a demostrarlo por doble contenido.

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus J(f)$, entonces existe un entorno U de z donde la familia $\mathcal{F} = \{f^k\}_k$ es normal. En particular, como la subsucesión $\{f^{pn}\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$, luego tiene una subsucesión que converge uniformemente en todo compacto de U. Por lo tanto, tenemos la primera contención $\mathbb{C} \setminus J_0(f) \subset \mathbb{C} \setminus J_0(f^p)$.

Veamos ahora la otra contención. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus J(f^p)$, entonces existe un entorno U de z donde la familia $\mathcal{F} = \{f^{np}\}_n$ es normal. Si tomamos un $k \in \{0, 1, ..., p-1\}$, la familia $\tilde{\mathcal{F}}_k = \{f^{np+k}\}_n$ sigue siendo normal.

Si consideramos la familia $\{f^n\}_n$. Observamos que la sucesión $\{f^n\}_n$ debe contener una subsucesión de la forma $\{f^{l_i p+k}\}_{l_i}$ para algún entero $k \in \{0, 1, ..., p-1\}$, en caso de que no fuera así la sucesión $\{f^n\}_n$ tendría un número finito de elementos. Como $\{f^{l_i p+k}\}_{l_i} \subset \tilde{\mathcal{F}}_k$, entonces tiene una subsucesión que converge uniformente en los compactos de U y por lo tanto la familia $\{f^n\}_n$ es normal en U con lo que tenemos que $\mathbb{C} \setminus J_0(f^p) \subset \mathbb{C} \setminus J_0(f)$ y por lo tanto quedaría demostrado. $\square$

Observación 3.10. Como consecuencia del lema anterior y de los teoremas 3.1 y 3.2 tenemos que todo punto periódico atractivo o superatractivo pertenece al conjunto de Fatou. También es cierto que todo punto periódico repelente pertence al conjunto de Julia, pero esto requiere un poco más de detalle y lo demostraremos en el teorema 3.15.

Lema 3.11. *Dada una aplicación polinomial f, sean $w \in J_0(f)$ y U un entorno de w. Si consideramos el conjunto*

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$$

entonces, tenemos que o bien $W = \mathbb{C}$ o bien $W = \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ donde $z_0 \notin J_0(f)$, es independiente de w y de U.

Demostración. Tenemos que $\{f^k\}_k$ no es normal en w ya que $w \in J_0(f)$ y por el teorema de Montel (teorema 2.44) queda probado que o bien $W = \mathbb{C}$ o bien $W = \mathbb{C}\backslash\{z_0\}$.

Vamos a demostrar que z_0 no depende ni de U ni de w y que $z_0 \notin J_0(f)$ y lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $z_0 \notin W$. Si existe z tal que $f(z) = z_0$ entonces tenemos que como $f(W) \subset W$, z no pertenece a W. Y como $\mathbb{C} \setminus W = \{z_0\}$, esto implica que $z = z_0$.

Como tenemos que f es un función polinomial de grado d mayor que 2, tenemos que la ecuación $f(z) - z_0 = 0$, tiene a z_0 como única solución, por lo tanto se deduce que $f(z) - z_0 = c(z - z_0)^d$, siendo d el grado de f y $c \in \mathbb{C}$.

Veamos ahora que la sucesión $\{f^k\}_k$ converge uniformemente cerca de z_0, en concreto a la función constante igual a z_0, y por lo tanto la familia $\{f^k\}_k$ es normal en z_0. Vamos a ver que obtenemos si iteramos k veces $f(z) = c(z - z_0)^d + z_0$:

$$f^2(z) = f(f(z)) = f(z_0 + c(z + z_0)^d) = z_0 + c(z_0 + c(z - z_0)^d - z_0) = z_0 + c^{d+1}(z - z_0)^{d^2}.$$

$$f^3(z) = f(f^2(z)) = z_0 + c(z_0 + c^{d+1}(z - z_0)^{d^2} - z_0)^d = z_0 + c^{1+d(d+1)}(z - z_0)^{d^3}.$$

Y por lo tanto obtenemos que

$$f^n(z) = f(f^{n-1}(z)) = z_0 + c(z_0 + c^{\sum_{k=0}^{n-1} d^k}(z - z_0)^{d^{n-1}} - z_0)^d = z_0 + c^{\sum_{k=0}^{n} d^k}(z - z_0)^{d^n}.$$

Si tomamos z con $|z - z_0| < \frac{1}{2^k \cdot c^{\frac{\sum_{k=0}^{n} d^k}{d^k}}}$, tenemos

$$|f^k(z) - z_0| \leq |c|^{\sum_{k=0}^{n} d^k}|z - z_0|^{d^k} < |c|^{\sum_{k=0}^{n} d^k} \left| \frac{1}{2^k \cdot c^{\frac{\sum_{k=0}^{n} d^k}{d^k}}} \right|^{kd} = 1/2^k$$

