



TEORÍA DE SUBMERSIONES
(Theory of Smooth Submersions)

Mikel Martin Barandiaran

Santander, Junio 2022

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Cantabria

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a Fernando su inestimable ayuda a lo largo de todo el proceso que supone hacer un trabajo como este. No solo ya por las continuas correcciones o recomendaciones, sino por tomarse el tiempo de sentarse a hablar y transmitir su manera particular de ver las matemáticas.

Bestalde, ezin ditut aipatu gabe utzi azken bost urte hauetan hainbeste ikusi ez arren beti ere hor egon diren pertsona horiek guztiak. Horregatik, beraz, nire eskerrik beroenak etxekoei eta betiko lagunei. Aupa zuek!

Finalmente, como no podía ser de otra manera, reservo un lugar especial para las personas que han hecho de Santander mi segunda casa y de estos últimos 5 años una etapa increíble. Por las tardes en el Bule, las comidas en el Bracho y alguna que otra noche de fiesta. Tafalla, Emdbräu Team, Molineros y Angeleros... ya sabéis quienes sois. ¡Volveremos!

En Santander, a 22 de junio de 2022

Abstract

This work is devoted to study different aspects within the fields of differential topology and geometry that come together under the notion of *smooth submersion*. These are defined as smooth maps whose differentials or pushforwards are surjective at each point, making them in some sense dual to the concept of immersions. This kind of map between differentiable manifolds is frequently encountered when working with a wide variety of mathematical structures. We will derive the basic properties that characterize them, in order to properly identify and study several scenarios in which submersions play a significant role. In particular, we will focus our attention on quotient manifolds, homogeneous manifolds, smooth covers and principal fiber bundles, pointing out how submersions are involved and presenting relevant examples for each case. In addition to that we present riemannian submersions, a concept developed as recently as in the sixties of the past century. Precisely, we will introduce the fundamental tensors associated to each riemannian submersion and the fundamental equations that link the curvatures of the manifolds involved.

Keywords: Submersions, Differential, Vertical and Horizontal Distributions, Quotient Manifolds, Lie Groups, Homogeneous Manifolds, Fiber Bundles, Riemannian Submersions.

Resumen

En este trabajo se estudian varias ideas de la geometría y topología diferencial que confluyen bajo el concepto de submersión. Las submersiones se definen como funciones diferenciables cuyas aplicaciones tangentes son sobreyectivas en cada punto, y son de cierta manera duales a las inmersiones. Este tipo de aplicaciones entre variedades diferenciables constituyen una amplia clase de funciones que aparecen con frecuencia al manejar diversas estructuras matemáticas. Se mostrarán las propiedades fundamentales que las caracterizan, para luego identificar y estudiar varios casos de especial interés. En particular, se estudian las variedades cociente, las variedades homogéneas, las cubiertas topológicas diferenciables y los fibrados principales, identificando el papel que juegan las submersiones en cada caso y exponiendo ejemplos relevantes de cada tipo. Se prestará también especial atención a las submersiones riemannianas, una noción que surge en la década de los sesenta del siglo pasado. En concreto se presentarán los tensores fundamentales asociados a una submersión riemanniana y las ecuaciones fundamentales que relacionan las curvaturas de las variedades involucradas.

Palabras Clave: Submersión, Aplicación Tangente, Distribución Vertical y Horizontal, Variedad Cociente, Grupos de Lie, Variedad Homogénea, Fibrados, Submersión Riemanniana.

Índice

Agradecimientos	I
Resumen	II
Introducción	1
Contexto Histórico	3
Contenidos de la Memoria	4
Convenios y Notación	8
1 Teoría General de Submersiones	9
1.1 Recordatorio de Algunas Nociones de la Topología Diferencial	9
1.2 Submersiones: Definición y Propiedades	11
1.3 Las Fibras de Una Submersión	15
2 Variedades Cociente	19
2.1 Acciones de grupos de difeomorfismos	20
2.1.1 Acciones Propiamente Discontinuas	21
2.2 Grupos de Lie	22
2.3 Variedades Homogéneas	23
2.4 Fibrados Principales	26
2.5 Un Ejemplo de Especial Interés	30
3 Submersiones entre Variedades de Igual Dimensión	33
3.1 Cubiertas Topológicas Diferenciables	33
3.2 Teoría del Grado	36
4 Submersiones Riemannianas	39
4.1 Definición y Propiedades	39
4.2 Los Tensores Fundamentales de Una Submersión	42
4.2.1 Derivadas Covariantes de los Tensores Fundamentales	45
4.3 Ecuaciones Fundamentales de Una Submersión	46
4.4 Teorema de O'Neill	48
Apéndice A: Algunos Resultados relativos a las Inmersiones	49
Apéndice B: Aplicaciones Riemannianas	52
Bibliografía	53

Introducción

La topología diferencial es un campo de las matemáticas que conecta muchas áreas de las mismas. No debería extrañarnos, pues hacer topología diferencial significa hacer puntualmente álgebra lineal, localmente análisis y globalmente topología. Por si fuera poco, el tiempo y el éxito de la topología algebraica también han demostrado lo útil que resulta trasladar preguntas y problemas de la categoría diferenciable a la algebraica, donde los conocimientos sobre grupos y sus acciones sobre conjuntos han abierto numerosas vías de estudio. No es de extrañar, por tanto, que la topología diferencial mezcle conceptos diversos provenientes de campos a priori algo lejanos.

La topología diferencial queda cerca del punto medio entre la plástica abstracción de la topología y la clásica rigidez de la geometría euclídea. Intuitivamente podemos pensar en una variedad diferenciable, el objeto fundacional de la categoría de la topología diferencial, como un conjunto que localmente es parecido al espacio euclídeo y donde podemos hacer derivadas, de manera que toda la maquinaria matemática desarrollada para \mathbb{R}^n es más o menos trasladable al conjunto que, a priori, poco tiene que ver con él. Siendo ya algo más técnicos, es común encontrarse con definiciones como la siguiente:

“Una variedad diferenciable es un espacio topológico localmente homeomorfo a abiertos de \mathbb{R}^n ”.

Así, para generalizar conceptos relativos al espacio euclídeo basta *subir y bajar* de la variedad a \mathbb{R}^n y viceversa mediante los homeomorfismos que provee la definición. Técnicamente hablando, la definición anterior es la de variedad *topológica y real*, y ha faltado concretar que se suele asumir que \mathbb{R}^n está dotada de la topología usual. Las variedades adquieren el calificativo *diferenciable*, justamente, al trasladar una noción de diferenciabilidad del espacio euclídeo al conjunto. Decimos entonces que la variedad tiene una *estructura diferenciable*.

Esta manera inicial de pensar en las variedades es ciertamente común, pero no única. Es posible construir una noción de variedad diferenciable que acaba siendo equivalente a la que acabamos de ver, pero que tiene la ventaja de que parte de una base que prescinde de argumentos topológicos. La idea sigue siendo poder *subir y bajar* de un conjunto al espacio euclídeo, y desde esta nueva perspectiva a la que nos referiremos como la de las variedades definidas de manera *abstracta*, eso se consigue mediante las *cartas*. Una carta x de un conjunto M no es más que una aplicación inyectiva $x : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya imagen $x(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^n . Un conjunto de cartas $\{x_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ se dice que es un *atlas* cuando las cartas “cubren” M , es decir, $\cup_{i \in I} U_i = M$. Este concepto de atlas es el que a partir del cual se puede topologizar y desarrollar la noción de diferenciabilidad en M , siendo dicho proceso contenido típico de un libro introductorio a la topología diferencial. Esta segunda visión de las variedades será la que adoptamos en este trabajo.

Los morfismos propios de la categoría diferenciable son, redundantemente, las funciones diferenciables. Intuitivamente, una aplicación entre variedades es una función diferenciable si su versión bajada

a espacios euclídeos mediante sendas cartas es diferenciable, ahora sí, en el sentido clásico. La Figura 1 trata de plasmar dicha idea, presentando un esquema que se repite constantemente en esta disciplina de las matemáticas. Los isomorfismos de esta categoría reciben el nombre de difeomorfismos.

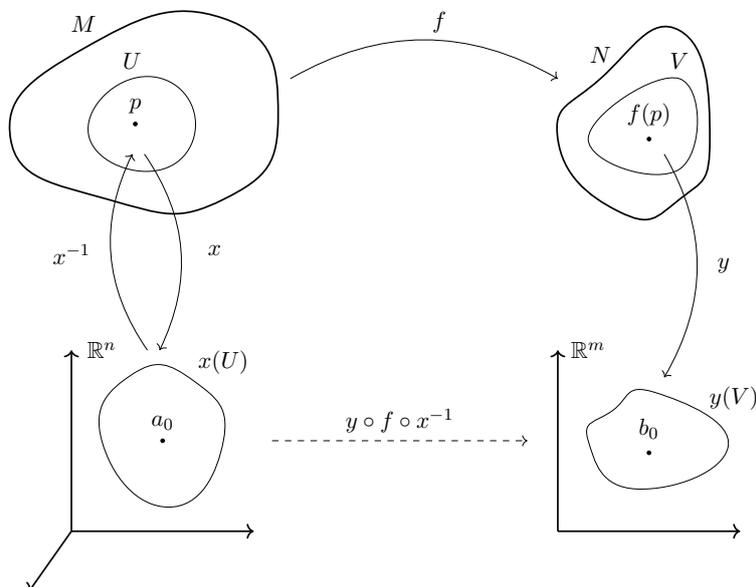


Figura 1: Esquema de diferenciabilidad de una aplicación entre variedades.

De la misma manera que en el análisis clásico de funciones reales de una o varias variables es interesante el punto de vista de entender la diferenciabilidad como “mejor aproximación lineal”, para las variedades diferenciables se puede construir una abstracción similar que resulta especialmente útil. Nos referimos al concepto de *espacio tangente*, que asocia a cada punto de la variedad un espacio vectorial de la misma dimensión que la variedad. Existen distintos formalismos equivalentes para definir el espacio tangente, siendo habituales las que usan clases de equivalencia de curvas de la variedad que pasan por un punto, imitando el concepto de la velocidad de una curva clásica, o las que lo hacen mediante gérmenes de funciones en un punto. El siguiente paso natural en esta “linealización” es la de pensar en campos vectoriales, que no son más que unas asignaciones “buenas” de elementos del espacio tangente correspondiente a cada punto (aunque muchas veces el enfoque más enriquecedor es el de pensar en los campos como en derivaciones, como operadores que actúan sobre funciones que toman valores en \mathbb{R} y tienen propiedades análogas a la derivada clásica).

Volviendo a las funciones diferenciables, la linealización de las mismas se lleva a cabo mediante la *aplicación tangente* asociada. La aplicación tangente asociada a una función diferenciable no es más que la mejor aproximación lineal de esa función en un punto de nuestra variedad, por lo que localmente podemos pensar en las funciones diferenciables como simples aplicaciones lineales entre espacios tangentes, de las cuales podemos decir muchas cosas gracias a toda la teoría del álgebra lineal. Así, aunque el carácter general y global de una función diferenciable entre variedades puede ser complicada de entender y estudiar a partir de su mera definición, la aplicación tangente de una función contiene mucha información acerca de la misma y es más fácil de estudiar; por ejemplo, un difeomorfismo tiene la propiedad de que su aplicación tangente es siempre invertible. Siendo las cosas de esta manera, una clasificación básica de aplicaciones lineales induce una clasificación de funciones diferenciables. Así, se dice que una función diferenciable entre variedades es una *inmersión* si la aplicación tangente

asociada es inyectiva en todos los puntos, y en cambio que es una *submersión* si la aplicación tangente asociada es sobreyectiva en todos los puntos.

Históricamente las inmersiones han recibido una mayor atención por parte de la comunidad matemática, en parte por su importancia a la hora de trabajar con el concepto de subvariedad y por establecer el nexo entre variedades abstractas (definidas a través de cartas y atlas) y variedades inmersas en espacios euclídeos, mediante el importante Teorema de Inmersión de Whitney (1936) primero y mediante los Teoremas de Embedding Isométricos de Nash (1954-1956) después.

Las submersiones en su conjunto tal vez hayan sido menos estudiadas que las inmersiones, lo cual no quita que, tal vez más discretamente, permeen distintos aspectos de la topología diferencial de diversa índole. El objeto de este trabajo es, tan justamente, presentar un material que estudie las submersiones como concepto, exhibiendo sus propiedades características, para luego describir las situaciones de la topología y geometría diferencial donde haya submersiones involucradas desde una perspectiva que permita identificar mejor las relaciones subyacentes entre ellas.

El trabajo que se presenta contiene varias contribuciones originales que recalamos brevemente. Por un lado, varios ejemplos, algunas demostraciones y las figuras que no se citan son de aportación propia. Por otro lado, más destacadamente, cabe decir que la teoría de submersiones como tal no se ha desarrollado de manera ordenada dentro de las matemáticas (ver Contexto Histórico) y no hay realmente libros con una selección u ordenación de contenidos similar al que hacemos aquí. Es por ello por lo que el material que presentamos emana de una recopilación meditada de varias fuentes y varios campos que ha resultado en un texto que engloba en un mismo lugar las principales ideas de la topología y geometría diferencial que hacen uso de la noción de submersión.

Contexto Histórico

Desde el punto de vista histórico la teoría de variedades diferenciables surge como la generalización natural de la teoría de curvas y superficies en el espacio tridimensional. En el tratamiento clásico, del cual Carl Friedrich Gauss (1777-1855) es considerado el máximo exponente, se establecen y desarrollan las ideas geométricas básicas y se identifican conceptos clave a estudiar como la de curvatura o la noción de geodésica. Podríamos decir que dos de los resultados más importantes de dicha disciplina fueron el Teorema Egregio de Gauss (1827), que identifica la primera forma fundamental como objeto clave para estudiar la geometría intrínseca de las superficies al probar que la llamada curvatura de Gauss depende solo de ella, y el Teorema de Gauss-Bonnet (Gauss en 1825-1827 y O. Bonnet en 1848), que evidencia que realmente existe una profunda conexión entre la rigidez geométrica y la fluidez topológica de las superficies.

La transición al tratamiento moderno de las variedades surge sobre todo de las manos de Bernard Riemann (1826-1866), quien en su tesis de habilitación (1854) hace el salto ahora obvio de generalizar el trabajo de Gauss y contemporáneos a dimensiones arbitrarias (aunque el concepto de variedad diferenciable como la entendemos hoy en día no fue introducido formalmente hasta 1913 por H. Weyl). Por el camino se desarrollan las herramientas matemáticas que ahora son menester en el campo de la geometría diferencial, como las nociones de conexión, formas diferenciales o campos tensoriales. De estos últimos cobra especial importancia el tensor de curvatura o tensor de Riemann, jugando por ejemplo un papel central en la teoría de la Relatividad General de Einstein. La lista de autores cuyos pensamientos dirigieron la posterior evolución de la disciplina es larga, pero entre los que abrieron el camino podemos destacar los trabajos de Sophus Lie (1842-1899), quien se da cuenta de la impor-

tancia de incorporar la teoría de grupos en el ámbito de la topología y geometría diferencial, o Élie Cartan (1869-1951), quien siendo estudiante doctoral del primero continúa desarrollando las ideas de su mentor. Finalmente, de los autores más modernos destacamos tal vez a J. Milnor (1931-) y sus trabajos sobre estructuras exóticas en esferas.

En lo relativo a las submersiones es difícil poner el dedo en resultados históricos clave o señalar autores que contribuyesen de manera significativa a su estudio, pues más bien la teoría asociada a estas ha ido creciendo a la par que lo hacían las ideas matemáticas que las emplean, como pueden ser la teoría de fibrados o las variedades cociente. Los que sí tienen un recorrido histórico más concreto y nombres y apellidos asociados son los resultados relativos a las submersiones riemannianas. Estas se estudian por primera vez en profundidad en la década de los 60 cuando el matemático americano Barret O’Neill presenta en [ONE66] los tensores y ecuaciones fundamentales asociados a una submersión cuya representación local es una proyección ortogonal, una submersión que respeta las métricas. Resulta llamativo cuanto menos el largo periodo de tiempo que transcurre desde el desarrollo de la teoría relativa a las inmersiones riemannianas (las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi ya se conocían en la segunda mitad del siglo XIX) hasta la formalización análoga de las submersiones riemannianas, unos 100 años más tarde. La explicación se encuentra en parte en el hecho de que resulta natural pensar en superficies inmersas en el espacio tridimensional, a diferencia de la situación contraria en la que se sumerge el espacio ambiente en una superficie.

Finalmente, en la década de los 90 del siglo pasado surge una noción que generaliza el comportamiento de tanto inmersiones como submersiones riemannianas. En [FIS92] el matemático Arthur E. Fischer introduce el concepto de *aplicación riemanniana*: en palabras del propio autor, una aplicación entre variedades riemannianas tan isométrica como pueda serlo (“*as isometric as it can get*”). Las aplicaciones riemannianas incluyen como casos particulares las ya mencionadas submersiones riemannianas e inmersiones isométricas.

Contenidos de la Memoria

El lector ciertamente se beneficiará de manejar o estar familiarizado con conceptos básicos de topología y geometría diferencial. Estos conocimientos serán los típicos que se imparten en un curso de grado que trate con variedades diferenciables.

La memoria se divide en cuatro capítulos y dos apéndices. A continuación se resumen los contenidos de los mismos:

- En el Capítulo 1 se recogen las definiciones y propiedades básicas asociadas a las submersiones. Una submersión es una función diferenciable $\pi : M \rightarrow B$ cuya aplicación tangente $(\pi_*)_p : T_p M \rightarrow T_{\pi(p)} B$ es sobreyectiva para todo punto $p \in M$. De la definición se deduce automáticamente que $\dim(M) \geq \dim(B)$. Una de las ideas clave que se destila en este primer capítulo es que las submersiones en el fondo se parecen mucho a las proyecciones canónicas

$$\begin{aligned} \pi : M \times N &\longrightarrow M \\ (p, q) &\mapsto p \end{aligned}$$

de una variedad producto, lo cual queda bien reflejado en la Proposición 1.2.5:

Proposición 1.2.5. Sea $\pi : M \rightarrow B$ una submersión. Dado un punto cualquiera $p \in M$, existen cartas $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y : V \subset B \rightarrow \mathbb{R}^b$ con $p \in U$, $\pi(p) \in V$ de manera que

$$(y \circ \pi \circ x^{-1}) : x(U) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^b \\ (z_1, z_2) \mapsto z_1,$$

donde $(z_1, z_2) \in x(U) \subseteq \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^{m-b}$.

No todas las submersiones son globalmente como proyecciones de variedades producto (por ejemplo, la proyección de una cinta de Möbius a la circunferencia), pero podríamos esperar por lo menos que las submersiones heredasen las propiedades topológicas de las mismas. Esto es así hasta cierto punto: las submersiones son aplicaciones abiertas y es posible hallar secciones (inversa en una dirección) de las mismas, lo que ocurre es que muchas veces las propiedades se conservan solo de manera local. La primera parte del primer capítulo se dedica por tanto a estudiar en detalle las propiedades genéricas de las submersiones.

El otro resultado importante del capítulo trata sobre las fibras de una submersión y la descomposición vertical/horizontal que inducen en los espacios tangentes. Llamamos fibras a los conjuntos $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$ (término que se toma prestado de la jerga de los fibrados). El resultado importante es la Proposición 1.3.1, el cual nos dice cómo son las fibras de una submersión.

Proposición 1.3.1. Sea $\pi : M \rightarrow B$ una submersión y sean $m = \dim(M)$, $b = \dim(B)$. Si $m = b$, las fibras son conjuntos discretos de puntos. Si $m > b$, las fibras son subvariedades regulares cerradas de M de dimensión $m - b$.

Presentaremos una demostración constructiva del resultado, formando un atlas para las fibras partiendo del atlas de la variedad. Muchas fuentes directamente razonan diciendo que el resultado se debe al Teorema de la Función Inversa, y ciertamente acaba siendo así, pero hemos optado por desgranar un poco más la demostración.

Además, las fibras son una familia de subvariedades “buenas”, pues definen una distribución integrable (Proposición 1.3.3), y al estar inmersas en la variedad, estas inducen una descomposición natural: aquello que es tangente a las fibras (vertical, \mathcal{V}) y lo que no (horizontal, \mathcal{H}). La parte vertical viene unívocamente determinada por las fibras, pero la elección de un complemento horizontal a priori no se puede hacer de manera canónica, de la misma manera que para una aplicación lineal sobreyectiva $f : V \rightarrow W$ la descomposición

$$V = \ker f \oplus U$$

es arbitraria en la elección de U . Será interesante fijarnos qué más debemos exigir o disponer para poder hacer una elección natural del complemento horizontal.

- El Capítulo 2 está dedicado al estudio de las variedades cociente. Dado un conjunto cociente de una variedad, las variedades cociente se definen justamente exigiendo que la proyección al cociente sea una submersión. El caso general es muy amplio por lo que nos restringimos a estudiar los conjuntos cocientes dados por acciones de grupos.

