Facultad de Ciencias

MODELOS MATEMÁTICOS PARA LAS CARTERAS DE INVERSIÓN

(MATHEMATICAL MODELS FOR INVESTMENT PORTFOLIOS)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Sofía Izquierdo Martínez

Directora: Myriam García Olalla

Codirector: Marcos Cruz Rodriguez

Septiembre 2022

Índice general

Resumen vii

Abstract ix

1. Introducción 1

2. Conceptos básicos del sistema financiero 3

2.1. Activo Financiero 3

2.2. Renta fija 5

2.3. Renta variable 6

2.4. Mercado bursátil 7

2.5. Índices bursátiles 8

3. Carteras de inversión 11

3.1. Gestión pasiva y activa 11

3.2. Rentabilidad y riesgo 12

3.3. Beta de un activo financiero 14

4. Teoría de Markowitz y Modelos de Valoración de Activos 15

4.1. Modelo de Markowitz de selección de carteras 15

4.2. Modelo de Mercado de Sharpe 17

4.3. Modelo de valoración de activos de capital, CAPM 20

5. Caso práctico 21

5.1. Fundamentos de la inferencia estadística 22

5.2. Selección de carteras 24

5.2.1. Cartera de perfil tecnológico 24
5.2.2. Cartera de perfil ecológico 34
5.3. Análisis de los datos 41

6. Conclusiones **45**

A mis padres, Luis y Concha, por apoyar incondicionalmente mis decisiones.

A mis tutores Myriam García Olalla y Marcos Cruz por su orientación y ayuda.

Resumen

Partiendo de modelos matemáticos, la economía financiera ha creado referentes teóricos para la selección de carteras de inversión que han derivado en múltiples desarrollos. Entre los autores de estas teorías modernas de carteras de inversión, que evalúan en sus modelos el riesgo implícito respecto a la rentabilidad esperada, destacan especialmente Markowitz y Sharpe, que simplificaron el problema, tratando de seleccionar la cartera de inversión óptima que proporcione un rendimiento mayor con un nivel de riesgo lo más bajo posible. A partir de aquí, las investigaciones se orientaron a formular nuevas técnicas matemáticas para su cálculo y mejorar los modelos iniciales.

En el supuesto práctico, nos hemos propuesto analizar, bajo las teorías y modelos matemáticos expuestos, dos carteras de inversión de distinto perfil, compuestas por acciones de empresas que cotizaron en el Mercado de Valores Europeo en 2017–2020. En este este periodo que incluye la pandemia de la COVID-19, podremos ver el efecto que este suceso tuvo en la rentabilidad y el riesgo de las acciones.

Palabras clave: Modelo matemático, cartera de inversión, activo financiero, rentabilidad, riesgo, coeficiente de variación, Teoría de Markowitz, Modelo de Sharpe, Modelo CAPM, programación cuadrática.

Abstract

Based on mathematical models, Financial Economics has created theoretical references for the selection of investment portfolios that have led to various advances. Among the authors of these modern theories of investment portfolios, which evaluate the implicit risk with respect to the expected return in their models, Markowitz and Sharpe stand out because they simplified the problem of selection of the optimal investment portfolio that provides the highest return with the lowest possible level of risk. Further studies are focused on formulating new mathematical models to improve the initial ones.

On the practical side, we have proposed to analyse, under the theories and models presented, two investment portfolios of different profiles, composed of stocks of companies listed on the European Stock Market in 2017-2020. This period includes the COVID-19 pandemic so, we will be able to see the effect that this event had on the return and risk of the stocks.

Keywords: Mathematical model, investment portfolio, financial asset, return, risk, coefficient of variation, Markowitz Theory, Sharpe Model, CAPM Model, quadratic programming.

Capítulo 1

Introducción

En la vida cotidiana nos vemos obligados a tomar decisiones constantemente, algunas ante situaciones sencillas, pero en ocasiones también frente a temas complejos. En cada caso, la elección depende de factores psicológicos, de los conocimientos y experiencia de cada uno y de la información o datos disponibles. Generalmente, vemos que toda resolución de problemas no es unidimensional, siempre hay varios aspectos a tener en cuenta y cada variable interviene en la decisión final.

Las matemáticas sirven como herramienta fundamental para muchas disciplinas, entre ellas, la economía financiera. En los mercados financieros se negocia una amplia variedad de activos, lo que llevó al planteamiento de estrategias y de modelos de inversión para maximizar la rentabilidad del inversor. Hay importantes técnicas para distribuir los recursos entre los diferentes bienes, formando carteras financieras.

Harry M. Markowitz desarrolló su teoría de selección de carteras en 1952[1]. Plantea un modelo matemático para reducir el riesgo y aumentar el rendimiento de las carteras de inversión. No obstante, los conceptos rentabilidad y riesgo siempre van unidos, siguiendo una relación directamente proporcional; es decir, cuanto mayor sea la rentabilidad esperada, mayor será el riesgo asumido. En este modelo utilizó como medida del riesgo su varianza y como medida de la rentabilidad la media muestral del valor de la cartera.

Más tarde, en 1963, William F. Sharpe plantea el Modelo de Mercado con el fin de simplificar y hacer más efectivo el modelo de Markowitz. Según Sharpe, el riesgo total de un

[1]En un artículo publicado en la revista *Journal of Finance*, titulado *Portfolio selection* [12].

activo financiero se puede dividir entre riesgo sistemático y riesgo específico. Este último es diversificable y se puede reducir introduciendo más títulos en nuestra cartera. Para ello, parte de la hipótesis: "las relaciones entre las rentabilidades de los diferentes títulos se debe únicamente a la relación que todos tienen con un índice de mercado"[2], considerando como índice de mercado la rentabilidad de la cartera formada por los títulos que cotizan.
Después, se creó el Modelo de Valoración de Activos Financieros o Capital Asset Pricing Model (CAPM) como fruto de trabajos previos de Sharpe y otros autores [1]. Pretende explicar la formación de precios de los activos financieros cuando el mercado está en equilibrio. Así los inversores podrán valorar si los activos están sobrevalorados o infravalorados en un momento dado.

El objetivo práctico de este trabajo es analizar, bajo las teorías y modelos matemáticos expuestos anteriormente, dos carteras de inversión de distinto perfil, compuestas por acciones de empresas que cotizan en el Mercado de Valores Europeo durante el periodo 2017-2020. También, observar el efecto que tuvo la reciente pandemia de la COVID-19 en estas empresas. De acuerdo al perfil del inversor y al nivel de riesgo que está dispuesto a asumir, se constituirán las carteras y se ubicarán en la línea del CAPM, buscando ofrecer una alternativa de inversión que maximice su rentabilidad para quienes buscan participar en el mercado bursátil. Después, se calculará el riesgo y la rentabilidad esperada en las carteras de inversión obtenidas.

[2]Ir [10], página 101.

Capítulo 2

Conceptos básicos del sistema financiero

En este capítulo se expondrán las nociones básicas del mundo de las finanzas. En primer lugar, se definirá el concepto de activo financiero y se explicarán sus principales características. Además, se distinguirán dos tipos de activos financieros: de renta fija y de renta variable. Por último, se verá su utilidad en el mercado bursátil y cómo funciona éste. Se han seguido las referencias [3], [5], [6], [7], [9], [10] y [13].

2.1. Activo Financiero

Según la RAE, un activo financiero es un título que representa para su poseedor derechos sobre bienes o rentas, y que es un pasivo para el agente que lo ha emitido. Existen diferentes tipos de activos como letras, bonos, obligaciones, acciones, opciones, etc.

Una acción es un activo financiero que representa una parte proporcional de la empresa y esto ofrece ciertos derechos al propietario. Los accionistas tienen derechos económicos como el derecho al dividendo (beneficio que se reparten entre los accionistas) y el derecho de suscripción preferente si la empresa realiza una ampliación del capital, pero también tienen derechos políticos como la participación con voz y voto en las juntas generales de accionistas y el derecho a ser informado.

Las principales características de los activos son las siguientes:

- **Liquidez:** Es la capacidad de convertir el activo en dinero con facilidad. Así, el dinero es el activo más líquido.

- **Rentabilidad:** Se refiere a los beneficios o pérdidas que se han obtenido en una inversión. Se expresa en porcentaje con respecto a la cantidad invertida.

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \tag{2.1}$$

donde

R_t: rentabilidad de la inversión en el periodo de tiempo t, $t \in \mathbb{N}$; normalmente periodos diarios o anuales.

P_t: precio en el periodo t y

P_{t-1}: precio (pagado) en el periodo $t-1$.

En el caso de las acciones, se consideran los dividendos adquiridos en ese periodo y la cotización, que es el precio en el mercado. Por tanto, la rentabilidad a posteriori de una acción es

$$R_t = \frac{cot_t + Div_t - cot_{t-1}}{cot_{t-1}},$$

donde

cot_t y cot_{t-1}: cotización de la acción en el periodo t y $t-1$, respectivamente, y

Div_t: dividendo repartido en el periodo t.

Por otro lado, ante una situación de incertidumbre, la rentabilidad de la acción i, $R_i : \Omega \to \mathbb{R}$ donde $i \in \mathbb{N}$, es una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad discreto $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Si $|\Omega| = n$ para $n \in \mathbb{N}$, R_i es una variable aleatoria discreta con $R_i(\Omega) = \{R_{i1}, .., R_{in}\}$, donde R_{ij} representa la rentabilidad de la acción i en el escenario $j \in \{1, .., n\}$. Ahora, suponiendo que existe, se puede definir la esperanza matemática de la rentabilidad como

$$E[R_i] = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \cdot P[R_{ij}]$$

.

- **Riesgo:** Incertidumbre a la hora de estimar el valor de las acciones en el mercado. Viene dado por la varianza σ^2 o por la desviación típica σ.

  Definición 2.1.1. *Dada una variable aleatoria X con esperanza matemática finita $E[X]$, llamamos varianza de X al momento central de segundo orden. Esto es,*

  $$Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2].$$

  Se conoce como desviación típica de X a $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

  Si la variable aleatoria es discreta con soporte $I \subset \mathbb{N}$, es decir, $P[I] = 1$, y con función de probabilidad $P[X = x]$, entonces la varianza de X viene dada por

  $$Var(X) = \sum_{x \in I} (x - E[X])^2 P[X = x]$$

  Por tanto, el riesgo de una acción i es

  $$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} (R_{ij} - E[R_i])^2 \cdot P[R_{ij}].$$

Si la esperanza matemática no es nula, un posible criterio para la valoración de activos es el *coeficiente de variación*:

$$CV(R_i) = \frac{\sigma_i}{E[R_i]}.$$

Mide la relación entre la rentabilidad esperada y el riesgo asumido. Si este coeficiente se acerca a 0 quiere decir que hay poca dispersión de los datos, es decir, la rentabilidad probablemente estará próxima a la esperanza. Sin embargo, si el coeficiente se acerca a 1 significa que hay mucha variación en los datos, estando muy alejados unos de otros y, por tanto, el rendimiento esperado resulta más dudoso. Como consecuencia, un inversor racional elegiría los títulos cuyo coeficiente de variación sea menor.

