UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Facultad de Ciencias

LA CONSISTENCIA RELATIVA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN

(The relative consistency of the Axiom of Choice)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: María Mencía Medrano
Director: Jesús Javier Jiménez Garrido
Junio - 2022

Índice

Resumen

El axioma de Elección fue enunciado por primera vez por Zermelo en 1904 y desde entonces ha aparecido en las distintas ramas de las matemáticas en sus formas equivalentes. A pesar de ser criticado por algunos matemáticos parece complicado eludir su uso. Por consiguiente, parece natural preguntarse si es correcto o no añadir este axioma a la axiomatización de Zermelo-Fraenkel.

El objetivo del trabajo es probar la consistencia relativa del Axioma de Elección. Primero se prueba que los axiomas de la Aritmética de Peano se cumplen en ZF, esto supone que por el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel, no es posible probar si ZF es consistente dentro de ZF. Por tanto, para realizar la prueba se asume la consistencia de ZF, luego, por el Teorema de Completitud de Gödel sabemos que tiene un modelo. Se estudian los modelos de ZF y se prueba que todos los modelos ZF tienen la forma del Universo de von Neuman. Se construye un submodelo que cumpla todos los axiomas de ZF y el axioma de Elección, llamado el universo Constructible. Concluyendo que la consistencia de ZF implica la consistencia de ZFC, por lo tanto asumir el axioma de Elección en la teoría de conjutnos no da lugar a contradicción.

Palabras clave: Axioma de Elección, Teoría de conjuntos, Zermelo-Fraenkel, Consistencia, Universo Constructible.

Abstract

The Axiom of Choice was first formulated by Zermelo in 1904 and since then it has appeared in its equivalent forms in the different mathematical branches. Even thought it has been criticized by some mathematians it seems difficult to avoid its use. Therefore it seems natural to ask whether it is correct or not to add this axiom to the Zermelo-Fraenkel axiomatization.

The purpose of this project is to prove the relative consistency of the Axiom of Choice. First it is proven that the Peano Arithmetic holds in ZF, by the Gödel Sencond Incompleteness Theorem it is impossible to prove that ZF is consistent inside ZF. Then to carry out the proof we asume that ZF is consistent, by the Completeness Theorem ZF has a model. The models of ZF are studied and proven to have the structure of von Neumann Universe. A submodel is build so it holds all of the ZF axioms and the Axiom of Choice, the Constructible Universe. In conclusion the consistency of ZF implies the consistency of ZFC meaning that there is no place for contradiction in asuming that the Axiom of Choice in the set theory.

Keywords: Axiom of Choice, Set Theory, Zermelo-Fraenkel, Consistency, Constructible Universe.

1. Introducción

La lógica es la ciencia que permite determinar si un razonamiento es válido o no. El origen occidental de la lógica se sitúa habitualmente en la Antigua Grecia donde los filósofos trataban de 'capturar' la esencia del razonamiento, dando criterios puramente formales que nos permitan decidir si un razonamiento es falaz o no. En este sentido, Aristóteles es considerado como el padre de la lógica formal por el estudio sistemático de un tipo particular de razonamiento, los silogismos. La lógica Aristotélica y la lógica predicados, desarrollada por la escuela estoica, actuaron como soporte, a la hora de validar razonamientos, de la mayor parte de los desarrollos científicos, y en particular matemáticos, de Europa hasta la segunda mitad del siglo XIX. Dentro de la matemáticas, la lógica nos permite entender si las conclusiones son correctas o no, según los razonamientos que se usen.

Durante mucho tiempo, las matemáticas fueron consideradas como una verdad absoluta y no existía la necesidad de sistematizar el razonamiento lógico de las matemáticas. Si bien es cierto que en numerosas ocasiones los matemáticos se encontraban con conceptos que no sabían describir con precisión; números 'irracionales' , números "imaginarios", geometrías "no euclídeas" o "infinitésimos", no tenían inconveniente en trabajar con ellos. En otras palabras, antes del siglo XIX las matemáticas no tenían unos pilares fundacionales. Debemos señalar que existen algunas excepciones en este periodo. Quizás la más destacada sea la de Leibniz (*Calculos Rationator*) quien fue el primero es expresar la necesidad de crear un sistema de lógica aplicable a las matemáticas.

A lo largo del siglo XIX se inicia un proceso gradual de fundamentación que permite poco a poco aclarar el significado de estas nociones "confusas" que habían aparecido en las matemáticas. En particular a mediados de siglo aparecieron nuevas ideas de influencia algebraica en el campo de la lógica con matemáticos como Boole o De Morgan.

Generalmente, el cambio fundamental se sitúa en 1879 cuando Frege publicó el Begriffsschrift. Frege pensaba que el fin de la lógica es modelar la realidad buscando un lenguaje totalmente lógico para estudiarla y comprenderla. En su trabajo extiende la lógica proposicional añadiendo el cuantificador universal y el cuantificador existencial. En 1889, Peano también buscó un lenguaje universal para las matemáticas y creó un sistema de axiomas que describían la aritmética.

En este contexto, con los trabajos de Cantor y Dedekind comienza el desarrollo de la teoría de conjuntos. Antes de que se asentasen los axiomas existía la teoría de conjuntos "naive". Esta teoría es una teoría informal que recoge los conceptos "obvios" o "intuitivos" de la teoría de conjuntos. Esta teoría se va perfeccionando a medida que se encuentran paradojas como las de Russel, Cantor o Burali-Forti y pone de manifiesto la necesidad ineludible de recurrir a la lógica para fundamentar las matemáticas.

La teoría de conjuntos fue diseñada para poder disponer de un sistema formal que recogiese todas las matemáticas. Con ella es posible desarrollar teoremas y demostraciones de cualquier rama de las matemáticas. Debemos señalar que la teoría de conjuntos no es necesaria para poder "hacer" matemáticas, de hecho su estudio fue muy posterior a muchos descubrimientos matemáticos. Esta teoría garantiza que todo argumento matemático se puede "traducir" a conjuntos. Como bien explica Mack en [Mack, 2006]:

"Experience has shown that with some exceptions (which can be accommodated by an extension of the theory), all the objects used in mathematics can be constructed as sets, while we can avoid the need to form sets of physical objects by assigning mathematical names to the objects and using the set of names"

Tras varios intentos y errores, Zermelo en 1908 fue el primero en dar una teoría axiomática que evitaba la paradoja de Russel. Sin embargo, esta teoría no permitía probar la existencia de ciertos conjuntos como los cardinales. Para resolver este problema, Fraenkel propuso una modificación de esta teoría añadiendo los axiomas de Partes, Regularidad y Reemplazamiento. A esta axiomatización, excluyendo el axioma de Elección, la denotaremos por ZF. Actualmente existen más axiomatizaciones equivalentes a la de Zermelo-Fraenkel que evitan redundancias de los axiomas.

La teoría ZF restringe la noción de conjunto, los conjuntos dejan de ser únicamente colecciones de objetos, es decir, no todas las colecciones de objetos son conjuntos. También nos permite formalizar conceptos matemáticos que no tenían una definición rigurosa, como el de finitud.

Hay que entender que las axiomatizaciones de las teoría de conjuntos son construcciones y los conjuntos que se obtienen dependen de qué axiomas se incluyan. Se explica bien en [Ivorra Castillo, 2000]

"diseñar una teoría de conjuntos es precisamente eso, una cuestión de diseño y no una cuestión de "capturar" en algún sentido, la "esencia" de lo que son los conjuntos. Podemos diseñar teorías de conjuntos con o sin conjuntos infinitos, con o sin conjuntos no numerables, con o sin átomos, con y sin funciones de Elección, etc"

Las dos teorías que se han aceptado de forma más extendida son la teoría ZF junto con el axioma de Elección AC, desarrollada en este trabajo, y la teoría de von Neumann-Bernays-Gödel NBG. Ambas son equivalentes y permiten expresar de forma "natural" cualquier argumento matemático. La principal diferencia entre ellas son los elementos con los que se trabaja, en la primera son conjuntos y en las segunda clases, además NBG es finitamente axiomatizable.

Para poder fundamentar todos los resultados de las matemáticas es necesario añadir a ZF el axioma de Elección (AC):

Dado un conjunto no vacío x cuyos elementos son conjuntos no vacíos disjuntos, existe un conjunto y formado por un único elemento de cada uno de los elementos de x.

La primera vez que se enunció fue por Zermelo en 1904 [Zermelo, 1904], quien lo utilizó para demostrar que todo conjunto admite un buen orden. El axioma de Elección ha aparecido en las distintas ramas de las matemáticas en sus formas equivalentes, en la mayoría de casos antes de que se enunciase como axioma, porque parecían resultados obvios o evidentes.

El axioma de Elección es criticado por algunos matemáticos por no ser constructivo, lo que significa que si se acepta el axioma entonces existen ciertos conjuntos, pero no hay una regla que explique cómo construirlos. Como se relata en [Fraenkel et al., 1973]

"Probably the most interesting and in spite of its late appaearance, the most discussed axiom of mathematics, second only to Euclid's axiom of parallels which was introduces more than two thousand years ago"

Por este motivo algunos matemáticos, los que se conocen como constructivistas, solo reconocen objetos que puedan construirse, por tanto no reconocen el axioma de Elección. Pero si no se incluye este axioma en la teoría, entonces gran parte de resultados, cuya demostración depende del axioma de Elección, no se pueden tomar como ciertos y las matemáticas quedan enormemente "reducidas". Debido a esta polémica, habitualmente se evita su uso en demostraciones siempre que es posible y cuando se enuncia un resultado en el que es necesario este axioma (o alguna de sus formas equivalentes) se deja escrito expresamente.

Algunos enunciados equivalentes a AC son:

El Teorema del Buen Orden (*Todo conjunto puede ser bien ordenado*), su equivalencia con el axioma de Elección fue probada por Zermelo en 1904.

Lema de Zorn (*Sea* $(X, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado en la que toda cadena tiene cota superior, entonces contiene al menos un elemento maximal*). Su equivalencia se probó en 1939 por Teichmüller. Este lema sirve para probar proposiciones en álgebra o topología, como el Teorema de Krull (*todo anillo tiene ideal maximal*) o el Teorema de Tychonoff (*Todo producto de una familia de espacios topológicos compactos es compacto*).

La ley de trictomía (*Dados dos cardinales son comparables*), probada su equivalencia con el axioma de Elección en 1915 por Hartogs.

En 1984 Blass probó que el Axioma de Elección es equivalente a la *la existencia de base para cualquier espacio vectorial.* Se usa en demostraciones como que todo módulo libre es proyectivo.

Para un estudio exhaustivo de las diferentes formulaciones equivalentes se puede consultar el libro de [Rubin, 1985].

En consecuencia, parece complicado eludir el uso del axioma de Elección. Por consiguiente, parece natural plantearse si el axioma de Elección puede obtenerse como consecuencia del resto de axiomas o preguntarse si es correcto o no añadir este axioma a ZF. Para poder entender que significa que una axiomatización sea correcta o no es necesario complementar la teoría de conjuntos con la teoría de modelos y la teoría de la demostración. Aparecen aquí nociones como completitud y consistencia esenciales en el desarrollo del trabajo.

El estudio de estos problemas metamatemáticos se llevó a cabo durante los años 30. Destacan dos nombres Gödel y Tarski que mostraron que los objetivos del programa de Hilbert eran inalcanzables. En particular en este contexto, Gödel publicó su artículo [Gödel, 1940] donde prueba la consistencia relativa del axioma de Elección, también probó en el mismo artículo la consistencia relativa de la hipótesis del continuo. En consecuencia, asumir el axioma de Elección no produce nuevas contradicciones en la teoría de conjuntos.

La prueba de la consistencia relativa de la negación del axioma de Elección fue probada por Cohen en [Cohen, 1959], demostrando así que el axioma de Elección es independiente del resto de axiomas.

El objetivo del trabajo es probar la consistencia relativa del axioma de Elección. Debemos restringirnos a probar la consistencia relativa porque, por el segundo teorema de Incompletitud de Gödel, no es posible probar si ZF o ZFC son consistentes dentro de la propia teoría. De forma abreviada el procedimiento es el siguiente: asumimos que ZF es consistente y por lo tanto tiene un modelo; empleando este modelo construimos un submodelo que cumpla todos los axiomas de ZF y AC, y como ZFC tiene un modelo, es consistente.
La estructura del trabajo es la siguiente. En la primera parte, se introducen nociones de lógica y teoría de modelos que serán necesarias para desarrollar el resto del trabajo y para llevar a cabo la demostración. Las pruebas de estos resultados se dan por conocidas y se incluyen los resultados oportunos. También se enunciarán resultados importantes como los teoremas de Incompletitud de Gödel. A continuación, usando los conceptos explicados anteriormente, se desarrolla la teoría de conjuntos dada la axiomatización clásica de Zermelo-Fraenkel. Se estudiarán los ordinales, la inducción y la recurrencia transfinita, que serán importantes para las demostraciones posteriores. Uniendo resultados de las secciones anteriores se demuestra que no se puede probar la consistencia de ZF.

Para llegar al objetivo del trabajo se supone que ZF es consistente y por tanto tiene un modelo. Se probará que todos los modelos ZF tienen la forma del universo de von Neuman (**V**). Seguidamente, se procede a estudiar los submodelos y a entender cómo funcionan las fórmulas dentro de ellos. En la última sección se construirá el submodelo buscado, llamado el universo constructible de Gödel (**L**), se probará que en **L** todos los axiomas de ZF son ciertos y también el axioma de Elección, concluyendo así la demostración.

2. Nociones básicas de lógica y teoría de modelos

Previamente a definir la teoría de conjuntos es necesario precisar cómo debemos escribir y determinar qué herramientas serán necesarias para plasmar las diferentes teorías matemáticas. La manera de hacerlo será a través de lenguajes de primer orden. Para describir los lenguajes de primer orden será necesario utilizar nociones matemáticas se explica cómo se van a usar sin haberlas formalizado antes. Entre ellas destacan dos: los números naturales y el concepto de finititud.

Una vez se tenga claro qué conceptos se pueden utilizar se procederá a explicar lo que es un lenguaje de primer orden y cómo se construyen. Esto permite que se puedan crear fórmulas y sentencias. A continuación se explica como a partir de un conjunto de símbolos se puede obtener una axiomatización y de esta formar una teoría matemática, como por ejemplo puede ser la teoría de grupos o la de grafos.

Existen dos formas de entender las fórmulas, una forma sintáctica, en la que las fórmulas solo son símbolos que carecen de significado, o de una forma semántica, cuando a cada fórmula se le asocia un significado. De las dos formas se pueden demostrar o probar fórmulas. De la forma sintáctica se hará mediante demostraciones, a partir de unos axiomas y unas reglas de inferencia, se podrán ir construyendo más, y se dirán que son demostrables de las primeras. Mientras que para la forma semántica se utilizarán interpretación para darle sentido a la teoría, de tal forma que si se dan por ciertas unas fórmulas se podrá ver si son ciertas otras, estas se dirán que son consecuencia lógica de las anteriores. Para la forma semántica se buscarán "ejemplos" que cumplan la fórmula, modelos.

Con los teoremas de Compacidad y Solidez se verá que los dos puntos de vista, sintáctica y semántica, están relacionados, ya que se probará que demostrar algo sintáticamente es lo mismo que ver que es cierto semánticamente.

Por último se verá qué son las teorías consistentes y completas, y como conclusión se ven los teoremas de Incompletitud de Gödel, los cuales demuestran que no toda teoría puede probar su consistencia en sí misma.

Las demostraciones de los teoremas no están en la memoria, pero se han añadido referencias dónde se pueden encontrar las demostraciones.

2.1. La noción de finititud

El primer problema que encontramos al definir nociones fundamentales como la lógica de primer orden o la teoría de modelos es la necesidad de presuponer ciertos conceptos matemáticos. Estos conceptos matemáticos se emplean para hablar de manera informal sobre el lenguaje formal. Por consiguiente conviene tener clara la diferencia entre lenguaje y metalenguaje. El primero está formalizado o al menos es formalizable. El segundo es coloquial y cambia dependiendo del autor y la audiencia. El metalenguaje que emplearemos se nutre de expresiones del lenguaje común "y","o","no","si...entonces" pero también se mezcla con elementos semiformales (<u>pertenencia</u>, <u>conjunto</u>, <u>vacío</u>) cuyo origen es la teoría de conjuntos, la cantidad de teoría de conjuntos empleada depende de los objetivos. Para enfatizar que estas nociones no forman parte del lenguaje formal subrayaremos estas nociones.

Para trabajar con ciertas nociones de la teoría de modelos, como la aridad, necesitamos los números naturales. A finales del siglo XIX principios del XX se realizaron varios intentos sin éxito para formalizar los número naturales a partir de la lógica. Por lo tanto, si queremos definir los números naturales necesitamos presuponer alguna noción que no puede ser formalizada con la lógica, como por ejemplo la noción de <u>finitud</u>.

La cual se define, de acuerdo con [Halbeisen and Krapf, 2020], como:

"In fact, the problem with the natural numbers is, that we need the notion of

finitess in order to define them. This presupposes the existence of a kind of infinite list of objects, and it is not clear whether these objects are-in some sense-not already the natural numbers which we would like to define. However, in our opinion there is a subtle distinction between the infinite set of natural numbers and an arbitrarily long list of objects, since the set of natural numbers is an actually infinite set, whereas an arbitrarily long list is just potentially infinite. The difference between these two types of infinity is, that the actual infinity is something which is completed and definite and consists of infinitely many elements. On the other hand, the potential infinity introduced by Aristotle is something that is always finite, even though more and more elements can be added to make it arbitrarily large."

De este modo asumiendo que tenemos una noción de finitud, con dos caracteres 0 y s podemos construir las siguientes cadenas finitas de caracteres $0, s0, ss0, sss0$. Con este proceso podemos construir la siguiente cadena de la lista añadiendo el carácter s a la última cadena construida.

Procediendo de esta forma obtenemos la lista:

$$\mathbf{N} = [0, s0, ss0, sss0, ...]$$

que es potencialmente infinita. Cada uno de los elementos de la lista se denomina número natural.

Como suele ser habitual, usaremos números arábigos en base diez para simplificar la expresión. Por ejemplo, escribiremos 1 en lugar de $s0$ o 3 en lugar de $sss0$.

En este trabajo, emplearemos principalmente los números naturales como subíndices de listas finitas de objetos como $t_1, t_2, ..., t_n$. Esta notación nos dice que para cada k en la lista [1,...,n] hay un objeto t_k cuando $n = 0$ decimos que es el conjunto vacío.

2.2. Lenguajes de primer orden

Definición 2.1. Un **lenguaje**, $\mathscr{L}$, es un conjunto de símbolos que se utilizan para formalizar una teoría matemática. Estos símbolos son

1. $\mathscr{V}$ un conjunto de variables, que representan objetos y es potencialmente infinito.

2. Operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

3. Cuantificadores lógicos: $\exists, \forall$, que restringen objetos en consideración.

4. Símbolo de igualdad: $=$

5. $\mathscr{F}$ símbolos de funciones, que toman objetos como argumentos y devuelven objetos como resultado.

6. $\mathscr{R}$ símbolos de relaciones, que representan las propiedades de los objetos.

   $\mathscr{F}$, $\mathscr{R}$ y $\mathscr{V}$ son disjuntos

7. una función aridad, $Ar : \mathscr{F} \cup \mathscr{R} \rightarrow \mathbf{N}$

   Las variables, los operadores lógicos, los cuantificadores y el símbolo igual forman los símbolos lógicos. Estos son iguales para todos los lenguajes y son necesarios para formalizar una teoría. $(\mathscr{F}, \mathscr{R})$ forman una **Signatura**, $\mathscr{L}_T$. La signatura varía según la teoría que se esté formalizando. Si no hay símbolos en la signatura entonces el lenguaje se trata de la Lógica de Primer Orden. A las funciones con aridad 0 se las llaman **constantes**.

Ejemplo.

