



**Facultad
de
Ciencias**

**GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS:
GEOMETRÍA ABSOLUTA Y GEOMETRÍA
HIPERBÓLICA EN EL PLANO**

**Non-euclidean geometries: absolute geometry and
hyperbolic geometry in the plane**

**Trabajo de Fin de Grado
para acceder al**

GRADO EN MATEMÁTICAS

**Autor: Álvaro García Gómez
Director: Mario Fioravanti Villanueva**

Abril 2022

Resumen

El descubrimiento de la geometría hiperbólica supuso la apertura de un nuevo horizonte donde por un punto exterior a una recta pasaban infinitas rectas paralelas y la suma de los ángulos interiores de un triángulo era menor que π . En este trabajo haremos un estudio de las principales propiedades de esta geometría y, para ello, utilizaremos el método axiomático. Es decir, partiremos de una serie de axiomas y usando reglas de deducción obtendremos una cadena de teoremas y proposiciones que serán consecuencia de dichos axiomas.

Además, se analizará la evolución que sufrió la geometría hasta llegar al descubrimiento de la geometría hiperbólica. Por ello, se hará un breve repaso del trabajo llevado a cabo por Euclides para desarrollar la geometría euclidiana así como del proceso de desarrollo del sistema axiomático hasta llegar a los axiomas de Hilbert.

Posteriormente, se estudiará la geometría absoluta, que es un tipo de geometría no euclidiana surgida al eliminar el postulado de las paralelas de Euclides. Se trata, por tanto, de un sistema axiomático incompleto en el que, todos los teoremas que estudiemos, serán validos tanto en geometría euclidiana como hiperbólica.

Por último, analizaremos las principales características de la geometría hiperbólica e introduciremos los modelos de Beltrami-Klein y de Poincaré, que nos permitirán establecer una correlación entre las geometrías hiperbólica y euclidiana. Además, estudiaremos que razones trigonométricas se cumplen en esta geometría.

Palabras clave: *Postulados de Euclides - axiomas de Hilbert - geometría euclidiana - geometría absoluta - geometría hiperbólica - modelos hiperbólicos.*

Abstract

The discovery of hyperbolic geometry led to the opening of a new horizon where an infinite number of parallel lines passed through a point outside a line and the sum of the interior angles of a triangle was less than π . In this work we will make a study of the main properties of this geometry and, for this, we will use the axiomatic method. That is, we will start from a series of axioms and using deduction rules we will obtain a chain of theorems and propositions that will be a consequence of said axioms.

In addition, the evolution that geometry underwent until reaching the discovery of hyperbolic geometry will be analyzed. For this reason, a brief review will be made of the work carried out by Euclid to develop Euclidean geometry as well as the process of developing the axiomatic system until reaching Hilbert's axioms.

Subsequently, absolute geometry will be studied, which is a type of non-Euclidean geometry that arose by eliminating Euclid's parallel postulate. It is, therefore, an incomplete axiomatic system in which all the theorems we study will be valid in both Euclidean and hyperbolic geometry.

Finally, we will analyze the main characteristics of hyperbolic geometry and we will introduce the Beltrami-Klein and Poincaré models, which will allow us to establish a connection between hyperbolic and Euclidean geometries. In addition, we will study what trigonometric ratios are fulfilled in this geometry.

Key words: *Euclid's postulates - Hilbert's axioms - Euclidean geometry - absolute geometry - hyperbolic geometry - hyperbolic models.*

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Geometría Euclidiana | 2 |
| 1.1. El método axiomático | 2 |
| 1.2. Postulados de Euclides | 3 |
| 1.3. Axiomas de Hilbert | 7 |
| 2. Geometría plana absoluta | 12 |
| 2.1. Teorema de los ángulos internos-alternos. | 12 |
| 2.2. Medidas de segmentos y ángulos. | 15 |
| 2.3. Teorema de Saccheri-Legendre | 18 |
| 2.4. Defecto angular de triángulos. | 19 |
| 2.5. Cuadriláteros de Saccheri y de Lambert | 21 |
| 2.6. Equivalencia entre los postulados de las paralelas | 22 |
| 3. Geometría hiperbólica en el plano | 25 |
| 3.1. Paralelas que admiten una perpendicular común | 26 |
| 3.2. Semirrectas paralelas límite | 28 |
| 3.3. Clasificación de paralelas | 29 |
| 3.4. Inversión circular | 32 |
| 3.5. Consistencia de la geometría hiperbólica | 37 |
| 3.5.1. El modelo de Beltrami-Klein | 37 |
| 3.5.2. Modelo de Poincaré | 40 |
| 3.5.3. Isomorfismo entre el modelo de Klein y el modelo de Poincaré | 43 |
| 3.6. Trigonometría hiperbólica | 44 |
| 3.6.1. Ángulo de paralelismo | 45 |
| 3.6.2. Formas alternativas de la fórmula de Bolyai-Lobachevsky | 46 |
| 3.6.3. Identidades para triángulos rectángulos | 47 |
| 3.6.4. Identidades para cualquier triángulo | 48 |
| A. Proposiciones de Euclides | 51 |

Introducción

La geometría es una rama de las matemáticas encargada del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio, como pueden ser puntos, rectas, planos o polítopos¹. Además, junto a la aritmética, es una de las ramas más antiguas de las matemáticas y surgió como solución a problemas prácticos como los que se encuentran en la agrimensura². De ahí su nombre, el cual procede de palabras griegas que significan “medida de la Tierra”. Más adelante, se comprendió que la geometría no necesitaba limitarse al estudio de superficies planas (geometría plana) y objetos tridimensionales rígidos (geometría sólida), sino que incluso los pensamientos e imágenes más abstractos podían representarse y desarrollarse en términos geométricos.

Dentro de la geometría pueden encontrarse, a su vez, diferentes ramas más específicas, como pueden ser la geometría euclidiana, la geometría proyectiva, la geometría diferencial, la geometría analítica, las geometrías no euclidianas o la geometría topológica. Este trabajo está enfocado al estudio de un tipo concreto de geometría no euclidiana como es la geometría del plano hiperbólico.

El desarrollo de las geometrías no euclidianas supuso un momento cumbre en las matemáticas del siglo XIX, que puso fin a un largo periodo de 2000 años durante el que importantes matemáticos realizaron numerosos estudios que, en muchos casos, dieron lugar a resultados confusos y controvertidos. En parte, es debido a que la geometría euclidiana es la geometría asociada al tratamiento del espacio que nos rodea y, el estudio de las geometrías no euclidianas, que cambiaban algunos de los postulados de Euclides, rompía los esquemas de la época. Por tanto, podría decirse que estamos frente a una de las grandes revoluciones del pensamiento humano. Es por ello que en este trabajo se hará un recorrido histórico sobre como fue este proceso para, finalmente, acabar haciendo un estudio más extenso de la geometría hiperbólica.