Por lo tanto la sucesión $\{f^k\}_k$ es normal en z_0 y entonces $z_0 \notin J_0(f)$. Además, z_0 solo depende del polinomio f pero no depende de w ni de U. □

Lema 3.12. *Para todo $z \in \mathbb{C}$, con a lo sumo una excepción, si U es un conjunto abierto que interseca a $J_0(f)$, entonces se tiene que*

$$U \cap f^{-k}(z) \neq \emptyset$$

para algún $k \in \mathbb{N}$. Además, si tomamos $z \in J_0(f)$, tenemos que

$$J_0(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ y supongamos que z no es el punto excepcional dado por el lema 3.11. Como $U \cap J_0(f) \neq \emptyset$, entonces U es un entorno de un punto de $J_0(f)$ y por el lema 3.11, tenemos que $z \in \cup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z \in f^k(U)$, esto implica que $f^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset$ como queríamos probar.

Vamos a probar la otra afirmación por doble contenido. Tomemos un $z \in J_0(f)$. Por el lema 3.7, tenemos que $f^{-k}(z) \subset J_0(f)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z) \subset J_0(f)$. Como $J_0(f)$ es un conjunto cerrado entonces tenemos que $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)} \subset J_0(f)$. Para probar la otra contención, tomamos un $w \in J_0(f)$ y un conjunto V abierto que contenga a w. Observamos que w no puede ser el punto excepcional dado por el lema 3.11 ya que $w \in J_0(f)$, por lo tanto usando la primera afirmación de este lema, tenemos que existe k_0 tal que $f^{-k_0}(z) \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto $w \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$. Luego $J_0(f) \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)}$ y queda demostrada la igualdad. □

Lema 3.13. *El conjunto de Julia $J_0(f)$ de un polinomio f es un conjunto perfecto.*

Demostración. Ya vimos que $J_0(f)$ era un conjunto cerrado, así que vamos a ver que $J_0(f)$ no tiene puntos aislados.

Sea $u \in J_0(f)$ y sea U un entorno de u. Veamos que $(U \setminus \{u\}) \cap J_0(f) \neq \emptyset$. Para esto vamos a considerar tres casos.

1. Sea u un punto fijo, es decir, $f(u) = u$. Si $f(z) - u$ tiene como única raíz a u, usando el mismo argumento que en la prueba del lema 3.11 tenemos que $u \notin J_0(f)$. Por lo tanto existe un w distinto de u tal que $f(w) = u$. Por lema 3.12, $U \cap f^{-k}(w) \neq \emptyset$ para algún $k \geq 1$. Como $u \in J_0(f)$ y como $w \in f^{-1}(u)$, entonces, por la observación 3.8, $w \in J_0(f)$. Repitiendo este argumento, tenemos que $f^{-k}(w) \subset J_0(f)$, luego U interseca a $J_0(f)$. Observemos $u \notin f^{-k}(w)$ para ningún k, porque $f^k(u) = u$ y $w \neq u$. Luego

$$(U \setminus \{u\}) \cap J_0(f) \neq \emptyset$$

   y u es un punto de acumulación de $J_0(f)$.

2. Sea u un punto periódico pero no fijo de periodo p, por lo tanto $p \geq 2$. Por el lema 3.9, $J_0(f) = J_0(f^p)$ y aplicando el caso 1 a f^p, tenemos que u es un punto de acumulación de $J_0(f)$.

3. Sea u un punto que no es ni fijo ni periódico de f. Por el lema 3.12, existe un k tal que

$$U \cap f^{-k}(u) \neq \emptyset$$

   Como en el caso 1, tenemos que por la observación 3.8, $f^{-k}(u) \subset J_0(f)$ y por lo tanto U interseca a $J_0(f)$ en un punto que es distinto de u, ya que $u \notin f^{-k}(u)$ para ningún k al no ser u ni un punto fijo ni un punto periódico.

□

Como consecuencia del teorema anterior y del teorema 2.9, observamos que el conjunto de Julia de un polinomio f es un conjunto no numerable.

Lema 3.14. *Si f es un función polinomial, el interior del conjunto de Julia de f es vacío.*

Demostración. Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que existe un abierto U tal que $U \subset J_0(f)$, entonces tendríamos que $f^k(U) \subset J_0(f)$ para todo k por el lema 3.7 y entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U) \subset J_0(f)$. Por el lema 3.11 tenemos que $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ es o bien $\mathbb{C}$ o bien $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ y por lo tanto el conjunto de Julia sería un de estos dos conjuntos. Sin embargo, esto contradice el lema 3.6 que dice que el conjunto de Julia es compacto. $\square$

Como hemos dicho al principio de esta sección vamos a demostrar en el siguiente resultado que el conjunto de Julia de un polinomio f es coincide con el conjunto

$$J(f) = \overline{\{z \in \mathbb{C} : z \text{ es un punto periódico repelente de } f\}}$$

Teorema 3.15. *Si f es una función polinomial, se tiene que*

$$J_0(f) = J(f)$$

Demostración. Vamos a demostrarlo por un doble contenido.