- Para la teoría de grafos, se puede representar mediante una signatura en la que $\mathscr{R}$ está formado por un único elemento E y $\mathscr{F}$ es el conjunto vacío, tal que E es la relación de que dos vértices estén unidos por una arista, por lo que la aridad es 2. El conjunto de funciones es el vacío.
- Para teoría de grupos, la signatura $\mathscr{R}$ es el conjunto vacío, $\mathscr{F}$ esta formado por $e, \circ$, y $Ar(e)$ es 0 y $Ar(\circ)$ es 2. e, el elemento neutro, es una constante y $\circ$ la operación del grupo entre dos elementos.
- Para teoría de anillos, la signatura es $\mathscr{R}$ es el conjunto vacío y $\mathscr{F}$ formado por los elementos $\{0, 1, +, \cdot\}$, donde $0, 1$ tienen aridad 0, son constantes y $+, \cdot$ aridad 2.
- Definimos un Álgebra universal como un conjunto A provisto de una aplicación $A^{ar(t)} \to A$, para t cada elemento del tipo, donde un tipo es un conjunto T provisto de una aplicación. Definamos el lenguaje la teoría de álgebras universales. La signatura consiste en tantas funciones como elementos t haya en el tipo, con aridad la misma que para cada t.

Una vez tenemos un lenguaje lógico con una signatura podemos considerar la noción de fórmula. Dependiendo de como se construyen estas fórmulas tenemos distintos conceptos.

Definición 2.2. En un lenguaje $\mathscr{L}$, los **términos** pueden ser variables o funciones; las **fórmulas**, pueden ser relaciones o composiciones finitas de términos con operadores lógicos y cuantificadores. Se dice que una fórmula es **libre de cuantificadores** si no aparecen ni $\exists$ ni $\forall$, si tampoco contiene conectivas lógicas, entonces se llama fórmula **atómica**, es decir, solo contiene términos y relaciones entre términos.

Una variable puede ser **libre** o **ligada** según en qué fórmula aparezca: Si la fórmula es atómica entonces es libre; si es libre de cuantificadores entonces es libre/ligada si es libre/ligada en la subfórmula en la que aparezca; si tiene cuantificadores entonces las variables son ligadas si lo son en las subfórmulas o si aparecen en el cuantificador, si no ocurre ninguna de las dos son libres.

Las **sentencias** son fórmulas que no tienen variables libres. Términos, fórmulas y sentencias también forman parte del lenguaje.

Ejemplo. Por ejemplo en teoría de grupos se pueden formar

- Términos como: x, $e \cdot e$
- Una fórmula: $\exists z(y = z \cdot x)$, dónde y, x son variables libres y z una variable ligada.
- Fórmulas libres de cuantificadores: $(x \cdot e) = (e \cdot x) \wedge (e \cdot x) = x$, $(x = y) \to ((x \cdot z) = (y \cdot z))$
- Una fórmula atómica: $x \cdot (y \cdot z)$
- Una sentencia: $\forall x \exists y(x \cdot y = e)$

2.3. Axiomas y pruebas formales

Definición 2.3. Los **axiomas** son ciertas sentencias o fórmulas de las cuales se pueden derivar más fórmulas.

Un **axioma lógico** es un axioma tal que es universalmente válido, en otras palabras, que es verdad en todo lenguaje de primer orden sin importar el valor que se de a las variables que intervengan en la fórmula o sentencia. Es la agrupación más pequeña de la cual se derivan todas las fórmulas o sentencias universalmente válidas. Se llama **esquema axiomático** a un conjunto de axiomas que son de la misma forma pero dependen de una fórmula.

Ejemplo. Un ejemplo de un sistema se axiomas lógicos es el correspondiente a la lógica de primer orden dado por los siguientes axiomas y esquemas axiomáticos

Sean $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y ψ fórmulas de primer orden cualquiera y τ, $\tau_1, ..., \tau_n, \tau_1', ..., \tau_n'$ términos, v una variable tal que se puede sustituir v por τ en φ, y v no es una variable libre de ψ. Sean R un símbolo de relación arbitrario y F de una función arbitraria.

- $L_0 : \varphi \vee \neg\varphi$
- $L_1 : \varphi \to (\psi \to \varphi)$
- $L_2 : (\psi \to (\varphi_1 \to \varphi_2)) \to ((\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2))$
- $L_3 : (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
- $L_4 : (\varphi \wedge \psi) \to \psi$
- $L_5 : \varphi \to (\psi \to (\psi \wedge \varphi))$
- $L_6 : \varphi \to (\varphi \vee \psi)$
- $L_7 : \psi \to (\varphi \vee \psi)$
- $L_8 : (\varphi_1 \to \varphi_3) \to ((\varphi_2 \to \varphi_3) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \varphi_3))$
- $L_9 : \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
- $L_{10} : \forall v\varphi(v) \to \varphi(\tau)$
- $L_{11} : \varphi(\tau) \to \exists v\varphi(v)$
- $L_{12} : \forall(\psi \to \varphi(v)) \to (\psi \to \forall v\varphi(v))$
- $L_{13} : \forall v(\varphi(v) \to \psi) \to (\exists v\varphi(v) \to \psi)$
- $L_{14} : \tau = \tau$
- $L_{15} : (\tau_1 = \tau_i' \wedge ... \wedge \tau_n = \tau_n') \to (R(\tau_1, ..., \tau_n) \to R(\tau_1', ..., \tau_n'))$
- $L_{16} : (\tau_1 = \tau_i' \wedge ... \wedge \tau_n = \tau_n') \to (F(\tau_1, ..., \tau_n) \to F(\tau_1', ..., \tau_n'))$

Los últimos tres axiomas se refieren a la relación de igualdad y los dos últimos se tratan de esquemas axiomáticos, dado que R y F son arbitrarios.

Definición 2.4. Para poder obtener sentencias a partir de un conjunto de axiomas es necesario definir **reglas de inferencia**.

- **Modus Ponens**, si se tiene las fórmulas $\varphi \to \psi$ y φ entonces se puede deducir ψ.

$$\frac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$$

- **Generalización**, si se tiene la fórmula φ, entonces se puede deducir $\forall v\varphi$, donde v son variables que no aparecen libres en ningún axioma.

$$\frac{\varphi}{\forall v\varphi}$$

Definición 2.5. Sea $\mathscr{L}$ una signatura llamamos **prueba formal** de una fórmula ψ en Φ, a una sucesión finita de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n$ en $\mathscr{L}$ tal que $\varphi_n \equiv \psi$ y para todo $i < n$ al menos una de las siguientes condiciones se cumple.

1. φ_i es un axioma lógico.
2. $\varphi_i \in \Phi$
3. existen $j, k < i$ tal que $\varphi_j \equiv \varphi_k \to \varphi_i$
4. existe $j < i$ tal que $\varphi_i \equiv \forall v \varphi_j$ donde v es una variable.

Definición 2.6. Decimos que una fórmula ψ es **demostrable** de Φ escribimos $\Phi \vdash \psi$, si existe una prueba formal. Si no existe esta prueba, escribimos $\Phi \nvdash \psi$

Definición 2.7. Dadas dos fórmulas φ y ψ decimos que son **(sintáticamente) equivalentes** si se cumple que

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

Teorema 2.8. *[Halbeisen and Krapf, 2020, Teorema 1.7] Toda fórmula es equivalente a una fórmula que sólo contiene los símbolos* $\neg$, $\wedge$ *y* $\exists$

Definición 2.9. Una **teoría** es un conjunto (eventualmente vacío) de sentencias que se añaden al sistema axiomático $L_0, .., L_{16}$. Cuando se quiere especificar la signatura $\mathscr{L}$, hablamos de una $\mathscr{L}$-teoría. A los elementos de la teoría se llaman **axiomas no lógicos**.

Algunos ejemplos de teorías a partir de los ejemplos de signatura son

Ejemplo. La Aritmética de Peano es una axiomatización del lenguaje de la aritmética, $\mathscr{L}_A = \{0, s, +, \cdot\}$ donde el 0 es una constante, s es una función de aridad uno, sucesor, y $+, \cdot$, la suma y el producto, funciones de aridad dos. Los axiomas son

- $PA_0 : \neg \exists x(s(x) = 0)$
- $PA_1 : \forall x \forall y(s(x) = s(y) \to x = y)$
- $PA_2 : \forall x(x + 0 = x)$
- $PA_3 : \forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$
- $PA_4 : \forall x(x \cdot 0 = 0)$
- $PA_5 : \forall x \forall y(x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x)$
  Dada φ una fórmula y x una variable libre de φ, entonces
- $PA_6 : \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(s(x))) \to \forall x \varphi(x)$

El último axioma es el axioma de Inducción y es un ejemplo de un esquema axiomático.

Ejemplo. La teoría de grupos también se puede axiomatizar, de la siguiente forma

- $G_1 : \forall x \forall y \forall z \forall a \forall b \forall c \forall d((y \cdot z = a) \wedge (x \cdot a = b) \wedge (x \cdot y = c) \wedge (c \cdot z = d)) \to (b = d)$
- $G_2 : \forall x \exists y(x \cdot y = e) \wedge (y \cdot x = e)$
- $G_3 : \forall x \exists y(x \cdot y = x)$

Definición 2.10. Sea T una teoría se define $\mathbf{Th}(T)$ como el conjunto de $\mathscr{L}$-sentencias σ tales que $T \vdash \sigma$

La signatura $\mathscr{L}$ de una teoría $\mathbf{T}$ se puede extender añadiendo símbolos de relaciones o de funciones. Esto es útil para poder expresar fórmulas de forma más sencilla.

Definición 2.11. Dada una $\mathscr{L}$-teoría $\mathbf{T}$, podemos extender $\mathscr{L}$ de las siguientes formas

- Añadiendo una relación. Dada fórmula $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ con variables $x_1, x_2, ..., x_n$ define una relación $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ de aridad n y la teoría extendida sería de la forma

$$\mathbf{T}' = Th(\mathbf{T} \underline{\cup} \{\forall x_1, x_2, ...x_n (R(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi)\})$$

- Añadiendo una función. Dada fórmula $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ si cumple
  - $\mathbf{T} \vdash \forall x_1, x_2, ..., x_n \exists y \varphi(x_1, x_2, ..., x_n, y)$
  - $\mathbf{T} \vdash \forall x_1, x_2, ..., x_n, y, z(\varphi(x_1, x_2, ..., x_n, y) \wedge \varphi(x_1, x_2, ..., x_n, z) \rightarrow y = z)$

  define una función de aridad n y la teoría también se extiende como

$$\mathbf{T}' = Th(\mathbf{T} \underline{\cup} \{\varphi(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))\})$$

Ejemplo.

- En la aritmética se puede añadir la relación $x \leq y$ definida como $(\exists z) y = x + z$
- En la teoría de grupos se puede añadir la relación de conjugación, como $x \sim y \equiv (\exists a)(\exists b)(\exists c)((a \cdot x = b) \wedge (b \cdot c = y) \wedge (a \cdot c = e))$

Definición 2.12. Decimos que una teoría $\mathbf{T}$ es **(sintáticamente) completa** si para toda sentencia σ tenemos que o bien $T \vdash \sigma$ o bien $T \vdash \neg\sigma$

Definición 2.13. Decimos que una teoría $\mathbf{T}$ es **consistente**, $Con(\mathbf{T})$, si no existe ninguna fórmula φ tal que $\mathbf{T} \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$. Si existe φ entonces se dice que $\mathbf{T}$ no es consistente $\neg Con(\mathbf{T})$.

Si una teoría es inconsistente, entonces también es incompleta.

Teorema 2.14. *[Halbeisen and Krapf, 2020, Teorema 2.15]* ***Compacidad****: Sea* $\boldsymbol{T}$ *una teoría, entonces* $\boldsymbol{T}$ *es consistente si y solo si todo subconjunto finito de* $\boldsymbol{T}$ *es consistente.*

2.4. Teoría de modelos

Definición 2.15. Dado un lenguaje una $\mathscr{L}$**-estructura** $\mathbb{M}$ es una tupla $(M, (R_M)_{R \in \mathscr{R}}, (F_M)_{F \in \mathscr{F}})$ donde

- M, el dominio, es un conjunto no vacío.
- A cada relación R de $\mathscr{R}$ le asignamos un subconjunto de $M^{Ar(R)}$ que denotamos por R_M. Informalmente, se entiende que los elementos de M están relacionados si la tupla pertenece a R_M.
- A cada función f de $\mathscr{F}$ le asignamos una función de $M^{Ar(f)}$ a M.

Decimos que una estructura es **numerable** si su dominio es numerable.

Ejemplo.

- En la teoría de grupos, con la signatura $\mathscr{L} = \{e, \cdot\}$, un ejemplo de estructura con el dominio $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \emptyset, \{e_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}, \circ_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\})$, donde $e_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = 0$, la operación $\circ_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = +$ se define como

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (0,0) &\longrightarrow 0 \\ (0,1) &\longrightarrow 1 \\ (1,0) &\longrightarrow 1 \\ (1,1) &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

- Si se tiene la teoría de anillos, con la signatura $\mathscr{L}(\emptyset, \{0, 1, +, \cdot\})$. Una estructura para este lenguajes sería $(\mathbb{N}, \emptyset, \{0_{\mathbb{N}}, 1_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}\})$. El dominio es $\mathbb{N}$, el $0, 1$ se corresponden a los dos números naturales, y las operaciones $+, \cdot$ son de la forma

$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow m + n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) &\longrightarrow n \cdot m \end{aligned}$$

  con la suma y el producto de naturales.

  Otro ejemplo de estructura para esta teoría es $(\mathbb{R}, \emptyset, \{0, 1, +, \cdot\})$. Entonces las operaciones suma y producto son de la forma: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Para poder dar valores de verdadero o falso a los elementos del lenguaje se introduce la siguiente noción.

Definición 2.16. Una **interpretación** I, es un par $(\mathbb{M}, \rho)$, donde ρ es una asignación de cada variable a un elemento de M y $\mathbb{M}$ una $\mathscr{L}$-estructura. Para cada variable v, un elemento $y \in M$, se define

$$\rho[v \to a](y) = \begin{cases} a \text{ si } y \equiv v \\ \rho(y) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Dada una interpretación I, a cada $\mathscr{L}$-término t le asignamos un elemento $I(t) \in M$ de la siguiente forma.

- Para una variable v, $I(v) := \rho(v)$.
- Para una función, $I(f(t_1, t_2, ..., t_n)) := f_M(I(t_1), I(t_2), ..., I(t_n))$

Podemos extender esta definición a todas las fórmulas del lenguaje, es decir, podemos precisar que significa que una fórmula se cumpla bajo una interpretación.

Definición 2.17. Sean $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ fórmulas y R una relación de $\mathscr{L}$. Por <u>inducción</u> en la complejidad de la fórmula definimos

$$\begin{array}{lll} I \models (t = u) & :\Leftrightarrow & I(t) = I(u) \\ I \models (R(t_1, ..., t_n)) & :\Leftrightarrow & R(I(t_1), ..., I(t_n)) \in R_M \\ I \models (\neg\varphi) & :\Leftrightarrow & I \models \neg I(\varphi) \\ I \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) & :\Leftrightarrow & I \models \varphi_1 \text{ y } I \models \varphi_2 \\ I \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) & :\Leftrightarrow & I \models \varphi_1 \text{ o } I \models \varphi_2 \\ I \models (\varphi_1 \to \varphi_2) & :\Leftrightarrow & I \not\models \varphi_1 \text{ o } I \models \varphi_2 \\ I \models (\exists v\varphi(x)) & :\Leftrightarrow & \text{existe un } m \in M \text{ tal que } I(v) = m \text{ y } I \models \varphi(m) \\ I \models (\forall v\varphi(x)) & :\Leftrightarrow & \text{para todo } m \in M \text{ tal que } I(v) = m \text{ y } I \models \varphi(m) \end{array}$$

Lo cual implica que una una fórmula se cumple si al sustituir las variables con sus correspondientes interpretaciones se cumple.

Obsérvese que toda $\mathscr{L}$-fórmula bajo una interpretación es verdadera o falsa. Pero no es lo mismo sintácticamente, ya que no toda fórmula φ cumple que $\vdash \varphi$ o $\vdash \neg\varphi$, es decir, no toda teoría es completa.

Ejemplo. Dado un lenguaje $\mathscr{L} = \{c, f\}$ tal que $Ar(c) = 0$ y $Ar(f) = 1$. Se definen las siguientes $\mathscr{L}$-fórmulas.

$$\varphi_1 \equiv \forall x(x = c \vee x = f(c))$$

$$\varphi_2 \equiv \exists x(x = c)$$

Sea I_1 e I_2 dos interpretaciones diferentes, con la misma estructura $\mathbb{M} = (\{0,1\}, c_M, f_M)$ tal que

$$\begin{array}{lll} I_1(c_M(0)) = 0 & I_1(f_M(0)) = 1 & I_1(f_M(1)) = 0 \\ I_2(c_M(0)) = 0 & I_2(f_M(0)) = 0 & I_2(f_M(1)) = 1 \end{array}$$

Entonces, por la definición anterior $I_1 \models \varphi_1 \wedge I_1 \models \varphi_2$ y por tanto $I_1 \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $I_2 \not\models \varphi_1$ y por tanto $I_2 \models \neg\varphi_1$.

Ejemplo. Tomando las estructuras anteriores. En la estructura $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \emptyset, \{e_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}, \circ_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\})$ y la fórmula $\forall x \forall y\ x \circ y = y \circ x$. Si se tiene una asignación tal que $\rho(x) = 0$ y $\rho(y) = 1$. Entonces esta fórmula se cumple. En realidad para cualquier asignación en el dominio $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ esa fórmula se cumple, ya que se trata de un grupo conmutativo. Si el dominio de la estructura no fuese un grupo conmutativo sólo se cumpliría para ciertas asignaciones. Por ejemplo se considera el conjunto D_3, que no es conmutativo y la asignación tal que $\rho(x) = (13)$ y $\rho(y) = (23)$, entonces la fórmula no es cierta, $x * y = (13)(23) = (213)$ y $y * x = (23)(13) = (123)$, y $(213) \neq (213)$. Aunque si la asignación es $\rho(x) = (13)$ y $\rho(y) = (31)$, entonces $x * y = (13)(31) = id$ y $y * x = (31)(13) = id$.

Definición 2.18. Sea $\mathbb{M}$ una $\mathscr{L}$-estructura y φ una fórmula escribimos $\mathbb{M} \models \varphi$ si y solo si para toda interpretación I, de $\mathbb{M}$ se cumple que $I \models \varphi$.

Definición 2.19. Sea Φ un conjunto de fórmulas, decimos que una $\mathscr{L}$-estructura $\mathbb{M}$ es un **modelo** de Φ, escribimos $\mathbb{M} \models \Phi$, si para toda fórmula $\varphi \in \Phi$ se cumple que $\mathbb{M} \models \varphi$.

Definición 2.20. Se dice que una fórmula φ es **consecuencia semántica** de un conjunto de sentencias Φ si para toda $\mathscr{L}$-estructura $\mathbb{M}$, si $\mathbb{M} \models \Phi$ entonces $\mathbb{M} \models \varphi$. Se escribe $\Phi \models \varphi$.

2.5. Gödelización de fórmulas y Teoremas de Completitud

Terminamos la sección recordando algunos resultados fundamentales de teoría de modelos.

Teorema 2.21. *[Halbeisen and Krapf, 2020, Teorema 3.8]**Solidez:***

Sea Φ un conjunto de $\mathscr{L}$-fórmulas y M un modelos de Φ. Entonces para toda $\mathscr{L}$-fórmula φ se tiene que si $\Phi \vdash \varphi$ entonces $M \models \varphi$.

Lo que se puede resumir como

$$\Phi \vdash \varphi \text{ entonces } \Phi \models \varphi$$

Como consecuencia del teorema del hecho de que para toda fórmula o bien $M \models \varphi$ o bien $M \models \neg\varphi$, deducimos que si Φ tiene un modelo entonces $Con(\varphi)$.

Teorema 2.22. *[Halbeisen and Krapf, 2020, Teorema 5.5]* ***Teorema de Completitud de Gödel**: Dada una $\mathscr{L}$ una signatura numerable y $\boldsymbol{T}$ una teoría consistente, entonces $\boldsymbol{T}$ tiene un modelo.*

Además si para alguna sentencia ω, $\boldsymbol{T} \nvdash \omega$, entonces $\boldsymbol{T} + \neg\omega$ tiene un modelo.

Como consecuencia del teorema de Solidez y del teorema de Completitud se tiene que dadas una signatura numerable $\mathscr{L}$, una $\mathscr{L}$- teoría $\mathbf{T}$ y una σ una sentencia

$$T \models \sigma \text{ si y solo si } T \vdash \sigma$$

Teorema 2.23. *[Halbeisen and Krapf, 2020, Teorema 5.6]* ***Löwenheim–Skolem**:*

Si una teoría $\boldsymbol{T}$ tiene una signatura numerable $\mathscr{L}$ y es consistente, entonces $\boldsymbol{T}$ tiene un modelo numerable.