Esta memoria consta de tres capítulos bien diferenciados. El primero de ellos trata sobre la geometría euclidiana y en él se hace un recorrido histórico sobre como los diferentes trabajos llevados a cabo sobre el postulado de las paralelas de Euclides dieron lugar a numerosos avances que desembocarían en el descubrimiento oficial de la geometría hiperbólica en el siglo XIX. Hasta entonces, se creía que únicamente existía la geometría euclidiana, cuyo origen se remonta al 300 a.C. cuando Euclides escribió “*Los elementos*”, un importante tratado matemático en el que se enuncia un sistema axiomático conocido como postulados de Euclides. En las primeras décadas del siglo XIX, Gauss concluyó que existían otras geometrías alternativas a la euclidiana y, posteriormente, los matemáticos Nikolái Lobachevsky y János Bolyai desarrollaron de forma contemporánea e independiente el primer sistema de geometría no euclidiana, que hoy en día se conoce como geometría hiperbólica. Finalmente, a finales de ese mismo siglo, Eugenio Beltrami y Felix Klein consiguieron demostrar la consistencia de esta geometría mediante la creación de modelos euclidianos de la geometría hiperbólica.

El segundo capítulo está dedicado a la geometría absoluta, que es aquella que se obtiene al suprimir el postulado de las paralelas o cualquier axioma equivalente. Se trata, por tanto, de un sistema axiomático incompleto al que se pueden añadir otros axiomas sin perder la consistencia. En este capítulo se analiza el papel del axioma de las paralelas para ver que teoremas no dependen de él y, para ello, se estudian conceptos como el teorema de los ángulos internos-alternos, el teorema de Saccheri-Legendre, el defecto angular en triángulos o los cuadriláteros de Saccheri y Lambert. Además, todos los resultados que se ven en esta parte son válidos tanto en geometría euclidiana como en geometría hiperbólica.

Por último, en el tercero de los capítulos se hace un estudio de la geometría hiperbólica, que es un modelo que satisface únicamente los cuatro primeros postulados de Euclides y que sustituye el postulado de las paralelas por el axioma hiperbólico. Para ello, se realiza un análisis de sus características principales y se presentan dos modelos del plano hiperbólico en la geometría euclidiana, que son el modelo de Beltrami-Klein y el de Poincaré, para los que se ve además un isomorfismo entre ambos. Entre los resultados que se estudian en esta parte podemos destacar la clasificación de los distintos tipos de paralelas, el estudio de la consistencia de esta geometría o las propiedades de la trigonometría hiperbólica.

Además, hay que mencionar que todos los recursos gráficos que aparecen en el trabajo han sido elaborados por el autor haciendo uso del programa *Geogebra*.

¹En geometría, polítopo significa la generalización a cualquier dimensión de un polígono bidimensional o un poliedro tridimensional.

²La agrimensura era, antiguamente, la rama de la topografía destinada a la delimitación de superficies, a la medición de áreas y a la rectificación de límites.

Capítulo 1

Geometría Euclidiana

1.1. El método axiomático

El método axiomático es un procedimiento utilizado para el desarrollo de teorías científicas basado en el razonamiento deductivo, en el cual, ciertos supuestos primitivos conocidos como axiomas forman la base de la teoría a partir de la cual se pueden obtener otras proposiciones como consecuencia lógica de estos axiomas. Para la elaboración de esta sección se han utilizado como referencia [19], [21] y [22].

Aunque el método axiomático fue ya utilizado por Euclides (325 a.C.-265 a.C.) en su obra “*Los elementos*” [6], publicada alrededor del 300 a.C, se trata de una teoría deductiva que en sus primeros años tuvo un interés limitado, ya que muchos matemáticos lo vieron como un procedimiento de exposición elegante más que un procedimiento verdaderamente productivo.

Ya en el siglo XIX, el matemático ruso Nikolai Ivánovich Lobachevsky (1793-1856), en un intento de demostrar la independencia del V postulado de Euclides, probó que éste no podía ser deducido de los otros postulados. Sin embargo, no consideró que sus resultados fuesen contradictorios con la realidad, sino que concluyó que había construido un sistema lógico cuyos resultados eran consecuencia de las suposiciones aceptadas.

De esta forma se desarrolló una corriente de pensamiento en una nueva dirección, pasando de la percepción de la geometría como una ciencia del espacio habitual a un sistema lógico, cuyos resultados son consecuencia de los axiomas aceptados. En este proceso para comprender la verdadera naturaleza de la geometría y el papel del método axiomático, es necesario mencionar también la importancia de otros matemáticos como el húngaro János Bolyai (1802-1860) o los alemanes Karl Friederich Gauss (1777-1855) y George Fiedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

En el año 1899, el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) presentó su trabajo “*Fundamentos de la geometría*” [12], que supuso la axiomatización definitiva de la geometría elemental. En su obra, Hilbert deja claro que la axiomatización de la geometría se trata de un sistema lógico deductivo y no de una ciencia descriptiva del espacio.

El matemático alemán Edmund Gustav Albrecht Husserl (1859-1938) definió el método axiomático como el proceso consistente en recopilar todos los conceptos básicos así como todos aquellos hechos básicos a partir de los cuales se han de derivar por definición y deducción, respectivamente, todos los conceptos y teoremas de una ciencia. Por tanto, siguiendo lo expuesto en la definición anterior, el método axiomático sigue dos procedimientos distintos pero complementarios: la conceptualización y la demostración. La conceptualización es el proceso por el cual, partiendo de los denominados conceptos primitivos, se definen los demás conceptos. La demostración alude al proceso de validación de las proposiciones que pueden ser deducidas a partir del conjunto de axiomas.

En un sistema de axiomatización formal, para poder aplicar las reglas de formación y de transformación de forma rigurosa, tanto los axiomas como los teoremas no deben tener contenido, sino que simplemente deben tener símbolos y reglas formales de deducción. Un sistema formal está compuesto por los siguientes elementos:

- Un conjunto finito de símbolos que se utilizan para la construcción de fórmulas, conocido como alfabeto o vocabulario.
- Una gramática formal, es decir, un mecanismo para la construcción de fórmulas bien formadas.
- Un conjunto de axiomas que deben ser fórmulas bien formuladas.

- Un conjunto de reglas de inferencia, de las cuales se obtienen conclusiones en base a la información conocida.
- Un conjunto de teoremas que incluye todas las fórmulas bien formadas que se derivan de los axiomas o de los otros teoremas mediante reglas de inferencia.