En la Sección 2.1 introducimos los grupos de transformaciones, mediante los cuales definiremos relaciones de equivalencia en las variedades. Recordaremos tipos especiales de acciones de grupo que serán relevantes en el resto del capítulo. En particular, aprovechamos para resaltar la importancia de las acciones propiamente discontinuas, pues tal y como se resume en la Proposición 2.1.6 proporcionan variedades cociente de la misma dimensión que la variedad inicial.

Para seguir hablando de acciones de grupos necesitamos recordar las nociones asociadas a los grupos de Lie, por lo que son objeto principal de estudio de la Sección 2.2. Una vez aclarado lo que entendemos por una acción de grupo diferenciable mostramos un resultado angular en el estudio de las variedades cociente, el Teorema 2.2.4.

Teorema 2.2.4. Sea G un grupo de Lie que actúa de manera diferenciable, libre y propia sobre una variedad M . Entonces el cociente M/G es una variedad topológica de dimensión $\dim(M) - \dim(G)$ y admite una estructura diferenciable que hace de la proyección canónica $\pi : M \rightarrow M/G$ una submersión.

En la Sección 2.3 centramos la vista en las variedades homogéneas. Serán clave las acciones transitivas por grupos de Lie y los subgrupos de isotropía, que nos permiten enunciar el Teorema 2.3.3. En él vemos que las variedades homogéneas son variedades cociente de grupos transitivos de Lie cocientados por subgrupos de isotropía. Como caso típico de variedad homogénea mostramos en detalle la estructura cociente de la esfera en el Ejemplo 2.3.6.

Para ir terminando con los distintos casos de interés donde tenemos variedades cociente y submersiones, en la Sección 2.4 hacemos un breve resumen de la teoría de fibrados. Tras introducir los fibrados principales (Definición 2.4.5), mostramos y desarrollamos dos ejemplos típicos: El fibrado de las referencias (Ejemplo 2.4.7) y la fibración de Hopf (Ejemplo 2.4.8).

Finalmente, en la Sección 2.5 se presenta un ejemplo de descomposición natural en parte vertical y horizontal para el caso del fibrado tangente de una variedad con conexión. Una de las razones para mostrar dicho ejemplo es que da pie a hablar sobre la noción original de *conexión* en fibrados vectoriales.

- En el Capítulo 3 se particulariza el estudio de las submersiones al caso en el que las dos variedades involucradas tengan la misma dimensión. En dicho caso las submersiones coinciden con los difeomorfismos locales. Se trata del capítulo más corto y se muestran dos escenarios particulares donde los difeomorfismos locales son importantes en la topología algebraica: en el tratamiento de las cubiertas topológicas diferenciables y en el cálculo del grado de una función diferenciable.

Las cubiertas topológicas son de uso habitual en la topología algebraica. Tras recordar la noción topológica y definir la versión diferenciable de las mismas, se muestra que toda cubierta diferenciable es una submersión (Proposición 3.1.2) y se da una condición suficiente para que una submersión sea la proyección asociada a una cubierta (Proposición 3.1.4). Finalmente se destaca la relación de las cubiertas con las acciones propiamente discontinuas descritas en el Capítulo 2.

Por otro lado, calcular el grado de una función continua ha demostrado ser una herramienta muy útil en el ámbito de la topología algebraica, pues resulta ser un invariante por homotopías. Para

el caso de las esferas S^n la importancia del concepto de grado se acentúa, pues se puede demostrar que dos aplicaciones continuas $f, g : S^n \rightarrow S^n$ son homótopas si y solo si $\text{grado}(f) = \text{grado}(g)$. Para los difeomorfismos locales el cálculo del grado es especialmente cómodo, pues basta mirar el determinante de la aplicación tangente (Definición 3.2.3). Como utilidad del grado de funciones diferenciables mostraremos que las esferas de orden par no pueden admitir campos vectoriales sin ceros (Ejemplo 3.2.5).

- En el cuarto y último Capítulo se da el salto a la geometría riemanniana para estudiar las submersiones riemannianas: aquellas que “respetan las métricas”. Para este capítulo se sigue principalmente la publicación original de O’Neill sobre el tema. Tras dar la definición formal de las mismas se identifican los campos vectoriales *básicos* como los más “cómodos” para tratar con este tipo de submersiones, por las razones que se muestran en el Lema 4.1.7. A continuación, en la Sección 4.2 se introducen los tensores fundamentales T y A asociados a una submersión riemanniana.

Definición 4.2.1. Se definen los *tensores fundamentales* o *invariantes* $T, A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ de la submersión como:

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= T_X Y = \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{V}(Y)) + \mathcal{V}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{H}(Y)), \\ A(X, Y) &= A_X Y = \mathcal{V}(\nabla_{\mathcal{H}(X)} \mathcal{H}(Y)) + \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{H}(X)} \mathcal{V}(Y)), \end{aligned}$$

donde X, Y son campos vectoriales cualesquiera.

En la Proposición 4.2.4 se muestran sus propiedades básicas. Tras estudiar las derivadas covariantes de los tensores fundamentales (Lema 4.2.7), se está listo para enunciar las ecuaciones fundamentales de una submersión. Estas se presentan en el Teorema 4.3.1 y en última instancia relacionan los tensores de curvatura de las variedades que involucra la submersión. En el Corolario 4.3.2 se particulariza el resultado para curvaturas seccionales. Para terminar, el Teorema 4.4.1 nos muestra que una submersión riemanniana entre dos variedades queda caracterizada por sus tensores fundamentales:

Teorema 4.4.1. Sean $\pi, \bar{\pi} : M \rightarrow B$ dos submersiones riemannianas de una variedad conexa M en B . Si π y $\bar{\pi}$ tienen los mismos tensores fundamentales T y A y sus aplicaciones tangentes coinciden en algún punto p de M , entonces $\pi = \bar{\pi}$ salvo isometría.

- El Apéndice A está dedicado a repasar algunos resultados relativos a las inmersiones. Se presentan las propiedades básicas de las mismas vistas desde el punto de vista de la topología diferencial, así como los resultados principales asociados a las inmersiones isométricas, que incluyen las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi generalizadas.
- Finalmente en el Apéndice B destacamos algunos aspectos relevantes de las aplicaciones riemannianas, dando su definición y viendo como efectivamente generalizan los casos de submersiones e inmersiones riemannianas.

No se ha pretendido desarrollar en detalle todos y cada uno de los temas que se exploran a lo largo de este trabajo, pues muchos de ellos dan pie a perseguir un Trabajo de Fin de Grado por separado.

Se ha buscado un equilibrio entre presentar los resultados necesarios para un tratamiento lo más autocontenido posible y omitir detalles y/o demostraciones que no aporten ideas significativas al tratamiento general de las submersiones. Se ha tratado de dejar, en la medida de lo posible por ser la memoria finita y acotada, referencias a fuentes con las demostraciones completas, y se han resaltado las ideas claves de las demostraciones de los teoremas que tienen cierta importancia en su ámbito.

Convenios y Notación

En lo que sigue se utilizarán los siguientes convenios, salvo que se indique lo contrario:

- Todas las variedades que se consideran en esta memoria son Hausdorff y cumplen el Segundo Axioma de Numerabilidad, para así evitar casos patológicos en los que puedan no cumplirse los resultados que se enuncian.
- Se utilizarán las palabras *variedad* y *variedad diferenciable real* \mathcal{C}^∞ indistintamente. En los casos en los que se quiera enfatizar que no es necesaria la dotación de una estructura diferenciable, se recurrirá al término *variedad topológica*.
- Las variedades que se presentan se asumen conexas y sin borde.
- Todas las funciones diferenciables que se emplean son de clase \mathcal{C}^∞ .
- Cuando un conjunto admita una estructura diferenciable natural o canónica y no se especifique lo contrario, se asume que el conjunto como variedad tiene dicha estructura diferenciable.
- La notación preferente para las submersiones será la de $\pi : M \rightarrow B$. Asimismo, se reserva la notación $p_1 : A \times B \rightarrow A$ y $p_2 : A \times B \rightarrow B$ para denotar las proyecciones triviales.
- A lo largo de algunas partes de la memoria se emplea el lenguaje propio de fibrados incluso en casos en los que la submersión bajo estudio no se trate de la proyección de un fibrado, sin riesgo a que haya confusión alguna. En particular, será habitual referirse a los conjuntos $\pi^{-1}(p)$ como *fibras*.
- El anillo de funciones diferenciables de clase \mathcal{C}^∞ sobre una variedad M se denotará por $\mathfrak{F}(M)$, el módulo de los campos vectoriales por $\mathfrak{X}(M)$ y en general el conjunto de los campos tensoriales de tipo (r, s) se denotarán por $\mathfrak{T}_s^r(M)$.

Capítulo 1

Teoría General de Submersiones

Este primer capítulo está dedicado a introducir las nociones más básicas acerca de las submersiones entre variedades, a la vez que se exponen algunas de las propiedades más generales que son aplicables a todos los capítulos siguientes. Nos basamos principalmente en [BC70] y [SN17].

Antes de empezar con las submersiones, recordamos algunos de los conceptos básicos a manejar cuando se trata con variedades diferenciables, centrándonos en aquellos resultados que emplearemos para desarrollar la teoría general.

1.1 Recordatorio de Algunas Nociones de la Topología Diferencial

Una estructura diferenciable de una variedad viene determinada por el atlas maximal formado por todas las cartas que permiten un “buen cambio de coordenadas” respecto a una familia inicial de cartas compatibles. Los dominios de las cartas de dicho atlas forman una base para la llamada topología diferencial de la variedad, y con dicha topología, las cartas son homeomorfismos al considerar la topología usual en el espacio \mathbb{R}^n de llegada. Un resultado clave para poder demostrar la anterior afirmación es que *las cartas se pueden localizar*, lo cual se puede resumir diciendo que, dada una carta $x : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$, la restricción de la carta a un dominio $U' \subseteq U$ donde $x(U')$ es abierto en \mathbb{R}^n , es también una carta compatible.

Recordamos también que cada aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre variedades tiene asociada, para cada punto $p \in M$ de la variedad inicial, una aplicación lineal entre los espacios tangentes. Se llama *aplicación tangente* o *aplicación diferencial* asociada a f , la denotaremos por $(f_*) : TM \rightarrow TN$ y se define como

$$\begin{aligned}(f_*)_p : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ \gamma'(t_0) &\mapsto (f \circ \gamma)'(t_0),\end{aligned}$$

donde $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ es una curva con $\gamma(t_0) = p$ con $t_0 \in (0, 1)$. Naturalmente, la definición no depende de la curva γ escogida. A la hora de trabajar con las aplicaciones tangentes podemos emplear todos los resultados relativos a aplicaciones lineales que nos proporciona el Álgebra Lineal. Así, por ejemplo, la aplicación tangente de la composición de dos funciones diferenciables $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow Z$ es simplemente la composición de las aplicaciones tangentes:

$$((g \circ f)_*)_p = (g_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p.$$

Por otro lado, consecuencia directa de la definición es que la función identidad $Id : M \rightarrow M$, $p \mapsto p$ tiene asociado como aplicación tangente la aplicación identidad $(Id_*)_p : T_p M \rightarrow T_p M$, $v \mapsto v$ entre los espacios tangentes, sea cual sea la variedad M y para todo punto $p \in M$. Por tanto, la asociación tangente $*$ tiene un claro carácter funtorial:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{*} & TM \\ f \downarrow & & \downarrow f_* \\ N & \xrightarrow{*} & TN \end{array}$$

Más precisamente, es un funtor covariante entre la categoría de las variedades diferenciables y la de fibrados tangentes. Como los funtores mandan isomorfismos de una categoría a isomorfismos de la otra, podemos concluir que la aplicación tangente asociada a un difeomorfismo es un isomorfismo entre los espacios tangentes en cada punto, por lo que en particular, es inversible. Esta invertibilidad de la aplicación tangente caracteriza a los difeomorfismos, al menos localmente. De hecho, el Teorema de la Función Inversa para variedades afirma que una función diferenciable es un difeomorfismo local si y solo si su aplicación tangente es un isomorfismo en todo punto.

La aplicación tangente nos permite definir la noción de *rango* de una aplicación:

Definición 1.1.1 (Rango de una función diferenciable). *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Se define el rango de f en $p \in M$ como el rango de la aplicación tangente $(f_*)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ en p . Se dice que $p \in M$ es un punto regular de f si el rango de f en p es máximo, y que es un punto crítico en otro caso.*

Observación 1.1.2. *El estudio de los puntos críticos tiene su interés. Para el caso especial en el que $N = \mathbb{R}$, es decir, al estudiar las funciones diferenciables $f \in \mathfrak{F}(M)$ definidas sobre una variedad, la Teoría de Morse permite reconstruir la variedad inicial M a partir de cierta información asociada a los puntos críticos de dichas funciones, estableciendo así un nuevo nexo entre la topología y el análisis. Un clásico donde se desarrolla dicha teoría es [MIL63].*

Asociada a la idea de rango, el siguiente Teorema es un resultado útil que más adelante permite caracterizar localmente las inmersiones y las submersiones. Enunciamos aquí la versión que aparece en [SN17, Tma. 3.1], donde se puede encontrar una demostración de la misma.

Teorema 1.1.3 (del Rango Constante). *Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable con $m = \dim(M)$, $n = \dim(N)$. Si f tiene rango constante k en un entorno de un punto $p \in M$, entonces existen cartas $x : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $p \in U$, $f(U) \subseteq V$, de manera que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$ es de la forma*

$$\begin{aligned} (y \circ f \circ x^{-1}) : x(U) \subseteq \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (a^1, \dots, a^m) &\mapsto (a^1, \dots, a^k, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

En última instancia el Teorema del Rango Constante es consecuencia del Teorema de la Función Inversa, y es el resultado de un simple reordenamiento de coordenadas y una compleción conveniente de las “otras” componentes de unas cartas arbitrarias que proporcionan un escenario donde se cumplen las hipótesis del T.F.I. para variedades.

Una última noción especialmente útil cuando se trabaja con aplicaciones que van de un espacio “grande” a uno “pequeño” es la de *sección diferenciable*. Intuitivamente, la sección de una aplicación es otra aplicación que compuesta con la inicial resulta en la identidad en el espacio de llegada. Más precisamente, en el ámbito de la topología diferencial, dada una aplicación diferenciable $\pi : M \rightarrow B$ llamamos *sección diferenciable* a cualquier otra aplicación diferenciable $\tau : B \rightarrow M$ de manera que $\pi \circ \tau = id_B$. Cuando el dominio de τ no es todo B , sino un entorno $U \subset B$ de algún punto $q \in B$, decimos que τ es una sección diferenciable local.

1.2 Submersiones: Definición y Propiedades

Definición 1.2.1 (Submersión). *Se dice que una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ sobreyectiva es una submersión si su aplicación tangente $(f_*)_p$ es sobreyectiva en todo punto $p \in M$.*

Varios autores prescinden de la condición de que la aplicación en cuestión sea sobreyectiva. El hecho de que nosotros lo exijamos es meramente una cuestión de conveniencia, para evitar apostillar constantemente los resultados que se muestran para incluir los casos triviales en los que un punto o un conjunto dado de la variedad de llegada no se encuentra en la imagen de la submersión.

Una consecuencia inmediata de la definición anterior, por la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, es que necesariamente $\dim(M) \geq \dim(N)$. Lo que significa esto intuitivamente es que en una submersión siempre vamos de un espacio “grande” a uno más “pequeño” (salvo para el caso concreto en el que se da la igualdad de dimensiones).

Observación 1.2.2. *Para el caso en el que $\dim(M) = \dim(N)$, es lo mismo ser una submersión, una inmersión o un difeomorfismo local. Este caso se trabaja en más detalle en el Capítulo 3.*

Veamos unos primeros ejemplos de submersiones:

Ejemplo 1.2.3. *La función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $m \geq n$ dada por $f(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n)$ es una submersión, ya que la aplicación tangente $(f_*)_p : T_p\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ es trivialmente sobreyectiva.*

Ejemplo 1.2.4. *Como generalización del ejemplo anterior, las variedades producto constituyen la familia de ejemplos más sencillos de submersiones. En efecto, dadas dos variedades M, N cualquiera, la proyección canónica $p_1 : M \times N \rightarrow M$ es una submersión, puesto que, teniendo en cuenta que $T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_pM \oplus T_qN$, la aplicación tangente asociada*

$$\begin{aligned} (p_{1*})_{(p,q)} : T_pM \oplus T_qN &\longrightarrow T_pM \\ (v, w) &\longmapsto v \end{aligned}$$

es una proyección a un subespacio, y por ende, sobreyectiva. Idem. para p_2 .

Como por definición las aplicaciones tangentes de las submersiones son sobreyectivas, el rango de una submersión es siempre máximo, y es igual a la dimensión del espacio de llegada. En particular, todos los puntos son regulares en una submersión.

Existen varias maneras de caracterizar las submersiones; a continuación se presentan algunos resultados que lo hacen:

Proposición 1.2.5 (Forma Local de Submersiones). Sea $\pi : M \rightarrow B$ una submersión. Dado un punto cualquiera $p \in M$, existen cartas $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y : V \subset B \rightarrow \mathbb{R}^b$ con $p \in U$, $\pi(p) \in V$ de manera que

$$(y \circ \pi \circ x^{-1}) : x(U) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^b \\ (z_1, z_2) \mapsto z_1,$$

donde $(z_1, z_2) \in x(U) \subseteq \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^{m-b}$.

Demostración. Al ser π una submersión tiene rango igual a n en todos sus puntos y se aplica el Teorema 1.1.3. \square

Este resultado refleja el hecho de que las submersiones en cierta manera extienden la idea de la proyección a un subespacio del mundo del álgebra lineal al mundo de la topología diferencial y la geometría, yendo de un espacio grande a uno más pequeño de un modo “ordenado”. No obstante, tal y como se verá a lo largo del resto del capítulo, ciertas propiedades que las proyecciones gozan en el álgebra lineal no se acaban de heredar del todo para las submersiones, o a veces solo se cumplen de forma local.

Continuamos con una proposición que guarda una clara semejanza con un resultado análogo para la continuidad de funciones en el ámbito topológico:

Proposición 1.2.6. Sea $\pi : M \rightarrow B$ una submersión. Una aplicación $g : B \rightarrow A$ es diferenciable si y solo si $g \circ \pi$ es diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & B \\ & \searrow g \circ \pi & \downarrow g \\ & & A \end{array}$$

Demostración.

\implies) Trivial.

\impliedby) Sean $p \in M$ y $q \in B$ dos puntos tales que $\pi(p) = q$. Por la proposición 1.2.5 existen cartas x, y de manera que $y \circ \pi \circ x^{-1}$ es una proyección. Entonces

$$(g \circ \pi \circ x^{-1})(z_1, z_2) = (g \circ y^{-1} \circ (y \circ \pi \circ x^{-1}))(z_1, z_2) \\ = (g \circ y^{-1})(z_1).$$

Por hipótesis $g \circ \pi \circ x^{-1}$ es diferenciable, luego $g \circ y^{-1}$ ha de serlo también. Finalmente, esto implica que g ha de ser diferenciable, por ser la carta y un difeomorfismo local. \square

Gracias a este resultado podemos deducir un corolario que tendrá su relevancia a la hora de estudiar las variedades cociente:

Corolario 1.2.7. Dada una aplicación sobreyectiva $f : M \rightarrow N$ donde M es una variedad y N un conjunto, este último admite, salvo difeomorfismo, a lo sumo una estructura diferenciable que hace de f una submersión.

Demostración. Si (N, \mathcal{A}) y (N, \mathcal{B}) son dos estructuras que hacen de f una submersión, entonces la función identidad $Id : (N, \mathcal{A}) \rightarrow (N, \mathcal{B})$ es diferenciable, pues $Id \circ f = f$ es diferenciable y se aplica la Proposición 1.2.7. Del mismo modo se razona que $Id^{-1} : (N, \mathcal{B}) \rightarrow (N, \mathcal{A})$ es diferenciable, concluyendo así que Id es un difeomorfismo. \square

Siguiendo con las propiedades de las submersiones, una cualidad deseable sería que la composición de dos submersiones fuese a su vez una submersión. La siguiente proposición nos lo confirma:

Proposición 1.2.8. *Si $\pi : M \rightarrow B$ es una submersión y $g : B \rightarrow Z$ es una función diferenciable, entonces el rango de $g \circ \pi$ en un punto $p \in M$ es igual al rango de g en $\pi(p)$.*

Demostración. Se sigue de que $((g \circ \pi)_*)_p = (g_*)_{\pi(p)} \circ (\pi_*)_p$ y que $(\pi_*)_p$ es siempre sobreyectiva. \square

Queremos seguir conociendo cualidades de las submersiones y ver qué las hace especiales. Una aplicación importante del Teorema del Rango Constante será ver que una submersión es una función que admite *muchas secciones locales*. Resultará que muchas de las propiedades importantes de las submersiones se deben justamente a la disposición de secciones diferenciables locales cuando las necesitemos:

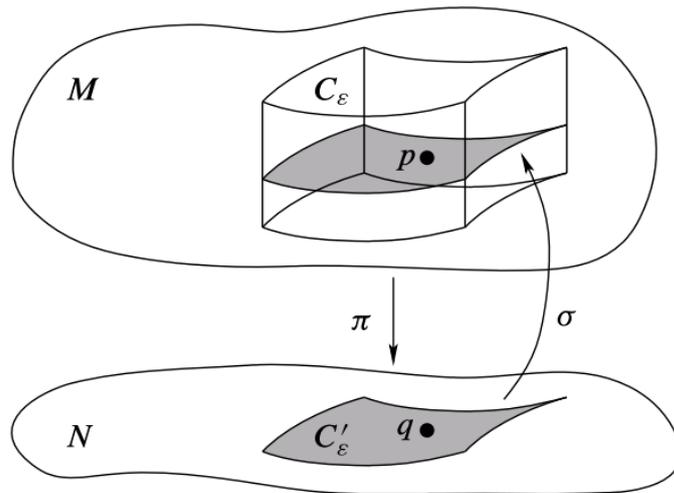


Figura 1.1: Una sección diferenciable σ de una submersión $\pi : M \rightarrow N$. Imagen tomada de [LEE12].