Fijando un punto periódico repelente z de f con periodo p. Por lo tanto, z es un punto fijo de $g = f^p$. Supongamos que $\{g^k\}_k$ es normal en el punto z y por lo tanto $z_0 \notin J_0(g)$, entonces existe un entono U de z para el cual existe una subsucesión $\{g^{k_i}\}_{k_i}$ que converge uniformemente en cada compacto de V a una función analítica g_0. Observemos que $\{g^{k_i}\}_{k_i}$ no puede converger a ∞ ya que $g^k(z) = z$ para todo k, al ser z un punto fijo de g. Por el teorema de Weierstrass (Teorema 2.33), tenemos que la sucesión dada por las derivadas $\{(g^{k_i})'\}_{k_i}$ converge a g_0' uniformemente en los compactos de U. Y por la regla de la cadena y por ser z un punto fijo tenemos que

$$g(g(z))' = g'(g(z)) \cdot g'(z) = (g'(z))^2$$

Y si repetimos este proceso tenemos

$$(g^k(z))' = (g(g^{k-1}(z)))' = g'(g^{k-1}(z)) \cdot (g^{k-1}(z))' = g'(z) \cdot (g'(z))^{k-1} = (g'(z))^k$$

Como z es un punto fijo repelente de g, y entonces $|g'(z)| > 1$ tenemos que

$$\lim_{k_i \to \infty} |(g^{k_i})'(z)| = \lim_{k_i \to \infty} |(g'(z))^{k_i}| = \infty$$

Esto contradice al hecho de que $g_0'(z) \neq \infty$, y por lo tanto $\{g^k\}_k$ no puede ser normal en z, y $z \in J_0(g)$. Y por el lema 3.9, $z \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$. Además, al ser $J_0(f)$ cerrado tenemos que

$$J(f) \subset J_0(f)$$

Para probar la otra contención vamos a considerar el conjunto

$$K = \{w \in J_0(f) \text{ tal que existe } z \neq w \text{ con } f(z) = w \text{ y } f'(z) \neq 0\}$$

Sea $w \in K$, por el teorema de la función inversa (teorema 2.24), existe un entorno abierto U de w en cual está definida la inversa analítica de f, es decir, existe una función analítica $f^{-1} : U \to \mathbb{C}$ tal que $f(f^{-1}(z)) = z$ para $z \in U$. Ahora definimos en U la sucesión de funciones de analíticas $h_k : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}$$

Sea V un entorno abierto de w con $V \subset U$. Como $w \in J_0(f)$ la familia $\{f^k\}_k$ no es normal en V y por lo tanto $\{h_k\}_k$ no es normal en V.

Aplicando el teorema de Montel (teorema 2.44) tenemos que que existe un $z \in U$ y un k con o bien $h_k(z) = 1$ o con $h_k(z) = 0$.

Si $h_k(z) = 1$. Entonces tendríamos que existe un $z \in U$ tal que

$$f^k(z) - z = f^{-1}(z) - z$$

$$f^k(z) = f^{-1}(z)$$

$$f^{k+1}(z) = z$$

para algún $z \in U$

En el caso de que $h_k(z) = 0$ tenemos que

$$f^k(z) = z$$

para algún $z \in U$. Por lo tanto U contiene un punto periódico y por lo tanto w está en la clausura de los puntos periódicos.

Hemos demostrado que $K \subset J(f)$, ya que los puntos del conjunto de Julia no pueden ser ni atractivos ni superatractivos por la observación 3.10, y por lo tanto tenemos que $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$. Pero K contiene a todos los puntos de $J_0(f)$ excepto un número finito, ya que los puntos donde $f'(z_0) = 0$ son un número finito. Así que tenemos lo que queríamos que es que $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$. □

Vamos a demostrar otras propiedades del conjunto de Julia. La primera propiedad que vamos a demostrar es que el conjunto de Julia es igual a la frontera de la cuenca de atracción $A(w)$ de w un punto fijo atractivo (ver definición 2.48).

