Facultad
de
Ciencias

Números transcendentes: un estudio de e y π

(Transcendental numbers: a study of e and π)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
Grado en Matemáticas

Autora: Marta Mazo Corvera
Directora: María de Ujué Etayo Rodríguez
Junio - 2022

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mis padres y a mi hermano por estar siempre y no dejar que tirase la toalla en ningún momento.

A ti, Jose, por ser mi compañero de viaje y no soltarme de la mano nunca. Por fin lo he conseguido.

Aída, Cristina e Irene, gracias por todos los momentos que hemos pasado juntas, tanto dentro como fuera de la facultad. También quiero daros las gracias a vosotros, Antonio y Victor, por vuestra paciencia y por estar siempre dispuestos a explicarme cualquier duda que tuviese. Y por los descansos en la cafetería, que han sido lo único bueno de estudiar en la sala búho.

No te enfades Marina, que para ti también tengo. No hay palabras suficientes en el mundo para agradecerte TODO lo que has hecho por mi, sobre todo estos dos últimos cursos. No sabes lo feliz que me hace que acabemos esta etapa juntas.

También, quisiera dar las gracias a Cristina Pérez, por ser la mejor tutora académica que podría haber tenido y por el apoyo desde que nos conocimos. Si he llegado hasta aquí en parte es gracias a ti.

Por último, pero no menos importante, gracias a mi tutora, Ujué, por darme la oportunidad de hacer este trabajo que tanto he disfrutado haciendo y por haberme ayudado tanto.

Resumen

En este trabajo, introducimos los números transcendentes a partir de la definición de los números algebraicos y probamos que los números e y π cumplen la propiedad de transcendencia basandonos en los resultados clásicos de Hermite y Lindemann. También probaremos otros resultados relacionados, como la irracionalidad de e y π o combinaciones de estos.

Palabras clave: número algebraico, número transcendente, número π y número e.

Abstract

In this work, we introduce the transcendental numbers from the definition of the algebraic numbers and prove that the numbers e and π fulfill the property of transcendence based on the classical results of Hermite and Lindemann. We will also prove other related results, such as the irracionality of e and π or combinations of these.

Key words: algebraic number, transcendental number, number π and number e.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y conceptos básicos

1.1. Contexto histórico

En este trabajo vamos a estudiar la irracionalidad y la transcendencia de los números e y π, cuyas propiedades tardaron en ser demostradas.

Vamos a empezar hablando del número π, debido a que las primeras referencias a este número son de antes de Cristo. Los primeros documentos datan de dos mil años antes de nuestra era, cuando se escribió el conocido *Papiro de Rhind*, que representaba un manual de matemáticas de los antiguos egipcios. Se comenzó a estudiar por el interés en averiguar la naturaleza aritmética del número π y le relacionaron con el problema de la cuadratura del círculo (del que se habla en el Capítulo 4).

Dando un salto de unos miles de años, ya en nuestra era, el matemático inglés William Oughtred en 1647 fue el primero en utilizar la letra griega π para representar la longitud de la circunferencia y no iba mal encaminado, ya que hoy en día utilizamos esta constante para relacionar la longitud de la circunferencia con su diámetro. Oughtred utilizó esta notación porque la letra π es la primera letra de la palabra griega $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\rho\iota\alpha$, que significa circunferencia. Unos años más tarde, en 1706, el profesor inglés William Jones utilizó por primera vez en su obra *Synopsis Palmorioum Matheseos* [9] la notación de la letra griega π, como el número π que conocemos hoy en día. También en 1706, el matemático suizo Leonhard Euler comenzó a utilizar en sus trabajos la notación π para el número $3,141592\ldots$, esta notación se difundió rápidamente y se convirtió en un estándar internacional. Probablemente Jones y Euler comenzaran a usar esta notación sin saber que el otro también la estaba utilizando.

Figura 1.1: Papiro de Rhind. Fuente: [8].

Ahora vamos a hablar un poco del número e. El número e es un número relativamente reciente, ya que no aparecieron las primeras referencias hasta 1619 en una obra sobre logaritmos del matemático escocés John Napier, véase [10].

Una vez que hemos hablado un poco de como aparecieron los números π y e, vamos a hablar de como fueron surgiendo y evolucionando algunas de las demostraciones de las propiedades de las que hablamos en el trabajo. Como la irracionalidad y transcendencia, principalmente.

Casi a mediados del siglo XVIII, más concretamente en 1744, Euler fue el primero en afirmar la existencia de números transcendentes. Pero la primera demostración rigurosa se debe al matemático francés Joseph Liouville quién, en 1844, demuestra un teorema que permite construir números transcendentes mediante fracciones continuas. El matemático alemán Georg Cantor, en 1874, hace una demostración conjuntista de la existencia de números transcendentes, demuestra que el conjunto de los números algebraicos es numerable, mientras que el conjunto de los números transcendentes es no numerable. Esto significa que casi todos los números reales en el sentido de Lebesgue son transcendentes. Pero, sin embargo, la demostración de la transcendencia de los números e, π, e^π y otros números que desempeñan un papel importante en las matemáticas y sus aplicaciones, quedaban como un problema complicado pendiente de resolución (hablamos de esto en el Capítulo 4).

En el año 1766, el matemático alemán Johann Heinrich Lambert demostró por primera vez la irracionalidad de los números e y π, aplicando el desarrollo en fracción continua hallado por Euler del número $\frac{e-1}{2}$, Lambert obtuvo los desarrollos en fracción continua de los números $\tan(x)$ y $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Mediante estos desarrollos demostró la irracionalidad de los números $\tan(x)$ y e^x para $x \in \mathbb{Q}$, cuando $x \neq 0$. De este resultado, se puede concluir que el número π es irracional. Hay que observar que la demostración de Lambert no era rigurosa del todo, en ella faltaba un lema sobre la irracionalidad de una clase de fracciones continuas de un tipo más general. Este defecto se salvó posteriormente gracias al matemático francés Adrien-Marie Legendre, quien demostró también la irracionalidad de π^2.

El matemático francés Fourier, en 1815, publica una demostración de que el número e es irracional, véase [5]. Hubo varios intentos posteriores para demostrar mediante métodos elementales semejantes a los de Fourier que e no es raíz de una ecuación con coeficientes de $\mathbb{Z}$ de grado mayor que 2. Lioville, que fue el autor de la primera demostración del teorema: *El número e no es una irracionalidad cuadrática*, demostró que el número e no puede ser raíz de una ecuación bicuadrática. El matemático alemán Adolf Hurwitz aplicando un método elemental más complicado, demostró que el número e no puede ser raíz de una ecuación cúbica con coeficientes de $\mathbb{Z}$.

La transcendencia del número e fue demostrada por primera vez por el matemático francés Charles Hermite en el año 1873. Esta era la primera demostración de la transcendencia de un número importante en las matemáticas que no resultaba como corolario del teorema de Liouville. Para demostrar la transcendencia del número e hay que demostrar que el número e no es raíz de ninguna ecuación de coeficientes de $\mathbb{Z}$ de ningún grado. Este problema se consiguió resolver solamente al aplicar un método analítico creado por Hermite. Este método estaba basado en las propiedades analíticas de la función exponencial y permitió más adelante demostrar la transcendencia de algunas clases de números relacionados con las funciones exponencial y logarítmica y estudiar sus propiedades aritméticas. El método de Hermite se basa en la identidad,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ [7], establecida por él para la función exponencial, mediante la cual consiguió establecer una relación entre la naturaleza aritmética de los valores de la función exponencial, sus propiedades analíticas y las propiedades aritméticas de los coeficientes de su serie de Taylor.

Desarrollando el método de Hermite, el matemático alemán Ferdinand von Lindemann demostró en 1882 la transcendencia del número π.

Por último, algunos de los resultados más importantes en la teoría de los números transcendentes a principios del siglo XX se deben al matemático ruso Aleksander Guélfond. En el año 1929, presentó una demostración parcial, y en el año 1934 la demostración completa del séptimo problema del matemático alemán David Hilbert, que había sido anunciado por este último, junto a otros 22 problemas abiertos, en el II Congreso Internacional de Matemáticas de París del año 1900. Cuya solución es la siguiente:

Si $\alpha, \beta \in A, \alpha \neq 0, 1,$ y β es irracional, entonces el número α^β es transcendente.

Este enunciado es equivalente a la siguiente proposición:

El logaritmo irracional de un número algebraico con base algebraica es un número transcendente.

Del teorema de Guélfond se deducía como un caso particular de la transcendencia de e^π. En el año 1934, el matemático alemán Theodor Schneider, independientemente de Guélfond, expuso otra demostración del séptimo problema de Hilbert.

1.2. Estructura del trabajo

Ahora vamos a hablar un poco de cómo hemos estructurado el trabajo. Lo hemos dividido en 4 capítulos. En el primero, hacemos un pequeño resumen histórico de los números e y π e introducimos algunos conceptos que utilizaremos en capítulos posteriores.

Los Capítulos 2 y 3 se estructuran de una forma similar. En ambos, se habla de la irracionalidad y transcendencia del número e, en el Capítulo 2, y del número π, en el Capítulo 3.

Y por último, en el Capítulo 4, hablamos de algunos problemas que siguen abiertos relacionados con los números e y π y también algunas curiosidades.

1.3. Conceptos básicos

A lo largo del trabajo la fuente principal ha sido el libro [14], pero también hemos utilizado apuntes que hemos usado a lo largo de la carrera tanto de la rama de Cálculo como pueden ser los apuntes de Ampliación de Cálculo Integral o Variable Compleja, como de la rama de Álgebra como Teoría de Galois o Álgebra Conmutativa.

A continuación, introducimos algunas definiciones vistas a lo largo de la carrera que es conveniente refrescar y otras definiciones nuevas que utilizaremos durante el trabajo. También se introducen teoremas o lemas, algunos llevan demostración, porque nos ayudarán a demostrar algunos de los teoremas que veremos más tarde.

Las definiciones, teoremas y lemas que veremos a continuación, los hemos clasificado en dos subsecciones distintas en función de la rama a la que pertenezcan. Por tanto, tendremos conceptos algebraicos y conceptos analíticos.

1.3.1. Conceptos algebraicos

Definición 1.1 *Se dice que un cuerpo $\mathbb{F}$ es una **extensión** de un cuerpo $\mathbb{K}$ cuando $\mathbb{K}$ es un subcuerpo de $\mathbb{F}$. Se escribe $\mathbb{F}/\mathbb{K}$. Entonces $1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{F}}$ y $\mathbb{F}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. La dimensión del $\mathbb{K}-$espacio vectorial $\mathbb{F}$ se representa por $[\mathbb{F} : \mathbb{K}]$ y se llama **grado de la extensión** $\mathbb{F}/\mathbb{K}$.*

Definición 1.2 *Sea $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ una extensión. Se dice que un elemento $u \in \mathbb{F}$ es **algebraico** sobre $\mathbb{K}$ si u es raíz de algún polinomio no nulo en $\mathbb{K}[x]$. En caso contrario, se dice que u es **transcendente** sobre $\mathbb{K}$.*

Introducimos la notación $\approx$ que hace referencia a un isoformismo entre dos cuerpos.