Como en un sistema axiomático formal no se puede hablar de verdad o falsedad de la teoría porque carece de contenido, una teoría tiene que tener algunas propiedades para ser considerada aceptable, que son:

- Consistencia. Un sistema axiomático es consistente si en él no es posible demostrar una proposición y su negación.
- Independencia. Se dice que un sistema axiomático es independiente si un axioma de la teoría no puede ser deducido del resto de axiomas.
- Completitud. Se dice que un sistema axiomático es completo si todas las proposiciones son demostrables a partir de los axiomas y las reglas de inferencia.

1.2. Postulados de Euclides

La obra de Euclides “*Los elementos*” es un importante tratado matemático sobre la geometría de la época, compuesto por 13 volúmenes y que estableció lo que se consideraría “geometría” a lo largo de muchos años. Su influencia en la historia ha sido extraordinaria, puesto que recopiló y organizó todo el conocimiento geométrico previo haciendo uso de un sistema axiomático, conocido como postulados de Euclides, el cual utiliza como base para todas sus demostraciones y que, de una forma sencilla y lógica, da lugar a lo que conocemos como geometría euclidiana. Para elaborar esta sección se han seguido las siguientes referencias [3], [4] [5], [7] y [15].

“Los elementos” es de uno de los libros más divulgados de la historia y el segundo con un mayor número de ediciones publicadas, únicamente superado por la Biblia. Además, su importancia hace que haya formado parte del temario de estudiantes universitarios durante muchos años y que, incluso hoy en día, sea utilizado por numerosos docentes como introducción básica a la geometría. Por tanto, es curioso que a pesar del tiempo pasado desde su publicación, la obra de Euclides sigue totalmente vigente, si bien es cierto que algunos de sus axiomas no son exclusivos y que se pueden construir otras geometrías usando postulados diferentes.

Los trece volúmenes que forman la obra se agrupan en diferentes temas, los seis primeros tratan sobre la geometría plana elemental, los tres siguientes están dedicados a la teoría de números, el décimo habla sobre los incommensurables y los tres últimos están dedicados a la geometría de cuerpos sólidos. En los volúmenes dedicados a geometría se hace un estudio formal de las propiedades de las formas geométricas como rectas, planos, triángulos, circunferencias, esferas, etc.

La obra está estructurada mediante definiciones, postulados y teoremas. Para ello, se comienza dando cinco conceptos básicos no definidos y que son muy intuitivos, los cuales son la base para definir todos los demás términos de la geometría euclidiana. Estos conceptos son los siguientes: punto, recta, estar en, estar entre y congruencia. A partir de ellos, Euclides formuló, mediante la experiencia, una serie de únicamente cinco postulados los cuales serán aceptados sin justificación lógica y se utilizarán para demostrar los teoremas geométricos. Dichos postulados son los siguientes:

1. Dados dos puntos, existe una recta que los contiene.
2. Un segmento se puede extender indefinidamente en una recta.
3. Es posible describir una circunferencia con cualquier centro y distancia (radio).
4. Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.
5. Postulado de las paralelas. Si una recta corta a otras dos de manera que la suma de los ángulos internos del mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces, las dos rectas prolongadas indefinidamente se cortarán del mismo lado de la primera recta en que se encuentren aquellos ángulos cuya suma es menor que dos rectos.

Introducimos ahora las definiciones de una serie de conceptos que aparecen en los postulados de Euclides y que se utilizarán a lo largo del trabajo.

Definición 1.2.1 (Segmento). *Dados dos puntos distintos A y B se define el segmento \overline{AB} como el conjunto de puntos formado por A , B y todos los puntos comprendidos entre A y B que se encuentran en la recta AB . Además, se denomina segmento abierto y se denota por \overline{AB} al conjunto $\overline{AB} \setminus \{A, B\}$.*

Definición 1.2.2 (Semirrecta). *Dados dos puntos A y B se define la semirrecta con origen en A y que pasa por B , \overrightarrow{AB} , como el conjunto de puntos pertenecientes a la recta AB dado por: todos los puntos pertenecientes al segmento \overline{AB} y todos los puntos C en la recta AB tales que el punto B se encuentra entre los puntos A y C .*

Definición 1.2.3 (Semirrectas opuestas). *Se dice que dos semirrectas son opuestas si están sobre una misma recta y únicamente comparten su punto de origen.*

Definición 1.2.4 (Rectas y semirrectas paralelas). *Dadas dos rectas r y s , se dice que son rectas paralelas si no tienen ningún punto en común y se denota por $r \parallel s$. Del mismo modo, se dice que dos semirrectas son paralelas si no tienen puntos comunes.*

Definición 1.2.5 (Ángulo con vértice en un punto). *Se denomina “ángulo con vértice en A ” a un punto A junto con dos semirrectas distintas no opuestas, \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} , que tienen origen en el punto A y las cuales se denominan “lados” del ángulo. Para denotar el ángulo usaremos las siguientes notaciones: $\angle A$, $\angle BAC$ o $\angle CAB$.*

Definición 1.2.6 (Ángulos adyacentes). *Se dice que dos ángulos son adyacentes si tienen un lado y un vértice común y, además, sus otros dos lados son semirrectas opuestas.*

Definición 1.2.7. *Un ángulo $\angle ABC$ es menor que un ángulo $\angle A'B'C'$ si existe una semirrecta $\overrightarrow{B'P'}$ entre las semirrectas $\overrightarrow{B'A'}$ y $\overrightarrow{B'C'}$ tal que $\angle ABC \cong \angle A'B'P'$.*

Definición 1.2.8 (Ángulo recto y rectas perpendiculares). *Si dos rectas se cortan formando ángulos adyacentes iguales entre sí, entonces cada uno de los ángulos iguales se denomina recto y se dice, además, que las rectas son perpendiculares.*

Definición 1.2.9 (Ángulo agudo y obtuso). *Se dice que un ángulo es agudo si es menor que uno recto y que es obtuso si es mayor que uno recto.*

Los primeros cuatro postulados han sido siempre aceptados por los matemáticos, sin embargo, el último de ellos, que es el que da lugar a la geometría euclidiana, ha sido siempre muy controvertido. Se trata de un postulado mucho más complejo en su formulación respecto de los cuatro anteriores y, cuya validez, no es tan obvia como la de estos. De hecho, no se hace uso de él para probar ninguno de los 28 primeros resultados de “*Los elementos*”. Como consecuencia, desde un principio este postulado fue atacado por no ser considerado lo suficientemente creíble para admitirlo como una suposición no probada. Todo ello llevó a que, durante aproximadamente dos mil años, numerosos matemáticos intentasen derivarlo de los otros cuatro postulados o reemplazarlo por uno más evidente.