Veamos que si w es un punto fijo atractivo, entonces el conjunto $\mathcal{A}(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \to w \text{ cuando } k \to \infty\}$ es un conjunto abierto como w es un punto fijo atractivo, existe r tal que $\mathbb{D}_w^r \subset \mathcal{A}(w)$. Sea $z \in \mathcal{A}(w)$, como $f^k(z) \to w$ cuando $k \to \infty$, existe un k_0 tal que si $k \geq k_0$, entonces $f^k(z) \in \mathbb{D}_w^r$. Luego $z \in f^{-k}(\mathbb{D}_w^r)$. Veamos que el conjunto abierto $f^{-k}(\mathbb{D}_w^r)$ está contenido en $\mathcal{A}(w)$ y esto probaría que $\mathcal{A}(w)$ es un conjunto abierto. Sea $u \in f^{-k}(\mathbb{D}_w^r)$, tenemos que $f^k(u) \in \mathbb{D}_k^r \subset \mathcal{A}(w)$, y por lo tanto $f^{n+k}(u) \to w$ cuando $n \to \infty$ y $u \in \mathcal{A}(w)$ como queríamos ver

De forma análoga tenemos que $\mathcal{A}(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \to \infty \text{ cuando } k \to \infty\}$, es un conjunto abierto ya que por la proposición 3.4, existe un $R > 0$ tal que $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_0^R} \subset \mathcal{A}(\infty)$ y usamos un argumento similar al anterior.

Lema 3.16. *Si w es un punto fijo atractivo de f, entonces*

$$\partial A(w) = J(f)$$

donde $\partial A(w)$ denota la frontera de $A(w)$.

Demostración. Para esta demostración vamos a usar que $J(f) = J_0(f)$. Vamos a demostrar la igual del enunciado por doble contenido.

Sea $z_0 \in J(f)$ entonces $f^k(z_0) \in J(f)$ para todo k por el lema 3.7. Por lo tanto la sucesión $\{f^k(z_0)\}_k$ no puede converger a un punto fijo atractivo y $z_0 \notin A(w)$. Sea U un entorno de z_0, el conjunto $f^k(U)$ contiene algún punto de $A(w)$ para algún k por el lema 3.11 ya que como la unión de $f^k(U)$ es $\mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ si escogemos un punto de $A(w)$ distinto de w_0 tiene que estar en algún $f^k(U)$. Como $f^k(U) \cap A(w) \neq \emptyset$, esto implica que existe un $u_0 \in U$ tal que $f^k(u_0) \in A(w)$. Por lo tanto, $u_0 \in A(w)$, luego $U \cap A(w) \neq \emptyset$ y entonces $z_0 \in \overline{A(w)}$ como queríamos ver. Esto implica que $z_0 \in \partial A(w)$ ya que $z_0 \notin A(w)$. Y por lo tanto $J(f) \subset \partial A(w)$.

Ahora vamos a ver el otro contenido. Supongamos que $z_0 \in \partial A(w)$ pero que $z_0 \notin J(f) = J_0(f)$. Entonces z tiene un entorno V conexo en el cual $\{f^k\}_k$ tiene una subsucesión que converge o a una función analítica o a infinito. La subsucesión converge a w en $V \cap A(w)$, que es un conjunto abierto por ser intersección de abiertos y no vacío ya que $z_0 \in \partial A(w)$ y V es un entorno de z_0. Luego por el teorema 2.19 tendríamos que la subsucesión tiende a la función constante w en V y por lo tanto $V \subset A(w)$ ya que todos sus puntos al iterar por f tienden a w, lo cual contradice con $z_0 \in \partial A(w)$. □

Corolario 3.17. *El lema anterior también es cierto si w=∞.*

Por otro lado, el par $(J_0(f), f)$ es un sistema dinámico ya que $f(J_0(f)) = J_0(f)$ por el lema 3.7, así que $f : J_0(f) \to J_0(f)$ es un aplicación. Además $J_0(f)$ hereda la métrica de $\mathbb{C}$ y por lo tanto es un espacio métrico. Vamos a ver ahora que es una sistema dinámico caótico.

Teorema 3.18. *El par $(J_0(f), f)$ es un sistema dinámico caótico.*

Demostración. Por el teorema 2.52 solo hay que demostrar que los puntos periódicos de f son conjunto denso en $J(f)$ y que $(J(f), f)$ es un sistema transitivo.

Como hemos demostrado en el teorema 3.15 el conjunto de Julia es es la adherencia de el conjunto de puntos periódicos repelentes y por lo tanto el conjunto de puntos periódicos en $J(f)$ es denso.

Aunque ver que es transitivo se puede ver muy bien visualmente es complejo de demostrar. Pero la idea de la demostración viene del teorema 3.12 que si elegimos z, un punto distinto de la excepción, lo que hacemos es la contraimagen de f en ese punto y luego repetimos el proceso con los puntos del conjunto $f^{-1}(z)$ y así infinitas veces, obtenemos que el conjunto formada por las contraimágenes un conjunto denso en $J_0(f)$. Con lo que quedaría demostrado. $\square$

Ahora vamos a ver unos ejemplos de conjunto de Julia de polinomios que nos ayudaran a visualizar las propiedades que hemos demostrado.