Teorema 1.3 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y $\mathbb{K}$ un subcuerpo de $\mathbb{F}$. Si $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ es una extensión y $u \in \mathbb{F}$ es algebraico sobre $\mathbb{K}$, se tiene:*

1. $\mathbb{K}[u] = \mathbb{K}(u) \approx \mathbb{K}[x]/(f(x))$ *donde $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, que está determinado unívocamente por las dos condiciones siguientes:*

   a) *es mónico y $f(u) = 0$.*

   b) $f(x)|g(x) \quad \forall g(x) \in \mathbb{K}[x]$ *tal que $g(u) = 0$.*

   O también por la condición

   c) *$f(x)$ es irreducible, mónico y $f(u) = 0$.*

2. $\{1, u, \ldots, u^{n-1}\}$ *es una base de $\mathbb{K}(u)/\mathbb{K}$ y $[\mathbb{K}(u) : \mathbb{K}] = n$.*

Demostración. Véase [4], página 10.

Definición 1.4 *Sean $\mathbb{F}$ y $\mathbb{K}$ cuerpos. Si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ y $u \in \mathbb{F}$ es algebraico sobre $\mathbb{K}$, el polinomio $f(x)$ determinado unívocamente por u en las condiciones del Teorema 1.3, se llama* ***polinomio mínimo*** *de u sobre $\mathbb{K}$. Se define el grado de u sobre $\mathbb{K}$ como el grado del polinomio $f(x)$.*

Definición 1.5 *Sea $\mathbb{V}$ un anillo conmutativo con unidad y*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \tag{1.1}$$

unas indeterminadas. Un polinomio

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{V}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \tag{1.2}$$

se llama ***polinomio simétrico en las indeterminadas*** *(1.1), si no varía para cualquier permutación de estas indeterminadas.*

Definición 1.6 *Llamemos por*

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \\ \sigma_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ &\cdots \\ \sigma_n &= \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

a las ***funciones simétricas elementales en las indeterminadas*** *(1.1), las cules, salvo el signo, son los coeficientes del polinomio $(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$.*

Definición 1.7 *Un polinomio*

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \delta_1, \ldots, \delta_s) \in \mathbb{V}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \delta_1, \ldots, \delta_s] \tag{1.4}$$

se llama ***polinomio simétrico en varios sistemas de indeterminadas***

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \delta_1, \ldots, \delta_s, \tag{1.5}$$

si no varía para cualquier permutación de las indeterminadas en cada uno de estos sistemas.

El teorema que trata sobre los polinomios simétricos se generaliza al caso de varios sistemas de indeterminadas de la siguiente forma:

Teorema 1.8 *Todo polinomio simétrico (1.4) en varios sistemas de indeterminadas (1.5) se expresa unívocamente en la forma*

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \delta_1, \ldots, \delta_s) = g[\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots, \eta_1, \ldots, \eta_s],$$

donde

$$g[\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots, \eta_1, \ldots, \eta_s] \in \mathbb{V}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots, \eta_1, \ldots, \eta_s]$$

es un polinomio en los polinomios simétricos elementales en las indeterminadas (1.5).

Demostración. Véase [14], página 30.

Lema 1.9 *Sean $\alpha, \ldots, \delta$ unos números algebraicos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean (1.5) los sistemas de números conjugados con $\alpha, \ldots, \delta$ sobre $\mathbb{K}$, respectivamente. Sea*

$$f = f(x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \delta_1, \ldots, \delta_s) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \delta_1, \ldots, \delta_s], \;\; k \geq 0,$$

y supongamos que f, como polinomio en las indeterminadas (1.5) con coeficientes de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k]$, es un polinomio simétrico en los sistemas de indeterminadas (1.5). Entonces

$$f \equiv f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k],$$

y para $k = 0, \;\; f \in \mathbb{K}$.

Demostración. Supongamos que f es un polinomio en las indeterminadas (1.5) con los coeficientes en el anillo $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k]$. Por tanto, como f es un polinomio simétrico en varios sistemas de indeterminadas (1.5) y los polinomios simétricos elementales

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots, \eta_1, \ldots, \eta_s$$

en las indeterminadas (1.5) coinciden salvo el signo con los coeficientes de los polinomios mínimos de los números $\alpha, \ldots, \delta$ sobre $\mathbb{K}$ y según el Teorema 1.8, f es un polinomio de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_k]$ y para $k = 0, \;\; f \in \mathbb{K}$. □

Lema 1.10 *Sean $\alpha, \ldots, \delta$ unos números enteros algebraicos y sean los números (1.5) sus conjugados respectivos. Sea también*

$$f = f(x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \delta_1, \ldots, \delta_s) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \delta_1, \ldots, \delta_s], \;\; k \geq 0,$$

y supongamos que f, como polinomio en las indeterminadas (1.5) con coeficientes de $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$, es un polinomio simétrico en varios sistemas de indeterminadas (1.5). Entonces

$$f \equiv f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k],$$

y para $k = 0, \;\; f \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Supongamos que f es un polinomio en las indeterminadas (1.5) con los coeficientes en el anillo $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$. Por tanto, como f es un polinomio simétrico en varios sistemas de indeterminadas (1.5) y los polinomios simétricos elementales

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots, \eta_1, \ldots, \eta_s$$

en las indeterminadas (1.5) coinciden salvo el signo con los coeficientes de los polinomios mínimos de los números $\alpha, \ldots, \delta$ sobre $\mathbb{Z}$ y según el Teorema 1.8, f es un polinomio de $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$ y para $k = 0, \;\; f \in \mathbb{Z}$. □

Definición 1.11 *Llamamos $\mathbb{Z}_A$ al anillo de todos los números enteros algebraicos.*

Teorema 1.12 *Para que un número $\epsilon \in \mathbb{Z}_A$ sea una unidad, es necesario y suficiente que el producto de todos sus conjugados sea igual a ± 1.*

Demostración. Supongamos que $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son los números conjugados con la unidad ϵ. Como $\epsilon \in \mathbb{Z}_A$, entonces $\epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_n \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, tenemos que $\epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_n \in \mathbb{Z}$ es unidad, porque es el producto de unidades. También, sabemos que ± 1 son las únicas unidades que tiene el anillo $\mathbb{Z}$, por tanto $\epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_n = \pm 1$.

Recíprocamente, supongamos que $\epsilon_1 \cdot \ldots \cdot \epsilon_n = \pm 1$ y que $\epsilon = \epsilon_1 \in \mathbb{Z}_A$, entonces tenemos que $\frac{1}{\epsilon} = \pm \epsilon_2 \cdot \ldots \cdot \epsilon_n \in \mathbb{Z}_A$, porque $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \mathbb{Z}_A$ por ser conjugados con el número $\epsilon \in \mathbb{Z}_A$. Entonces, por la definición de unidad, ϵ es una unidad. $\square$

Definición 1.13 *Se llama **fracción continua** a la expresión*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

*donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $a_k \in \mathbb{N},\ k = 1, \ldots, n$. Los elementos $a_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$, se llaman **elementos de la fracción continua**.*

1.3.2. Conceptos analíticos

Definición 1.14 *Sea Ω una región de $\mathbb{C}$. Decimos que una **función** $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es **analítica** en Ω si existe $f'(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Por lo tanto, ser analítica significa ser derivable no solo en un punto o una recta, sino en todo un abierto.

Definición 1.15 *Decimos que una **función** $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es **entera** si es analítica en todo $\mathbb{C}$.*

Teorema 1.16 ***(Teorema Integral de Cauchy.)*** *Sea Ω una región de $\mathbb{C}$. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica con Ω simplemente conexo. Sea γ un camino cerrado (que puede contener autointersecciones) contenido en Ω. Entonces,*

$$\int_\gamma f dz = 0.$$

Teorema 1.17 ***(Principio del Módulo Máximo)*** *Sea Ω una región de $\mathbb{C}$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica. Supongamos que existe $z_0 \in \Omega$ en que $|f(z)|$ alcanza su máximo. Entonces, f es constante en Ω.*

Teorema 1.18 *Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces existe algún y de $[a, b]$ tal que $f(y) \leq f(x)$ para todo x de $[a, b]$.*

Definición 1.19 *Para cualquier número real $p > 0$, definimos*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

*Llamamos a Γ **función Gamma de Euler**.*

Proposición 1.20 *Para n entero positivo* $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Demostración.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \underset{1}{=} \left[-x^{n-1}e^{-x}\right]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx = (n-1)\Gamma(n-1).$$

$$u = x^{n-1} \longrightarrow du = (n-1)x^{n-2}dx \qquad dv = e^{-x}dx \longrightarrow v = -e^{-x}.$$

$$\Gamma(n-1) = \int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx \underset{2}{=} \left[-x^{n-2}e^{-x}\right]_0^\infty + (n-2)\int_0^\infty x^{n-3}e^{-x}dx = (n-2)\Gamma(n-2).$$

$$u = x^{n-2} \longrightarrow du = (n-2)x^{n-3}dx \qquad dv = e^{-x}dx \longrightarrow v = -e^{-x}.$$

entonces obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots &= (n-1)(n-2)\ldots \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \\ &= (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!.\end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1.$$

□

[1]Integramos por partes.
[2]Integramos por partes.

Capítulo 2

El número e

En este capítulo, vamos a demostrar que el número e cumple una serie de propiedades como son la irracionalidad y la transcendencia, y para ello nos vamos a apoyar en definiciones y resultados vistos en el capítulo anterior. También, vamos a demostrar cómo se expresa el número e como una serie de potencias.

A continuación, vamos a dar la definición del número e.

Definición 2.1 *Sea*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

2.1. El número e como serie de potencias

En primer lugar, vamos a enunciar un teorema que utilizaremos en la demostración.

Teorema 2.2 *Si r es un número racional positivo y tenemos una sucesión $(x_n) \in \mathbb{R}$ definida como*

$$x_n = \frac{1}{n^r}.$$

Entonces, $(x_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Véase [13].

A continuación, vamos a dar una caracterización del número e.