Junto con el teorema de compacidad se obtiene la siguiente proposición

Proposición 2.24. *Si cada subconjunto finito T' de T tiene un modelo, entonces T tiene un modelo.*

Definición 2.25. Dado un lenguaje $\mathscr{L}$ se dice que es **gödelizable** si es numerable. Como consecuencia el lenguaje admite una numeración de Gödel, a cada término del lenguaje se asigna un número natural, el cual se denomina **número de Gódel**. La asignación se llama **Numeración de Gödel**.

Ejemplo. Por ejemplo una numeración de Gödel para la aritmética de Peano sería el siguiente

Primero a cada símbolo s se le asigna un número natural($\#s$). Sean v_n variables del lenguaje $\mathscr{L}_{PA}$

Símbolo	0	s	$+$	$\cdot$	$=$	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\exists$	$\forall$	v_n
Número de Gödel	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	$2n+1$

Los términos se les asigna los números de Gödel de la siguiente forma

Término	0	v_n	$s(v_n)$	$v_n + v_m$	$v_n \cdot v_m$
Número de Gödel	0	$2n+1$	$2^2 3^{2n+1}$	$2^4 3^{2n+1} 5^{2m+1}$	$2^6 3^{2n+1} 5^{2m+1}$

Los números de Gödel se asignan a las fórmulas de manera similar

Fórmula	$\varphi_1 = \varphi_2$	$\neg\varphi$	$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	$\varphi_1 \vee \varphi_2$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$
Número de Gödel	$2^8 3^{\ulcorner \varphi_1 \urcorner} 5^{\ulcorner \varphi_2 \urcorner}$	$2^{10} 3^{\ulcorner \varphi \urcorner}$	$2^{12} 3^{\ulcorner \varphi_1 \urcorner} 5^{\ulcorner \varphi_2 \urcorner}$	$2^{14} 3^{\ulcorner \varphi_1 \urcorner} 5^{\ulcorner \varphi_2 \urcorner}$	$2^{16} 3^{\ulcorner \varphi_1 \urcorner} 5^{\ulcorner \varphi_2 \urcorner}$
Fórmula	$\exists v_n \varphi$	$\forall v_n \varphi$			
Número de Gödel	$2^{18} 3^{2n+1} 5^{\ulcorner \varphi \urcorner}$	$2^{20} 3^{2n+1} 5^{\ulcorner \varphi \urcorner}$			

Como la descomposición en primos de los naturales es única, se obtiene que cada número de Gödel corresponde a un símbolo, término o fórmula, por lo que la asignación es inyectiva.

Los siguientes teoremas, Teoremas de Incompletitud de Gödel, proporcionan características importantes sobre la incompletitud y la inconsistencia de la Aritmética de Peano. Estas características se podrán extrapolar a otras teorías en las que los axiomas de la Aritmética de Peano sean ciertos.

Teorema 2.26. *[Halbeisen and Krapf, 2020, Teorema 10.12]* ***Primer teorema de Incompletitud:***

Sea $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}_{PA}$ un lenguaje gödelizable y sea $\boldsymbol{T}$ una $\mathscr{L}$-teoría gödelizable. Si $\boldsymbol{T}$ es consistente entonces $\boldsymbol{T}$ es incompleta.

Con el lenguaje de la teoría de la aritmética de Peano se puede construir la consistencia de PA como una sentencia, $con(PA)$, de tal forma que si es cierta, entonces la teoría es consistente. Vemos que esta sentencia no es demostrable.

Teorema 2.27. *[Halbeisen and Krapf, 2020, Teorema 11.1]* ***Segundo teorema de Incompletitud:***

$$PA \nvdash con(PA)$$

Es decir, no se puede probar si la aritmética de Peano es consistente con la propia aritmética de Peano.

En conclusión tenemos que toda teoría en la que los axiomas de la Aritmética de Peano sean ciertos no se podrá demostrar su consistencia dentro de la teoría.

3. Teoría de Conjuntos

Esta sección introduce la teoría de conjuntos, con la que se formaliza la teoría de conjuntos "naive" que estabamos utilizando. Primero se dan los axiomas en formato de lista. La axiomática que se utiliza en este trabajo es la clásica, aunque algunos axiomas puedan verse como redundantes. Existen más versiones de los axiomas que evitan estas redundancias y de las cuales se obtiene la misma teoría. A continuación se detalla como es el lenguaje de primer orden correspondiente a la teoría de conjuntos y se dan los axiomas como fórmulas del lenguaje. Como se ha explicado el en la sección anterior estos axiomas son añadidos a los axiomas lógicos $L_0, ..., L_{16}$ aunque no estén escritos expresamente. También, como se explicó en la sección anterior, se pueden añadir símbolos de relación y funciones al lenguaje que serán utilizados para expresar fórmulas de la teoría de manera más sencilla.

Para esta sección se ha seguido [Halbeisen and Krapf, 2020, Capítulo 13] y [Mack, 2006, Capítulo V] como referencias.

3.1. Los axiomas de Zermelo-Fraenkel

En primer lugar, presentamos de manera informal, descriptiva y resumida los axiomas de la teoría de ZF con el objetivo de facilitar la lectura. Algunas nociones empleadas se definirán cuando se formalicen y desarrollen los axiomas.

0. **Axioma de Extensionalidad:**
   Dos conjuntos con los mismos elementos son iguales.

1. **Axioma del Conjunto Vacío:**
   Existe un conjunto que no tiene elementos.

2. **Axioma de Formación de Pares:**
   Dados dos conjuntos x e y, existe un conjunto cuyos elementos son x e y.

3. **Axioma de la Unión:**
   Dado un conjunto x, existe un conjunto cuyos elementos son todos los elementos de x.

4. **Axioma del Infinito:**
   Existe un conjunto inductivo que tiene como elemento a el $\emptyset$.

5. **Esquema axiomático de Separación:**
   Dados una fórmula φ de la teoría de conjuntos y un conjunto x, existe el conjunto de todos los elementos de x que verifican φ.

6. **Axioma de las Partes de un conjunto:**
   Dado un conjunto x, existe un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de x.

7. **Esquema axiomático de Reemplazamiento:**
   Dados f una fórmula que determina una función y un conjunto x, existe un conjunto cuyos elementos son todas las imágenes de la función de los elementos de x.

8. **Axioma de Fundamento:**
   Cada conjunto no vacío x contiene un elemento y disjunto con x.

C **Axioma de Elección:**
   Dado un conjunto no vacío x, cuyos elementos son conjuntos no vacíos, existe un conjunto y formado por un único elemento de cada uno de los elementos de x.

Se puede observar que todos los axiomas excepto quizá el de Elección parecen sencillos o intuitivos.

3.2. Desarrollo de la axiomatización

La teoría de Conjuntos se puede axiomatizar añadiendo al lenguaje de la lógica de primer orden una signatura sin funciones y con una única relación (binaria), la relación de pertenencia, $\mathscr{L}_{ST} = \{\in\}$. Por tanto, se trata de una teoría numerable.
Para facilitar la escritura, añadiremos nuevos símbolos de relaciones y funciones a medida que se presentan y se desarrollan los axiomas. De esta manera, formalizaremos nociones que se han manejado hasta ahora desde un punto de vista intuitivo como <u>pertenencia</u>, <u>vacío</u> o <u>número natural</u>.

0. **Axioma de Extensionalidad:**

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

En otras palabras, dos conjuntos x e y con los mismos elementos son iguales. El recíproco sabemos que es cierto porque dos términos iguales deben mantener las mismas relaciones, por el axioma lógico L_{15}

$$(\varphi_1 = \varphi_1' \wedge ... \wedge \varphi_n = \varphi_n') \rightarrow (R(\varphi_1, ..., \varphi_n) \rightarrow R(\varphi_1', ..., \varphi_n'))$$

En este caso con la relación de pertenencia $\in$, se cumple lo siguiente

Proposición 3.1.

$$(\forall x)(\forall y)[(x = y) \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$$

Con esta información podemos definir las relaciones (binarias) de distinto, no pertenencia, contención y contención estricta.

Definición 3.2. Dados x e y dos conjuntos, las relaciones $\neq$, $\notin$, $\subseteq$, $\subsetneq$ se definen respectivamente como

$$\begin{aligned} x \neq y &:\Leftrightarrow \neg(x = y) \\ x \notin y &:\Leftrightarrow \neg(x \in y) \\ x \subseteq y &:\Leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \\ x \subsetneq y &:\Leftrightarrow x \subseteq y \wedge x \neq y \end{aligned}$$

1. **Axioma del Conjunto Vacío:**

$$\exists x \forall z (z \notin x)$$

Proposición 3.3. *El conjunto vacío es único*

$$\exists! x \forall z (z \notin x)$$

Demostración. Se supone que existen dos conjuntos, x_1 y x_2 tal que

$$(\forall y)(y \notin x_1) \wedge (y \notin x_2)$$

Entonces se tiene que $(\forall y)(y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)$ entonces por la Proposición 3.3, $x_1 = x_2$. □

Este resultado nos permite definir de forma unívoca el conjunto vacío.

Definición 3.4. El conjunto vacío $\emptyset$, se define como

$$\emptyset = u :\Leftrightarrow \forall z(z \notin u)$$

2. **Axioma de Formación de Pares:**

$$\forall x \forall y \exists u \forall z(z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

Gracias a este axioma podemos definir la función $\{\cdot, \cdot\}$ como

Definición 3.5. Dados x, y dos conjuntos se define

$$\{x, y\} = u :\Leftrightarrow \forall z(z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

Proposición 3.6. *Si x es un conjunto, entonces existe un conjunto en el que x es el único elemento.*

Demostración. Por el axioma de Formación de Pares, si se considera el conjunto x, entonces existe un conjunto $z = \{x, x\}$ en el que todo elemento en z es igual a x. □

Gracias a este axioma, junto con el axioma de Extensionalidad, se puede definir la noción de par ordenado.

Definición 3.7. Dados x, y dos conjuntos se define el **par ordenado**

$$\langle x, y\rangle = u :\Leftrightarrow \forall z(z \in u \leftrightarrow (z = \{x\} \vee z = \{x, y\}))$$

Por tanto se tiene que $u = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x, y\}, \{x\}\}$

Proposición 3.8. *Dados x, y dos conjuntos, entonces se cumple que $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ si y sólo si $x = x' \wedge y = y'$.*

3. **Axioma de la Unión:**

$$\forall x \exists u \forall z(z \in u \leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge z \in w))$$

Definición 3.9. Definimos la **unión de un conjunto**

$$\bigcup x = u :\Leftrightarrow \forall z(z \in u \leftrightarrow (\exists w)(z \in w \wedge w \in x))$$

Ejemplo. Si se tiene el conjunto $x = \{\{a, b\}, \{c, \{a, d\}\}, \{b, c\}\}$ entonces su unión es $\bigcup x = \{a, b, c, \{a, d\}\}$.

Empleando el axioma de Formación de Pares podemos definir

Definición 3.10. La unión de dos conjuntos x e y

$$x \cup y = u :\Leftrightarrow u = \bigcup\{x, y\}$$

Con el axioma de la Unión junto con el de Formación de Pares se pueden crear conjuntos de manera inductiva, y se puede añadir el siguiente símbolo de relación.

Definición 3.11. Dado un conjunto x se define

$$ind(x) :\Leftrightarrow \forall y(y \in x \to (y \cup \{y\}) \in x)$$

Se dice que un conjunto x es **inductivo** si $ind(x)$ es verdad.

Definición 3.12. Al conjunto $x \cup \{x\}$ se llama **conjunto siguiente** y se denota por

$$x + 1 = u :\Leftrightarrow u = x \cup \{x\}$$

4. **Axioma del Infinito:**

$$\exists I(\emptyset \in I \wedge ind(I))$$

Definición 3.13. A todo conjunto que verifica el axioma del Infinito se llama **conjunto sucesor**.

5. **Esquema axiomático de Separación:**
Dada una fórmula $\varphi(z)$ de $\mathscr{L}_{ST}$ entonces

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$$

Denotamos a este conjunto por

$$\{z \in x : \varphi(z)\}$$

escribimos

$$y := \{z \in x : \varphi(z)\} :\Leftrightarrow (\forall z \in y)(z \in x \wedge \varphi(z))$$

Este axioma permite separar elementos de un conjunto dada una propiedad, φ. Obsérvese que $\{z \in X : \varphi(z)\}$ es un conjunto pero $\{z : \varphi(z)\}$ no es un conjunto. Ver Sección 4.1.

Definición 3.14. Sea x un conjunto, consideremos la fórmula

$$\varphi(z) \equiv \forall u(u \in x) \wedge (z \in u)$$

aplicando el esquema axiomático de Separación al conjunto $\bigcup x$ y a la fórmula $\varphi(x)$, definimos la **intersección de x** como

$$\bigcap x := \{z \in \bigcup x : \varphi(x)\} = \{z \in \bigcup x : (\forall u(u \in x) \wedge (z \in u)\}$$

Ejemplo. Si se tiene el conjunto x al igual que en el ejemplo de $\bigcup x$,
$x = \{\{a, b\}, \{c, \{a, d\}\}, \{b, c\}\}$, entonces $\bigcap x = \{b\}$

Definición 3.15. Sean x, y dos conjuntos, se puede definir la **intersección de dos conjuntos** como

$$x \cap y :\Leftrightarrow u = \bigcap \{x, y\}$$

Obsérvese que en este caso $x \cap y = \{z \in x : z \in y\}$, por lo que se puede definir también usando el esquema axiomático de Separación directamente.

Definición 3.16. La **diferencia** x **menos** y se define con la fórmula $\varphi(z) \equiv z \notin y$

$$x \backslash y = u :\Leftrightarrow u = \{z \in x : z \notin y\}$$

6. **Axioma de las Partes de un conjunto:**

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

Definición 3.17. Se define el **partes de un conjunto** como

$$\mathscr{P}(x) = y :\Leftrightarrow \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

Con este axioma podemos definir el producto cartesiano.

Definición 3.18. Dados dos conjuntos A y B el **producto cartesiano** se puede definir como

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

Para poder probar que los pares ordenados forman un conjunto utilizando el esquema axiomático de Separación necesitamos encontrar un conjunto soporte. Como $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ observamos que $\{x\} \subseteq (A \cup B)$ y $\{x, y\} \subseteq (A \cup B)$, entonces $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$, y por lo tanto $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$. En otras palabras, necesitamos hacer uso del axioma de Unión y de Partes, además del de Separación.

Definición 3.19. Una **relación** R entre dos conjuntos A y B es un subconjunto de $A \times B$, tal que todos sus elementos son pares ordenados. Se definen

$$\text{Dominio de la relación: } dom(R) = \{x : \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$$
$$\text{Imagen de la relación: } im(R) = \{y : \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

Definición 3.20. Una **función** es una relación, f tal que

$$(\forall x \in dom(f))(\exists ! y(\langle x, y\rangle \in f))$$

se escribe $f : A \to B$ donde $A = dom(f)$ y $B = im(f)$

Tenemos disponibles los conceptos fundamentales relativos a funciones. Empleando estas nociones se pueden definir otras como restricción, sobreyectiva, inyectiva , biyectiva, etc. Para evitar alargar en exceso esta sección excluiremos su definición formal, en caso de ser necesario su definición se puede consultar en [Halbeisen and Krapf, 2020, Capítulo 13].

Con los axiomas desarrollados hasta ahora es posible formalizar el concepto "naive" que se tenía de los naturales como un conjunto.

Definición 3.21. El conjunto de los **números naturales** es un conjunto sucesor que está contenido en cualquier conjunto sucesor y se denota por ω.

Teorema 3.22. *El conjunto de los números naturales existe.*

Demostración. Por el axioma del Infinito existe un conjunto sucesor, que denotamos por I_0. Por el axioma de Partes y Separación podemos considerar v el conjunto de todos los sucesores de I_0

$$v = \{x \in \mathscr{P}(I_0) : \emptyset \in x \wedge ind(x)\}$$

Definimos $\omega = \bigcap v$. Tenemos que ver que ω es sucesor y que está contenido en cualquier conjunto sucesor.

Se prueba que ω es un conjunto sucesor.

- $\emptyset \in \omega$ porque para cada elemento $y \in v$, $\emptyset \in y$
- Si $z \in \omega$ entonces $\forall y \in v$, $z \in y$ como y es inductivo, $z + 1 \in y$ luego $z + 1 \in \omega$

Falta por ver que está contenido en cualquier conjunto sucesor. Sea u un conjunto sucesor. Entonces $\omega \cap u$ es un conjunto sucesor, ya que la intersección de dos conjuntos sucesores es sucesor, y además está contenido en I_0, por que $\omega \subseteq I_0$. Por la definición de intersección $\omega \cap u \subseteq \omega$. También se tiene que $\omega \subseteq \omega \cap u$, por la definición de ω. Por lo tanto $\omega = \omega \cap u$ luego $\omega \subseteq u$ □

De esta forma, llamamos a los elementos de ω números naturales y los denotamos de la forma habitual como

$$0 := \emptyset \qquad 1 := \{0\} := 0 + 1 \qquad 2 := \{0, 1\} = 1 + 1 \qquad 3 := \{0, 1, 2\} = 2 + 1$$

Proposición 3.23. *Todo número natural n o es el vacío o es de la forma $n = m + 1$ dónde m es otro número natural.*

Demostración. Claramente $\emptyset \in \omega$. Para el caso $n \in \omega$ y $n \neq \emptyset$, se considera el conjunto $A = \{u \in \omega : n \neq \emptyset \wedge (\exists m)(m \in \omega \wedge n = m+1)\}$, como A es sucesor, entonces $\omega \subseteq A$. □

Por el axioma de pares, vemos que todos los números naturales son conjuntos.

Definición 3.24. Una fórmula φ con variables libres x, y se dice que **determina una función** si

$$\forall x \forall y \forall z((\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z)) \to y = z)$$

7. **Esquema axiomático de Reemplazamiento:**

   Dada una fórmula φ que determina una función

$$\forall A \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \varphi(x, y)))$$

8. **Axioma de Fundamento:**

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \to (\exists y)(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$$

Proposición 3.25. *Si x es un conjunto entonces $x \notin x$*

Demostración. El caso en el que $x = \emptyset$ es inmediato. En el caso de $x \neq \emptyset$, sabemos por Proposición 3.6 que $\{x\}$ es un conjunto, entonces por el axioma de Fundamento existe $y \in \{x\}$ tal que $y \cap \{x\} = \emptyset$. El único elemento de $\{x\}$ es x entonces $y = x$ y por lo tanto $x \cap \{x\} = \emptyset$ □

Corolario 3.26. *Si x es un conjunto entonces $x \cup \{x\} \neq x$*

Demostración. Por el axioma de la Unión se tiene que $x \cup \{x\} = \{x, \{x\}\}$ entonces si $x \cup \{x\} = x$, se cumpliría que $x \in x$ y se ha visto que no es posible. □

Proposición 3.27. *No existe una una sucesión infinita $x_0 \ni x_1 \ni x_2 ....$*

Demostración. Suponemos que existe la sucesión, es decir, existe x_0 e inductivamente

$$\forall n \in \omega \exists (x \in x_n)$$

que denotamos por x_{n+1} Aplicamos el axioma de Reemplazamiento para $A = \omega$ y $\varphi(k, y) \equiv y = x_k$. Entonces existe

$$B = \{x_n : n \in \omega\} = \{x_0, x_1, ...\}$$

Este conjunto x no cumple el axioma de Fundamento, ya que para todo conjunto x_n, no se cumple que $x_n \cap x = \emptyset$ ya que $x_{n+1} \in x \cap x_n$ □

Teorema 3.28. *El conjunto de números naturales verifica los axiomas de Peano*

$$\begin{aligned}
P1 :& 0 \in \omega \\
P2 :& (\forall n)(n \in \omega \to (n+1) \in \omega) \\
P3 :& (\forall n)(n \in \omega \to (n+1) \neq 0) \\
P4 :& (\forall n)(\forall m)((n \in \omega \land m \in \omega \land (n+1) = (m+1)) \to (n = m)) \\
P5 :& (\forall x)(x \subseteq \omega \land 0 \in x \land (\forall n)(n \in x \to (n+1) \in x)) \to x = \omega)
\end{aligned}$$

El último axioma se trata del Principio de Inducción completa.

Demostración. $P1$ y $P2$, se cumplen por ser ω un conjunto sucesor.

$P3$ se cumple porque para todo $n \in \omega$ se cumple que $n \in n+1$.