Ejemplo 3.19. Para $f(z) = z^2$ el conjunto de Julia es igual a la circunferencia unidad. Para cualquier punto del exterior de la circunferencia unidad, es decir, los $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| > 1$ obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} |z^{2^n}| = \infty$$

En el caso de los puntos en el interior de la circunferencia unidad es decir $|z| < 1$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(z)| = \lim_{n\to\infty} |z^{2^n}| = 0$$

Como $f^k(z) = z^{2^k}$, y los puntos fijos de f^k son puntos que son solución de $z^{2^k} - z = z(z^{2^{k-1}} - 1) = 0$. Luego, las soluciones de la ecuación anterior son $z_0 = 0$ y $z_{(j,k)} = e^{\frac{2j\pi i}{2^{k-1}}}$ con $0 \leq j \leq 2^{k-1} - 1$.

Por lo tanto los únicos puntos que pueden pertenecer al conjuntos de Julia son los $z = e^{2\pi i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Si θ vale 0, tenemos un punto fijo. Si $\theta = \pi$ tenemos un punto de periodo 2

$$f^2(-1) = f(1) = 1$$

Ahora $\theta = \frac{p}{2^k}$, para algún $p, k \in \mathbb{N}$ entonces tenemos que

$$f^{k+1}(e^{\frac{2\pi ip}{2^k}}) = f^k(e^{\frac{2\pi ip}{2^{k-1}}}) = f^{k-1}(e^{\frac{2\pi ip}{2^{k-2}}}) = \cdots = f^2(-1) = f(1) = 1$$

Por lo tanto la circunferencia unidad es la cuenca de atracción del 1, que es un punto fijo atractivo y por lo tanto es el conjunto de Julia de f.

Este ejemplo le podemos encontrar en la referencia [12].

Ejemplo 3.20. Para la función $f(z) = z^n$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ el conjunto de Julia es igual al ejemplo anterior y esto se demuestra de forma similar.

Como el conjunto de Julia es un sistema caótico, puede llegar a ser dificil de dibujar computacionalmente. Uno de los algoritmos que se suele usar para dibujarlo en el que se nota esto es el llamado "*backwards iteration*", este consiste en la selección de un punto $z \in J_0(f)$ e iterar $f^{-k}(z)$, y con la mayoría de puntos nos quedará algo muy similar al conjunto de Julia. El problema con este algoritmo es que hay ciertas zonas de los conjunto de Julia que tardan bastante más en converger que otras que con poco puntos ya lo hacen. Por ejemplo en la siguiente imagen

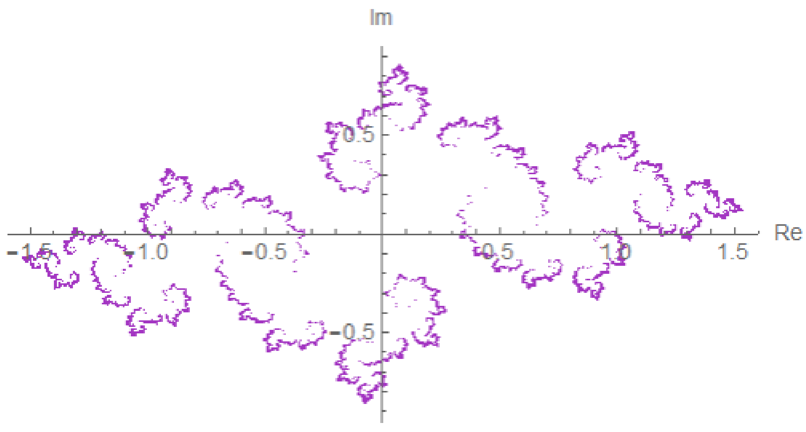

Figura 3: conjunto de Julia del polinomio $f(z) = z^2 - 0{,}8 - 0{,}25i$ generado con 500000 puntos. Imagen obtenida de [8]

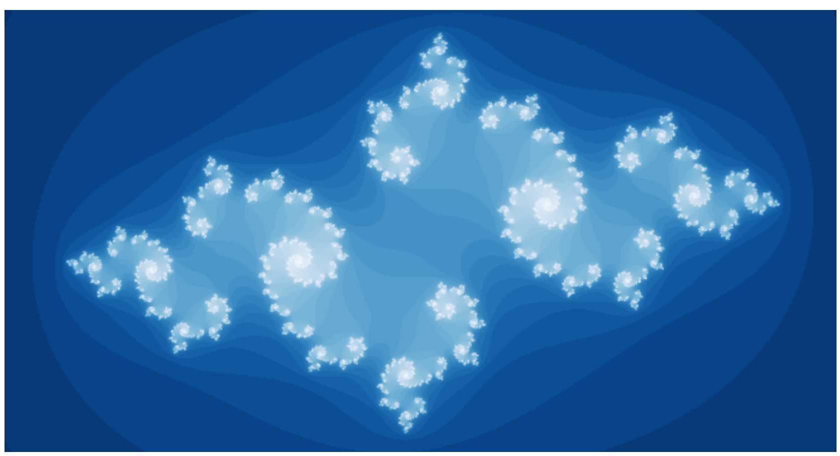

Figura 4: Conjunto de Julia del polinomio $f(z) = z^2 - 0{,}8 - 0{,}25i$. Imagen generada por la página [13]

podemos ver el conjunto de Julia para el polinomio $f(z) = z^2 - 0{,}8 - 0{,}25i$ aproximado mediante 500000 puntos.