Proposición 2.3 *El número e se puede expresar de la siguiente forma:*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Demostración. En primer lugar, sabemos que el número e se puede expresar como un límite:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y queremos llegar a que

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Comenzamos la demostración utilizando el Binomio de Newton en la expresión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{n^2-n}{n^2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots \\
&+ \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\cdots\frac{n-(n-1)}{n}\cdot\frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \cdots \\
&+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Ahora, cogemos un término cualquiera de la suma anterior

$$x = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}.$$

Ahora, consideramos la sucesión

$$(x_n) = \frac{1}{n}$$

y por el Teorema 2.2 podemos concluir que cuando $n \to \infty$, $(x_n) \to 0$.

Por último, aplicando este último resultado al término x que habiamos cogido antes:

$$x = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} \to \frac{1}{k!} \quad \text{cuando} \quad n\to\infty.$$

Y esto aplicado a todos los términos obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

que es el resultado al que queríamos llegar. □

2.2. Irracionalidad del número e

La demostración que explicamos a continuación pertenece al matemático francés Fourier y estaba contenida en su curso de análisis, *Mélanges d'analyse algébrique* [5], que fue publicado en 1815.

Teorema 2.4 *El número e es irracional.*

Demostración. En primer lugar, escribimos el número e como una serie

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

y ahora esta serie la dividimos en dos

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = S_n + T_n.$$

A continuación, vamos a desarrollar la serie T_n

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} + \cdots\right] < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{2}{(n+1)!} \end{aligned}$$

por lo tanto, podemos concluir que

$$0 < T_n < \frac{2}{(n+1)!} \qquad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Definimos las siguientes series:

$$a_n = n!\ S_n \;\; \text{y} \;\; b_n = n!\ T_n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

De la definición de S_n y de las definiciones (2.2) y de la desigualdad (2.1) obtenemos

$$a_n = n!S_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = n!\left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right] = n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + 1 \Rightarrow a_n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = n!T_n < n!\frac{2}{(n+1)!} = \frac{2\cdot n!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{2}{n+1} < 1 \qquad \text{para} \quad n \geqslant 2$$

por lo tanto,

$$a_n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 \;<\; b_n \;<\; 1 \qquad \text{con} \quad n \geqslant 2. \tag{2.3}$$

De las condiciones (2.3) obtenemos que

$$n!\ e = n!(S_n + T_n) = a_n + b_n \notin \mathbb{Z}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. De esto podemos deducir que el número e es irracional: supongamos que es racional, entonces podemos escribir $e = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Tomando $n = q$ obtenemos que $n!\ e \in \mathbb{Z}$, pero ya habiamos probado que $n!\ e \notin \mathbb{Z}$, por lo tanto el número e es irracional. □

Para demostrar que el número e es irracional, también podemos utilizar que el número e^{-1} es irracional.

Corolario 2.5 *El número e^{-1} es irracional.*

Aunque al ser un corolario no necesita demostración, a continuación damos una demostración alternativa de que el número e es irracional y similar a la del Teorema 2.4.

Demostración. Como en el caso de la demostración del Teorema 2.4 escribimos el número e^{-1} en forma de serie.

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ahora dividimos en dos la serie,

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \alpha_n + \beta_n$$

y consideramos

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1}\beta_n &= (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\left[(-1)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \dots\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 - \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \dots\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \underset{3}{=} \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{2}{3} < \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$$0 < (-1)^{n+1}\beta_n < \frac{1}{(n+1)} \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Definimos las series

$$\gamma_n = n!\alpha_n \;\; \text{y} \;\; \delta_n = n!\beta_n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Aplicando (2.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\gamma_n = n!\alpha_n &= n!\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right] \\
&= \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \dots + (-1)^n \Rightarrow \gamma_n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$$\delta_n \;=\; n!\beta_n \;<\; n!\frac{1}{(n+1)!(-1)^{n+1}} \;\Rightarrow (-1)^{n+1}\delta_n < \frac{1}{(n+1)} \;\text{ con } \; n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

[3]La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \frac{2}{3}$ ha sido calculada utilizando el Software matemático WolframAlpha, [15].

Por lo tanto, tenemos

$$n!\ e^{-1} = n!(\alpha_n + \beta_n) = \gamma_n + \delta_n \notin \mathbb{Z}.$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. De esto podemos deducir que el número e^{-1} es irracional: supongamos que es racional, entonces podemos escribir $e^{-1} = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Tomando $n = q$ obtenemos que $n!\ e^{-1} \in \mathbb{Z}$, pero ya habiamos probado que $n!\ e^{-1} \notin \mathbb{Z}$.

Y por tanto, podemos concluir que los números e y e^{-1} son números irracionales. $\square$

Una vez que hemos visto que los números e y e^{-1} son irracionales, vamos a ver que el número e no es una irracionalidad cuadrática, es decir, el número e no es solución de ninguna ecuación de segundo grado con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.6 *El número e no es una irracionalidad cuadrática.*

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que si lo es, entonces

$$ae^2 + be + c = 0, \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a > 0, \quad c \neq 0, \tag{2.7}$$

por lo tanto,

$$ae + b + ce^{-1} \in \mathbb{Z} \underset{b \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} ae + ce^{-1} \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Ahora utilizando las notaciones anteriores, definamos los siguientes números:

$$E_n = n!(ae + ce^{-1}) = R_n + P_n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.9}$$

donde

$$R_n = aa_n + c\gamma_n \quad \text{y} \quad P_n = ab_n + c\delta_n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

y a_n, b_n, γ_n y δ_n definidas en las demostraciones del Teorema (2.4) y del Corolario (2.5).

De las condiciones (2.3), (2.6), (2.7) y (2.8), tenemos que

$$R_n = aa_n + c\gamma_n \in \mathbb{Z}, \tag{2.11}$$

porque sabemos que a y $c \in \mathbb{Z}$ de (2.7), $a_n \in \mathbb{N}$ por (2.3) y $\gamma_n \in \mathbb{N}$ por (2.6), y también tenemos que

$$E_n = n!(ae + ce^{-1}) \in \mathbb{Z}, \tag{2.12}$$

porque hemos supuesto que $ae + ce^{-1} \in \mathbb{Z}$ y es trivial que $n! \in \mathbb{N}$.

Como acabamos de ver que E_n y $R_n \in \mathbb{Z}$, podemos concluir entonces que $P_n \in \mathbb{Z}$, pero esto es absurdo y es lo que vamos a probar a continuación.

Ahora vamos a trabajar con P_n y lo primero que vamos a hacer es acotarlo.

$$\begin{aligned}|P_n| &= |ab_n + c\delta_n| \leq |ab_n| + |c\delta_n| = |a||b_n| + |c||\delta_n| \underset{4}{\leq} |a|\left|\frac{2}{n+1}\right| + |c|\left|\frac{1}{n+1}\right| \\ &\underset{5}{=} |a|\frac{2}{n+1} + |c|\frac{1}{n+1} = \frac{2|a|+|c|}{n+1} \qquad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $n \geq 2|a| + |c|$ se verifica la desigualdad

$$|P_n| = \frac{2|a|+|c|}{n+1} = \frac{2|a|+|c|}{2|a|+|c|+1} < 1. \tag{2.13}$$

De las igualdades (2.9) y (2.10), de las condiciones (2.11) y (2.12) y de la desigualdad (2.13), deducimos que para todo $n \geq 2|a| + |c|$ se cumple que

$$|P_n| = 0. \tag{2.14}$$

Por lo tanto, si ahora demostramos que existe una sucesión infinita de valores de n tales que $P_n \neq 0$, entonces la condición anterior (2.14) será contradictoria y habremos demostrado el teorema.

Tenemos que,

$$\begin{aligned}nP_{n-1} - P_n &= n(ab_{n-1} + c\delta_{n-1}) - (ab_n + c\delta_n) = a(nb_{n-1} - b_n) + c(n\delta_{n-1} - \delta_n) \\ &= a \cdot 1 + c(-1)^n = a + c(-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\end{aligned} \tag{2.15}$$

donde

$$b_n = n!T_n = n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \quad \text{y} \quad \delta_n = n!\beta_n = n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned}nb_{n-1} - b_n &= n \cdot (n-1)!\sum_{k=n-1+1}^{\infty}\frac{1}{k!} - n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = n!\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!} - n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \\ &= n!\left[\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right] = n!\left[\frac{1}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right] = n!\frac{1}{n!} \\ &= 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

---

[4]Utilizamos $|b_n| \leq \left|\frac{2}{n+1}\right|$ y $|\delta_n| \leq \left|\frac{1}{n+1}\right|$.

[5]Como $\left|\frac{2}{n+1}\right|$ y $\left|\frac{1}{n+1}\right|$ son números positivos podemos quitar los valores absolutos.

$$\begin{aligned}
n\delta_{n-1} - \delta_n &= n \cdot (n-1)! \sum_{k=n-1+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= n! \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right] \\
&= n! \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right] = n! \frac{(-1)^n}{n!} \\
&= (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

como podemos ver en (2.15).

De (2.15) llegamos a que al menos uno de los tres números P_{n-1}, P_n, P_{n+1} es distinto de cero. En caso contario, tendríamos que $a + c = 0$ y $a - c = 0$ y por tanto $a = 0$ y $c = 0$, lo cual es absurdo por (2.7). Y con esto ya hemos demostrado el teorema. $\square$

2.3. Transcendencia del número *e*

En este apartado hemos seguido la demostración que se encuentra en [14], páginas 183-187. En el libro [16] se da también una demostración muy similar a la que damos en esta sección.

Teorema 2.7 *El número e es transcendente.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que el número e es algebraico. Entonces, este número será raíz de una ecuación de la siguiente forma

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = 0 \qquad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \qquad k \in [0, n]. \tag{2.16}$$

Ahora vamos a elegir las aproximaciones racionales a las potencias del número e de la siguiente forma:

$$e^k = \frac{M_k + \epsilon_k}{M_0}, \quad k \in [1, n], \quad M_0 \neq 0. \tag{2.17}$$

donde $M_k \in \mathbb{Z}$, esto lo demostraremos más adelante, y ϵ_k , con $k \in [1, n]$, son números lo suficientemente pequeños que elegimos a continuación.

$$M_0 = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}((x-1)\ldots(x-n))^p e^{-x} dx}{(p-1)!}, \tag{2.18}$$

$$M_k = e^k \int_k^{\infty} \frac{x^{p-1}((x-1)\ldots(x-n))^p e^{-x} dx}{(p-1)!}, \tag{2.19}$$

$$\epsilon_k = e^k \int_0^{k} \frac{x^{p-1}((x-1)\ldots(x-n))^p e^{-x} dx}{(p-1)!}, \tag{2.20}$$

donde p es un número primo suficientemente grande.