Uno de los primeros intentos fue realizado por Proclus (410-485) quien, a pesar de que sus numerosas tentativas por demostrar el quinto postulado fueron infructuosas, sí que consiguió dar una declaración equivalente. Actualmente, esta versión equivalente se conoce como axioma de Playfair y se enuncia como:

“Dada una recta y un punto que no está en la recta, es posible trazar exactamente una recta a través del punto dado paralela a la recta”

Veamos ahora una demostración de que el V postulado de Euclides y el axioma de Playfair son realmente equivalentes, para lo que primero necesitaremos definir algunos conceptos.

Definición 1.2.10. *Dados dos puntos A y B que no se encuentran en una recta r , se dice que los puntos están en el mismo lado de r si $A = B$ o el segmento \overline{AB} no corta la recta r . Además, se dice que los puntos están en lados opuestos de r si el segmento \overline{AB} corta a la recta r .*

Definición 1.2.11. *Un segmento \overline{AB} es menor que un segmento \overline{CD} si existe un punto $E \in \overline{CD}$ con $C-E-D$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.*

Teorema 1.2.12. *El V postulado de Euclides y el Axioma de Playfair son equivalentes.*

Demostración. En esta demostración se usará la medida de ángulos, que será introducida formalmente en la sección 2.2, de manera que la medida de un ángulo recto será $\frac{\pi}{2}$ y que dado un ángulo $\angle BAC$ y una semirrecta \overrightarrow{AD} en su interior, se tiene que la medida del ángulo $\angle BAC$ es la suma de las medidas de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DAC$.

“Axioma de Playfair \Rightarrow V postulado de Euclides”: Consideramos tres rectas distintas r , s y t de forma que t corta a s en un punto P y a r en un punto Q . Consideramos también una semirrecta \overrightarrow{PD} paralela a la recta

r y que se encuentra al lado contrario de los ángulos α y β con respecto a t , definidos como $\alpha := \angle AQP$ y $\beta := \angle QPC$. Tomamos un punto R en la recta r al lado contrario del punto A con respecto de la recta t y denotamos $\gamma := \angle RQP$. Suponemos ahora que $\alpha + \beta < \pi$. Por lo tanto, puesto que $\alpha + \beta + \gamma + \angle BPQ = 2\pi$, se cumple que $\gamma + \angle BPQ > \pi$. Definimos $\delta := \angle BPQ - \angle DPQ$ y como $\gamma + \angle DPQ = \pi$ entonces se tiene que $\delta > 0$. Por lo tanto, la semirrecta \overrightarrow{PD} no está en la recta s y se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{PB} y \overrightarrow{PQ} . En consecuencia, la semirrecta \overrightarrow{PB} no se corta con la recta r .

Tenemos que ver ahora que la semirrecta \overrightarrow{PC} se corta con la recta r . Para ello, razonaremos por reducción al absurdo y supondremos que \overrightarrow{PC} no se corta con r . Entonces, la recta s es paralela a r y pasa por el punto P . Por consiguiente, por el axioma de Playfair, la semirrecta \overrightarrow{PD} debe estar en la recta s , lo cual es una contradicción.

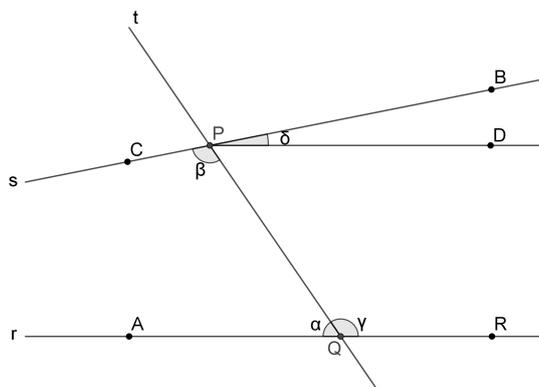


Figura 1.1: Axioma de Playfair implica el V postulado de Euclides.

“V postulado de Euclides \Rightarrow Axioma de Playfair”: Consideramos un punto P que no pertenece a una recta r y una recta s que pasa por el punto P y es paralela a r . Tomamos un punto Q en la recta r y trazamos la recta t que pasa por P y Q . Ver figura 1.2. Definimos ahora $\alpha := \angle BQP$, $\beta := \angle QPD$, $\gamma := \angle AQP$ y $\delta := \angle QPC$. Veamos que $\alpha + \beta = \pi$. En caso de que $\alpha + \beta < \pi$ entonces se tendría que, por el V postulado de Euclides, las rectas s y r se cortan, lo cual es una contradicción con que son paralelas. Por lo tanto, $\alpha + \beta \geq \pi$. Del mismo modo, se obtiene que $\gamma + \delta \geq \pi$. Por consiguiente, como $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ se llega a que $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi$.

Podemos construir ahora la paralela s del siguiente modo: comenzamos trazando la semirrecta \overrightarrow{QP} y, a continuación, tomamos el ángulo β en P con lados \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PD} , de modo que $\beta = \gamma$. Trazamos ahora la semirrecta \overrightarrow{PC} , que es opuesta a \overrightarrow{PD} . Por lo tanto, todas las rectas s que pasen por P y sean paralelas a r deben ser iguales a la recta CD , que es exactamente lo que dice el axioma de Playfair.

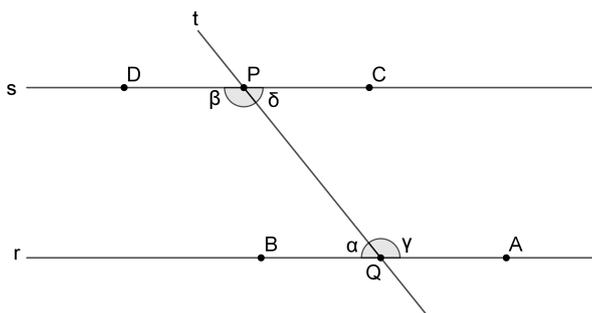


Figura 1.2: El V postulado de Euclides implica el axioma de Playfair. □

A pesar de los numerosos intentos que tuvieron lugar para probar el quinto postulado en términos de los otros cuatro no hubo avances relevantes hasta que, Girolamo Saccheri (1667-1773), intentó realizar una demostración por reducción al absurdo, es decir, supuso que el postulado era falso e intentó llegar a una contradicción. Como resultado de dicho proceso, llegó al diagrama conocido como cuadrilátero de Saccheri, que es un cuadrilátero con dos lados iguales perpendiculares a la base.