Además caracteriza las submersiones sin hacer mención explícita del rango. Lo formalizamos en la siguiente

Proposición 1.2.9 (Caracterización local de submersiones). *Dadas dos variedades M y N , de dimensión m y n respectivamente, una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ es una submersión si y solo si para cada $p \in M$ existe una sección diferenciable local g de f de manera que $p \in \text{Im}(g)$.*

Demostración.

\implies) Supongamos que f es una submersión y sea $p \in M$. Tomamos las cartas x, y descritas en la Proposición 1.2.5, pero restringimos el dominio de x para que esté contenido en el dominio de $y \circ f$, es decir, se restringe a $U' = U \cap f^{-1}(V)$. Esta restricción de dominio es válida porque las cartas se pueden localizar y U' es abierto en M . Si $x(p) = (a_0, b_0)$, sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la aplicación global dada por $h(z) = (z, b_0)$. Se tiene entonces que $f \circ x^{-1} \circ h \circ y$ es una restricción de $y^{-1} \circ p_1 \circ h \circ y = \text{id}_V$ (ya que por la proposición 1.2.5 $y \circ f \circ x^{-1}$ coincide con p_1 al menos localmente y por la restricción del dominio de x) y es por tanto igual a la función identidad en algún entorno de $f(p)$. Como f está definida en la imagen de x^{-1} , el dominio de esta función de identidad coincide con el dominio de $g = x^{-1} \circ h \circ y$. Concluimos así que g es una sección diferenciable local de f que contiene a p en su imagen.

La siguiente Figura muestra las aplicaciones empleadas en esta parte de la demostración:

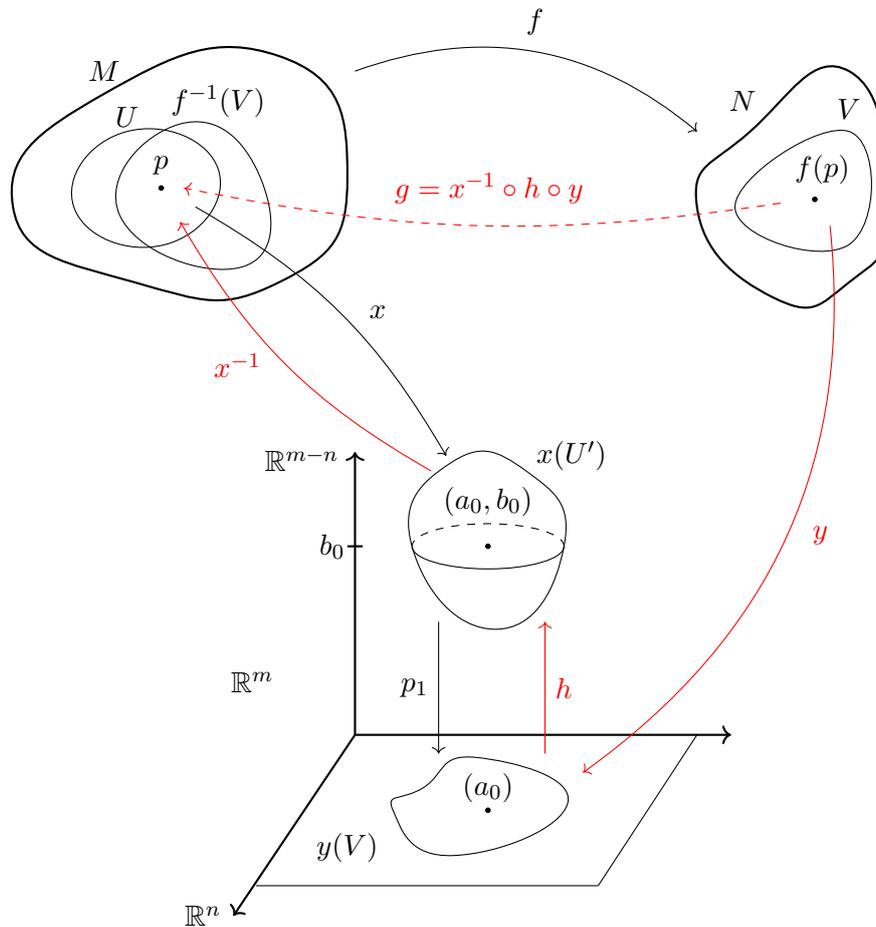


Figura 1.2: Diagrama explicativo de la primera implicación de la demostración de la Proposición 1.2.9.

\Leftarrow) Sea $g : N \rightarrow M$ una sección diferenciable local de f que contiene a $p \in M$ en su imagen. Entonces $f \circ g$ es la identidad en un entorno de $f(p)$ y por tanto, para cualquier $v \in T_{f(p)}N$ se tiene que $(f \circ g)_*(v) = f_*(g_*(v)) = v$ luego $(f_*)_p$ ha de ser sobreyectiva. \square

Observación 1.2.10. Para el caso de las variedades producto las secciones diferenciables descritas en la proposición anterior se pueden definir trivialmente y de modo global. No obstante, para una submersión general la sección no se puede definir de manera global. Si tomamos por ejemplo el fibrado de las referencias (ver Ejemplo 2.4.7) y consideramos la submersión $\pi : FM \rightarrow M$, definir una sección diferenciable global $\tau : M \rightarrow FM$ equivaldría a dar una familia de campos vectoriales linealmente independientes que formasen una base del espacio tangente en cada punto de la variedad. Para que eso sea posible la variedad M ha de ser paralelizable, y no todas las variedades lo son (Por ejemplo S^2 , por el Teorema de la Bola Peluda).

El siguiente es un enunciado que enfatiza, todavía más, que las submersiones guardan semejanza con las ideas de las proyecciones a subespacios o proyecciones de los espacios producto. Además, será útil a la hora de hablar de la topología de las variedades cociente. En efecto:

Proposición 1.2.11. Las submersiones son aplicaciones abiertas.

Demostración. Sea $\pi : M \rightarrow B$ una submersión. Sea $U \subseteq M$ un conjunto abierto y sea $q \in \pi(U)$. Queremos ver que existe un entorno de q que está contenido en $\pi(U)$. Sea $p \in M$ un punto de manera que $\pi(p) = q$ y sea σ una sección diferenciable de π con $\sigma(q) = p$, que existe por Proposición 1.2.9. Como σ es continua, $\sigma^{-1}(U)$ es un entorno de q y está contenido en $\pi(U)$, puesto que σ es una sección de π . Concluimos que $\pi(U)$ es abierto en B . \square

1.3 Las Fibras de Una Submersión

Para ir terminando con las propiedades elementales de las submersiones mostramos un resultado central, que nos dice cómo son las fibras de una submersión. Además incluye el caso en el que las dimensiones de las variedades coinciden, lo cual será especialmente útil de cara al Capítulo 3.

Proposición 1.3.1. *Sea $\pi : M \rightarrow B$ una submersión y sean $m = \dim(M)$, $b = \dim(B)$. Si $m = b$, las fibras son conjuntos discretos de puntos. Si $m > b$, las fibras son subvariedades regulares cerradas de M de dimensión $m - b$.*

Demostración. Si $m = b$, entonces π es un difeomorfismo local, ya que la aplicación tangente tiene siempre rango máximo. Eso implica que para cada punto $p \in M$ es posible encontrar un entorno del punto de manera que dicho entorno no contenga ningún otro punto de la fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$, por ser π inyectiva en ese entorno. Se concluye así que las fibras son discretas.

Si $m > b$, veremos primero que es posible dotar a la fibra de una estructura diferenciable, formando un atlas \mathcal{C}^∞ modificando las cartas del atlas de M , y luego que dicha estructura hace que de hecho la fibra sea una subvariedad regular de M .

- Sea $q \in \text{Im}(\pi)$, $F = \pi^{-1}(q)$ la fibra asociada y $p \in F$ un punto de la fibra. Tomamos cartas $x : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m, y : V \subseteq B \rightarrow \mathbb{R}^b$ como las descritas en Proposición 1.2.5, restringiendo el dominio de x para que esté contenido en el dominio de $y \circ \pi$, es decir, a $U' = U \cap \pi^{-1}(V)$. Podemos tomar la carta y de manera que $y(\pi(p)) = 0 \in \mathbb{R}^b$. Entonces, el conjunto $U'' = F \cap U'$ está formado por los puntos $r \in M$ tales que $x^{(j)}(r) = 0, j = 1, \dots, b$ y por tanto la aplicación $\tilde{x} : U'' \rightarrow \mathbb{R}^{m-b}$ definida por $x(r) = (0, \tilde{x}(r))$ es inyectiva. Como además su imagen $\tilde{x}(U'')$ coincide con $h^{-1}(x(U'))$, donde $h : \mathbb{R}^{m-b} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la función continua definida por $h(z) = (0, z)$, concluimos que \tilde{x} es una carta de F . A medida que se varía el punto $p \in F$ escogido, los dominios U'' de las cartas correspondientes cubren todo F . Para terminar de ver que $\mathcal{A}_F = \{\tilde{x} : U'' \rightarrow \mathbb{R}^{m-b}\}$ es un atlas \mathcal{C}^∞ solo falta comprobar que los cambios de cartas son difeomorfismos. Sean $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \mathcal{A}_F$ dos cartas cuyos dominios tienen intersección no vacía, es decir, $U''_1 \cap U''_2 \neq \emptyset$. El cambio de cartas tiene como componentes coordenadas

$$(\tilde{x}_2 \circ \tilde{x}_1^{-1})^{(j)} = x_2^{(j+b)} \circ x_1^{-1} \circ h, \quad j = 1, \dots, m - b.$$

La parte derecha de la igualdad es una composición de funciones diferenciables, lo que concluye que los cambios de carta son difeomorfismos.

- Con la estructura diferenciable dada por el atlas \mathcal{C}^∞ construido en el apartado anterior, F es una subvariedad de M , ya que tomando un par de cartas x, \tilde{x} y la inclusión $i : F \rightarrow M$, se tiene que

$$\begin{aligned} x \circ i \circ \tilde{x}^{-1} : \tilde{x}(U'') &\subseteq \mathbb{R}^{m-b} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ z &\mapsto (0, z), \end{aligned}$$

por lo que la inclusión es efectivamente una inmersión ¹.

- Para ver que F es una subvariedad regular tenemos que ver la topología de F coincide con la topología heredada por M . Para ello bastará ver que las cartas del atlas de F son homeomorfismos al considerar la topología de subespacio de F en M . Teniendo en cuenta que las componentes coordenadas de las nuevas cartas de las fibras cumplen que

$$\tilde{x}^{(j)} = x^{(j+b)} \circ i, \quad j = 1, \dots, m - b,$$

donde i es la inclusión, comprobamos que las cartas son continuas con la topología de subespacio, por serlo las dos aplicaciones del lado derecho de la igualdad. La continuidad de \tilde{x}^{-1} se sigue, de manera parecida, de la continuidad de $i \circ \tilde{x}^{-1}$.

- F es una subvariedad cerrada por ser π continua.

□

Para el caso $m > b$ este resultado tiene una interesante consecuencia, pues nos dice que una submersión induce una partición de la variedad M en subvariedades regulares, ya que

$$M = \bigcup_{q \in B} \pi^{-1}(q).$$

Este tipo de división de una variedad diferenciable en *hojas* o *láminas* es lo que en topología diferencial se llama una *foliación*. Asociado a dicho concepto tenemos la importante noción de *distribución diferenciable*, que recordamos a continuación:

Definición 1.3.2 (Distribución Diferenciable). *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Una distribución diferenciable de dimensión $0 < k < n$ es una familia $D = \{D_p \subseteq T_p M\}_{p \in M}$ de subespacios vectoriales de dimensión k , de manera que los subespacios D_p varían suavemente, en el sentido siguiente:*

- Para cada $p \in M$ existe un entorno $U \subseteq M$ de manera que $D|_U$ es generado por una familia de k campos $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$.

Algunos tipos de distribuciones diferenciables tienen especial interés. Se dice que una distribución D de dimensión k ...

- ... es *involutiva* si $X_p, Y_p \in D_p \implies [X, Y]_p \in D_p$.
- ... tiene como *subvariedad integral* a una subvariedad N de M si D_p coincide exactamente con los espacios tangentes de N , es decir, $i_*(T_p N) = D_p$ para todo $p \in M$ donde $i : N \rightarrow M$ es la inclusión.
- ... es *completamente integrable* si para cada punto $p \in M$ existe una subvariedad integral de la misma que pasa por p .

¹Esta caracterización de inmersiones, parecida a la de submersiones, se concreta con más detalle en el Apéndice A.

Un resultado clásico que se debe a F.G. Frobenius nos dice que en realidad el primer y tercer caso son la misma cosa: Una distribución es involutiva si y solo si es completamente integrable.

Acabamos de ver que las submersiones proporcionan, a través de las fibras, para cada punto de la variedad una subvariedad regular que pasa por la misma. El siguiente resultado nos identifica una distribución diferenciable para la cual dichas fibras son subvariedades integrales:

Proposición 1.3.3 (Integrabilidad de la distribución vertical). *Con la notación precedente, el conjunto $V = \{\ker(\pi_*)_p\}_{p \in M}$ define una distribución diferenciable completamente integrable sobre la variedad M , que corresponde a la foliación de M dada por las fibras de π .*

Demostración. Para empezar, que el conjunto V definido de esa manera es una distribución diferenciable no es inmediato. La argumentación requiere hablar de las *placas* de una foliación y en última instancia que V sea una distribución diferenciable es consecuencia de la forma local de las submersiones (descrita en la Proposición 1.2.5). El argumento completo se puede encontrar en [CN85, p. 23].

Veamos ahora que V_p coincide con el espacio tangente de la fibra $\pi^{-1}(q)$ en p , donde $\pi(p) = q$, lo que demostrará el resultado. En efecto, dado un vector $v \in T_p\pi^{-1}(q)$, sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(q)$ una curva definida sobre la fibra de manera que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$. Como π es constante sobre los puntos de la misma fibra, se tiene que $(\pi \circ \gamma)_* \equiv 0$, luego

$$(\pi \circ \gamma)_{*0}(d/dt) = (\pi_*)_{\gamma(0)}(\gamma'(0)) = (\pi_*)_p(v) = 0$$

y por tanto $v \in \ker(\pi_*)_p = V_p$. Así, $T_p\pi^{-1}(q)$ resulta ser un subespacio de V_p . Para la otra contención basta observar que

$$\dim(V_p) = \dim(\ker(\pi_*)_p) = \dim(T_pM) - \dim(\text{Im}(\pi_*)_p) = m - b,$$

donde la última igualdad se da porque que π sea una submersión implica que es de rango máximo. Pero también se tiene que $\dim(T_p\pi^{-1}(q)) = m - b$, por ser las fibras subvariedades de dimensión $m - b$, luego ambos tienen la misma dimensión y necesariamente se da la igualdad. \square

La distribución V recibe el nombre de *distribución vertical*. Intuitivamente, el calificativo “vertical” se refiere a aquello que es tangente a las fibras. Cualquier otra distribución H que cumpla que $T_pM = V_p \oplus H_p$ para todo punto $p \in M$ recibe el nombre de *distribución horizontal*. Recalamos que, para una submersión arbitraria, no hay una manera canónica de definir una distribución horizontal y que en general dichas distribuciones, a diferencia de las verticales, no tienen por qué ser integrales.

Solo en algunos casos en los que la variedad dispone de una estructura particular o cuando hay algún objeto matemático adicional definida sobre ella se puede determinar de manera natural la distribución horizontal. Por ejemplo para las variedades producto y las submersiones asociadas que son las proyecciones triviales (por ejemplo p_1) la descomposición vertical/horizontal es inmediata:

$$T_{(p,q)}(M \times N) = \overbrace{T_pM}^{\text{Horizontal}} \oplus \underbrace{T_qN}_{\text{Vertical}} .$$

El siguiente corolario es una consecuencia directa de la Proposición 1.3.3, que será de frecuente uso, a veces de manera implícita, en los razonamientos del Capítulo 4:

Corolario 1.3.4. *La distribución vertical de una submersión es involutiva.*

Demostración. Inmediato por el Teorema de Frobenius. □

La nomenclatura vertical/horizontal se extiende naturalmente a los campos vectoriales, sin más que considerar las secciones diferenciables de las distribuciones V y H . Así, denotaremos por $\mathfrak{X}^h(M)$ y $\mathfrak{X}^v(M)$ a los submódulos de $\mathfrak{X}(M)$ formados por campos vectoriales horizontales y verticales, respectivamente. Finalmente, la descomposición del espacio tangente en cada punto permite hablar de las *proyecciones verticales y horizontales*, que denotaremos por \mathcal{V} y \mathcal{H} , y tendremos que

$$X = \mathcal{V}(X) + \mathcal{H}(X), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Mostramos ahora una ilustración que trata de dar una idea visual de la descomposición general vertical/horizontal:

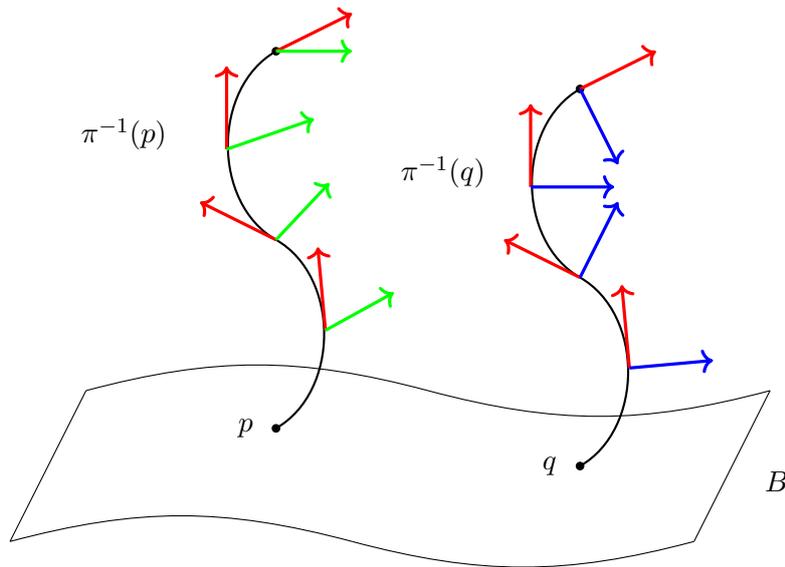


Figura 1.3: Fibras de una submersión $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow B$ y ejemplos de descomposiciones vertical/horizontal. En rojo, algunos vectores de un campo vertical, tangente a las fibras. En verde, algunos vectores horizontales genéricos, complementarios a los verticales. En azul, un ejemplo de campo horizontal que será común en el Capítulo 4, cuando se disponga de una noción de ortogonalidad.

Siguiendo con los campos vectoriales de especial interés al estudiar las submersiones, un subconjunto importante es el formado por aquellos que están relacionados con campos vectoriales de B mediante π , es decir, los campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ tales que existe un campo $X' \in \mathfrak{X}(B)$ de manera que $(\pi_*)_p(X_p) = X'_{\pi(p)}$ para todo punto p en M , en cuyo caso podemos abreviar escribiendo $(\pi_*)X = X'$. A estos campos los llamamos *proyectables* y denotamos el conjunto formado por los campos proyectables por $\mathfrak{X}^p(M)$.

Una vez presentadas las herramientas básicas para el estudio de las submersiones, pasamos a estudiar distintas áreas de la geometría y topología diferencial donde se hace uso, de una manera o de otra, de las submersiones.

Capítulo 2

Variedades Cociente

Uno de los escenarios principales donde las submersiones hacen acto de presencia es en el caso de las variedades cociente. Dada una variedad M resulta natural preguntarse cuándo un conjunto cociente de la misma hereda una estructura de variedad diferenciable. Está claro que la dimensión del conjunto cociente como variedad debería ser menor o igual que la dimensión de la variedad inicial, ¿Sería entonces la proyección natural una submersión?