De las definiciones (2.18), (2.19) y (2.20), se tiene:

$$\begin{aligned} M_k + \epsilon_k &= e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p e^{-x} dx}{(p-1)!} + e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p e^{-x} dx}{(p-1)!} \\ &= e^k \left[\int_k^\infty \frac{x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p e^{-x} dx}{(p-1)!} + \int_0^k \frac{x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p e^{-x} dx}{(p-1)!} \right] \\ &= e^k \int_0^\infty \frac{x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p e^{-x} dx}{(p-1)!} = e^k M_0, \qquad k \in [1, n]\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por tanto, las igualdades (2.17) se cumplen formalmente si $M_0 \neq 0$.

Ahora sustituyendo los segundos miembros de las igualdades (2.17) en la ecuación (2.16) obtenemos:

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \left(\frac{M_1 + \epsilon_1}{M_0} \right) + a_2 \left(\frac{M_2 + \epsilon_2}{M_0} \right) + \dots + a_n \left(\frac{M_n + \epsilon_n}{M_0} \right) = 0 \\ & \Rightarrow a_0 M_0 + a_1 (M_1 + \epsilon_1) + a_2 (M_2 + \epsilon_2) + \dots + a_n (M_n + \epsilon_n) = 0 \\ & \Rightarrow (a_0 M_0 + a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_n M_n) + (a_1 \epsilon_1 + a_2 \epsilon_2 + \dots + a_n \epsilon_n) = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Hemos tomado los números enteros $M_1, M_2, \dots, M_n$ de tal modo que son divisibles por un número primo p lo suficientemente grande, que cumple que $p > |a_0|$, y que el número entero M_0 no es divisible por p, todo esto lo demostraremos luego. Por tanto, el primer paréntesis del primer miembro de la igualdad (2.22) es un número entero distinto de cero, ya que el primer sumando $a_0 M_0$ no es divisible por p, mientras que el resto de sumandos si que son divisibles por p.

Los números $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ los hemos elegido tan pequeños que cumplan la desigualdad

$$|a_1 \epsilon_1 + a_2 \epsilon_2 + \dots + a_n \epsilon_n| < 1 \tag{2.23}$$

que más tarde probaremos que se cumple.

Con todo esto, veremos que la igualdad (2.22) es contradictoria, porque la suma de un entero no nulo y de un número menor que uno en valor absoluto, no puede ser igual a cero. Y con esto habremos probado el teorema.

Ahora vamos a comprobar que se cumplen los requisitos antes mencionados.

Vamos a expresar el polinomio $x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p$, utilizando el Binomio de Newton, de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
&x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p = x^{p-1}(x-1)^p\dots(x-n)^p\\
&= x^{p-1}\left(x^p - 1^p + \sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}x^j(-1)^{p-j}\right)\dots\left(x^p - n^p + \sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}x^j(-n)^{p-j}\right)\\
&= x^{p-1}(-1^p)\dots(-n^p) + x^{p-1}\left(x^p + \sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}x^j(-1)^{p-j}\right)\dots\left(x^p + \sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j}x^j(-n)^{p-j}\right)\\
&= (-1)^{np}(n!)^p x^{p-1} + \sum_{s=p+1}^{(n+1)p} c_{s-1}x^{s-1} = ((-1)^p)^n(n!)^p x^{p-1} + \sum_{s=p+1}^{(n+1)p} c_{s-1}x^{s-1}\\
&= (-1)^n(n!)^p x^{p-1} + \sum_{s=p+1}^{(n+1)p)} c_{s-1}x^{s-1}, \quad c_{s-1}\in\mathbb{Z}, \quad s\in[p,(n+1)p-1]\,.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Hemos aplicado que $(-1)^p = -1$, ya que p es un número primo suficientemente grande, por tanto p es un número impar.

Ahora sustituyendo el segundo miembro de la igualdad (2.24) en la integral (2.18) y utilizando la Definición 1.19 y la Proposición 1.20 de la función Gamma de Euler, veremos que M_0 no es divisible por p, obtenemos

$$
\begin{aligned}
M_0 &= (-1)^n(n!)^p\frac{\Gamma(p)}{(p-1)!} + \sum_{s=p+1}^{(n+1)p} c_{s-1}\frac{\Gamma(s)}{(p-1)!} = (-1)^n(n!)^p + \sum_{s=p+1}^{(n+1)p} c_{s-1}\frac{(s-1)!}{(p-1)!}\\
&= (-1)^n(n!)^p + c_p p + c_{p+1}p(p+1) + c_{p+2}p(p+1)(p+2) + \dots\\
&= (-1)^n(n!)^p + p(c_p + c_{p+1}(p+1) + c_{p+2}(p+1)(p+2) + \dots)\\
&= (-1)^n(n!)^p + pA, \qquad A\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Tomemos $p > \text{máx}(|a_0|, n)$. Entonces, $M_0 \in \mathbb{Z}$ y a_0M_0 no es divisible por p, y por lo tanto, $M_0 \neq 0$.

Continuamos haciendo un cambio de variable en la integral (2.19) de la siguiente forma:

$$x = k + u, \quad dx = du,$$

obtenemos,

$$
\begin{aligned}
M_k &= e^k\int_0^\infty \frac{(k+u)^{p-1}((k+u-1)\dots(k+u-n))^p e^{-(k+u)}du}{(p-1)!}\\
&= \int_0^\infty \frac{(k+u)^{p-1}((k+u-1)\dots(k+u-n))^p e^{-u}du}{(p-1)!}, \qquad k\in[1,n].
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
&(k+u)^{p-1}((k+u-1)\dots(k+u-n))^p \\
&= \left(\sum_{j=1}^{p-1}\binom{p-1}{j}u^j k^{p-1-j}\right)((u+(k-1))\dots(u+(k-n)))^p \\
&= \left(u^{p-1}+\sum_{j=1}^{p-2}\binom{p-1}{j}u^j k^{p-1-j}\right)((u+(k-1))\dots(u+(k-n)))^p \\
&= \sum_{s=p+1}^{(n+1)p} d_{s-1}u^{s-1}, \quad d_{s-1}\in\mathbb{Z}, \quad s\in[p,(n+1)p-1].
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Sustituyendo la igualdad (2.26) en la integral (2.25), aplicando la igualdad (2.24) y utilizando la Definición 1.19 y la Proposición 1.20 de la función Gamma de Euler, obtenemos

$$
\begin{aligned}
M_k &= \int_0^\infty \frac{(k+u)^{p-1}((k+u-1)\dots(k+u-n))^p e^{-u}du}{(p-1)!} = \int_0^\infty \frac{\sum_{s=p+1}^{(n+1)p} d_{s-1}u^{s-1}e^{-u}du}{(p-1)!} \\
&\underset{6}{=} \sum_{s=p+1}^{(n+1)p} \frac{d_{s-1}}{(p-1)!}\int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}du = \sum_{s=p+1}^{(n+1)p} d_{s-1}\frac{\Gamma(s)}{(p-1)!} = \sum_{s=p+1}^{(n+1)p} d_{s-1}\frac{(s-1)!}{(p-1)!} \\
&= d_p p + d_{p+1}p(p+1) + d_{p+2}p(p+1)(p+2) + \dots \\
&= p(d_p + d_{p+1}(p+1) + d_{p+2}(p+1)(p+2) + \dots) = pB, \qquad B\in\mathbb{Z}, \quad k\in[1,n].
\end{aligned}
$$

Por tanto, hemos probado que todos los M_k son divisibles por p y en consecuencia, son también números enteros.

Por último, debido a que el polinomio y la función exponencial son funciones continuas, por el Teorema 1.18 existen unas constantes c y $g \in \mathbb{R}$, que no dependen del número p elegido.

$$
|x(x-1)\dots(x-n)| \le c, \qquad x\in[0,n], \tag{2.27}
$$

$$
|(x-1)\dots(x-n)e^{-x+k}| \le g, \qquad x\in[0,n], \qquad k\in[1,n]. \tag{2.28}
$$

Aplicando las desigualdades (2.27) y (2.28) para la acotación de las integrales (2.20), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
|\epsilon_k| &= \left| e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p e^{-x}dx}{(p-1)!}\right| = \left|\int_0^k \frac{x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^p e^{-x+k}dx}{(p-1)!}\right| \\
&\le g\left|\int_0^k \frac{x^{p-1}((x-1)\dots(x-n))^{p-1}dx}{(p-1)!}\right| = g\left|\int_0^k \frac{(x(x-1)\dots(x-n))^{p-1}dx}{(p-1)!}\right| \\
&\le g\frac{c^{p-1}}{(p-1)!}\int_0^k dx = kg\frac{c^{p-1}}{(p-1)!} \le ng\frac{c^{p-1}}{(p-1)!}, \qquad k\in[1,n].
\end{aligned}
$$

[6]Como las integrales son finitas, es lo mismo la integral de la suma que la suma de las integrales.

Como $\dfrac{c^{p-1}}{(p-1)!} \to 0$ cuando $p \to \infty$, entonces los números $\epsilon_k \to 0$ cuando $p \to \infty$. Por lo tanto, existe un p_0 tal que para cualquier $p \geq p_0$ se verifica la desigualdad (2.23).

Fijando un número primo $p > \text{máx}(p_0, |a_0|, n)$, obtenemos que todos los números M_k y ϵ_k quedan elegidos cumpliendo las condiciones antes mencionadas. Y con esto queda demostrado el teorema. $\square$

Capítulo 3

El número π

En este capítulo, vamos a demostrar que el número π cumple una serie de propiedades como son la irracionalidad y la transcendencia, y para ello nos vamos a apoyar en definiciones y resultados vistos en el Capítulo 1. También, vamos a demostrar cómo se expresa el número π como una serie de potencias.

En primer lugar, vamos a definir el número π.

Definición 3.1 *Llamamos π al número que se obtiene al dividir la longitud de una circunferencía y su diámetro en geometría euclídea.*

3.1. El número π como serie de potencias

En este apartado vamos de demostrar la serie de Leibniz, ya que es una de las series más importantes en la que aparece el número π.

Proposición 3.2 *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Demostración. En primer lugar, consideremos la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Para $|x| < 1$, la suma $(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}$ es la suma de los términos restantes de la serie geométrica. Como en la ecuación no utilizamos series infinitas y se cumple la serie para cualquier $x \in \mathbb{R}$, entonces podemos integrar ambos lados de la igualdad entre 0 y 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\right) dx.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \underset{7}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)}du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{\cos^2(u)+\sin^2(u)}{\cos^2(u)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)}du$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(u)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(u)}du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} du = [u]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

- Cuando $x = 0$: $\tan(u) = 0$, entonces $u = \tan^{-1}(0) = 0$.
- Cuando $x = 1$: $\tan(u) = 1$, entonces $u = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\right) dx$$
$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 x^4dx - \int_0^1 x^6dx + \int_0^1 x^8dx - \cdots + (-1)^n \int_0^1 x^{2n}dx$$
$$+ (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$
$$= [x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 + \left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1 - \cdots + (-1)^n \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx.$$

Cuando $n \to \infty$, la suma de los términos tiende a la serie de Leibniz, excepto la integral. Vamos a ver que acotando la integral, esta tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx < \int_0^1 x^{2n+2}dx = \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+3} \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Y con esto acabamos de demostrar la serie de Leibniz.