Definición 1.2.13 (Cuadrilátero). *Un cuadrilátero $\square ABCD$ es un conjunto de cuatro puntos A, B, C, D tales que tres de ellos no son colineales y los segmentos abiertos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} y \overline{DA} no se cortan.*

Definición 1.2.14 (Cuadrilátero de Saccheri). *Un cuadrilátero $\square ABCD$ se dice cuadrilátero de Saccheri si sus dos ángulos base, $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos rectos y los correspondientes lados opuestos son congruentes, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Los lados \overline{AD} y \overline{BC} se llaman piernas, el lado \overline{CD} se denomina cumbre o base superior y los ángulos $\angle ADC$ y $\angle BCD$ se llaman ángulos cumbre. Figura 1.3.*

Saccheri descubrió que los ángulos cumbre son iguales, lo que dio tres casos a considerar:

1. Los ángulos cumbre son mayores que uno recto, conocido como hipótesis del ángulo obtuso.
2. Los ángulos cumbre son menores que uno recto, conocido como hipótesis del ángulo agudo.
3. Los ángulos cumbre son ángulos rectos, conocido como hipótesis del ángulo recto.

Para la primera hipótesis Saccheri alcanzó una contradicción haciendo uso de la suposición de Euclides de que una recta es infinita. Mientras que para la segunda de ellas consiguió alcanzar también una contradicción, aunque en este caso, no era del todo clara.

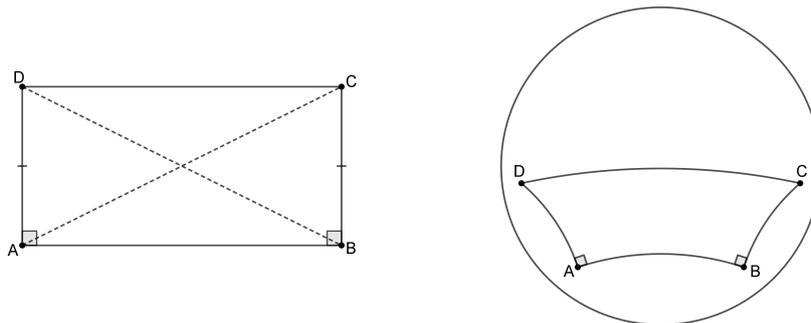


Figura 1.3: Cuadrilátero de Saccheri en el plano (izquierda) y en el disco de Poincaré (derecha). El disco de Poincaré es un modelo de geometría hiperbólica que se estudiará en la sección 3.5.2.

Un siglo después, el matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833) también conseguiría dar otro enunciado equivalente para el quinto postulado, que establecía que:

“La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos”

Legendre, utilizando una idea similar a la que había utilizado Saccheri, demostró que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos ángulos rectos, sin embargo, su prueba no era correcta ya que para ello se basó en la suposición de rectas infinitas. Además, también realizó una demostración para ver que la suma no puede ser menor que dos ángulos rectos, pero al igual que en el caso anterior, también cometió un error, ya que en esta ocasión realizó una suposición equivalente al postulado de las paralelas.

No fue hasta el siglo XIX que se acabó de entender el problema del quinto postulado, cuando el matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), se convenció de que el quinto postulado era independiente de los otros cuatro y, concluyó, que debían ser posibles geometrías alternativas a la euclidiana. Sin embargo, aunque pasó muchos años trabajando en ello y pudo haber descubierto algunos teoremas consecuencia de la negación de dicho postulado, nunca llegó a publicar nada sobre el tema.

Como consecuencia, el descubrimiento oficial de las geometrías no euclidianas ha sido otorgado al ruso Nikolái Ivánovich Lobachevsky (1792-1856) y al húngaro János Bolyai (1802-1860) que, sin conocerse, desarrollaron de forma contemporánea el primer sistema de geometría no euclidiana. La geometría desarrollada por ambos se conoce como geometría hiperbólica y, en ella, se sustituye el quinto postulado por el siguiente axioma, conocido como axioma de Bolyai:

“Por un punto exterior a una recta pasan al menos dos rectas paralelas”

Sin embargo, en la época, las primeras publicaciones de ambos matemáticos sobre el tema no tuvieron ninguna repercusión, lo que hizo que Bolyai dejase de escribir sobre ello. En cambio, Lobachevsky sí que siguió insistiendo en sus ideas a lo largo de su vida y publicó desarrollos de su sistema. En 1840, Lobachevsky explicó cómo funcionaría esta nueva geometría:

“Toda recta que en un plano parte de un punto puede, con referencia a otra recta dada en el mismo plano, ser dividida en dos tipos: secante y no secantes. Las rectas limítrofes de una y otra clase de esas rectas se llamarán paralelas a la recta dada”

Las geometrías no euclidianas no fueron realmente conocidas hasta el trabajo de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), quien desarrollo el siguiente ejemplo de este tipo de geometría. En una conferencia

publicada tras su muerte, Riemann habla de una geometría esférica en la que cada recta que pasa por un punto P y que no está en una recta AB se encuentra con la recta AB . En conclusión, no existen paralelas puesto que todas las rectas se cortan y la extensión de cada recta es infinita.

Finalmente, entre 1868 y 1872, el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) y el matemático alemán Felix Klein (1849-1925) consiguieron demostrar definitivamente la existencia de estas nuevas geometrías no euclidianas, usando entre otros procedimientos, un método de sustituciones basado en correlaciones tipo diccionario. Es decir, consiguieron traducir cada término de la geometría de Lobachevsky en un término de geometría euclidiana, demostrando de esta forma que la geometría hiperbólica era consistente.

1.3. Axiomas de Hilbert

David Hilbert (1862-1943) fue un prestigioso matemático alemán que se ganó su reputación como uno de los matemáticos más importantes de finales del siglo XIX y principios del XX gracias a sus desarrollos en la axiomatización de la geometría, la teoría de invariantes o la noción de espacios de Hilbert. En esta sección se presenta su sistema axiomático y para su elaboración se han usado como referencia [4], [8], [9] y [22].

Durante años, los matemáticos se habían sentido incómodos por las suposiciones de la geometría euclidiana. Sin embargo, paradójicamente, no fue hasta el descubrimiento de la geometría no euclidiana que se comenzase a trabajar seriamente en la construcción de nuevos axiomas para la geometría euclidiana.

Fue a principios del siglo XX cuando Hilbert volvió a trabajar en los axiomas de la obra de Euclides y, aunque su sistema no fue el primero en desarrollarse, sí que sería el más intuitivo y cercano en espíritu al de Euclides. En 1899, Hilbert publicó su monografía “*Fundamentos de la geometría*” [12] considerada como una de sus mayores aportaciones a la matemática moderna.

El interés de dicha publicación no se debe únicamente a los importantes resultados matemáticos que recoge, sino que además destacan las ideas metodológicas y fundacionales elaboradas en la obra. La presentación de la teoría axiomática de la geometría euclidiana desarrollada por Hilbert acarrió una nueva forma de entender las teorías geométricas, impulsando el camino hacia la abstracción y la sistematización que estaba teniendo lugar desde finales del siglo XIX. Por tanto, su obra se convirtió en una de las primeras referencias históricas y, probablemente, la más importante del método axiomático formal.