$P4$ suponemos que existen tales conjuntos $n \in \omega$, $m \in \omega$, entonces $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$, si $n \neq m$ se daría el caso de $n \in m \land m \in n$, lo cual es un absurdo por Proposición 3.27.

$P5$ se cumple porque si existe un x con esas propiedades, entonces x es un conjunto sucesor y por definición de ω, se tiene que $\omega \subseteq x$.

□

Obsérvese que los axiomas de Peano son diferentes a los axiomas de la Aritmética de Peano, Section 2.3. La aritmética de Peano de define en su lenguaje de primer orden, sin embargo los axiomas de Peano describen los números naturales dentro del lenguaje de la teoría de conjuntos y se trata un lenguaje de segundo orden. Por otro lado, la inducción en la Aritmética de Peano es más débil, solo se cumple para fórmulas de primer orden formadas la suma, multiplicación o sucesor de elementos, mientras que la inducción de los Axiomas de Peano se cumple para cualquier $\mathscr{L}_{ST}$-fórmula.

El principio de Inducción es uno de los axiomas de Peano, entonces a partir de ahora haremos uso del principio de Inducción cuando sea necesario.

Con esto concluye, la axiomatización de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel que denotaremos por ZF. La axiomatización ZFC se construye añadiendo a ZF el siguiente axioma.

C **Axioma de Elección:**

Sea x un conjunto no vacío cuyos elementos son a su vez conjuntos no vacíos

$$(\exists y)(\forall z)(z \in x \to (\exists u_z)(u_z \in y \land y \cap z = \{u_z\}))$$

4. Clases y Ordinales

Si en la teoría de conjuntos no se definen bien los conjuntos se pueden producir algunas paradojas, como la de Russel, para evitar caer en ellas es necesario tener en cuenta que no toda colección de objetos puede ser un conjunto. Por ello se definirá la noción de clase, y se verán las diferencias entre clase y conjunto.

Por último, se definen los ordinales, una clase de conjuntos ordenados al cuales pertenecen los números naturales. Para poder construirlos vemos primero cómo son las relaciones de orden en esta teoría, y se verá se construyen con la relación dada por la pertenencia. Veremos las propiedades de los ordinales, el Teorema de Inducción Transfinita y el Teorema de Recurrencia Transfinita, este último nos servirán para generar nuevos conjuntos.

Cuando ya está la teoría formalizada se pasa a estudiar su consistencia, se hará utilizando los teoremas de completitud de Gödel.

Para esta sección se han utilizado [Ivorra Castillo, 2000, Capítulo 3] y [Halbeisen, 2012, Capítulo 3] como referencias.

4.1. Clases

Con el objetivo de simplificar la notación en el manejo de ordinales se introduce la noción de clase. El concepto de clase, surge de la idea que normalmente se tiene de un conjunto como una colección de objetos. Esta idea ingenua de conjunto es impracticable dado que conduce a paradojas como la paradoja de Russel.

La paradoja de Russel surge de considerar el conjunto de todos los conjuntos. Si este fuese un conjunto, A, entonces por el esquema axiomático de Separación, tomando $\varphi(x) \equiv x \notin x$, se construye el siguiente conjunto

$$B = \{x \in A : x \notin x\}$$

entonces se tiene que si $B \in B$ implica que $B \notin B$, lo cual es una contradicción. Por ello A no puede ser el conjunto de todos los conjuntos.

Definición 4.1. Sea φ una fórmula, una **clase** es una colección de conjuntos que cumple φ. Se expresa A, una clase, como

$$A = \{x : \phi(x)\}$$

donde ϕ es una fórmula.

Obsérvese que las clases no forman parte de la teoría de conjuntos. Todo conjunto es una clase, pero una clase no tiene porqué ser necesariamente un conjunto. Por ejemplo, la clase $A = \{x : x = x\}$ es la que contiene a todos los conjuntos se ha visto que no puede ser un conjunto, porque daría lugar a contradicciones. Las clases que no son conjuntos se denominan **clases propias**. También se puede dar el caso de una colección de conjuntos que no sea clase, es decir que no exista una fórmula que lo pueda describir. En [Ivorra Castillo, 2000, Pagina 136] se muestra un ejemplo de un objeto que no es una clase.

Para poder manejar las clases como si fuesen conjuntos vamos a definir una serie de relaciones entre clases y entre clases y conjuntos. Abusando de la notación se emplearan los mismos símbolos $\in$ y $=$ que para conjuntos, dado que el objetivo principal es facilitar la escritura y la lectura. Sean $A = \{x : \phi(x)\}$ y $B = \{x : \psi(x)\}$ dos clases, x, y, z conjuntos, entonces

- $x \in A :\Leftrightarrow \phi(x)$
- $y = A :\Leftrightarrow \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x))$

- $A = B :\Leftrightarrow \forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x))$ En otras palabras, ϕ y ψ son equivalentes.
- $A \in z :\Leftrightarrow \exists y \in z \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x))$
- $A \in B :\Leftrightarrow \exists y(y = A \wedge y \in B) \Leftrightarrow \exists y(\forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(x)) \wedge \psi(y))$

Repitiendo lo descrito en la sección 3 podemos extender otros símbolos como $\cap, \cup, \subseteq$ al lenguaje de clases.

Las fórmulas $A \in x$ y $A \in B$ implican que A es un conjunto. La implicación es cierta en ambos sentidos, se da también que si la clase A es conjunto entonces pertenece a otro conjunto, $\{A\}$.

Definición 4.2. Una **clase** M **es transitiva** si cumple que

$$\forall x \forall y((x \in y \wedge y \in M) \leftrightarrow x \in M)$$

4.2. Ordinales

Comenzaremos por recordar la definición de relación de orden.

Definición 4.3. Una relación de un conjunto x, $R \subseteq x \times x$, es una **relación de orden** en x si

$$\begin{aligned}
&(\forall u)(u \in x \to \langle u, u\rangle \in R) \\
&\wedge (\forall u)(\forall v)((\langle u, v\rangle \in R \wedge \langle v, u\rangle \in R) \to (u = v)) \\
&\wedge (\forall u)(\forall v)(\forall w)((\langle u, v\rangle \in R \wedge \langle v, w\rangle \in R) \to \langle u, w\rangle \in R)
\end{aligned}$$

Definición 4.4. Se llama **conjunto ordenado** al par (x, R), donde x es un conjunto y $R \subseteq x \times x$ es una relación de orden. Se escribe los elementos de la relación R, $\langle u, v\rangle \in R$ como $u \leq v$.

Definición 4.5. Un conjunto ordenado $(x, \leq)$ está **totalmente ordenado** si para cualesquiera dos elementos de x son siempre comparables

$$(\forall u)(\forall v)((u \in x \wedge v \in x) \to (u \leq v \vee v \leq u))$$

Definición 4.6. Sea $(x, \leq)$ un conjunto ordenado, un elemento u es el **primer elemento** de x si se cumple que

$$(\forall v)(v \in x \wedge u \leq v)$$

Definición 4.7. Se dice que un conjunto x está **bien ordenado** si está ordenado y todo subconjunto no vacío de x tiene un primer elemento.

Definición 4.8. Sea $(x, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado y $u \in x$. Se llama **segmento inicial** de u al conjunto

$$x_u = \{y \in x : y < u\}$$

Proposición 4.9. *Si $u \in x$ entonces, u es el primer elemento de $x \backslash x_u$.*

Definición 4.10. Definimos cuando un conjunto es **transitivo**

$$trans(x) :\Leftrightarrow \forall y(y \in x \to y \subseteq x)$$

es equivalente a $(\forall y)(\forall x)(z \in y \wedge y \in x \to z \in x)$

Ejemplo. El conjunto $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ es transitivo porque $\emptyset \subseteq x$ y $\{\emptyset\} \subseteq x$ pero $\{\{\emptyset\}\}$ no lo es, porque $\{\emptyset\} \nsubseteq \{\{\emptyset\}\}$

4.2.1. Relación de orden dada por la pertenencia

La relación de pertenencia no define un orden por lo general, vamos a introducir una relación de orden a partir de la relación de pertenencia.

Definición 4.11. Dado x un conjunto podemos definir una relación $R_\in \subseteq x \times x$

$$\langle y, z\rangle \in R_\in :\Leftrightarrow y = z \vee (y \neq z \wedge y \in z)$$

Proposición 4.12. *Si x es transitivo entonces $R_\in$ es una relación de orden.*

Demostración. Veamos que se cumplen las tres propiedades:

- $(\forall y)(y \in x \rightarrow \langle y, y\rangle \in R_\in)$ se cumple por la definición de $R_\in$.
- Dados $y, z \in x$ si se cumple que $\langle y, z\rangle \in R_\in$ y $\langle z, y\rangle \in R_\in$ entonces se tiene que $y = z \vee (y \neq z \wedge y \in z) \vee (z \neq y \wedge z \in y)$, por lo tanto si $x \neq y$ se daría el caso de que $y \in z \wedge z \in y$, que no es posible por el axioma de Fundamento, entonces $y = z$.
- Dados $y, z, w \in x$ si se cumple que $\langle y, z\rangle \in R_\in$ y $\langle z, w\rangle \in R_\in$ entonces se tiene que $y = z \vee (y \neq z \wedge y \in z)$ y $z = w \vee (z \neq w \wedge z \in w)$. Si alguna de las igualdades es cierta, se cumple $\langle y, w\rangle \in R_\in$. Si los tres conjuntos son distintos, como x es un conjunto transitivo se tiene que $y \in w$ y por tanto $\langle y, w\rangle \in R_\in$.

□

Con esta relación se pueden construir fórmulas que describan las definiciones anteriores, primer elemento, segmento inicial,etc.

Definición 4.13. Si suponemos que $(x, R_\in)$ está totalmente ordenado entonces u es un primer elemento de $(x, R_\in)$ si y solo si $min_\in(u, x)$, relación que se define como

$$min_\in(u, x) :\Leftrightarrow u \in x \wedge \forall y(y \in u \rightarrow y \notin x)$$

Porque por la definición de primer elemento no puede haber ningún elemento $y \in x$ tal que $\langle y, u\rangle \in R_\in$

Definición 4.14. Dado $y \in x$ el segmento inicial x_y según $R_\in$ es de la forma

$$x_y = \{z \in x : z \in y \wedge z \neq y\}$$

Definición 4.15. Entonces también podemos definir cuando un conjunto está bien ordenado por $R_\in$

$$wo_\in(x) :\Leftrightarrow ord_\in(x) \wedge \forall y \in \mathscr{P}(x)(y \neq \emptyset \rightarrow \exists z \in y\ min_\in(z, y))$$

Veamos que los números naturales son transitivos, y por tanto $(\omega, R_\in)$ es un conjunto ordenado.

Proposición 4.16. *El conjunto de los números naturales, ω, es un conjunto transitivo.*

Demostración. La demostración se hace por inducción. En el caso de $\emptyset \in \omega$ es trivial. Se supone que si $n \in \omega$ entonces $n \subseteq \omega$. Para $n + 1$, se quiere ver que $n + 1 \subseteq \omega$. Recordamos que $n + 1 = n \cup \{n\}$. Tomamos $x \in n + 1$, entonces

- si $x = n$, entonces $x \in \omega$
- si $x \in n$, entonces, como $n \subseteq \omega$, se tiene que $x \in \omega$

En conclusión $n+1 \subseteq \omega$ $\square$

Proposición 4.17. *Dado un conjunto x transitivo, entonces $\mathscr{P}(x)$ es transitivo.*

Demostración. Dado un elemento $y \in \mathscr{P}(x)$, por definición de partes, $y \subseteq x$. Vamos a ver que $y \subseteq \mathscr{P}(x)$. Si se toma un elemento de $z \in y$, se tiene que $z \in x$, y por la transitividad de x, $z \subseteq x$, luego $z \in \mathscr{P}(x)$. $\square$

Definición 4.18. Un conjunto es **ordinal** si es transitivo y está bien ordenado por $\in$

Como existen fórmulas para describir cuando un conjunto es transitivo y para cuando está bien ordenado podemos definir la clase de los ordinales por

Definición 4.19.

$$\Omega = \{x : trans(x) \wedge wo_{\in}(x)\}$$

Obsérvese que Ω no es un objeto de la teoría de conjuntos, ver Proposición 4.27, pero sí es una clase.

Definición 4.20. Un ordinal α es un **ordinal límite** si $\alpha = \bigcup \alpha$ y es un **ordinal sucesor** si existe $\beta \in \Omega$ tal que $\alpha = \beta + 1$

Otra caracterización de los ordinales viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 4.21. *Dado un conjunto x, es ordinal si y solo si existe una relación $\leq$ de orden en x tal que $(x, \leq)$ está bien ordenado y $\forall \gamma \in x$ se tiene que $x_\gamma = \gamma$*

Demostración. Probamos que si x es ordinal entonces existe $\leq$. Tomamos $\leq$ igual a $R_{\in}$. Basta ver que $x_\gamma = \gamma$ siendo

$$x_\gamma = \{y \in x : y \in \gamma \wedge y \neq \gamma\}$$

Claramente $x_\gamma \subseteq \gamma$. Dado $y \in \gamma$, como $\gamma \in x$ y x es un ordinal, entonces $\gamma \subseteq x$ por la transitividad de los ordinales, luego $y \in x$. Por el axioma de Fundamento $\gamma \notin \gamma$ y por tanto $y \neq \gamma$. Luego $y \in x_\gamma$.

Probamos que si se tiene una relación $\leq$ como la enunciada, entonces x es ordinal.

Vemos que $\leq$ es igual a $R_{\in}$. Dados $\alpha \in x$, $\gamma \in x$, por las propiedades de $\leq$ se cumplen las siguientes implicaciones

$$\alpha \leq \gamma \leftrightarrow (\alpha = \gamma \vee \alpha \in x_\gamma) \leftrightarrow (\alpha = \gamma \vee (\alpha \neq \gamma \wedge \alpha \in \gamma))$$

.

Como x está bien ordenado solo haría falta probar que es transitivo. Dado $\alpha \in x$, si se cumple que $\gamma \in \alpha$ se tiene $\gamma \in x_\alpha = \{\gamma \in x : \alpha \in \gamma\}$, entonces se cumple $\gamma \in x$. $\square$

La siguiente proposición enuncia algunas propiedades de los ordinales.

Proposición 4.22. *Para todos α, β ordinal se cumple que*

1. *Si $\alpha \neq \beta$, entonces $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$*
2. *$\alpha = \emptyset$ o $\emptyset \in \alpha$*
3. *Solo puede darse uno de estos casos: $\alpha \in \beta$ o $\alpha = \beta$ o $\beta \in \alpha$*
4. *Si $\gamma \in \alpha$ entonces γ es un ordinal.*
5. *$\alpha + 1$ es un ordinal.*

6. *Si $\alpha \in \beta$, entonces $(\alpha+1) \subseteq \beta$. En otras palabras $(\alpha+1)$ es el menor ordinal que contiene a α*

7. *Si $\alpha \neq 0$ se tiene que α es un ordinal límite o un ordinal sucesor.*

Demostración. 1. La implicación de derecha a izquierda se tiene por la propiedad de la transitividad de β. La de izquierda a derecha se da porque si $\alpha \subseteq \beta$ entonces el conjunto $\beta \backslash \alpha$, que es un subconjunto de β no vacío, tiene un primer elemento $\gamma \in \beta$ y $\gamma = \alpha$ por ser β ordinal, por el Teorema 4.21.

2. El conjunto vacío es un ordinal. Y si α es distinto del vacío entonces $\emptyset \subseteq \alpha \to \emptyset \in \alpha$ por el apartado anterior.

3. Comprobamos que $\alpha \cap \beta$ que es un ordinal. Se sabe que $\alpha \cap \beta \notin \alpha \cap \beta$ por lo que uno de estos dos casos se cumple, $\alpha \cap \beta \notin \alpha$ o $\alpha \cap \beta \notin \beta$. Si estamos en el primer caso (análogo para el segundo), si $\alpha \cap \beta \neq \alpha$ entonces $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ por 1. esto implica que $\alpha \cap \beta \in \alpha$. La única opción es $\alpha \cap \beta = \alpha$, luego $\beta \subseteq \alpha$. Por tanto, se tienen dos opciones $\beta = \alpha$ o $\beta \neq \alpha$, lo que implica $\beta \in \alpha$.

4. Si $\sigma \in \gamma$ entonces se tiene, utilizando Teorema 4.21, que $\gamma_\sigma = (\alpha_\gamma)_\sigma = \alpha_\sigma = \sigma$. Por lo que γ es un ordinal.

5. Todos los elementos de $\alpha + 1$ son o bien elementos de α o bien son α. Si $\gamma \in \alpha$ entonces, por Teorema 4.21, $\gamma = \alpha_\gamma = \{x \in \alpha : x \in \gamma\} = \{x \in \alpha \cup \{\alpha\} : x \in \gamma\} = (\alpha+1)_\gamma$ Donde para la tercera igualdad se ha usado que $\alpha \notin \gamma$. Si $\gamma = \alpha$ entonces $\alpha = (\alpha+1)_\alpha$

6. Si $\alpha \in \beta$, por 1. $\alpha \subseteq \beta$. Luego $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$.

7. Se supone que $\alpha \neq \bigcup \alpha$, por la transitividad se cumple que $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$, por la hipótesis se tiene $\alpha \backslash \bigcup \alpha \neq \emptyset$. Si se considera β el primer elemento de $\alpha \backslash \bigcup \alpha$ entonces $\beta \in \alpha$ y β y $\beta + 1$ son ordinales y por 4,5,6 $\beta + 1 \subseteq \alpha$. Entonces se tienen tres casos por el apartado 3

   - $\alpha \in \beta + 1$, no puede ser porque implicaría que $\alpha \in \alpha$ que es una contradicción.
   - $\beta + 1 \in \alpha$, por la definición de unión $\beta + 1 \subseteq \bigcup \alpha$. Como $\beta \in \beta + 1$, $\beta \in \bigcup \alpha$. Pero esto contracide la hipótesis de $\beta \in \alpha \backslash \bigcup \alpha$
   - $\alpha = \beta + 1$, se tiene que cumplir por ser el único caso posible.

□

Proposición 4.23. *ω es un ordinal .*

Demostración. Se ha probado antes que ω es transitivo. Veamos que para cada $n \in \omega$, n coincide con su segmento inicial, para poder utilizar Teorema 4.21. Haremos la prueba por inducción.

- Si $n = \emptyset$ el segmento inicial es $\emptyset$.
- Si $n = m + 1 = \{m\} \cup m$. El segmento inicial es

$$\omega_n = \{x \in \omega : x \in n\} = \{x \in \omega : x = m \vee x \in m\} = \{m\} \cup \omega_m$$

  Por hipótesis de inducción $\omega_m = m$, y por tanto $\omega_n = \{m\} \cup m = n$

□

De estas propiedades se concluye lo siguiente.

Corolario 4.24. *Todos los números naturales son ordinales.*

Corolario 4.25. ω *es un ordinal límite.*

Proposición 4.26. *Toda clase de ordinales no vacía tiene mínimo.*

Demostración. Sea A una clase de ordinales no vacía, vamos a probar que A tiene mínimo. Si $A = \{\alpha\}$ entonces α es el mínimo. En otro caso, se cumple que por Proposición 4.22 3, A contiene un ordinal δ tal que $\delta \cap A \neq \emptyset$, llamemos x a la intersección, entonces x es un conjunto no vacío de ordinales. Sea $\alpha \in x$ un ordinal. Sea γ el mínimo elemento de $x \cap (\alpha \cup \{\alpha\})$, sabemos que γ existe porque los ordinales están bien ordenados, entonces $\gamma \subseteq (\alpha \cup \{\alpha\})$. Entonces todo ordinal $\beta \in \gamma$ pertenece a $\alpha \cup \{\alpha\}$ pero no a $x \cap (\alpha \cup \{\alpha\})$, entonces γ es el mínimo elemento en x y por tanto en A. $\square$

El siguiente resultado se conoce como la paradoja de Burali-Forti.