3.2. Irracionalidad del número π

En este apartado, demostraremos que el número π es irracional. Para ello seguimos la demostración que aparece en [14], páginas 180-183. En [16], páginas 326 y 327, aparece otra demostración de que π es un número irracional diferente a la que aportamos en este apartado.

A continuación, enunciamos y demostramos un lema que utilizaremos después en la demostración de que π es un número irracional.

En la demostración de este lema utilizamos las notaciones $\frac{d}{dx}$ y $F'(x)$ para referirnos a la primera derivada de un polinomio en función de la variable x. También, utilizamos la notación $f^{(n)}(x)$ para referirnos a la derivada $n-$ésima en función de la variable x.

[7] Hacemos el siguiente cambio de variable: $x = \tan(u) = \frac{\sin(u)}{\cos(u)}$ y
$$dx = \frac{\cos(u) \cdot \cos(u) - \sin(u) \cdot (-\sin(u))}{\cos^2(u)}du = \frac{\cos^2(u) + \sin^2(u)}{\cos^2(u)}du = \frac{1}{\cos^2(u)}du.$$

Lema 3.3 *Sea $f(x)$ un polinomio arbitrario de $\mathbb{R}[x]$. Definamos*

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \qquad \textit{con} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Entonces se cumple

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx = F(\pi) + F(0). \tag{3.1}$$

Demostración. En primer lugar, $F(x)$ es claramente un polinomio ya que es la suma de polinomios y a partir de un cierto n, $f^{(n)}(x) = 0$.

Ahora, veamos que se cumple $\frac{d}{dx}(F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)) = f(x)\sin(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)) &= F''(x)\sin(x) + F'(x)\cos(x) - (F'(x)\cos(x) - F(x)\sin(x)) \\ &= F''(x)\sin(x) + F(x)\sin(x) \\ &= (F''(x) + F(x))\sin(x) \underset{8}{=} f(x)\sin(x).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ahora hacemos la integral

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx &= \int_0^\pi \left(\frac{d}{dx}(F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x))\right)dx \\ &= [F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)]_0^\pi = F(\pi) + F(0).\end{aligned}$$

□

Una vez que hemos demostrado el lema anterior, procedemos a demostrar que el número π es irracional.

Teorema 3.4 *El número π es irracional.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $\pi \in \mathbb{Q}$, entonces podemos escribir π de la siguiente forma:

$$\pi = \frac{a}{b} \qquad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Ahora definamos el polinomio

$$f(x) = \frac{b^n}{n!}x^n(\pi - x)^n \tag{3.3}$$

8

$$\left.\begin{aligned}F(x) &= f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \ldots \\ F''(x) &= f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - f^{(8)}(x) + \ldots\end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x) + F''(x) = f(x)$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b^n}{n!}x^n(\pi - x)^n = \frac{1}{n!}x^n(b\pi - bx)^n = \frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n \\ &\underset{9}{=} \frac{1}{n!}x^n\left[a^n - a^{n-1}bx + a^{n-2}b^2x^2 - \ldots + (-1)^n b^n x^n\right] \\ &= \frac{1}{n!}\left[a^n x^n - a^{n-1}bx^{n+1} + a^{n-2}b^2x^{n+2} - \ldots + (-1)^n b^n x^{2n}\right] \\ &= \frac{1}{n!}\left[c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \ldots + c_{2n}x^{2n}\right], \quad c_k \in \mathbb{Z}, \quad n \leq k \leq 2n, \end{aligned}$$

De (3.3) tenemos que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Para cualquier $s \in \mathbb{Z}^+$

$$(n+s)\ldots(2+s)(1+s) = \frac{(n+s)!}{s!} = \binom{n+s}{s} n!$$

es divisible por $n!$, porque $\binom{n+s}{s}$ es un número combinatorio y por lo tanto es un número entero. Tenemos que $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ para $k \in [n, 2n]$, luego

$$f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \;\; \text{para} \;\; k = 0, 1, \ldots, n, \ldots, \tag{3.4}$$

pero $f(x) = f(\pi - x)$. Por lo tanto, tenemos que $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$ para $k = 0, 1, \ldots$ de donde obtenemos que

$$f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

Por tanto, como

$$F(0) = f(0) - f''(0) + f^{(4)}(0) - f^{(6)}(0) + \cdots \in \mathbb{Z}$$

por (3.4) y

$$F(\pi) = f(\pi) - f''(\pi) + f^{(4)}(\pi) - f^{(6)}(\pi) + \cdots \in \mathbb{Z}$$

por (3.5), entonces podemos concluir que $F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}$.

Ahora veamos que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx \notin \mathbb{Z}$ y la igualdad (3.1) no se cumplirá y habremos demostrado el teorema.

$f(x) > 0$ para $0 < x < \pi$. Por lo tanto, como $f(x)$ es continua se verifica la desigualdad $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx > 0$.

[9] Utilizamos el Binomio de Newton.

Por otro lado, tenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)dx \underset{10}{\leq} \int_0^{\pi} f(x)dx &= \int_0^{\pi} \frac{b^n}{n!}x^n(\pi - x)^n dx = \frac{b^n}{n!}\int_0^{\pi} x^n(\pi-x)^n dx \\
&\underset{11}{=} \frac{b^n}{n!}\int_0^{\pi} x^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\pi^k x^{n-k}dx \\
&= \frac{b^n}{n!}\int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\pi^k x^{2n-k}dx \\
&\underset{12}{=} \frac{b^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\pi^k \int_0^{\pi} x^{2n-k}dx \\
&= \frac{b^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\pi^k \left[\frac{x^{2n-k+1}}{2n-k+1}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{b^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\pi^k \frac{\pi^{2n-k+1}}{2n-k+1} = \frac{b^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{\pi^{2n+1}}{2n-k+1} \\
&= \frac{b^n\cdot\pi^{2n+1}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{2n-k+1} \underset{13}{=} \frac{b^n\cdot\pi^{2n+1}}{n!}\cdot\frac{2^{-2n-1}n!\sqrt{\pi}}{(n+\frac{1}{2})!} \underset{14}{<} \frac{b^n\cdot\pi^{2n+1}}{n!},
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{b^n\cdot\pi^{2n+1}}{n!} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, existe un n_0 tal que se verifica la desigualdad

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)dx < 1$$

para cualquier $n \geq n_0$.

Por lo tanto, se verifica $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)dx \notin \mathbb{Z}$ y la igualdad (3.1) resulta contradictoria y el teorema queda demostrado. □

3.3. Transcendencia del número π

En este apartado demostraremos que el número π es transcendente. Para ello seguimos la demostración que aparece en [14], páginas 187-196.

---

[10] $\sin(x)$ en $[0,\pi]$ es positivo, por eso lo podemos acotar por 1.

[11] Utilizamos el Binomio de Newton.

[12] Como todas las integrales convergen, porque estamos integrando polinomios en un intervalo finito, es lo mismo la integral de las sumas que la suma de las integrales.

[13] La serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{2n-k+1} = \frac{2^{-2n-1}n!\sqrt{\pi}}{(n+\frac{1}{2})!}$ ha sido calculada utilizando el Software matemático WolframAlpha, [15].

[14] La serie queda acotada por 1, ya que $\dfrac{n!}{(n+\frac{1}{2})!} < 1$ y también $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} < 1$.

En esta demostración va a ser muy importante la identidad de Euler, $e^{i\pi}+1=0$. Por eso, vamos a demostrarla utilizando la Fórmula de Euler, que es la siguiente

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}\,(x), \tag{3.6}$$

simplemente sustituimos en (3.6) $x=\pi$ y obtenemos:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi) = -1$$

como queriamos probar.

Teorema 3.5 *El número π es transcendente.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que π pertenece al cuerpo de los números algebraicos, al que denotamos por A, entonces $i\pi = \alpha \in A$. Sea $grado(\alpha) = n$, y sean $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los números conjugados con α. Para hacer más fácil la notación, tomaremos $\alpha = \alpha_1$. Se tiene, $e^{\alpha}+1=0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(e^{\alpha_k}+1) = (e^{\alpha_1}+1)(e^{\alpha_2}+1)\cdots(e^{\alpha_n}+1) = 1 + (e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\ldots e^{\alpha_n})\\ + (e^{\alpha_1+\alpha_2}+e^{\alpha_1+\alpha_3}+\ldots+e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}) + \ldots + e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} = 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

En los exponentes que aparecen en (3.7) puede haber ceros y entonces, los sumandos son iguales a uno. Ahora, sumamos todos los términos con los exponentes iguales a cero junto con la unidad, a esta suma la denotamos a. Los demás exponentes distintos de cero los numeramos arbitrariamente y los denotaremos por $\beta_1, \ldots, \beta_N$. Después de esto, la igualdad (3.7) se transforma en

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_N} = 0, \quad a \geq 1. \tag{3.8}$$

Vamos a demostrar que $\beta_1, \ldots, \beta_N$ son todas las raíces de un mismo polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con $grado(f(x)) = N$.

