UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Facultad de Ciencias

EL TEOREMA DE CAYLEY-HOLLAND
(The Cayley-Holland Theorem)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: María Soledad de la Verde Pérez
Director: Jesús Javier Jiménez Garrido
Junio - 2022

AGRADECIMIENTOS:

A mi madre, por todo el apoyo incondicional que me has dado siempre. A Victor, por acompañarme en todo este camino. A mi director, Javier, por su paciencia y dedicación. A Judith, por brindarme su ayuda y amistad. A mi familia y amigos, que han estado siempre a mi lado y han sido un pilar fundamental. A todos los que han estado conmigo, gracias.

Resumen

El objetivo de este trabajo es dar una demostración autocontenida del teorema conocido como el *Teorema de Cayley-Holland*, el cual establece que todo ℓ-grupo es ℓ-isomorfo a un ℓ-subgrupo del ℓ-grupo de las permutaciones de un conjunto totalmente ordenado cuyo cardinal es a lo sumo el cardinal de G. Para ello será necesario definir conceptos como retículo, grupo parcialmente ordenado, ℓ-grupo, subgrupo convexo, subgrupo primo y valor, entre otros. Además, veremos las propiedades que fundamentales que poseen estas estructuras, las cuales nos servirán de herramienta para la demostración del resultado principal.

Palabras clave: Retículo, grupo parcialmente ordenado, grupo dirigido, ell-grupo, subgrupo convexo, subgrupo primo, Teorema de Cayley-Holland.

Abstract

The aim of this paper is to give a self-contained proof of the theorem known as the *Cayley-Holland Theorem*, which states that every ℓ-group is ℓ-isomorphic to a ℓ-subgroup of the ℓ-group of the permutations of a totally ordered set whose cardinal is at most the cardinal of G. For this it will be necessary to define concepts such as lattice, partially ordered group, ℓ-group, convex subgroup, prime subgroup and value, among others. In addition, we will see the fundamental properties that these structures possess, which will serve us as a tool for the demonstration of the main result.

Key words: Lattice, partially ordered group, directed group, ell-group, convex subgroup, prime subgroup, Cayley-Holland Theorem.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto histórico

El concepto de grupo, un conjunto con una operación binaria interna que satisface la propiedad asociativa, la existencia de elemento neutro y la existencia de inverso, surge de la abstracción de varias ideas comunes en distintos ámbitos de las matemáticas. En la actualidad, la Teoría de Grupos esta muy consolidada, sin embargo, pasaron algunos siglos desde que surgió la noción de grupo hasta que se estableció la definición estándar que conocemos hoy en día. La Teoría de Grupos tiene diversas aplicaciones en múltiples ámbitos de los más diversos, desde la física o la química hasta la mecánica o la computación.

En este sentido, es fundamental mencionar las contribuciones de Evariste Galois (1811-1832). En concreto, él fue quien utilizó por primera vez el término *grupo* en el ámbito matemático en el sentido más cercano al que se considera en la actualidad, y muchos de sus trabajos sembraron las bases de dicha teoría.

Por otra parte, resulta también imprescindible destacar la contribución Arthur Cayley (1821-1895). En concreto, en 1854, este sugiere una definición para el concepto de *grupo abstracto* y da un método constructivo para describir las operaciones de cualquier grupo finito en forma de tabla, lo que hoy se conoce como tabla de Cayley. Además, probó que algunos conjuntos de matrices y los cuaternios tenían estructura de grupo. También en ese mismo año, demuestra lo que conocemos como el *Teorema de Cayley* que, en teoría de Grupos, nos dice que todo grupo es isomorfo a un subgrupo

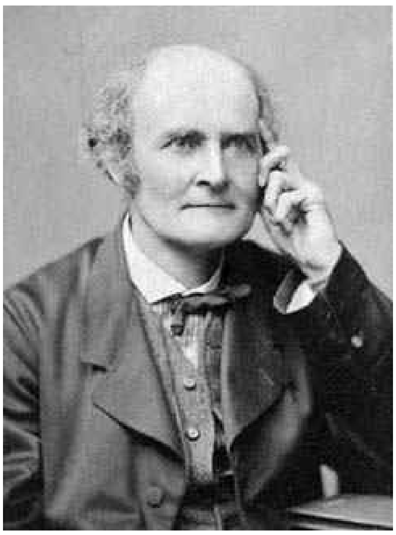

Figura 1.1: Arthur Cayley (1821-1895). Fuente: [1].

de un grupo de permutaciones.

El Teorema de Cayley es lo que llamamos un *Teorema de Representación*. El objetivo de la teoría de representaciones es encontrar un isomorfismo de algún grupo que queramos estudiar a un grupo sobre el que tengamos bastante información, tal como un grupo de permutaciones o de matrices. A lo largo de los años se han introducido generalizaciones de este Teorema para su aplicación en distintos ámbitos de las matemáticas.

En concreto, este trabajo se sitúa en la interacción de la mencionada Teoría de Grupos con la Teoría de Conjuntos Ordenados. Esta teoría es una rama de las matemáticas que investiga la noción intuitiva de orden utilizando relaciones binarias. Las relaciones de orden están presentes por todas partes en las matemáticas. Sin embargo, no es fácil encontrar menciones a órdenes parciales anteriores al siglo XIX. El objeto de estudio de este trabajo son los grupos que poseen una relación de orden compatible con la estructura de grupo. Aunque para dar las distintas definiciones nos bastará con suponer que la relación de orden es parcial. Para poder obtener resultados interesantes necesitamos que la relación de orden dote al conjunto de estructura de retículo. Estos grupos reciben el nombre de grupos retículo ordenados o ℓ-grupos.

El estudio sistemático de los ℓ-grupos, en general, se remonta a un trabajo de Birkhoff de 1942. Desde entonces, para el año 1988 ya se habían escrito más de seiscientos trabajos de investigación sobre ℓ-grupos y temas relacionados[2].

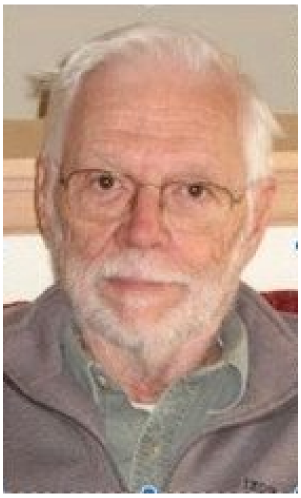

Figura 1.2: W. Charles Holland. Fuente: [3].

Uno de los resultados de mayor importancia en el desarrollo de los ℓ-grupos fue enunciado y demostrado por W. Charles Holland en 1963 [4] y se conoce como el *Teorema de Cayley-Holland* que afirma que todo ℓ-grupo es ℓ-isomorfo a un ℓ-subgrupo del grupo de permutaciones que preservan el orden de un conjunto construido a partir del grupo original. Este resultado ha permitido estudiar los ℓ-grupos a través de su representación como permutaciones.

El objetivo final de este trabajo será dar una prueba completa y, en la medida de lo posible, autocontenida del Teorema de Cayley-Holland. Para ello, previamente será necesario introducir ciertas nociones y conceptos junto con distintas propiedades de estos, como detallamos a continuación.

1.2. Estructura de la memoria

En lo que respecta a la estructura de este trabajo, en el Capítulo 2 se presentan diversas nociones y propiedades sobre conjuntos parcialmente ordenados, más concretamente de los retículos, los cuales aportan una estructura fundamental en el desarrollo de este trabajo. También se definirán las nociones de retículo distributivo y retículo modular, las cuales nos permitirán enunciar diversos lemas necesarios para poder llegar a un resultado fundamental para los ℓ-grupos: "*Si G es un ℓ-grupo, entonces el retículo en G es distributivo*".

Previo a este resultado, en el Capítulo 3, se introducirá la noción de grupo parcialmente ordenado, grupo dirigido y ℓ-grupo y se ilustrará cada uno de estos conceptos con numerosos ejemplos en distintos campos de las matemáticas. Una vez dado el concepto de ℓ-grupo, observaremos que, de modo natural, surgirán nociones equivalentes a las propias de grupos, como la de ℓ-subgrupo además de una forma de caracterizar los mismos. Se ha dedicará una sección exclusivamente para ver y demostrar todas sus propiedades, muchas de ellas para el cálculo de supremos e ínfimos en estos grupos. También se definirá el concepto de ℓ-isomorfismo de grupos parcialmente ordenados de un modo equivalente a los isomorfismos de grupos.

Por último, en el Capítulo 4, se darán las nociones necesarias restantes para la correcta demostración del teorema objeto principal de este trabajo, como son las nociones de subgrupo convexo, subgrupo primo y valor. De estos últimos conceptos también se presentarán distintos ejemplos para su mejor entendimiento y algunas propiedades y caracterizaciones de los mismos.

Finalmente, estaremos preparados para dar una demostración para el Teorema de Cayley-Holland definiendo un ℓ-isomorfismo de G en $A(\Omega)$, eligiendo Ω como el conjunto formado por la unión de todas las clases laterales a la derecha módulo un valor en G.

Capítulo 2

Conjuntos ordenados y retículos

En este capítulo veremos nociones de la teoría de conjuntos necesarias para el desarrollo del trabajo así como sus propiedades y algunos ejemplos ilustrativos. Para este capítulo se ha tomado como referencia los libros de A.M.W. Glass and J.M. Howie [5], Garrett Birkhoff [6] y V.M. Kopytov and N.Ya. Medvedev [7].

2.1. Conjuntos ordenados

A continuación, recordaremos algunas nociones elementales que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo como la de conjunto parcialmente ordenado y totalmente ordenado, cota superior e inferior, supremos e ínfimo y conjunto dirigido.

Definición 2.1.1. *Un* ***conjunto parcialmente ordenado****, es un par $(P, \leq)$ en donde P es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden, es decir, una relación binaria que cumple las siguientes propiedades:*

- *Reflexiva: Para todo $x \in P$ se tiene que $x \leq x$.*
- *Antisimétrica: Para todo par $x, y \in P$ verificando $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces, $x = y$.*
- *Transitiva: Para todo $x, y, z \in P$ verificando $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces, $x \leq z$.*

Ejemplo 2.1.2. *Consideramos el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la relación de división, $(\mathbb{Z}, |)$. Cumple la propiedad reflexiva, es decir, para todo $a \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a|a$, sin embargo no cumple la propiedad antisimétrica, puesto que para todo $a \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$ se tiene que $a| - a$ y $-a|a$ pero $a \neq -a$ por tanto $(\mathbb{Z}, |)$ no es un conjunto parcialmente ordenado. Sin embargo si restringimos esta misma relación al conjuntos de los números naturales $(\mathbb{N}, |)$ es fácil comprobar que se verifican las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva y por tanto se trata de un conjunto parcialmente ordenado.*

Ejemplo 2.1.3. *Consideramos un conjunto X y $\mathcal{P}(X)$ bajo la relación de inclusión $\subseteq$ en donde para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$ $A \subseteq B$ quiere decir que todo elemento de A es también*

un elemento de B. Esta relación cumple la propiedad reflexiva puesto que para cualquier conjunto A se tiene que $A \subseteq A$. Se verifica la propiedad antisimétrica ya que, si dados dos conjuntos A y B se tiene que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces todos los elementos de A están también en B y todos los elementos de B están también en A con lo cual $A = B$. Por último vemos que verifica la propiedad transitiva puesto que dados los conjuntos A, B y C si verifican $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de C y por tanto $A \subseteq C$.
Observemos que en la colección $\mathcal{C}$ pueden existir conjuntos A y B de forma que $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$, cuando esto ocurre decimos que A y B no son comparables, de aquí viene que sea un orden parcial.

Más adelante veremos que, en algunas ocasiones, puede resultar útil poder representar gráficamente un conjunto parcialmente ordenado para observar que propiedades tiene. Es por esto, que vamos a introducir una forma de hacerlo conocida como diagrama de Hasse.

Definición 2.1.4. *Un **diagrama de Hasse** es una representación gráfica, a modo grafo, de un conjunto parcialmente ordenado y finito P, de modo que dos elementos cualesquiera $x, y \in P$ están unidos por una arista si, y sólo si, están relacionados entre sí, es decir, $x \leq y$ o $y \leq x$. En caso de que $x \leq y$, entonces x aparecerá en un nivel inferior a y en la representación del grafo y viceversa.*

Ejemplo 2.1.5.

- *Consideremos el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y el conjunto parcialmente ordenado dado por A y $\mathcal{P}(A)$ bajo el orden dado por la inclusión, entonces el diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es el siguiente:*

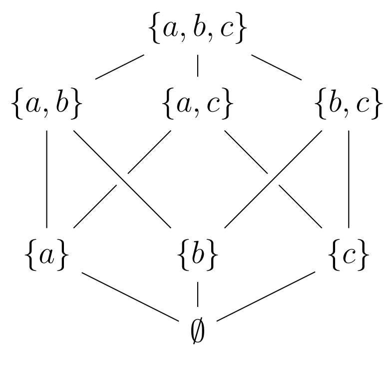

Figura 2.1: Diagrama de Hasse de el conjunto $\mathcal{P}(A)$.

- *Consideremos el conjunto de los divisores de 60, $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$, entonces D es un conjunto parcialmente ordenado bajo el orden dado por la división. El diagrama de Hasse de $(D_{60}, |)$ es el siguiente:*

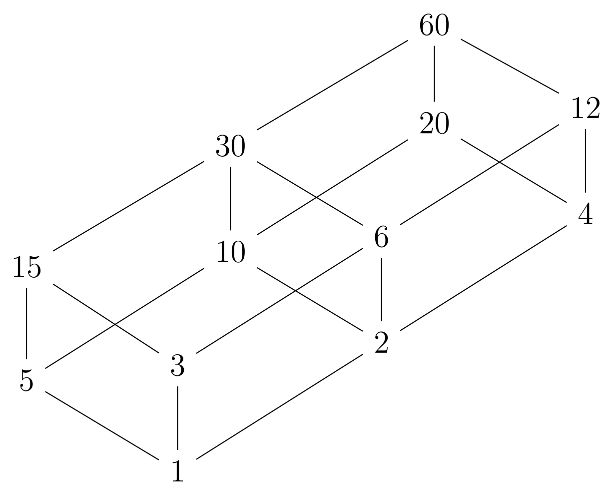

Figura 2.2: Diagrama de Hasse de el conjunto D_{60}.

Definición 2.1.6. *Sea P un conjunto y $\leq$ una relación de orden parcial, decimos que P es un* ***conjunto totalmente ordenado*** *si cada par de elementos de P son comparables entre sí, es decir, para todo $x, y \in P$ se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$.*

Observación 2.1.7. *Todos los conjuntos totalmente ordenados son parcialmente ordenados, pero existen conjuntos parcialmente ordenados que no son totalmente ordenados.*

Ejemplo 2.1.8.

- *En el ejemplo 2.1.3 de $\mathcal{P}(X)$ con la relación de inclusión hemos probado que es un conjunto parcialmente ordenado pero no totalmente ordenado puesto que si $\#\mathcal{P}(X) \geq 2$ pueden existir pares de conjuntos que no son comparables. Podemos ver un ejemplo en la figura 2.1.*

- *$(\mathbb{Z}, |)$ hemos visto que no es un conjunto parcialmente ordenado y por tanto tampoco es un conjunto totalmente ordenado. $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto parcialmente ordenado pero no es totalmente ordenado ya que existen pares de elementos que no se pueden comparar, si tomamos los elementos 3 y 7, 3 no divide a 7 y 7 no divide a 3 por tanto no son comparables.*

- *Un ejemplo clásico de conjunto totalmente ordenado es $(\mathbb{R}, \leq)$ ya que todo par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ verifica $x \leq y$ o $y \leq x$.*

Definición 2.1.9. *Sea C un conjunto parcialmente ordenado. Para un subconjunto $A \subseteq C$ decimos que $u \in C$ es una* ***cota superior*** *de A si $x \leq u$ para todo $x \in A$. Decimos que $z \in C$ es el* ***supremo*** *de A si z es cota superior de A y para toda cota superior u de A se tiene que $z \leq u$, es decir, es la menor de las cotas superiores.*
De la misma manera, definimos el concepto de ***cota inferior*** *de A como un elemento $\ell \in C$ tal que $\ell \leq x$ para todo $x \in A$. Decimos que $y \in C$ es el* ***ínfimo*** *de A si y es cota inferior de A y para toda cota inferior ℓ de A se tiene que $\ell \leq y$, es decir, es la mayor de las cotas inferiores.*

Ahora introduciremos una noción más específica para conjuntos parcialmente ordenados, la cual relaciona los conceptos definidos previamente.