2.2. Renta fija

Son títulos cuyo emisor, principalmente, busca financiación para pagar sus obligaciones o proyectos futuros y pone en circulación estos bonos con el fin de captar fondos. Según el

tipo de emisor, puede ser renta fija pública o renta fija privada. Destacan las obligaciones ordinarias, que conllevan un interés periódico o cupón y se amortizan en su totalidad al vencimiento. También existen las obligaciones de cupón cero cuyo beneficio se obtiene con un único cupón al vencimiento, junto con el valor de amortización.

Las principales fuentes de rentabilidad son los cupones y las plusvalías (posibilidad de venderlas por un precio mayor). Es decir, manteniendo las obligaciones hasta su vencimiento se conocería a priori su rentabilidad, aunque suele ser más baja que las de otros activos financieros. Se les suele llamar activos libres de riesgo. Sin embargo, existe un riesgo bajo originado por insolvencia o quiebra de la empresa, por falta de liquidez al no poder venderlas en el mercado o por cambios en el tipos de interés, entre otros.

Si la rentabilidad mínima exigida, k_i, es la suma de los tipos de interés libre de riesgo y la prima de riesgo, el precio teórico de una obligación es el resultado de actualizar a la tasa k_i los cupones C_i y el precio de reembolso de la misma P_n.

$$P_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+k_i)^j} + \frac{P_n}{(1+k_i)^n}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} \text{si cotización} < P_0 \Rightarrow \text{Título infravalorado por el mercado} \Rightarrow \text{Comprar} \\ \text{si cotización} > P_0 \Rightarrow \text{Título sobrevalorado por el mercado} \Rightarrow \text{Vender} \end{cases}$$

2.3. Renta variable

Son títulos cuya rentabilidad es incierta e imprevisible. Las acciones son un claro ejemplo de renta variable. En consecuencia, valorar acciones es mucho más complejo que valorar obligaciones porque, entre otras cosas, se desconocen los dividendos, el precio de venta, la vida de la empresa (que se considera infinita) y es difícil obtener la tasa de actualización exigida por el mercado, k_e. Sin embargo, según el modelo clásico de valoración de acciones, el precio teórico de una acción es

$$P_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{(1+k_e)^j} + \frac{P_n}{(1+k_e)^n}$$

donde D_j representa el dividendo en el periodo j y P_n es el precio de venta en el periodo n.

2.4. Mercado bursátil

Los títulos son emitidos por sociedades que necesitan financiación, con el fin de conseguir fondos mediante su negociación en el mercado primario. Los inversores normalmente obtienen estos títulos directamente del emisor por el valor de primera emisión. Después, en el mercado secundario se lleva a cabo la gestión de estos títulos que fueron colocados con anterioridad en el mercado primario, cambiando así su titularidad. Estas operaciones no suponen ninguna financiación para el emisor de los títulos, sino la diversificación de las carteras de los inversores.

Los mercados secundarios en España son el mercado de deuda pública en anotaciones, el mercado de renta fija AIAF, las bolsas de valores (renta variable) y el mercado de futuros y opciones MEFF.

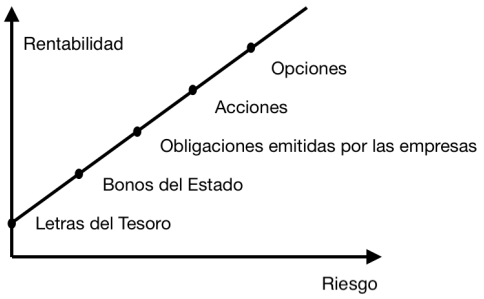

Figura 2.1: Relación rentabilidad-riesgo de los títulos del mercado. Fuente: elaboración propia.

El Sistema de Interconexión Bursátil Español (SIBE) es una plataforma que permite la negociación de valores de renta variable admitidos a cotización en las cuatro bolsas españolas, asegurando un precio único y un único libro de órdenes por valor.

Los mercados secundarios o regulados españoles están supervisados por la Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV) con el fin de velar por la transparencia de los mercados de valores españoles como la perfecta formación de precios y la protección de los inversores.

2.5. Índices bursátiles

En primer lugar, un *benchmark* es un indicador financiero que sirve como instrumento para calcular el rendimiento de una inversión. En el caso de los títulos de renta variable se puede considerar como *benchmark* un índice bursátil, es decir, un indicador de referencia sobre la variación de los precios de las principales acciones que cotizan en el mercado. Representa la evolución del mercado, a partir de la evolución del valor de las empresas más significativas. Para el cálculo del índice de mercado, destacamos los siguientes métodos:

- **Ponderación por precio:** El índice es el resultado de la suma de los precios de las acciones que forman parte del mismo, dividido por una constante d.

  Ejemplo 2.5.1. *Supongamos que tenemos un índice formado por dos acciones, A y B, cuyos precios en el día 0 son 5 y 10 euros, respectivamente. En este caso, el divisor es el que proporciona el promedio, es decir,* $d = 2$ *y el nivel del índice es* $\frac{5+10}{2} = 7,5$ *euros. Ahora, si en el día 1 se produce un split*[1] *de 2x1 en las acciones B y cierran a* 6 *euros. Por otro lado, las acciones de A cierran también a 6. Si siguiéramos el anterior procedimiento, el índice tendría un valor de* $\frac{6+6}{2} = 6$. *Esto supondría una caída del* $20\,\%$ *cuando en realidad su valor es* $\frac{6+6\cdot 2}{2} = 9$ *y se trata de una subida del* $20\,\%$. *Concretamente, el divisor se calcula como la incógnita de la siguiente igualdad:*

$$\frac{6+6}{d} = 9,$$

  que resulta ser $d = 0,75$. *Este divisor continúa siendo el utilizado hasta que se produzca otro split (o contrasplit) o hasta que se modifique la composición del índice.*

  Sin embargo, lo habitual es que comience a un nivel dado el primer día, por ejemplo, 100. Siguiendo el caso anterior, en el día 1 el índice subió un $20\,\%$, *de tal forma que el índice tendría un nivel de* $100\cdot(1+0{,}2) = 120$. *De hecho, esto equivale a dividir el precio precio del día 1 entre el precio inicial, y multiplicar por 100, es decir,* $100 \cdot \frac{9}{7{,}5} = 120$

[1] Un *split* es una operación de desdoblamiento las acciones, aumentando las acciones en circulación y dividiendo su valor nominal. Un split de 2x1 implica que por cada acción antigua se tienen dos acciones nuevas cuyos precios.

Por tanto, la fórmula matemática para calcular el nivel de índice en el día t es

$$I_t = I_0 \cdot \frac{P_t}{P_0},$$

donde

I_0 representa el nivel del índice en el día 0 y

P_t, P_0 el precio promedio en el día t y en el día 0, respectivamente.

Destacamos el *Dow Jones Industrial Average* (DJIA), uno de los índices ponderados por precio más famosos. Consta de las 30 acciones de las empresas más potentes que cotizan en el mercado de Estados Unidos.

- **Ponderación por valor:** En este método, el índice se calcula como la multiplicación su valor inicial por el cociente entre valor de mercado del día actual entre el valor de mercado del día inicial. El valor de mercado es la suma de las capitalizaciones de las empresas que forman parte de dicho índice, es decir, las acciones en circulación por el precio de la misma. De esta forma, el problema del manejo de los *splits* estaría resuelto ya que el valor de mercado no varía.

Ejemplo 2.5.2. *Seguimos los datos del ejemplo 2.5.1 y suponemos que las acciones en circulación de A y de B son 1000 y 2000, respectivamente. El valor del mercado en el día 0 es* $1000 \cdot 5 + 2000 \cdot 10 = 25000$ *euros y el valor de mercado en el día 1 es* $6 \cdot 1000 + 6 \cdot 4000 = 30000$. *Por tanto, si el valor inicial del mercado era 100, el índice tiene un nivel en el día 1 de* $100 \cdot \frac{30000}{25000} = 120$.

La fórmula matemática para el cálculo del índice con este método es

$$I_t = I_0 \cdot \frac{Cap_t}{Cap_0},$$

donde

Cap_t y Cap_0 es la capitalización de las empresas que forman parte del índice en el periodo t y en el periodo inicial. Esto es, $Cap_t = \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot P_i$ donde N_i es el número de acciones en circulación de la empresa i y P_i el precio de dicha acción. Destacamos como índices ponderados por valor el IBEX 35, formado por

las 35 empresas con más liquidez que cotizan en el SIBE y el EURO STOXX 50 formado por las 50 empresas más importantes que cotizan en el mercado de valores europeo.

Los índices son de gran utilidad para los inversores ya que pueden contrastar si han obtenido más rendimiento con su cartera o, por el contrario, deberían haber invertido en las acciones de estos índices.

Destacamos el índice bursátil IBEX-35, formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en el SIBE. Así, un inversor puede comparar si ha conseguido más rendimiento con su cartera propia o debería haber invertido en el IBEX-35.

Capítulo 3

Carteras de inversión

En el capítulo anterior se han definido el rendimiento esperado y el riesgo de un activo financiero, entre otras nociones. En este capítulo estudiaremos la rentabilidad y el riesgo de las cartera de inversión, así como la selección de activos dependiendo de la estrategia del inversor. Por último, se definirá una importante característica de los activos financieros y de las carteras de inversión: la Beta del activo. Para ello, se han seguido las referencias [1], [5], [13] y [14].

3.1. Gestión pasiva y activa

Una cartera de inversión es un conjunto de activos en los que el inversor ha colocado dinero con el fin de obtener alguna rentabilidad siguiendo determinada estrategia. Los dos principales métodos de selección de carteras es la gestión activa y la gestión pasiva.

Gestión activa

La estrategia de estos inversores es comprar (vender) activos que estima que van a subir (bajar) de precio para venderlos (comprarlos) más adelante a un precio mayor (menor). La gestión activa se basa en el análisis fundamental y en el análisis técnico. El análisis fundamental se centra en la estimación del precio teórico de los diferentes activos financieros. Mientras que el análisis técnico estudia la tendencia del precio a corto plazo estimando la oferta y la demanda.

Gestión pasiva

Tiene como hipótesis que el mercado es eficiente y que el inversor es racional con cierta aversión al riesgo. Se dice que el mercado es eficiente cuando los precios de los activos que cotizan en dicho mercado son imparciales y reflejan toda la información disponible. Esto implica el ajuste inmediato de las cotizaciones ante cualquier suceso y, por tanto, la oscilación de los precios sería totalmente imprevisible. De esta manera, resultaría inútil predecir los precios futuros en los mercados pues el mejor precio es el actual. Como consecuencia, los inversores pasivos generalmente invierten en la cartera de mercado.

Sin embargo, el mercado posee ciertas anomalías como el efecto lunes o el efecto enero (alteraciones de los precios a corto plazo), el atraso en la reacción ante las noticias y los comportamientos irracionales de los inversores, ya que a veces consideran los acontecimientos recientes como representativos para predecir el futuro. Consecuentemente, el mercado no es eficiente en su totalidad aunque ésta no es una razón sólida para invalidar la gestión pasiva. De este modo, la elección entre gestión activa o pasiva dependerá de la eficiencia mercado en ese momento y del inversor.