Si comparamos está imagen con la imagen del conjunto e Julia podemos observar que hay ciertas partes del conjunto que bastantes menos perrceptibles que otras, debido a que en comparación tienen muchos menos puntos. Esto puede dar lugar a error porque si no se itera suficientes veces el conjunto puede llegar a distanciarse de la realidad.

En resumen, en esta sección hemos vistos distintas propiedades del conjunto de Julia de un polinomio f. Hemos demostrado que es un conjunto no vacío, compacto, perfecto, además de ser igual al conjunto de Julia del polinomio f^p para todo $p \in \mathbb{N}$ y es también igual a la clausura conjunto de puntos repelentes periódicos del polinomio, lo cual es igual a la frontera de la cuenca de atracción de un punto fijo atractivo. Además $(J(f), f)$ es un sistema dinámico caótico.

3.2. Conjunto de Mandelbrot

Si nos centramos en el caso de los polinomios cuadráticos, de los polinomios más en concreto en los polinomios de la forma

$$q_c(z) = z^2 + c$$

para $c \in \mathbb{C}$. A estos polinomios lo vamos a denotar a partir de ahora q_c.

Esto no nos restringe tanto como puede parece en un principio. Si elegimos una función cuadratica cualquiera $f(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ y consideramos $h(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $\alpha \neq 0$ teniendo en cuenta que

$$f(h(z)) = a_2(\alpha z + \beta)^2 + a_1(\alpha z + \beta) + a_0 = a_2(\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2) + a_1(\alpha z + \beta) + a_0 = \\ a_2\alpha^2 z^2 + (2a_2\alpha\beta + a_1\alpha)z + a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0 \quad (3)$$

Y eligiendo los valores correctos de α, β, c la expresión de $f(h(z))$ se puede convertir en la de $q_c(z) = z^2 + c$ para algún $c \in \mathbb{C}$. Basta tomar

$$a_2\alpha^2 = 1$$

$$2a_2\alpha\beta + a_1\alpha = \alpha(2a_2\beta + a_1) = 0$$

Y por lo tanto resolviendo obtenemos que $\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{a_2}}$, $\beta = \frac{-a_1}{2a_2}$ y $c = a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0$.

Luego la sucesión $\{f^k(z)\}_k$ se puede convertir con facilidad en una sucesión del tipo $\{q_c^k(z)\}_k$ y por ello compartirán ciertas propiedades sucesiones. De hecho, si z es un punto periódico de periodo p de f, sí y solo sí, es un $h(z)$ es un punto periódico de q_c de periodo p. Además el conjunto de Julia de f es la imagen del conjunto de Julia de q_c por la aplicación h^{-1}, es decir, $J(f) = h^{-1}(J(q_c))$. Por lo tanto, es sencillo ver la propiedades del conjunto de Julia de las funciones cuadráticas a partir de las funciónes q_c.

A partir de ahora para simplificar la notación nos referiremos a al conjunto de Julia $J_0(q_c)$ del polinomio cuadrático q_c como J_c.

El estudio del conjunto de Mandelbrot fue motivado el encontrar polinomios de la forma q_c tal que el conjunto de Julia de estos sea conexo. Hay distintas definiciones equivalentes de conjunto de Mandelbrot, la que vamos a utilizar es la siguiente:

Definición 3.21. El *conjunto de Mandelbrot* $\mathcal{M}$ está formado por los valores $c \in \mathbb{C}$ para los cual J_c es un conjunto conexo.

También es cierto que el conjunto de Mandelbrot coincide con

$$\mathcal{M} = \{c : \{q_c^k(0)\}_k \text{ está acotada}\}$$

Esto es lo mismo que decir que la órbita de 0 está acotada. El teorema de Dichotomy, que podemos encontrar en la referencia [9], dice que si $q_c(z) = z^2 - c$ y J_c su conjunto de Julia pueden suceder dos cosas:

- La órbita de 0 de q_c esté acotada y en este caso J_c es un conjunto conexo
- La órbita de 0 de q_c no esté acotada y en este caso J_c es un conjunto totalmente disconexo

Vamos a ver un ejemplos que ilustra bien esto.

Ejemplo 3.22. Como ya hemos visto antes el conjunto de Julia de $q_0(z) = z^2$ es la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$, este es un conjunto conexo y por lo tanto $0 \in \mathcal{M}$. Otra forma de ver que el 0 está en el conjunto de Mandelbrot es ver que la órbita del punto 0 está acotada, en este caso vemos que la órbita de 0 es la sucesión $0, 0, 0, ..$ que está acotada. Y por lo tanto el 0 está en el conjunto de Mandelbrot.