Definición 2.1.10. *Se dice que un conjunto parcialmente ordenado está **dirigido** si todo par de elementos cualesquiera del conjunto tienen una cota superior y una cota inferior.*

Ejemplo 2.1.11.

- *El conjunto de los números naturales con el orden ordinario $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto dirigido porque es totalmente ordenado.*

- *Consideremos el conjunto A de los enteros positivos que dividen a 20 con el orden de la división, es decir, $a \leq b \iff a|b$. Tenemos que $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ con este orden es un conjunto parcialmente ordenado y además es dirigido puesto que cualquier pareja de elementos tienen como cota inferior 1 y como cota superior 20. Consideremos ahora el subconjunto de A, $S = \{4, 5, 10\}$. S no es un conjunto dirigido ya que, por ejemplo, no hay ninguna cota superior o inferior para 4 y 5, es decir, 4 y 5 no dividen a la vez a ningún elemento de S y tampoco hay ninguno que los divida a ambos.*

En el ejemplo anterior (Ejemplo 2.1.11) hemos visto que un subconjunto de un conjunto dirigido, en general, no es dirigido.

2.2. Retículos

El siguiente concepto que necesitamos introducir es la noción de retículo, la cual es uno de los dos ingredientes principales para el desarrollo de este trabajo junto con la noción de grupo.

Definición 2.2.1. *Un conjunto parcialmente ordenado se dice que es un **retículo** si todo par de elementos tienen supremo e ínfimo. Usaremos la notación $f \vee g$ para referirnos al supremo de dos elementos y la notación $f \wedge g$ para referirnos al ínfimo de dos elementos.*

Ejemplo 2.2.2.

- *El conjunto $(\mathbb{N}, \leq)$ de los número naturales con el orden habitual es un retículo; para todo $x, y \in \mathbb{N}$ se tiene $x \wedge y = min\{x, y\}$ y $x \vee y = max\{x, y\}$.*

- *Dado un conjunto X, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ con el orden de inclusión es un retículo; $A \wedge B = A \cap B$ y $A \vee B = A \cup B$.*

- *Consideremos el conjunto de divisores enteros positivos de un número entero n con el orden de la división. Vemos que es un retículo pues $x \wedge y = mcd(x, y)$ y $x \vee y = mcm(x, y)$.*

- *Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, el conjunto de todos los subespacios vectoriales de V con el orden de la inclusión, es un retículo porque dados $V_1, V_2 \subseteq V$ se tiene que $V_1 \wedge V_2 = V_1 \cap V_2$ y $V_1 \vee V_2 = V_1 + V_2$.*
- *Dado un espacio topológico X, el conjunto formado por los abiertos de X es un retículo con el orden de la inclusión. Para probar esto, observamos que dados $U_1, U_2 \in X$ se tiene que $U_1 \vee U_2 = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \wedge U_2 = U_1 \cap U_2$.*
- *Dado un anillo R, el conjunto de los ideales de R es un retículo con el orden dado por la inclusión. Como en los otros ejemplos, comprobamos que dados I, J ideales de R se tiene que $I \wedge J = I \cap J$ y $I \vee J = I + J$.*

A continuación, se define el concepto de subretículo y se muestra un ejemplo del mismo.

Definición 2.2.3. *Sea $(R, \leq)$ es un retículo y $L \subseteq R$, decimos que $(L, \leq)$ es un* ***subretículo*** *si $(L, \leq)$ es retículo y para todo $a, b \in L$ se cumple que*

$$a \vee_L b = a \vee_R b, \qquad a \wedge_L b = a \wedge_R b.$$

Ejemplo 2.2.4. *Consideramos R el conjunto de los enteros positivos n que dividen a 20, $R = \{n \in \mathbb{N} : n|20\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ y sea B el subconjunto de R, $B = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ tenemos que B es un retículo pero no es subretículo de R porque $sup_B\{2, 5\} = 20$ y $sup_D\{2, 5\} = 10$. Sin embargo, el subconjunto $C = \{1, 2, 5, 10\}$ sí es una subretículo del retículo R.*

En lo siguiente se aporta una batería de definiciones: retículo generado y conjunto parcialmente ordenado completo, y conjunto $A(\Omega)$.

Definición 2.2.5. *Sea A un subconjunto de un retículo $(R, \leq)$. Llamamos* ***retículo generado por*** *A a la intersección de todos los retículos L que contienen a A.*

Definición 2.2.6. *Un conjunto parcialmente ordenado $(R, \leq)$ decimos que es* ***completo*** *si para cualquier subconjunto no vacío A de R, entonces A tiene cota superior e inferior en R. Denotamos por $\vee A$ a la cota superior de A y por $\wedge A$ a la cota inferior.*

Definición 2.2.7. *Sea $(\Omega, <)$ un conjunto parcialmente ordenado, $A(\Omega) = Aut(\Omega, <)$ es el grupo de permutaciones de Ω que preservan el orden $<$; es decir, una permutación g de Ω pertenece a $A(\Omega)$ si $g(\alpha) < g(\beta)$ $\forall$ α, β en Ω verificando $\alpha < \beta$.*

Ejemplo 2.2.8. *Consideramos $\mathbb{R}$ con el orden natural $\leq$, y definimos*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & 2a \end{array}$$

f conserva el orden ya que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ se tiene que $f(a) = 2a \leq 2b = f(b)$ y f es biyectiva ya que $f(a) = f(b) \iff 2a = 2b \iff a = b$ y para todo $c \in \mathbb{R}$ existe $d \in \mathbb{R}$ de forma que $f(d) = c$ tomando $d = c/2$. Por tanto $f \in A(\mathbb{R})$. En general, cualquier aplicación afín de la forma $f(x) = ax + b$ pertenece a $A(\mathbb{R})$.

Lema 2.2.9. *Sea L un retículo y sean $x, y, z \in L$ entonces se tienen las siguientes desigualdades distributivas*

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Demostración. Sean $x, y, z \in L$ se tiene que $x \wedge y \leq x$ y que $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$ con lo cual $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$.
Además se tiene que $x \wedge z \leq x$ y que $x \wedge z \leq z \leq y \vee z$ entonces $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$.
Por tanto $x \wedge (y \vee z)$ es una cota superior de $x \wedge z$ y de $x \wedge y$ y por tanto se verifica $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. La segunda desigualdad se prueba de forma análoga. □

La siguiente definición muestra una propiedad fundamental que, como veremos más adelante, estará presente a lo largo de todo el trabajo.

Definición 2.2.10. *Un retículo L se dice que es* ***distributivo*** *si verifica:*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

para cualquier $x, y, z \in L$.

Ejemplo 2.2.11.

- *Los retículos L_1 y L_2 definidos por los siguientes diagramas no son distributivos:*

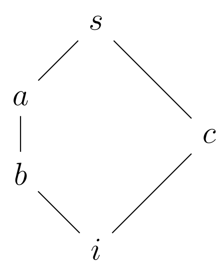

Figura 2.3: N_5

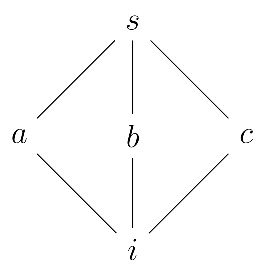

Figura 2.4: M_3

En N_5:

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge s = a$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee i = b$$

y por tanto no se verifica $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

En M_3:

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee i = a$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = s \wedge s = s$$

y por tanto no se verifica $b \vee (a \wedge c) = (b \vee a) \wedge (b \vee c)$.
Sin embargo, a pesar de nos ser retículos distributivos, sí verifican la desigualdad distributiva ya que en N_5 *se cumple* $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *ya que* $a \geq b$ *y en* M_3 *se cumple* $b \vee (a \wedge c) \leq (b \vee a) \wedge (b \vee c)$ *ya que* $a \leq s$. *Pero esto es sólo un ejemplo de que se verifica la desigualdad distributiva ya que cualquier combinación de 3 elementos de un retículo verifica esta propiedad.*

- *Consideramos en* $V = \mathbb{F}_2^2$, *como* $\mathbb{F}_2$*-espacio vectorial, el retículo formado por los subespacios vectoriales de* V. *Veamos que es un retículo no distributivo. Los subespaciones vectoriales propios de* V *son*

$$U_1 = \{(0,0),(1,0)\}; \quad U_2 = \{(0,0),(0,1)\}; \quad U_3 = \{(0,0),(1,1)\}$$

entonces tenemos que

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) = U_1 + \{(0,0)\} = U_1$$

sin embargo

$$(U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3) = V \cap V = V$$

Por tanto el reticulo formado por los subespacios no es distributivo.

- *Cualquier conjunto totalmente ordenado* R, *es un retículo distributivo puesto que dados* $x, y, z \in R$ *de modo que* $x \leq y \leq z$ *se tiene que*

$$x \vee (y \wedge z) = x \vee y = y = y \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$y \vee (x \wedge z) = y \vee x = y = y \wedge z = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$$
$$z \vee (x \wedge y) = z \vee x = z = z \wedge z = (z \vee x) \wedge (z \vee y)$$

Otra noción muy importante y que está relacionada con la noción de retículo distributivo es la que mostramos en la siguiente definición.

Definición 2.2.12. *Decimos que un retículo* L *es* ***modular*** *si verifica la siguiente condición:*

$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in L \ \textit{si}\ \alpha \leq \gamma \ \textit{entonces}\ \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma.$$

Ejemplo 2.2.13.

- *El retículo dado en la Figura 2.3 no es un retículo modular. Tenemos que* $b \leq a$ *y*

$$b \vee (c \wedge a) = b \vee i = b$$

$$(b \vee c) \wedge a = s \wedge a = a$$

y por tanto $b \vee (c \wedge a) \neq (b \vee c) \wedge a$.

- *El retículo dado en la Figura 2.4 es un retículo modular. Consideremos los elementos a, b y s, se tiene que $a < s$ y $b < s$ y además se verifica*

  $$a \vee (b \wedge s) = a \vee b = s = s \wedge s = (a \vee b) \wedge s$$

  $$b \vee (a \wedge s) = b \vee a = s = s \wedge s = (b \vee a) \wedge s$$

  de modo análogo se comprobaría para el resto de combinaciones de tres elementos que verifiquen que dos de ellos son comparables y por tanto podemos concluir que se trata de un retículo modular.

- *Dado un anillo R y M un R-módulo, el conjunto formado por todos los submódulos de M es siempre un retículo modular. Es por este motivo que esta propiedad recibe el nombre de modular.*

Lema 2.2.14. *Dados los elementos A, X, Y pertenecientes a un retículo modular, si verifican $A \wedge X = A \wedge Y$ y $A \vee X = A \vee Y$, entonces siempre que X e Y sean comparables, es decir, $X \leq Y$ o $Y \leq X$, se tiene que $X = Y$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $X > Y$ entonces los elementos A, X, Y generan un retículo no modular de 5 elementos isomorfo al de la Figura 2.3, lo cual contradice la hipótesis de modularidad. Se procede de forma análoga si $X \leq Y$. La noción de isomorfismo en este contexto coincide con la definición natural, la formalización y los detalles se pueden encontrar en el libro de Garrett Birkhoff [6]. □

Teorema 2.2.15. *Sea L un retículo modular y sean $x, y, z \in L$ verificando*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

o bien

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

entonces el retículo generado por x, y, z es distributivo.

Demostración. Supongamos que dados $x, y, z \in L$ se verifica $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Aplicamos el Lema 2.2.14 a los elementos $A = x$, $X = (x \wedge y) \vee z$ y $Y = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ los cuales satisfacen la desigualdad distributiva $X \leq Y$ (Lema 2.2.9).

$$A \vee X = x \vee (x \wedge y) \vee z = x \vee z$$

$$A \vee Y = Y \vee A = [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] \vee x = (x \vee z) \wedge [(y \vee z) \vee x] = x \vee z$$

De igual forma se tiene

$$A \wedge Y = x \wedge [(x \vee z) \wedge (y \vee z)] = [x \wedge (x \vee z)] \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z)$$

$$A \wedge X = X \wedge A = [(x \wedge y) \vee z] \wedge x = (x \wedge y) \vee (z \wedge x) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$$

Donde la última igualdad se da por hipótesis. Por tanto, por el Lema 2.2.14 se tiene $X = Y$. Aplicando ahora el mismo procedimiento a los elementos $A_1 = z$, $X_1 = y \wedge (z \vee x)$ y $Y_1 = (y \wedge z) \vee (y \wedge x)$ y utilizando como hipótesis $X = Y$ se tiene de modo análogo que $X_1 = Y_1$. De esta forma tenemos que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ implica $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ que a su vez este implica $y \wedge (z \vee x) = (y \wedge z) \vee (y \wedge x)$. De esta forma, repitiendo este procedimiento, se obtienen las seis igualdades distributivas para los elementos x, y, z y por tanto el retículo generado por estos elementos es distributivo. □

Lema 2.2.16. *Sea L un retículo modular, para todo $x, y, z \in L$ se tiene que*

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)] = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$$

$$[x \vee (y \wedge z)] \wedge [y \vee (z \wedge x)] = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

Demostración. Como $x \wedge (y \vee z) \leq x \leq (z \vee x)$ e $y \leq (y \vee z)$ utilizando dos veces la definición de retículo modular se cumple que

$$[x \wedge (y \vee z)] \vee [y \wedge (z \vee x)] = [[x \wedge (y \vee z)] \vee y] \wedge (z \vee x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

De modo análogo se verifica la segunda identidad. □

Lema 2.2.17. *Sea L un retículo modular y sean $x, y, z \in L$ de modo que*

$$(y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)] = [(y \wedge z) \vee x] \wedge (y \vee z),$$

$$(z \wedge x) \vee [y \wedge (z \vee x)] = [(z \wedge x) \vee y] \wedge (z \vee x),$$

$$(x \wedge y) \vee [z \wedge (x \vee y)] = [(x \wedge y) \vee z] \wedge (x \vee y).$$

Denotamos por a al elemento correspondiente a la primera igualdad, por b al de la segunda y por c al de la tercera.
Entonces se tiene que

$$a \vee b = a \vee c = b \vee c = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

$$a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

Demostración. Por definición de a y b se tiene

$$a \vee b = (y \wedge z) \vee [x \wedge (y \vee z)] \vee (z \wedge x) \vee [y \wedge (z \vee x)]$$

$$\overset{\text{Lema 2.2.16}}{=} (y \wedge z) \vee [(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)] \vee (z \wedge x)$$

sin embargo $(y \wedge z)$ y $(z \wedge x)$ vienen dadas de forma implícita en la expresión entre corchetes, veámoslo:
Aplicando el Lema 2.2.9 se tiene que

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq x \vee (y \wedge z)$$

haciendo el mínimo con $(y \vee z)$ a ambos lados de la desigualdad tenemos

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \geq x \vee (y \wedge z) \wedge (y \vee z)$$

y aplicando de nuevo el Lema 2.2.9

$$\geq (x \wedge (y \vee z)) \vee [(y \wedge z) \wedge (y \vee z)] = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z) \geq (y \wedge z).$$

De modo análogo vemos que $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \geq (z \wedge x)$. Con lo que se tiene

$$a \vee b = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z).$$

de modo análogo se obtiene el resto de identidades. □

Lema 2.2.18. *En las condiciones del Lema 2.2.17, si dos de los elementos a, b, c son iguales entonces el retículo generado por x, y, z es distributivo.*

Demostración. Supongamos $a = b$ entonces $a \vee b = a \wedge b$ y por el lema anterior

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

Y por la Figura 2.5 vemos que se tiene

$$x \wedge [(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)] = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \wedge [(x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z)] = x \wedge (y \vee z)$$

Y por tanto por el Teorema 2.2.15 el retículo generado por los elementos x, y, z es distributivo. □

El siguiente teorema tiene una versión más general, sin embargo en este trabajo nos limitaremos a ver la propiedad que nos interesa, para más detalle consultar [6].