El sistema axiomático de Hilbert es un conjunto de 20 hipótesis (originalmente 21, sin embargo, el matemático estadounidense Eliakim Hasting Moore (1862-1932), en su obra “On the projective axioms of geometry” [18], lo dedujo como consecuencia de los axiomas de incidencia y de orden) que se dividen en 5 clases: incidencia, orden, congruencia, continuidad y paralelas. A continuación, se presenta una versión modificada de dichos axiomas que serán los que utilizaremos posteriormente en el desarrollo de las geometrías absoluta e hiperbólica. Esta versión se ha tomado de [9].

1. Axiomas de incidencia. Suponemos que existe una relación entre puntos y rectas que se expresa como “el punto P está en la recta r , la recta r contiene al punto P o la recta r pasa por el punto P ” y se denota por $P \in r$.
 - I1. Para dos puntos cualesquiera P y Q existe una recta que contiene tanto a P como a Q .
 - I2. Para dos puntos cualesquiera P y Q no existe más de una recta que contiene tanto a P como a Q .
 - I3. Existen al menos tres puntos distintos de tal forma que no existe ninguna recta que pase por dichos puntos. Estos tres puntos determinan un único plano α .
2. Axiomas de orden. Suponemos que existe una relación entre conjuntos de tres puntos P , Q y R que se expresa como “ P está entre Q y R ” y se escribe $Q - P - R$. Dicha relación cumple los siguientes axiomas:
 - O1. Si el punto P está entre un punto Q y un punto R , es decir, $Q - P - R$, entonces los puntos P , Q y R son tres puntos distintos en una recta. Además, P también está entre R y Q .
 - O2. Para dos puntos cualquiera P y Q , existen puntos A , B y C situados en la recta PQ tales que $A - P - Q$, $P - B - Q$ y $P - Q - C$.
 - O3. Dados tres puntos distintos situados en una recta, solo uno de ellos está entre los otros dos.
 - O4. Para cualquier recta r y para cualesquiera puntos A , B y C que no están en r , se tiene que:
 - (i) Si A y B se encuentran al mismo lado de r y B y C se encuentran al mismo lado de r entonces A y C están al mismo lado de r .

- (ii) Si A y B se encuentran en lados opuestos de r y B y C se encuentran en lados opuestos de r , entonces A y C se encuentran en el mismo lado de r .
3. Axiomas de congruencia. Suponemos que existe una relación entre segmentos que se expresa como “el segmento \overline{AB} es congruente al segmento \overline{CD} ” y se denota como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

- C1. Si P y Q son dos puntos distintos de una recta r y P' es un punto sobre una recta r' , entonces existe un único punto Q' tal que el segmento \overline{PQ} es congruente con el segmento $\overline{P'Q'}$, simbólicamente, $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$.
- C2. Si un segmento \overline{PQ} es congruente con el segmento $\overline{P'Q'}$ y con el segmento $\overline{P''Q''}$ entonces el segmento $\overline{P'Q'}$ también es congruente con el segmento $\overline{P''Q''}$. Es decir, si $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ y $\overline{PQ} \cong \overline{P''Q''}$ entonces $\overline{P'Q'} \cong \overline{P''Q''}$. Además, todo segmento es congruente consigo mismo.
- C3. Sean \overline{PQ} y \overline{QR} dos segmentos en una recta r que no tengan puntos en común, además de Q , y sean $\overline{P'Q'}$ y $\overline{Q'R'}$ dos segmentos de la misma o en otra recta r' que no tengan puntos en común aparte de Q' . Si $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ y $\overline{QR} \cong \overline{Q'R'}$ entonces $\overline{PR} \cong \overline{P'R'}$.

Suponemos que existe una relación entre ángulos que se expresa como “el ángulo $\angle A$ es congruente al ángulo $\angle B$ ” y se denota como $\angle A \cong \angle B$.

- C4. Dado un ángulo $\angle BAC$ y una semirrecta $\overrightarrow{A'B'}$, entonces existe una única semirrecta $\overrightarrow{A'C'}$ en un lado dado de la recta $A'B'$, tal que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.
- C5. Si el ángulo $\angle A$ es congruente con el ángulo $\angle B$ y con el ángulo $\angle C$, entonces estos dos son congruentes entre sí, $\angle B \cong \angle C$. Además, todo ángulo es congruente consigo mismo.

Definición 1.3.1 (Triángulos congruentes). *Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se dicen congruentes si existe una correspondencia uno a uno entre sus vértices tal que los lados correspondientes son congruentes y los ángulos correspondientes son congruentes. Es decir, si $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ por la correspondencia uno a uno A con A' , B con B' y C con C' entonces se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$.*

- C6. (Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Lado: LAL). Si dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se tiene $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Y, por lo tanto, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

4. Axioma de las paralelas

- Dada una recta r y un punto P que no pertenece a la recta puede encontrarse una única recta s , tal que r y s no tengan ningún punto en común. Esta recta se llama la paralela a r que pasa por P .

5. Axiomas de continuidad.

- Axioma de Dedekind. Si todos los puntos de una recta r están en la unión disjunta de dos conjuntos no vacíos, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, tales que ningún punto de cualquiera de los subconjuntos está entre dos puntos del otro. Entonces, existe un único punto O en la recta r tal que uno de los subconjuntos es igual a una semirrecta de r con vértice en O y el otro subconjunto es igual al complementario. Un par de subconjuntos Σ_1 y Σ_2 con las propiedades de este axioma se denomina cortadura de Dedekind de la recta.

Definición 1.3.2 (Conjunto convexo). *Un conjunto de puntos se dice convexo si para dos puntos cualesquiera del conjunto, P y Q , se tiene que el segmento \overline{PQ} está contenido en el conjunto.*

El axioma de Dedekind es un axioma muy reciente del cual se derivan los axiomas de Arquímedes y Aristóteles, que nos serán útiles más adelante a la hora de realizar alguna demostración.

- Axioma de Arquímedes. Dados dos segmentos cualesquiera \overline{AB} y \overline{CD} , existe un número entero $n \geq 0$ y puntos A_1, \dots, A_{n+1} en la semirrecta \overrightarrow{AB} tales que $A_{i-1} - A_i - A_{i+1}$, $\overline{A_{i-1}A_i} \cong \overline{CD}$ y, además, o bien $B = A_n$ o bien $A_n - B - A_{n+1}$. (Si el subíndice es 0 se interpreta $A_0 = A$)
- Axioma de Aristóteles. Dado un lado cualquiera de un ángulo agudo y cualquier segmento \overline{AB} , entonces existe un punto P en el lado dado del ángulo tal que si Q es el pie de la perpendicular al lado contrario del ángulo que pasa por P se cumple que $\overline{PQ} > \overline{AB}$.