Proposición 4.27. Ω *no es un conjunto.*

Demostración. Suponemos que Ω es un conjunto, entonces es ordinal, por Definición 4.18. Ω es transitivo, por Proposición 4.22.5. Si $\alpha \in \Omega$ entonces $\alpha + 1 \in \Omega$ y $\alpha \subseteq \Omega$. Por otra parte, por Proposición 4.26 Ω está bien ordenado por $R_\in$. Entonces si es transitivo y está bien ordenado es un ordinal y se cumpliría que $\Omega \in \Omega$ que contradice el axioma de Fundamento. $\square$

Teorema 4.28. *(Teorema de Inducción transfinita) Sea C una clase de conjuntos ordinales en el que se cumple que*

(a) $\emptyset \in C$

(b) Si α está en C, entonces $\alpha + 1$ también está en C

(c) Si α es un ordinal límite y $\forall \beta \in \alpha$ β está en C entonces α está en C

Entonces $C = \Omega$

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Suponemos que $C \neq \Omega$. Luego $\Omega \backslash C \neq \emptyset$, por Proposición 4.26, esta clase tiene un mínimo $\alpha \in \Omega \backslash C$. Por (a), $\alpha \neq \emptyset$. Como α es mínimo entonces $\forall \beta \in \alpha$ $\beta \in C$. Pero $(b), (c)$ implica que $\alpha \in C$. Entonces llegamos a un absurdo, porque por hipótesis se tenía $\alpha \notin C$. $\square$

4.3. Recurrencia Transfinita

La recurrencia transfinita es un propiedad que permite la construcción de ciertos conjuntos. La idea es, que dada una función para los primeros ordinales, se pueda extender para el resto. Como los ordinales de construyen a partir de los anteriores, se pueden utilizar como herramienta para construir objetos que dependan también de los anteriores, de tal forma que cada conjunto se asocia con un ordinal. A diferencia del esquema axiomático de Reemplazamiento, la función que se construye con la recurrencia se describe con los pares ordenados tal que el primer elemento es siempre un ordinal. Mientras que en el esquema axiomático simplemente deben pertenecer a cualquier conjunto.

Con esta propiedad se pueden construir también funciones como la suma o la multiplicación de ordinales. Las cuales se pueden pensar como recursivas en el sentido intuitivo de la palabra, teniendo la suma de dos elementos se puede definir la suma del siguiente ordinal sumando uno a la que ya se tenía, se verá de manera formal en un ejemplo.

Definición 4.29. Dada una fórmula $F(x, y)$ que determina una función, por definición, para cada x existe un único $f(x)$ tal que $F(x, f(x))$ se satisface y dado $\alpha \in \Omega$ por el esquema axiomático de Reemplazamiento existe

$$B_\alpha = \{y : \exists((x \in \alpha \wedge F(x, y))\}$$

Denotamos por F_α a la función de dominio α y rango B_α definida por F., luego

$$F_\alpha = \{\langle \beta, f(\beta)\rangle : \beta \in \alpha\}$$

Teorema 4.30. *Sea F una fórmula que determina una función. Entonces existe una única fórmula $G(x, y)$ que determina una función $\forall\alpha \in \Omega$, tal que para cada $\alpha \in \Omega$*

$$g(\alpha) = f(G|_\alpha)$$

Demostración. Existencia:
Dado $\beta \in \Omega$ una **β-aproximación de** f es una fórmula G que determina una función sobre Ω y tal que para todo $\gamma \in \beta$ $g(\gamma) = f(G|_\gamma)$

Se prueban los siguientes resultados.

(a) La β-aproximación de f es única.

Supongamos que G y G' son dos β-aproximaciones distintas. Sea $\alpha \in \beta$ el mínimo tal que $g(\alpha) \neq g'(\alpha)$, luego para todo $\delta \in \alpha$ se tiene que $g(\delta) = g'(\delta)$. Por tanto se tiene que

$$G|_\alpha = \{\langle \delta, g(\delta)\rangle \delta \in \alpha\} = \{\langle \delta, g'(\delta)\rangle : \delta \in \alpha\} = G'|_\alpha.$$

En consecuencia vemos que

$$g(\alpha) = f(G|_\alpha) = f(G'|_\alpha) = g'(\alpha)$$

Contradicción con la hipótesis de que $g(\alpha) \neq g'(\alpha)$.

(b) Si G es un a β-aproximación de f y $\gamma \in \beta$ entonces por transitividad G es una γ-aproximación de f.

Basta con observar que si $\delta \in \gamma$ entonces $\delta \in \beta$. Luego para todo $\delta \in \gamma$ se cumple que $g(\delta) = f(G|_\delta)$

(c) Consideramos C la subclase de Ω de los ordinales β tales que existe una β-aproximación de f. Veamos que C es Ω usando el principio de Inducción transfinita.

Primero vemos que $0 \in C$. Basta con tomar la función determinada por la fórmula $G^{(0)}(x, y) \equiv y = 0$. La condición se cumple trivialmente porque no hay ningún elemento en 0.

Dado $\alpha \in \Omega$, ordinal sucesor $\alpha = \beta + 1$, suponemos que $\beta \in C$. Vamos a probar que $\alpha \in C$. Como $\beta \in C$ existe G una β-aproximación tal que

$$\forall\gamma \in \beta \quad g(\gamma) = f(G|_\gamma)$$

Se va a construir una α-aproximación, para ello definimos

$$\tilde{g}(\alpha) = \begin{cases} g(\delta) & \text{si } \delta \neq \alpha \\ f(G|_\alpha) & \text{si } \delta = \alpha \end{cases}$$

Formalmente, $\tilde{g}$ está dada por la fórmula

$$\tilde{G}(x, y) \equiv (x = \alpha \to y = f(G|_\alpha)) \vee (x \neq \alpha \to y = g(x))$$

Luego $\tilde{G}$ determina una función sobre Ω. Además es una α-aproximación, $\tilde{g}(\alpha) = f(G|_\alpha)$ si $\gamma \in \alpha$

- $\tilde{g}(\alpha) = f(G|_\alpha)$
- $\tilde{G}|_\alpha = \{(\delta, \tilde{g}(\delta)) : \delta \in \alpha\} = \{(\delta, g(\delta)) : \delta \in \alpha\} = G|_\alpha$

Luego $\tilde{g}(\alpha) = f(\tilde{G}|_\alpha)$

Dado un ordinal límite $\alpha \in \Omega$, tal que para todo $\beta \in \alpha$ se cumple que $\beta \in C$, veamos que $\alpha \in C$

Se construye la mima fórmula que en el caso de un ordinal sucesor. Para probar que está bien definida nos fijamos que si $\beta \in \alpha$ y $\gamma \in \alpha$, los dos ordinales distintos que pertenecen a C. Como $\beta \in C$ existe G una β-aproximación tal que $\forall \delta \in \beta\ g(\delta) = f(G|_\delta)$, igual para γ existe G' una γ-aproximación tal que $\forall \delta \in \gamma\ g'(\delta) = f(G'|_\delta)$. Como β y γ son ordinales, se tienen que cumplir uno de los siguientes casos $\beta \in \gamma$ o $\gamma \in \beta$. Supongamos que $\beta \in \gamma$ (análogo al otro caso). Vamos a probar que para todo $\delta \in \beta\ g(\delta) = g'(\delta)$. Se cumple que si $\delta \in \beta$ por la transitividad de los ordinales entonces $\delta \in \gamma$

$$g(\delta) = f(G|_\delta) = f(G'|\delta) = g'(\delta)$$

Por (a) y (c) tenemos que $\forall \alpha \in \Omega$, existe una única α-aproximación $G^{(\alpha)}$. Por (b) tenemos que si $\gamma \in \beta$ entonces $G^{(\beta)}|_\gamma = G^{(\gamma)}|_\gamma$

Consideramos

$$G(x, y) \equiv (\exists \alpha \in \Omega)(x \in \alpha \rightarrow y = g^{(\alpha)}(x))$$

Esta fórmula define una función G sobre Ω tal que si $\delta \in \alpha\ g(\delta) = g^{(\alpha)}(\delta)$ y $G|_\delta = G^{(\alpha)}|_\delta$. Por lo tanto

$$g(\alpha) = g^{(\alpha+1)}(\alpha) = f(G^{(\alpha+1)}|_\alpha) = f(G|_\alpha)$$

Unicidad:

Suponemos que existen G y G', si existe α mínimo ordinal tal que $g(\alpha) \neq g'(\alpha)$ Entonces

$$G|_\alpha = \{\langle \beta, g(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\} = \{\langle \beta, g'(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\} = G'|_\alpha$$

Luego

$$g(\alpha) = f(G|_\alpha) = f(G'|_\alpha) = g'(\alpha)$$

□

Se da el ejemplo de como se puede construir la suma de ordinales a partir de la recurrencia transfinita.

Ejemplo. Se define la suma de cualquier ordinal β más un ordinal dado α. Se definen tres casos, cuando β es 0, caso de que β sea ordinal sucesor y cuando sea ordinal límite.

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$ si $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} (\alpha + \gamma)$ si β es un ordinal límite.

Para ver que la suma de ordinales está bien definida se utiliza el teorema de Recurrencia transfinita. Para poder aplicarlo hace falta buscar una fórmula $F_\alpha(x, y)$ que defina una función f_α tal que

$$\alpha + \beta = g_\alpha(\beta) = f_\alpha(G|_\beta)$$

donde $G|_\beta$ que es una función definida para todos los ordinales $\gamma \in \beta$ tal que $G|_\beta(\gamma) = g(\gamma)$.

Se construye dicha función

Definimos $f_\alpha(x) = 0$ si x no es una función, si x es una función

$$f_\alpha(x) \longmapsto \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ x(\beta)+1 & \text{si } dom(x) = \beta+1 \wedge \beta \in \Omega \\ \bigcup_{\delta\in\beta} x(\delta) & \text{si } dom(x) = \beta \wedge \beta \text{ es ordinal límite diferente de cero.} \\ 0 & \text{si es otro caso} \end{cases}$$

Se verifica que $\alpha+\beta = g_\alpha(\beta) = f_\alpha(G|_\beta)$, ya que $G|_\beta$ es una función definida para todo $\delta \in \beta$, tal que $G|_\beta(\delta) = \alpha + \delta$. Entonces por el teorema de Recurrencia transfinita queda construida la suma de ordinales.

Obsérvese que la suma de ordinales no es conmutativa. Por ejemplo

$$1 + \omega = \bigcup_{n\in\omega}(1+n) = \omega \neq \omega + 1$$

Otro ejemplo de una función construida a partir de la recurrencia transfinita es la multiplicación de ordinales.

Ejemplo. Sean α y β ordinales.

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \gamma) + \alpha$ si $\beta = \gamma + 1$
- $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma\in\beta}(\alpha \cdot \gamma)$ si β es un ordinal límite.

Para ver que está bien definida, se hace igual que en la suma de ordinales. Construimos la función f_α de la siguiente forma, $f(x)_\alpha = 0$ si x no es una función, en caso de que sí sea función entonces

$$f_\alpha(x) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x(\beta)+\alpha & \text{si } dom(x) = \beta+1 \wedge \beta \in \Omega \\ \bigcup_{\delta\in\beta} x(\delta) & \text{si } dom(x) = \beta \wedge \beta \text{ es ordinal límite diferente de cero.} \\ 0 & \text{si es otro caso} \end{cases}$$

Donde se ha usado la suma de ordinales definida anteriormente.

Se comprueba que la fórmula G dada por el teorema de la Recurrencia transfinita define la multiplicación de ordinales.

La multiplicación de ordinales no es conmutativa. Veamos el siguiente caso

$2 \cdot \omega = \bigcup_{n\in\omega}(2 \cdot n) = \omega$, mientras que $\omega \cdot 2 = (\omega \cdot 1) + \omega = ((\omega \cdot 0) + \omega) + \omega = \omega + \omega)$

4.4. Consistencia en ZF

Usando la suma y la multiplicación de ordinales vamos a probar que se cumplen los axiomas de la aritmética de Peano para usar el segundo Teorema de Incompletitud de Gödel y concluir que no se puede demostrar la consistencia dentro de ZF.

Proposición 4.31. *ω cumple los axiomas de la aritmética de Peano ($\omega \models PA$), Section 2.3 en ZF.*

Demostración. Recordamos el lenguaje de la aritmética de Peano $\mathscr{L}_A = \{0, s, +, \cdot\}$, definimos estas funciones en teoría de conjuntos. Sean α β ordinales, $0 = \emptyset$; $s(x) = x + 1$, el sucesor de un conjunto; $\alpha + \beta$ definido como la suma de ordinales; $\alpha \cdot \beta$ el producto de ordinales.

Probemos ahora que los axiomas de Section 2.3 son ciertos en ω.

PA_0 demostrado en Proposición 4.31, el $P3$. PA_1, se hizo la prueba en Proposición 4.31, el $P4$.

PA_2, PA_3, PA_4 y PA_5 se cumplen por la construcción de la suma y la multiplicación.

PA_6 Para todo $x \in \omega$ tal que se cumpla $\varphi(0) \wedge (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$. Sea $x = \{n \in \omega : \varphi(n)\}$, es un conjunto, y un conjunto sucesor contenido en ω, por lo tanto $x = \omega$.

□

Al igual que se demostró que con el segundo Teorema de Incompletitud de Gödel Teorema 2.27 que no se podía probar la consistencia de la Axiomática de Peano con sigo misma, lo mismo sucede con la Axiomática de Zermelo Fraenkel.

Proposición 4.32. $Con(ZF) \rightarrow Con(PA)$

Demostración. Si existiese un modelo de ZF, entonces ω estaría contenido en él. Sabiendo que $\omega \models PA$, Proposición 4.31 entonces se cumple que todo modelo de ZF contiene un modelo de PA. □

Por este Teorema esta proposición se puede concluir entonces:

Corolario 4.33.

$$ZF \nvdash Con(ZF)$$

Este corolario también se cumple con ZFC, y la demostración se hace de forma análoga.

5. Modelos y submodelos en ZF

5.1. Modelos de ZF: El universo V

Se ha visto en la primera sección nociones de la teoría de modelos, y qué significa que una teoría tenga un modelo. Por lo que es normal preguntarse si la teoría de conjuntos tiene modelos o no. Pero por lo visto en Section 4.4 no se puede saber si la teoría de conjuntos es consistente o no. Si asumimos que ZF es consistente, entonces por el Teorema de Completitud de Gödel Teorema 2.22, ZF tiene un modelo **M**. Se va a estudiar la estructura de **M**. Se comprueba que existe una estructura que siguen todos los modelos, la cual se llama Jerarquía Acumulativa. La clase de todos los conjuntos, se denomina universo de von Neumann y se escribe **V**, también sigue esa misma estructura.

Para esta sección se han seguido [Halbeisen and Krapf, 2020, Capítulo 14], [Kunen, 1980, Capítulo IV] y [Ivorra Castillo, 2000, Capítulo 12] como referencias.

Definición 5.1. Cierre transitivo: Sea S un conjunto cualquiera. Se construye por inducción.

$$S_0 = S$$
$$S_{n+1} = \bigcup S_n$$

se define

$$TC(S) = \bigcup_{n\in\omega} S_n$$

y por el esquema axiomático de Reemplazamiento, si $\varphi(x,y) \equiv \exists n \in \omega(x = n \to y = S_n)$, entonces $\{S_0, S_1, ...\}$ es un conjunto. Entonces por el axioma de la Unión $TC(S)$ es un conjunto.

Ejemplo. Si se tiene un conjunto no transitivo

$$\begin{aligned}
&S = \{\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}\} = S_0\\
&S_1 = \bigcup S_0 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}\\
&S_2 = \bigcup S_1 = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}\\
&S_3 = \{\emptyset\}\\
&S_4 = \emptyset\\
&TC(S) = ((S_0 \cup S_1) \cup S_2) \cup S_3 =, \{\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}
\end{aligned}$$

Veamos que existen infinitos S_n $n \in \omega$. Si $x_1 \in S_1$ si y solo si $\exists x_0 \in S_0$ tal que $s_0 \ni x_1$. Entonces por inducción, $x_n \in S_n$ si y sólo si $\exists x_0 \in S_0, \dots \exists x_n \in S_n$ tal que $x_0 \ni x_1 \ni \dots \ni x_n$. Como por el axioma de Fundamento, Proposición 3.27, no existe una sucesión infinita tal que $x_0 \ni x_1 \ni \dots$ Aunque S_n sea un número finito, $TC(s)$, no tiene porque ser un conjunto finito.

Ejemplo. Sea $S = \{\omega\}$, entonces $\omega \subseteq TC(S)$ y por lo tanto tiene al menos infinitos elementos.

Proposición 5.2. *Se cumple que el cierre transitivo es el conjunto transitivo más pequeño que contiene a S.*

Demostración. Se tiene que $S \subseteq TC(S)$, por definición. Veamos que $TC(S)$ es transitivo.

Dado $x \in TC(S)$ veamos que $x \subseteq TC(s)$. Como $x \in TC(S)$ se tiene que $\exists n \in \omega$ tal que $x \in S_n$. Como $S_{n+1} = \bigcup S_n$, si $y \in x$ entonces $y \in S_{n+1}$, luego $x \subseteq S_{n+1}$ y se concluye que $x \subseteq TC(S)$.

Veamos que si T es transitivo y $S \subseteq T$ entonces $TC(S) \subseteq T$.

Observamos que para todo conjunto transitivo $\bigcup T \subseteq T$. Esto es porque si $x \in \bigcup T$ entonces $\exists y \in T(x \in y)$ y como T es transitivo se tiene que $y \subseteq T \to x \in T$. □

Se puede definir como el menor conjunto transitivo que contiene a S

$$TC(S) = \bigcap\{T : S \subseteq T \wedge T \text{es transitivo}\}$$

Asumimos que ZF es consistente, luego existe un modelo $\mathbb{M}$, por tanto $\mathbb{M} \models$ZF. Como $\mathbb{M}$ es un modelo, todos los axiomas de ZF deben ser ciertos en el modelo, luego $\emptyset \in \mathbb{M}$. Aparte de los axiomas, también debe cumplirse todas sus consecuencias, entre ellas, debe existir la clase de los ordinales en M.

Se define el universo de von Neumann, también llamado jerarquía acumulativa.

Definición 5.3. Empleando el Teorema de Recurrencia transitiva Teorema 4.30, y el Axioma de Partes, para cada $\alpha \in \Omega$ definimos

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_\alpha &= \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta \text{ si } \alpha \text{ es un ordinal límite} \\ V_{\alpha+1} &= \mathscr{P}(V_\alpha) \end{aligned}$$

Consideramos la clase

$$\mathbf{V} = \{x : \exists \alpha \in \Omega (x \in V_\alpha)\} = \bigcup_{\alpha \in \Omega} V_\alpha$$

que llamamos **jerarquía acumulativa**

Obsérvese que los primeros conjuntos son de la forma

$$V_0 = \emptyset, V_1 = \{\emptyset\}, V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$$

Vemos algunas de sus propiedades.

Proposición 5.4. *Cada V_α es un conjunto.*

Demostración. Por el Recurrencia transfinita, Teorema 4.30. Tomando $F(x, y) \equiv y = \mathscr{P}(x)$ existe una fórmula que define una función, $G(x, y)$, tal que $\forall \alpha \in \Omega\ g(\alpha) = \mathscr{P}(G|_\alpha) = V_\alpha$ Consecuentemente, por el axioma de Reemplazamiento, cada V_α es un conjunto. □

Proposición 5.5. *Cada V_α es transitivo.*

Demostración. Se prueba por recurrencia transitiva. V_0 es el vacío por lo que es transitivo. Suponemos que todos los conjuntos V_β con $\beta \in \alpha$ y V_α son transitivos, se comprueba que $V_{\alpha+1}$ también lo es por ser $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$, utilizando Proposición 4.17. En los casos de un ordinal límite se cumple que V_α es transitivo por ser unión de conjuntos transitivos; dado $y \in V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$, entonces existe $\gamma \in \alpha$ tal que $y \in V_\gamma$, por la transitividad de V_γ se tiene que $y \subseteq V_\gamma$ y por tanto $y \subseteq V_\alpha$ □

Proposición 5.6. *Si $\alpha \in \beta$ entonces $V_\alpha \subsetneq V_\beta$*

Demostración. Por construcción se cumple que si $\alpha \in \beta$ entonces $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Como $\alpha + 1$ no es un ordinal límite entonces $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$ el cual está formado por los elementos de V_α y por V_α y como se sabe por el axioma de Fundamento que $V_\alpha \notin V_\alpha$ se prueba que $V_\alpha \subsetneq V_{\alpha+1}$

Para concluir la prueba solo hace falta probar que si $\alpha \in \beta$ entonces $V_{\alpha+1} \subseteq V_\beta$. La haremos por inducción transfinita en β.

Sea C la clase de los ordinales tal que $\beta \in C$ implica que para todo $\alpha \in \beta$ se tiene que $V_{\alpha+1} \subseteq V_\beta$.