Teorema 2.2.19. *Todo diagrama de un retículo modular L no distributivo contiene un diamante (Figura 2.3).*

Demostración. Si L no es distributivo entonces contiene al menos una terna $\{x, y, z\}$ no distributiva. Por el Lema 2.2.18 los elementos a, b, c son distintos y además, por el Lema 2.2.17, $a \vee b = a \vee c = b \vee c$ y $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c$ y por tanto a, b, c generan un subretículo cuyo diagrama es un diamante (Figura 2.3). □

Corolario 2.2.20. *Un retículo L es distributivo si y sólo si para todos $x, y, a \in L$ se verifica la siguiente condición:*

$$\textit{Si } a \vee y = a \vee x \textit{ y } a \wedge x = a \wedge y \textit{ entonces } x = y.$$

Demostración.

- Supongamos que el retículo L es distributivo y que dados $a, x, y \in L$ se tiene que $a \vee y = a \vee x$ y $a \wedge x = a \wedge y$. Entonces se cumple que

$$x = x \wedge (a \vee x) = x \wedge (a \vee y) \overset{\text{L distrib.}}{=} (x \wedge a) \vee (x \wedge y) = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$$

$$\overset{\text{L distrib.}}{=} (a \vee x) \wedge y = (a \vee y) \wedge y = y$$

  Por tanto, se tiene $x = y$.

- Para probar la otra implicación supongamos que existen los elementos $a, x, y \in L$ de forma que $a \vee y = a \vee x$ y $a \wedge x = a \wedge y$ pero siendo $x \neq y$. De esta forma la terna $\{a, x, y\}$ genera un subretículo cuyo diagrama es un diamante (Figura 2.3) y por tanto, por el Teorema 2.2.19, el retículo L es necesariamente no distributivo.

$\square$

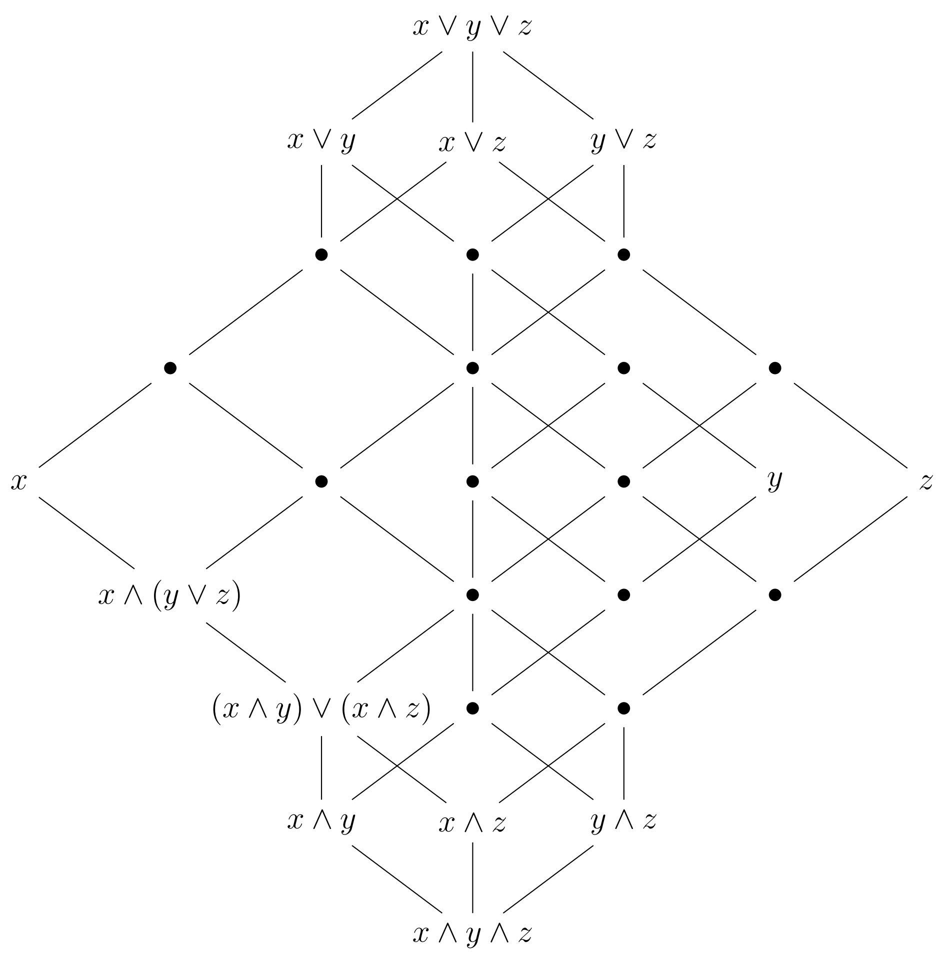

Figura 2.5: Diagrama de orden del retículo modular generado por $\{x, y, z\}$, Grätzer [8]
.

Capítulo 3

Grupos ordenados

En este capítulos introduciremos algunas nociones para grupos ordenados, en particular, introduciremos la noción de grupo retículo ordenado y veremos las principales propiedades de estos. Para el desarrollo de este capítulo se han seguido los libros de A.M.W. Glass y J.M. Howie [5] y Michael Darnel [9].

3.1. Grupos parcialmente ordenados

Teniendo la noción de conjunto ordenado y la noción de grupo, lo siguiente que queremos hacer es fusionar estos dos conceptos de forma que sean compatibles. El resultado de esta fusión es lo que denotaremos por grupo parcialmente ordenado.

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo y $\leq$ un orden parcial en G. Se dice que G es* ***parcialmente ordenado por la derecha*** *si*

$$\forall\ f, g, h \in G \text{ tal que } f \leq g \ \Rightarrow\ fh \leq gh$$

Adicionalmente, si el orden parcial en G es total, entonces G se dice totalmente ordenado por la derecha. De forma análoga definimos parcialmente y totalmente ordenado por la izquierda.

Un grupo parcialmente ordenado por la izquierda y por la derecha diremos que es un grupo parcialmente ordenado.

Ejemplo 3.1.2.

- *Sea G un grupo. Definimos el orden trivial dado por:*

$$f \leq g \iff f = g$$

Con respecto a este orden, G es un grupo parcialmente ordenado.

- *Los grupos $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$ son grupos parcialmente ordenados con respecto al orden natural.*

Lema 3.1.3. *Sea G un grupo parcialmente ordenado y $g, h \in G$ tales que existe $g \vee h$ y $g \wedge h$. Entonces se tiene que*

1. $g^{-1} \wedge h^{-1} = (g \vee h)^{-1}$.

2. $g^{-1} \vee h^{-1} = (g \wedge h)^{-1}$.

Demostración. (1) Sean $g, h \in G$ entonces se verifica:

$$g \vee h \geq g \Rightarrow (g \vee h)^{-1} \leq g^{-1}$$

$$g \vee h \geq h \Rightarrow (g \vee h)^{-1} \leq h^{-1}$$

Con lo cual se tiene que $(g \vee h)^{-1} \leq g^{-1} \wedge h^{-1}$. Veamos ahora que para cualquier $f \in G$ verificando $f \leq g^{-1}, h^{-1}$ entonces $f \leq (g \vee h)^{-1}$ lo que probará que $g^{-1} \wedge h^{-1} = (g \vee h)^{-1}$. Sea $f \in G$ tal que $f \leq g^{-1}, h^{-1}$ entonces $f^{-1} \geq g, h$ y por tanto $f^{-1} \geq g \vee h$ y $f \leq (g \vee h)^{-1}$.
(2) Sean $g, h \in G$ entonces se verifica:

$$g \wedge h \leq g \Rightarrow (g \wedge h)^{-1} \geq g^{-1}$$

$$g \wedge h \leq h \Rightarrow (g \wedge h)^{-1} \geq h^{-1}$$

Por tanto $(g \wedge h)^{-1} \geq g^{-1} \vee h^{-1}$. De forma análoga al apartado anterior veamos que para cualquier $f \in G$ verificando $f \geq g^{-1}, h^{-1}$ entonces se tiene que que $f \geq (g \wedge h)^{-1}$. Sea $f \in G$ tal que $f \geq g^{-1}, h^{-1}$ entonces, $f^{-1} \leq g, h$ y por tanto $f^{-1} \leq g \wedge h$ y $f \geq (g \wedge h)^{-1}$.

□

Lema 3.1.4. *Si G es un grupo parcialmente ordenado y sean $g, h \in G$, entonces $g \leq h$ si y sólo si $h^{-1} \leq g^{-1}$.*

Demostración. Si $g \leq h$, entonces $1 \leq hg^{-1}$ y $h^{-1} \leq g^{-1}$. □

Definición 3.1.5. *Sea G un grupo parcialmente ordenado llamamos **conjunto de los elementos positivos** de G a*

$$G^{+} = \{g \in G : \ g \geq 1\}$$

Definición 3.1.6. *Sea G un grupo y $A \subseteq G$ un subconjunto no vacío decimos que*

(1) *A es **multiplicativamente cerrado** si*

- $1 \in A$.
- *$\forall\ a, b \in A$ se tiene que $a \cdot b \in A$.*

(2) *A es **cerrado para la conjugación** si*

$$\forall\ a \in A \text{ y } \forall\ g \in G \text{ se tiene que } g^{-1}ag \in A.$$

Lema 3.1.7. *Sea G un grupo parcialmente ordenado, entonces G^+ es multiplicativamente cerrado y cerrado para la conjugación.*

Demostración. Supongamos que G es un grupo parcialmente ordenado bajo el orden parcial $\leq$, consideramos $g \in G$ y $f \in G^+$. Como $f \in G^+$ se verifica que $f \geq 1$ y multiplicando por g y después por g^{-1} se sigue que $fg \geq g \Rightarrow g^{-1}fg \geq g^{-1}g \Rightarrow g^{-1}fg \geq 1$ y por tanto $g^{-1}fg \in G^+$ con lo que G^+ es cerrado para la conjugación en G. Además, por definición de G^+, tenemos que $1 \in G^+$ y dados dos elementos f, g con $f \geq 1$ y $g \geq 1$ verifican que $fg \geq 1$, luego G^+ es multiplicativamente cerrado. □

Definición 3.1.8. *Un grupo parcialmente ordenado cuyo orden parcial es dirigido lo llamaremos* ***grupo dirigido****.*

Proposición 3.1.9. *Sea A es un subconjunto no vacío, multiplicativamente cerrado y cerrado para la conjugación de G, entonces todo elemento de $< A >$ puede escribirse de la forma ab^{-1} con $a, b \in N$.*

Demostración. Tenemos que para todo subconjunto A de G

$$< A >= \{x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_r^{e_r} : r \in \mathbb{N}, x \in A, e_i \in \{1, -1\}\}.$$

Tomamos $x \in < A >$ y razonamos por inducción en el número de factores.
Si $r = 1$, entonces $x = x_1^{e_1}$ y tenemos dos casos:

- Si $e_1 = 1$, entonces $x = x_1 \cdot (1)^{-1}$. Tomando $a = x_1$ y $b = 1$ tenemos que $x = ab^{-1} \in A$ puesto que $x_1 \in A$ por definición y $1 \in A$ por ser A multipicativamente cerrado.

- Si $e_1 = 1$, entonces $x = 1 \cdot x_1^{-1}$. Tomando $a = 1$ y $b = x_1$ tenemos que $x = ab^{-1} \in A$ ya que $1 \in A$ por ser A multiplicativamente cerrado y $x_1^{-1} \in A$ por ser A cerrado para la cojugación.

Supongamos que se cumple para $r-1$ factores. Veamos que se cumple si $x = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_r^{e_r}$. Por hipótesis de inducción, como $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_{r-1}^{e_{r-1}} = ab^{-1}$ con a, $b \in A$, tenemos que $x = ab^{-1}x_r^{e_r}$.

- Si $e_r = -1$, entonces $x = ab^{-1}x_r^{-1} = a(x_r b)^{-1}$, tomando $\tilde{b} = x_r b$ tenemos que $x = a\tilde{b}^{-1} \in A$.

- Si $e_r = -1$, entonces $x = ab^{-1}x_r$. Como A es cerrado para la conjugación se tiene que $b^{-1}x_r b \in A$. Tomamos $\tilde{a} = ab^{-1}x_r b$ donde $\tilde{a} \in A$ puesto que $a \in A$ y A es multipicativamente cerrado. Con esto $x = ab^{-1}x_r = ab^{-1}x_r bb^{-1} = \tilde{a}b^{-1}$ con $\tilde{a}b \in A$.

Por el principio de inducción concluimos que $< A >= \{ab^{-1} : a, b \in A\}$. □

Lema 3.1.10. *Un grupo parcialmente ordenado es dirigido si y sólo si $< G^+ >= G$.*

Demostración. Como G^+ es multiplicativamente cerrado y cerrado para la conjugación entonces $< G^+ >= \{ab^{-1} : \ a, b \in G^+\}$.

$\Rightarrow$ Supongamos que G es un grupo dirigido. Sea $g \in G$, existe $h \in G$ tal que h es cota superior de g y 1. Entonces como $h \geq 1$ se tiene que $h \in G^+$ y como $h \geq g \Rightarrow hg^{-1} \geq 1$ y por tanto $hg^{-1} \in G^+$. Luego como $g = hh^{-1}g = h(g^{-1}h)^{-1} \in < G^+ >$. Entonces $G =< G^+ >$.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que $G =< G^+ >$.
Sea $g \in G$, por la Proposición 3.1.9, existen $f, h \in G^+$ tal que $g = fh^{-1}$. Entonces $f = gh \geq g$ y $f \geq 1$ y por tanto f es una cota superior de g y 1. Con esto hemos visto que dados $a, b \in G$, entonces 1 y ab^{-1} tienen una cota superior c con lo cual $c \geq ab^{-1}$ y $c \geq 1$ por lo que $cb \geq a$ y $cb \geq b$ y por tanto cb es una cota superior de a y b para cualquier par $a, b \in G$. Se razona de análogamente para probar que todo par de elementos tiene una cota inferior.

$\square$

3.2. Grupos retículo-ordenados o ℓ-grupos

Para poder trabajar con grupos parcialmente ordenados de una forma mucho más sencilla, introducimos el concepto de grupo retículo ordenado, puesto que la estructura de retículo nos va a aportar muchas propiedades interesantes y muy útiles.

Definición 3.2.1. *Un grupo parcialmente ordenado cuyo orden parcial es un retículo lo llamamos* ***grupo retículo-ordenado o ℓ-grupo*** *(el término ℓ-grupo proviene del inglés, lattice, que significa retículo).*

Ejemplo 3.2.2.

- *Consideramos el grupo aditivo de los números complejos $(\mathbb{C}, +)$. Dados $a + bi, \ c + di \in \mathbb{C}$ definimos la relación de orden parcial dada por*

$$(a + bi) \leq (c + di) \text{ si } a \leq c \text{ y } b \leq d \text{ con el orden habitual en } \mathbb{R}$$

Con este orden $(\mathbb{C}, +)$ es un ℓ-grupo donde

$$(a + bi) \vee (c + di) = (x + yi) \qquad y \qquad (a + bi) \wedge (c + di) = (m + ni)$$

con $x = a \vee c$, $y = b \vee d$, $m = a \wedge c$ y $n = b \wedge d$ en $\mathbb{R}$.

- *Sea X un espacio topológico y $C(X)$ el grupo de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$, (con $\mathbb{R}$ equipado con la topología usual) con la adición:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ para todo } x \in X$$

Entonces X es un ℓ-grupo bajo el orden dado por

$$f \leq g \iff f(x) < g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Observamos que

$$(f \vee g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\} \text{ para todo } x \in X,$$

$$(f \wedge g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \text{ para todo } x \in X.$$

- *Sea D el grupo formado por las funciones diferenciables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Entonces D es un subgrupo del grupo $C(\mathbb{R})$ dado en el ejemplo anterior. Además D es un grupo dirigido bajo el orden heredado de $C(\mathbb{R})$. Sin embargo, D no es un subretículo de $C(\mathbb{R})$ puesto si consideramos f_0 como la función que es igual a 0 para todo $x \in \mathbb{R}$ y la función $g(x) = 2x$, ambas son diferenciables, pero si consideramos su supremo*

$$f_0 \vee g = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tenemos que entonces $f_0 \vee g$ no es diferenciable en 0 y por tanto no pertenece a D.