Además, se tiene la siguiente cadena de implicaciones, cuya demostración puede encontrarse en [9]:

$$\text{Axioma de Dedekind} \Rightarrow \text{Axioma de Arquímedes} \Rightarrow \text{Axioma de Aristóteles.}$$

Una vez presentados los axiomas con los que trabajaremos en el desarrollo de las geometrías absoluta e hiperbólica, podemos definir algún concepto más y demostrar una serie de proposiciones las cuales nos serán de utilidad.

Definición 1.3.3. La relación de estar en el mismo lado de una recta dada r es una relación de equivalencia del conjunto de puntos que no están en la recta r , dado que es reflexiva, simétrica y transitiva por definición y por el axioma $O_4(i)$. Cada clase de equivalencia se denomina semiplano abierto acotado por r . Para cada punto P que no está en la recta r denotamos al semiplano abierto que contiene a P por $\overset{\circ}{H}(r, P)$. Además, el conjunto

$$H(r, P) := \overset{\circ}{H}(r, P) \cup r,$$

se denomina semiplano (o semiplano cerrado) definido por r que contiene a P .

Definición 1.3.4 (Interior de un ángulo). Dados tres puntos A , B y C que no son colineales, se define el interior del ángulo $\angle ABC$, y se denota como $\overset{\circ}{\angle}ABC$, al conjunto de puntos P tales que P y A se encuentran en el mismo lado de la recta BC y P y C se encuentran en el mismo lado de la recta BA , es decir,

$$\overset{\circ}{\angle}ABC := \overset{\circ}{H}(BC, A) \cap \overset{\circ}{H}(BA, C).$$

También definimos

$$\angle ABC := H(BC, A) \cap H(BA, C).$$

Definición 1.3.5. Una semirrecta \overrightarrow{AP} está entre dos semirrectas no opuestas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} si P está en el interior del ángulo $\angle CAB$ (independientemente de la elección de P en la semirrecta \overrightarrow{AP}).

Definición 1.3.6 (Interior de un triángulo). Se denomina interior de un triángulo $\triangle ABC$ a la intersección del interior de sus tres ángulos y se denota por $\overset{\circ}{\triangle}ABC$. El borde del triángulo $\triangle ABC$ es la unión de sus tres lados, es decir,

$$\partial \triangle ABC := \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}.$$

También se usa $\triangle ABC$ para denotar la unión del interior y del borde del triángulo $\triangle ABC$.

Teorema 1.3.7 (Teorema de Pasch). Dado un triángulo $\triangle ABC$ y una recta r que se corta con el lado \overline{AB} en un punto D tal que $A - D - B$. Entonces, r corta al lado \overline{AC} o al lado \overline{BC} . Además, si el punto C no está en la recta r , entonces r no corta simultáneamente a los lados \overline{AC} y \overline{BC} .

Demostración. Si C está en la recta r es obvio que se cumple. Supongamos que C no está en r . Entonces, como r corta al lado \overline{AB} en D entonces los puntos A y B están en lados opuestos de r . Si el punto C está en el mismo lado que B con respecto de la recta r , entonces el lado \overline{AC} corta a r . Mientras que si está en el mismo lado de A , entonces el lado \overline{BC} corta a r . Por tanto, si C no está en la recta r , entonces no puede cortar simultáneamente a los lados \overline{AC} y \overline{BC} . \square

Proposición 1.3.8. Dado un ángulo $\angle ABC$ y un punto P en la recta AC . Entonces P pertenece al interior del ángulo $\angle ABC$ si y solo si $A - P - C$.

Demostración. “ \Rightarrow ” Supongamos que $P \in \overset{\circ}{\angle}ABC$. Por definición, los puntos P y C se encuentran al mismo lado de la recta BA y los puntos P y A se encuentran al mismo lado de la recta BC . Suponemos ahora que $P - A - C$, entonces, P y C están en lados opuestos de la recta BA ya que \overline{PC} se corta con la recta BA en el punto A entre P y C , lo cual es una contradicción. Del mismo modo, $A - C - P$ nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, se tiene que $A - P - C$ (axioma O_3).

“ \Leftarrow ” Suponemos que $A - P - C$. Notemos que la recta AC se corta con la recta BC en un único punto C . Por lo tanto, se tiene que \overline{AP} no se corta con la recta BC . Con lo cual, los puntos A y P se encuentran al mismo lado de la recta BC . Del mismo modo, los puntos C y P están en el mismo lado de la recta BC . En consecuencia, por definición de P , se tiene que es un punto interior de $\angle ABC$. \square

Definición 1.3.9 (Semirrecta abierta). Una semirrecta abierta con origen en un punto A y que pasa por un punto B es el conjunto de puntos definido como

$$\overset{\circ}{\overrightarrow{AB}} := \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}.$$

Proposición 1.3.10 (Teorema del segmento cruzado). Toda semirrecta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OP}}$ situada entre dos semirrectas \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} , corta al segmento \overline{AB} en un punto C con $A - C - B$. El interior del ángulo $\angle AOB$ es la unión disjunta de los interiores $\overset{\circ}{\angle}AOP$, $\overset{\circ}{\angle}BOP$ y la semirrecta abierta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OP}}$.

Demostración. Como la semirrecta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OP}}$ se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} se tiene que el punto P pertenece al interior del ángulo $\angle AOB$. Consideramos ahora un punto D tal que $D - O - B$. Por tanto, los puntos D y B se encuentran en lados opuestos de la recta OA . Ahora bien, como $P \in \overset{\circ}{\angle}AOB$ entonces A y P están al mismo lado de la recta OB . Por tanto, por el teorema de Pasch (teorema 1.3.7), la semirrecta

\overrightarrow{OP} corta a \overline{DA} o a \overline{AB} . Por otro lado, como D y B están en lados opuestos de OA y P está al mismo lado de OA , se tiene que D y P están en lados opuestos de OA y, en consecuencia, la semirrecta \overrightarrow{OP} no corta al segmento \overline{DA} . Por tanto, como \overrightarrow{OP} cortaba a \overline{DA} o a \overline{AB} , se tiene que \overrightarrow{OP} corta a \overline{AB} en un punto C distinto de A . Ahora, si $C = B$ entonces se tendría que O, P y B son colineales, lo que es falso. En definitiva, se tiene que $A - C - B$.