3.2. Rentabilidad y riesgo

Usando la notación de la sección 2.1, la rentabilidad esperada de una cartera formada por n activos en las respectivas proporciones $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$ es

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[R_i]$$

dado que la rentabilidad de la cartera es $R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i$ y la esperanza matemática es un operador lineal.

Por otra parte, el riesgo de la cartera es $Var(R_p) = Var(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i)$, que se calculará con ayuda de las siguientes definiciones y resultados.

Definición 3.2.1. *La covarianza entre dos variables aleatorias X, Y es*

$$Cov(X, Y) = \sigma_{X,Y} = E[(X - E[X]) \cdot (Y - E[Y])].$$

Definición 3.2.2. *El coeficiente de correlación entre X e Y es*

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Proposición 3.2.1. *Sean $X, X_1, ..., X_n$ variables aleatorias con varianza finita y $a, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Entonces,*

1. $Var(aX) = a^2 Var(X)$
2. $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j)$
3. $Var(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$

Demostración. A continuación se demostrará la anterior proposición.

1. Por definición, la varianza de una variable aleatoria X es $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$ y sabemos que la esperanza matemática es un operador lineal, entonces $Var(aX) = E[(aX - E[aX])^2] = a^2 E[(X - E[X])^2] = a^2 Var(X)$.

2. Esta identidad será probada por inducción matemática.

   - Para $n = 2$ es cierto pues $Var(X_1 + X_2) = E[(X_1 + X_2 - E[X_1 + X_2])^2] = E[(X_1 - E[X_1] + X_2 - E[X_2])^2] = E[(X_1 - E[X_1])^2] + E[(X_2 - E[X_2])^2] + 2 \cdot E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])] = Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$
   - Se supone cierto para $n - 1$, es decir,

   $$Var\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} Var(X_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n-1} Cov(X_i, X_j)$$

   - Se demuestra para n : $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = Var(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n)$ y aplicando el resultado para $n = 2$, se obtiene $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = Var(\sum_{i=1}^{n-1} X_i) + Var(X_n) + 2 \cdot Cov(\sum_{i=1}^{n-1} X_i, X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} Var(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n-1} Cov(X_i, X_j) + Var(X_n) + 2 \cdot Cov(\sum_{i=1}^{n-1} X_i, X_n)$ donde $Cov(\sum_{i=1}^{n-1} X_i, X_n) = E[(\sum_{i=1}^{n-1} X_i - E[\sum_{i=1}^{n-1} X_i])(X_n - E[X_n])] = \sum_{i=1}^{n-1} E[(X_i - E[X_i])(X_n - E[X_n])] = \sum_{i=1}^{n-1} Cov(X_i, X_n)$, probando así la propiedad.

3. Resultado directo de las dos propiedades previas.

□

Como conclusión, el riesgo de una cartera es

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{3.1}$$

3.3. Beta de un activo financiero

La Beta de un activo i es la relación entre la desviación típica del activo y la desviación típica del mercado, multiplicado por el coeficiente de correlación entre la acción y el mercado. Esto es,

$$\beta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \rho_{i,M} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

Es un ratio para medir la volatilidad de un activo respecto al movimiento del índice de mercado. Así, si $\beta_i < 1$, el activo es menos volátil que el mercado y por el contrario, si $\beta_i > 1$, el activo es más volátil que el mercado.

No obstante, si se tiene una cartera de inversión formada por n activos financieros cuyas proporciones son $x_1, .., x_n$, se puede comparar la variación de ésta con respecto al mercado, siendo la Beta de la cartera

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \beta_i. \tag{3.2}$$

En la práctica, el mercado será representado por la cartera de mercado y ésta dependerá del *benchmark* o índice de referencia que haya elegido el inversor. Se trata de comparar la volatilidad de la cartera arriesgada con respecto al Ibex-35, al Eurostoxx-50, etc.

Capítulo 4

Teoría de Markowitz y Modelos de Valoración de Activos

Una vez contextualizado el sistema financiero, el objetivo de este capítulo es plantear las diferentes teorías y modelos matemáticos involucrados en la gestión de carteras de inversión y en la valoración de activos financieros. En primer lugar, se introduce el modelo de Markowitz para la selección de carteras. Se trata de un problema de optimización cuadrática para obtener la cartera de mínima varianza, cuyas variables de decisión son las proporciones de los activos.

Posteriormente, Sharpe expone que el rendimiento de un activo depende de un parámetro propio del activo, pero también del mercado. De esta manera, se pueden valorar los diferentes activos y actuar en consecuencia para obtener un beneficio.

Por último, se estudiarán las ventajas de la combinación de de una cartera de renta variable y un activo libre de riesgo, y el modelo CAPM que, por el contrario, supone el equilibrio del mercado. Gracias a éste, se puede obtener el rendimiento que le deberíamos exigir al título o a la cartera. Se han seguido las referencias [1], [8] y [14].

4.1. Modelo de Markowitz de selección de carteras

Como se ha comentado anteriormente, Harry M. Markowitz desarrolló su teoría de selección de carteras en los años 50. Este economista norteamericano especialista en análisis de in-

versiones recibió, conjuntamente con William Sharpe y Merton Miller el Premio Nobel de Economía en 1990.

Markowitz plantea que las carteras eficientes son aquellas que ofrecen la máxima rentabilidad dado un cierto riesgo, o aquellas que minimizan el riesgo dada una determinada rentabilidad. Siguiendo la notación de la sección 3.2, se puede modelar como un problema de optimización cuadrática con función objetivo σ_p^2.

La formulación del problema minimizar el riesgo dada una rentabilidad es

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \sigma_{ij},$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} E[R_i] \cdot x_i \geq E[R_p]'$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

donde $E[R_p]'$ es la rentabilidad exigida por el inversor.

Mientras que la formulación del problema maximizar la rentabilidad dado un riesgo es

$$\text{máx} \sum_{i=1}^{n} E[R_i] \cdot x_i,$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \sigma_{ij} \leq \sigma_p^a$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

donde σ_p^a es el riesgo que está dispuesto a asumir el inversor.

En ambos problemas, el resultado son las proporciones $x_1, .., x_n$ del capital total en las que hay que invertir de las n acciones, respectivamente.

Sin embargo, se pueden fusionar ambos problemas con el cálculo de la frontera eficiente. Las carteras que pertenecen a este conjunto son las que se consideran óptimas y según la aversión al riesgo que tenga el inversor, elegirá la más arriesgada, la más rentable o bien, un punto

intermedio. Para ello, se define el parámetro $\theta \in [0,1]$ que representa la importancia que se le dará al riesgo. Entonces, la frontera eficiente es el resultado al siguiente problema:

$$\text{mín}\, \theta \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \sigma_{ij} \right) - (1-\theta) \sum_{i=1}^{n} E[R_i] \cdot x_i,$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Observamos que cuando $\theta = 0$, se obtiene la cartera cuya rentabilidad esperada sea la más elevada a cualquier riesgo. Mientras que cuando $\theta = 1$, se consigue la cartera de mínimo riesgo.

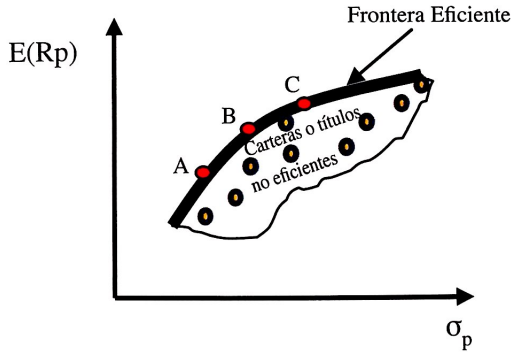

Figura 4.1: Conjunto de carteras eficientes. Fuente: pág. 258 de [8].

4.2. Modelo de Mercado de Sharpe

Este modelo nace con el fin de simplificar el modelo de Markowitz ya que tiene limitaciones con un número alto de activos pues se elevaría la cantidad de operaciones a la hora de calcular las rentabilidades y las varianzas.

El Modelo de Mercado de William F. Sharpe supone que "el rendimiento de una acción ordinaria durante un periodo dado está relacionado con el rendimiento durante el mismo periodo que se ha ganado en un índice de mercado"[1]

[1]Ir [1], pág. 157.

Esta relación viene dada por

$$R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i$$

donde

α_i representa el rendimiento del activo con respecto al mercado y

ε_i es el error aleatorio; una variable aleatoria con una distribución de probabilidad de media cero y desviación típica σ_{ϵ_i}, que no depende del título ni del mercado.

Aplicando esperanzas se obtiene

$$E[R_i] = \alpha_i + \beta_i \cdot E[R_M].$$

Observamos que

si $\alpha_i > 0$, el título está infravalorado por el mercado

si $\alpha_i < 0$, el título está sobrevalorado por el mercado

Además, si $\alpha_i = 0$ quiere decir que el mercado está en equilibrio y por tanto, el precio de las acciones reflejan exactamente su valor. Este caso se desarrollará en la sección 4.3.

Rendimiento y riesgo total de la cartera

El rendimiento de la cartera p formada por n títulos cuyas proporciones del capital total son $x_1, .., x_n$ es

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i\alpha_i + x_i\beta_i R_M + x_i\varepsilon_i) = \alpha_p + \beta_p R_M + \varepsilon_p$$

y por tanto, el rendimiento esperado es

$$E[R_p] = \alpha_p + \beta_p \cdot E[R_M] + \varepsilon_p.$$

Por otra parte, el riesgo de el título i es

$$\sigma_i^2 = Var(R_i) = \beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

y como consecuencia, el riesgo de la cartera p es

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = Var(\alpha_p + \beta \cdot R_M + \varepsilon_p) = \beta_p^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2$$

al ser R_M y ε_p independientes y donde $\beta_i^2 = (\sum_{i=1}^n x_i\beta_i)^2$ y $\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2\sigma_{\varepsilon_i}^2$.
El riesgo total de una cartera se puede dividir en *riesgo sistemático*, $\beta_p^2\sigma_M^2$, y *riesgo específico*, $\sigma_{\varepsilon_p}^2$, donde el riesgo específico es diversificable. Es decir, una cartera bien diversificada verifica $\sigma_{\varepsilon_p}^2 = 0$. Si suponemos que las proporciones invertidas de los activos son las mismas, es decir, $1/n$, entonces el riesgo específico es $\sigma_{\varepsilon_p}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2}\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \frac{1}{n}\overline{\sigma_\varepsilon^2}$, denotando como $\overline{\sigma_\varepsilon^2}$ la media de las varianzas de los sucesos $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$.
Entonces, cuántos más títulos formen la cartera, menor será $1/n$ y por tanto, menor será el riesgo específico.