Resulta que lo que se hace habitualmente es definir las variedades cociente justamente exigiendo que la proyección canónica sea una submersión. De esta manera cada clase de equivalencia (las fibras de la submersión) gozan de las buenas propiedades descritas en el capítulo anterior. Además, en virtud del Corolario 1.2.7, dada una variedad M y un cociente M/\sim de la misma solo hay una estructura diferenciable (de haberla) que hace de M/\sim una variedad cociente. En ese caso, ya que $\pi : M \rightarrow M/\sim$ es una submersión, π es en particular también una aplicación continua y abierta (Proposición 1.2.11), por lo que la topología de M/\sim coincide con la topología cociente.

No obstante, es fácil encontrar ejemplos de conjuntos cocientes de una variedad que no pueden ser variedades cociente. Basta considerar la relación de equivalencia \sim en \mathbb{R}^{n+1} dada por $x \sim y \iff \exists a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y = a \cdot x$. El conjunto cociente está formado por las rectas que pasan por el origen sin el origen y el mismo origen. Como no todas las clases son conjuntos discretos de puntos de \mathbb{R}^{n+1} , por la Proposición 1.3.1 la dimensión de cualquier variedad cociente debería ser menor que $n + 1$, pero obviamente no es posible definir una estructura \mathcal{C}^∞ en el origen. Por tanto, \mathbb{R}^{n+1}/\sim no puede ser una variedad cociente. Por supuesto, si se define la misma relación de equivalencia en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ el resultado sí es una variedad cociente: es el espacio proyectivo real de dimensión n .

En general, la clase de todos los espacios cocientes de una variedad es demasiado amplia como para poder englobarse dentro de una única teoría global. De los que sí se puede decir bastante es de aquellos espacios cociente dados por las órbitas de una acción por un grupo de difeomorfismos. No obstante, incluso dentro de esta familia hay ejemplos de acciones de grupos cuyos cocientes no admiten estructura de variedad cociente. Basta observar que el contraejemplo del párrafo anterior se puede reinterpretar como la relación de equivalencia inducida por una acción de grupo: la del grupo multiplicativo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ actuando sobre \mathbb{R}^{n+1} mediante simples multiplicaciones. Un caso un poco más sofisticado sería el que se muestra en el Ejemplo 2.1.4, donde de nuevo el conjunto cociente inducido por la acción no hereda una buena estructura diferenciable. En ambos casos lo que “da problemas” es que el cero no se mueve bajo ninguna transformación mientras que el resto de elementos del conjunto sí lo hace.

Nos centraremos, por tanto, en aquellas acciones que dan “buenas” variedades cociente, para lo cual deberemos imponer ciertas restricciones a las acciones de grupos. En concreto, dedicaremos nuestra atención a tres casos en particular: las acciones propiamente discontinuas, las acciones transitivas dadas por grupos de Lie y las acciones asociadas a los fibrados principales.

A lo largo de las siguientes páginas seguimos principalmente a [LEE12, cap.4, cap.21], [WAR83, cap.3] y [BC70, cap.6].

2.1 Acciones de grupos de difeomorfismos

Definición 2.1.1 (Grupo de Transformaciones). *Decimos que un grupo G actúa como un grupo de transformaciones sobre una variedad M si existe una aplicación $\Phi : G \times M \rightarrow M$ de manera que*

- i) Para cada $g \in G$, la aplicación $\phi_g : M \rightarrow M$ dada por $\phi_g(m) = \Phi(g, m)$ es un difeomorfismo,*
- ii) Para cada $g, h \in G$, $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$.*

Dicho de otro modo, un grupo de transformaciones es una acción de grupo (a izquierdas) de manera que la acción de cada elemento del grupo sobre la variedad es un difeomorfismo. Las acciones a derecha funcionan de manera análoga. La condición adicional necesaria para que Φ sea una acción de grupo, i.e. $\phi_e = id$ donde e es el elemento neutro de G , se sigue de la definición de grupo de transformaciones, pues dado $p \in M$, si $q = (\phi_e)^{-1}(p)$, se tiene que

$$\phi_e(p) = \phi_e(\phi_e(q)) = (\phi_e \circ \phi_e)(q) = \phi_e(q) = p.$$

Fijado un $p \in M$, denotaremos por $\theta_p : G \rightarrow M$ la función que fija la segunda coordenada en la acción de grupo, es decir, $\theta_p(g) = \Phi(g, p)$.

Recordamos que las acciones de grupo definen naturalmente una relación de equivalencia en el conjunto sobre el que actúan, donde dos puntos $p, q \in M$ están relacionados si y solo si existe un elemento $g \in G$ de manera que $\phi_g(p) = q$. Las clases de equivalencia reciben el nombre de *órbitas* y para cada $p \in M$ su órbita viene determinada por θ_p . Cuando el conjunto de órbitas admite una estructura de variedad cociente las fibras de la submersión (la proyección al cociente) son simplemente los elementos de una misma órbita.

A continuación recordamos también algunos tipos especiales de acciones de grupo. Entenderemos que una acción de grupo G sobre un conjunto M es...

- *Transitiva* si para cualesquiera $p, q \in M$, existe $g \in G$ tal que $\phi_g(p) = q$.
- *Fiel* o *efectiva* si $\phi_g(p) = p, \forall p \in M$ implica que $g = e$, o lo que es equivalente, si cada elemento del grupo actúa de manera distinta sobre M .
- *Libre* si todo elemento del grupo distinto a la identidad no tiene puntos fijos. Es evidente que toda acción libre es necesariamente fiel.
- *Propia* (en los contextos en los que M y G gozan de una topología) si $\varphi : G \times M \rightarrow M \times M$ dada por $(g, p) \mapsto (\Phi(g, p), p)$ es una función propia en el sentido topológico, es decir, si la preimagen por φ de conjuntos compactos es compacto.

- *Propiamente discontinua* (en los contextos en los que M goza de una topología) si:
 - Para cada punto $p \in M$ existe un entorno U del mismo de manera que $U \cap \phi_g(U) = \emptyset$ $\forall g \in G \setminus \{e\}$
 - Dados dos puntos $p, q \in M$ que no están en la misma órbita, existen entornos $U \ni p, U' \ni q$ de manera que $\phi_g(U) \cap U' = \emptyset$ para todo elemento $g \in G$.

En este caso, para ser una acción de este tipo es condición necesaria ser también una acción libre, pues la existencia de puntos fijos para elementos distintos a la identidad es incompatible con la discontinuidad. Para el caso de variedades diferenciables, estas dos condiciones aseguran que las acciones propiamente discontinuas son también acciones propias.

Observación 2.1.2. *Existen varias definiciones distintas en la literatura acerca de lo que significa ser una acción propiamente discontinua. Muchas veces se suele dar únicamente la primera de las dos condiciones que se mencionan en la definición que damos aquí. Lo que ocurre es que si se omite la segunda condición puede que el conjunto de órbitas no sea Hausdorff, algo aceptable cuando se trabaja en el ámbito topológico pero que queremos evitar a la hora de trabajar con variedades diferenciables.*

Ejemplo 2.1.3. *Tanto $(\mathbb{Z}, +)$ como $(\mathbb{R}, +)$ actúan sobre \mathbb{R} de manera natural mediante traslaciones. Las traslaciones son ejemplos típicos de acciones libres, pues todo elemento distinto del 0 mueve todos los elementos de la variedad. La diferencia es que la acción de \mathbb{Z} es propiamente discontinua pero no transitiva, mientras que la de \mathbb{R} sí es transitiva pero no es propiamente discontinua.*

Ejemplo 2.1.4. *El grupo $SO(2)$ de las matrices ortogonales reales 2×2 de determinante igual a 1 es un grupo de transformaciones sobre \mathbb{R}^2 mediante la aplicación $\Phi(A, v) = Av$. El grupo actúa fielmente pero no libremente, pues el origen es un punto fijo para cualquier matriz $A \in SO(2)$. La acción no es ni transitiva ni propiamente discontinua.*

Ejemplo 2.1.5. *Sea $S(n, \mathbb{R})$ el conjunto de matrices reales $n \times n$ simétricas con su estructura natural de variedad. Entonces el grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$ actúa como grupo de transformaciones sobre $S(n, \mathbb{R})$ mediante la aplicación $\Phi(A, S) = ASA^t$. El grupo no actúa fielmente, puesto que $\phi_{-I} = \phi_I$, donde I es la matriz identidad. La acción no puede ser transitiva, pues estas inducen una única órbita pero no todas las matrices simétricas son congruentes entre ellas.*

2.1.1 Acciones Propiamente Discontinuas

El interés por las acciones propiamente discontinuas reside en la siguiente:

Proposición 2.1.6. *Sea G un grupo de transformaciones propiamente discontinuo sobre una variedad M . Entonces el conjunto de órbitas M/G admite una estructura de variedad cociente de la misma dimensión que M .*

Idea de Demostración. La prueba que aquí se esboza se puede encontrar con más detalle en [BC70, p. 98]. La idea es construir un atlas \mathcal{C}^∞ en el cociente que haga de la proyección canónica una submersión. La clave es que para cada punto $p \in M$ se puede hallar un entorno U de manera que la proyección canónica $\pi : M \rightarrow M/G, x \mapsto [x]$ restringida a dicho entorno sea inyectiva, por la condición de discontinuidad. Podemos asumir que U es suficientemente pequeño como para ser el dominio de una carta x de M , en cuyo caso $y = x \circ (\pi|_U)^{-1}$ es una carta de M/G que toma valores en \mathbb{R}^n , $n = \dim(M)$. El conjunto de las cartas formadas de este modo constituye un atlas para el cociente. El resto de la demostración son meras comprobaciones de que efectivamente los cambios de carta son difeomorfismos y que la proyección π es realmente una submersión. \square

Por la Proposición 1.3.1 las acciones propiamente discontinuas proporcionan submersiones de fibra, es decir órbita, discreta. Como las acciones propiamente discontinuas son en particular acciones fieles, las aplicaciones $\theta_p : G \rightarrow M$ son inyectivas. Si las órbitas son discretas entonces los grupos también deben ser discretos. Este hecho justifica en parte la diferencia entre \mathbb{Z} y \mathbb{R} en el Ejemplo 2.1.3.

Ejemplo 2.1.7. *El plano proyectivo real es una variedad cociente de la esfera al considerar la acción del grupo de transformaciones $G = \{id, -id\}$. La acción es claramente propiamente discontinua. El mismo grupo de difeomorfismos sirve para argumentar que los espacios proyectivos son variedades cociente de las esferas:*

$$P_n(\mathbb{R}) \cong S^n/G.$$

Tenemos por tanto una nueva familia de ejemplos de submersiones:

$$\begin{aligned} \pi : S^n &\longrightarrow P_n(\mathbb{R}) \\ p &\longmapsto [p]. \end{aligned}$$

2.2 Grupos de Lie

Diremos que la acción de un grupo G es diferenciable o *suave* cuando la aplicación $\Phi : G \times M \rightarrow M$ lo sea, por lo que para hacer dicho tratamiento necesitamos primero dotar de estructura diferenciable a G . Empezamos pues recordando algunas nociones acerca de los grupos de Lie y sus propiedades.

Definición 2.2.1 (Grupo de Lie). *Un Grupo de Lie es un grupo (G, \cdot) con estructura de variedad diferenciable donde la operación interna \cdot y la operación de inversión son aplicaciones diferenciables.*

Una primera observación que se desprende directamente de la definición es que los grupos de Lie no pueden ser grupos discretos, pues no podrían ser localmente homeomorfos a abiertos de un espacio euclídeo. No obstante, en la literatura se pueden encontrar referencias a grupos discretos de Lie, donde lo que se hace es dotar al grupo de la topología discreta para poder hablar de continuidad. Por ahora nosotros nos centramos con el caso no discreto.

Ejemplo 2.2.2. *Un ejemplo típico de grupo de Lie es el grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$ con la multiplicación de matrices como operación de grupo.*

Observación 2.2.3. *Todo grupo de Lie G actúa naturalmente sobre sí mismo como un grupo de transformaciones con $\phi_g(h) = g \cdot h$ para cualesquiera elementos $g, h \in G$ (la notación habitual en la literatura para este caso es $L_g : G \rightarrow G$). La acción es diferenciable (por definición de Grupo de Lie), transitiva, libre y propia (esto último por ser $G \times G \rightarrow G \times G$, $(g, h) \mapsto (g \cdot h, h)$ un difeomorfismo).*

Hemos visto en la introducción del capítulo ejemplos de acciones que no eran “buenas” para dar variedades cociente. Si no se imponen restricciones sobre las propiedades del grupo que actúa, puede ocurrir que el conjunto cociente no sea ni Hausdorff. Llegamos pues a uno de los resultados centrales en lo que a variedades cociente se refiere, que identifica las propiedades deseables para un grupo de transformaciones:

Teorema 2.2.4 (de la Variedad Cociente). *Sea G un grupo de Lie que actúa de manera diferenciable, libre y propia sobre una variedad M . Entonces el cociente M/G es una variedad topológica de dimensión $\dim(M) - \dim(G)$ y admite una estructura diferenciable que hace de la proyección canónica $\pi : M \rightarrow M/G$ una submersión.*

Idea de Demostración. La demostración completa se puede encontrar en [LEE12, pp. 544-547]. En última instancia se trata de demostrar la existencia de unas cartas especiales de M en cada punto de la variedad, las llamadas *adapted charts*. Primero hace falta ver que bajo las hipótesis del teorema las órbitas forman una foliación en M . Las hipótesis de acción propia y libre entran en juego para ver que los dominios de las *adapted charts* no cortan a más de una fibra/órbita, y son condiciones necesarias. Una vez demostrada la existencia de las *adapted charts*, el resto de la demostración es una larga comprobación de que dada la topología cociente a M/G esta es una variedad topológica y que admite la estructura diferenciable que satisface el enunciado del teorema, formando para ello un atlas a partir de las ya mencionadas *adapted charts*. \square

Observación 2.2.5. *La Proposición 2.1.6 se puede ver como un caso límite de este teorema: la condición de discontinuidad implica ser acción libre y propia y se sobreentiende que en dicho caso $\dim G = 0$.*

Dado un grupo de Lie G se dice que un subconjunto $H \subseteq G$ es un *subgrupo de Lie* de G si (H, \cdot) es a su vez un grupo de Lie, H es una subvariedad de G y la inclusión $i : H \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos. Si G es un grupo de transformaciones diferenciable para una variedad M , la restricción de la acción a un subgrupo H sigue siéndolo. Son especialmente interesantes los subgrupos cerrados de un grupo de Lie, como evidencia el siguiente

Teorema 2.2.6. *Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado del mismo y sea $G/H = \{gH : g \in G\}$ el conjunto de clases a izquierda. Sea $\pi : G \rightarrow G/H$ la proyección natural $\pi(g) = gH$. Entonces G/H tiene una única estructura diferenciable que hace que π sea una submersión.*

Idea de Demostración. G/H se puede ver como el conjunto de órbitas de la acción de H a derechas sobre G por simple multiplicación. Lo único que hay que ver es que en las condiciones que se requieren se cumplen las hipótesis para aplicar el Teorema 2.2.4, es decir, que la acción del subgrupo cerrado H es propia y libre. \square

Recalamos que en el teorema anterior en ningún momento hemos exigido que H sea un subgrupo normal de G . Si queremos dotar de estructura de Grupo de Lie al conjunto G/H entonces sí que tendríamos que exigir la normalidad de H , pero para dotar al conjunto de clases a izquierda de una estructura diferenciable no hemos necesitado en ningún momento dicha hipótesis.

2.3 Variedades Homogéneas

Las variedades homogéneas constituyen una amplia clase dentro de los diferentes tipos de variedades que uno se puede encontrar. La idea clave detrás de las variedades homogéneas es justamente la que les da el adjetivo de homogénea: no hay puntos “especiales” en la variedad. Matemáticamente esto se traduce a la disposición de un grupo de transformaciones que actúa de manera transitiva sobre la variedad, de manera que dados dos puntos p, q cualesquiera de la variedad, existe un difeomorfismo perteneciente al grupo que lleva el primero al segundo.

Observación 2.3.1. *El estudio de los espacios homogéneos no es exclusivo de la categoría de las variedades, admitiendo un tratamiento mucho más general. Aquí nos centramos en las variedades homogéneas, donde exigiremos que el grupo de actúa transitivamente sobre la variedad lo haga de manera diferenciable.*

Introducimos ahora un concepto clave para la discusión de las variedades homogéneas:

Definición 2.3.2 (Subgrupo de Isotropía). Sea M una variedad cualquiera y G un grupo de Lie que actúa como grupo de transformaciones sobre M . Dado un punto cualquiera $p \in M$ se llama subgrupo de isotropía de p al conjunto

$$G_p = \{g \in G : \phi_g(p) = p\}$$

formado por los difeomorfismos inducidos por G que dejan fijo a p

Es fácil comprobar que se trata de un subgrupo de G (en contextos más generales simplemente se llama *estabilizador* de un punto respecto de G), mientras que la observación $G_p = \theta_p^{-1}(p)$ nos desvela que se trata de un subgrupo cerrado. Así, en virtud del Teorema 2.2.6, el cociente G/G_p tiene una estructura diferenciable natural que hace de ella una variedad cociente de G .

Cuando la acción inducida por G es transitiva los subgrupos de isotropía son conjugados entre ellos:

$$G_q = \{g \in G : \phi_g(q) = q\} = \{g \in G : \phi_g(\phi_h(p)) = \phi_h(p)\} = \{g \in G : \phi_{h^{-1}gh}(p) = p\} = h^{-1}G_p h,$$

donde h existe por la transitividad de la acción. Si pensamos en la multiplicación por los elementos h y h^{-1} como acciones del grupo G sobre sí mismo (que son difeomorfismos), no es difícil llegar a la conclusión que G_p y G_q son difeomorfos. Por tanto, al hablar de acciones transitivas de Grupos de Lie, en vez de pensar en *un* subgrupo de isotropía podemos pensar en *el* subgrupo de isotropía, pues es único salvo difeomorfismo.

Llegamos así al principal teorema de la sección que nos ocupa:

Teorema 2.3.3. Sea G un grupo de Lie que actúa como grupo de transformaciones y de manera transitiva sobre una variedad M . Sea $p \in M$ un punto cualquiera de la variedad y G_p el subgrupo de isotropía asociado. Dotamos al conjunto G/G_p de la estructura diferenciable que hace de ella una variedad cociente de G . Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha : G/G_p &\rightarrow M \\ gG_p &\mapsto \phi_g(p) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Idea de Demostración. La demostración completa se puede encontrar en [WAR83, pp. 123-124]. En primer lugar, α no depende del representante particular escogido, pues dado cualquier $h \in G_p$ tenemos que $\alpha(ghG_p) = \phi_{gh}(p) = \phi_g(\phi_h(p)) = \phi_g(p) = \alpha(gG_p)$. La sobreyectividad de α se sigue de la transitividad de la acción y la inyectividad es también inmediata:

$$\alpha(gG_p) = \alpha(hG_p) \implies \phi_g(p) = \phi_h(p) \implies \phi_{h^{-1}g}(p) = p \implies h^{-1}g \in G_p \implies gG_p = hG_p.$$

Para terminar de ver que α es un difeomorfismo basta ver que es \mathcal{C}^∞ y que (α_*) es un isomorfismo en todo punto de G/G_p . Los argumentos que lo confirman se pueden encontrar en la fuente citada. \square

Como todos los subgrupos de isotropía son difeomorfos entre ellos, realmente da igual el punto $p \in M$ particular elegido para construir el difeomorfismo del teorema anterior.

Definición 2.3.4 (Variedad Homogénea). Las variedades que son de la forma G/H donde G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado de G se conocen con el nombre de variedades homogéneas.

Algunas fuentes definen variedad homogénea como una variedad M que dispone de un grupo de Lie G que actúa de manera transitiva sobre ella, pero con lo que hemos visto hasta ahora es bastante fácil de ver que ambas nociones coinciden:

- Si M es una variedad con un grupo de Lie G que actúa de manera transitiva sobre ella, entonces $M \cong G/G_p$ y recordamos que G_p es un subgrupo cerrado.
- Si G es un grupo de Lie y H un subgrupo de Lie cerrado de G , entonces existe una acción natural de G sobre G/H :

$$\begin{aligned}\Psi : G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (\sigma, \tau H) &\mapsto \sigma\tau H,\end{aligned}$$

que es trivialmente transitiva.

Reconciliando el tema de las variedades homogéneas con la visión de las submersiones, enunciamos el siguiente

Corolario 2.3.5. Sea M una variedad homogénea con grupo de Lie asociado G . Entonces existe una submersión natural $\pi : G \rightarrow M$.