En el caso de $\beta = \alpha + 1$, con $\alpha \in C$ se cumple que $\beta \in C$ por lo que se acaba de probar .

Si para todo $\gamma \in \beta$, se cumple que $\gamma \in C$, entonces para todo $\alpha \in \gamma$ se tiene que, $V_{\alpha+1} \subseteq V_\gamma$. Se va a probar que $V_{\alpha+1} \subseteq V_\beta$. Si $\exists \delta \in \Omega$ tal que $\beta = \delta + 1$, entonces por inducción $V_{\alpha+1} \subseteq V_\delta \subseteq V_{\delta+1} = V_\beta$. En el caso de que β es un sucesor límite, entonces al ser la unión se tiene que $\forall \delta \in \beta$ tal que $\alpha \in \delta$ se tiene que $V_{\alpha+1} \subseteq V_\delta$ entonces $V_{\alpha+1} \subseteq V_\beta$ □

Proposición 5.7. *Para cada $\alpha \in \Omega$, $V_\alpha \cap \Omega = \alpha$*

Demostración. Hay que probar que los únicos ordinales en V_α son los que forman α, en otras palabras, si $\alpha = \beta + 1$ entonces los únicos ordinales son β y los elementos de β. En el caso de que α sea un ordinal límite los ordinales son los elementos de α.

Se prueba por inducción transitiva. Primero, para ver que $\alpha \subseteq V_\alpha$, o en otras palabras, que $\forall \beta \in \alpha\ \beta \in V_\alpha$. Para V_0 se cumple, porque no hay nada que verificar. Ahora si se supone que se cumple para V_α entonces como $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$, por tanto $\alpha \in \mathscr{P}(V_\alpha)$ y como $\alpha + 1 = \{\{\alpha\}, \alpha\}$, entonces se cumple. En el caso de que α sea un ordinal límite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$, sabiendo que $\forall \beta \in \alpha\ \beta \subseteq V_\beta$, entonces $\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta\ \alpha = \bigcup \alpha$.

Falta ver que $\alpha \notin V_\alpha$ y por tanto que no existe ningún otro ordinal γ tal que $\alpha \in \gamma$ y cumpla $V_\alpha \cap \Omega = \gamma$. Se prueba también por inducción, se supone que es cierto para V_α y se prueba para $V_{\alpha+1}$. Entonces si $\alpha + 1 \in V_{\alpha+1}$, implica que $\alpha + 1 \subseteq V_\alpha$, por definición de partes de un conjunto. Esto es una contradicción con la hipótesis, ya que implica que $\alpha \in V_\alpha$. Caso de ordinal límite, suponemos que $\alpha \in V_\alpha$, entonces $\exists \beta \in \alpha$ tal que $\alpha \in V_\beta$, lo cual es un absurdo con la hipótesis. □

Teorema 5.8. ***M*** $=$ ***V****. Entonces todos los modelos de ZF tienen la estructura de* ***V****.*

Demostración. Por reducción al absurdo se supone que existe un conjunto x en el modelo **M** que no está en **V**. Se toma el conjunto $\overline{x} = TC(\{x\})$ y sea $y = \{z \in \overline{x} : z \notin \mathbf{V}\} = \overline{x} \backslash \mathbf{V}$. Se sabe que y no es el vacío porque $\emptyset \in \mathbf{V}$. Por el axioma de Fundamento $\exists z \in y$ tal que $(z \cap y) \neq \emptyset$ y como $\emptyset \notin y$ (porque $\emptyset \in \mathbf{V}$) entonces $z \neq \emptyset$. Como $z \cap y = \emptyset$ entonces $\forall u \in z$ se cumple que $u \notin y$ y por la transitividad de $\overline{x}$ ($z \in y$ e $y \in x$) se da que $z \in \overline{x}$ y por lo tanto $u \in \overline{x} \cap \mathbf{V}$ y como consecuencia $\exists \alpha_u$ con $u \in V_{\alpha_u}$ donde α_u es un ordinal. Por el axioma de Reemplazamiento se cumple que $\{\alpha_u : u \in z\}$ es un conjunto. Luego $\alpha = \bigcup \{\alpha_u : u \in z\}$ es un ordinal límite por ser unión de ordinales y $V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta = \bigcup \{V_{\alpha_{u_0}}, V_{\alpha_{u_1}}, ...\}$ para todo $u_n \in z$ como también se cumple que $u_n \in V_{u_n}$, por lo que $z \subseteq V_\alpha$ y como se tiene $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$ se cumple que $z \in V_{\alpha+1}$. Se llega a una contradicción porque $z \in y = \overline{x} \backslash \mathbf{V}$. Entonces no existe un conjunto en el modelo **M** que no está en **V**. Como $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{M}$ entonces $\mathbf{V} = \mathbf{M}$. □

Los conjuntos numéricos, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ están contenidos en **V**. De hecho se puede ver en que V_α está cada conjunto

- $\mathbb{N}$ está contenido V_ω. $\mathbb{N} = \omega \in V_\omega$
- $\mathbb{Z}$ se puede construir como un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tomando la relación de equivalencia $\langle n_1, m_1 \rangle \sim \langle n_2, m_2 \rangle \leftrightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1$. Entonces como $\forall n \in \mathbb{N} n \in V_\omega$ el par (sin ordenar) $\{n, m\} \in V_{\omega+1}$. Por la definición que se da de par ordenado, $\langle n, m \rangle = \{n, \{n, m\}\}$, se da que $\langle n, m \rangle \in V_{\omega+2}$ y por lo tanto se tiene que $\mathbb{Z} \in \mathscr{P}(V_{\omega+2}) = V_{\omega+3}$
- $\mathbb{Q}$ se puede construir como un subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, tomando la relación de equivalencia $\langle k_1, l_1 \rangle \sim \langle k_2, l_2 \rangle \leftrightarrow k_1 \cdot l_2 = k_2 \cdot l_1$. Por el mismo proceso de antes, se sabe que un par ordenado $\langle k, l \rangle \in V_{\omega+4}$ y por tanto se cumple que $\mathbb{Q} \in V_{\omega+5}$
- Para $\mathbb{R}$ existen varias formas de construcción, una de ellas la de las cortaduras de Dedekind. [Goldrei, 1996, Sección 2.2] En esta construcción los reales se interpretan como la unión de intervalos, estos intervalos tienen la forma $\{x \in \mathbb{Q} | x < q\}$. Entonces todo $r \in \mathbb{R}$ se puede entender como un subconjunto de números racionales, y por tanto $r \in V_{\omega+6}$ y $\mathbb{R} \in V_{\omega+7}$

Se han tomado una construcciones específicas, estas no son únicas. Por lo que es posible que estos conjuntos estén en capas inferiores de **V**, pero sí se puede asegurar que están en esas.

5.2. Submodelos de V

Para probar la consistencia relativa del axioma de Elección se va a utilizar un submodelo de **V** que sea modelo de ZF y de ZFC. En esta sección se van a ver qué es un submodelo de **V** y qué tipo de modelos buscamos para la demostración. Como se ha probado en la Sección 5 los submodelos tendrán que tener la misma estructura que **V**, porque se probó que todos los modelos de ZF tienen la misma estructura.

La sección consiste de dos subsecciones, en la primera se verá el concepto de relativización y la segunda de fórmula absoluta. La relativización es el concepto que nos permite formar fórmulas y ver cuando se cumplen en los submodelos, mientras que las fórmulas absolutas relacionan las fórmulas entre submodelos y entre **V**.

Las referencias que se han seguido para esta sección son [Kunen, 1980], para los conceptos de relativización, y [Ivorra Castillo, 2000], los conceptos de fórmulas absolutas.

5.2.1. Relativización

Introducimos la definición de submodelo, para luego poder ver cómo son los submodelos de **V**.

Definición 5.9. Dado un conjunto de fórmulas Φ, un lenguaje $\mathscr{L}$, un modelo de Φ $\mathbb{M} = (M, R_M, F_M)$, un **submodelo** es una $\mathscr{L}$-estructura $\mathbb{L} = (L, R_L, F_L)$ tal que cada relación de R_L y cada función F_L es la restricción en L de cada relación de R_M y función de F_M respectivamente. Debe cumplirse que $\mathbb{M} \models \Phi$

Entonces todo dominio de cualquier submodelo M de ZF cumple que $M \subseteq \mathbf{V}$. Como en los submodelo se **V**, la única relación es $\in$. La notación para un submodelo $\mathbb{M} = (M, R_M, F_M)$ de **V** será $(M, \in)$.

Veamos como se define que una fórmula sea cierta en un submodelo.

Definición 5.10. Sea M una clase de **V**, $x, y \in M$ y φ una fórmula que solo contiene $\neg$, $\wedge$ como operadores lógicos y $\exists$ como cuantificador (ver Teorema 2.8). Definimos la relativización de φ a $\mathbb{M}$, $\varphi^{\mathbb{M}}$, de forma recursiva como

$x, y \in M$

- $(x = y)^{\mathbb{M}} :\Leftrightarrow \mathbf{V} \models x = y$
- $(x \in y)^{\mathbb{M}} :\Leftrightarrow \mathbf{V} \models x \in y$
- $(\neg\varphi)^{\mathbb{M}} :\Leftrightarrow \mathbf{V} \models \neg\varphi^{\mathbb{M}}$
- $(\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{M}} :\Leftrightarrow \mathbf{V} \models \varphi^{\mathbb{M}} \wedge \psi^{\mathbb{M}}$
- $(\exists v\varphi)^{\mathbb{M}} :\Leftrightarrow \exists x \in M : \mathbf{V} \models \varphi^{\mathbb{M}}(x)$

Lema 5.11. *Dada una fórmula φ de $\mathscr{L}_{ST}$ y $x_1, x_2, ..., x_n \in M$:*

$$\varphi^{\mathbb{M}}(x_1, x_2, ..., x_n) \Leftrightarrow \mathbb{M} \models (x_1, x_2, ..., x_n)$$

5.2.2. Fórmulas absolutas

Definición 5.12. Sean M y N dos clases en **V** tal que $M \subseteq N$, y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$una fórmula, con x_i libres $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces se dice que φ es **absoluta entre los modelos $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$** si se cumple que

$$\forall x_1, \ldots, x_m \in M(\varphi^{\mathbb{M}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\mathbb{N}}(x_1, \ldots, x_n))$$

En el caso de que $\mathbb{N}$=**V** entonces se dice que φ es **absoluta para** $\mathbb{M}$.

Lema 5.13. *Si una fórmula φ es absoluta para $\mathbb{M}$ y se tiene una clase N tal que $M \subseteq N$ entonces φ es absoluta entre $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$.*

Lema 5.14. *Si φ es una fórmula libre de cuantificadores entonces φ es absoluta en cualquier submodelo $\mathbb{M}$ de una clase M de $\boldsymbol{V}$.*

Demostración. Se puede observar que si $M \subseteq N$ y $x, y \in M$ entonces las fórmulas de la forma, $x = y$ y $x \in y$ son absolutas entre $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$. Si se tienen dos fórmulas absolutas φ y ψ entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \wedge \psi$ son absolutas también. Entonces como todas las fórmulas libres de cuantificadores se construyen utilizando la negación o conjugación de $x = y$ y $x \in y$ se tiene que φ es absoluta. □

Esta caracterización no es muy útil ya que la mayoría de las fórmulas contienen cuantificadores. Por tanto debemos dar otra condición de la clase para que la mayoría de fórmulas sean absolutas, la transitividad.

Ejemplo. Vamos a ver un ejemplo de una fórmula (con cuantificadores) que no es absoluta. Recordamos que

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$$

Tomamos como clase $M = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ Sabemos que no se cumple que $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \emptyset$ sin embargo $(\{\{\emptyset\}\} \subseteq \emptyset)^{\mathbb{M}}$.

Sin embargo, si asumimos que M es una clase transitiva entonces $x \subseteq y$ es absoluta en M, porque dados $x, y \in M$

$$((\forall z)(z \in x \rightarrow z \in y))^{\mathbb{M}} \Leftrightarrow \forall z \in M(z \in x \rightarrow z \in y)$$

Como M es transitiva si $z \in x$ entonces $z \in M$, luego

$$((\forall z)(z \in x \rightarrow z \in y))^{\mathbb{M}} \Leftrightarrow \forall z \in \mathbf{V}(z \in x \rightarrow z \in y) \Leftrightarrow (\forall z(z \in x \rightarrow z \in y))^{\mathbf{V}}$$

Hemos visto en el ejemplo anterior que para clases transitivas existan algunas fórmulas que son absolutas. No obstante, existen fórmulas no absolutas en clases transitivas.

Ejemplo. Partes de un conjutno es una fórmula no absoluta en una clase transitiva.

Se toma la clase $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = \{0, 1, 2, 3\}$. En esta clase, $\mathscr{P}(2) = 3$. Observamos que

$$\mathscr{P}(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Luego $(\mathscr{P}(2) \neq 3)^{\mathbf{V}}$ pero $(\mathscr{P}(2) = 3)^{\mathbb{M}}$.

Hemos visto que hay algunas fórmulas que son absolutas para clases transitivas y otras que no lo son. Basándonos en el lema siguiente podemos considerar una familia de fórmulas que son adecuadas para trabajar en clases transitivas.

Lema 5.15. *Si $M \subseteq N$ son clases transitivas de $\boldsymbol{V}$, $y \in M$ y φ es una fórmula absoluta entre $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$ entonces $(\exists x)(x \in y \wedge \varphi)$ también es absoluta.*

Demostración.

$$\begin{aligned}((\exists x)(x \in y \wedge \varphi))^{\mathbb{M}} &\Leftrightarrow (\exists x \in M)((x \in y \wedge \varphi))^{\mathbb{M}} \\ \Leftrightarrow (\exists x)(x \in y) \wedge (\varphi)^{\mathbb{M}} &\Leftrightarrow (\exists x)(x \in y) \wedge (\varphi)^{\mathbb{N}} \\ \Leftrightarrow (\exists x \in N)((x \in y \wedge \varphi))^{\mathbb{N}} &\Leftrightarrow ((\exists x)(x \in y \wedge \varphi))^{\mathbb{N}}\end{aligned}$$

Utilizando la definición de clase transitiva y sabiendo que φ es una fórmula absoluta entre $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$. □

Definición 5.16. Una fórmula es una Δ-fórmula si se puede construir inductivamente a partir de las reglas:

- $x \in y$ y $x = y$ son Δ-fórmulas
- Si ψ, ϕ son Δ-fórmulas entonces también los son $\neg\psi$ y $\psi \wedge \phi$
- Si ψ es Δ-fórmula entonces también los es $(\exists x)(x \in y \wedge \psi)$.

Ejemplo. Vamos a ver que la fórmula $x \subseteq y$ es una Δ-fórmula. Para ello se consigue una fórmula equivalente a $\varphi \equiv (\forall z)(z \in x \to z \in y)$ que está formado solo por $\in$, $\neg$ y $\wedge$. Utilizando que $p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$ y $\forall p \equiv \neg(\exists \neg p)$. Entonces

$$\varphi \equiv \neg(\exists z)((z \in x) \wedge (\neg(z \in y)))$$

Por la definición anterior, $\neg(z \in y)$ es Δ-fórmulas y por lo tanto φ también lo es.

Por los lemas anteriores se tiene que el siguiente corolario.

Corolario 5.17. *Si M es una clase transitiva de $\boldsymbol{V}$ y ϕ es un Δ-fórmula entonces ϕ es absoluta en $\mathbb{M}$.*

Ejemplo. Las siguientes fórmulas son Δ-fórmulas por lo que son absolutas en clases transitivas:

$$\{x, y\}, \qquad \langle x, y\rangle, \qquad x \cup y, \qquad x \cap y, \qquad x \times y$$

Damos el primero de ejemplo,

$$\{x, y\} = u \Leftrightarrow (\neg\exists z(z \in u \wedge \neg(z = x) \wedge \neg(z = y))) \wedge (x \in u) \wedge (y \in u)$$

El segundo ejemplo

$$\langle x, y\rangle = u \Leftrightarrow (\neg\exists z(z \in u \wedge \neg(z = \{x\}) \wedge \neg(z = \{x, y\}))) \wedge (\{x\} \in u) \wedge (\{x, y\} \in u)$$

Dónde para ver que es una Δ-fórmula se usa que es $\{x, y\}$ es una Δ-fórmula.
El resto de fórmulas se comprueban de manera similar.

Ejemplo. Las fórmulas $trans(x)$ y $wo(x)$ son Δ-fórmulas, por tanto la fórmula $ordinal(x) := trans(x) \wedge wo(x)$, es cierta si x es un ordinal, es absoluta.

Lema 5.18. *Sea M una clase transitiva de $\boldsymbol{V}$ y sea $\mathbb{M}$ el modelo $(M,\in)$, entonces se cumple*

1. $\mathbb{M} \models$ *Axioma de Extensionalidad.*
2. $\mathbb{M} \models$ *Axioma de Fundamento*
3. $\mathbb{M} \models$ *Axioma de Pares* $\Leftrightarrow \forall x, y \in M(\{x, y\} \in M)$
4. $\mathbb{M} \models$ *Axioma de la Unión* $\Leftrightarrow \forall x \in M(\bigcup x \in M)$
5. $\mathbb{M} \models$ *Axioma del Infinito* $\Leftarrow \omega \in M$
6. $\mathbb{M} \models$ *Axioma de Partes de un conjunto* $\Leftrightarrow \forall x \in M(\mathscr{P}(x) \cap M \in M)$

Demostración. 1. El axioma de Extensionalidad relativizado al modelo $\mathbb{M}$ se puede escribir como

$$(\forall x, y \in M)(\forall z \in M(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

Si M es una clase transitiva entonces, si $z \in x$ entonces se tiene que cumplir que $z \in M$. Se puede reescribir la fórmula equivalente

$$(\forall x, y \in M)(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

Entonces, dos conjuntos del modelo con los mismos elementos son iguales, es decir, se cumple el axioma.

2. El axioma de Fundamento relativizado al modelo $\mathbb{M}$ se puede escribir como

$$\forall x \in M(x \neq \emptyset \to (\exists y \in M)(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$$

Igual que antes, si $y \in x \wedge x \in M$ entonces por transitividad se cumple que $y \in M$ y la fórmula equivalente sería

$$\forall x \in M(x \neq \emptyset \to (\exists y)(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$$

Como todos los conjuntos de la clase M están en $\mathbf{V}$ y este cumple el axioma de regularidad entonces la fórmula es cierta y M también lo cumple.

3. El axioma de pares relativizado al modelo $\mathbb{M}$ se puede escribir como

$$\forall x \in M \forall y \in M \exists u \in M \forall z \in M(z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

Al igual que en los casos anteriores si $z \in u \wedge u \in M$ entonces es obvio que $z \in M$. Entonces una fórmula equivalente es

$$\forall x \in M \forall y \in M \exists u \in M \forall z(z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

la cual equivale a

$$\forall x, y \in M(\{x, y\} \in M)$$

4. El axioma de la Unión relativizado al modelo $\mathbb{M}$ se puede escribir como

$$\forall x \in M \exists u \in M \forall z \in M(z \in u \leftrightarrow (\exists w \in M)(w \in x \wedge z \in w))$$

De la misma forma que antes la fórmula equivalente es

$$\forall x \in M \exists u \in M \forall z(z \in u \leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge z \in w))$$

lo cual equivale a

$$\forall x \in M \bigcup x \in M$$

5. El axioma del Infinito se puede relativizar a $\mathbb{M}$ como

$$(\exists x \in M)(\emptyset \in x \wedge \forall y \in M(y \in x \to (y + 1 \in x)))$$

equivalente a

$$(\exists x \in M)(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to (y + 1 \in x)))$$

Si $\omega \in M$ este axioma se cumple.

6. El axioma de Partes de un conjunto se puede escribir como

$$\forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

o equivalentemente

$$\forall x \in M \exists y \in M \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

Se puede reescribir

$$\forall x \in M \exists y \in M (y = \mathscr{P}(x) \cap M)$$

lo que quiere decir

$$\forall x \in M (\mathscr{P}(x) \cap M \in M)$$

□

5.3. Gödelizar fórmulas en la teoría de conjuntos

Al igual que se vio en la introducción para la aritmética de Peano, la teoría de conjuntos es gödelizable y se puede construir una numeración de la siguiente forma.

Primero se gödelizan las fórmulas atómicas.