Combinación de un activo de renta variable y un activo libre de riesgo

En primer lugar, se introduce el concepto de prima de riesgo de mercado como la diferencia entre el rendimiento de mercado y el rendimiento del activo libre de riesgo:

$$E[R_M] - R_f.$$

Se trata del beneficio por haber invertido en activos de renta variable frente a aquellos de libre riesgo. Entonces, considerando el rendimiento de invertir en un activo de renta variable frente a uno de renta fija y aplicando el modelo de Sharpe se obtiene

$$E[R_i] - R_f = \alpha_i + \beta_i(E[R_M] - R_f),$$

que es conocida como la *línea característica* (figura 4.2).

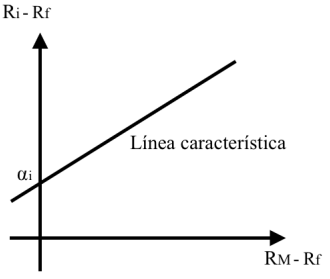

Figura 4.2: Línea característica. Fuente: elaboración propia

4.3. Modelo de valoración de activos de capital, CAPM

El modelo CAPM, llamado así por las siglas en inglés de *Capital Asset Pricing Model*, es el modelo de Sharpe cuando el mercado está en equilibrio. Se caracteriza por la línea de los mercados de valores (SML, por sus siglas en inglés) dada por la siguiente relación

$$E[R_i] = R_f + (E[R_M] - R_f) \cdot \beta_i \tag{4.1}$$

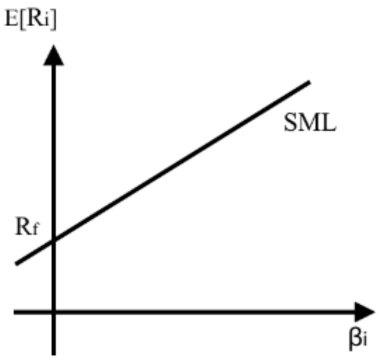

Figura 4.3: Línea de los mercados de valores, SML. Fuente: elaboración propia.

Aplicando el CAMP, obtenemos la rentabilidad del título si el mercado estuviera en equilibrio, o sea la rentabilidad que tendríamos que exigirle al título. De esta manera, se puede estudiar la valoración de los activos de la siguiente forma:

$$E[R_i] - E[R_i]' = \alpha_i = \begin{cases} < 0, \text{ entonces el activo está sobrevalorado} \\ > 0, \text{ entonces el activo está infravalorado} \end{cases}$$

si denotamos por $E[R_i]'$ al rendimiento obtenido con el modelo del CAMP. De este modo, los activos que se encuentren por encima de la línea SML (figura 4.3) estarán infravalorados, mientras que los que estén por debajo estarán sobrevalorados por el mercado.

Capítulo 5

Caso práctico

En este capítulo nos hemos propuesto como objetivo analizar, bajo las teorías y modelos expuestos anteriormente, dos carteras de inversión de distinto perfil, compuestas por acciones de empresas que cotizan en el Mercado de Valores Europeo en 2017–2020. Hemos elegido este periodo porque incluye la pandemia de la COVID-19 y así podremos ver el efecto que tuvo en la rentabilidad y el riesgo de las acciones.

Como hemos mencionado, se han elegido dos carteras de distinto perfil: tecnológico y medioambiental. La primera está compuesta por empresas relacionadas con las nuevas tecnologías, pertenecientes a sectores similares. Sin embargo, la segunda cartera consta de acciones de empresas de diferentes sectores con una característica en común: estar comprometidos con el medio ambiente.

La consideración de estas dos carteras amplía más la visión del efecto de la pandemia, tanto en el sector tecnológico como en otros sectores como en los servicios de comunicación, en la industria o en el financiero.

Los datos han sido obtenidos a través de la plataforma privada *Bloomberg* [2]. Sin embargo, se han contrastado estos datos por los presentados en la Web *Investing.com* [11], siendo generalmente coincidentes. Por tanto, hemos podido comprobar la fidelidad de los datos, lo que consideramos importante a la hora de analizarlos.

Por otra parte, las empresas seleccionadas, cuyas acciones forman parte de nuestra cartera, principalmente se encuentran en la cabeza dentro del sector. Además, de tener rendimientos generalmente positivos y con gran estabilidad de su valor en el mercado.

5.1. Fundamentos de la inferencia estadística

Durante los tres primeros capítulos, se han definido tanto las rentabilidades esperadas como las varianzas de manera teórica con esperanzas y desviaciones típicas. Sin embargo, en la práctica se aborda como medias y varianzas muestrales. Se ha seguido la referencia [4] para el desarrollo de esta sección.

Definición 5.1.1. *Se llama muestra aleatoria simple (m.a.s.) de tamaño n a cualquier conjunto $X_1, ..., X_n$ de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución P.*

Ahora bien , con el término *muestra* nos referimos de igual modo a las variables $X_1, ..., X_n$ como a los valores $x_1, .., x_n$ que toman dichas variables. Si suponemos que las variables están definidas en el mismo espacio probabilístico (Ω, σ, ν), entonces para un $\omega_0 \in \Omega$, la muestra es $X_1(\omega_0) = x_1, ..., X_n(\omega_0) = x_n$.

Definición 5.1.2. *Dada la muestra $X_1, .., X_n$, con $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$, se llama momento muestral de orden k a*

$$m_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i)^k$$

y momento muestral centrado de orden k a

$$M_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_1)^k.$$

Entonces, la *media muestral*, $\overline{X}_n$, es m_1 y la *varianza muestral*, S^2, es M_2.

Una vez definidos estos conceptos, se verá cómo la media y la varianza muestral sirven para estimar la esperanza matemática y la varianza, respectivamente. Además de estudiar si son óptimos para ello.

Definición 5.1.3. *Sea $(\mathcal{X}, \alpha)$ un espacio medible. Llamaremos estadístico a cualquier aplicación medible $T : \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 5.1.1. *$\overline{X}_n$ y S^2 son estadísticos.*

Teorema 5.1.1. *Dada una m.a.s. $X_1, .., X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Si las variables tienen una esperanza finita, se verifican*

i) $\overline{X}_n \longrightarrow_{c.s} E[X_1]$ *y*

ii) $E[\overline{X}_n] = E[X_1]$.

Demostración. En primer lugar, (i) se deduce por la Ley Fuerte de los Grandes Números.

Teorema 5.1.2 (**Ley Fuerte de los Grandes Números**). *Sea* $X_1, ..., X_n$ *una m.a.s. definidas en el espacio probabilístico* (Ω, σ, ν). *Entonces, si* $E[|X_1|] < \infty$, *se cumple que*

$$\frac{X_1 + .. + X_n}{n} \longrightarrow_{c.s} E[X_1].$$

Por otro lado, (ii) se concluye por ser la esperanza un operador lineal y por tratarse de variables igualmente distribuidas (m.a.s). Entonces,

$$E[\overline{X}_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = E[X_1].$$

□

Observamos que la media de una variable es el promedio de los valores que toma esta. Por tanto, la media muestral tomará valores en torno a la media de la muestra y es coherente usar $\overline{X}_n$ para estimar la esperanza matemática de la variable.
Por otro lado, sobre los estimadores de la varianza, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 5.1.3. *Dada una m.a.s.* $X_1, ..., X_n$ *cuyas variables tienen una distribución con varianza finita* σ^2, *entonces*

i) $S^2 \longrightarrow_{c.s} \sigma^2$.

ii) $E[S^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

Demostración. Disponible en [4]. □

Observamos que S^2 no tiene como media la varianza, sino $\frac{n-1}{n}\sigma^2$. Por tanto, esto nos lleva a definir la *cuasi-varianza* como

$$\tilde{S}^2 := \frac{n}{n-1}S^2$$

cuya media es el valor a estimar, es decir, la varianza. Sin embargo, si n es un número elevado, no hay grandes diferencias en la práctica.

5.2. Selección de carteras

Todos los datos y cálculos completos de esta sección están recogidos en los ficheros adicionales de Excel adjuntos a este trabajo.

5.2.1. Cartera de perfil tecnológico

Esta cartera está formada por empresas que producen principalmente hardware, equipos de telecomunicaciones, software, comercio electrónico y servicios informáticos. Por tanto, están asociadas a la innovación y al avance tecnológico.
Las empresas que formarán la cartera son:

Ticket	Empresa	Sector	País
IDR	Indra Sistemas S.A.	Tecnología de la información	España
SAPG	SAP SE	Tecnología de la información	Alemania
SIEG	Siemens AG	Industriales	Alemania
AMS	Amadeus IT Group	Tecnología de la información	España
ASML	ASML Holding NV	Tecnología de información	Holanda
NOKIA	NOKIA Oyj	Tecnología de la información	Finlandia
VIV	Vivendi SA	Servicios de comunicación	Francia
DTE	Deutsche Telekom AG-REG	Servicios de comunicación	Alemania
TL5	Mediaset España Comunicación S.A.	Servicios de comunicación	España
CLNX	Cellnex Telecom, S.A.	Servicios de comunicación	España
PHIA	Koninklijke Philips N.V.	Salud	Holanda
AIR	Airbus Group SE	Industriales	Francia
SAF	Safran SA	Industriales	Francia

Cuadro 5.1: Empresas que forman la cartera tecnológica. Elaboración propia a partir de información de [7].

Periodo de 2017 - 2018

A partir de las cotización de los diferentes activos obtenidas de Bloomberg, se calculan los rendimientos diarios observados mediante la fórmula 2.1. Por otra parte, el *benchmark* (BMK) que se ha elegido como referencia para el mercado es la media aritmética entre los

valores de cotización del Ibex 35 y del Eurostoxx 50, ya que las acciones son de empresas europeas.