Demostración. La composición $G \xrightarrow{\pi'} G/G_p \xrightarrow{\alpha} M$ es una submersión, en vista de la Proposición 1.2.8. Aquí α es el difeomorfismo proporcionado por el Teorema 2.3.3, mientras que la proyección al cociente $\pi' : G \rightarrow G/G_p$ es una submersión en vista del Teorema 2.2.6. \square

Ejemplo 2.3.6. Un ejemplo clásico de variedad homogénea es el de las esferas como cocientes de grupos ortogonales. En particular, se tiene que $S^n \cong O(n+1)/O(n)$. Veámoslo con detalle:

El grupo ortogonal $O(n+1)$ actúa de manera natural sobre la esfera S^n :

$$\begin{aligned}\Phi : O(n+1) \times S^n &\rightarrow S^n \\ (A, v) &\mapsto Av.\end{aligned}$$

La acción está bien definida, pues $\|Av\|^2 = (Av)^T(Av) = v^T A^t Av = v^T v = \|v\|^2 = 1$, la identidad deja fijo a cualquier vector, la condición de composición se cumple de manera trivial y la acción de cada matriz sobre la esfera es ciertamente un difeomorfismo. Que la acción es transitiva se puede argumentar mediante el proceso de formación de bases ortogonales de Gram-Schmidt: si se quiere mandar un vector de la esfera v_1 a otro vector de la esfera w , se forma una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} respecto de la cual se construye una matriz A , cuya primera columna viene dada por los coeficientes del vector w en la base \mathcal{B} . El resto de la matriz se puede rellenar acorde a una elección arbitraria cualquiera en el proceso de ortogonalización de GS. La matriz A es ortogonal por construcción (la ortogonalidad de la matriz se conserva por cambios de base) y $Av_1 = w$ como se deseaba.

Hallamos ahora el surgrupo de isotropía asociado a un elemento. Por simplicidad elegimos el vector e_1 de la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} . Así, las matrices de $O(n+1)_{e_1} = \{A \in O(n+1) : Ae_1 = e_1\}$ serán de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Que la primera fila tenga que ser un 1 y todo ceros no es obvio a primera vista, pero es condición necesaria. Como $AA^T = Id_{n+1}$, se tiene que cumplir que

$$Id_{11} = 1 = \sum_{k=1}^{n+1} A_{1k}A_{k1}^T = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} (A_{1k})^2,$$

luego necesariamente $A_{1k} = 0$, $k = 2, \dots, n+1$. La condición $A^T A = AA^T = Id_{n+1}$ en este caso se traduce a $\tilde{A}^T \tilde{A} = \tilde{A} \tilde{A}^T = Id_n$, por lo que $\tilde{A} \in O(n)$ y podemos identificar $O(n+1)_e$ con $O(n)$. Finalmente, por el Teorema 2.3.3 concluimos que $S^n \cong O(n+1)/O(n)$.

Observación 2.3.7. Todo grupo de Lie se puede ver también como una variedad homogénea: basta tomar $H = \{e\}$ y se tiene trivialmente que $G \cong G/H$ (de hecho podemos pensar en H como el subgrupo de isotropía de la acción de G sobre sí mismo, que es transitiva). El recíproco no es cierto: acabamos de ver que todas las esferas S^n son variedades homogéneas, pero solo S^1 y S^3 admiten una estructura de grupo de Lie (atribuible a la no-normalidad de los subgrupos ortonormales asociados, aunque existen argumentos más directos como el no ser paralelizables). Por tanto, el concepto de variedad homogénea es más amplio que el de grupo de Lie.

Observación 2.3.8. En relación a la anterior observación, podemos preguntarnos cómo de frecuentes son las variedades homogéneas. A priori no hemos mostrado ningún resultado que contradiga que toda variedad pueda verse como una variedad homogénea. Pues resulta que no toda variedad admite una acción transitiva por un grupo de Lie. Un importante teorema de G. D. Mostow del año 2005 impone fuertes restricciones topológicas a las variedades homogéneas: en [MOS05] se demuestra que toda variedad homogénea compacta M debe tener característica de Euler no-negativa, es decir, $\chi(M) \geq 0$.

2.4 Fibrados Principales

Antes de entrar a discutir la relación de las submersiones y los fibrados, repasamos algunos conceptos relativos a estos últimos.

Definición 2.4.1 (Fibrado). Un fibrado (en el sentido topológico) es una 4-tupla (M, π, B, F) donde M, B, F son espacios topológicos y $\pi : M \rightarrow B$ es una aplicación continua y sobreyectiva que satisface que $\forall x \in B, \exists U$ entorno abierto de x de manera que $\pi^{-1}(U) \cong U \times F$. Dicho de otro modo, $\exists \varphi$ homeomorfismo que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo:

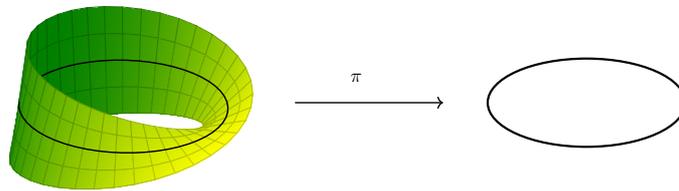
$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow \pi & \downarrow p_1 \\ & & U \end{array}$$

El espacio M se suele conocer como el espacio total o fibrado, el espacio B como espacio base y el espacio F como fibra.

La teoría general de fibrados se puede desarrollar sin problemas empleando herramientas y argumentos propios de la topología. En el ámbito de la topología diferencial, que es la que nos ocupa, trabajaremos con fibrados diferenciables. La definición de las mismas difiere de la de los fibrados en el sentido topológico únicamente en que los conjuntos involucrados son variedades y las aplicaciones pertinentes son diferenciables, sin alterar el resto de condiciones que se exigen.

Que el espacio F reciba el nombre de fibra no es casualidad: de la propia definición se puede deducir que dado cualquier $q \in B$, $\pi^{-1}(q)$ es difeomorfo a F mediante $\varphi|_{\pi^{-1}(q)}$. Los pares (U, φ_U) reciben el nombre de *trivializaciones locales* del fibrado.

Intuitivamente, un fibrado es un espacio que es localmente un espacio producto. Constituyen una generalización de los mismos, pues cualquier espacio producto es trivialmente un fibrado, pero el recíproco no es cierto, como evidencia por ejemplo la cinta de Möbius.



La cinta de Möbius \mathbb{M} es el espacio total del fibrado $(\mathbb{M}, \pi, S^1, (-1, 1))$, tomando como proyección $\pi : \mathbb{M} \rightarrow S^1$ la que “aplata la cinta” a la circunferencia. De ser un espacio producto tendría que ser homeomorfo a $S^1 \times (-1, 1)$, pero una es orientable y la otra no, no pudiendo ser homeomorfos ni por tanto difeomorfos. Los fibrados que globalmente no tienen una estructura de espacio producto se denominan fibrados no-triviales.

Podríamos preguntarnos si la proyección asociada a todo fibrado diferenciable es una submersión. La respuesta, afortunadamente, es positiva. Lo mostramos en la siguiente

Proposición 2.4.2. *Si (M, π, B, F) es un fibrado diferenciable, entonces la proyección $\pi : M \rightarrow B$ es una submersión.*

Demostración. Veamos que para cualquier punto $p \in M$, la aplicación tangente $(\pi_*)_p : T_p M \rightarrow T_{\pi(p)} B$ es sobreyectiva. Por la condición de fibrado, existe un entorno $U \subseteq B$ de $\pi(p)$ y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ de manera que $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = p_1 \circ \varphi$. Entonces:

$$(\pi_*)_p = ((p_1 \circ \varphi)_*)_p = (p_{1*})_{\pi(p)} \circ (\varphi_*)_p.$$

Como φ es un difeomorfismo $(\varphi_*)_p$ es un isomorfismo y por tanto sobreyectiva. Como se ha mostrado en el Ejemplo 1.2.4 la proyección p_1 es siempre una submersión, luego su aplicación tangente es también sobreyectiva. Concluimos así que $(\pi_*)_p$ es sobreyectiva y por tanto $\pi : M \rightarrow B$ una submersión. \square

Observación 2.4.3. *Las proyecciones de fibrados diferenciables y las submersiones comparten muchas propiedades. De hecho, localmente son básicamente lo mismo. Aún más, se puede ver que las submersiones que son también funciones propias son proyecciones de fibrado. Lo que ocurre en el caso general es que los fibrados tienen una cierta “estructura global” mientras que las submersiones no tienen por qué. Por ejemplo, consideramos un abierto arbitrario de \mathbb{R}^m y la proyección a sus coordenadas en*

\mathbb{R}^n , $n < m$. Dicha proyección será una submersión, pero en general no será la proyección de un fibrado, pues para empezar las fibras en distintos puntos no tienen ni por qué tener el mismo número de componentes conexas. Así, las submersiones son más generales que las proyecciones de fibrados.

Una clase especialmente relevante de fibrados es la de los *fibrados vectoriales* (que históricamente surgen antes que los fibrados generales). Intuitivamente un fibrado vectorial es un conjunto de espacios vectoriales parametrizados por un espacio base, de manera que la transición entre espacios vectoriales próximos es “buena”, hay cierta condición de “compatibilidad”. Aunque se puede tratar con ellos sin noción de diferenciabilidad, nosotros nos quedamos con las versiones diferenciables. Formalmente:

Definición 2.4.4 (Fibrado Vectorial). *Un fibrado vectorial diferenciable de rango k es una terna (E, π, X) donde E, X son variedades diferenciables y $\pi : E \rightarrow X$ es una función diferenciable sobreyectiva tal que:*

- Cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial de dimensión k .
- E es localmente trivial, en un sentido análogo al de los fibrados generales: para cada $x \in X$ existe un entorno $U \subseteq X$ del mismo y un difeomorfismo $\phi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$ de manera que
 - $(\pi \circ \phi) = p_1 : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$, donde recordamos que p_1 es la proyección a la primera componente.
 - $\phi_x : \{x\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Dadas dos trivializaciones locales $(U, \phi_U), (V, \phi_V)$ con $U \cap V \neq \emptyset$, la composición

$$\begin{aligned} \phi_V^{-1} \circ \phi_U : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k &\rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\mapsto (p, g_{UV}(p) \cdot v) \end{aligned}$$

está bien definida, donde $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ se conoce como una *función de transición*. Lo que hace que las funciones de transición tomen valores en $GL(k, \mathbb{R})$ es la segunda condición de las trivializaciones locales de la Definición 2.4.4.

Así, un fibrado vectorial (E, π, X) determina un fibrado del tipo $(E, \pi, X, \mathbb{R}^k)$, mientras que un fibrado $(E, \pi, X, \mathbb{R}^k)$ con un conjunto de funciones de transición tiene asociado un fibrado vectorial.

Los ejemplos más representativos de los fibrados vectoriales son los fibrados tangentes y cotangentes de una variedad, esenciales dentro de la teoría de la topología diferencial. Para estos dos casos las fibras no son más que los espacios tangentes/cotangentes en cada punto, que efectivamente tienen estructura de espacio vectorial de igual dimensión que la variedad. Recordamos también que los fibrados tangente y cotangente admiten naturalmente una estructura diferenciable de dimensión dos veces la dimensión de la variedad base.

Dejando atrás los fibrados vectoriales, otro tipo concreto de fibrados diferenciables que tienen buenas propiedades y que son de uso habitual en el ámbito de la topología diferencial son los llamados fibrados principales:

Definición 2.4.5 (Fibrado Principal). *Un fibrado principal es una 5-tupla (M, π, B, F, G) donde (M, π, B, F) es un fibrado diferenciable y G es un grupo de Lie que actúa a derechas transitiva y libremente sobre M de manera que M/G es difeomorfo a B . Cuando no hay riesgo de confusión podemos decir directamente que M es un fibrado G -principal.*

Existe una definición equivalente en la literatura que lo que exige es que G actúe sobre M a derechas y que lo haga libre y transitivamente sobre las fibras de la proyección π , es decir, dado un punto $q \in B$ se tiene que cumplir $\phi_g(p) \in \pi^{-1}(q)$ para todo punto $p \in \pi^{-1}(q)$ y todo elemento $g \in G$. Ambas definiciones son equivalentes (omitimos la demostración) y por tanto se puede ver que para un fibrado G -principal las fibras de la submersión asociada son difeomorfas al grupo G .

Observación 2.4.6. *Los fibrados principales no son exclusivos a la categoría de variedades diferenciables, se pueden tratar también con espacios y grupos topológicos. No obstante, al estar interesados nosotros en las submersiones, definimos los fibrados principales de manera que se facilita la discusión de los aspectos diferenciables involucrados.*

Mostramos unos ejemplos significativos:

Ejemplo 2.4.7 (Fibrado de las referencias). *Un ejemplo básico de fibrado principal es el fibrado de las referencias lineales (respectivamente ortogonales, ortonormales) asociada a una variedad M , que denotamos por FM (frame bundle) y está formado por todas las bases ordenadas de todos los espacios tangentes de la variedad:*

$$FM = \bigcup_{p \in M} F_p,$$

donde F_p es el conjunto de todas las bases ordenadas de T_pM :

$$F_p = \{\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) : \mathcal{B} \text{ es base de } T_pM\}.$$

El espacio base es la variedad M , las fibras de la proyección $\pi : FM \rightarrow M$ son los conjuntos $\pi^{-1}(p) = F_p$ y el grupo de Lie que actúa de manera natural es $GL(n, \mathbb{R})$ (respectivamente $O(n)$ y $SO(n)$), siendo la acción simplemente un cambio de base. Que la acción preserva las fibras es evidente. Que es transitiva sobre las fibras se sigue del resultado del álgebra lineal que afirma que existe una única matriz invertible que manda una base a otra cualquiera y que lo hace de manera libre es inmediato al recalcar que los elementos de F_p son bases ordenadas: si $A \neq Id$, entonces cualquier base se transforma en otra diferente (si no fueran bases ordenadas el resultado no sería cierto).

Al ser un fibrado principal las fibras son difeomorfas al grupo que actúa. En este caso tenemos que $F_p \cong GL(n, \mathbb{R})$, y la asociación es bastante directa: las columnas de una matriz invertible forman una base y para cada base la matriz formada poniendo sus elementos por columnas es invertible.

Ejemplo 2.4.8 (Fibración de Hopf). *El siguiente resultado es un clásico y establece que la esfera S^3 se puede ver como un fibrado diferenciable de base S^2 y fibra difeomorfa a S^1 . Es atribuido principalmente al matemático alemán Heinz Hopf. La submersión $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ se construye de la siguiente manera:*

$$S^3 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^4 - \{0\} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^2 - \{0\} \xrightarrow{p} P_1(\mathbb{C}) \xrightarrow{\beta} S^2,$$

donde i es la inclusión, α es el difeomorfismo natural entre \mathbb{R}^4 y \mathbb{C}^2 vistos como variedades diferenciables reales, p es la proyección a la variedad cociente y β es un difeomorfismo entre la recta proyectiva compleja y la esfera bidimensional. Que la recta proyectiva compleja y la esfera bidimensional son difeomorfas no es evidente. Se puede encontrar una prueba de dicho resultado en [BC70, p. 32]. Con

dicha notación, se toma $\pi = \beta \circ p \circ \alpha \circ i$. Que π es una submersión se puede argumentar haciendo repetido uso de la Proposición 1.2.8.

Resulta que la fibración de Hopf es un fibrado principal no-trivial, donde el grupo de actúa es difeomorfo a S^1 . Existen varias maneras de generalizar la fibración de Hopf, teniendo en cuenta los espacios proyectivos sobre los reales, complejos, cuaterniones u octoniones, pero todas ellas siguen la misma idea:

$$S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P_n(\mathbb{R}),$$

$$S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P_n(\mathbb{C}),$$

$$S^{4n+3} \hookrightarrow \mathbb{R}^{4n+4} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P_n(\mathbb{H}),$$

$$S^{8n+7} \hookrightarrow \mathbb{R}^{8n+8} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{O}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P_n(\mathbb{O}).$$

Terminamos de hablar de fibrados principales con este bonito resultado que conecta las últimas dos secciones que hemos tratado en este capítulo:

Proposición 2.4.9. *Sea $M = G/H$ una variedad homogénea y $\pi : G \rightarrow G/H$ la proyección al cociente. Entonces (G, π, M, H, H) es un fibrado principal donde el grupo H actúa libre y transitivamente sobre las fibras mediante $(g, h) \mapsto g \cdot h$.*

Consecuencia directa de este resultado es que, en virtud del Ejemplo 2.3.6, el conjunto de matrices ortogonales $O(n+1)$ es un fibrado principal de base S^n y fibra difeomorfa a $O(n)$:

$$O(n) \hookrightarrow O(n+1) \longrightarrow S^n.$$

2.5 Un Ejemplo de Especial Interés

Este apartado está dedicado a estudiar un caso particular en el que se puede definir una distribución horizontal de manera natural. Hasta ahora el único caso que hemos visto donde era posible hacerlo ha sido con las variedades producto, donde se ha explotado la particular estructura de la variedad inicial. Como se verá en el Capítulo 4, también es posible hacerlo cuando se dispone de métricas riemannianas. El caso que presentamos aquí es algo distinto y se debe principalmente a las ideas de Élie Cartan y su *repère mobile* en el fibrado de las referencias.

Recordamos que dada una conexión ∇ sobre una variedad M se puede definir la noción de *transporte paralelo* de vectores: Dado un punto $p \in M$, un vector $v \in T_p M$ y una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$, se define el transportado paralelo de v a lo largo de γ como $(\tau(v))(t) = X_{\gamma(t)}$, donde X es el único campo vectorial que cumple que $X_{\gamma(0)} = v$ y $\nabla_{\gamma'(t)} X \equiv 0$. Para un tratamiento más extenso del tema se puede ver, por ejemplo, [SPI70, Cap. 6-10].

Consideramos una variedad M cualquiera y su fibrado tangente TM . La proyección natural $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(p, v) = p$ es en efecto una submersión, ya que el fibrado tangente es un fibrado vectorial. Dado un punto $p \in M$ la fibra asociada no es más que el espacio tangente en dicho punto, $T_p M$. Lo que

pretendemos es definir una distribución horizontal H genérica en el fibrado tangente para cualquier variedad M y cualquier conexión ∇ :

$$T_{(p,v)}(TM) = V_{(p,v)} \oplus H_{(p,v)} = T_{(p,v)}(T_p M) \oplus H_{(p,v)}.$$

Lo haremos mediante el *levantamiento horizontal* de las curvas definidas sobre la variedad. Dada una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ y un vector $v \in T_{\gamma(0)}M$, definimos su levantamiento horizontal γ_v^H :

$$\gamma_v^H = \{(\gamma(t), (\tau(v))(t)), t \in [0, 1]\} \subset TM,$$

donde $(\tau(v))(t)$ es el transportado paralelo de v a lo largo de γ . Construiremos la distribución horizontal considerando los levantamientos horizontales de todas las curvas que pasan por un punto. Así,

$$H_{(p,v)} = T_{(p,v)}\{ \gamma_v^H : \gamma \text{ curva en } M \text{ con } \gamma(0) = p \}.$$

La Figura 2.1 muestra esquemáticamente el levantamiento horizontal de una curva particular:

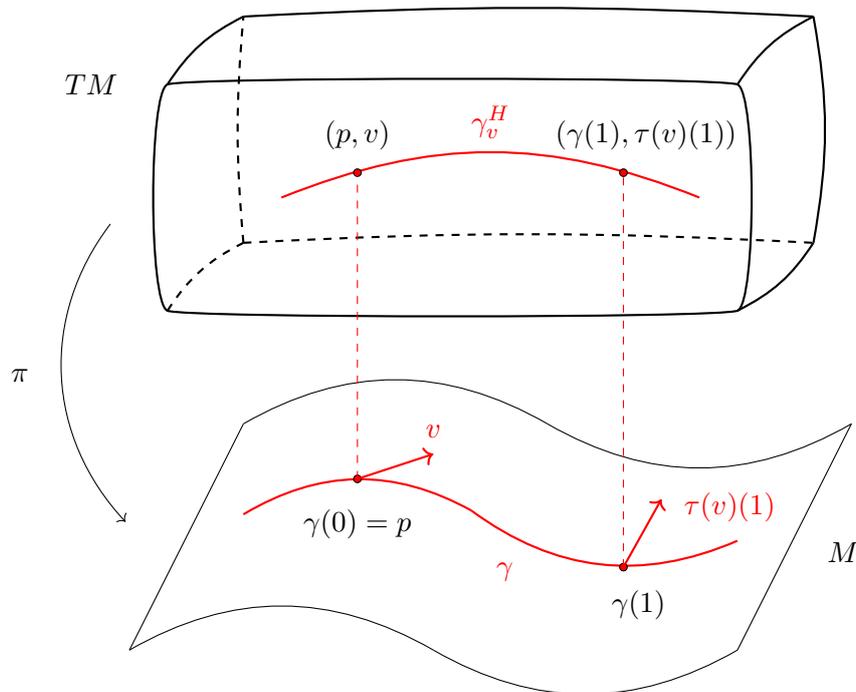


Figura 2.1: Diagrama que ilustra el levantamiento horizontal de una curva para la construcción de la distribución horizontal del fibrado tangente de una variedad con conexión.