La representación gráfica del conjunto de Mandelbrot es la siguiente:

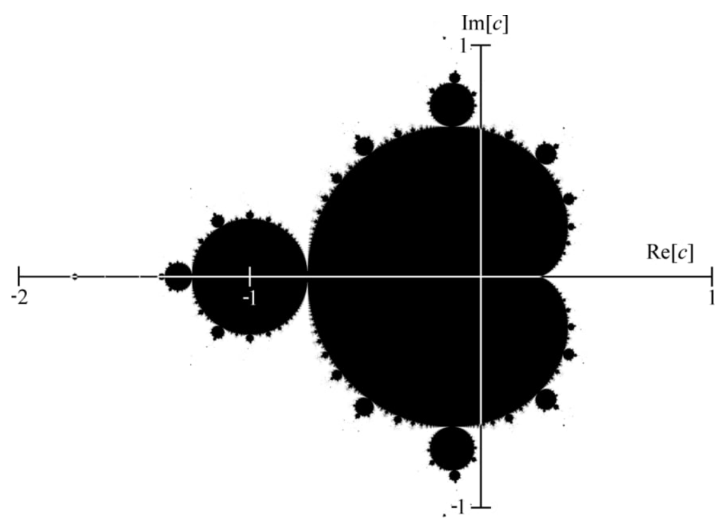

Figura 5: Conjunto de Mandelbrot en blanco y negro. Imagen de la pagina [21]

Primero vamos a demostrar que si $z \notin \overline{\mathbb{D}}_0^r$ con $r = \text{máx}\{|c|, 2\}$ su órbita se va a infinito y vamos a seguir la demostración de la referencia [8]. Este lema es similar al lema 3.4 pero se da con más precisión el valor de r, para polinomios de la forma q_c.

Lema 3.23. *Sea $q_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación polinomial dada por $q_c(z) = z^2 + c$. Sea $r = \text{máx}\{|c|, 2\}$ entonces si $z \notin \overline{\mathbb{D}}_0^r$, tenemos que*

$$\lim_{k\to\infty} |q_c^k(z)| = \infty$$

Demostración. Como tenemos que $z \notin \overline{\mathbb{D}}_0^r$ con $r = \text{máx}\{|c|, 2\}$, observamos $|z| > 2$ y por lo tanto existe un $\lambda_1 > 1$ tal que $|z| - 1 > \lambda_1$. Luego si aplicamos la desigualdad triangular tenemos

$$|q_c(z)| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| \geq |z|(|z| - 1) \geq \lambda_1 |z|$$

Luego tenemos que $q_c(z) \geq \lambda_1 |z| > |z| > r$ y por lo tanto repitiendo el argumento de antes tenemos que $|q_c(z)| - 1 > \hat{\lambda}_2$. teniendo en cuento que $|q_c(z)| > r \geq |c|$ y tomando $\lambda_2 = \text{mín}\{\lambda_1, \hat{\lambda}_2\}$, aplicando otra vez la desigualdad triangular

$$|q_c^2(z)| \geq |q_c(z)|^2 - |c| \geq |q_c(z)|^2 - |q_c(z)| \geq |q_c(z)|(|q_c(z)| - 1) \geq \lambda_2 |q_c(z)| \geq \lambda_2^2 |z|$$

Y repitiendo un argumento similar, obtenemos que existe un $\lambda > 1$ tal que

$$|q_c^k(z)| \geq \lambda^k |z|$$

Y como $\lambda > 1$ y $|z| > 2$ podemos concluir que

$$\lim_{k\to\infty} |q_c^k(z)| = \infty$$

□

Una propiedad del conjunto de Mandelbrot que podemos probar es que es un conjunto símetrico por el eje real.

Teorema 3.24. *El conjunto de Mandelbrot es un conjunto simétrico por el eje real.*

Demostración. Sea $q_c(z) = z^2 + c$ un polinomio con $c \in \mathcal{M}$, por el teorema de Dichotomy, esto quiere decir que la órbita de 0 esta acotada es decir la sucesión

$$c, c^2 + c, (c^2 + c)^c + c, ...$$

está acotada, y por lo tanto lo está la siguiente sucesión también

$$\overline{c}, \overline{c}^2 + \overline{c}, (\overline{c}^2 + \overline{c})^2 + \overline{c}, ...$$

Es decir la sucesión formada por los conjugado de la órbita de 0 está también acotada ya qué todo número tiene el mismo módulo que su derivada. Y por último vemos que esta sucesión es equivalente a

$$\overline{c}, \overline{c^2 + c}, \overline{(c^2 + c)^2 + c}, ...$$

Y por lo tanto la órbita de 0 en $q_{\overline{c}}(z)$ está también acotada y $\overline{c} \in \mathcal{M}$, con lo que quedaría probado la simetría por el eje real. $\square$

Hay otras propiedades del conjunto de Mandelbrot que son un poco más complejas de demostrar pero que se ven muy bien visualmente con que este conjunto es conexo. Una demostración de esto se puede encontrar en la referencia [18].