- *Sea $G = (Mat_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +)$ el grupo aditivo formado por las matrices enteras 2×2 con el orden dado por:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} :\iff \begin{cases} a_1 \leq a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2 \\ \text{ó} \\ a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 \leq c_2 \text{ y } d_1 \leq d_2 \end{cases}$$

Entonces G es un ℓ-grupo, veámoslo:
Sean $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in G$, entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \vee a_2 & b_1 \vee b_2 \\ c_1 \vee c_2 & d_1 \vee d_2 \end{pmatrix} \in G$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \wedge a_2 & b_1 \wedge b_2 \\ c_1 \wedge c_2 & d_1 \wedge d_2 \end{pmatrix} \in G$$

Y entonces G es un ℓ-grupo.

Ejemplo 3.2.3. *Sea $(\Omega, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea $f, g \in A(\Omega)$, el conjunto de permutaciones de Ω que preservan el orden, decimos que*

$$f \leq g \text{ si } f(\alpha) \leq g(\alpha)\ \forall \alpha \in \Omega.$$

Con este orden $A(\Omega)$ es un grupo parcialmente ordenado.
Además si $(\Omega, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado entonces $A(\Omega)$ es un ℓ-grupo,

veámoslo:
Como $(\Omega, \leq)$ *es un conjunto totalmente ordenado se verifica que dados* $\alpha, \beta \in \Omega$ *se tiene que* $\alpha \leq \beta$ *o* $\beta \leq \alpha$, *supongamos que* $\alpha \leq \beta$ *entonces dados* $f, g \in A(\Omega)$ *como* $f(\alpha)$, $g(\alpha) \in \Omega$ *se tiene que*

$$f(\alpha) \leq g(\alpha) \text{ o } f(\alpha) \geq g(\alpha)$$

En el primer caso definimos $(f \vee g)(\alpha) := g(\alpha)$ *y en el segundo caso* $(f \wedge g)(\alpha) := f(\alpha)$. *Con esta definición* $f \vee g$ *tomará valores de* f *y valores de* g. *Debemos probar que* $f \vee g \in A(\Omega)$, *es decir, que preserva el orden y es biyectivo.*
Veamos que preserva el orden, dados $\alpha, \beta \in \Omega$ *con* $\alpha \leq \beta$ *se tienen cuatro casos:*

1. *Si* $(f \vee g)(\alpha) = f(\alpha)$ *y* $(f \vee g)(\beta) = f(\beta)$, *como* f *preserva el orden* $f(\alpha) \leq f(\beta)$ *luego* $(f \vee g)(\alpha) \leq (f \vee g)(\beta)$.

2. *Si* $(f \vee g)(\alpha) = g(\alpha)$ *y* $(f \vee g)(\beta) = g(\beta)$, *como* g *preserva el orden* $g(\alpha) \leq g(\beta)$ *luego* $(f \vee g)(\alpha) \leq (f \vee g)(\beta)$.

3. *Si* $(f \vee g)(\alpha) = f(\alpha)$ *y* $(f \vee g)(\beta) = g(\beta)$, *entonces* $f(\beta) \leq g(\beta)$. *Además como* f *preserva el orden se tiene que* $f(\alpha) \leq f(\beta)$ *con lo cual,* $f(\alpha) \leq f(\beta) \leq g(\beta)$ *lo que implica que* $f(\alpha) \leq g(\beta)$ *y por tanto* $f \vee g$ *preserva el orden.*

4. *Si* $(f \vee g)(\alpha) = g(\alpha)$ *y* $(f \vee g)(\beta) = f(\beta)$, *procediendo de forma análoga al apartado anterior se tiene que* $g(\alpha) \leq f(\beta)$ *y de nuevo* $f \vee g$ *preserva el orden.*

Veamos ahora que en cada caso se tiene también que $f \vee g$ *es biyectivo.*
En primer lugar, veamos $f \vee g$ *es inyectivo:*
Sean $\alpha, \beta \in \Omega$ *con* $(f \vee g)(\alpha) = (f \vee g)(\beta)$ *supongamos que* $\alpha \leq \beta$, *se tienen 4 casos:*

1. *Si* $(f \vee g)(\alpha) = f(\alpha) = (f \vee g)(\beta) = f(\beta)$ *entonces* $\alpha = \beta$ *por ser* f *biyectiva.*

2. *Si* $(f \vee g)(\alpha) = g(\alpha) = (f \vee g)(\beta) = g(b)$ *entonces* $\alpha = \beta$ *por ser* g *biyectiva.*

3. *Si* $(f \vee g)(\alpha) = f(\alpha)$ *y* $(f \vee g)(\beta) = g(b)$ *entonces se tiene que* $g(\alpha) \leq f(\alpha)$ *y* $f(\beta) \leq g(\beta)$ *y como* f *preserva el orden*

$$g(\alpha) \leq f(\alpha) \leq f(\beta) \leq g(\beta).$$

   Además, como $(f \vee g)(\alpha) = (f \vee g)(\beta) = f(\alpha) = g(\beta)$ *entonces* $f(\alpha) \leq f(\beta) \leq g(\beta) = f(\alpha)$ *con lo que* $f(\alpha) = f(\beta)$ *que implica* $\alpha = \beta$ *por ser* f *biyectiva.*

4. *De modo análogo al apartado anterior vemos que* $f \vee g$ *es biyectivo en el caso* $(f \vee g)(\alpha) = g(\alpha)$ *y* $(f \vee g)(\beta) = f(\beta)$.

Veamos ahora que $f \vee g$ *es sobreyectivo:*
Como f *y* g *son biyectivas sabemos que para todo* $y \in \Omega$ *existen* x_1 *y* x_2 *tales que* $f(x_1) = y$ *y* $g(x_2) = y$ *entonces:*

1. *Si* $(f \vee g)(x_1) = f(x_1)$ *ó* $(f \vee g)(x_2) = g(x_2)$ *entonces hemos terminado.*

2. *Si* $(f \vee g)(x_1) = g(x_1)$ *y* $(f \vee g)(x_2) = f(x_2)$ *como* Ω *es totalmente ordenado,* x_1 *y* x_2 *son comparables, así que supongamos que* $x_1 \leq x_2$*, en ese caso se tendrá que*

$$f(x_1) \leq g(x_1) \leq g(x_2) \leq f(x_2)$$

pero como $f(x_1) = g(x_2) = y$ *entonces* $g(x_1) = y = (f \vee g)(x_1)$.

Con esto hemos probado que para todo $y \in \Omega$ *existe* $x \in \Omega$ *tal que* $(f \vee g)(x) = y$ *y por tanto es sobreyectivo.*

Podemos concluir que $f \vee g$ *existe y pertenece a* $A(\Omega)$*. Con un procedimiento análogo se prueba que* $f \wedge g$ *también existe y pertenece a* $A(\Omega)$*. En conclusión* $A(\Omega)$ *es un* ℓ*-grupo.*

Juntando las dos teorías observamos que necesariamente aparecen las nociones naturales como, por ejemplo, la de ℓ-subgrupo.

Definición 3.2.4. *Un subgrupo* H *de un* ℓ*-grupo* G *se llama* ℓ*-subgrupo de* G *si* H *es un subretículo del retículo* G.

Ejemplo 3.2.5.

- *Sea* $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *con la suma componente a componente y el orden dado por*

$$(a, b) \leq (c, d) \iff a \leq c \text{ y } b \leq d$$

Entonces G *ee un* ℓ*-grupo y el conjunto* $H = \{(m, -m) : m \in \mathbb{Z}\}$ *es un subgrupo de* G*, sin embargo* $(1, -1) \vee (0, 0) = (1, 0) \notin H$ *y por tanto* H *no es un* ℓ*-subgrupo de* G.

- *Sea* $G = (Mat_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +)$ *el grupo aditivo formado por las matrices enteras* 2×2 *con el orden dado en el Ejemplo 3.2.2, sabemos entonces que* G *es un* ℓ*-grupo. Sea* H *el subgrupo dado por* $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : b, d \in \mathbb{Z}\}$*, entonces* H *es un* ℓ*-subgrupo de* G*. En primer lugar veamos que* H *es un subgrupo de* G*. Sean* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{smallmatrix}\right)$ *y* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{smallmatrix}\right) \in H$*, entonces se tiene que*

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b_2 \\ 0 & -d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & d_1 - d_2 \end{pmatrix} \in H.$$

Por tanto, H *es un subgrupo de* G*. Veamos ahora que* H *es un* ℓ*-subgrupo. Sean* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{smallmatrix}\right)$ *y* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{smallmatrix}\right) \in H$*, entonces*

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \vee b_2 \\ 0 & d_1 \vee d_2 \end{pmatrix} \in H$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \wedge b_2 \\ 0 & d_1 \wedge d_2 \end{pmatrix} \in H$$

Con lo que H *es un* ℓ*-subgrupo de* G.

Ejemplo 3.2.6. *En particular, $A(\mathbb{Q})$ con el orden dado por*

$$f \leq g :\Longleftrightarrow f(\alpha) \leq g(\alpha) \ \forall \alpha \in \Omega$$

es un ℓ-grupo. Sin embargo, si consideramos $S \subseteq A(\mathbb{Q})$ dado por:

$$S = \{f \in A(\Omega) : \exists \ a \in \mathbb{Q} \ con \ f(x) = ax\}$$

S es un subgrupo de $A(\mathbb{Q})$ pero no es un ℓ-subgrupo de $A(\mathbb{Q})$ de hecho no es un grupo dirigido, veámoslo:
Supongamos que S es un grupo dirigido. Consideremos la aplicación identidad $id : x \longmapsto x$ y la aplicación $f : x \longmapsto 2x$ entonces existe una aplicación $g : x \longmapsto cx$ de forma que $g(x) \geq id(x)$ y $g(x) \geq f(x) \ \forall x \in \mathbb{Q}$, en particular se verifica que

$$x \leq cx \ y \ 2x \leq cx \ \forall x \in \mathbb{Q} \ entonces \begin{cases} si \ x = 1 \ \Rightarrow 1 \leq c \ y \ 2 \leq c \Rightarrow c \geq max(2,1) \\ y \\ si \ x = -1 \ \Rightarrow -1 \leq -c \ y \ -2 \leq -c \Rightarrow c \leq min(2,1) \end{cases}$$

Pero esto es imposible. Con lo cual id y f no tienen una cota superior y de una forma análoga se puede probar que tampoco tienen una cota inferior. Por lo tanto S no es un grupo dirigido y por tanto tampoco será un ℓ-grupo. Sin embargo, como $A(\mathbb{Q})$ es un ℓ-grupo todo par de elementos tiene un supremos y un ínfimo en $A(\mathbb{Q})$, en particular id y f lo tienen y viene dado por las funciones lineales a trozos:

$$f \vee id = \begin{cases} f \ si \ x \geq 0 \\ id \ si \ x < 0 \end{cases} \qquad f \wedge id = \begin{cases} id \ si \ x \geq 0 \\ f \ si \ x < 0 \end{cases}$$

3.3. Propiedades de los ℓ-grupos

Los ℓ-grupos disponen de muchas propiedades. A continuación veremos y demostraremos las propiedades más importantes, las cuales necesitaremos para la obtener el resultado principal.

Proposición 3.3.1. *Sea G un ℓ-grupo y sean $f, g, h \in G$ entonces se verifica:*

$$f(g \vee h) = fg \vee fh \qquad y \qquad f(g \wedge h) = fg \wedge fh$$

Demostración. Dados $f, g, h \in G$ se tiene que

$$g \leq g \vee h \Longrightarrow fg \leq f(g \vee h)$$

$$h \leq g \vee h \Longrightarrow fh \leq f(g \vee h)$$

Y de esta forma se tiene que $fg \vee fh \leq f(g \vee h)$. Por otro lado se verifica

$$fg \leq fg \vee fh \Longrightarrow g \leq f^{-1}(fg \vee fh)$$

$$fh \leq fg \vee fh \Longrightarrow h \leq f^{-1}(fg \vee fh)$$

Con lo cual tenemos que $g \vee h \leq f^{-1}(fg \vee fh)$ que implica $f(g \vee h) \leq fg \vee fh$ y por tanto se tiene la igualdad buscada.
La segunda igualdad se demuestra de modo análogo.

□

Lema 3.3.2. *Sea G un ℓ-grupo y sean $f, g \in G$, entonces*

$$f(f \wedge g)^{-1} \wedge g(f \wedge g)^{-1} = 1.$$

Demostración. Dados $f, g \in G$, se tiene que

$$f(f \wedge g)^{-1} \wedge g(f \wedge g)^{-1} = f(f^{-1} \vee g^{-1}) \wedge g(f^{-1} \vee g^{-1}) = (1 \vee fg^{-1}) \wedge (gf^{-1} \vee 1) =$$

$$(1 \vee fg^{-1}) \wedge (1 \wedge fg^{-1})^{-1} = 1.$$

Donde la primera igualdad se da por el Lema 3.1.3 y la segunda por el Lema 3.3.1.

□

En muchas ocasiones necesitaremos saber si un subgrupo de un ℓ-grupo dado, es un ℓ-subgrupo. La siguiente proposición nos ofrece una forma muy útil y sencilla de caracterizar ℓ-subgrupos.

Proposición 3.3.3. *Sea G un ℓ-grupo y L un subgrupo de G. Entonces L es un ℓ-subgrupo de G si y sólo si $f \vee 1 \in L$ para todo $f \in L$.*

Demostración. ⇒ Supongamos que L es un ℓ-subgrupo de G, entonces, por definición de ℓ-subgrupo, para cualesquiera $f, g \in L$ se tiene que $f \vee g \in L$. En particular, como $1 \in L$, entonces $1 \vee f \in L$ para todo $f \in L$.

⇐ Supongamos ahora que para todo $f \in L$ se tiene que $f \vee 1 \in L$. Sean $f, g \in L$ entonces $f \vee g = (fg^{-1} \vee 1)g \in L$. Además como $f \in L$ entonces $f^{-1} \in L$ y $f^{-1} \vee 1 \in L$ y por el Lema 3.1.3 entonces $f \wedge 1 \in L$ y $f \wedge g = (fg^{-1} \wedge 1)g \in L$. En conclusión L es un ℓ-grupo.

□

Lema 3.3.4. *En un ℓ-grupo, si $g^n \geq 1$ para algún entero positivo n, entonces $g \geq 1$.*

Demostración. Si G es un ℓ-grupo y sea $g \in G$, entonces probamos con inducción sobre n, usando la Proposición 3.3.1 que $(g \wedge 1)^n = g^n \wedge g^{n-1} \wedge ... \wedge g \wedge 1$ y como $g^n \geq 1$ entonces, $(g \wedge 1)^n = g^{n-1} \wedge ... \wedge g \wedge 1 = (g \wedge 1)^{n-1}$ con lo cual se tiene que $g \wedge 1 = 1$ y por tanto $g \geq 1$. □

Definición 3.3.5. *Sea G un ℓ-grupo, para cada $g \in G$ definimos*

$$g^+ = g \vee 1, \qquad g^- = g^{-1} \vee 1 \qquad y \qquad |g| = g \vee g^{-1} = |g^{-1}|.$$

Ejemplo 3.3.6. *En* $(\mathbb{R},+)$ *con el orden habitual* $\leq$ *para cualquier* $a \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$a^+ = a \vee 0 = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ 0 \text{ si } a < 0 \end{cases} \qquad a^- = (-a) \vee 0 = \begin{cases} 0 \text{ si } a \geq 0 \\ a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = a \vee (-a) = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases} = |-a|$$

Lema 3.3.7. *Sea* G *un* ℓ*-grupo y sean* $f, g_1, \ldots, g_n \in G^+$ *y* $1 \leq f \leq g_1 \cdots g_n$*, entonces* $f = f_1 \cdots f_n$ *para algunos* $f_j \in G^+$ *con* $f_j \leq g_j$ $(1 \leq j \leq n)$*.*

Demostración. Razonemos por inducción sobre el número de factores, n:

- Si $n = 1$, entonces $1 \leq f \leq g_1$ con lo que $f = f_1$ y se verifica $f_1 \leq g_1$.