Que el conjunto $H_{(p,v)}$ arriba descrito es en efecto una distribución horizontal no es desde luego inmediato de demostrar. La manera clásica de verlo es remitiéndose a la noción original de conexión en fibrados vectoriales, que viene a decir que una conexión en un fibrado vectorial es justamente dar una descomposición del espacio tangente en cada punto en una parte vertical y una complementaria, lo que hemos llamado “horizontal”. Lo que se consigue con ello es “conectar” espacios vectoriales (tangentes, en nuestro caso) de distintos puntos, siendo para ello necesario definir previamente lo que

es un *paralelismo* en el fibrado (que acabará siendo lo que nosotros llamamos transporte paralelo).

Que las dos nociones coinciden, la clásica y a la que habituamos (es decir, pensar en una conexión como un operador $\nabla : \mathfrak{F}(M) \times \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ con propiedades de derivada) no es ni breve ni evidente de ver, y es el principal tema que ocupa el segundo capítulo de [POO81]. Así, resulta que lo que entendemos por dar una conexión en una variedad, y por tanto un transporte paralelo, empleado en el caso del fibrado tangente de esta manera equivale justamente a dar una distribución horizontal.

En general la distribución horizontal definida de esta manera no es integrable. Un resultado interesante, cuya demostración omitimos, es que la distribución horizontal es completamente integrable si y solo si la conexión ∇ es de curvatura nula, es decir, si y solo si $R_{\nabla}(X, Y, Z) = 0$ para toda terna de campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Lo que sí diremos es que los argumentos que conducen al resultado son propios del campo de la *holonomía*: resumidamente, el estudio del transporte paralelo sobre curvas cerradas. Cuando la conexión no es de curvatura nula puede ocurrir que lazos en la variedad no tengan un levantamiento horizontal que sean también lazos en el fibrado tangente (es decir, al volver al punto original el vector transportado paralelamente no coincide con el inicial), pudiendo cortar las fibras en varias ocasiones. Un ejemplo típico que muestra este comportamiento es el del transporte paralelo mediante la conexión de Levi-Civita en la esfera:

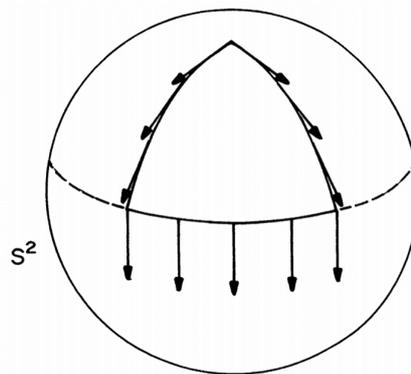


Figura 2.2: Transporte paralelo de un vector a lo largo de un camino cerrado de la esfera. Cuando el vector transportado regresa al polo norte este difiere del vector original. Imagen tomada de [POO81].

Así, el levantamiento horizontal del lazo de base $p = (0, 0, 1)$ tiene como *endpoints* (p, v) y $(p, \tau(v))$, que no coinciden. El resultado concreto por el cual la integrabilidad de la distribución horizontal depende de la curvatura de la conexión viene dado por el Teorema de Ambrose-Singer (1953), que relaciona la curvatura de la conexión con el grupo de holonomía (se puede ver en [POO81, p. 71]).

Capítulo 3

Submersiones entre Variedades de Igual Dimensión

Tal y como se ha señalado en el primer capítulo, las submersiones, las inmersiones y los difeomorfismos locales coinciden cuando las dos variedades implicadas tienen la misma dimensión. Este hecho es consecuencia inmediata de que para aplicaciones lineales $f : V \rightarrow V'$ entre espacios vectoriales de igual dimensión es lo mismo ser inyectiva, sobreyectiva o isomorfismo, por la conocida fórmula de las dimensiones:

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V') \implies (\dim(\ker f) = 0 \iff \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(V')).$$

Por tanto, estudiar las submersiones entre variedades de la misma dimensión es lo mismo que estudiar difeomorfismos locales. La ventaja es que la mayoría de las propiedades estudiadas en el Capítulo 1 siguen siendo ciertas para este caso.

De los muchos escenarios en los que hay difeomorfismos locales involucrados nos centramos en 2 que tienen especial interés dentro de la topología algebraica: en las cubiertas o espacios recubridores y en el grado de una función diferenciable.

La relación entre la topología diferencial y la topología algebraica es notable, pues la mayoría de los espacios interesantes en la topología algebraica admiten de manera bastante natural estructuras diferenciables. Históricamente también han tenido un recorrido bastante paralelo, y muchos de los autores que desarrollaron una de las disciplinas también contribuyeron al progreso de la otra. Por ejemplo, cuando Heinz Hopf dio con su fibración de S^3 que presentamos en el Ejemplo 2.4.8, el alemán realmente perseguía ejemplos de funciones en esferas que no fuesen nulhomótopas, para así argumentar que los grupos de homotopía de orden superior de las esferas no eran todos triviales.

Un clásico donde encontrar todas las nociones básicas de la topología algebraica es [MAS67]. Los resultados propios de dicha disciplina que se enuncian en las dos secciones siguientes sin demostración se pueden hallar en dicho libro.

3.1 Cubiertas Topológicas Diferenciables

Para esta sección seguimos principalmente [LEE12, Cap. 4].

Las cubiertas topológicas tienen especial interés en la topología algebraica porque proporcionan una herramienta para calcular grupos fundamentales. Al subirlas al nivel “diferenciable” las cosas no cambian en exceso, salvo tal vez por el hecho de que cualquier variedad diferenciable admite una cubierta universal, por tratarse de un espacio semilocalmente simplemente conexo (ya que localmente es como un abierto de \mathbb{R}^n , [MAS67, Cap. 5]). Hacemos hincapié en la siguiente suposición:

Las variedades que se mencionan se asumen conexas.

Antes de hablar de las cubiertas diferenciables comenzamos recordando el concepto de cubierta topológica:

Definición 3.1.1 (Cubierta). Sea X un espacio topológico. Una cubierta topológica de X es un par (\hat{X}, p) donde \hat{X} es un espacio topológico y $p : \hat{X} \rightarrow X$ es una aplicación continua y sobreyectiva de manera que $\forall x \in X, \exists U$ entorno abierto de x tal que $p^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos de \hat{X} , cada uno de ellos homeomorfo a X mediante p .

De la misma manera que con los fibrados, la noción de cubierta se puede generalizar de la categoría topológica a la categoría diferenciable, sin más que exigir que X, \hat{X} sean variedades, que la aplicación p sea diferenciable y siguiendo la notación de la definición precedente, que cada abierto que forma $p^{-1}(U)$ sea difeomorfo a U mediante p .

La siguiente ilustración nos da una idea del concepto de cubierta diferenciable o *smooth cover*:

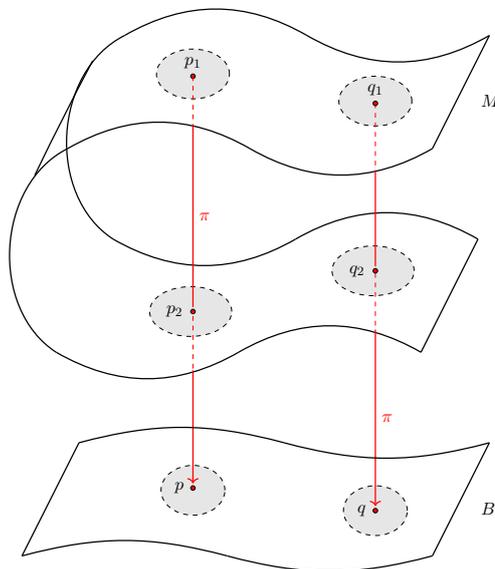


Figura 3.1: El par (M, π) es una cubierta diferenciable de B .

Un resultado casi inmediato es el siguiente:

Proposición 3.1.2. Si (M, π) es una cubierta diferenciable de B , entonces $\pi : M \rightarrow B$ es una submersión

Demostración. Queremos ver que para cada $p \in M$ existe un entorno U del mismo de manera que $\pi|_U : U \rightarrow B$ es un difeomorfismo. Por la condición de cubierta diferenciable $\pi(p) \in B$ está contenido en un entorno $V \subseteq B$ de manera que $\pi^{-1}(\pi(p))$ es unión disjunta de abiertos de M , cada uno de ellos difeomorfo a V mediante π . El punto p estará en uno de dichos abiertos, a saber U_i , por lo que U_i es un entorno de p de manera que $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow \pi(U_i)$ es un difeomorfismo. \square

Ya de inicio parece que ser un *smooth cover* es una condición más exigente que ser una simple submersión (difeomorfismo local). De hecho es fácil encontrar ejemplos de submersiones entre variedades de igual dimensión que no son proyecciones asociadas a cubiertas diferenciables:

Ejemplo 3.1.3. Consideramos la aplicación $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow S^1$ dada por $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Esta es evidentemente sobreyectiva y continua, y además $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Concluimos pues que f es una submersión. No obstante, f no es una aplicación de recubrimiento, pues dado el punto $(1, 0) \in S^1$ la preimagen de cualquier entorno $(1, 0) \in U \subseteq S^1$ contiene un abierto $(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}_{>0}$ para algún $\varepsilon > 0$. Si el entorno es toda la circunferencia $U = S^1$ entonces es obvio que f no es un difeomorfismo. Si el entorno U no es toda la circunferencia, $(0, \varepsilon), \varepsilon < 2\pi$ es una de las componentes conexas de $f^{-1}(U)$. Pero $f|_{(0, \varepsilon)} : (0, \varepsilon) \rightarrow U$ no puede ser un difeomorfismo, simplemente porque $(1, 0) \notin f(0, \varepsilon)$.

Una pregunta natural que nos podemos hacer entonces es ¿Qué más le debemos exigir a una submersión para que sea la proyección de un *smooth cover*? El siguiente resultado nos da una condición suficiente:

Proposición 3.1.4. Sea $\pi : M \rightarrow B$ un difeomorfismo local y también una función propia (en el sentido topológico). Entonces (M, π) es un espacio recubridor de B .

La demostración de la misma se puede encontrar en [LEE12, pp. 94-95].

La condición de ser una función propia es suficiente para un difeomorfismo local para ser una cubierta diferenciable, pero no necesaria. Basta ver que $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ es una aplicación de cubierta diferenciable que no es propia, pues la fibra de cada punto $q \in S^1$ es un conjunto infinito y discreto de puntos, luego no compacto. Además, de entrada no es tarea sencilla determinar si una función dada es propia o no. Por suerte existe otra manera de encontrar cubiertas diferenciables. El siguiente ejemplo nos da una pista:

Ejemplo 3.1.5. Las submersiones de la forma $\pi : S^n \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ que se presentan en el Ejemplo 2.1.7 constituyen también una familia de ejemplos de cubiertas diferenciables. Como las esferas para $n > 1$ son simplemente conexas, estas son además cubiertas diferenciables universales.

No es casualidad que un ejemplo de la sección de acciones propiamente discontinuas sirva como ejemplo de cubiertas diferenciables. No nos detendremos a desarrollar la teoría pertinente, pero se tiene este agradable resultado que conecta ambos aspectos:

Proposición 3.1.6. Sea G un grupo de transformaciones propiamente discontinuo sobre una variedad M . Entonces (M, π) es una cubierta diferenciable de M/G , donde $\pi : M \rightarrow M/G$ es la submersión al cociente.

Las claves para probar que π es de recubrimiento las proporcionan las condiciones que definen la acción propiamente discontinua (en particular, la primera de las 2 condiciones). Además, en realidad la conexión es más íntima todavía: el grupo fundamental de una variedad actúa de manera propiamente discontinua sobre su cubierta universal, a través de las llamadas *Deck Transformations*. (Se pueden ver los detalles y matices de esta afirmación en [MAS67, Cap. 5].)

3.2 Teoría del Grado

En esta sección seguimos principalmente a [MIL88, Cap. 5].

A raíz de la Proposición 1.3.1 sabemos que para una submersión $\pi : M \rightarrow N$ entre variedades de igual dimensión las fibras son conjuntos discretos de puntos. Si además exigimos algo más a las variedades, podemos ser más precisos:

Proposición 3.2.1. *Si $\pi : M \rightarrow B$ es una submersión entre variedades de igual dimensión y M es compacto, entonces la fibra asociada a cada punto $q \in B$ es un conjunto finito de puntos de M :*

$$\pi^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}.$$

Demostración. Supongamos que q es un punto de N cuya fibra asociada es infinita. Tomamos una sucesión $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos en la fibra. Como M es compacto existe una subsucesión $(p_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto $p_{i_k} \rightarrow p \in M$. Como la fibra es un conjunto cerrado (por serlo $\{q\}$ en B y π continua) necesariamente $p \in \pi^{-1}(q)$. Pero esto contradice la Proposición 1.3.1, según la cual para cada punto de la fibra existe un entorno que no contiene ningún otro punto de la fibra. \square

El siguiente paso para hablar del concepto de grado de una función diferenciable es recordar la noción de *orientación y orientabilidad*:

En un espacio vectorial real V de dimensión finita diremos que una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de la misma está positivamente orientada si el determinante de la matriz de cambio de base de \mathcal{B} a la base canónica $\mathcal{B}_c = \{e_1, \dots, e_n\}$ es positivo y que está negativamente orientada si el determinante es negativo. Es inmediato observar que la matriz de cambio de base entre dos bases con la misma orientación tiene siempre determinante positivo. De hecho la orientación define una relación de equivalencia con 2 clases: la positiva y la negativa. “Dar una orientación” en el espacio vectorial es simplemente escoger una de las 2 clases.

Cuando tratamos con variedades es posible asignar orientaciones a los espacios tangentes. Lo deseable sería poder asignar una orientación a los espacios tangentes globalmente, de manera que “espacios tangentes próximos tienen la misma orientación”. Resulta que eso no siempre es posible:

Definición 3.2.2 (Variedades Orientables). *Sea M una variedad diferenciable y \mathcal{A} un atlas del mismo. Decimos que \mathcal{A} es un atlas orientado si para cada par de cartas $x, y \in \mathcal{A}$ el determinante del jacobiano del cambio de cartas $y \circ x^{-1}$ es estrictamente positivo. Se dice que M es orientable si tiene un atlas orientado.*

Así, cuando dispongamos de una variedad orientable podemos asignar una orientación a cada espacio vectorial que no depende de la elección de cartas. Además, por las propiedades de compatibilidad de los fibrados vectoriales descritas en la Definición 2.4.4, es posible asignar orientaciones coherentes a los espacios tangentes de manera global (siempre y cuando la variedad M sea conexa).

Por otro lado, diremos que una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre variedades orientables *preserva* la orientación en $p \in M$ si el determinante de $(f_*)_p$ es positivo y que *revierte* la orientación si es negativo. Para acomodar la notación definimos la función $signo_f : M \rightarrow \{\pm 1\}$, donde $signo_f(p) = +1$ si f preserva la orientación en p y $signo_f(p) = -1$ en otro caso.

El determinante de la aplicación tangente en un punto es intrínseco, no depende de las cartas escogidas, justamente por la condición que define a un atlas orientado. Para que esta definición tenga

sentido en todo M se deben tener 2 cosas: que las variedades M y N tengan igual dimensión y que p sea un punto regular de M , es decir, que f sea un difeomorfismo local.

Llegamos así al concepto central de esta sección:

Definición 3.2.3 (Grado de una función diferenciable). *Sea $\pi : M \rightarrow B$ un difeomorfismo local entre una variedad M compacta y una variedad B conexa, ambas orientables. Se define el grado de la función π como la cantidad:*

$$\text{grad}(\pi) = \sum_{p \in \pi^{-1}(q)} \text{signo}_{\pi}(p),$$

donde $q \in B$ es un punto cualquiera.

El exigir que M sea compacta es para forzar la finitud de la fibra asociada a $q \in B$ (Proposición 3.2.1) y por tanto que la suma de la definición sea finita, mientras que B sea conexo nos garantiza que el grado de f es constante e independiente del punto $q \in B$ escogido (Teorema A de [MIL88, p. 28]). De no ser B conexo el grado de una función puede variar entre sus componentes conexas.

La importancia del grado de una función viene plasmada en el Teorema B de [MIL88, p. 28], que enunciamos sin demostración:

Teorema 3.2.4. *En las condiciones de las definiciones precedentes, dos funciones $f, g : M \rightarrow B$ son homótopas (smoothly homotopic) si y solo si $\text{grad}(f) = \text{grad}(g)$*

Para mostrar la relevancia del Teorema 3.2.4 terminamos el capítulo con un ejemplo importante donde se hace uso del mismo:

Ejemplo 3.2.5 (Esferas de orden par e impar: Consecuencias del Grado). *Consideramos la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Definimos la reflexión i -ésima como:*

$$R_i : \quad S^n \quad \rightarrow \quad S^n \\ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1}).$$

Estas reflexiones son ejemplos de difeomorfismos locales (de hecho globales) que revierten la orientación. Podemos escribir la función antipodal $A_n : S^n \rightarrow S^n$, $p \mapsto -p$ como la composición de varias reflexiones:

$$A_n = R_1 \circ R_2 \circ \dots \circ R_{n+1}.$$

La función antipodal es una submersión de la esfera en sí misma cuyas fibras están formadas por un único elemento, ya que la función antipodal es inyectiva. Para calcular su grado, por tanto, basta calcular $\text{signo}_{A_n}(p)$ para un punto p cualquiera de la esfera. Teniendo en cuenta que la aplicación tangente de la composición es la composición de las aplicaciones tangentes y que el determinante de la composición es el producto de los determinantes de cada aplicación, tenemos que

$$\text{grad}(A_n) = \prod_{k=1}^{n+1} \det(((R_k)_*)_p) = (-1)^{n+1}.$$

Observamos que para las esferas de dimensión impar la aplicación antipodal tiene grado 1 mientras que para las de dimensión par tiene grado -1. Como la identidad $id : S^n \rightarrow S^n$ siempre tiene grado 1, podemos deducir que la aplicación antipodal es homótopa a la identidad cuando n es impar y que no lo es cuando n es par. Como aplicación de este último resultado veremos que las esferas de orden par no pueden admitir campos vectoriales sin ceros:

Sea $X \in \mathfrak{X}(S^n)$ y $X_p \neq 0$ para todo punto $p \in S^n$, es decir, un campo sin ceros. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\|X_p\| = 1$ para todo punto $p \in M$. Si vemos X como una sección del fibrado tangente de la esfera, podemos pensar en el campo como una función $X : S^n \rightarrow S^n$. Ahora, la función

$$\begin{aligned} H : S^n \times [0, \pi] &\longrightarrow S^n \\ (p, \theta) &\longmapsto p \cdot \cos(\theta) + X_p \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

es una función continua (definida considerando las operaciones habituales de \mathbb{R}^{n+1}) que cumple:

- $\|H(p, \theta)\| = 1$ para todo $\theta \in [0, \pi]$, puesto que $\langle p, X_p \rangle = 0$.
- Por el punto anterior, para cada $\theta_0 \in [0, \pi]$ la función $H(-, \theta_0) : S^n \rightarrow S^n$ está bien definida.
- $H(-, 0) = id$.
- $H(-, \pi) = A_n$.

Por tanto A_n es homótopa a la identidad. ¡Pero esto solo es posible si n es impar! Concluimos, por tanto, que las esferas de orden par no admiten campos sin ceros.

Capítulo 4

Submersiones Riemannianas

En el momento en el que las variedades se dotan de métricas riemannianas, cabe preguntarse cómo se comportarán las submersiones en relación a las nociones propias de la geometría diferencial: curvaturas, isometrías, geodésicas... Las submersiones que nos interesarán serán las que se “comporten bien” respecto de las métricas, ganando el calificativo de *submersiones riemannianas* y convirtiéndose en nuestro objeto de estudio.

De la misma manera que las inmersiones riemannianas quedan caracterizadas por un único campo tensorial, a saber, la segunda forma fundamental¹, será posible asociar a cada submersión riemanniana dos campos tensoriales que bajo ciertas condiciones la describen por completo. Aquí seguimos principalmente el trabajo de Barrett O’Neill en [ONE66], siendo esta la publicación original donde aparecen por primera vez los resultados principales relativos a las submersiones riemannianas, que se recogen también en [FIP04, cap.1].

Las ideas de O’Neill están principalmente motivadas por la búsqueda de un conjunto de ecuaciones, análogas a las de Gauss-Codazzi para inmersiones, que ligen las curvaturas de los distintos espacios involucrados por la submersión. La cima de su trabajo y el resultado que corona este capítulo es el Teorema 4.4.1, en el cual se dan las condiciones bajo las cuales una submersión queda caracterizada por sus tensores fundamentales.