En base a estos datos, calculamos lo siguiente:

	Rendimiento Esperado	Varianza	Desviacion Estandar	Beta
BMK	-0,016 %	5,8E-05	0,760 %	1
IDR	-0,033 %	2,9E-04	1,692 %	0,891
SAPG	0,014 %	1,4E-04	1,162 %	0,723
SIEG	-0,031 %	1,2E-04	1,117 %	0,874
AMS	0,072 %	1,3E-04	1,162 %	0,841
ASML	0,059 %	2,4E-04	1,534 %	0,841
NOKIA	0,030 %	2,9E-04	1,689 %	0,781
VIV	0,041 %	1,9E-04	1,388 %	0,939
DTE	-0,015 %	9,0E-05	0,950 %	0,579
TL5	-0,124 %	2,6E-04	1,608 %	0,827
CLNX	0,102 %	1,8E-04	1,336 %	0,774
PHIA	0,018 %	1,6E-04	1,278 %	1,000
AIR	0,067 %	2,2E-04	1,489 %	1,084
SAF	0,091 %	1,6E-04	1,270 %	0,913

Cuadro 5.2: Datos de la cartera tecnológica en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

En una primera instancia, destinaremos la misma proporción para los 13 activos. Es decir,

Empresas	IDR	SAPG	SIEG	AMS	ASML	NOKIA	VIV	DTE	TL5	CLNX	PHIA	AIR	SAF
X	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %	7,692 %

Cuadro 5.3: Cartera tecnológica a partes iguales en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

A continuación, calculamos la matriz de covarianzas gracias a una herramienta de análisis de Excel, cuyos datos de entrada son los rendimientos de los activos en este periodo. Obtenemos la siguiente tabla:

	IDR	SAPG	SIEG	AMS	ASML	NOKIA	VIV	DTE	TL5	CLNX	PHIA	AIR	SAF
IDR	0,000286	0,000051	0,000048	0,000062	0,000083	0,000056	0,000053	0,000024	0,000047	0,000038	0,000055	0,000055	0,000057
SAPG	0,000051	0,000135	0,000072	0,000064	0,000088	0,000041	0,000047	0,000039	0,000034	0,000040	0,000061	0,000067	0,000054
SIEG	0,000048	0,000072	0,000125	0,000051	0,000073	0,000031	0,000058	0,000037	0,000039	0,000032	0,000062	0,000067	0,000055
AMS	0,000062	0,000064	0,000051	0,000135	0,000084	0,000045	0,000060	0,000027	0,000038	0,000050	0,000060	0,000070	0,000060
ASML	0,000083	0,000088	0,000073	0,000084	0,000235	0,000084	0,000071	0,000044	0,000060	0,000058	0,000083	0,000093	0,000076
NOKIA	0,000056	0,000041	0,000031	0,000045	0,000084	0,000285	0,000054	0,000028	0,000044	0,000046	0,000051	0,000049	0,000049
VIV	0,000053	0,000047	0,000058	0,000060	0,000071	0,000054	0,000193	0,000037	0,000050	0,000043	0,000059	0,000072	0,000064
DTE	0,000024	0,000039	0,000037	0,000027	0,000044	0,000028	0,000037	0,000090	0,000034	0,000042	0,000033	0,000034	0,000033
TL5	0,000047	0,000034	0,000039	0,000038	0,000060	0,000044	0,000050	0,000034	0,000259	0,000054	0,000031	0,000052	0,000039
CLNX	0,000038	0,000040	0,000032	0,000050	0,000058	0,000046	0,000043	0,000042	0,000054	0,000178	0,000044	0,000040	0,000043
PHIA	0,000055	0,000061	0,000062	0,000060	0,000083	0,000051	0,000059	0,000033	0,000031	0,000044	0,000163	0,000095	0,000078
AIR	0,000055	0,000067	0,000067	0,000070	0,000093	0,000049	0,000072	0,000034	0,000052	0,000040	0,000095	0,000222	0,000117
SAF	0,000057	0,000054	0,000055	0,000060	0,000076	0,000049	0,000064	0,000033	0,000039	0,000043	0,000078	0,000117	0,000161

Cuadro 5.4: Matriz de covarianzas de la cartera en 2017-2018. Fuente: elaboración propia

Por último, calculamos la matriz de Markowitz como el producto de tres matrices: la matriz de covarianzas 5.4, el vector columna de las proporciones, que es el traspuesto de 5.3, y el vector fila de las proporciones, que es precisamente 5.3. Así, obtenemos la siguiente tabla:

	IDR	SAPG	SIEG	AMS	ASML	NOKIA	VIV	DTE	TL5	CLNX	PHIA	AIR	SAF
IDR	1,69E-06	3,04E-07	2,83E-07	3,70E-07	4,91E-07	3,29E-07	3,11E-07	1,39E-07	2,75E-07	2,22E-07	3,23E-07	3,26E-07	3,35E-07
SAPG	3,04E-07	7,99E-07	4,24E-07	3,80E-07	5,19E-07	2,45E-07	2,75E-07	2,32E-07	1,99E-07	2,35E-07	3,61E-07	3,94E-07	3,17E-07
SIEG	2,83E-07	4,24E-07	7,38E-07	3,01E-07	4,32E-07	1,85E-07	3,42E-07	2,20E-07	2,32E-07	1,89E-07	3,65E-07	3,98E-07	3,26E-07
AMS	3,70E-07	3,80E-07	3,01E-07	7,98E-07	4,95E-07	2,67E-07	3,57E-07	1,58E-07	2,27E-07	2,98E-07	3,52E-07	4,12E-07	3,56E-07
ASML	4,91E-07	5,19E-07	4,32E-07	4,95E-07	1,39E-06	4,99E-07	4,23E-07	2,60E-07	3,57E-07	3,46E-07	4,89E-07	5,48E-07	4,50E-07
NOKIA	3,29E-07	2,45E-07	1,85E-07	2,67E-07	4,99E-07	1,69E-06	3,20E-07	1,64E-07	2,58E-07	2,74E-07	3,00E-07	2,89E-07	2,87E-07
VIV	3,11E-07	2,75E-07	3,42E-07	3,57E-07	4,23E-07	3,20E-07	1,14E-06	2,17E-07	2,96E-07	2,54E-07	3,48E-07	4,24E-07	3,76E-07
DTE	1,39E-07	2,32E-07	2,20E-07	1,58E-07	2,60E-07	1,64E-07	2,17E-07	5,34E-07	2,00E-07	2,46E-07	1,93E-07	2,03E-07	1,95E-07
TL5	2,75E-07	1,99E-07	2,32E-07	2,27E-07	3,57E-07	2,58E-07	2,96E-07	2,00E-07	1,53E-06	3,18E-07	1,84E-07	3,08E-07	2,29E-07
CLNX	2,22E-07	2,35E-07	1,89E-07	2,98E-07	3,46E-07	2,74E-07	2,54E-07	2,46E-07	3,18E-07	1,06E-06	2,59E-07	2,34E-07	2,52E-07
PHIA	3,23E-07	3,61E-07	3,65E-07	3,52E-07	4,89E-07	3,00E-07	3,48E-07	1,93E-07	1,84E-07	2,59E-07	9,66E-07	5,65E-07	4,61E-07
AIR	3,26E-07	3,94E-07	3,98E-07	4,12E-07	5,48E-07	2,89E-07	4,24E-07	2,03E-07	3,08E-07	2,34E-07	5,65E-07	1,31E-06	6,91E-07
SAF	3,35E-07	3,17E-07	3,26E-07	3,56E-07	4,50E-07	2,87E-07	3,76E-07	1,95E-07	2,29E-07	2,52E-07	4,61E-07	6,91E-07	9,54E-07

Cuadro 5.5: Matriz de Markowitz de la cartera en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

La suma de todos los valores de la matriz 5.5 es la varianza muestral de la cartera, ya que se trata de la fórmula 3.1. Por otra parte, el rendimiento medio de la cartera es la multiplicación del vector fila de los rendimientos individuales retratados en la figura 5.2 por el vector columna de las proporciones de la figura 5.3.

Una vez planteado esto, resumimos las características de la cartera tecnológica a partes iguales en el periodo 2019-2020 en la siguiente tabla:

Rendimiento esperado	0,0224 %
Varianza	0,000064
Desviación típica	0,8 %

Cuadro 5.6: Cartera a partes iguales en 2017-2018. Fuente: elaboración propia

Ahora, resolvemos el problema de optimización cuadrático (no lineal) que plantea Markowitz, con ayuda de la herramienta *Solver* de Excel. Elegimos como variables de decisión las proporciones del capital total que suponen las acciones, que son positivas o nulas.
Por otra parte, la función objetivo a minimizar será la varianza muestral, sujeto a que la suma de las proporciones sea 1. De esta manera, Solver nos proporciona una la cartera de mínimo riesgo formada las acciones de las siguientes empresas y con las siguientes características:

Empresas	IDR	SAPG	SIEG	AMS	NOKIA	VIV	DTE	TL5	CLNX	PHIA	SAF
X	4,67 %	5,11 %	11,09 %	10,78 %	5,94 %	3,27 %	34,47 %	6,52 %	7,64 %	4,95 %	5,57 %

Cuadro 5.7: Cartera de mínima varianza en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

Rendimiento esperado	0,0072 %
Varianza	0,000053
Desviación típica	0,73 %
Coeficiente de variación	100,927

Cuadro 5.8: Cartera de mínima varianza en 2017-2018. Fuente: elaboración propia

Observamos que aunque ésta es la que menos riesgo tiene, la cartera a partes iguales también pertenece a la frontera eficiente ya que tiene más riesgo pero también más rentabilidad.

Con el fin de contrastar los resultados, vamos a calcular análogamente la cartera de mínimo coeficiente de variación y la cartera de máxima rentabilidad, que, igual que la cartera de mínima varianza, pertenecen a la frontera eficiente. La cartera de mínimo coeficiente de variación está compuesta por el $20,29\,\%$ de AMS, el $42,49\,\%$ de CLNX y el $37,22\,\%$ de SAF, y tiene las siguientes características:
Tal vez esta cartera sea una buena opción ya que el coeficiente de variación se reduce en un $89,7\,\%$ con respecto a la cartera de mínima varianza. La cartera de máxima rentabilidad

Rendimiento esperado	0,0919 %
Varianza	0,00091
Desviación típica	0,96 %
Coeficiente de variación	10,401

Cuadro 5.9: Cartera de mínimo coeficiente de variación en 2017-2018. Fuente: elaboración propia

está formada por solo un activo: el 100 % de CLNX.

Rendimiento esperado	0,1025 %
Varianza	0,00018
Desviación típica	1,34 %
Coeficiente de variación	13,034

Cuadro 5.10: Cartera de máxima rentabilidad en 2017-2018. Fuente: elaboración propia

En este caso, si comparamos las condiciones de esta cartera con la de mínimo coeficiente de variación, vemos que aumenta el rendimiento un poco pero también lo hace notablemente el riesgo.

Suponiendo que el inversor es adverso al riesgo, se elige la cartera de mínima varianza para aplicar el modelo de CAPM. En primer lugar, calculamos la Beta de la cartera como figura en 3.2:

Activo	X	Beta	X*Beta
IDR	4,666 %	0,8910	0,042
SAPG	5,109 %	0,7231	0,037
SIEG	11,086 %	0,8741	0,097
AMS	10,780 %	0,8411	0,091
ASML	0,000 %	0,8411	0,000
NOKIA	5,944 %	0,7812	0,046
VIV	3,270 %	0,9389	0,031
DTE	34,468 %	0,5786	0,199
TL5	6,523 %	0,8265	0,054
CLNX	7,644 %	0,7741	0,059
PHIA	4,945 %	1,0003	0,049
AIR	0,000 %	1,0844	0,000
SAF	5,565 %	0,9134	0,051
Beta de la cartera			0,756

Cuadro 5.11: Beta de la cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

Ahora, para poder aplicar la relación 4.1, necesitamos la rentabilidad de mercado que es el promedio del benchmark en 2017-2018 tal como se muestra en la tabla 5.2 y el rendimiento del activo libre de riesgo. Para esto último, consideramos como activo de renta fija el bono alemán a 10 años. Según los datos, hemos calculado el rendimiento medio en el periodo 2017-2018 y es de $0,3595\,\%$. Resumiendo los datos y aplicando el CAPM obtenemos lo siguiente:

Rendimiento de la cartera	
Libre de riesgo	0,360 %
Beta cartera	0,756
Rentabilidad mercado	-0,016 %
CAPM	0,076 %

Cuadro 5.12: CAPM de la cartera de mínima varianza en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

Luego, el rendimiento exigido a la cartera es de 0,076 %.
En este caso, dadas las condiciones de la cartera de mínimo coeficiente de variación, también vamos a aplicar este modelo a esta cartera. Calculamos la Beta de la cartera y obtenemos: Aplicando el modelo CAPM, tenemos:

Activo	X	Beta	X*Beta
AMS	20,29 %	0,8411	0,171
CLNX	42,49 %	0,7741	0,329
SAF	37,22 %	0,9134	0,340
Beta de la cartera			0,840

Cuadro 5.13: Beta de la cartera de mínimo coeficiente de variación. Fuente: elaboración propia.