Supongamos ahora cierto para $n-1$ y veamos que se cumple entonces para n:

- Si $1 \leq f \leq g_1 \cdots g_{n-1} \cdot g_n$ entonces $1 \leq (f \cdot g_n^{-1} \vee 1) \leq g_1 \cdots g_{n-1}$ y por hipótesis tenemos que $(f \cdot g_n^{-1} \vee 1) = f_1 \cdots f_{n-1}$ para algunos $f_j \in G^+$ con $f_j \leq g_j$ y $1 \leq j \leq n-1$. Además, por Lema 3.1.3, tenemos que $f \cdot (g_n \wedge f)^{-1} = (f \cdot g_n^{-1} \vee 1) = f_1 \cdots f_{n-1}$ y por tanto $f = f_1 \cdots f_{n-1} \cdot (g_n \wedge f)$.

□

Teorema 3.3.8. *Si* G *es un* ℓ*-grupo, entonces el retículo en* G *es distributivo.*

Demostración. Sean $a, b, c \in G$ supongamos que $a \vee b = a \vee c$ y que $a \wedge b = a \wedge c$. Entonces por el Lema 3.1.3 tenemos

$$b = (a \wedge b)a^{-1}a(a \wedge b)^{-1}b \overset{\text{Lema } 3.1.3}{=} (a \wedge b)a^{-1}a(a^{-1} \vee b^{-1})b \overset{\text{Prop } 3.3.1}{=} (a \wedge b)a^{-1}(b \vee a) =$$

$$(a \wedge c)a^{-1}(c \vee a) \overset{\text{Prop } 3.3.1}{=} (a \wedge c)a^{-1}a(a^{-1} \vee c^{-1})c \overset{\text{Lema } 3.1.3}{=} (a \wedge c)a^{-1}a(a \wedge c)^{-1}c = c$$

y por tanto, por el Corolario 2.2.20 el retículo en G es distributivo. □

Lema 3.3.9. *Sean* $f, g \in G$ *con* G *un* ℓ*-grupo:*

1. $|g| \geq 1$ *y* $|g| = g^+g^-$.
2. $g^+ \wedge g^- = 1$.
3. $g = g^+(g^-)^{-1}$.
4. $(fg)^+ \leq f^+g^+$.
5. $|f \vee g| \leq |f| \vee |g| \leq |f||g|$.
6. $|fg| \leq |f||g||f|$.
7. $|gf^{-1}| = (g \vee f)(g \wedge f)^{-1}$.

8. *Si* $g \wedge f = 1$ *entonces* g *y* f *conmutan y* $g \vee f = gf$.

9. *Si* $g \wedge f = 1$ *entonces* $gf = |gf^{-1}|$.

10. *Si* $f, g \in G^+$ *y* $gf = |gf^{-1}|$ *entonces* $g \wedge f = 1$.

11. $g^+ \leq |g|$ *y* $g^- \leq |g|$.

12. $(g^+)^n = (g^n)^+$, $\quad (g^-)^n = (g^n)^- \quad$ *y* $\quad |g|^n = |g^n|$.

Demostración. 1. Sea $f \geq g, g^{-1}$ entonces $f^2 \geq gg^{-1} = 1$ y por el Lema 3.3.4 se tiene que $f \geq 1$ y como esto se verifica para cualquier cota superior de g y g^{-1} entonces, en particular, se verifica para $|g| = g \vee g^{-1}$. Además $g^+g^- = (g \vee 1)(g^{-1} \vee 1) = 1 \vee g \vee g^{-1} \vee 1 = g \vee g^{-1} = |g|$.

2. $g^+ \wedge g^- = (g \vee 1) \wedge (g^{-1} \vee 1) = (g \wedge g^{-1}) \vee (1 \wedge g^{-1}) \vee (g \wedge 1) \vee 1 = (g \wedge g^{-1}) \vee 1$ donde la penúltima igualdad se da por estar en un retículo distributivo, Lema 3.3.8, y además por el Lema 3.1.3 se tiene que $(g \wedge g^{-1}) \vee 1 = (g^{-1} \vee g)^{-1} \vee 1$ y por el apartado anterior $(g^{-1} \vee g)^{-1} \leq 1$ con lo que $(g^{-1} \vee g)^{-1} \vee 1 = 1$, y en conclusión $g^+ \wedge g^- = 1$.

3. $gg^- = g(g^{-1} \vee 1) \overset{\text{Prop 3.3.1}}{=} 1 \vee g = g^+$ y por tanto $g = g^+(g^-)^{-1}$.

4. $(fg)^+ = fg \vee 1 \leq fg \vee f \vee g \vee 1 = (f \vee 1)(g \vee 1) = f^+g^+$.

5. Se tiene que $f, f^{-1} \leq |f|$ y $g, g^{-1} \leq |g|$ con lo cual $f \vee g, f^{-1} \wedge g^{-1} \leq |f| \vee |g|$. Por tanto

$$|f \vee g| = (f \vee g) \vee (f \vee g)^{-1} = (f \vee g) \vee (f^{-1} \wedge g^{-1}) \leq |f| \vee |g|.$$

Además se tiene $|f| \geq 1$ y $|g| \geq 1$ con lo que $|f||g| \geq |g|$ y $|f||g| \geq |f|$, entonces $|f||g| \geq |f| \vee |g|$.

6. Tenemos que $fg \leq |f||g| \leq |f||g||f|$ y $g^{-1}f^{-1} \leq |g||f| \leq |f||g||f|$ y por tanto $|fg| = (fg) \vee (fg)^{-1} = (fg) \vee (g^{-1}f^{-1}) \leq |f||g||f|$.

7. Se tiene

$$(g \vee f)(g \wedge f)^{-1} = (g \vee f)(g^{-1} \vee f^{-1}) = (g \vee f)g^{-1} \vee (g \vee f)f^{-1} = (1 \vee fg^{-1})(gf^{-1} \vee 1) = |gf^{-1}|.$$

8. Dados $g, f \in G$ tal que $g \wedge f = 1$ entonces

$$gf = g(g \wedge f)^{-1}f = g(g^{-1} \vee f^{-1})f = f \vee g.$$

Análogamente $fg = g \vee f$. Como siempre se tiene que $f \vee g = g \vee f$ entonces $fg = gf$.

9. Dados $g, f \in G$ tal que $g \wedge f = 1$, aplicando los apartados 7. y 8. se tiene que
$$|gf^{-1}| = (g \vee f)(g \wedge f)^{-1} = (gf)(1)^{-1} = gf.$$

10. Dados $g, f \in G^+$ verificando $gf = |gf^{-1}|$ entonces por 7. se tiene que
$$gf = (g \vee f)(g \wedge f)^{-1} \Rightarrow (g \vee f) \leq (g \vee f)(g \wedge f)^{-1} \Rightarrow (g \wedge f) = 1.$$

11.
$$g^+ = |g^+| = |g \vee 1| \leq |x| \cdot 1 \leq |x| \qquad \text{y} \qquad g^- = |g^-| = |g^{-1} \vee 1| \leq |x^{-1}| \cdot 1 \leq |x|.$$

12. Sea $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq k \leq n$. Entonces se tiene que
$$(g^{n-k} \vee g^{-k})^n = \vee\{g^{(n-k)j} \cdot g^{-k(n-j)} : j \in \{0, \ldots, n\}\} \geq g^{(n-k)k} \cdot g^{-k(n-k)} = 1.$$
Entonces, por el Lema 3.3.4, $g^{n-k} \vee g^{-k} \geq 1$ y entonces $g^n \vee 1 \geq g^k$ para todo k con $0 \leq k \leq n$. De este modo tenemos que
$$(g^+)^n = g^n \vee g^{n-1} \vee \cdots \vee g \vee 1 = g^n \vee 1 = (g^n)^+.$$
De modo análogo se comprueba que $(g^-)^n = (g^n)^-$. Veamos ahora que $|g|^n = |g^n|$:
$$|g|^n \stackrel{1.}{=} (g^+g^-)^n \stackrel{2.\text{ y }8.}{=} (g^+)^n(g^-)^n = (g^n)^+(g^n)^- \stackrel{1.}{=} |g^n|.$$

□

3.4. Homomorfismos de grupos ordenados

Al igual que pasa con los grupos, con los ℓ-grupos aparece la necesidad de crear aplicaciones que nos permitan conservar el orden establecido o, más concretamente, los supremos e ínfimos.

Definición 3.4.1. *Sea ϕ un homomorfismo de grupos ordenados, decimos que ϕ es un homomorfismo que preserva el orden si verifica:*
$$f \leq g \Rightarrow \phi(f) \leq \phi(g)$$
Además por el Lema 3.1.3, $f \wedge g = (f^{-1} \vee g^{-1})^{-1}$. Por tanto, todo homomorfismo de grupos que preserve $\wedge$ también preserva $\vee$, si los grupos son ℓ-grupos lo llamamos ℓ-homomorfismo. De esta forma un ℓ-isomorfismo es un isomorfismo de grupos que preserva $\wedge$ y $\vee$.

Ejemplo 3.4.2. *Sea $G = (\mathbb{Z}, +)$ bajo el orden trivial (Ejemplo 3.1.2) y $H = (\mathbb{Z}, +)$ bajo el orden habitual en $\mathbb{Z}$. Entonces definimos*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & G & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g\colon & H & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Entonces G y H son isomorfos como grupos. Sin embargo no son isomorfos como grupos parcialmente ordenados puesto que f sí que preserva el orden mientras g no lo hace.

Lema 3.4.3. *Sean G y H dos ℓ-grupos y $\phi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Son equivalentes:*

1. *ϕ es un ℓ-homomorfismo de grupos.*
2. *$\phi(|g|) = |\phi(g)|, \ \forall g \in G$.*
3. *Si $f, g \in G$ y $f \wedge g = 1 \Rightarrow \phi(f) \wedge \phi(g) = 1$.*
4. *$\phi(g \vee 1) = \phi(g) \vee 1, \forall\ g \in G$.*

Demostración.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Por el Lema 3.3.9 sabemos que

$$\phi(|g|) = \phi(g^+g^-) = \phi(g^+)\phi(g^-) = (\phi(g \vee 1))(\phi(g^{-1} \vee 1))$$

  y por ser ϕ un ℓ-homomorfismo entonces

$$(\phi(g \vee 1))(\phi(g^{-1} \vee 1)) = (\phi(g) \vee 1)(\phi(g^{-1}) \vee 1) = \phi(g)^+\phi(g)^- = |\phi(g)|$$

- (2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que se verifica (2) y dados $f, g \in G$ se tiene que $f \wedge g = 1$, entones por ser ϕ un homomorfismo de grupos se verifica

$$|\phi(g)\phi(f)^{-1}| = |\phi(g)\phi(f^{-1})| = |\phi(gf^{-1})|$$

  por (2) se tiene que $|\phi(gf^{-1})| = \phi(|gf^{-1}|)$ y por el apartado 9 del Lema 3.3.9 $\phi(|gf^{-1}|) = \phi(gf) = \phi(g)\phi(f)$ con lo cual $|\phi(g)\phi(f)^{-1}| = \phi(g)\phi(f)$ y de nuevo, por el apartado 9 del Lema 3.3.9 entonces $\phi(f) \wedge \phi(g) = 1$.

- (3) $\Rightarrow$ (4) Supongamos que se verifica (3) entonces por el Lema 3.3.9 sabemos que $g^+ \wedge g^- = 1$ y $g^- = g^{-1}g^+$ con todo esto tenemos que

$$1 = g^+ \wedge g^- = g^+ \wedge g^{-1}g^+ \overset{(3)}{\Rightarrow} 1 = \phi(g^+) \wedge \phi(g^{-1})\phi(g^+) \Rightarrow (\phi(g^+))^{-1} = \phi(1) \wedge \phi(g^{-1})$$

  con esto, se tiene que

$$(\phi(g \vee 1))^{-1} = 1 \wedge (\phi(g))^{-1} \Rightarrow (\phi(g \vee 1))^{-1} = (1 \vee \phi(g))^{-1}$$

  Lo que finalmente implica que $1 \vee \phi(g) = \phi(g \vee 1)$.

- (4) $\Rightarrow$ (1) Sean $f, g \in G$, supongamos que se verifica (4) entonces

$$\phi(g \vee f) = \phi((gf^{-1} \vee 1)f) = \phi(gf^{-1} \vee 1)\phi(f) \overset{(4)}{=} [\phi(g)\phi(f^{-1}) \vee 1]\phi(f) = \phi(g) \vee \phi(f)$$

de forma análoga se obtiene que $\phi(g \wedge f) = \phi(g) \wedge \phi(f)$ y por tanto podemos concluir que ϕ es un ℓ-homomorfismo.

$\square$

Ejemplo 3.4.4. *Consideramos el grupo $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ bajo el orden dado por*

$$(a, b) \leq (c, d) :\Longleftrightarrow a \geq c \qquad \text{ó} \qquad a = c \text{ y } b \leq d.$$

Entonces consideramos la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & (0, x) \end{array}$$

Entonces ϕ es un homomorfismo de grupos ya que $\phi(0) = (0, 0)$ y

$$\phi(a + b) = (0, a + b) = (0, a) + (0, b) = \phi(a) + \phi(b).$$

Además ϕ preserva el orden ya que dados $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $a \leq b$, entonces

$$\phi(a) = (0, a) \leq (0, b) = \phi(b).$$

Por último, ϕ es un ℓ-homomorfismo ya que dado $a \in \mathbb{R}$, si $a > 0$, entonces

$$\phi(a \vee 0) = \phi(a) = (0, a) = (0, a) \vee (0, 0) = \phi(a) \vee (0, 0)$$

y si $a \leq 0$, entonces

$$\phi(a \vee 0) = \phi(0) = (0, 0) = (0, a) \vee (0, 0) = \phi(a) \vee (0, 0).$$

Entonces por el Lema 3.4.3, ϕ es un ℓ-homomorfismo.

Capítulo 4

El Teorema de Cayley-Holland

En este capítulo enunciaremos y demostraremos el Teorema de Cayley-Holland, pero primero introduciremos unos nuevos tipos de subgrupos necesarios para su demostración. Se ha tomado como referencia los libros de A.M.W. Glass y J.M. Howie [5], Michael Darnel [9] y V.M. Kopytov and N.Ya. Medvedev [7].

4.1. Subgrupos convexos

El primero de los conceptos que necesitamos introducir es la noción de subconjunto convexo de un conjunto parcialmente ordenado, que generaliza la noción de convexidad habitual en $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.1.1. *Sea G un conjunto parcialmente ordenado y C un subconjunto de G. Decimos que C es **convexo** si para todos $g \in G$ y $c_1, c_2 \in C$ se cumple*

$$\text{Si } c_1 \leq g \leq c_2 \text{ entonces } g \in C.$$

En concreto estamos interesados en subconjuntos de un grupo parcialmente ordenado G que son a la vez convexos y subgrupos.

Lema 4.1.2. *Sea G un grupo y C un subgrupo de G. Si para todos $g \in G$ y $c \in G$ se cumple*

$$\text{Si } 1 \leq g \leq c \text{ entonces } g \in C.$$

Entonces C es convexo.