Sea $v_i \in \mathscr{V}$ $i \in \mathbb{N}$ variables del lenguaje $\mathscr{L}_{ST}$.

$$\begin{aligned} \ulcorner v_i \in v_j \urcorner &:= \langle 0, i, j \rangle \\ \ulcorner v_i = v_j \urcorner &:= \langle 1, i, j \rangle \end{aligned}$$

Para el resto de fórmulas se hace de forma inductiva, si se tiene ϕ, ψ ya gödelizadas se define

$$\begin{aligned} \ulcorner \neg\phi \urcorner &:= \langle 2, \ulcorner \phi \urcorner \rangle \\ \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner &:= \langle 3, \ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle \\ \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner &:= \langle 4, \ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle \\ \ulcorner \phi \to \psi \urcorner &:= \langle 5, \ulcorner \phi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle \\ \ulcorner \exists v_i \phi \urcorner &:= \langle 6, i, \ulcorner \phi \urcorner \rangle \\ \ulcorner \forall v_i \phi \urcorner &:= \langle 7, i, \ulcorner \phi \urcorner \rangle \end{aligned}$$

Se puede construir un conjunto formado por todas las codificaciones de fórmulas de la teoría de conjuntos. Se nombra al conjunto como Fml, como abreviatura de fórmulas.

$$\begin{aligned} f \in Fml :\Leftrightarrow & \exists n \in \omega \wedge c : n+1 \to V_\omega \text{ tal que } f = c(n) \\ & \wedge \forall m \leq n \exists i, j \in \omega \exists k, l < m \\ & (c(m) = \langle 0, i, j \rangle \vee c(m) = \langle 1, i, j \rangle \vee c(m) = \langle 2, c(k) \rangle \vee \langle 3, c(k), c(l) \rangle \\ & \vee \langle 4, c(k), c(l) \rangle \vee c(m) = \langle 5, c(k), c(l) \rangle \vee c(m) = \langle 6, i, c(k) \rangle \vee c(m) = \langle 7, i, c(k) \rangle) \end{aligned}$$

Como Fml admite una enumeración entonces es un conjunto numerable.

Proposición 5.19. *Dada una fórmula φ, su código es un conjunto que pertenece a Fml.*

Demostración. Toda fórmula está formada por cuantificadores, operadores lógicos y negación de otras fórmulas, y así se puede seguir hasta llegar a fórmulas atómicas que solo contienen los símbolos $\in$ y $=$ Por lo que los símbolos son finitos y se puede construir la función c. Hagamos la prueba por inducción, en la complejidad de la fórmula.

- Si la fórmula es de la forma $v_i \in v_j$, entonces tomando $n = 0$, $c : 1 \to V_\omega$. Como $1 = \{0\}$ sólo hace falta definir $c(0)$: $c(0) = \langle 0, i, j \rangle$

- Si la fórmula es de la forma $v_i = v_j$, entonces tomando $n = 0$, $c : 1 \to V_\omega$. Como $1 = \{0\}$ sólo hace falta definir $c(0)$: $c(0) = \langle 1, i, j \rangle$

Supongamos ahora que tenemos dos fórmulas π, ψ tal que $\ulcorner\pi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \in Fml$. Luego existen $n, m \in \omega$, $c' : n+1 \to V_\omega$ $c'' : m+1 \to V_\omega$ tal que $c'(n) = \ulcorner\pi\urcorner$ y $c'' : m+1 = \ulcorner\psi\urcorner$ y cumpliendo con las propiedades de la definición.

- Sea $\phi = \neg\pi$. Entonces sea $l = n+1$, $c := (l+1) \to V_\omega$ tal que $c(l) = \langle 2, c(n) \rangle$, y para todo $k \leq n$ $c(k) = c'(k)$. La función c está bien definida y cumple que $\ulcorner\phi\urcorner \in Fml$

- Sea $\phi = \exists v_i \pi$. Entonces sea $l = n+1$, $c : (l+1) \to V_\omega$ tal que $c(l) = \langle 6, i, c(n) \rangle$, y para todo $k \leq n$ $c(k) = c'(k)$. La función c está bien definida y cumple que $\ulcorner\phi\urcorner \in Fml$

- Sea $\phi = \forall v_i \pi$. Entonces sea $l = n+1$, $c : (l+1) \to V_\omega$ tal que $c(l) = \langle 7, i, c(n) \rangle$, y para todo $k \leq n$ $c(k) = c'(k)$. La función c está bien definida y cumple que $\ulcorner\phi\urcorner \in Fml$

- Sea $\phi = \pi \wedge \psi$. Sea $l = (n+m)+1$ Se construye $c : l+1 \to V_\omega$, tal que

  $$c(l) = \langle 3, c(n), c(n+m) \rangle$$

  y $\forall k \leq n$ $c(k) = c'(k)$ $\forall k$ $k \leq m$ $c(n+k) = c''(k)$ La función está bien definida y $\ulcorner\phi\urcorner \in Fml$

- Sea $\phi = \pi \vee \psi$. Sea $l = (n+m)+1$ Se construye $c : l+1 \to V_\omega$, tal que

  $$c(l) = \langle 4, c(n), c(n+m) \rangle$$

  y $\forall k \leq n$ $c(k) = c'(k)$ $\forall k$ $k \leq m$ $c(n+k) = c''(k)$ La función está bien definida, y $\ulcorner\phi\urcorner \in Fml$

- Sea $\phi = \pi \to \psi$. Sea $l = (n+m)+1$ Se construye $c : l+1 \to V_\omega$, tal que

  $$c(l) = \langle 5, c(n), c(n+m) \rangle$$

  y $\forall k \leq n$ $c(k) = c'(k)$ $\forall k$ $k \leq m$ $c(n+k) = c''(k)$ La función está bien definida, y $\ulcorner\phi\urcorner \in Fml$

$\square$

6. Modelo Constructible de Gödel L

El objetivo de esta sección es construir un modelo que sirva como herramienta para probar la consistencia relativa del axioma de Elección. Este consiste en todos los conjuntos que pueden ser descritos en la axiomatización de ZF. Por lo tanto, en primer lugar hay que entender que quiere decir que un conjunto pueda ser “descrito en términos de conjuntos más sencillos”, para lo que introduciremos la noción de conjunto definible. Con los conceptos necesarios disponibles, se procede a crear el modelo que, como se ha visto en la sección 4, deberá tener la misma estructura que **V**. Para finalizar comprobaremos que en este nuevo modelo, que denominamos universo constructible y denotamos por **L**, se verifican todos los axiomas de ZF y el axioma de Elección.

En conclusión, deduce que si ZF es consistente, y por lo tanto existe un modelo, entonces también existe de ZFC, deduciendo su consistencia.

Para esta sección se han seguido las referencias [Halbeisen and Krapf, 2020, Capítulo 14] y [Ivorra Castillo, 2022, Capítulo 3].

6.1. Conjuntos definibles

El modelo **L** se va a construir por capas a partir de los conjuntos construidos en el paso anterior. Si M es un conjunto formado por conjuntos ya construidos, si φ es una fórmula y $p_1, ..., p_n \in M$ parámetros vamos a considerar conjuntos de la forma

$$x = \{y \in M : (M, \in) \models \varphi(y, p_1, ..., p_n)\}$$

Queremos garantizar que x es un conjunto empleando el esquema axiomático de Separación, para ello necesitamos probar que la relación de satisfacción

$$(M, \in) \models \varphi(y, p_1, ..., p_n)$$

puede definirse mediante una $\mathscr{L}$-fórmula.

Para ello nos apoyamos en la gödelización de las fórmulas.

Definición 6.1. Sea M una clase de **V** y $\mathbb{M} = (M, \in)$, sea $x = \langle x_1, ..., x_n\rangle \in M^{n+1}$, es decir, x es una función con dominio $n+1$ y $x(i) = x_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Se define la relación de satisfacción con variables libres en $\{v_0, ..., v_n\}$ como:

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner\langle 0, i, j\rangle[x] & :\Leftrightarrow & x_i \in x_j \\
\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner\langle 1, i, j\rangle[x] & :\Leftrightarrow & x_i = x_j \\
\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner\langle 2, f\rangle[x] & :\Leftrightarrow & \neg\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner f[x] \\
\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner\langle 3, f, g\rangle[x] & :\Leftrightarrow & \mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner f[x] \wedge \mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner g[x] \\
\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner\langle 6, i, f\rangle[x] & :\Leftrightarrow & \exists a \in M(M\mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner f[x\frac{i}{a}]
\end{array}$$

donde $f, g \in Fml$ y para $0 \leq k \leq n$

$$(x\frac{i}{a}) = \begin{cases} x_k \text{ si } k \neq i \\ a \text{ si } k = i \end{cases}$$

Como todas las fórmulas se pueden escribir en función de $\neg, \wedge, \exists$ por Teorema 2.8 entonces se cumple que si se tiene una clase M y una fórmula $\varphi(v_0, ...v_n)$ entonces para $x_0, ..., x_n \in M$ y $x = \langle x_0, ..., x_n\rangle$ se cumple que:

$$\mathbb{M} \models \varphi(x_0, ..., x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\mathbb{M}}(x_0, ..., x_n) \Leftrightarrow \mathbb{M}\ulcorner\models\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner[x]$$

En consecuencia, se podrá escribir $M \models \varphi$, donde $\mathbb{M}$ es el modelo $(M, \in)$ una clase M y φ una fórmula, como una fórmula de la teoría de conjuntos.

Definición 6.2. Sea M un conjunto de $\mathbf{V}$ se dice que un conjunto x es **definible** sobre M si existe una fórmula $\varphi(v_0, ..., v_n)$ de $\mathscr{L}_{ST}$ y $p_1, ..., p_n \in M$ tales que

$$x = \{y \in M : \mathbb{M} \models \varphi(y, p_1, ..., p_n)\} = \{y \in M : \varphi^{\mathbb{M}}(y, p_1, ..., p_n)\}$$

Con los resultados vistos previamente, como M es un conjunto y como $\mathbb{M} \models \varphi(y, p_1, ..., p_n)$ es una $\mathscr{L}_{ST}$-fórmula por el esquema axiomático de Separación x es un conjunto. En otras palabras, el conjunto es definible sobre M si existe una fórmula tal que todos los elementos del conjunto la cumplen.

Definición 6.3. Dado un M un conjunto de $\mathbf{V}$ consideramos

$$Def(M) := \{x \in \mathscr{P}(M) : x \text{ es definible sobre } M\}$$

Proposición 6.4. *Si se tiene M un conjunto de $\boldsymbol{V}$ entonces $Def(M)$ es un conjunto definible en $\mathscr{P}(M)$.*

Demostración. Como $M \in \mathbf{V}$, $\mathscr{P}(M) \in \mathbf{V}$, luego como $Def(M) \subseteq \mathscr{P}(M)$ tenemos que $Def(M) \in \mathscr{P}(M)$ por transitividad. Por lo tanto $Def(M) \in \mathbf{V}$.

Para probar que $Def(M)$ es definible en $\mathscr{P}(M)$ tenemos que ver que "x es definible sobre M" estamos diciendo que existe una fórmula, $\exists\varphi$, y un conjunto de parámetros tal que para todo elemento de conjunto la fórmula se cumple fijados esos parámetros.

El obstáculo fundamental es que la cuantificación sobre fórmulas no forma parte del lenguaje $\mathscr{L}_{ST}$. Sin embargo, observamos que

$$x \in Def(M) :\Leftrightarrow \exists f \in \text{ Fml } \exists n \in \omega \exists p \in M^n \forall y \in M(y \in x \leftrightarrow M \ulcorner\models\urcorner f[\langle y, p\rangle])$$

Luego empleando la gödelización conseguimos cambiar la cuantificación sobre fórmulas $\exists\varphi$ por una cuantificación sobre elementos de Fml $\exists f \in Fml$. En consecuencia "x es definible sombre M" es una $\mathscr{L}_{ST}$-fórmula, luego $Def(M)$ es definible en $\mathscr{P}(M)$. $\square$

6.2. Universo constructible

Introducimos el universo constructible $\mathbf{L}$, también llamado jerarquía constructible. $\mathbf{L}$ tiene la misma forma que $\mathbf{V}$.

Definición 6.5. Empleando inducción transfinita Teorema 4.28, para cada $\alpha \in \Omega$ definimos

$$L_0 = \emptyset$$
$$L_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} L_\beta$$
$$L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$$

Consideremos la clase

$$\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \Omega} L_\alpha$$

que llamaremos **jerarquía constructible**

$\mathbf{L}$ es el modelo más pequeño de ZF que contiene los ordinales. Si se supone que existe W modelo de ZF conteniendo a los ordinales, se tiene que se puede construir $\mathbf{L}$ dentro de W. Esto se debe a que $\mathbf{L}$ se construye a partir del vacío, que debe estar contenido en W, por ser modelo de ZF. A partir del vacío el resto de conjuntos se obtienen a partir de fórmulas de$\mathscr{L}_{ST}$, por lo que deben ser conjuntos de W también.

El objetivo ahora, es probar que **L** es un modelo en ZF (cumple todos los axiomas) y que además también cumple el axioma de Elección, lo cual implica que sea un modelo también de ZFC.

Antes de empezar a demostrar que los axiomas se cumplen, se ven algunas proposiciones previas que serán necesarias en la demostración y además ayudan a entender como son los conjuntos de **L**.

Proposición 6.6. *Para todo $\beta \in \Omega$ se cumple que*

1. *Si $\alpha \in \beta$, entonces $L_\alpha \subsetneq L_\beta$*
2. *L_β es transitivo.*
3. *$L_\beta \subseteq V_\beta$*
4. *$L_\beta \cap \Omega = \beta$*

Demostración. Se prueba por inducción transitiva en Ω. Para el caso base $\beta = 0$, se comprueba que $L_\beta = \emptyset$ cumple los cuatro casos. Se prueba ahora el caso de de un ordinal sucesor. Se toma $\beta = \gamma + 1$ y suponemos que se cumplen las propiedades de la 1 a la 4 para L_γ veamos si se cumplen para L_β

1. Se quiere ver que $L_\gamma \subsetneq L_\beta$. Se toma $x \in L_\gamma$ y por la transitividad de L_γ se tiene que $x \subseteq L_\gamma$ y por tanto

   $$x = \{y \in L_\gamma : (L_\gamma, \in) \models y \in x\} \in Def(L_\gamma) = L_\beta$$

   Por tanto, se cumple que $L_\gamma \subseteq L_\beta$ Para ver que el contenido es estricto se prueba que $L_\gamma \in L_\beta$ entonces por el axioma de Fundamento no pueden ser iguales. Para probarlo basta observar que

   $$L_\gamma = \{x \in L_\gamma : (L_\gamma, \in) \models x = x\} \in Def(L_\gamma) = L_\beta$$

2. Se tiene que probar que L_β es transitivo. Se tiene que $L_\beta = Def(L_\gamma)$. Tomamos $x \in L_\beta$, entonces por la noción de definibles x se puede escribir como

   $$x = \{y \in L_\gamma : L_\gamma \models \varphi(y, p_1, ..., p_n)\}$$

   Donde φ es una $\mathscr{L}_{ST}$-fórmula. Entonces si $y \in x$ esto significa que $y \in L_\gamma$ y por 1, como $L_\gamma \subseteq L_\beta$, $y \in L_\beta$, lo que significa que $x \subseteq L_\beta$

3. Queremos ver que $L_\beta \subseteq V_\beta$ sabiendo que $L_\gamma \subseteq V_\gamma$ Por esta última contención se cumple que $\mathscr{P}(L_\gamma) \subseteq \mathscr{P}(V_\gamma) = V_\beta$, concluimos que $L_\beta = Def(L_\gamma) \subseteq \mathscr{P}(L_\gamma) \subseteq V_\beta$

4. Por 3 se tiene que $L_\beta \cap \Omega \subseteq V_\beta \cap \Omega = \beta$, la ultima igualdad se tiene por Proposición 5.7. Por inducción se tiene que $L_\gamma \cap \Omega = \gamma$. Como la fórmula que define los ordinales es una fórmula absoluta por Section 5.2.2, entonces se tiene

   $$\gamma = \{\delta \in L_\gamma : ordinal(\delta)\} = \{\delta \in L_\gamma : (L_\gamma, \in) \models odrinal(\delta)\} \in Def(L_\gamma) = L_\beta$$

   Entonces como $\beta = \gamma + 1$ se tiene $\beta \subseteq L_\beta$, luego $L_\beta \cap \Omega = \beta$

En el caso de que β sea un ordinal límite entonces $L_\beta = \bigcup_{\alpha\in\beta} L_\alpha$. La primera propiedad se cumple por la construcción puesto que si $\alpha \in \beta$ entonces $L_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in\beta} L_\alpha$ y la contención es estricta porque en caso contrario $L_\alpha = L_{\alpha+1}$ contradiciendo la hipótesis de inducción.

Con respecto a la segunda propiedad, si $x \in L_\beta = \bigcup_{\alpha\in\beta} L_\alpha$ entonces $\exists\alpha \in \beta$ tal que $x \in L_\alpha$ como L_α es transitivo por hipótesis $x \subseteq L_\alpha$ luego $x \subseteq \bigcup_{\alpha\in\beta} L_\alpha = L_\beta$

Para probar la tercera propiedad usaremos que por hipótesis $L_\alpha \subseteq V_\beta$ luego $L_\beta = \bigcup_{\alpha\in\beta} L_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in\beta} V_\alpha = V_\beta$

Por último, si para cada $\alpha \in \beta$ $V_\alpha \cap \Omega = \alpha$ tenemos que $\bigcup_{\alpha\in\beta} V_\alpha \cap \Omega = \bigcup_{\alpha\in\beta} \alpha = \beta$ □

Entender como son los conjuntos de $\mathbf{L}$ es difícil, pero se puede probar que para $\alpha \in \omega$ se tiene que $L_\alpha = V_\alpha$, y por lo tanto $L_\omega = V_\omega$. Aunque esta demostración se escapa de los objetivos del trabajo se puede probar que a partir de ω no son iguales empleando el Teorema de no definibilidad de Tarski.

Lema 6.7. *Si M es finito entonces $Def(M) = \mathscr{P}(M)$*

Demostración. El contenido $Def(M) \subseteq \mathscr{P}(M)$ se tiene por definición.

Se ve el otro, si $u \in \mathscr{P}(M)$ entonces u es finito. Como es finito, se pueden enumerar sus elementos $u = \{u_1, u_2, ...u_n\}$, entonces se puede definir u como

$$u = \{x \in M : (M, \in) \models (x = u_1) \vee (x = u_2) \vee ... \vee (x = u_n)\} \in Def(M)$$

y por lo tanto $\mathscr{P}(M) \subseteq Def(M)$ □

Teorema 6.8. *Para todo $n \in \omega$ $L_n = V_n$*

Demostración. Se prueba por inducción en n. Para el caso base $n = \emptyset$ se cumple. Suponemos que se cumple para n y queremos ver si $L_{n+1} = V_{n+1}$. Utilizando el lema anterior y sabiendo que $L_n = V_n$ es finito entonces $L_{n+1} = Def(L_n) = \mathscr{P}(L_n) = \mathscr{P}(V_n) = V_{n+1}$ □

Proposición 6.9. ***L*** *es una clase transitiva.*

Demostración. Dado $x \in \mathbf{L}$ e $y \in x$, tenemos que existe $\beta \in \Omega$ tal que $x \in L_\beta$, como L_β es transitivo por la Proposición 6.6 tenemos que $y \in L_\beta$, luego $y \in \mathbf{L}$.

Dados $y \in\mathbf{L}$ y $x \in y$. Entonces se tiene que cumplir que $x \in \mathbf{L}$, es decir que existe un $\beta \in \Omega$ tal que $x = L_\beta$. Como L_β es transitivo se tiene que si $y \in L_\beta$ entonces $y \subseteq L_\beta$ y por tanto $y \subseteq \mathbf{L}$. □

Teorema 6.10. ***(Principio de reflexión de Lévy)*** *Sea φ una $\mathscr{L}_{ST}$-fórmula y $\alpha \in \Omega$. Entonces existe un ordinal β con $\alpha \in \beta$ tal que φ es absoluta entre L_β y* ***L****.*

Demostración. Se tiene una fórmula φ, con variable libres $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$, se va a construir el ordinal β que cumpla el enunciado. Por el Teorema 2.8 podemos suponer que φ solo contiene $\neg, \wedge, \exists$.

Sean $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_m$ subfórmulas de φ tal que toda subfórmula de φ_i aparezca antes en la sucesión, de manera que φ_0 es atómica y para $i \geq 0$ o es atómica o se construye a partir de las anteriores y $\varphi_m = \varphi$.