Rendimiento de la cartera	
Libre de riesgo	0,360 %
Beta cartera	0,84
Rentabilidad mercado	-0,016 %
CAPM	0,045 %

Cuadro 5.14: CAPM de la cartera de mínimo coeficiente de variación en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

A la cartera de mínimo coeficiente de variación deberíamos exigirle una rentabilidad de $0,045\,\%$.

Periodo de 2019 - 2020

Como en el apartado anterior, calculamos los rendimientos diarios observados mediante la fórmula 2.1, la varianza y la desviación típica:

	Rendimiento	Varianza	Desviación Típica	Beta
Ibex35	0,003 %	0,0003	1,585 %	
Stoxx50	0,045 %	0,0002	1,520 %	
BMK	0,024 %	0,0002	1,521 %	1
IDR	-0,004 %	0,0006	2,490 %	1,017
SAPG	0,061 %	0,0005	2,185 %	0,827
SIEG	0,058 %	0,0004	2,064 %	1,023
AMS	0,028 %	0,0007	2,709 %	1,286
ASML	0,230 %	0,0004	2,104 %	1,286
NOKIA	-0,054 %	0,0007	2,583 %	0,942
VIV	0,054 %	0,0003	1,616 %	0,695
DTE	0,017 %	0,0002	1,567 %	0,721
TL5	-0,017 %	0,0007	2,591 %	0,967
CLNX	0,192 %	0,0005	2,204 %	0,506
PHIA	0,090 %	0,0003	1,736 %	0,691
AIR	0,070 %	0,0011	3,383 %	1,552
SAF	0,072 %	0,0011	3,244 %	1,542

Cuadro 5.15: Datos de la cartera tecnológica en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

Con la misma proporción para los trece activos, obtenemos la matriz de covarianzas

	IDR	SAPG	SIEG	AMS	ASML	NOKIA	VIV	DTE	TL5	CLNX	PHIA	AIR	SAF
IDR	0,00062	0,00020	0,00021	0,00044	0,00021	0,00024	0,00017	0,00015	0,00029	0,00006	0,00015	0,00046	0,00040
SAPG	0,00020	0,00048	0,00028	0,00024	0,00020	0,00017	0,00014	0,00019	0,00018	0,00012	0,00017	0,00027	0,00026
SIEG	0,00021	0,00028	0,00043	0,00028	0,00023	0,00022	0,00015	0,00022	0,00022	0,00010	0,00015	0,00037	0,00039
AMS	0,00044	0,00024	0,00028	0,00073	0,00026	0,00024	0,00018	0,00018	0,00031	0,00011	0,00022	0,00057	0,00052
ASML	0,00021	0,00020	0,00023	0,00026	0,00044	0,00021	0,00013	0,00014	0,00015	0,00010	0,00018	0,00035	0,00036
NOKIA	0,00024	0,00017	0,00022	0,00024	0,00021	0,00067	0,00017	0,00015	0,00015	0,00011	0,00017	0,00030	0,00034
VIV	0,00017	0,00014	0,00015	0,00018	0,00013	0,00017	0,00026	0,00014	0,00016	0,00011	0,00012	0,00023	0,00020
DTE	0,00015	0,00019	0,00022	0,00018	0,00014	0,00015	0,00014	0,00025	0,00016	0,00013	0,00012	0,00024	0,00023
TL5	0,00029	0,00018	0,00022	0,00031	0,00015	0,00015	0,00016	0,00016	0,00067	0,00009	0,00011	0,00036	0,00037
CLNX	0,00006	0,00012	0,00010	0,00011	0,00010	0,00011	0,00011	0,00013	0,00009	0,00049	0,00013	0,00007	0,00015
PHIA	0,00015	0,00017	0,00015	0,00022	0,00018	0,00017	0,00012	0,00012	0,00011	0,00013	0,00030	0,00022	0,00022
AIR	0,00046	0,00027	0,00037	0,00057	0,00035	0,00030	0,00023	0,00024	0,00036	0,00007	0,00022	0,00114	0,00090
SAF	0,00040	0,00026	0,00039	0,00052	0,00036	0,00034	0,00020	0,00023	0,00037	0,00015	0,00022	0,00090	0,00105

Cuadro 5.16: Matriz de covarianzas de la cartera en 2019-2020. Fuente: elaboración propia

y la matriz de Markowitz:

	IDR	SAPG	SIEG	AMS	ASML	NOKIA	VIV	DTE	TL5	CLNX	PHIA	AIR	SAF
IDR	0,0002 %	0 %	0 %	0 %	0,00003 %	0,00000 %	0,00009 %	0,00008 %	0,00002 %	0,00001 %	0,00006 %	0 %	0 %
SAPG	0,00000 %	0 %	0 %	0 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0 %	0 %
SIEG	0,00000 %	0 %	0 %	0 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0 %	0 %
AMS	0,00000 %	0 %	0 %	0 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0 %	0 %
ASML	0,00003 %	0 %	0 %	0 %	0,00025 %	0,00001 %	0,00024 %	0,00029 %	0,00005 %	0,00009 %	0,00028 %	0 %	0 %
NOKIA	0,00000 %	0 %	0 %	0 %	0,00001 %	0,00000 %	0,00002 %	0,00002 %	0,00000 %	0,00001 %	0,00002 %	0 %	0 %
VIV	0,00009 %	0 %	0 %	0 %	0,00024 %	0,00002 %	0,00168 %	0,00096 %	0,00017 %	0,00036 %	0,00063 %	0 %	0 %
DTE	0,00008 %	0 %	0 %	0 %	0,00029 %	0,00002 %	0,00096 %	0,00183 %	0,00018 %	0,00045 %	0,00066 %	0 %	0 %
TL5	0,00002 %	0 %	0 %	0 %	0,00005 %	0,00000 %	0,00017 %	0,00018 %	0,00012 %	0,00005 %	0,00010 %	0 %	0 %
CLNX	0,00001 %	0 %	0 %	0 %	0,00009 %	0,00001 %	0,00036 %	0,00045 %	0,00005 %	0,00079 %	0,00033 %	0 %	0 %
PHIA	0,00006 %	0 %	0 %	0 %	0,00028 %	0,00002 %	0,00063 %	0,00066 %	0,00010 %	0,00033 %	0,00123 %	0 %	0 %
AIR	0,00000 %	0 %	0 %	0 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0 %	0 %
SAF	0,00000 %	0 %	0 %	0 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0,00000 %	0 %	0 %

Cuadro 5.17: Matriz de Markowitz de la cartera en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

Resumiendo, las características de la cartera tecnológica a partes iguales en el periodo 2019-2020 son:

Rendimiento esperado	0,0615 %
Varianza	0,000253
Desviación típica	1,59 %
Coeficiente de variación	25,833

Cuadro 5.18: Características de la cartera a partes iguales en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

Resolviendo el problema de optimización cuadrático (no lineal) que plantea Markowitz, la cartera de mínimo riesgo está formada por las acciones de las siguientes empresas y con las siguientes características:

Empresas	IDR	ASML	NOKIA	VIV	DTE	TL5	CLNX	PHIA
X	1,96 %	7,57 %	0,51 %	25,38 %	27,30 %	4,29 %	12,78 %	20,21 %

Cuadro 5.19: Cartera de mínima varianza en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

Rendimiento esperado	0,0769 %
Varianza	0,00016
Desviación típica	1,28 %
Coeficiente de variación	16,638

Cuadro 5.20: Cartera de mínima varianza en 2019-2020. Fuente: elaboración propia

En este caso, sí vemos que la cartera a partes iguales no pertenece a la frontera eficiente puesto que la cartera de mínima varianza ofrece más rendimiento y menos riesgo.

Con el fin de contrastar los resultados, vamos a calcular análogamente la cartera de máxima rentabilidad y de mínimo coeficiente de variación.
La cartera de máxima rentabilidad está compuesta por las acciones de ASML al 100 %, con las siguientes características:

Rendimiento esperado	0,23 %
Varianza	0,000443
Desviación típica	2,10 %
Coeficiente de variación	9,15

Cuadro 5.21: Cartera de máxima rentabilidad en 2019-2020. Fuente: elaboración propia

Por otro lado, la cartera de mínimo coeficiente de variación está formada por las acciones de dos empresas: ASML y CLNX, destinando el 60,11 % y el 39,89 % del capital total, respectivamente. Tiene las siguientes características:

Rendimiento esperado	0,214 %
Varianza	0,000283
Desviación típica	1,68 %
Coeficiente de variación	7,862

Cuadro 5.22: Cartera de mínimo coeficiente de variación en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

Ahora, con el fin de aplicar el modelo de CAPM, calculamos la Beta de la cartera de mínima varianza como figura en 3.2:

Activo	X	Beta	X·Beta
IDR	1,96 %	1,017	0,020
ASML	7,57 %	1,286	0,097
NOKIA	0,51 %	0,942	0,005
VIV	25,38 %	0,695	0,176
DTE	27,30 %	0,721	0,197
TL5	4,29 %	0,967	0,041
CLNX	12,78 %	0,506	0,065
PHIA	20,21 %	0,691	0,140
Beta			0,741

Cuadro 5.23: Beta de la cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

A continuación, para poder aplicar la relación 4.1, necesitamos la rentabilidad de mercado que es el promedio del benchmark en 2019-2020 tal como se muestra en la tabla 5.15 y el rendimiento del activo libre de riesgo. Para esto último, consideramos como activo de renta fija el bono alemán a 10 años. Según los datos de *Bloomberg*, hemos calculado el rendimiento medio en el periodo 2019-2020 y es de $-2,3032\,\%$.
Resumiendo los datos y aplicando el CAPM obtenemos lo siguiente:

Rendimiento de la cartera	
Libre de riesgo	-2,30 %
Beta cartera	0,74
Rentabilidad mercado	0,02 %
CAPM	-0,58 %

Cuadro 5.24: CAPM de la cartera de mínima varianza en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

Luego, el rendimiento exigido a la cartera es de $-0{,}58\,\%$.

Por último, aplicamos este mismo modelo a la cartera de mínimo coeficiente de variación. Calculamos la Beta de la cartera y obtenemos:

Activo	X	Beta	X·Beta
ASML	60,11 %	1,286	0,773
CLNX	39,89 %	0,506	0,202
Beta			0,975

Cuadro 5.25: Beta de la cartera de mínimo coeficiente de variación. Fuente: elaboración propia.