Demostración. Dados $g \in G$ y $c_1, c_2 \in C$ con $c_1 \leq g \leq c_2$, entonces $1 \leq c_1^{-1} \cdot g \leq c_1^{-1} \cdot c_2$. Como C es subgrupo, $c_1^{-1} \cdot c_2 \in C$ y entonces, por hipótesis, $c_1^{-1} \cdot g \in C$. Como $c_1 \in C$, entonces $g = c_1 \cdot (c_1^{-1} \cdot g) \in C$ y por tanto C es convexo. □

Ejemplo 4.1.3. *Consideremos $G = (\mathbb{R}^2, +)$ bajo el orden parcial definido por*

$$(a, b) \leq (c, d) \iff a \leq c \text{ y } b \leq d.$$

Sabemos que G y $\{(0, 0)\}$ son convexos y veamos cuales son los subgrupos convexos C de G. Sea $(a, b) \in C$ con $(a, b) \neq (0, 0)$, tenemos los siguientes casos:

(1) $\boldsymbol{ab > 0}$ **:** *Si* $a > 0$ *entonces* $b > 0$ *y entonces* $(0,0) < (a,b)$*, lo que significa que* C *contiene al rectángulo* $[0,a] \times [0,b]$*. Si, en cambio,* $a < 0$ *entonces* $b < 0$*, con lo cual* $(0,0) < (-a,-b)$ *y entonces* C *contiene al rectángulo* $[0,-a] \times [0,-b]$*. En ambos casos el rectángulo contenido en* C *genera todo* G *y por* $C = G$*.*

(2) $\boldsymbol{ab = 0}$ **:** *Si* $a = 0$ *entonces* $b < 0$ *o* $b > 0$*. Si* $b > 0$ *entonces* $(0,0) < (0,b)$ *y* C *contiene al segmento* $[0,0] \times [0,b]$*. Si, en cambio,* $b < 0$ *entonces* C *contendrá al segmento* $[0,0] \times [0,-b]$*. En ambos casos* C *contiene un segmento del eje* OY *y este segmento genera todo el eje, por tanto, si* C *está contenido en el eje* OY*, entonces* C *será todo el eje. Si, en cambio, existe* $(c,d) \in C$ *tal que* (c,d) *no está en el eje* OY*, entonces tenemos los siguientes subcasos:*

(*a*) *Si* $cd > 0$ *entonces* $C = G$*, como en (1).*

(*b*) *Si* $cd < 0$*, entonces supongamos* $d < 0$ *y* $c > 0$*. Entonces se tiene que* $0 < d + nb$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$ *y por tanto* $(0,0) < (c,d) + n(a,b)$ *y, de nuevo,* $C = G$*. Por otro lado, si* $c < 0$*, entonces* $(0,0) < -(c,d) + n(a,b)$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$ *y* $C = G$*.*

(*c*) *Si* $d = 0$*, entonces* $c \neq 0$ *porque* (c,d) *no pertenece al eje OY. Entonces* $(0,0) < (c,d) + (a,b)$ *si* $c > 0$ *y* $(0,0) < -(c,d) + (a,b)$ *si* $c < 0$ *y, una vez más,* $C = G$*.*

De modo análogo podemos ver que si C *contiene al eje* OX*, entonces* C *es igual al eje* OX *o* $C = G$*.*

(3) $\boldsymbol{ab < 0}$ **:** *Si* $a > 0$ *entonces* $b < 0$ *y* (a,b) *está en el cuarto cuadrante. Como* $(0,0), (a,b) \in C$*, entonces* C *podría ser un subgrupo de la recta* R *que pasa por ambos puntos. Obsérvese que dos puntos de* R *no son comparables entre sí, puesto que si existiesen* $(r,s), (t,u) \in R$ *de modo que* $(r,s) < (t,u)$*, entonces*

$$0 < \frac{t-r}{s-u}$$

lo que implicaría que la pendiente de R *fuese positiva, lo cual es una contradicción con que la recta pasa por* $(0,0)$ *y un punto del cuarto cuadrante. Por tanto, si* C *es un subgrupo de la recta* R *que pasa por* $(0,0)$ *y* (a,b) *sus elementos no son comparables luego* C *es convexo.*

Si tomásemos $a < 0$ *y* $b > 0$*, entonces* (a,b) *está en el segundo cuadrante y tomando la recta que pasa por* (a,b) *y por el* $(0,0)$*, de nuevo tendríamos una recta con pendiente negativa y todos sus elementos no comparables entre sí.*

Supongamos ahora que existe $(c,d) \in C$ *tal que* (c,d) *no pertenece a la recta* R *definida antes. Entonces se tienen los siguientes subcasos:*

(*a*) *Si* (c,d) *pertenece al primer o tercer cuadrante, entonces* $C = G$ *como antes.*

(b) *Si (c,d) pertenece a alguno de los dos ejes, entonces argumentando como en (2)(b) se tiene $C = G$.*

(c) *Si (c,d) pertenece al segundo o cuarto cuadrante, podemos asumir que pertenece al cuarto cuadrante al igual que (a,b) (ya que si pertenece al segundo, entonces $(-c,-d)$ pertenece al cuarto y razonamos igual). Entonces tenemos que $c > 0$ y $d < 0$. Como R pasa por (a,b) y no por (c,d), tenemos que*

$$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}.$$

Así que asumamos que $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$. Entonces existe $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $m,n > 0$ tal que

$$\frac{a}{c} < \frac{n}{m} < \frac{b}{d}.$$

Como $a,c > 0$ y $b,d < 0$ tenemos que $am \leq cn$ y $dn \geq bm$, es decir, $m(a,b) \leq n(c,d)$. Y como $(a,b),(c,d) \in C$ entonces el punto $(nc-ma, nd-mb) \in C$ el cual, está en el primer cuadrante, lo que, como en los casos anteriores, implica $C = G$.

En conclusión, los subgrupos convexos en $G = (\mathbb{R}^2, +)$ bajo el orden definido al principio son G, $\{(0,0)\}$, el eje OX, el eje OY y un subgrupo de una recta que pasa por el origen con pendiente negativa.

Ejemplo 4.1.4. *Sea $G = (\mathbb{R}^2, +)$ con el orden lexicográfico,*

$$(a,b) \leq (c,d) :\Longleftrightarrow\ a < c \qquad ó \qquad a = c \text{ y } b \leq d.$$

Sea C un subgrupo propio y convexo de G y sea $(a,b) \in C$ con $(a,b) \neq (0,0)$. Si $a > 0$, entonces C contiene a todos los elementos (c,d) con $0 \leq c < a$, es decir, contiene a la banda

$$\{(c,d) : 0 \leq c < a\} \subseteq C$$

entonces $C = G$. Análogamente si $a < 0$ vemos que $C = G$. Si, en cambio, $a = 0$ entonces C contiene al segmento $[(0,0),(0,b)]$ si $b > 0$ o al segmento $[(0,0),(0,-b)]$ si $b < 0$, y en ambos casos se trata de un segmento del eje OY que genera todo el eje. Por tanto, el único subgrupo propio y convexo de G bajo el orden lexicográfico es el eje OY.

Ejemplo 4.1.5. *Sea $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con el orden dado por*

$$(n,m) \leq (k,l) :\Longleftrightarrow\ n \leq k \text{ y } m \leq l$$

Observamos que G es un ℓ-grupo, puesto que dados $(n,m),(k,l) \in G$, entonces se tiene que

$$(n,m) \vee (k,l) = (\max\{n,k\}, \max\{m,l\})$$

$$(n,m) \wedge (k,l) = (\text{mín}\{n,k\}, \text{mín}\{m,l\}).$$

Consideramos el subgrupo $H = \{(k,-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ *de* G*, entonces* H *es un subgrupo normal convexo de* G*, pero no es un* ℓ*-subgrupo. Veámoslo:*
En primer lugar veamos que H *es un subgrupo de* G*. Observamos que* $(0,0) \in H$*. Además, dado* $(k,-k) \in H$ *entonces* $(-k,k) \in H$ *y por tanto* $(k,-k)+(-k,k) = (k-k,-k+k) = (0,0) \in H$*. Con esto,* H *es un subgrupo.*
En segundo lugar probemos que H *es convexo. Sea* $(n,m) \in G$ *y* $(k,-k) \in H$ *de modo que*

$$(0,0) \leq (m,n) \leq (k,-k), \text{ entonces } \begin{cases} 0 \leq n \leq k \\ \quad y \\ 0 \leq m \leq -k \end{cases}$$

De esta forma, si $k > 0$*, entonces* $-k \leq 0$ *y viceversa, con lo cual* $(0,0)$ *y* $(k,-k)$ *no podrían ser comparables. Por tanto* $(k,-k) = (0,0)$ *y entonces* $(n,m) = (0,0) \in H$*. Con lo que* H *es convexo. Además* H *es un subgrupo de un grupo abeliano por lo que es normal.*
Por último, tenemos que H *no es un* ℓ*-subgrupo puesto que, como hemos visto, ningún* $(k,-k) \in H$ *con* $k \neq 0$ *es comparable con* $(0,0)$ *y por el Lema 3.3.3, entonces* H *no es un* ℓ*-subgrupo.*

Lema 4.1.6. *Si* G *es un grupo parcialmente ordenado y* $\{C_i : i \in I\}$ *es una familia de subgrupos convexos de* G*, entonces* $\cap\{C_i : i \in I\}$ *es un subgrupo convexo de* G*.*

Demostración. Sabemos que la intersección de subgrupos es un subgrupo, entonces veamos que la intersección de subgrupos convexos es también convexo. Dados $a, b \in \cap\{C_i : \ i \in I\}$ y $c \in G$ con $a \leq c \leq b$ como $a, b \in C_i$ para todo $i \in I$ y C_i es convexo, entonces $c \in C_i$ para todo $i \in I$ y por tanto $c \in \cap\{C_i : \ i \in I\}$.

□

A continuación veamos una forma de caracterización muy útil para ℓ-subgrupos convexos.

Lema 4.1.7. *Sea* C *un subgrupo de un* ℓ*-grupo* G*. Entonces* C *es un* ℓ*-subgrupo convexo de* G *si y sólo si*

$$C = \{g \in G : |g| \leq |c| \text{ para algún } c \in C\}.$$

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que C es un ℓ-subgrupo convexo de G. Sean $c \in C$ y $g \in G$ con $|g| \leq |c|$. Sabemos que $|c| \in C$ por ser C un ℓ-subgrupo de G y que $|g|^{-1} \leq g \leq |g|$. Además como $|g| \leq |c|$ se tiene que $|c|^{-1} \leq |g|^{-1} \leq g \leq |g| \leq |c|$ y por ser C convexo concluimos que entonces $g \in C$.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que C es un subgrupo de G tal que

$$C = \{g \in G : |g| \leq |c| \text{ para algún } c \in C\}.$$

Sea $s \in C$, por el Lema 3.3.9(11), $s^+ \leq |s|$ y por definición de C se tiene que $s^+ = s \vee 1 \in C$ con lo cual, por la Proposición 3.3.3 entonces C es un ℓ-subgrupo de G.
Veamos ahora que además C es convexo. Dados $g \in G$ y $c \in C$ con $1 \leq g \leq c$ entonces $1 \leq |g| \leq |c|$ y por hipótesis $g \in C$. Con esto, dados $c_1, c_2 \in C$ y $g \in G$ con $c_1 \leq g \leq c_2$, entonces verifican $1 \leq gc_1^{-1} \leq c_2c_1^{-1}$ y como $c_2c_1^{-1} \in C$ se tiene que $gc_1^{-1} \in C$ y por tanto $g \in C$. En conclusión, C es un ℓ-subgrupo convexo de G.

□

Lema 4.1.8. *Sea C un ℓ-subgrupo convexo de un ℓ-grupo G, entonces el ℓ-subgrupo convexo generado C^+ es igual a C.*

Demostración. Denotamos por $\boldsymbol{C}(C^+)$ al ℓ-subgrupo convexo generado por C^+. Siempre se tiene que $\boldsymbol{C}(C^+) \subseteq C$. Entonces, por el Lema 4.1.7,

$$\boldsymbol{C}(C^+) = \{g \in G : |g| \leq |c| \text{ para algún } c \in \boldsymbol{C}(C^+)\}$$

Dado $c \in C$ se tiene que $|c| \in C^+$, entonces $|c| \in \boldsymbol{C}(C^+)$ y por tanto $c \in \boldsymbol{C}(C^+)$ con lo que tenemos la otra contención.

□

Definición 4.1.9. *Sea G un ℓ-grupo y $g \in G$. Llamamos $\mathcal{C}_g$ al conjunto de todos los ℓ-subgrupos convexos de G que contienen a g.*

Lema 4.1.10. *Sea G un ℓ-grupo y $g \in G$. Denotamos por*

$$\boldsymbol{C}(g) = \cap\{C : C \in \mathcal{C}_g\}$$

Entonces $\boldsymbol{C}(g)$ contiene a g y está contenido en todo elemento de $\mathcal{C}_g$, además, es un ℓ-subgrupo convexo.En otras palabras, $\boldsymbol{C}(g)$ es el ℓ-subgrupo convexo más pequeño que contiene a g.

Lema 4.1.11. *Sea G un ℓ-grupo y sea $g \in G$ entonces*

$$\boldsymbol{C}(g) = \{f \in G : |f| \leq |g|^n \textit{ para algún } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}.$$

Demostración. Sea $A \subseteq G$ con $A = \{f \in G : |f| \leq |g|^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$.
En primer lugar, veamos que A es un subgrupo de G. Dados $x, y \in A$, veamos que entonces, $xy^{-1} \in A$. Como $x, y \in A$, tenemos que $|x| \leq |g|^{n_1}$ y que $|y| \leq |g|^{n_2}$ para algunos $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Entonces $|y| = |y^{-1}| \leq |g|^{n_2}$ y $|x| \cdot |y^{-1}| = |xy^{-1}| \leq |g|^{n_1} \cdot |g|^{n_2} = |g|^{n_1+n_2}$ con $n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, con lo cual $xy^{-1} \in A$ y por tanto A es un subgrupo de G.
Veamos ahora que A es un ℓ-subgrupo convexo de G que contiene a g.
Como $|g| \leq |g|$, entonces $g \in A$. Además, como $|g|^n \leq |g|^{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ entonces por definición de A, $|g|^n \in A$. De esta forma, dado $f \in G$ con $|f| \leq |c|$ para

algún $c \in A$, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ tal que $|f| \leq |g|^n$, luego $f \in A$. Recíprocamente, dado $f \in A$, f verifica, $|f| \leq |g|^n$ para algún $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, recordamos que $|g|^n \in A$. En consecuencia, por el Lema 4.1.7, entonces A es un ℓ-subgrupo convexo de G.
Por último, veamos que, dado un ℓ-subgrupo convexo C de G tal que $g \in C$, entonces $A \subseteq C$ y por tanto $A = \boldsymbol{C}(g)$.
Sea C un ℓ-subgrupo convexo de G que contiene a g, por el Lema 4.1.7 sabemos que $C = \{h \in G : |h| \leq |c| \text{ para algún } c \in C\}$ y sea $f \in A$ entonces $|f| \leq |g|^n$. Como $g \in C$ y C es un ℓ-subgrupo, entonces $|g| \in C$ y $|g|^n \in C$ y como $|f| \leq |g|^n$, tenemos que $f \in C$ por definición de C.
En conclusión, se cumple que $A = \boldsymbol{C}(g)$.

□

Corolario 4.1.12. *Sea G un ℓ-grupo y sean $f, g \in G^+$, entonces*

$$\boldsymbol{C}(f \vee g) = \boldsymbol{C}(f) \cup \boldsymbol{C}(g) \qquad y \qquad \boldsymbol{C}(f \wedge g) = \boldsymbol{C}(f) \cap \boldsymbol{C}(g).$$

Demostración. Procedamos probando la primera igualdad por doble contención:

- $\boldsymbol{C}(f) \cup \boldsymbol{C}(g) \subseteq \boldsymbol{C}(f \vee g)$.
  Sea $h \in \boldsymbol{C}(f) \cup \boldsymbol{C}(g)$, por el Lema 4.1.11, $|h| \leq |f|^n$ y $|h| \leq |g|^m$ para algunos $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Como $f, g \in G^+$, entonces $|h| \leq f^n$ y $|h| \leq g^m$, y por el mismo motivo, $|h| \leq f^{n+m}$ y $|h| \leq g^{n+m}$. Por tanto

  $$|h| \leq (f^{n+m} \vee g^{n+m}) \leq (f \vee g)^{n+m} \overset{f,g \in G^+}{=} |f \vee g|^{n+m}$$

  que, por el Lema 4.1.11, implica que $h \in \boldsymbol{C}(f \vee g)$.

- $\boldsymbol{C}(f \vee g) \subseteq \boldsymbol{C}(f) \cup \boldsymbol{C}(g)$.
  Como $g, f \in \boldsymbol{C}(f) \cup \boldsymbol{C}(g)$ entonces $g \vee f \in \boldsymbol{C}(f) \cup \boldsymbol{C}(g)$ y como $\boldsymbol{C}(g \vee f)$ es el ℓ-subgrupo convexo más pequeño que contiene a $g \vee f$ entonces $\boldsymbol{C}(f \vee g) \subseteq \boldsymbol{C}(f) \cup \boldsymbol{C}(g)$.