Por hipótesis, todos los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son raíces de un polinomio $f_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Todas las sumas de dos números tomados el conjunto de los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son raíces del polinomio

$$f_2(x) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x-(\alpha_i+\alpha_j)).$$

Todas las sumas de tres números tomados del conjunto de los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son raíces del polinomio

$$f_3(x) = \prod_{1\leq i<j<k\leq n}(x-(\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k)).$$

Y así sucesivamente hasta la suma de todos los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ es raíz del polinomio

$$f_n(x) = x - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n).$$

Los polinomios $f_k(x)$ con $k = 2, \ldots, n$ son funciones simétricas de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}[x]$. Por esto, según el Lema 1.9 para $k=1$ obtenemos que

$$f_k(x) \in \mathbb{Q}[x], \quad k = 2, \ldots, n.$$

Hagamos

$$f_0(x) = \frac{1}{x^{a-1}} \prod_{k=1}^{n} f_k(x), \quad f_0(x) \in \mathbb{Q}[x].$$

Es evidente que

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{x^{a-1}} \prod_{k=1}^{n} f_k(x) = \frac{1}{x^{a-1}} f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x) \\ &= \frac{1}{x^{a-1}}((x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n))((x-(\alpha_1+\alpha_2))(x-(\alpha_1+\alpha_3))\cdots \\ &(x-(\alpha_{n-1}+\alpha_n)))\cdots(x-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)) \\ &\underset{15}{=} \frac{1}{x^{a-1}} x^{a-1}(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_N) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_N). \end{aligned}$$

Por tanto, podemos escribir $f_0(x)$ de la siguiente forma:

$$f_0(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_N) = x^N + a_{N-1}x^{N-1} + a_{N-2}x^{N-2} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_0 \neq 0.$$

Ahora definimos $a_j = \dfrac{n_j}{d_j}$, $d_j \neq 0$, donde n_j y d_j son dos coeficientes arbitrarios, por tanto, podemos reescribir el polinomio como

$$f_0(x) = \frac{d_{N-1}d_{N-2}\cdots d_0}{d_{N-1}d_{N-2}\cdots d_0}x^N + \frac{n_{N-1}d_{N-2}\cdots d_0}{d_{N-1}d_{N-2}\cdots d_0}x^{N-1} + \frac{n_{N-2}d_{N-1}d_{N-3}\cdots d_0}{d_{N-1}d_{N-2}\cdots d_0}x^{N-2} + \ldots$$

y entonces despreciando el denominador podemos pasar a

$$f(x) = d_{N-1}d_{N-2}\cdots d_0 x^N + n_{N-1}d_{N-2}\cdots d_0 x^{N-1} + n_{N-2}d_{N-1}d_{N-3}\cdots d_0 x^{N-2} + \ldots$$

que es un polinomio que pertenece a $\mathbb{Z}[x]$, con *grado*$(f(x)) = N$, y tal que $f(\beta_k) = 0$, $k = 1, \ldots, N$.

El teorema quedará demostrado si comprobamos que la igualdad (3.8) es contradictoria. Y esto lo vamos a ver con el siguiente lema.

Lema 3.6 *Supongamos que los números*

$$\beta_{1,l}, \ldots, \beta_{k_l,l}, \quad k_l \geq 1, \quad l = 1, \ldots, r \tag{3.9}$$

forman, para cada $l = 1, \ldots, r$ una colección completa de las raíces no nulas del polinomio $f_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con grado$(f_1(x)) = k_l$, $l = 1, \ldots, r$ y $a_l \in \mathbb{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, r$, $a_0 \neq 0$, donde los a_l son los coeficientes del polinomio $f_1(x)$. Entonces, la igualdad

$$a_0 + \sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} e^{\beta_{k,l}} = 0, \quad a_0 \neq 0 \tag{3.10}$$

es imposible.

[15] Como hemos dicho antes, pueden aparecer ceros entre los sumandos α_i, por tanto se queda multiplicando sólo la x. Antes al número de exponentes que sumaban 0 junto a la unidad lo llamabamos a, pues ahora tenemos que los α_i se anulan $a-1$ veces y al resto de los α_j que no se anulan los llamamos también como antes arbitrariamente $\beta_1, \ldots, \beta_N$.

Observación 3.7 *Entre los números (3.9) puede haber iguales.*

Ahora vamos a demostrar el lema anterior, que se hace de forma similar a la demostración del Teorema 2.7 que hicimos en el capítulo anterior.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que en las condiciones del lema no se cumple la igualdad (3.10).

Vamos a tomar para los números $e^{\beta_{k,l}}$ unas aproximaciones suficientemente buenas mediante números algebraicos, expresándolos de la siguiente forma

$$e^{\beta_{k,l}} = \frac{M_{k,l} + \epsilon_{k,l}}{M_0} \quad k = 1, \ldots, k_l, \quad l = 1, \ldots, r \tag{3.11}$$

donde $M_0 \in \mathbb{Z}$, $M_0 \neq 0$, $M_{k,l}$ son unos números enteros de $\mathbb{Z}_A$, y $\epsilon_{k,l}$ son números suficientemente pequeños. Todo esto lo iremos demostrando a medida que vayamos avanzando con la demostración.

Ahora introducimos la siguiente notación

$$\begin{gathered} f(z) = \prod_{l=1}^{r} f_l(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_N z^N \underset{16}{=} b_N \prod_{l=1}^{r} \prod_{k=1}^{k_l} (z - \beta_{k,l}), \\ b_0 \neq 0, \; b_N > 0, \; N = \sum_{l=1}^{r} k_l. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Entonces, todos los números (3.9), y sólo ellos, serán raíces del polinomio $f(z)$.

Definimos el número M_0 de la siguiente forma

$$M_0 = \int_0^\infty \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} f^p(z) e^{-z} dz}{(p-1)!}, \tag{3.13}$$

donde p es un número primo suficientemente grande y la integración se efectúa en el plano complejo a lo largo del eje real desde el punto 0 hasta ∞.

Ahora definimos los números $M_{k,l}$ y $\epsilon_{k,l}$

$$M_{k,l} = e^{\beta_{k,l}} \int_{\beta_{k,l}}^\infty \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} f^p(z) e^{-z} dz}{(p-1)!}, \quad k = 1, \ldots, k_l, \tag{3.14}$$

$$\epsilon_{k,l} = e^{\beta_{k,l}} \int_0^{\beta_{k,l}} \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} f^p(z) e^{-z} dz}{(p-1)!}, \quad k = 1, \ldots, k_l, \tag{3.15}$$

[16] Seguimos el mismo procedimiento que hicimos para pasar del polinomio $f_0(x)$ al polinomio $f(x)$. Véase la página 27.

donde, en (3.14), la integración se efectúa sobre una recta paralela al eje real desde el punto $\beta_{k,l}$ hasta ∞, y en (3.15), sobre el segmento rectilíneo que une el origen de coordenadas con el punto $\beta_{k,l}$ (véase la Figura 3.1).

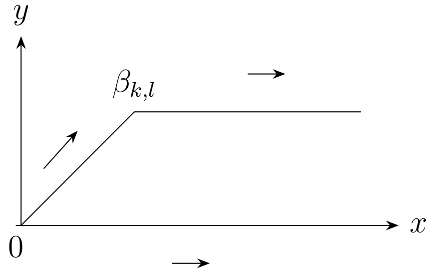

Figura 3.1: Esquema de integración.

Bajo los signos integrales (3.13), (3.14) y (3.15) figura una función analítica entera. Por ello, según el Teorema de Cauchy (Teorema 1.16), la integral de esta función no depende del camino de integración. Por tanto, la integral sobre la poligonal formada por el segmento que une el origen de coordenadas con el punto $\beta_{k,l}$ y la recta desde el punto $\beta_{k,l}$ hasta ∞, es igual a la integral de la misma función sobre el eje real desde el punto 0 hasta ∞.

De las igualdades (3.13), (3.14) y (3.15), se tiene

$$\begin{aligned} M_{k,l}+\epsilon_{k,l} &= e^{\beta_{k,l}}\int_{\beta_{k,l}}^{\infty}\frac{b_N^{(N-1)p-1}z^{p-1}f^p(z)e^{-z}dz}{(p-1)!}+e^{\beta_{k,l}}\int_0^{\beta_{k,l}}\frac{b_N^{(N-1)p-1}z^{p-1}f^p(z)e^{-z}dz}{(p-1)!} \\ &= e^{\beta_{k,l}}\left[\int_{\beta_{k,l}}^{\infty}\frac{b_N^{(N-1)p-1}z^{p-1}f^p(z)e^{-z}dz}{(p-1)!}+\int_0^{\beta_{k,l}}\frac{b_N^{(N-1)p-1}z^{p-1}f^p(z)e^{-z}dz}{(p-1)!}\right] \\ &= e^{\beta_{k,l}}\int_0^{\infty}\frac{b_N^{(N-1)p-1}z^{p-1}f^p(z)e^{-z}dz}{(p-1)!}=e^{\beta_{k,l}}M_0, \quad k\in[1,k_l], \quad l\in[1,r]. \end{aligned}$$

Por tanto, las igualdades (3.11) se cumplen formalmente si $M_0 \neq 0$.

Ahora sustituyendo los segundos miembros de las igualdades (3.11) en la igualdad (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned} a_0+\sum_{l=1}^{r}a_l\sum_{k=1}^{k_l}\left(\frac{M_{k,l}+\epsilon_{k,l}}{M_0}\right)=0 \Rightarrow a_0M_0+\sum_{l=1}^{r}a_l\sum_{k=1}^{k_l}(M_{k,l}+\epsilon_{k,l})=0 \\ \Rightarrow a_0M_0+\sum_{l=1}^{r}a_l\sum_{k=1}^{k_l}M_{k,l}+\sum_{l=1}^{r}a_l\sum_{k=1}^{k_l}\epsilon_{k,l}=0, \quad a_0M_0\neq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Hemos elegido el número M_0 de tal modo que no es divisible por un número primo p lo suficientemente grande y tal que a_0 tampoco es divisible por p. Por tanto, a_0M_0 no es divisible por el número p. Esto lo demostraremos más adelante.

Los números $M_{k,l}$ los hemos elegido de forma que

$$\sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} M_{k,l} \in \mathbb{Z} \tag{3.17}$$

y sean divisibles por p. Por lo tanto,

$$a_0 M_0 + \sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} M_{k,l} \in \mathbb{Z},$$

pero no son divisibles por p (más adelante lo comprobaremos), así que son números enteros no nulos.

Los números $\epsilon_{k,l}$ los hemos elegido tan pequeños para que cumplan la siguiente desigualdad

$$\left| \sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} \epsilon_{k,l} \right| < 1 \tag{3.18}$$

que más tarde probaremos que se cumple.

Entonces, la igualdad (3.16) resultará contradictoria, ya que el primer miembro es distinto de cero. Por tanto, la igualdad (3.10) será imposible. Y con esto habremos demostrado el Lema 3.6.

Ahora vamos a comprobar que se cumplen los requisitos antes mencionados.