En base a esto y a los datos que ya teníamos, aplicamos el modelo CAPM y tenemos lo siguiente:

Rendimiento de la cartera	
Libre de riesgo	-2,30 %
Beta cartera	0,975
Rentabilidad mercado	0,02 %
CAPM	-0,03 %

Cuadro 5.26: CAPM de la cartera de mínimo coef. de variación en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

Por tanto, a la cartera de mínimo coeficiente de variación deberíamos exigirle un rendimiento de $-0,03\,\%$.

5.2.2. Cartera de perfil ecológico

Esta primera cartera tiene como característica principal que está formada por compañías con un fuerte compromiso con el medio ambiente, además de promover mejoras en la calidad de vida que minimicen el impacto ambiental [1]. Nuestra cartera está formada por las acciones de las siguientes empresas:

Ticket	**Empresa**	**Sector**	**País**
TEF	Telefónica S.A.	Servicios de comunicación	España
ANA	Acciona S.A.	Suministros	España
ELE	Endesa S.A.	Suministros	España
OREP	L'Oréal S.A.	Productos de primera necesidad	Francia

[1] Estas características han sido recogidas de las páginas Web de las diferentes empresas.

Ticket	**Empresa**	**Sector**	**País**
SIEGn	Siemens AG	Industriales	Alemania
BNPP	BNP Paribas S.A.	Financiero	Francia
MEL	Melia Hotels International S.A.	Consumo discrecional	España
INGA	ING Groep NV	Financiero	Holanda
IBE	Iberdrola S.A.	Suministros	España
UNAa	Unilever PLC	Productos de primera necesidad	Holanda
SAN	Banco Santander S.A.	Financiero	España
SCHN	Schneider Electric SE	Industriales	Francia
ASML	ASML Holding NV	Tecnología de la información	Holanda

Cuadro 5.27: Empresas que forman la cartera ecológica. Elaboración propia a partir de información de [7].

Periodo 2017-2018

A partir de las cotización de los diferentes activos obtenidas de Bloomberg y al igual que con la cartera tecnológica, calculamos los rendimientos diarios observados mediante la fórmula 2.1. Además, seguimos usando como *benchmark* la media aritmética entre los valores de cotización del Ibex 35 y del Eurostoxx 50.

En base a estos datos, calculamos lo siguiente:

	Rendimiento	Varianza	Desviación típica	Beta
BMK	-0,016 %	0,00006	0,76 %	1,00
TEF	-0,030 %	0,00012	1,11 %	1,08
ANA	0,017 %	0,00018	1,33 %	0,88
ELE	0,006 %	0,00013	1,14 %	0,69
OREP	0,034 %	0,00011	1,02 %	0,73
SIEGn	-0,031 %	0,00012	1,12 %	0,88
BNPP	-0,073 %	0,00017	1,29 %	1,24
MEL	-0,050 %	0,00019	1,36 %	0,70
INGA	-0,062 %	0,00014	1,20 %	1,14
IBE	0,028 %	0,00011	1,06 %	0,85
UNAa	0,044 %	0,00016	1,25 %	0,49
SAN	-0,031 %	0,00019	1,38 %	1,53
SCHN	-0,012 %	0,00016	1,27 %	1,12
ASML	0,059 %	0,00024	1,53 %	1,08

Cuadro 5.28: Datos de la cartera ecológica en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

Análogamente a los anteriores casos, calculamos las proporciones de los diferentes activos con la ayuda de Solver y la cartera de mínima varianza resulta ser la formada por las siguientes empresas en las correspondientes proporciones:

TEF	ANA	ELE	OREP	SIEGn	BNPP	MEL	INGA	IBE	UNAa	ASML
3,87 %	0,47 %	17,73 %	8,89 %	16,96 %	3,84 %	13,14 %	10,57 %	7,36 %	16,11 %	1,06 %

Cuadro 5.29: Proporciones de la cartera de mínima varianza en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

Las características de esta cartera son:

Rendimiento esperado	-0,0084 %
Varianza	0,000050
Desviación típica	0,7 %
Coeficiente de variación	-83,51

Cuadro 5.30: Características cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

Dado que esta cartera presenta rendimientos negativos, en una primera instancia, no tendría sentido resolver el problema como lo llevamos resolviendo hasta ahora pues dará lugar a una cartera no eficiente. Sin embargo, vamos a añadirle una restricción más: que el rendimiento sea positivo. Solver nos ofrece una cartera que está formada un $5,63\,\%$ de OREP, un $18,80\,\%$ de IBE, un $38,00\,\%$ de UNAa y un $37,57\,\%$ de ASML, y tiene las siguientes características:

Rendimiento esperado	0,0462 %
Varianza	0,000086
Desviación típica	0,9 %
Coeficiente de variación	20,03

Cuadro 5.31: Características cartera de mínimo coeficiente de variación. Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, la cartera de máxima rentabilidad está compuesta al $100\,\%$ por ASML y tiene las siguientes características:

Rendimiento esperado	0,0594 %
Varianza	0,000235
Desviación típica	1,5 %
Coeficiente de variación	25,81

Cuadro 5.32: Características de la cartera de máxima rentabilidad. Fuente: elaboración propia.

A continuación para aplicar el modelo CAPM a la cartera de mínima varianza, necesitamos la Beta de la cartera.

Activo	X (%)	Beta	X· Beta
TEF	3,87 %	1,078	0,042
ANA	0,47 %	0,877	0,004
ELE	17,73 %	0,686	0,122
OREP	8,89 %	0,732	0,065
SIEGn	16,96 %	0,876	0,149
BNPP	3,84 %	1,237	0,047
MEL	13,14 %	0,703	0,092
INGA	10,57 %	1,140	0,121
IBE	7,36 %	0,846	0,062
UNAa	16,11 %	0,492	0,079
ASML	1,06 %	1,077	0,011
Beta de la cartera			0,794

Cuadro 5.33: Beta de la cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

Una vez tenemos que $\beta_p = 0,794$, aplicamos la igualdad en la que se basa el modelo CAMP y obtenemos que el rendimiento que le deberíamos exigir a la cartera de mínima varianza es $0,06\,\%$.

Rendimiento de la cartera	
Libre de riesgo	0,3595 %
Beta cartera	0,794
Rentabilidad mercado	-0,02 %
CAMP	0,06 %

Cuadro 5.34: Características de la cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

Por tanto, a la cartera de mínima varianza se le debería exigir un rendimiento de $0,06\,\%$. Realizando los mismos cálculos a la cartera de mínimo coeficiente de variación, obtenemos el mismo rendimiento exigido.

Periodo 2019-2020

Reiterando el proceso que hemos seguido en los anteriores apartado, obtenemos los siguientes rendimientos, varianzas, desviaciones típicas y Betas de las acciones pertenecientes a la cartera ecológica en este periodo de 2019-2020:

	Rendimiento medio	Varianza	Desv. Típica	Beta
BMK	0,0236 %	0,0002	1,521 %	1,000
TEF	-0,1405 %	0,0005	2,308 %	1,055
ANA	0,1133 %	0,0005	2,227 %	0,914
ELE	0,0331 %	0,0003	1,585 %	0,683
OREP	0,0961 %	0,0002	1,566 %	0,689
SIEGn	0,0577 %	0,0004	2,064 %	1,024
BNPP	0,0528 %	0,0007	2,696 %	1,495
MEL	-0,0139 %	0,0014	3,791 %	1,569
INGA	0,0029 %	0,0009	2,946 %	1,574
IBE	0,1066 %	0,0002	1,547 %	0,706
UNAa	0,0179 %	0,0002	1,410 %	0,476
SAN	-0,0483 %	0,0007	2,715 %	1,491
SCHN	0,1553 %	0,0004	1,928 %	1,034
ASML	0,2304 %	0,0004	2,104 %	0,882

Cuadro 5.35: Datos de la cartera ecológica en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

Usando el Solver, obtenemos que la cartera de mínima varianza está compuesta por las siguientes acciones en las siguientes proporciones:

ELE	OREP	SIEGn	IBE	UNAa	ASML
15,99 %	7,35 %	8,35 %	15,56 %	43,15 %	9,61 %

Cuadro 5.36: Proporciones de la cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

Las características de esta cartera son:

Rendimiento esperado	0,064 %
Varianza	0,00015
Desviación típica	1,212 %
Coeficiente de variación	19,05

Cuadro 5.37: Características de la cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

La cartera de mínimo coeficiente de variación está formada por el $3,65\,\%$ de ANA, el $29,93\,\%$ de IBE y el $66,43\,\%$ de ASML, y tiene las siguientes características:

Rendimiento esperado	0,189 %
Varianza	0,00027
Desviación típica	1,654 %
Coeficiente de variación	8,75

Cuadro 5.38: Características de la cartera de mínimo coeficiente de variación. Fuente: elaboración propia.

Por último, la cartera de máxima rentabilidad está compuesta en un $100\,\%$ de ASML y tiene las siguientes características:

Rendimiento esperado	0,23 %
Varianza	0,00044
Desviación típica	2,11 %
Coeficiente de variación	9,13

Cuadro 5.39: Características de la cartera de máxima rentabilidad. Fuente: elaboración propia.

A continuación calculamos la Beta de esta cartera de mínima varianza con el fin de aplicar el modelo CAPM. Como vemos en el cuadro 5.42, esta cartera tiene una Beta de $0,645$ y finalmente, obtenemos que el rendimiento exigido a esta cartera es de $0,08\,\%$, como observamos en el cuadro 5.41.

Activo	X (%)	Beta	X · Beta
ELE	15,99 %	0,683	0,109
OREP	7,35 %	0,689	0,051
SIEGn	8,35 %	1,024	0,085
IBE	15,56 %	0,706	0,110
UNAa	43,15 %	0,476	0,205
ASML	9,61 %	0,882	0,085
Beta de la cartera			0,645

Cuadro 5.40: Beta de la cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

Rendimiento de la cartera	
Libre de riesgo	-2,3032 %
Beta cartera	0,645
Rentabilidad mercado	0,02 %
CAPM	-0,80 %

Cuadro 5.41: CAPM de la cartera de mínima varianza. Fuente: elaboración propia.

Por último, calculamos el modelo CAPM a la cartera de mínimo coeficiente de variación. En primer lugar, tenemos que la Beta de esta cartera es $0,83$ como muestra el cuadro 5,42

Activo	X (%)	Beta	X · Beta
ANA	3,65 %	0,914	0,033
IBE	29,93 %	0,706	0,211
ASML	66,43 %	0,882	0,586
Beta de la cartera			0,830

Cuadro 5.42: Beta de la cartera de mínimo coef. de variación. Fuente: elaboración propia.

Rendimiento de la cartera	
Libre de riesgo	-2,3032 %
Beta cartera	0,830
Rentabilidad mercado	0,02 %
CAPM	-0,37 %

Cuadro 5.43: CAPM de la cartera de mínimo coeficiente de variación. Fuente: elaboración propia.