De modo análogo se demuestra la segunda identidad. □

Definición 4.1.13. *Sea G un ℓ-grupo, denotamos por $\mathcal{C}(G)$ al conjunto de todos los ℓ-subgrupos convexos de G.*

Teorema 4.1.14. *Sea G un ℓ-grupo, entonces $\mathcal{C}(G)$ es un subretículo completo del retículo generado por todos los subgrupos de G. Dada una familia $\{C_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}(G)$ denotaremos por $\bigvee\{C_i : i \in I\}$ al menor ℓ-subgrupo convexo que contiene a todos los elementos de la familia y por $\bigwedge\{C_i : i \in I\}$ a la intersección.*

Demostración. Sean $\{C_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}(G)$, tenemos que

$$\cap\{C_i : i \in I\} \in \mathcal{C}(G)$$

ya que por el Lema 4.1.6 la intersección de subgrupos convexos es un subgrupo convexo y la intersección de ℓ-subgrupos es un ℓ-subgrupo ya que dado $a \in \cap\{C_i : i \in I\}$, entonces $a \in C_i$ para todo $i \in I$, y como cada C_i es ℓ-subgrupo, $a \vee 1 \in C_i$ para todo $i \in I$, con lo que $a \vee 1 \in \cap\{C_i : i \in I\}$ y por el Lema 3.3.3, entonces $\cap\{C_i : i \in I\}$ es un ℓ-subgrupo.

Consideremos ahora el ℓ-subgrupo convexo C generado por el conjunto $\cup\{C_i : i \in I\}$ y veamos que $C \in C(G)$.

Sea $c \in C$, entonces $c = c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdots c_{i_s}$ donde $c_{i_j} \in C_{i_j}$ con $j \in \{1, \ldots, s\}$. Consideramos ahora $x \in G$ con $|x| \leq |c|$. Por el Lema 3.3.9 (6) y (11) tenemos que

$$x^+ \leq |x| \leq |c_{i_1}| \cdots |c_{i_{s-1}}| \cdot |c_{i_s}| \cdot |c_{i_{s-1}}| \cdots |c_{i_1}|$$

y por la Proposición 3.3.7 entonces podemos escribir x^+ de la forma

$$x^+ = x_{i_1} \cdots x_{i_{s-1}} \cdot x_{i_s} \cdot \widetilde{x}_{i_{s-1}} \cdots \widetilde{x}_{i_1}$$

con $1 \leq x_{i_j}, \widetilde{x}_{i_j} \leq |c_{i_j}|$. Como $c_{i_j} \in C_{i_j}$ y C_{i_j} es un ℓ-subgrupo convexo de G para todo $i \in I$ y $j \in \{1, \ldots, s\}$, entonces utilizando el Lema 4.1.7, tenemos que $x_{i_j}, \widetilde{x}_{i_j} \in C_{i_j}$ y por tanto $x^+ \in C$. Análogamente se prueba que $x^- \in C$ lo que implica que $(x^-)^{-1} \in C$. De este modo, por la Proposición 3.3.9 (3), $x = x^+ \cdot (x^-)^{-1}$ y por tanto $x \in C$. Con todo esto hemos visto que dados $x \in G$ y $c \in C$ con $|x| \leq |c|$ se tiene que entonces $x \in C$ y por tanto, por el Lema 4.1.7 tenemos que C es convexo, es decir, $C \in \mathcal{C}(G)$.

En conclusión, hemos visto que dados $\{C_i : i \in I\}$ con $C_i \in \mathcal{C}(G)$, entonces la intersección de todos los C_i está en $\mathcal{C}(G)$ y el subgrupo generado por la unión de todos ellos también, y por tanto $\mathcal{C}(G)$ es completo. $\square$

Teorema 4.1.15. *Sea G un ℓ-grupo, entonces $\mathcal{C}(G)$ es un retículo distributivo. Además, para todo $A, C_i, \in \mathcal{C}(G)$ $(i \in I)$, entonces*

$$A \cap \bigvee\{C_i : i \in I\} = \bigvee\{A \cap C_i : i \in I\}.$$

Demostración. En primer lugar demostraremos la igualdad utilizando doble contención:

- $\bigvee\{A \cap C_i : i \in I\} \subseteq A \cap \bigvee\{C_i : i \in I\}$:
  Sea $g \in \bigvee\{A \cap C_i : i \in I\}$, entonces existe $i \in I$ tal que $g \in A \cap C_i$, luego $g \in A$ y $g \in \cup\{C_i : i \in I\}$ y entonces $g \in A \cap \bigvee\{C_i : i \in I\}$.

- $A \cap \bigvee\{C_i : i \in I\} \subseteq \bigvee\{A \cap C_i : i \in I\}$:
  Por el Lema 4.1.8, es suficiente ver que dado $g \in A^+ \cap \bigvee\{C_i : i \in I\}$, entonces $g \in \bigvee\{A \cap C_i : i \in I\}$. Por tanto, sea $g \in A^+ \cap \bigvee\{C_i : i \in I\}$, se tiene que $1 \leq g = c_{i_1} \cdots c_{i_n} \leq c_{i_1}^+ \cdots c_{i_n}^+$ donde $c_{i_j} \in C_i$. Por la Proposición 3.3.7, podemos escribir $g = g_{i_1} \cdots g_{i_n}$ con $g_{i_j} \in G^+$ y $1 \leq g_{i_j} \leq c_{i_j}^+$. Como C_i es convexo para todo $i \in I$, entonces $g_{i_j} \in C_i$. Además, tenemos que $1 \leq g_{i_j} \leq g$ y por tanto $g_{i_j} \in A$ por ser A convexo. En conclusión, $g \in \bigvee\{A \cap C_i : i \in I\}$.

Con esto hemos probado la igualdad. Entonces se tiene que $\mathcal{C}(G)$ es distributivo. $\square$

4.2. Subgrupos primos y valores

La siguiente noción que necesitamos introducir es la noción de subgrupo primo junto con la de valor en un grupo. Esta última tiene un papel principal en la demostración del resultado objeto de este trabajo.

Definición 4.2.1. *Sea C un ℓ-subgrupo convexo de un ℓ-grupo G, decimos que C es **primo** si para cualesquiera ℓ-subgrupos convexos A y B de G tales que $A \cap B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$ o $B \subseteq C$.*

Ejemplo 4.2.2. *Consideramos G un ℓ-subgrupo de $A(\Omega)$ y $\alpha \in \Omega$, sea*

$$G_\alpha = \{g \in G : g(\alpha) = \alpha\}$$

el estabilizador de α en G, entonces G_α es un ℓ-subgrupo convexo primo de G. Veámoslo: Recordemos que el orden definido en $A(\Omega)$ es el siguiente:

$$h \leq g :\iff h(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in \Omega.$$

De esta forma, dado $h \in G$,$\alpha \in \Omega$ $g \in G_\alpha$, tenemos que si $1 \leq h \leq g$ entonces $id(\alpha) = \alpha \leq h(\alpha) \leq g(\alpha) = \alpha$, con lo cual $h(\alpha) = \alpha$ y $h \in G_\alpha$, por tanto G_α es convexo.
Sea ahora $h, k \in G$ con $h \wedge k = 1$, entonces $h(\alpha) \wedge k(\alpha) = id(\alpha) = \alpha$ y entonces o bien $k(\alpha) = \alpha$ o bien $h(\alpha) = \alpha$ lo cual, por el Lema 4.2.7 implica que G_α es primo.

Definición 4.2.3. *Sean G un ℓ-grupo, g un elemento de G y V un ℓ-subgrupo convexo de G. Decimos que V es un **valor** de g si $g \notin V$ y $g \in H$ para cualquier ℓ-subgrupo convexo H de G verificando $V \subsetneq H$. Diremos que V es un **valor en G**, si existe $g \in G$ tal que V es un valor de g.*

Ejemplo 4.2.4.

- *Sea $G = (Mat_{2\times 2}(\mathbb{Z}), +)$ el grupo aditivo formado por las matrices enteras 2×2 con el orden dado por:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} :\iff \begin{cases} a_1 < a_2 \text{ y } b_1 < b_2 \\ \text{ó} \\ a_1 = a_2,\ b_1 = b_2,\ c_1 \leq c_2 \text{ y } d_1 \leq d_2 \end{cases}$$

  Por el Ejemplo 3.2.2, sabemos que G es un ℓ-grupo y tenemos los siguientes valores en G:

  - *El subgrupo $V_A = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : b, d \in \mathbb{Z}\}$ es el valor del elemento $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Veamos que, efectivamente, V_A es un ℓ-subgrupo convexo de G y que dado un subgrupo H de G, si $V_A \subsetneq H$ entonces $A \in H$.*
    En primer lugar, por el Ejemplo 3.2.5 sabemos que V_A es un ℓ-subgrupo.

Veamos entonces que V_A *es convexo. Sean* $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ *y* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{smallmatrix}\right) \in V_A$ *de modo que*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene que $0 \leq a_1 \leq 0$, *con lo que* $a_1 = 0$, *y por como hemos definido el orden en* G, *entonces necesariamente* $0 \leq c_1 \leq 0$ *por lo que* $c_1 = 0$, *es decir,* $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{smallmatrix}\right) \in V_A$ *con* $b_1 \leq b_2$ *y* $d_1 \leq d_2$. *Con lo cual, por el Lema 4.1.2,* V_A *es convexo.*

Por último, veamos que, dado un subgrupo H *de* G, *si* $V_A \subsetneq H$ *entonces* $A \in H$. *Como* $V_A \subsetneq H$, *entonces existe* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in H$ *con* $a \neq 0$ *ó* $c \neq 0$. *Observamos que* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -b+1 \\ 0 & -d+1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & b+1 \\ 0 & d+1 \end{smallmatrix}\right) \in V_A \subsetneq H$ *y, como* H *es un subgrupo, entonces* $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -a & 1 \\ -c & 1 \end{smallmatrix}\right) \in H$. *Si* $a \neq 0$, *existe una matriz* $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right) \in H$ *con* $a > 0$, *de este modo tenemos que*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

y como H *es convexo, entonces* $A \in H$. *Procedemos de modo análogo si* $c \neq 0$.

- *El subgrupo* $_B = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) : b, d \in \mathbb{Z}\}$ *es el valor del elemento* $V_B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- *El subgrupo* $V_C = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : b, d \in \mathbb{Z}\}$ *es el valor del elemento* $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- *El subgrupo* $V_D = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : b, d \in \mathbb{Z}\}$ *es el valor del elemento* $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

De modo análogo a V_A, *se prueba que* V_B, V_C *y* V_D *son los valores de* B, C *y* D *respectivamente.*

- *Sea* $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *con la suma componente a componente con el orden dado por*

  $$(K_1, m_1, n_1) \leq (k_2, m_2, n_2) :\Longleftrightarrow n_1 < n_2 \qquad \text{ó} \qquad n_1 = n_2 \text{ y } k_1 \leq k_2 \text{ y } m_1 \leq m_2.$$

  Entonces definimos:

  $$(k, m, n) \vee (0, 0, 0) = \begin{cases} (k, m, n), & \text{si } n > 0, \\ (k \vee 0, m \vee 0, n \vee 0), & \text{si } n = 0, \\ (0, 0, 0), & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

  Entonces el valor de $(0, 0, 1)$ *es el subgrupo dado por* $\{(k, m, 0) : k, m \in \mathbb{Z}\}$ *el valor de* $(0, 1, 0)$ *es el subgrupo* $\{(k, 0, 0) : k \in \mathbb{Z}\}$, *y el valor del elemento* $(1, 0, 0)$ *es el subgrupo* $\{(0, m, 0) : m \in \mathbb{Z}\}$. *Además, estos son todos los subgrupos primos de* G.

Definición 4.2.5. *Sea* G *un* ℓ*-grupo y* V_g *un valor en* G, *para algún* $g \in G$. *Definimos* $\overline{V}_g$ *como el* ℓ*-subgrupo convexo de* G *generado por* V_g *y* g.

De este modo, si H es un ℓ-subgrupo convexo de G tal que $V_g \subset H$ y $V_g \neq H$, entonces $\overline{V}_g \subseteq H$.

Lema 4.2.6. *Sea G un ℓ-grupo, $g \in G$ y V_g un valor de g. Entonces,*

$$V_g = \{x \in G : |x| \wedge g \in V_g\}.$$

Demostración. Consideremos $C = \{x \in G : |x| \wedge g \in V_g\}$ veamos que C es un ℓ-subgrupo convexo de G.
En primer lugar, veamos que $V_g \subseteq C$. Dado $x \in V_g$, tenemos que $|x| \wedge g \leq |x|$. Como $x \in V_g$ y como V_g es convexo, entonces $|x| \vee g \in V_g$, luego $x \in C$. En particular, $C \neq \emptyset$.
En segundo lugar, veamos que C es un subgrupo de G. Sean $x, y \in C$, tenemos que $1 \leq |x| \wedge g = c_1 \in V_g$ y $1 \leq |y| \wedge g = c_2 \in V_g$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
|xy^{-1}| \wedge g &\overset{\text{L } 3.3.9.6}{\leq} |x| \cdot |y^{-1}| \cdot |x| \wedge g = |x| \cdot |y| \cdot |x| \wedge g \\
&\overset{g \leq |x| \cdot |y| \cdot g}{=} |x| \cdot |y| \cdot |x| \wedge |x| \cdot |y| \cdot g \wedge g \\
&= |x| \cdot |y| \cdot (|x| \wedge g) \wedge g = |x| \cdot |y| \cdot c_1 \wedge g \\
&\overset{g \leq gc_1}{\leq} |x| \cdot |y| \cdot c_1 \wedge g \cdot c_1 = (|x| \cdot |y| \wedge g) \cdot c_1 \\
&\overset{g \leq |x| \cdot g}{=} (|x| \cdot |y| \wedge |x| \cdot g \wedge g) \cdot c_1 = (|x| \cdot (|y| \wedge g) \wedge g)) \cdot c_1 \\
&= (|x| \cdot c_2 \wedge g)) \cdot c_1 \overset{g \leq c_2 g}{\leq} (|x| \cdot c_2 \wedge g \cdot c_2)) \cdot c_1 \\
&\leq (|x| \wedge g)) \cdot c_2 \cdot c_1 = c_1 \cdot c_2 \cdot c_1 \in V_g.
\end{aligned}$$

Por tanto, como V_g es convexo y $1 \leq |xy^{-1}| \wedge g \leq c_1 c_2 c_1$, entonces $|xy^{-1}| \wedge g \in V_g$ y $xy^{-1} \in C$, lo que implica que C es un subgrupo de G.
En tercer lugar veamos que C es convexo. Sea $c \in C$ y $x \in G$, verificando $1 \leq x \leq c$, entonces $1 \leq x \wedge g \leq c \wedge g \in V_g$ y por tanto $x \wedge g \in V_g$ por ser V_g convexo y $x \in C$, por definición de C. Con lo cual, por el Lema 4.1.2, C es un subgrupo convexo de G. Además, si $x \in C$, entonces $|x \vee 1| = x \vee 1 \leq |x|$ y $1 \leq |x \vee 1| \wedge g \leq |x| \wedge g \in V_g$, con lo cual $x \vee 1 \in C$ y por tanto, por la Proposición 3.3.3, C es un ℓ-subgrupo de G.
Por último, si C contiene de manera estricta a V_g, entonces $\overline{V}_g \subseteq C$ y $g \in C$. Por definición de C, entonces $|g| \vee g = g \in V_g$ lo cual contradice que V_g sea un valor de g y por tanto, $\overline{V}_g \not\subset C$ y $C = V_g$.

□

Lema 4.2.7. *Sea G un ℓ-grupo y $C \in \mathcal{C}(G)$. Entonces son equivalentes:*

1. *C es un subgrupo primo de G.*
2. *Si $f \wedge g = 1$, entonces $f \in C$ o $g \in C$.*
3. *Si $f \wedge g \in C$, entonces $f \in C$ o $g \in C$.*
4. *Dados $f, g \in G$, existe $c \in C$ tal que $f \leq cg$ o $g \leq cf$.*

5. *Si C_1 y C_2 son ℓ-subgrupos convexos conteniendo a C entonces $C_1 \subseteq C_2$ o $C_2 \subseteq C_1$.*

Demostración.

- 1. $\Rightarrow$ 2. Dados $f, g \in G$ con $f \wedge g = 1$, por el Corolario 4.1.12, se tiene que $\boldsymbol{C}(f) \cup \boldsymbol{C}(g) = \boldsymbol{C}(f \wedge g) = \boldsymbol{C}(1) = \{1\} \subseteq C$. Por 1. C es primo, con lo cual, $\boldsymbol{C}(f) \subseteq C$ o $\boldsymbol{C}(g) \subseteq C$ por tanto, $f \in C$ o $g \in C$.