Utilizando la igualdad (3.12), se tiene

$$\begin{aligned} b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} f^p(z) &= b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} (b_0 + b_1 z + \ldots + b_N z^N)^p \\ &= b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} (b_0^p + b_1^p z^p + \ldots + b_N^p z^{Np} + \ldots) \\ &= b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} b_0^p + \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} z^{s-1}, \\ & b_N b_0 \neq 0, \quad c_{s-1} \in \mathbb{Z}, \quad s \in [p, (N+1)p - 1]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Aplicando la Definición 1.19 y la Proposición 1.20 de la función Gamma de Euler con las igualdades (3.13) y (3.19) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
M_0 &= \int_0^\infty \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} f^p(z) e^{-z} dz}{(p-1)!} = \int_0^\infty \frac{\left(b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} b_0^p + \displaystyle\sum_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} z^{s-1} \right) e^{-z} dz}{(p-1)!} \\
&= \int_0^\infty \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} b_0^p e^{-z} dz}{(p-1)!} + \int_0^\infty \frac{\displaystyle\sum_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} z^{s-1} e^{-z} dz}{(p-1)!} \\
&= \frac{b_N^{(N-1)p-1} b_0^p}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz + \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} \frac{c_{s-1}}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{s-1} e^{-z} dz \\
&= b_N^{(N-1)p-1} b_0^p \frac{\Gamma(p)}{(p-1)!} + \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} \frac{\Gamma(s)}{(p-1)!} = b_N^{(N-1)p-1} b_0^p \frac{(p-1)!}{(p-1)!} + \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} \frac{(s-1)!}{(p-1)!} \\
&= b_N^{(N-1)p-1} b_0^p + c_p p + c_{p+1} p(p+1) + c_{p+2} p(p+1)(p+2) + \ldots \\
&= b_N^{(N-1)p-1} b_0^p + p(c_p + c_{p+1}(p+1) + c_{p+2}(p+1)(p+2) + \ldots) \\
&= b_N^{(N-1)p-1} b_0^p + pC, \quad b_N b_0 \neq 0, \; C \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Por tanto, $M_0 \in \mathbb{Z}$.

Tomemos un número primo p que cumpla la condición $p > \max(|a_0|, b_N, |b_0|)$. Entonces de la igualdad (3.20) deducimos que $a_0 M_0$ no es divisible por p. Con esto hemos acabado de probar que el número M_0 cumple todas las condiciones que hemos mencionado antes.

Ahora utilizando las igualdades (3.12) y (3.14) se deducen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
M_{k,l} &= e^{\beta_{k,l}} \int_{\beta_{k,l}}^\infty \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} f^p(z) e^{-z} dz}{(p-1)!} \\
&= e^{\beta_{k,l}} \int_{\beta_{k,l}}^\infty \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} \left(b_N \displaystyle\prod_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{k_j} (z - \beta_{i,j}) \right)^p e^{-z} dz}{(p-1)!} \\
&= \int_{\beta_{k,l}}^\infty \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} b_N^p \displaystyle\prod_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{k_j} (z - \beta_{i,j})^p e^{-z+\beta_{k,l}} dz}{(p-1)!} \\
&= \int_{\beta_{k,l}}^\infty \frac{b_N^{Np-1} z^{p-1} \displaystyle\prod_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{k_j} (z - \beta_{i,j})^p e^{-z+\beta_{k,l}} dz}{(p-1)!}, \quad k = 1, \ldots, k_l, \quad l = 1, \ldots, r.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Ahora haciendo el cambio de variable $z = u + \beta_{k,l},\ dz = du$ en las integrales (3.21) obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} M_{k,l} &= \int_0^\infty \frac{b_N^{Np-1}(u+\beta_{k,l})^{p-1}\prod_{j=1}^{r}\prod_{i=1}^{k_j}(u+\beta_{k,l}-\beta_{i,j})^p e^{-u}du}{(p-1)!} \\ &= \int_0^\infty \frac{b_N^{Np-1}(u+\beta_{k,l})^{p-1}u^p\prod_{j=1}^{r}{\prod_{i=1}^{k_j}}'(u+\beta_{k,l}-\beta_{i,j})^p e^{-u}du}{(p-1)!}, \quad k=1,\ldots,k_l, \quad l=1,\ldots,r, \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde la prima en el producto indica que no está en el producto el factor correspondiente a los valores $i = k,\ j = l$ (el factor u^p lo hemos sacado fuera del producto), y la integración se realiza sobre el eje real desde 0 hasta ∞.

Ahora escribimos la igualdad (3.22) de la siguiente forma

$$M_{k,l} = \int_0^\infty \frac{(b_N u + b_N\beta_{k,l})^{p-1}u^p\prod_{j=1}^{r}{\prod_{i=1}^{k_j}}'(b_N u + b_N\beta_{k,l} - b_N\beta_{i,j})^p e^{-u}du}{(p-1)!}, \qquad k=1,\ldots,k_l, \quad l=1,\ldots,r. \tag{3.23}$$

donde $b_N^{Np-1} = b_N^{p(N-1)+(p-1)} = b_N^{p(N-1)}b_N^{p-1}$.

Como los números $\beta_{i,j}$ son raíces del polinomio (3.12), de la demostración del Teorema 1.12, se deduce que

$$\alpha_{i,j} = b_N\beta_{i,j} \in \mathbb{Z}_A, \quad i=1,\ldots,k_j, \quad j=1,\ldots,r.$$

donde α_{ij} es el término ij del polinomio (3.12) calculado con las Fórmulas de Cardano-Vieta[17].

[17]**Fórmulas de Cardano-Vieta:** Sea el polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, cuyas raíces son $r_1, r_2, \ldots, r_n$, las Fórmulas de Cardano-Vieta son las siguientes:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n), \\ a_{n-2} &= a_n(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_n + \ldots + r_2r_3 + \ldots + r_{n-1}r_n), \\ &\vdots \\ a_1 &= (-1)^{n-1}a_n(r_1r_2\cdots r_{n-2}r_{n-1} + r_1r_2\cdots r_{n-2}r_n + \ldots + r_2r_3\cdots r_{n-2}r_{n-1}), \\ a_0 &= (-1)^n a_n r_1 r_2 \cdots r_{n-1}r_n. \end{aligned}$$

Con las nuevas notaciones, las igualdades (3.23) toman la siguiente forma

$$M_{k,l} = \int_0^\infty \frac{(b_N u + \alpha_{k,l})^{p-1} u^p \prod_{j=1}^{r} {\prod_{i=1}^{k_j}}' (b_N u + \alpha_{k,l} - \alpha_{i,j})^p e^{-u} du}{(p-1)!},$$
$$k = 1, \ldots, k_l, \quad l = 1, \ldots, r. \tag{3.24}$$

Por lo tanto, de las igualdades (3.24) hallamos

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} M_{k,l} &= \sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} \int_0^\infty \frac{(b_N u + \alpha_{k,l})^{p-1} u^p \prod_{j=1}^{r} {\prod_{i=1}^{k_j}}' (b_N u + \alpha_{k,l} - \alpha_{i,j})^p e^{-u} du}{(p-1)!} \\
&= \int_0^\infty \frac{\sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} (b_N u + \alpha_{k,l})^{p-1} u^p \prod_{j=1}^{r} {\prod_{i=1}^{k_j}}' (b_N u + \alpha_{k,l} - \alpha_{i,j})^p e^{-u} du}{(p-1)!} \\
&= \int_0^\infty \frac{u^p e^{-u} \Phi(u) du}{(p-1)!},
\end{aligned} \tag{3.25}$$

donde

$$\Phi(u) = \sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} (b_N u + \alpha_{k,l})^{p-1} \prod_{j=1}^{r} {\prod_{i=1}^{k_j}}' (b_N u + \alpha_{k,l} - \alpha_{i,j})^p.$$

El polinomio $\Phi(u)$ es un polinomio simétrico respecto de cada uno de los r sistemas de números de $\mathbb{Z}_A$,

$$\alpha_{1,l}, \alpha_{2,l}, \ldots, \alpha_{k_l,l}, \quad l = 1, \ldots, r,$$

los cuales, para cada l, representan el conjunto de las raíces de un polinomio de coeficientes de $\mathbb{Z}$, de *grado* k_l. Razonando del mismo modo que en la demostración del Lema 1.10 (cambiando los números conjugados por el conjunto de las raíces de un polinomio arbitrario de $\mathbb{Z}[z]$ con el coeficiente superior igual a 1), obtenemos que $\Phi(u) \in \mathbb{Z}[u]$. Así pues

$$\begin{aligned}
u^p \Phi(u) &= u^p \sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} (b_N u + \alpha_{k,l})^{p-1} \prod_{j=1}^{r} {\prod_{i=1}^{k_j}}' (b_N u + \alpha_{k,l} - \alpha_{i,j})^p \\
&= \sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} (b_N u + \alpha_{k,l})^{p-1} \prod_{j=1}^{r} \prod_{i=1}^{k_j} (b_N u + \alpha_{k,l} - \alpha_{i,j})^p = \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} u^{s-1} c_{s-1}, \quad c_{s-1} \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

De las igualdades (3.25) y (3.26) y usando la Definición 1.19 y la Proposición 1.20 de la función Gamma de Euler obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{r} a_l \sum_{k=1}^{k_l} M_{k,l} &= \int_0^\infty \frac{\sum\limits_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} u^{s-1} e^{-u} du}{(p-1)!} = \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} \frac{c_{s-1}}{(p-1)!} \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u} du \\ &= \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} \frac{\Gamma(s)}{(p-1)!} = \sum_{s=p+1}^{(N+1)p} c_{s-1} \frac{(s-1)!}{(p-1)!} = c_p p + c_{p+1} p(p+1) + \ldots \\ &= p(c_p + c_{p+1}(p+1) + \ldots) = pD, \quad D \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Con esto queda probado que la suma (3.17) es un número entero y divisible por p.

Por último, supongamos que todos los números $\beta_{k,l}$ están contenidos en un círculo de radio R con el centro en el origen de coordenadas. Definamos

$$\begin{aligned} g_{k,l} &= \max_{|z| \le R} |b_N^{-1} f(z) e^{-z+\beta_{k,l}}|, \\ g_0 &= \max_{1 \le k \le k_l,\ 1 \le l \le r} g_{k,l}, \\ g &= \max_{|z| \le R} |b_N^{N-1} z f(z)|. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Sabemos que el módulo máximo de una función analítica en un círculo de radio R siempre se alcanza en la frontera, y que el módulo de una subintegral compleja es inferior al módulo máximo de la función subintegral multiplicado por la longitud del camino de integración. De las igualdades (3.15) y (3.27) obtenemos que

$$\begin{aligned} |\epsilon_{k,l}| &= \left| \int_0^{\beta_{k,l}} \frac{b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} f^p(z) e^{-z+\beta_{k,l}} dz}{(p-1)!} \right| \le \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{\beta_{k,l}} \left| b_N^{(N-1)p-1} z^{p-1} f^p(z) e^{-z+\beta_{k,l}} \right| dz \\ &\le \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{\beta_{k,l}} \left| b_N^{-N} f(z) e^{-z+\beta_{k,l}} \right| \left| z^{p-1} f^{p-1}(z) b_N^{(N-1)(p-1)} \right| dz \\ &\le \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{\beta_{k,l}} \left| b_N^{-1} f(z) e^{-z+\beta_{k,l}} \right| \left| z^{p-1} f^{p-1}(z) b_N^{(N-1)(p-1)} \right| dz \\ &\le \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{\beta_{k,l}} g_{k,l} \left| z f(z) b_N^{N-1} \right|^{p-1} dz \le \frac{g_0 g^{p-1}}{(p-1)!} \int_0^{\beta_{k,l}} dz = \frac{g_0 g^{p-1}}{(p-1)!} \beta_{k,l} \\ &\le \frac{g_0 g^{p-1}}{(p-1)!} R, \quad k = 1, \ldots, k_l, \quad l = 1, \ldots, r, \quad \text{si} \quad b_N > 1. \end{aligned}$$

El número $g_0 R$ es constante, mientras que $\dfrac{g^{p-1}}{(p-1)!} \longrightarrow 0$ cuando $p \longrightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\epsilon_{k,l} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad p \longrightarrow \infty, \quad k = 1, \ldots, k_l, \quad l = 1, \ldots, r. \tag{3.28}$$

Como los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son constantes, la condición (3.28) implica que existe un $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cualquier $p \ge p_0$, se cumple la desigualdad (3.18).