Al ser el conjunto de Mandelbrot un conjunto que se ha empezado a estudiar desde hace relativamente poco, hay bastantes propiedades que están todavía sin demostrar. El principal problema abierto del conjunto de Mandelbrot es localmente conexo.

Referencias

[1] Armentano, D.; *Apuntes para la asignatura "Introducción a la topología"*. Universidad de la República. Facultad de Ciencias. Grado en Matemáticas. Curso 2016-2017. Disponible en : `http://www.cmat.edu.uy/~diego/documents/Notas-topo-2016.pdf`

[2] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. and Stacey P.; *On Devaney's Definition of Chaos.* The American Mathematical Monthly, 99(4), 332–334. Disponible en `https://doi.org/10.2307/2324899`

[3] Bruna, J.; Cufi, J. *Complex Analysis.* Text Books in Mathematics, European Mathematical Society, 2013.

[4] Beltrán Álvarez, C., *Apuntes para la asignatura "Variable Compleja"*. Universidad de Cantabria. Facultad de Ciencias. Grado en Matemáticas. Curso 2020-2021.

[5] Cánovas Peña, J. S.; *Apuntes de variable compleja.* Universidad politécnica de Cartagena. Curso 2009-2010. Disponibles en: `https://docplayer.es/12404770-Apuntesdevariablecompleja-jose-s-canovas-pena.html`

[6] Conrad, K.; *The fundamental theorem of algebra via proper map*. Universidad de Connecticut. Curso 2010/2011. Disponible en:`https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/fundthmalg/propermaps.pdf`

[7] Dummit. E.;*Dynamics, Chaos, and Fractals (part 3): Introduction to Complex Dynamics* v 1.02, 2015. Disponible en: `https://web.northeastern.edu/dummit/docs/dynamics_3_chaotic_dynamics.pdf`

[8] Dummit. E.;*Dynamics, Chaos, and Fractals (part 5): Introduction to Complex Dynamics* v 1.02, 2015. Disponible en: `https://web.northeastern.edu/dummit/docs/dynamics_1_introduction_to_dynamics.pdf`

[9] Falconer, K.; *Fractal geometry. Mathemathical foundation and aplication.* Wiley 3ª edición, 2014.

[10] Hazewinkel, M.; , *Montel theorem.* Encyclopaedia of Mathematics (en inglés), Springer, edición 2010, ISBN 978-1556080104

[11] Herrero Píneyro, P. J.; *Topología de Espacios Metricos capítulo 5.* Disponible en `https://www.um.es/documents/4874468/11035667/cap-1-esp-met.pdf/6c66d56e-c01d-4270-a56c-50ec184a830e`

[12] Keen, L.; *Julia Sets of Rational Maps. Proceedings of the Simposia of Applied Mathematics.* Volume 49, 1994, p. 71-89

[13] McClure M,; `https://www.marksmath.org/visualization/polynomial_julia_sets/`. Consultado en septiembre 2022.

[14] Pyke, R.; *Chaos, Fractals and Dynamics.* Weekly commentary: MAT335 - Chaos, Fractals and Dynamics. 8 julio 2013 Disponible en: `https://www.sfu.ca/~rpyke/335/W00/28mar.html`

[15] Sánchez, F.; *Apuntes de la asignatura cálculo II, tema 4*. Universidad e Extremadura. Disponible en: `http://matematicas.unex.es/~fsanchez/calculoII/04.pdf`

[16] Senthamaraikannan, M. Kamali. R Jayalalitha, G. *Julia sets as complex polynomial.* Disponible en: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* volumen 117. 2017

[17] Solkoll; *Julia set for c = -0.750357820200574 + 0.047756163825227i* Made with IIM. Disponible en: `https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Julia_set_(Rev_formula_04).gif#filelinks` Consultado en 2022.

[18] Stoll, D.; *A Brief introduction to complex dynamics.*. 2015 Disponible en: `https://math.uchicago.edu/~may/REUDOCS/Stoll.pdf`

[19] Wachsmuth, B. G.; *Interactive Real Analysis*, 1994-2018. Disponible en: `https://mathcs.org/analysis/reals/topo/proofs/pfctuncb.html`

[20] Robert W. V.; *The Elements of Cantor Sets: With Applications.* Wiley, 2013

[21] Quijosaca, F. *Mandelbrot Set in JS.* Abril 2020. Disponible en: `https://dev.to/foqc/mandelbrot-set-in-js-480o`