- 2. $\Rightarrow$ 3. Dados $f, g \in G$ verificando $f \wedge g \in C$, por el Lema 3.3.2, se verifica que
$$f(f \wedge g)^{-1} \wedge g(f \wedge g)^{-1} = 1.$$
De esta forma, por 2. tenemos que $f(f \wedge g)^{-1} \in C$ o $g(f \wedge g)^{-1} \in C$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $f(f \wedge g)^{-1} \in C$, por tanto $f \in C$, puesto que C es un subgrupo y $(f \wedge g)^{-1} \in C$.

- 3. $\Rightarrow$ 4. Por el Lema 3.3.2 para cualesquiera $f, g \in G$ se verifica
$$f(f \wedge g)^{-1} \wedge g(f \wedge g)^{-1} = 1$$
y por 3. como $1 \in C$ entonces, $f(f \wedge g)^{-1} \in C$ o $g(f \wedge g)^{-1} \in C$ con lo cual, podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $c = f(f \wedge g)^{-1} \in C$, de esta forma $f = c(f \wedge g) \leq cg$ por ser $c \geq 1$.

- 4. $\Rightarrow$ 5. Sean $c_1 \in C_1^+ \setminus C_2$ y $c_2 \in C_2^+ \setminus C_1$. Por 4., existe $c \in C$ tal que $c_1 \leq c \cdot c_2$ o $c_2 \leq c \cdot c_1$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c_1 \leq c \cdot c_2$, con esto $1 \leq c_1 \leq c \cdot c_2$ y por 4.1.2, entonces $c_1 \in C_2$ lo cual contradice que $c_1 \in C_1^+ \setminus C_2$.

- 5. $\Rightarrow$ 1. Sean $A, B \in \mathcal{C}(G)$ con $A \cap B \subseteq C$, tenemos que $C = C \vee (A \cap B)$ y por el Teorema 4.1.15, $\mathcal{C}(G)$ es distributivo, con lo cual $C = (C \vee A) \cap (C \vee B)$. Con esto, $C \vee A$ y $C \vee B$ son ℓ-grupos convexos que contienen a C y, por 5., sin pérdida de generalidad, suponemos que $(C \vee A) \subseteq (C \vee B)$, lo cual implica que $C = (C \vee A)$ y por tanto $A \subseteq C$.

$\square$

Definición 4.2.8. *Sea G un ℓ-grupo y H un ℓ-subgrupo de G definimos $\mathcal{R}(H)$ como el conjunto formado por todas las clases laterales a la derecha módulo H en G, es decir,*
$$\mathcal{R}(H) = \{Hg : g \in G\}.$$

En el conjunto $\mathcal{R}(H)$ definimos el orden parcial dado por
$$Hf \leq Hg, \text{ si y sólo si, existe } h \in H \text{ tal que } f \leq hg.$$

Proposición 4.2.9. *Sea G un ℓ-grupo y $H \in \mathcal{C}(G)$. Entonces $\mathcal{R}(H)$ es un retículo y además para cualquier $f, g \in G$ se tiene*
$$Hf \vee Hg = H(f \vee g) \qquad y \qquad Hf \wedge Hg = H(f \wedge g).$$

Demostración. Sean $g, f \in G$, se tiene que $Hf \leq H(f \vee g)$ y $Hg \leq H(f \vee g)$ puesto que $f \leq 1(f \vee g)$ y $g \leq 1(f \vee g)$ y por tanto $H(f \vee g)$ es una cota superior de Hf y Hg. Sea $h \in G$ verificando $Cg \leq Ch$ y $Cf \leq Ch$, entonces existen $c_1, c_2 \in H$ tales que $f \leq c_1 h$ y $g \leq c_2 h$. Sea $c = c_1 \vee c_2$ entonces $c \in H$ y además $g \leq c_1 h \leq ch$ y $f \leq c_2 h \leq ch$ y por tanto $f \vee g \leq ch$ que implica $H(f \vee g) \leq Hh$. En conclusión, cualquier cota superior de Hf y Hg es más grande que $H(f \vee g)$ y por tanto $Hf \vee Hg = H(f \vee g)$. De modo análogo se verifica la segunda igualdad y como hemos visto que dos elementos cualesquiera de $\mathcal{R}(H)$ tienen supremo e ínfimo en $\mathcal{R}(H)$ entonces $\mathcal{R}(H)$ es un retículo. □

Corolario 4.2.10. *Sea G un ℓ-grupo y $H \in \mathcal{C}(G)$. Entonces H es primo si y sólo si $\mathcal{R}(H)$ es un conjunto totalmente ordenado con respecto al orden parcial definido en la Proposición 4.2.9.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que H es un ℓ-subgrupo primo de G, entonces, por el Lema 4.2.7, se verifica que para todo $f, g \in G$ existe $h \in H$ verificando $f \leq hg$ o $g \leq hf$ y por como hemos definido el orden parcial en $\mathcal{R}(H)$, esto implica que $Hf \leq Hg$ o $Hg \leq Hf$, es decir, dos elementos cualesquiera de $\mathcal{R}(H)$ siempre son comparables y por tanto $\mathcal{R}(H)$ es un conjunto totalmente ordenado.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que $\mathcal{R}(H)$ es un conjunto totalmente ordenado, es decir, todo par de elementos de $\mathcal{R}(H)$ son comparables entre sí y por tanto para cualesquiera $f, g \in H$ se tiene que o bien $Hf \leq Hg$ o bien $Hg \leq Hf$, es decir, existe un $h \in H$ verificando $f \leq hg$ o $g \leq hf$ y por el Lema 4.2.7, entonces H es primo.

□

Lema 4.2.11. *Sea G un ℓ-grupo y H un ℓ-subgrupo de G. Entonces, H es un subgrupo primo de G si y sólo si $a \wedge b \notin H$ para cualesquiera $a, b \in G \setminus H$ con $a, b \geq 1$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea H un subgrupo primo de G y $a, b \in G \setminus H$ con $a, b > 1$. Como H es primo, por el Corolario 4.2.10, $\mathcal{R}(H)$ es totalmente ordenado y por la Proposición 4.2.9, entonces $H(a \wedge b) = Ha \wedge Hb$ y como $\mathcal{R}(H)$ es totalmente ordenado, $Ha \wedge Hb = Ha$ o $Ha \wedge Hb = Hb$, en ambos casos $Ha \neq H$, $Hb \neq H$ y por tanto $a \wedge b \notin H$.

$\Leftarrow$ Supongamos que para todo $a, b \in G \setminus H$ con $a, b > 1$, entonces $a \wedge b \notin H$. Razonamos por reducción al absurdo.
Supongamos que H no es primo y por tanto, por el Corolario 4.2.10, $\mathcal{R}(H)$ no es totalmente ordenado, por lo que podemos tomar dos elementos $Hx, Hy \in \mathcal{R}(H)$ los cuales no sean comparables entre sí. Entonces $Hx \wedge Hy = H(x \wedge y)$ y $Hx(x \wedge y)^{-1} \wedge Hy(x \wedge y)^{-1} = H$ con $Hx(x \wedge y)^{-1} \neq H$ y $Hy(x \wedge y)^{-1} \neq H$. Por tanto $x(x \wedge y)^{-1}, y(x \wedge y)^{-1} \notin H$, sin embargo, por el Lema 3.3.2, $x(x \wedge y)^{-1} \wedge y(x \wedge y)^{-1} = 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

□

Lema 4.2.12. *Sea G un ℓ-grupo, todo valor en G es primo.*

Demostración. Sea V un valor en G. Entonces V es un valor de g para algún $g \in G$ con $g \neq 0$ y lo denotamos por $V = V_g$. Por el Lema 4.2.6, entonces

$$V_g = \{x \in G : |x| \wedge g \in V_g\}.$$

Consideramos $\overline{V}_g$ como el ℓ-subgrupo convexo de G generado por V_g y g. De este modo, si H es un ℓ-subgrupo convexo de G tal que $V_g \subset H$ y $V_g \neq H$, entonces $\overline{V}_g \subseteq H$.
Consideramos ahora $a, b \in G^+$, con $a \wedge b \in V_g$ y $a \notin V_g$. Sea $A = \{x \in G : |x| \wedge b \in V_g\}$, de modo análogo a V_g, A es un ℓ-subgrupo convexo de G y A contiene de forma estricta a V_g puesto que $a \in A$ pero $a \notin V_g$. Con lo cual, $\overline{V}_g \subseteq A$.
Por definición de A, como $g \in \overline{V}_g$, entonces $|g| \wedge b \in V_g$ y por definición de V_g, $b \in V_g$. Con lo cual, para cualesquiera dos elementos $a, b \in G^+$ tales que $a \notin V_g$ y $a \wedge b \in V_g$, se tiene que $b \in V_g$, lo cual, por el Lema 4.2.11, implica que V_g es un subgrupo primo de G. □

4.3. El Teorema de Cayley-Holland

Con todo lo visto hasta ahora, disponemos de las herramientas necesarias para enunciar y demostrar el Teorema de Cayley-Holland, resultado principal de este trabajo.

Teorema 4.3.1. *Todo ℓ-grupo G es ℓ-isomorfo a un ℓ-subgrupo de $A(\Omega)$ para algún conjunto totalmente ordenado Ω (de cardinalidad como mucho la de G).*

Demostración. Si $G = \{1\}$ entonces Ω solo puede contener un elemento con lo cual $A(\Omega)$ contiene únicamente a la aplicación identidad y por tanto G y $A(\Omega)$ serán ℓ-isomorfos, así que asumimos $G \neq \{1\}$.
Dado $g \in G, g \neq 1$, consideramos un valor V_g. Por el Lema 4.2.12, sabemos que V_g es un ℓ-subgrupo primo de G. Por el Corolario 4.2.10 sabemos que el conjunto de clases laterales a derecha de V_g, $\mathcal{R}(V_g)$, es un conjunto totalmente ordenado bajo el orden dado por

$$V_g f \leq V_g h :\iff f \leq ch \text{ para algún } c \in V_g.$$

Tomemos $\Omega = \cup\{\mathcal{R}(V_g) : g \in G, g \neq 1\}$, el cual está totalmente ordenado por:

$$V_g f \leq V_h k :\iff g < h \qquad \text{ó} \qquad g = h \text{ y } V_g f \leq V_g k.$$

Consideremos ahora las aplicaciones:

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & G & \longrightarrow & A(\Omega) \\ & h & \longmapsto & \varphi_h \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_h\colon & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & V_g f & \longmapsto & V_g h f \end{array}$$

Para probar que ϕ es un ℓ-isomorfismo, antes debemos ver que ϕ es un homomorfismo de grupos y que φ_s es biyectiva y preserva el orden.
En primer lugar, veamos que ϕ es un homomorfismo de grupos. Dados $a, b \in G$ y $V_g k \in \Omega$, tenemos que

$$\phi(ab)(V_g k) = \varphi_{ab}(V_g k) = V_g abk$$

$$\phi(a)\phi(b)(V_g k) = \varphi_a \circ \varphi_b(V_g k) = \varphi_a(V_g bk) = V_g abk$$

Y por tanto ϕ es un homomorfismo. Ademas ϕ es inyectivo puesto que dado $h \in G$ entonces se tiene que

$$\phi(h) = id \iff V_g hk = V_g k \text{ para todos } g, k \in G, g \neq 1$$

$$\iff h \in V_g \text{ para todo } g \in G \iff h = 1.$$

En segundo lugar, veamos que φ_s con $s \in G$ es sobreyectiva. Para cada $V_g f \in \Omega$, podemos tomar $h = s^{-1} f \in G$ de modo que $\varphi_s(V_g h) = V_g sh = V_g f$, con lo cual tenemos que φ_s es sobreyectiva.
Veamos ahora que dado $s \in G$, φ_s preserva el orden. Sean $V_g f, V_h k \in \Omega$ tal que $V_g f \leq V_h k$, entonces se tiene que, o bien $g < h$, o bien $g = h$ y $V_g f \leq V_g k$. Si $g < h$, entonces $V_g sf \leq V_h sk$, es decir $\varphi_s(V_g f) \leq \varphi_s(V_h k)$. Si $g = h$, entonces $V_g f \leq V_g k$ y, por el orden definido en $\mathcal{R}(V_g)$, existe $c \in V_g$ tal que $f \leq ch$ y tenemos dos casos:

- Si $s \geq 1$, entonces $sf \leq sch$ y $V_g sf \leq V_g sk$, es decir $\varphi_s(V_g f) \leq \varphi_s(V_h k)$.
- Si $s < 1$, entonces $sf \leq c^{-1} hs$ y, al igual que antes, $\varphi_s(V_g f) \leq \varphi_s(V_h k)$.

Por tanto φ_s conserva el orden. Como φ_s es sobreyectiva y preserva el orden, entonces es inyectiva.
Por último, veamos que ϕ es un ℓ-homomorfismo de ℓ-grupos. En concreto, veamos que

$$\phi(h \vee 1) = \phi(h) \vee \phi(1).$$

Notamos que sea $g \in G \setminus \{1\}$ y $k \in G$, se tiene $\phi(1) = \varphi_1(V_g k) = id(V_g k)$. Dado $g \in G \setminus \{1\}$ y $k \in G$, entonces

$$\phi(h \vee 1) = \phi(h) \vee id \iff \varphi_{(h \vee 1)}(V_g k) = (\varphi_h \vee id)(V_g k)$$

$$\iff V_g(h \vee 1)k = V_g(hk) \vee V_g k.$$

Por como hemos definido el orden en $\mathcal{R}(V_g)$, tenemos que, como

$$k \leq (h \vee 1)k \qquad \text{y} \qquad hk \leq hk \vee k = (h \vee 1)k,$$

entonces

$$V_g k \leq V_g((h \vee 1)k) \qquad \text{y} \qquad V_g hk \leq V_g((h \vee 1)k),$$

es decir, $V_g k \vee V_g hk \leq V_g((h \vee 1)k)$.
Consideramos ahora $V_{\widetilde{g}} \widetilde{k}$ tal que $V_{\widetilde{g}} \widetilde{k} \geq V_g k \vee V_g hk$, entonces tenemos dos casos:

- Si $\widetilde{g} > g$, entonces por el orden definido en Ω, se tiene $V_{\widetilde{g}}\widetilde{k} > V_g((h \vee 1)k)$, y hemos terminado.

- Si $\widetilde{g} = g$, entonces $V_g\widetilde{k} \geq V_gk \vee V_ghk$ y por tanto, existen $c_1, c_2 \in V_g$ tales que $k \leq c_1\widetilde{k}$ y $hk \leq c_2\widetilde{k}$. Como V_g, es un ℓ-grupo, tenemos que $c = c_1 \vee c_2 \in V_g$, con lo cual $k \vee hk \leq c\widetilde{k}$ y $(h \vee 1)k \leq c\widetilde{k}$, lo cual implica que $V_g((h \vee 1)k) \leq V_{\widetilde{g}}\widetilde{k}$

En conclusión, $V_gk \vee V_ghk = V_g((h \vee 1)k)$, con lo que $\phi(h \vee 1) = \phi(h) \vee id$, que por el Lema 3.4.3, implica que ϕ es un ℓ-homomorfismo. □

Obsérvese que si G es un grupo infinito no es difícil comprobar que el cardinal de Ω es, a lo sumo, el cardinal de G.

Bibliografía

[1] Edmund F. O'Connor, John J.; Robertson. Arthur cayley. MacTutor History of Mathematics archive, Universidad de Saint Andrews.

[2] John Wilson. Book Reviews. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21(6):607–608, 11 1989.

[3] Charles Holland. https://bgindependentmedia.org/w-charles-holland/.

[4] Charles Holland. The lattice-ordered groups of automorphisms of an ordered set. *Michigan Mathematical Journal*, 10(4):399–408, 1963.

[5] A.M.W. Glass and J.M. Howie. *Partially Ordered Groups*. Series In Algebra. World Scientific Publishing Company, 1999.

[6] Garrett Birkhoff. *Lattice theory*, volume 25. American Mathematical Soc., 1940.

[7] V.M. Kopytov and N.Ya. Medvedev. *The theory of lattice-ordered groups*, volume 307. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] George Grätzer. *Lattice theory: First concepts and distributive lattices*. Courier Corporation, 2009.

[9] Michael Darnel. *Theory of lattice-ordered groups*. CRC Press, 2021.