4.1 Definición y Propiedades

La disposición de una métrica riemanniana definida sobre una variedad M permite determinar unívocamente una distribución horizontal para cada submersión $\pi : M \rightarrow B$, a saber, aquella dada en cada punto por el complemento ortogonal del subespacio vertical:

$$T_p M = V_p \oplus (V_p)^\perp.$$

Así, será común referirnos a *la* distribución horizontal de una submersión dotada de una métrica y no a *una* distribución horizontal.

Definición 4.1.1 (Submersión Riemanniana). Sean (M, g) y (B, g') dos variedades riemannianas. Una aplicación sobreyectiva $\pi : M \rightarrow B$ se denomina submersión riemanniana si es una submersión y la aplicación tangente actúa isométricamente sobre la distribución horizontal en cada punto de M .

¹Ver Apéndice A

En otras palabras, una submersión riemanniana es una submersión que respeta las métricas, en el sentido en el que la aplicación tangente asociada es una proyección ortogonal entre los espacios tangentes. Dicha condición se puede expresar como:

$$g_p(X_p, Y_p) = g'_{\pi(p)}((\pi_*)_p(X_p), (\pi_*)_p(Y_p)), \quad X, Y \in \mathfrak{X}^h(M).$$

Ejemplo 4.1.2. La submersión trivial $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n)$ con $m \geq n$ es una submersión riemanniana considerando las métricas euclideas en ambos espacios.

Ejemplo 4.1.3. En general, dadas dos variedades riemannianas $(M, g), (N, g')$ la variedad producto $M \times N$ se puede dotar naturalmente de una métrica:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \times T_{(p,q)}(M \times N) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((v_1, w_1), (v_2, w_2)) &\longmapsto g_p(v_1, v_2) + g'_q(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Es relativamente simple comprobar que efectivamente \tilde{g} es una métrica válida para $M \times N$. Con dicha estructura, cualesquiera de las dos proyecciones canónicas del producto son submersiones riemannianas.

Observación 4.1.4. Dada una submersión $\pi : (M, g) \rightarrow (B, g')$, que esta sea riemanniana o no depende naturalmente de las elecciones de métrica en cada variedad. Una pregunta natural que nos podemos hacer es la siguiente: dada una métrica en la variedad inicial o final, ¿Para qué métricas en la otra variedad es la submersión una submersión riemanniana? Este problema de proyección y levantamiento de métricas es un campo con muchos resultados relevantes y no triviales, pero resulta algo extenso para ser incluida en la memoria. Nos limitaremos a decir que son importantes en este ámbito los trabajos de E. Kähler, G. Fubini, E. Study o S. Sasaki y las métricas que llevan sus nombres. En [FIP04] se muestran algunos ejemplos de submersiones riemannianas no-triviales que involucran el uso de dichas métricas, como por ejemplo la fibración de Hopf generalizada $\pi : S^{2n+1} \rightarrow P_n(\mathbb{C})$.

En lo que resta de capítulo se entiende que las variedades M, B están dotadas de métricas g, g' , que ∇, ∇' denotan las conexiones de Levi-Civita asociadas y que $\pi : M \rightarrow B$ es una submersión riemanniana.

El objetivo de O'Neill es asociar ciertos campos tensoriales a cada submersión riemanniana que lo caractericen. Como para trabajar con ecuaciones tensoriales tenemos libertad de elegir campos vectoriales especiales que nos faciliten los cálculos, resulta natural definir un tipo concreto de campos vectoriales:

Definición 4.1.5 (Campos Básicos). Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se llama básico si es horizontal y proyectable, es decir, si está en $\mathfrak{X}^h(M) \cap \mathfrak{X}^p(M)$.

Ejemplo 4.1.6. Estudiamos un caso sencillo pero que refleja muy bien el carácter de los campos básicos. Consideramos la submersión trivial $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$ con las métricas euclideas. Tomando cartas globales $x = id : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $y = id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación tangente actúa en cada punto como la proyección ortogonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

de donde se deduce rápidamente que $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ es una base para los campos horizontales y los verticales son simplemente los múltiplos de $(0, 0, 1)$, en cualquier punto de \mathbb{R}^3 . En notación más general:

$$(\pi_*)_p(a \cdot (\partial/\partial x^1)_p + b \cdot (\partial/\partial x^2)_p + c \cdot (\partial/\partial x^3)_p) = a \cdot (\partial/\partial y^1)_{\pi(p)} + b \cdot (\partial/\partial y^2)_{\pi(p)}.$$

Veamos algunos ejemplos relevantes para esta submersión. Si damos coordenadas $p = (p_1, p_2, p_3)$ a los puntos de \mathbb{R}^3 ...

- El campo $X_p = p_3 \cdot (\partial/\partial x^1)_p + p_2 \cdot (\partial/\partial x^2)_p$ es un campo horizontal que no es proyectable. La horizontalidad es fácil de ver, y que no es proyectable es consecuencia de que en distintos puntos de la misma fibra la aplicación tangente manda vectores del campo X a vectores distintos, por ejemplo:

$$((\pi_*)_{(0,0,1)})(X_{(0,0,1)}) \neq ((\pi_*)_{(0,0,2)})(X_{(0,0,2)}),$$

pero $\pi(0, 0, 1) = \pi(0, 0, 2)$, por lo que $(\pi_*)X$ no es un campo de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$.

- El campo $Y_p = (\partial/\partial x^1)_p + (\partial/\partial x^2)_p + (\partial/\partial x^3)_p$ es un campo proyectable que no es horizontal. Está relacionado mediante π con el campo $Y'_{\pi(p)} = (\partial/\partial y^1)_{\pi(p)} + (\partial/\partial y^2)_{\pi(p)}$, pero no es horizontal por tener la tercera componente no nula.
- El campo $Z_p = p_1 \cdot (\partial/\partial x^1)_p + p_2 \cdot (\partial/\partial x^2)_p$ es horizontal y proyectable, luego básico. La horizontalidad es trivial y está relacionado mediante π con $Z'_{\pi(p)} = p_1 \cdot (\partial/\partial y^1)_{\pi(p)} + p_2 \cdot (\partial/\partial y^2)_{\pi(p)}$

Naturalmente, todo campo básico en M tiene asociado un campo en B y para todo campo en B existe un único campo horizontal en M asociado a él mediante π . Esta relación biyectiva permite hablar del *levantamiento horizontal* de un campo de B , definido como el único campo básico de M relacionado con él mediante π .

El interés de los campos básicos reside en que se “comportan bien” respecto al producto escalar, el corchete de Lie y la derivada covariante, en el sentido recogido en el siguiente

Lema 4.1.7. Sean X, Y campos vectoriales básicos de M y X', Y' los campos correspondientes en B . Entonces

- i) $g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \pi$,
- ii) $\mathcal{H}([X, Y])$ es el levantamiento horizontal de $[X', Y']$,
- iii) $\mathcal{H}(\nabla_X Y)$ es el levantamiento horizontal de $\nabla'_{X'} Y'$,
- iv) Para cualquier campo vectorial vertical V , $[X, V]$ es vertical.

donde recordamos que la descomposición natural de los campos en su parte vertical y horizontal viene dada por $X = \mathcal{H}(X) + \mathcal{V}(X)$.

Demostración. Abordamos cada apartado por separado:

- i) Consecuencia directa de la Definición 4.1.1, ya que al actuar la aplicación tangente isométricamente sobre los vectores horizontales

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) = g'_{\pi(p)}((\pi_*)_p(X_p), (\pi_*)_p(Y_p)) = g'_{\pi(p)}(X'_{\pi(p)}, Y'_{\pi(p)}) = g'(X', Y')(\pi(p)).$$

- ii) Una comprobación sencilla pero larga nos muestra que $(\pi_*)_p([X, Y]_p) = [X', Y']_{\pi(p)}$, luego $[X, Y]$ está relacionado mediante π con $[X', Y']$ y por la biyección entre campos de B y campos básicos basta quedarnos con su proyección horizontal.
- iii) Recordamos que la conexión de Levi-Civita y la métrica de la que proviene se pueden relacionar mediante la fórmula de Koszul:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Tomando como X, Y, Z los levantamientos horizontales de campos $X', Y', Z' \in \mathfrak{X}(B)$, aplicando *i)* se tiene que $X(g(Y, Z)) = X(g'(Y', Z') \circ \pi) = X'(g'(Y', Z')) \circ \pi$. De manera similar se puede comprobar que $g([X, Y], Z) = g'([X', Y'], Z') \circ \pi$. Sustituyendo los 6 términos del lado derecho de la fórmula de Koszul por sus análogos primados, se llega a que $2g(\nabla_X Y, Z) = 2g'(\nabla_{X'} Y', Z') \circ \pi$. Como π es sobreyectiva y la expresión es válida para cualquier par Z, Z' se tiene que $\nabla_X Y$ está relacionado mediante π con $\nabla_{X'} Y'$. De nuevo, basta quedarnos con la proyección horizontal y $\mathcal{H}(\nabla_X Y)$ es el campo básico asociado a $\nabla_{X'} Y'$.

- iv) Se sigue de que $[X, V]$ está relacionado mediante π con $[X', 0] = 0$ y de la definición de distribución vertical. □

Una vez introducidos los conceptos básicos relativos a la teoría de O'Neill, estamos listos para estudiar los campos tensoriales fundamentales asociados a cada submersión.

4.2 Los Tensores Fundamentales de Una Submersión

Definición 4.2.1 (Tensores Fundamentales). *Se definen los tensores fundamentales o invariantes $T, A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ de la submersión como:*

$$T(X, Y) = T_X Y = \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{V}(Y)) + \mathcal{V}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{H}(Y)), \\ A(X, Y) = A_X Y = \mathcal{V}(\nabla_{\mathcal{H}(X)} \mathcal{H}(Y)) + \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{H}(X)} \mathcal{V}(Y)),$$

donde X, Y son campos vectoriales cualesquiera.

Es trivial comprobar que efectivamente T y A son campos tensoriales de tipo $(1, 2)$. La única comprobación que merece algo de atención es que, dado $f \in \mathfrak{F}(M)$, se tiene que

$$T(X, fY) = \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{V}(fY)) + \mathcal{V}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{H}(fY)) = \mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} f \mathcal{V}(Y)) + \mathcal{V}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} f \mathcal{H}(Y)), \\ = f(\mathcal{H}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{V}(Y)) + \mathcal{V}(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{H}(Y))) + \mathcal{V}(X)(f) \cdot (\mathcal{H}(\mathcal{V}(Y)) + \mathcal{V}(\mathcal{H}(Y))) = f \cdot T(X, Y),$$

puesto que $\mathcal{H}(\mathcal{V}(Y)) = \mathcal{V}(\mathcal{H}(Y)) = 0$. Idem para A .

Ejemplo 4.2.2. *Estudiemos los tensores fundamentales de la submersión trivial $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n)$ y considerando las métricas euclideas. Si tomamos la carta global $x = id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ podemos dar coordenadas locales a los tensores:*

$$T(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = T_{ij}^k \partial/\partial x^k, \quad A(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = A_{ij}^k \partial/\partial x^k.$$

En este caso $\{\partial/\partial x^i\}_{i \leq n}$ es una base para los campos horizontales y $\{\partial/\partial x^j\}_{n < j \leq m}$ para los campos verticales. Hacemos los cálculos para el tensor T , siendo los relativos al tensor A parecidos.

$$T(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = \begin{cases} 0, & i \leq n \\ \mathcal{V}(\nabla_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial x^j) = \Gamma_{ij}^k \cdot \mathcal{V}(\partial/\partial x^k), & i > n, j \leq n \\ \mathcal{H}(\nabla_{\partial/\partial x^i} \partial/\partial x^j) = \Gamma_{ij}^k \cdot \mathcal{H}(\partial/\partial x^k), & i > n, j > n \end{cases}$$

Siendo las métricas euclideas constantes, todos los símbolos de Christoffel asociados son nulos y por tanto $T \equiv 0$. Similarmente se llega a que $A \equiv 0$. Una vez llegados al final del capítulo resultará obvia la nulidad de los tensores T y A en este caso, pudiéndonos ahorrar los cálculos intermedios. No obstante, este ejemplo nos reafirma que el carácter de una submersión riemanniana no está solamente determinada por la submersión en sí, si no que las métricas asociadas también juegan un papel importante. Una submersión tan simple como la que se presenta pudiera en teoría tener tensores fundamentales no-nulos.

Observación 4.2.3. Cabe destacar que cada uno de los tensores es, en cierto modo, el “dual” del otro, ya que basta cambiar las proyecciones horizontales por las verticales y viceversa en las definiciones de uno para obtener el otro. Este hecho se traducirá en ciertas simetrías en algunos de los resultados que se exponen a lo largo del resto del capítulo.

A continuación se presentan unas primeras propiedades de los tensores fundamentales que nos serán de gran utilidad.

Proposición 4.2.4. Los tensores fundamentales T y A de una submersión riemanniana cumplen las siguientes propiedades:

i) T es un tensor vertical y A es un tensor horizontal, en el sentido siguiente:

$$T_X Y = T_{\mathcal{V}(X)} Y, \quad A_X Y = A_{\mathcal{H}(X)} Y \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

ii) Para cualesquiera campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que:

$$g(T_X Y, Z) + g(T_X Z, Y) = 0, \quad g(A_X Y, Z) + g(A_X Z, Y) = 0.$$

iii) En cada punto $p \in M$ y para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$, T_{X_p} y A_{X_p} son operadores antisimétricos en $T_p M$ que intercambian subespacios horizontales y verticales.

iv) El tensor T es simétrico para campos verticales: $T(X, Y) = T(Y, X)$, $X, Y \in \mathfrak{X}^v(M)$.

v) El tensor A es antisimétrico para campos horizontales: $A(X, Y) = -A(Y, X)$, $X, Y \in \mathfrak{X}^h(M)$. Se tiene además que $A(X, Y) = \frac{1}{2} \mathcal{V}([X, Y])$.

Demostración.

i) Trivial a partir de la definición, pues \mathcal{H} y \mathcal{V} son operadores de proyección.

ii) Comprobamos la expresión relativa al tensor T , siendo la demostración para el tensor A totalmente análoga. La comprobación es algo larga y tediosa pero de argumentos sencillos:

$$\begin{aligned}
g(T_X Y, Z) + g(T_X Z, Y) &= g(T_X \mathcal{H}(Y), \mathcal{V}(Z)) + g(T_X \mathcal{V}(Y), \mathcal{H}(Z)) \\
&\quad + g(T_X \mathcal{H}(Z), \mathcal{V}(Y)) + g(T_X \mathcal{V}(Z), \mathcal{H}(Y)) \\
&= g(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{H}(Y), \mathcal{V}(Z)) + g(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{V}(Y), \mathcal{H}(Z)) \\
&\quad + g(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{H}(Z), \mathcal{V}(Y)) + g(\nabla_{\mathcal{V}(X)} \mathcal{V}(Z), \mathcal{H}(Y)) \\
&= \mathcal{V}(X)(g(\mathcal{H}(Z), \mathcal{V}(Y))) + \mathcal{V}(X)(g(\mathcal{H}(Y), \mathcal{V}(Z))) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La primera igualdad se da por la ortogonalidad de campos verticales y horizontales y por el hecho de que T revierte campos horizontales y verticales. La segunda igualdad está justificada por la definición de los tensores fundamentales y de nuevo por la ortogonalidad de lo vertical respecto a lo horizontal. En la tercera igualdad se hace uso del hecho de que la conexión de Levi-Civita es una conexión métrica. Finalmente, la última igualdad se deduce de nuevo por la ortogonalidad de lo vertical y horizontal.

- iii) La antisimetría es consecuencia del apartado ii), ya que fijado un punto p y tomando una carta x cuyo dominio lo contenga,

$$(T_{X_p})_j^i = g(T_{X_p}(\partial x^j), \partial x^i) = -g(T_{X_p}(\partial x^i), \partial x^j) = -(T_{X_p})_i^j,$$

mientras que el revertir lo horizontal y vertical se sigue de la definición de los tensores:

$$T_X \mathcal{H}(Y), A_X \mathcal{H}(Y) \in \mathfrak{X}^v(M), \quad T_X \mathcal{V}(Y), A_X \mathcal{V}(Y) \in \mathfrak{X}^h(M), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

- iv) Basta ver que para cualquier par de campos verticales X, Y se tiene que

$$T_X Y - T_Y X = \mathcal{H}(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \mathcal{H}([X, Y]) = 0,$$

por un lado, por ser la conexión de Levi-Civita de torsión nula y por otro, por ser las distribuciones verticales integrables y por tanto $[X, Y] \in \mathfrak{X}^v(M)$, por el Teorema de Frobenius.

- v) Este resultado de antisimetría es equivalente a probar que $A_X X = 0$, $X \in \mathfrak{X}^h(M)$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que X es además un campo básico. Siguiendo la definición, $A_X X = \mathcal{V}(\nabla_X X)$, luego bastará ver que $\nabla_X X$ es de hecho un campo horizontal. Dado un campo vertical W cualquiera, por la fórmula de Koszul

$$2g(\nabla_X X, W) = 2X(g(X, W)) - W(g(X, X)) - 2g([X, W], X) = -W(g(X, X)),$$

donde el primer y tercer termino se anulan por ser X horizontal y por el apartado iv) de Lema 4.1.7. Como $g(X, X)$ es constante a lo largo de las fibras (por i) de Lema 4.1.7), éste se anula al evaluarse en campos verticales, luego $g(\nabla_X X, W) = 0$ y $\nabla_X X$ es efectivamente horizontal. Finalmente,

$$\mathcal{V}([X, Y]) = \mathcal{V}(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = A_X Y - A_Y X = 2A_X Y.$$

□

Observación 4.2.5. *En primera instancia pudiera parecer que la definición de los tensores fundamentales es algo arbitraria, pero la anterior proposición sirve para darles un cierto sentido geométrico. Por el apartado v), teniendo en cuenta además que $A_X \equiv 0$ para cualquier campo vertical X , el tensor A mide la “integrabilidad” de la distribución horizontal. De hecho, se puede demostrar que el tensor A es nulo si y solo si la distribución horizontal \mathcal{H} es integrable, y es por ello que en ocasiones se conoce como el tensor de integrabilidad de π . En cuanto al tensor T , se puede demostrar que restringido a los campos verticales actúa como la segunda forma fundamental de las fibras. En particular, cuando T es el tensor nulo las fibras de π son subvariedades totalmente geodésicas de la variedad M (Ver por ejemplo [KN69, Cap.7]). Este hecho se aprecia muy bien en la primera y última ecuación del Teorema 4.3.1.*

El introducir los tensores fundamentales T y A de una submersión nos permite identificar algunas de las componentes de las derivadas covariantes de campos horizontales y verticales, como muestra el siguiente

Lema 4.2.6. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^h(M)$ campos horizontales y $V, W \in \mathfrak{X}^v(M)$ campos verticales. Entonces:*

1. $\nabla_V W = T_V W + \mathcal{V}(\nabla_V W)$.
2. $\nabla_V X = \mathcal{H}(\nabla_V X) + T_V X$.
3. $\nabla_X V = A_X V + \mathcal{V}(\nabla_X V)$.
4. $\nabla_X Y = \mathcal{H}(\nabla_X Y) + A_X Y$.

Además, si X es básico $\mathcal{H}(\nabla_V X) = A_X V$ y por tanto $\nabla_V X = A_X V + T_V X$.

Demostración. Inmediato a partir de la definición de los tensores fundamentales. La última afirmación se deduce del punto iv) del Lema 4.1.7. \square

4.2.1 Derivadas Covariantes de los Tensores Fundamentales

El último paso que debemos dar antes de llegar a las ecuaciones fundamentales es estudiar como se comportan los tensores fundamentales de una submersión respecto a la derivada covariante, ya que estas aparecen en las ecuaciones de O’Neill. Resulta que T y A tienen la conveniente propiedad de que, bajo ciertas condiciones, sus derivadas covariantes no dependen de términos de curvatura ni de derivadas covariantes de otros campos, tal y como recoge el siguiente

Lema 4.2.7. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^h(M)$ y $V, W \in \mathfrak{X}^v(M)$. Entonces:*

$$(\nabla_V A)_W = -A_{T_V W}, \quad (\nabla_X A)_W = -A_{A_X W}, \quad (\nabla_X T)_Y = -T_{A_X Y}, \quad (\nabla_V T)_Y = -T_{T_V Y}.$$

Demostración. Probamos la primera de las igualdades en detalle y se dejan el resto para el lector, por ser básicamente análogas a la demostración de la primera. Sea $Z \in \mathfrak{X}(M)$ un campo cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} (\nabla_V A)_W Z &= \nabla_V(A_W Z) - A_{\nabla_V W} Z - A_W(\nabla_V Z) \\ &= -A_{\nabla_V W} Z = -A_{T_V W} Z, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se da por la definición de la derivada covariante de un campo tensorial, la segunda porque A es horizontal y W es vertical, y la tercera porque $\nabla_V W$ se puede sustituir por $\mathcal{H}(\nabla_V W) = T_V W$. Como la anterior expresión es válida para cualquier campo Z , queda demostrada la primera igualdad. \square

En esta última demostración hemos seguido el convenio habitual a la hora de definir la derivada covariante de un campo tensorial de tipo arbitrario. Dado $S \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ y una conexión lineal ∇ cualquiera, la derivada covariante de S es un tensor $\nabla S \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ con un índice covariante más, definido por

$$(\nabla S)(X, Y, Z) = (\nabla_X S)_Y Z = \nabla_X(S(Y, Z)) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

4.3 Ecuaciones Fundamentales de Una Submersión

Tal y como se ha mencionado al comienzo del capítulo, las ecuaciones fundamentales de una submersión son las versiones análogas de las de Gauss y Codazzi-Mainardi para inmersiones, que generalizan para variedades los resultados clásicos de la teoría de superficies en \mathbb{R}^3 . Estas se pueden encontrar en el Apéndice A.