El rendimiento que le deberíamos exigir a la cartera ecológica de mínimo coeficiente de variación es de $-0,37\,\%$

5.3. Análisis de los datos

En esta sección vamos a comentar los datos expuestos en la anterior sección. Vamos a distinguirlos por periodos, el de 2017-2018 y el de 2019-2020 ya que así podremos comparar las características de las diferentes carteras en el mismo periodo, además de observar el rendimiento del activo libre de riesgo.

Periodo 2017-2018

Durante este periodo, podemos resumir los siguientes datos:

	Rendimiento	Desv. típica	Coeficiente de variación
Cartera tecnológica de mínima varianza	0,0072 %	0,73 %	100,93
Cartera tecnológica de mínimo coef. de variación	0,0919 %	0,96 %	10,40
Cartera tecnológica de máxima rentabilidad	0,1025 %	1,34 %	13,03
Cartera ecológica de mínima varianza	-0,0084 %	0,7 %	-83,51
Cartera ecológica de mín. coef. de var. (positivo)	0,0462 %	0,9 %	20,03
Cartera ecológica de máxima rentabilidad	0,0594 %	1,5 %	25,81
Activo libre de riesgo	0,3595 %		
Cartera de Mercado	-0,016 %	0,76 %	-47,50

Cuadro 5.44: Carteras y activo libre de riesgo en 2017-2018. Fuente: elaboración propia.

Observamos un riesgo aproximado de un $0,7\,\%$ en ambas carteras de mínima varianza. Sin embargo, en el rendimiento, ambas carteras discrepan; las carteras de perfil tecnológico tienen un rendimiento medio bajo pero positivo mientras que la cartera ecológica tiene un rendimiento medio negativo. En cuanto al activo libre de riesgo, tenemos un rendimiento medio del bono alemán a 10 años de $0,3595\,\%$. Este dato nos muestra que la economía del país se encuentra en un momento de auge pues la media de los rendimientos es positiva, encontrándose en una tendencia alcista. Por otro lado, el mercado se encuentra en una tendencia bajista con un rendimiento medio de $-0,02\,\%$. Luego, la prima de riesgo del mercado es $-0,016\,\% - 0,3595\,\% = -0,3755\,\%$.

Según el modelo CAPM, a la cartera tecnológica de mínima varianza tendríamos que exigirle un rendimiento de $0,076\,\%$. Dado que el rendimiento medio de ésta es $0{,}0072\,\%$, tenemos que $\alpha_p = 0{,}0072\,\% - 0{,}076\,\% = -0{,}069\,\%$. Luego, la cartera tecnológica está sobrevalorada por el mercado, es decir, su valor es menor. Reiterando estos cálculos, obtenemos que las carteras de mínimo coeficiente de variación y la de máxima rentabilidad están están infravaloradas con $\alpha_p = 0,047\,\%$ y $\alpha_p = 0,068\,\%$, respectivamente.
Por otro lado, las carteras ecológicas de mínima varianza y de mínimo coeficiente de variación están sobrevaloradas, mientras que la cartera ecológica de máxima rentabilidad está infravalorada con $\alpha_p = 0,104\,\%$.

Sin embargo, ninguna de las anteriores carteras son opciones buenas para invertir ya que según los datos de 5.44, el activo libre de riesgo ofrece un mayor rendimiento y sin asumir riesgos.

Por ende, el bono alemán a 10 años sería la mejor opción de inversión para el periodo 2017-2018, con un rendimiento medio de $0,3595\,\%$.

Periodo 2019-2020

Durante este periodo, resumimos los siguientes datos:

	Rendimiento	Desv. Típica	Coef. de variación
Cartera tecnológica de mínima varianza	0,078 %	1,28 %	16,64
Cartera tecnológica de mínimo coef. de variación	0,214 %	1,68 %	7,86
Cartera tecnológica de máxima rentabilidad	0,23 %	2,10 %	9,147
Cartera ecológica de mínima varianza	0,064 %	1,21 %	19,05
Cartera ecológica de mínimo coef. de variación	0,189 %	1,65 %	8,75
Activo libre de riesgo	-2,3 %		
Cartera de mercado	0,024 %	1,52 %	64,42

Cuadro 5.45: Carteras y activo libre de riesgo en 2019-2020. Fuente: elaboración propia.

En primer lugar, observamos un aumento del riesgo en todas carteras con respecto al del periodo 2017-2018, lo que eleva la incertidumbre sobre los precios. No obstante, también ha aumentado el rendimiento, y con valores positivos en el caso de la cartera ecológica de mínima varianza.

En base a esto, podemos decir que los perfiles tecnológicos y ciertas empresas comprometidas con el medio-ambiente no fueron tan afectadas por la pandemia. Se podría intuir por el empoderamiento de plataformas informáticas para comunicarnos durante la cuarentena y para que todo siguiera su ritmo. Como consecuencia, se potenció el uso de productos informáticos para trabajar, seguir impartiendo clases por parte de los centros de educación y el consumo online. Por otra parte, vemos que entre los componentes que forman parte de la cartera ecológica, están las empresas del sector de Servicios de Comunicación, Suministros, Productos de primera necesidad y Tecnología, que también estuvieron en auge durante la pandemia pues sus productos y servicios seguían siendo útiles.

Por otro lado, la prima de riesgo de mercado es $0,024\,\% + 2,3\,\% = 2,324\,\%$. El bono alemán ha sufrido un descenso del rendimiento medio hasta colocarse en un valor medio negativo. Esto nos muestra la mala situación económica del país debido a los gastos imprevistos de la

pandemia. Sin embargo, observamos un aumento en el índice de mercado, lo que implica una subida del mercado europeo, ofreciendo un rendimiento medio de $0,024\,\%$. Asimismo tiene una desviación típica de $1,52\,\%$, por lo que ha habido una variación de los precios alta con respecto al anterior periodo.

Según el modelo CAPM, las cartera tecnológica de mínima varianza y de mínimo coeficiente de variación están infravaloradas con $\alpha_p = 0,66\,\%$ y $\alpha_p = 0,25\,\%$, respectivamente. Mientras tanto, la cartera tecnológica está sobrevalorada con $\alpha_p = -0,46\,\%$, luego ésta no sería una opción.

Por otra parte, las carteras ecológicas de mínima varianza, mínimo coeficiente de variación y de máxima rentabilidad están infravaloradas con $\alpha_p = 0,87\,\%$, $\alpha_p = 0,56\,\%$ y $\alpha_p = 0,56\,\%$, respectivamente.

En consecuencia, cualquiera de las carteras, tecnológica y ecológica, expuestas son buenas opciones para invertir, excepto la cartera de tecnológica de máxima rentabilidad, ya que pertenecen a la frontera eficiente y están infravaloradas. Además de ofrecer un rendimiento mayor que el mercado y que el activo libre de riesgo.

Capítulo 6

Conclusiones

El problema de optimización planteado por Markowitz es un buen comienzo en el mundo de las inversiones ya que gracias a él es posible calcular las carteras pertenecientes a la frontera eficiente, entre ellas, la cartera de mínimo riesgo y la cartera de máxima rentabilidad. Basándonos en este problema nos ha sido posible calcular la cartera de mínimo coeficiente de variación, ya que en algunos casos puede ser un criterio a tener en cuenta pues nos ofrece la cartera con mejor relación rentabilidad-riesgo. Como hemos visto en el estudio práctico, la cartera de mínima varianza no siempre es la mejor opción pues tal vez no amortiza el riesgo asumido con la rentabilidad que ofrece.

Por otro lado, el modelo de mercado de Sharpe y, por último, el modelo CAPM nos permite contrastar las carteras con la situación del mercado y del país, pudiendo valorar las carteras en determinadas circunstancias. En la práctica, hemos visto que aunque ciertas carteras pertenecían a la frontera eficiente y a priori parecieran buenas opciones para invertir, han resultado estar sobrevaloradas en el mercado.

En relación al caso práctico propuesto, podemos observar como estos modelos matemáticos nos han servido tanto para distribuir nuestro capital entre los bienes como para comparar las condiciones de estas carteras con el mercado. En el periodo 2017-2018, hemos visto un mercado en declive frente a una economía del país fuerte. Por tanto, la mejor opción en este caso fue invertir en bonos del Estado, basándonos en los modelos planteados. Por el contrario,

en el periodo 2019-2020 nos hemos encontrado un mercado al alza frente a una economía del país en decadencia por los gastos imprevistos para hacer frente a la pandemia. En este caso, el mercado ofrece carteras infravaloradas como son las de los perfiles que menos afectados estuvieron como son el tecnológico y el ecológico, según lo estudiado. Esta última cartera de perfil ecológico estaba formada por empresas de los sectores financieros de suministros, de productos de primera necesidad y de tecnología, entre otros. Esto demuestra el auge de estos sectores en ese momento y como fueron una buena inversión, superando al mercado en cuanto a condiciones de rentabilidad.

Bibliografía

[1] Alexander Gordon J., Sharpe William F., y Bailey Jeffery V. (2003). *Fundamentos de inversiones. Teoría y práctica.* 3ª ed. México: Pearson Education. ISBN: 0-13-292617-2.

[2] Bloomberg.com [sitio web]. Disponible en `https://www.bloomberg.com/europe` (07/05/2022).

[3] Comisión Nacional del Mercado de Valores. *El mercado de valores y los productos de inversión.* [sitio web]. Disponible en `https://www.cnmv.es/DocPortal/Publicaciones/Guias/ManualUniversitarios.pdf` (11/07/2022).

[4] Cuesta Albertos Juan Antonio, y Tuero Díaz Araceli. (2022). *Inferencia Estadística.* Universidad de Cantabria.

[5] Cuesta Albertos Juan Antonio. (2021) *Cálculo de Probabilidades.* Universidad de Cantabria.

[6] Economipedia [sitio web]. Disponible en `https://economipedia.com/` (15/04/2022).

[7] García Olalla Myriam. (2021). *Análisis y Evaluación de Inversiones.* Universidad de Cantabria.

[8] García Olalla Myriam, Martínez García Francisco Javier, y Fernández González Esteban. (2018). *Manual del asesor financiero.* 2ª ed. Madrid: Paraninfo. ISBN: 978-84-283-4075-5.

[9] García Ramos Rebeca. (2022). *Análisis de los Mercados de Valores.* Universidad de Cantabria.

[10] Gómez-Bezares Fernando. (2016). *Gestión de Carteras (Eficiencia, Teoría de Cartera, CAPM, ATP).* 4ª ed. Bilbao: Desclée De Brouwer. ISBN: 978-84-330-0984-5.

[11] Investing.com [sitio web]. Disponible en `https://es.investing.com/` (07/05/2022).

[12] Markowitz Harry. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91. Disponible en `https://www.math.hkust.edu.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf` (14/04/2022).

[13] Vélez Ibarrola Ricardo. (2019). *Cálculo de Probabilidades 2.* 1ª ed. Madrid: UNED. ISBN: 978-84-362-7560-5.

[14] Villalba Daniel. (2016). *Teoría y práctica de la gestión de carteras.* 1ª ed. Madrid: Bolsas y Mercados Españoles. ISBN: 978-84-617-4674-3.