Fijando un número primo p, $p > \max(p_0, |a_0|, b_N, |b_0|)$, obtenemos que todos los números $M_0, M_{k,l}$ y $\epsilon_{k,l}$ quedan elegidos cumpliendo las condiciones antes mencionadas. Y con esto queda demostrado el Lema 3.6, y por lo tanto, también el teorema. $\square$

Capítulo 4

Problemas relacionados.

En este capítulo vamos a tratar algunos problemas relacionados con los números e y π y/o su transcendencia e irracionalidad. Algunos de estos problemas siguen abiertos y todavía no se han resuelto.

Vamos a empezar por un problema del que ya hemos hablado en el Capítulo 1, la cuadratura del círculo.

4.1. Cuadratura del círculo

Como ya hemos mencionado, en el Papiro de Rhind se habla de este problema relacionado con el número π. El escribano que redactó este Papiro afirmaba que este problema había sido planteado al menos varios siglos antes de que fuera escrito el documento.

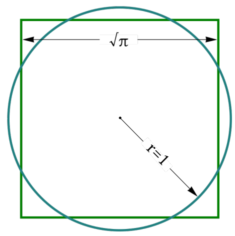

Figura 4.1: Cuadratura del círculo. Fuente: [2].

El problema de la cuadratura del círculo consistía en intentar construir con regla y compás un cuadrado equivalente a un círculo, es decir, que el área de ambas figuras sea la misma. Sabemos que el área del cuadrado es l^2, donde l es el lado del cuadrado, y el área del círculo es πR^2, siendo R el radio del círculo. Ahora, supongamos que tenemos el círculo unidad, es decir, $R = 1$, por tanto, el cuadrado que queremos obtener tiene como lado $\sqrt{\pi}$.

Las únicas figuras que se pueden construir con regla y compás son aquellas cuyas longitudes se pueden expresar como soluciones de ecuaciones cuadráticas con coeficientes en $\mathbb{Q}$, soluciones de ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes son soluciones de ecuaciones cuadráticas con coeficientes en $\mathbb{Q}$, y así sucesivamente. Al conjunto de estos números le llamamos Ω y es un subconjunto del cuerpo A. El grado de los números que pertenecen a Ω es $n = 2^k$.

Para poder resolver este problema, resultaría suficiente resolver este otro problema: probar que el número $\sqrt{\pi}$ pertenece o no al conjunto Ω. Quedó demostrado que el problema de la cuadratura del círculo es imposible resolverlo a mano con regla y compás. Gracias a que

Lindermann demostró que el número π es transcendente se consiguió resolver un problema geométrico con un método analítico.

En la actualidad, se conocen muchos métodos de construcción de un cuadrado con área prácticamente igual al área de un círculo dado y utilizando regla y compás. A continuación, se muestran un par de ejemplos.

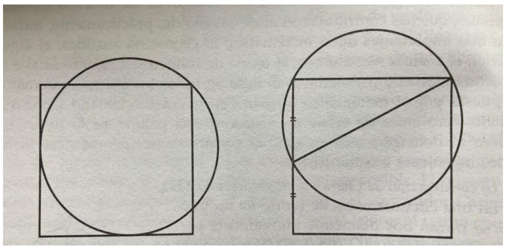

Figura 4.2: Ejemplos de cuadrados y círculos que tienen casi igual área. Fuente: [20].

4.2. Los números $\pi + e$ y $\pi \cdot e$.

Todavía no se sabe si los números $\pi + e$ y $\pi \cdot e$ son irracionales, pero lo que si se sabe es que por lo menos uno de los dos es irracional. Esto último, es lo que vamos a desmostrar a continuación.

Comenzamos definiendo un polinomio cuadrático $f(x)$ en el que π y e son raíces

$$f(x) = (x-\pi)(x-e) = x^2 - ex - \pi x + \pi \cdot e = x^2 - (\pi + e)x + \pi \cdot e.$$

Hemos demostrado en los Capítulos 2 y 3 que los números π y e son transcendentes. Entonces, por ser π y e transcendentes, por lo menos uno de los coeficientes del polinomio $f(x)$ va a ser irracional. Sabemos que el coeficiente que acompaña a x^2 no va a ser, porque el 1 sabemos que es un número racional, por lo tanto, podemos concluir que o $\pi + e$ es irracional o $\pi \cdot e$ es irracional.

4.3. Los números e^π y π^e.

En este apartado, estudiamos los números e^π y π^e y también vamos a probar la siguiente desigualdad:

$$e^\pi > \pi^e.$$

Como comentario previo a las demostraciones, el número e^π se puede expresar como una serie de potencias, partiendo de la serie de potencias de la función e^x, y tomando $x = \pi$ obtenemos:

$$e^\pi = 1 + \frac{\pi}{1!} + \frac{\pi^2}{2!} + \cdots + \frac{\pi^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!}.$$

Al número e^π se le conoce como constante de Guélfond, ya que Guélfond en 1934 demostró que e^π es un número transcendente, y en consecuencia irracional.

A continuación, vamos a enunciar el Teorema de Guélfond.

Teorema 4.1 ***(de Guélfond).*** *Sea $\alpha \in A$, $\alpha \notin \{0,1\}$ y sea β una irracionalidad cuadrática imaginaria. Entonces, el número α^β es transcendente.*

Demostración. Véase [14], páginas 348-352.

Del Teorema de Guélfond deducimos que si a π se le considera cómo el módulo del número complejo e^π y cumple las propiedades de las funciones exponenciales complejas, entonces cumple la condiciones del teorema y podemos concluir que e^π es transcendente.

Lema 4.2 *Se verifica que $e^\pi > \pi^e$.*

Demostración. Supongamos que $x > e$ y que tenemos la función $f(x) = x - e \cdot ln(x)$. Su primera derivada es

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} \tag{4.1}$$

y siempre es positiva, por tanto la función es creciente en el intervalo (e, ∞).

Como $f(e) = 0$ y acabamos de decir que es creciente, entonces $f(x) > 0$ para $x > e$. El resultado que buscamos se deduce de que $f(x) = x - e \cdot ln(x) > 0$ sustituyendo $x = \pi$. $\square$

En esta demostración, ha aparecido el número π^e. Al contrario que el número e^π, que se sabe que es un número transcendente, de este número sigue abierto el problema de si es un número transcendente o no.

Como curiosidad, añadir que el matemático ruso Yuri V. Nesterenko demostró que el número $\pi + e^\pi$ es irracional, [19].

Por último, sabemos que el número e^π es transcendente y que del número π^e nada se sabe, por eso es normal que del número $e^\pi - \pi^e$ tampoco se sepa si es transcendente o no.

Bibliografía

[1] Beltrán Alvarez, C. (2021). Apuntes Variable Compleja. 3º de Grado de Matemáticas. Universidad de Cantabria.

[2] Cuadratura del círculo. (28 de abril de 2022). En Wikipedia. `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Cuadratura_del_c%C3%ADrculo&oldid=143191361`.

[3] Euler's Number: Limit of Sequence implies Limit of Series. (28 de septiembre de 2021). En ProofWiki. `https://proofwiki.org/w/index.php?title=Euler%27s_Number:_Limit_of_Sequence_implies_Limit_of_Series&oldid=538021`.

[4] Fernández-Ferreirós, P. (2018). Apuntes Teoría de Galois. 3º de Grado de Matemáticas. Universidad de Cantabria.

[5] Fourier, Ch. (1815). Mélanges d'analyse algébrique. Stainville.

[6] Gelfond's constant. (28 de febrero de 2022). En Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gelfond%27s_constant&oldid=1074563433`.

[7] G. Moreno, S y G. Caballero, E.M. (2016). Una demostración alternativa de la identidad de Hermite. Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME, 7(2), 322. `https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1325`

[8] Gómez Aroca, J.M. (15 de junio de 2022). Problemas para entretenerse. Matemáticas y otras yerbas. `http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/prhind.htm`.

[9] Jones, W. (1706). Synopsis Palmorioum Matheseos. Londres: Jeff. Wale.

[10] Napier, J. (1619). Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio.

[11] Número π. (18 de junio de 2022). En Wikipedia. `https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=N%C3%BAmero_%CF%80&oldid=144265870`

[12] Sadornil Renedo, D. (2020). Apuntes Teoría de Galois. 3º de Grado de Matemáticas. Universidad de Cantabria.

[13] Sequence of Powers of Reciprocals is Null Sequence. (22 de octubre de 2021). En ProofWiki. `https://proofwiki.org/w/index.php?title=Sequence_of_Powers_of_Reciprocals_is_Null_Sequence&oldid=542767`.

[14] Shidlovski, A.B. (1989). Aproximaciones diofánticas y números transcendentes. País Vasco: Servicio editorial Universidad del País Vasco.

[15] Software matemático WolframAlpha. (https://www.wolframalpha.com/)

[16] Spivak, M. (2017). Calculus (3ª edición). España: Reverté.

[17] Universidad del País Vasco, Cátedra Cultura Científica. (15 de junio de 2022) Al menos uno de $\pi + e$ y $\pi \cdot e$ es irracional. https://scenio.es/al-menos-uno-de-%CF%80-e-y-%CF%80-e-es-irracional.

[18] Vinuesa Tejedor, J. (2017). Apuntes Cálculo Integral. 2º de Grado de Matemáticas. Universidad de Cantabria.

[19] Yuri Valentinovich Nesterenko. (25 de marzo de 2022). En Wikipedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Yuri_Valentinovich_Nesterenko&oldid=1079092066.

[20] Zhúkov, A.V. (2005). El omnipresente número π. Moscú: URSS.