La idea es encontrar un L_β para el que se sean absolutas todas las φ_i, incluido φ. Primero se va a crear una función para obtener un ordinal de cada fórmula. Esta función es de la forma

$$F_i : \mathbf{L}^{n+1} \longrightarrow \Omega$$

$$\langle x_0, ..., x_n\rangle \longmapsto \begin{cases} \min_{\in}\{\beta \in \Omega : \exists b \in L_\beta \psi^{\mathbf{L}}(\frac{v}{b}, \langle x_0, ..., x_n\rangle)\} & \text{si } \varphi_i \equiv \exists v \psi(v, \langle x_0, ..., x_n\rangle) \wedge \\ & \exists a \in \mathbf{L}\psi^{\mathbf{L}}(\frac{v}{a}, \langle x_0, ..., x_n\rangle) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Entonces si φ es de la forma $\exists v\psi(v)$, si existe un elemento que cumple $\psi(v)$ en $\mathbf{L}$ entonces también existe en L_β, dando valor a las variables libres. La existencia del conjunto

$$\{\beta \in \Omega : \exists b \in L_\beta \psi^{\mathbf{L}}(\frac{v}{b}, \langle x_0, ...x_n\rangle)\}$$

es obvia, ya que si existe un a en $\mathbf{L}$ que lo cumpla, ese a debe pertenecer a L_γ con $\gamma \in \Omega$ y pertenece también al conjunto.

Ahora se define β como la unión de una sucesión de ordinales, la cual se construye inductivamente en Ω. Siendo $\beta_0 := \alpha$, (así se tiene la condición de $\alpha \in \beta$) y β_{k+1}, a partir de β_k

$$\beta_{k+1} := \bigcup\{F_i(\langle x_0, ..., x_n\rangle) : i \leq m \wedge \{x_0, ..., x_n\} \subseteq L_{\beta_k}\}$$

y $\beta = \bigcup_{k\in\omega} \beta_k$

De tal forma que cada "nuevo" β_{k+1} se genera con la función construida antes, con todos los elementos del anterior conjunto de L_{β_k}, de tal forma que todas las subfórmulas que se cumplan dando valor a las variables libres con elementos de L_{β_k} en $\mathbf{L}$, se cumplan también en $L_{\beta_{k+1}}$.

Falta probar que todas las subfórmulas, incluida φ, son absolutas entre L_β y $\mathbf{L}$. Lo probamos inductivamente. Con φ_0 es trivial ya que la fórmula es atómica y por lo tanto es absoluta entre L_β y $\mathbf{L}$. Se supone que se cumple para todo φ_j con $j < i$ y queremos ver que es cierto para φ_i. Puede haber varios casos

- Si es atómica, como antes, se cumple.
- Si es $\neg\varphi_j$ para un $j < i$. Por inducción se tiene que se cumple para φ_j. Entonces se tiene que φ_i es absoluta entre L_β y $\mathbf{L}$ por el argumento

$$\varphi_i^{L_\beta}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \Leftrightarrow \neg\varphi_j^{L_\beta}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \Leftrightarrow \neg\varphi_j^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \Leftrightarrow \varphi_i^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ..., x_n\rangle)$$

- Si es $\varphi_j \wedge \varphi_k$ para un $j, k < i$. Por inducción se tiene que se cumple para φ_j y φ_k. Entonces se tiene que φ_i es absoluta entre L_β y $\mathbf{L}$ por el argumento

$$\begin{gathered}\varphi_i^{L_\beta}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \Leftrightarrow \varphi_j^{L_\beta}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \wedge \varphi_k^{L_\beta}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \\ \Leftrightarrow \varphi_j^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \wedge \varphi_k^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \Leftrightarrow \varphi_i^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ..., x_n\rangle)\end{gathered}$$

- Si es $\exists v\varphi_j$ para un $j < i$. Por inducción se tiene que se cumple para φ_j. Como $L_\beta \subseteq \mathbf{L}$ se tiene entonces que

$$\varphi_i^{L_\beta}(\langle x_0, ..., x_n\rangle \Rightarrow \exists v \in L_\beta \varphi_j^{L_\beta}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \Rightarrow \exists v \in \mathbf{L}\varphi_j^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ..., x_n\rangle) \Rightarrow \varphi_i^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ..., x_n\rangle)$$

  Hace falta probar la dirección contraria. Como $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq L_\beta$ por la construcción de β, se tiene que si $\exists a \in \mathbf{L}\varphi_j^{\mathbf{L}}(\frac{v}{a}, \langle x_0, ...x_n\rangle)$ entonces, hay un $\beta_k \in \beta$ tal que $\exists b \in L_{\beta_k}\varphi_j^{\mathbf{L}}(\frac{v}{b}, \langle x_0, ...x_n\rangle)$ Entonces

$$\varphi_i^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ...x_n\rangle) \Rightarrow \exists^v \in \mathbf{L}\varphi_j^{\mathbf{L}}(\langle x_0, ...x_n\rangle) \Rightarrow \exists v \in L_\beta \varphi_j^{L_\beta}(\langle x_0, ...x_n\rangle) \Rightarrow \varphi_i^{L_\beta}(\langle x_0, ...x_n\rangle)$$

□

6.3. Universo constructible es un modelo de ZFC

Con estos resultados, ya se tienen todas las herramientas para probar el que **L** es modelo de ZF y de ZFC.

Teorema 6.11. *El universo constructible es un modelo de ZF.*

Demostración. Necesitamos demostrar que todos los axiomas se cumplen en **L**.

Axioma de la Extensionalidad. Como **L** es una clase transitiva por la Proposición 6.9, y entonces por el Lema 5.18 se cumple el axioma.

Axioma del Conjunto Vacío. Se cumple porque $\emptyset \in \mathbf{L}$

Axioma de Formación de Pares. Como **L** es una clase transitiva por la Proposición 6.9 y entonces por el Lema 5.18, se cumple el axioma si y solo si $\forall x, y \in \mathbf{L}(\{x, y\} \in \mathbf{L})$. Si se tiene $x, y \in \mathbf{L}$ se puede encontrar un $\alpha \in \Omega$ tal que $x, y \in L_\alpha$. Entonces

$$\{x, y\} = \{u \in L_\alpha : L_\alpha \models u = x \vee u = y\} \in L_{\alpha+1} \subseteq \mathbf{L}$$

Axioma de la Unión. Como **L** es una clase transitiva por la Proposición 6.9, y entonces por el Lema 5.18 se cumple el axioma si y solo si $\forall x \in \mathbf{L} \bigcup x \in \mathbf{L}$. Se toma $x \in \mathbf{L}$ entonces existe un $\alpha \in \Omega$ tal que $x \in L_\alpha$. Por la transitividad de L_α se cumple que $x \subseteq L_\alpha$ y por tanto $\bigcup x \subseteq L_\alpha$. Entonces, por la definición de la unión de un conjunto, Definición 3.9,

$$\bigcup x = \{u \in L_\alpha : L_\alpha \models \exists v(u \in v \wedge v \in x)\} \in L_{\alpha+1}$$

Axioma del Infinito. Como **L** es una clase transitiva Proposición 6.9, y entonces se por el Lema 5.18 se cumple el axioma si y solo si $\omega \in \mathbf{L}$. Por la proposición Proposición 6.6.4 se concluye que $\omega \in \mathbf{L}$.

Esquema axiomático de Separación. Bastaría con probar que todos los elementos de un conjunto de **L** que cumplen cierta fórmula, φ, forman un conjunto que pertenece a **L**. Escrito formalmente, sea $x \in \mathbf{L}$ un conjunto, $\{p_1, ..., p_n\} \subseteq \mathbf{L}$ y sean las variables libres de φ $\{v_0, ...v_n\}$. Hay que probar que

$$\{y \in x : \mathbf{L} \models \varphi(y, \langle p_1, ...p_n \rangle)\} \in \mathbf{L}$$

Por el Teorema 6.10, si se encuentra un $\alpha \in \Omega$ tal que $\{x, p_1, ..., p_n\} \subseteq L_\alpha$, entonces existe un $\beta \in \Omega$ con $\alpha \in \beta$ tal que φ es absoluta entre L_β y **L**. Entonces, con ello y aplicando la transitividad de L_β se tiene que

$$\begin{aligned}\{y \in x : \mathbf{L} \models \varphi(y, \langle p_1, ...p_n \rangle)\} &= \{y \in x : L_\beta \models \varphi(y, \langle p_1, ...p_n \rangle)\} \\ &= \{y \in L_\beta : L_\beta \models y \in x \wedge \varphi(\langle p_1, ...p_n \rangle)\} \in L_{\beta+1}\end{aligned}$$

Axioma de las Partes de un conjunto. Como **L** es una clase transitiva por la Proposición 6.9, y entonces se por el Lema 5.18 se cumple el axioma si y solo si $\forall x \in \mathbf{L}(\mathscr{P}(x) \cap \mathbf{L}) \in \mathbf{L}$.

Dado $x \in \mathbf{L}$, entonces $x \in L_\alpha$ por la transitividad de L_α se cumple $x \subseteq L_\alpha$, por tanto $\mathscr{P}(x) \subseteq \mathscr{P}(L_\alpha)$. Se cumple $\mathscr{P}(x) \cap \mathbf{L} \subseteq \mathscr{P}(L_\alpha) \cap \mathbf{L} = L_\alpha + 1$. Entonces

$$\mathscr{P}(x) \cap \mathbf{L} = \{u \in L_\alpha : u \subseteq x\} = \{u \in L_\alpha : L_\alpha \models u \subseteq x\} \in L_{\alpha+1}$$

En la segunda igualdad, se aplica que $\subseteq$ es una fórmula absoluta.

Esquema axiomático de Reemplazamiento. Se quiere probar que, teniendo una función, la colección de las imágenes a partir de los elementos de un conjunto $A \in \mathbf{L}$ forma un conjunto en **L**. Formalmente, si se tiene una fórmula φ, con variables libres $\{v_0, ..., v_n\}$ que define una función, para $\{p_1, ..., p_{n-2}\} \in \mathbf{L}$

$$\forall x \in \mathbf{L} \exists ! y \in \mathbf{L} \varphi(x, y, p_1, ..., p_{n-2})$$

La colección de conjunto que se quiere ver si pertenece a $\mathbf{L}$ se define como

$$B := \{y \in \mathbf{L} : \exists x \in A\varphi^{\mathbf{L}}(x, y, p_1, ..., p_{n-2})\}$$

El cual es un conjunto, por el axioma de Reemplazamiento, por definir φ una función.

Primero, se busca un $\alpha \in \Omega$ tal que $B \subseteq L_\alpha$. Para ello se construye una función:

$$F(x) = \min_{\in}\{\beta \in \Omega : \exists y \in L_\beta \varphi^{\mathbf{L}}(x, y, p_1, ..., p_{n-2})\}$$

Por el axioma de Reemplazamiento, la imagen de F de los elementos de A forman un conjunto X, no necesariamente en $\mathbf{L}$, además es un ordinal. Entonces se define $\alpha := \bigcup X$, y cumple lo que se buscaba.

Por el Teorema 6.10 existe un ordinal β tal que $\alpha \in \beta$ tal que $A \in L_\beta$ y φ es absoluta entre L_β y $\mathbf{L}$. Entonces

$$\begin{aligned} B =& \{y \in L : \exists x \in A\varphi^{\mathbf{L}}(x, y, p_1, ..., p_{n-2})\} \\ =& \{y \in L_\beta : \exists x \in A\varphi^{L_\beta}(x, y, p_1, ..., p_{n-2})\} \\ =& \{y \in L_\beta : L_\beta \models \exists x \in A\varphi^{L_\beta}(x, y, p_1, ..., p_{n-2})\} \in L_{\beta+1} \end{aligned}$$

Axioma de Fundamento. Como $\mathbf{L}$ es una clase transitiva por la Proposición 6.9, y entonces por el Lema 5.18 se cumple el axioma. □

El axioma de Elección se cumple en $\mathbf{L}$ si para todo conjunto no vacío x cuyos elementos son no vacíos, existe un conjunto y formado por un único elemento de cada uno de los elementos de x. Por el Teorema de Zermelo, el Axioma de Elección es equivalente a que todo conjunto de $\mathbf{L}$ está bien ordenado. La prueba de este teorema no es inmediata, pero si podemos definir un buen orden en $\mathbf{L}$, dado $x \in \mathbf{L}$ podemos construir y eligiendo el mínimo de cada uno de los elementos de x. Por tanto, la estrategia será probar que podemos construir un buen orden en $\mathbf{L}$.

Teorema 6.12. *El axioma de Elección de cumple en el modelo constructible.*

Demostración. Vamos a dar el orden de $\mathbf{L}$ a partir de un buen orden para cada L_α, es decir, dados $x, y \in \mathbf{L}$ debemos tener

$$x \prec_{\mathbf{L}} y :\Leftrightarrow \exists \alpha \in \Omega(x \prec_\alpha y)$$

Para que esta definición tenga sentido es necesario que los ordenes en todos L_α para todo $\alpha \in \Omega$ sean compatibles dado que están unos contenidos en otros. Por consiguiente, necesitamos que para $\alpha, \beta \in \Omega$ con $\alpha \in \beta$:

(A) Para cualquieras $x, y \in L_\alpha$ si $x \prec_\alpha y$ entonces $x \prec_\beta y$

(B) Si $x \in L_\alpha, y \in L_\beta \setminus L_\alpha$ entonces $x \prec_\beta y$

Construimos la relación de orden mediante la recurrencia transfinita, Teorema 4.30, Necesitamos encontrar para cada $\alpha \in \Omega$ fijo una forma de ordenar los elementos de L_α.

Veamos el caso de que $\alpha = \beta + 1$

En una primera aproximación veamos si podemos caracterizar los elementos de $L_{\beta+1}$ de alguna forma. Dado $x \in L_{\beta+1}$ entonces

$$x = \{y \in L_\beta : L_\beta \models \varphi(y, p_1, ..., p_n)\}$$

dónde $p_1, ..., p_n$ son elementos de L_β y φ una fórmula tal que $f = \ulcorner\varphi\urcorner \in Fml$.

Por tanto x se puede caracterizar por f, $p_1, ..., p_n$ y β y escribimos $x = D(\beta, \varphi, \langle p_1, ..., p_n\rangle)$

Obsérvese que puede haber varias tuplas que definan el mismo conjunto, ya que si se escogen fórmulas equivalentes se puede obtener el mismo conjunto.

Queremos definir un orden $\prec_{\beta+1}$ en $L_{\beta+1}$, para ello vamos a definir primero un orden $\tilde{\prec}_{\beta+1}$ en $L_{\beta+1}$, es decir, vamos a ordenar las tuplas $(\gamma, f, \langle p_1, ..., p_n\rangle)$ con $\gamma \in \beta + 1$

Observamos que los tres parámetros que definen un elemento se pueden ordenar individualmente.

- Los ordinales están totalmente ordenados por la relación dada por la pertenencia. 4.22.3.

- Las fórmulas se pueden ordenar, ya que el conjunto Fml es numerable, porque se ha podido gödelizar entonces admite una enumeración. En consecuencia el orden puede ser simplemente la enumeración de estas fórmulas, se denota como $\prec_{Fml}$. Claramente el orden que se tenga al final dependerá del orden escogido para estas fórmulas.

- Los parámetros de la fórmula $\langle q_1, ..., q_n\rangle$, se puede ordenar primero por la longitud de n, es decir, el número de parámetros, pero en el caso de que la longitud de ambos sea la misma se necesita otro orden. Como p_i es un elemento de L_β, donde β es el ordinal anterior al del L_α entonces basta con utilizar el orden que se haya construido ya para L_β.

Con esto, ya se puede empezar a crear el orden buscado.

- Para $L_0 = \emptyset$ tenemos la ordenación vacía.

- Para un $\beta + 1$. Entonces ya se tiene el orden de L_β, son el cual se va a poder definir el de $L_{\beta+1}$. Como se ha explicado para poner definirlo, es necesario primero ordenar las tuplas que caracterizan cada elemento. Se define $\tilde{\prec}_{\beta+1}$, para $\delta, \gamma \in \beta + 1$, f, g fórmulas y $p_1, .., p_n, q_1, ..., q_m \in L_\beta$

$$
\begin{aligned}
D(\delta, f, \langle p_1, ..., p_n\rangle) \tilde{\prec}_{\beta+1} D(\gamma, g, \langle q_1, ..., q_m\rangle) : \Leftrightarrow\ & \delta \in \gamma \lor (\delta = \gamma \land f \prec_{Fml} g) \\
& \lor (\delta = \gamma \land f = g \land n < m) \\
& \lor (\delta = \gamma \land f = g \land n = m \\
& \land \exists r \in \omega (r = min\{r \leq n : p_r \leq p_n\}))
\end{aligned}
$$

  Por tanto $\prec_{\beta+1}$ se define como, dados $x, y \in L_{\beta+1}$

$$
x \prec_{\beta+1} y :\Leftrightarrow D(\delta, f, \langle p_1, ..., p_n\rangle) \tilde{\prec}_{\beta+1} D(\gamma, g, \langle q_1, ..., q_m\rangle)
$$

  Donde $D(\delta, f, \langle p_1, ..., p_n\rangle)$ y $D(\gamma, g, \langle q_1, ..., q_m\rangle)$ son las tuplas mínimas que caracterizan a x e y.

- Para β un ordinal límite, entonces

$$
\prec_\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \prec_\gamma
$$

Comprobamos que estos órdenes cumplen las propiedades (A) y (B), y son un buen orden. Construido el orden para cada L_α, se puede construir un buen orden para **L**. □

Al haber encontrado un modelo que se cumple en ZF y en ZFC, se concluye el siguiente corolario.

Corolario 6.13.

$$Con(ZF) \Rightarrow Con(ZFC)$$

Terminamos este trabajo con una observación:

No se puede probar que exista un conjunto no constructible. Por el siguiente razonamiento dado en [Ivorra Castillo, 2022]

"Desde un punto de vista semántico, no es posible demostrar la existencia de conjuntos no constructibles porque si en un modelo de ZF en el que los haya los eliminamos y nos quedamos únicamente con los conjuntos constructibles, se siguen cumpliendo todos los axiomas de ZF, y además todo conjunto es constructible, luego a partir de tales axiomas no se puede probar la existencia de un conjunto no constructible"

Se denomina axioma de constructibilidad a $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, en otras palabras, suponer que todos los conjuntos son constructibles. Como se deduce del razonamiento anterior $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ se puede probar que ZF+($\mathbf{V} = \mathbf{L}$) es relativamente consistente con ZF. De hecho, se puede probar que el axioma de constructibilidad es independiente de ZF. Por último, cabe destacar que la consistencia de ZF+($\mathbf{V} = \mathbf{L}$) implica la consistencia de ZF.

Referencias

[Cohen, 1959] Cohen, P. (1959). *The Independence of the Axiom of Choice.* uitgever niet vastgesteld.

[Fraenkel et al., 1973] Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., and Levy, A. (1973). *Foundations of Set Theory.* ISSN. Elsevier Science.

[Gödel, 1940] Gödel, K. (1940). *Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory.* Princeton, NJ, USA: Princeton University Press.

[Goldrei, 1996] Goldrei, D. (1996). *Classic Set Theory: For Guided Independent Study.* Chapman & Hall mathematics. Taylor & Francis.

[Halbeisen and Krapf, 2020] Halbeisen, L. and Krapf, R. (2020). *Gödel's Theorems and Zermelo's Axioms. A Firm Foundation of Mathematics.* Birkhäuser.

[Halbeisen, 2012] Halbeisen, L. J. (2012). *Combinatorial Set Theory.* Springer.

[Ivorra Castillo, 2000] Ivorra Castillo, C. (2000). *Lógica Matemática.* Dispoible online en: https://www.uv.es/ivorra/Libros/LM.pdf.

[Ivorra Castillo, 2022] Ivorra Castillo, C. (Última consulta: 17/06/2022). *Pruebas de Consistencia.* Disponible online en: https://www.uv.es/ivorra/Libros/PC.pdf.

[Kunen, 1980] Kunen, K. (1980). *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* Mathematical Programming Study. North-Holland Publishing Company.

[Mack, 2006] Mack, D. W. J. M. (2006). *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic.* Springer Science+Business Media.

[Rubin, 1985] Rubin, H. J. (1985). *Equivalentes of the axiom of choice, II.* Elsevier Science Publishers B.V.

[Zermelo, 1904] Zermelo, E. (1904). Beweis, daß jede menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen*, 59(4):514–516.