Antes de continuar, recordamos que dada una conexión ∇ en M , el tensor de curvatura $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ asociado se define como

$$R(X, Y, Z) = \nabla_{[X, Y]} Z - [\nabla_X, \nabla_Y] Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

donde hemos seguido el convenio de signo igual que en [ONE66]. Es común trabajar con la versión de tipo (0,4) obtenida bajando un índice al tensor anterior

$$\bar{R}(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y, Z), U), \quad X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M).$$

En lo que sigue se reservarán las letras \bar{R} , R^* y \hat{R} para designar las curvaturas (de tipo (0,4)) asociadas a M , B y a las fibras de π , respectivamente.

Las ecuaciones fundamentales de una submersión surgen de evaluar esta última expresión de la curvatura para un número distinto de campos horizontales, manteniendo el resto verticales. Es por ello que surgen un total de 5 ecuaciones – empezando por 4 campos verticales, hasta terminar con 4 campos horizontales – que toman una forma más o menos compacta si se hace uso de los resultados que se han ido mostrando a lo largo del capítulo. El orden en el que aparecen los campos horizontales y verticales en la expresión de la curvatura no es relevante, pues basta aprovechar las simetrías del tensor de curvatura para hallar cualquier combinación que se desee. Mostramos las ecuaciones en el siguiente

Teorema 4.3.1 (Ecuaciones Fundamentales de Una Submersión). *Sean X, Y, Z, H campos horizontales y U, V, W, F campos verticales de M . Entonces, siguiendo la notación precedente:*

$$\bar{R}(U, V, W, F) = \hat{R}(U, V, W, F) - g(T_U W, T_V F) + g(T_V W, T_U F), \quad (4.1)$$

$$\bar{R}(U, V, W, X) = g((\nabla_V T)_U W, X) - g((\nabla_U T)_V W, X), \quad (4.2)$$

$$\bar{R}(X, U, Y, V) = g((\nabla_X T)_U V, Y) + g((\nabla_U A)_X Y, V) + g(A_X U, A_Y V) - g(T_U X, T_V Y), \quad (4.3)$$

$$\bar{R}(X, Y, Z, U) = g((\nabla_Z A)_X Y, U) + g(A_X Y, T_U Z) - g(A_Y Z, T_U X) - g(A_Z X, T_U Y), \quad (4.4)$$

$$\bar{R}(X, Y, Z, H) = R^*(X, Y, Z, H) - 2g(A_X Y, A_Z H) + g(A_Y Z, A_X H) + g(A_Z X, A_Y H). \quad (4.5)$$

Idea de Demostración. Siendo la mayoría largas comprobaciones mecánicas que no aportan demasiada intuición, aquí enunciamos las líneas de razonamiento principales y los resultados previos a utilizar, dejando el desarrollo de los cálculos para el lector.

En primer lugar, como las fibras están inmersas en la variedad ambiente podemos aplicar los resultados relativos a inmersiones que se presentan en el Apéndice A. Así, la ecuación (4.1) es directamente la ecuación de Gauss aplicado a las fibras y (4.2) es la ecuación de Codazzi aplicado a las fibras también, ya que los campos horizontales actúan como la parte "normal" visto desde las fibras.

Para las ecuaciones (4.4) y (4.5) asumimos que los campos X, Y, Z son básicos y que los corchetes de Lie de dichos campos son verticales; dicha elección específica está justificado por ser las ecuaciones fundamentales ecuaciones tensoriales. En virtud del Lema 4.1.7 la ecuación que define el tensor de curvatura R^* (de tipo (1,3)) se puede *levantar* a M de manera que adquiere una forma bastante sencilla:

$$R^*(X, Y, Z) = \nabla_{\mathcal{H}([X, Y])}^* Z - [\nabla_X^*, \nabla_Y^*]Z = -[\nabla_X^*, \nabla_Y^*]Z.$$

Haciendo repetido uso del lema 4.2.6 se llega a expresiones manejables de $[\nabla_X, \nabla_Y]Z$, y junto con el hecho de que $[X, Y] = 2A_X Y$ por el apartado *iv*) de la Proposición 4.2.4, se obtienen expresiones razonables para $\mathcal{V}(R(X, Y, Z))$ y $\mathcal{H}(R(X, Y, Z))$. Haciendo el producto escalar de $\mathcal{H}(R(X, Y, Z))$ con el campo horizontal H se obtiene (4.5), mientras que $g(R(X, Y, Z), V)$ resulta en la ecuación (4.4) tras un desarrollo algebraico donde se hace uso del Lema 4.2.7. Para llegar a la ecuación (4.3) se utilizan el mismo tipo de argumentos. \square

Puesto que las ecuaciones fundamentales involucran al tensor de curvatura, se puede particularizar el teorema anterior para curvaturas seccionales, las cuales dan una mejor idea del concepto intuitivo que tenemos de curvatura. Recordamos que para un par de vectores X_p, Y_p la curvatura seccional se define como

$$K_{\langle X_p, Y_p \rangle} = \frac{\overline{R}(X, Y, X, Y)_p}{\|X_p \wedge Y_p\|^2}.$$

donde $\|X_p \wedge Y_p\|^2$ denota el área del paralelogramo formado por los vectores X_p, Y_p . Un desarrollo más extenso acerca de la curvatura seccional se puede encontrar en [SPI70, Cap. 4-D].

Corolario 4.3.2 (Relación entre curvaturas seccionales). Sean K, K^* y \hat{K} las curvaturas seccionales de M, B y las fibras de π , respectivamente. Sea $p \in M$ y sean $x, y \in H_p$, $v, w \in V_p$ vectores ortonormales. Entonces

1. $K_{\langle v, w \rangle} = \hat{K}_{\langle v, w \rangle} - g(T_v v, T_w w) + \|T_v w\|^2,$
2. $K_{\langle x, y \rangle} = K_{\langle x_*, y_* \rangle}^* - 3\|A_x y\|^2,$
3. $K_{\langle x, v \rangle} = g((\nabla_x T)_v v, x) + \|A_x v\|^2 - \|T_v x\|^2,$

donde $\langle x, y \rangle$ denota el subespacio del espacio tangente generado por dichos vectores y $x_* = (\pi_*)_p(x)$.

Una consecuencia inmediata del primer punto de este corolario es que las fibras serán subvariedades totalmente geodésicas si y solo si $T \equiv 0$, lo cual no es de extrañar, pues como ya hemos comentado anteriormente el tensor T restringido a los campos verticales es justamente la segunda forma fundamental asociada a la inmersión de las fibras en la variedad ambiente. Asimismo, el segundo punto muestra como las submersiones no disminuyen la curvatura asociada a los planos horizontales.

$$K_{\langle x_*, y_* \rangle}^* - K_{\langle x, y \rangle} = 3\|A_x y\|^2 \geq 0.$$

4.4 Teorema de O’Neill

El resultado que corona el artículo [ONE66] de O’Neill es el Teorema 4.4.1. En él se dan las condiciones bajo las cuales una submersión riemanniana queda caracterizada (como siempre en geometría diferencial, salvo isometría). Además, termina de confirmar que los invariantes A y T son los objetos clave a definir a la hora de estudiar este tipo de aplicaciones.

Teorema 4.4.1. *Sean $\pi, \bar{\pi} : M \rightarrow B$ dos submersiones riemannianas de una variedad conexa M en B . Si π y $\bar{\pi}$ tienen los mismos tensores fundamentales T y A y sus aplicaciones tangentes coinciden en algún punto p de M , entonces $\pi = \bar{\pi}$ salvo isometría.*

Idea de Demostración. La demostración completa del teorema se puede encontrar en [ONE66] o [FIP04]. La estrategia a seguir es trasladar el problema a estudiar el conjunto de puntos

$$D = \{p \in M : (\pi_*)_p = (\bar{\pi}_*)_p\}.$$

Así, si $p \in D$ también se tiene $\pi(p) = \bar{\pi}(p)$ y los subespacios verticales y horizontales inducidos por ambas submersiones coinciden. D es un conjunto no vacío (por hipótesis) y cerrado (la asignación $p \mapsto (\pi_*)_p$ es continua y las variedades involucradas son Hausdorff) y al ser M conexo, basta ver que todo punto $p \in D$ admite un entorno U en el que π y $\bar{\pi}$ coinciden.

El argumento continúa estudiando un conjunto de geodésicas definidas en las fibras (donde el tensor T juega un papel importante) y campos básicos definidos en el entorno F compuesto por las imágenes de dichas geodésicas (que según el Lema 4.2.6 quedan caracterizados por A y T). La prueba termina con la construcción de ese entorno U mediante la aplicación exponencial definida sobre F^\perp , haciendo uso de los campos básicos antes construídos y otros detalles que aquí omitimos. \square

El estudio de las submersiones riemannianas y los conceptos que las rodean no termina aquí. Desde que Barret O’Neill presentase los resultados principales relativos a las submersiones riemannianas en el año 1966 ha habido algunos avances en el campo. Por ejemplo, poco después de la publicación de O’Neill, en [ESC73] el matemático R. Escobales da una clasificación de todas las submersiones riemannianas $\pi : S^n \rightarrow B$ con fibras totalmente geodésicas, resultando únicamente en 5 posibilidades.

El siguiente paso importante llega con la noción de aplicaciones riemannianas, que generalizan de manera natural tanto las submersiones riemannianas como las inmersiones isométricas. En el Apéndice B les dedicamos parte de nuestra atención, dando una definición general de las mismas y destacando brevemente algunas de las propiedades básicas asociadas.

Apéndice A: Algunos Resultados relativos a las Inmersiones

En este apéndice se presenta un resumen con los conceptos más relevantes asociados a las inmersiones. Partiendo de la definición, se enuncian algunas propiedades análogas a las expuestas en el Capítulo 1 para submersiones; varias de ellas se emplean en algunos argumentos o razonamientos de la memoria. También se hace hincapié en las inmersiones isométricas o riemannianas, para las cuales se generalizan resultados clásicos como las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi.

Un tratamiento más extenso de las inmersiones y las demostraciones de los resultados aquí mencionados se pueden encontrar en [SN17, Cap. 3] y [KN69, pp. 10-26].

- Una inmersión es una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ entre variedades de manera que la aplicación tangente $(f_*)_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ es inyectiva en todo punto $p \in M$. Consecuencia inmediata de la definición es que $\dim(M) \leq \dim(N)$.
- Nótese que la definición anterior no exige que la aplicación f sea inyectiva. En los casos en los que sí lo sea se dice que la aplicación f es un *embedding*.
- Se dice que M es una *subvariedad* de N si $M \subseteq N$ y la inclusión $i : M \rightarrow N$ es una inmersión. Si la topología de M coincide con la topología de subespacio heredada por N se dice que M es una *subvariedad regular*. Finalmente, llamamos *embedding regular* a una inmersión inyectiva $f : M \rightarrow N$ de manera que $f(M)$ es una subvariedad regular de N .
- Teorema de Inmersión de Whitney (1936): Toda variedad M que sea Hausdorff y que cumpla el II. Axioma de Numerabilidad admite un embedding regular en \mathbb{R}^{2n+1} , donde $n = \dim(M)$.
- Por el teorema del rango constante, la forma local de una inmersión $f : M \rightarrow N$ viene dada por una inclusión entre espacios euclídeos, es decir, para cada punto $p \in M$ se pueden encontrar cartas x, y de manera que $y \circ f \circ x^{-1}$ viene dada por $z \mapsto (z, 0)$.
- Dada una inmersión $f : M \rightarrow N$ los campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ se pueden identificar con $(f_*)X \in \mathfrak{X}(N)$. Cuando no hay riesgo de confusión es habitual utilizar la misma letra X para denotar a cualesquiera de los dos campos.
- Consideramos una inmersión $f : (M, g) \rightarrow (N, g')$, donde g, g' son métricas riemannianas y ∇, ∇' sus conexiones de Levi-Civita. Como haremos un tratamiento local podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que M está contenido en N . Los espacios tangentes en N admiten por tanto una descomposición natural

$$T_pN = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

donde la segunda parte se conoce como la parte *normal* a la variedad M . Se dice que f es una inmersión riemanniana o isométrica si la métrica g de M es en cierto sentido la restricción de la métrica g' de N :

$$g(X, Y)_p = g'(f_*X, f_*Y)_{f(p)}, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

- Dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada covariante en N de un campo a lo largo del otro en un punto $p \in M$ se puede descomponer en una parte tangencial y otra parte normal:

$$(\nabla'_X Y)_p = \overbrace{(\nabla_X Y)_p}^{\text{Tangencial}} + \underbrace{\alpha(X, Y)_p}_{\text{Normal}}.$$

En primera instancia la notación $(\nabla_X Y)_p$ se emplea simplemente para denotar la parte tangencial de $(\nabla'_X Y)_p$, pero resulta que se puede demostrar que dicha parte tangencial es justamente la derivada covariante de los campos en M ([KN69, Prop. 3.1.]). Esta es la que se conoce como *fórmula de Gauss*.

- De manera similar, tomando esta vez $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, podemos escribir

$$(\nabla'_X Z)_p = \overbrace{-(A_Z(X))_p}^{\text{Tangencial}} + \underbrace{(D_X Z)_p}_{\text{Normal}}.$$

De nuevo a priori se utiliza la nomenclatura A y D para denotar las partes tangencial y normal de la derivada covariante, pero como se muestra en [KN69, pp. 13-15] dichas expresiones tienen buenas propiedades y un significado geométrico concreto (D se conoce como conexión normal). Esta segunda ecuación es la que se conoce como *fórmula de Weingarten*.

- La parte normal $\alpha(X, Y)_p$ de la fórmula de Gauss es la que se conoce como *segunda forma fundamental* y es un campo tensorial de tipo $(2,1)$, ya que es la diferencia de dos conexiones. En el estudio clásico de las superficies en \mathbb{R}^3 la parte normal es unidimensional y se puede tomar un campo global de manera natural, a saber, el formado por los vectores normales (para superficies orientables). Por ello es común en la literatura tratar la segunda forma fundamental para el caso de superficies simplemente como una función diferenciable $h : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$.
- La segunda forma fundamental, en su forma general $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$, es simétrica y bilineal sobre $\mathfrak{F}(M)$.
- En la teoría clásica de superficies las ecuaciones de Gauss y Codazzi-Mainardi son 2 ecuaciones que describen la curvatura de una superficie. Resumidamente, la ecuación de Gauss relaciona la curvatura de Gauss de una superficie con las derivadas de la métrica, mientras que la de Codazzi-Mainardi proporciona una expresión para la derivada de la segunda forma fundamental.
- En el caso general de inmersiones, dichas ecuaciones se generalizan para los tensores de curvatura y derivadas covariantes. La ecuación generalizada de Gauss relaciona la parte tangencial del tensor de curvatura R' de N con el tensor de curvatura R de M , mientras que la generalizada de Codazzi-Mainardi describe la parte normal del tensor de curvatura R' de N .

Ecuación de Gauss: Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$

$$R'(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) + g(\alpha(Y, Z), \alpha(X, W)) - g(\alpha(Y, W), \alpha(X, Z)).$$

Ecuación de Codazzi-Mainardi:

$$\perp (R'(X, Y, Z)) = (\tilde{\nabla}_X \alpha)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \alpha)(X, Z),$$

donde $\tilde{\nabla}$ es una conexión híbrida entre ∇ y D , que se define como

$$(\tilde{\nabla}_X \alpha)(Y, Z) = D_X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Como se puede apreciar en las 2 ecuaciones anteriores, el objeto clave para determinar completamente las propiedades de la curvatura de una inmersión es la segunda forma fundamental α .

Apéndice B: Aplicaciones Riemannianas

Las aplicaciones riemannianas son una generalización de los conceptos ya vistos de submersión riemanniana e inmersión isométrica. Los introduce por primera vez Arthur E. Fischer en 1992 en [FIS92]

Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable de rango constante. Sea $q \in \text{Im}(f)$ y $p \in f^{-1}(q)$. La aplicación tangente de f induce la siguiente descomposición en los espacios tangentes de M y N :

$$\begin{aligned} T_p M &= \ker(f_*)_p \oplus (\ker(f_*)_p)^{\perp_M}, \\ T_q N &= \text{rank}(f_*)_p \oplus (\text{rank}(f_*)_p)^{\perp_N}. \end{aligned}$$

Una aplicación riemanniana $f : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ es una función \mathcal{C}^∞ de rango constante que respeta las métricas, en el siguiente sentido:

$$g_M(X, Y)_p = g_N(f_*(X), f_*(Y))_q, \quad X, Y \in (\ker(f_*)_p)^{\perp_M},$$

es decir, $(f_*)_p$ es una isometría entre $(\ker(f_*)_p)^{\perp_M}$ y $\text{rank}(f_*)_p$. Así, si f es una aplicación riemanniana cuya aplicación tangente es siempre inyectiva (i.e. f es una inmersión) se tiene que $\ker(f_*)_p = \{0\}$, luego $(\ker(f_*)_p)^{\perp_M} = T_p M$, y así:

$$g_M(X, Y)_p = g_N(f_*(X), f_*(Y))_q, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

que es la condición que caracteriza las inmersiones isométricas. Por otro lado, si f es una aplicación riemanniana cuya aplicación tangente es siempre sobreyectiva (i.e. f es una submersión) se tiene que $\ker(f_*)_p = V_p$, luego $(\ker(f_*)_p)^{\perp_M} = H_p$, por lo que

$$g_M(X, Y)_p = g_N(f_*(X), f_*(Y))_q, \quad X, Y \in \mathfrak{X}^h(M),$$

que, de nuevo, es la condición que caracteriza las submersiones riemannianas: los espacios horizontales son isométricos a $T_q N$ (el rango de f_* es máximo en este caso).

De la misma manera que después de introducir las inmersiones isométricas y las submersiones riemannianas la tendencia natural es hallar ecuaciones que relacionan las curvaturas de las variedades entre las cuales se establece la aplicación (Gauss, Codazzi-Mainardi y ecuaciones de O'Neill), en [GK98] se presentan y estudian ecuaciones análogas para las aplicaciones riemannianas.

Bibliografía

- [BC70] F. BRICKELL and R.S. CLARK. *Differentiable Manifolds: An Introduction*. The New University Mathematics Series. Van Nostrand Reinhold, 1970.
- [CN85] C. CAMACHO and A.L. NETO. *Geometric Theory of Foliations*. Birkhäuser, 1985.
- [ESC73] R. ESCOBALES. “Submersions from spheres”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* **79** (1973).
- [FIP04] M. FALCITELLI, S. IANUS, and A. M. PASTORE. *Riemannian Submersions and Related Topics*. World Scientific, 2004.
- [FIS92] A.E. FISCHER. “Riemannian maps between Riemannian manifolds”. In: *Contemporary Mathematics* **132** (1992), pp. 331–366.
- [GK98] E. GARCIA-RIO and D. KUPELI. “On affine Riemannian Maps”. In: *Archiv der Mathematik* **71** (1998), pp. 71–79.
- [KN69] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU. *Foundations of Differential Geometry. Vol II*. eng. Interscience tracts in pure and applied mathematics 15. New York: Interscience Publ, 1969.
- [LEE12] J. M. LEE. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-New York, 2012.
- [MAS67] W.S. MASSEY. *Algebraic Topology: An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1967.
- [MIL63] J. MILNOR. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [MIL88] J.W. MILNOR. *Topology from the differentiable viewpoint*. 2nd print. (with corrections and additions). Vol. 47. Charlottesville: University Press of Virginia, 1988.
- [MOS05] G.D. MOSTOW. “A Structure Theorem for Homogeneous Spaces”. In: *Geometriae Dedicata* **114** (2005), pp. 87–102.
- [ONE66] B. O’NEILL. “The Fundamental Equations of a Submersion”. In: *Michigan Mathematical Journal* **13.4** (1966), pp. 459–469.
- [POO81] W.A. POOR. *Differential Geometric Structures*. Dover Publications, Inc., 1981.
- [SN17] J. SÁENZ and Y. NOGIER. *Variedades Diferenciables*. Hipotenusa, 2017.
- [SPI70] M. SPIVAK. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol II*. Publish or Perish Press, 1970.
- [WAR83] F. W. WARNER. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1983.