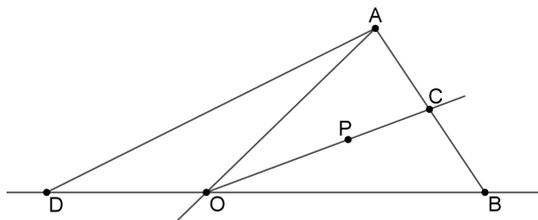


Figura 1.4: El punto C corta al segmento \overline{AB} . □

Definición 1.3.11 (Ángulos suplementarios). *Dados dos ángulos, se dice que son ángulos suplementarios si tienen un lado común y los otros dos lados vienen dados por dos semirrectas opuestas.*

Proposición 1.3.12 (Reglas de congruencia de los ángulos suplementarios, opuestos y rectos).

- (a) *Ángulos suplementarios de ángulos congruentes son congruentes.*
- (b) *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*
- (c) *Cualquier ángulo congruente a un ángulo recto es un ángulo recto.*

Demostración. Sean $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ dos ángulos congruentes. Tomamos un punto P en la semirrecta opuesta a la semirrecta \overrightarrow{BA} con $P \neq B$ y un punto P' en la semirrecta opuesta a la semirrecta $\overrightarrow{B'A'}$ con $P' \neq B'$. Suponemos que $\overline{BA} \cong \overline{B'A'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y $\overline{BP} \cong \overline{B'P'}$. Ver figura 1.5.

(a) Veamos que se cumple que $\angle CBP \cong \angle C'B'P'$. Como se tiene que $\overline{BA} \cong \overline{B'A'}$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, entonces, por el criterio de congruencia LAL (axioma C6), se cumple que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Por lo tanto, $\overline{AP} \cong \overline{A'P'}$ (axioma C3). Además, por definición de triángulos congruentes, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\angle CAP \cong \angle C'A'P'$. En consecuencia, si aplicamos el criterio LAL (axioma C6), se obtiene que $\triangle CAP \cong \triangle C'A'P'$. Por otro lado, como $\overline{BP} \cong \overline{B'P'}$, $\angle BPC \cong \angle B'P'C'$ y $\overline{PC} \cong \overline{P'C'}$ entonces, por el criterio LAL (axioma C6), se tiene que $\triangle BPC \cong \triangle B'P'C'$, obteniéndose que $\angle CBP \cong \angle C'B'P'$.

(b) Consideramos los ángulos opuestos por el vértice $\angle ABC$ y $\angle PBQ$ como en la figura 1.5. Se observa que ambos son suplementarios de $\angle CBP$. Por lo tanto, por el apartado (a), se concluye que $\angle ABC \cong \angle PBQ$.

(c) Consideramos un ángulo $\angle A'B'C'$ que es congruente a un ángulo recto $\angle ABC$, veamos que $\angle A'B'C'$ también es recto. Para ello, observamos que por definición de ángulos rectos se tiene que $\angle ABC \cong \angle CBP$ y, por el apartado (a), se tiene que $\angle C'B'P' \cong \angle CBP$. Por lo tanto, $\angle A'B'C' \cong \angle C'B'P'$. En consecuencia, $\angle A'B'C'$ es un ángulo recto.

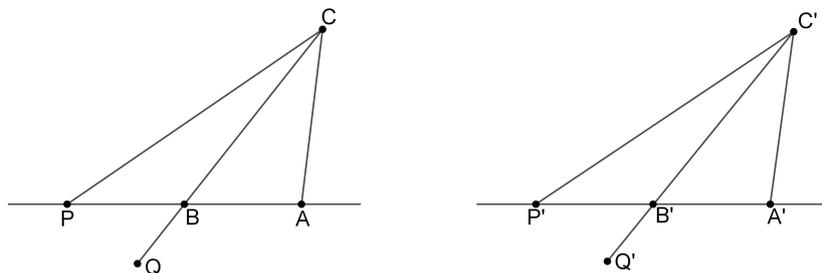


Figura 1.5: Ángulos suplementarios de ángulos congruentes son congruentes. □

Proposición 1.3.13 (Criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo: ALA). *Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre los ángulos también es congruente, entonces los triángulos son congruentes.*

Demostración. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos con $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$. Tomamos ahora el único punto C'' perteneciente a la semirrecta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$ (axioma C1). Entonces, aplicando el criterio de congruencia LAL (axioma C6), se tiene que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C''$. Como supusimos que $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ entonces $\angle A'B'C' \cong \angle A'B'C''$ (axioma C5). Por lo tanto, los puntos B', C' y C'' son colineales, es decir, los puntos C' y C'' se encuentran ambos en las

rectas $B'C'$ y $A'C'$. Ahora, como el punto de intersección de dos rectas es único, se tiene que $C' = C''$ y, en consecuencia, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C''$. Por consiguiente, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Ver figura 1.6.



Figura 1.6: Criterio de congruencia ALA. □

Corolario 1.3.14 (Corolario del axioma de Aristóteles). *Dada una semirrecta \overrightarrow{AB} , un punto P que no este en la recta AB y un ángulo agudo $\angle XVY$. Entonces existe un punto R en la semirrecta \overrightarrow{AB} tal que $\angle PRA < XVY$.*

Demostración. Consideramos la recta perpendicular a la recta AB que pasa por P y sea Q el punto de corte entre ambas rectas. Tomamos arbitrariamente los puntos X e Y situados, respectivamente, en las semirrectas r y s que son los lados del ángulo $\angle XVY$. Consideramos la perpendicular t a la recta que contiene a r y pasa por el punto Y . Denotamos por X' al punto de corte entre ambas rectas. Como habíamos supuesto que el ángulo era agudo, haciendo uso del teorema del ángulo exterior (el cual probaremos cuando estudiemos la geometría absoluta, teorema 2.1.6) podemos probar, mediante un argumento de reducción al absurdo, que X' pertenece a r , con lo que podemos escoger X que sea X' .

Ahora, por el axioma de Aristóteles sabemos que se puede tomar un punto Y de modo que $\overline{XY} > \overline{PQ}$. Por el axioma de congruencia C1, sabemos que existe un punto R en la semirrecta \overrightarrow{QB} tal que $\overline{QR} \cong \overline{XV}$. Veamos que se cumple que $\angle PRQ < \angle XVY$. Suponemos ahora lo contrario, existe por tanto una semirrecta \overrightarrow{RS} tal que $\angle QRS \cong \angle XVY$ y que cumple que, o bien \overrightarrow{RS} es igual a la semirrecta \overrightarrow{RP} o bien se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{RP} y \overrightarrow{RQ} . Por el teorema del segmento cruzado (proposición 1.3.10), el punto S se puede tomar de forma que pertenezca al segmento \overline{PQ} , con lo que, el segmento \overline{SQ} no es mayor que el segmento \overline{PQ} . Ahora, por el criterio de congruencia ALA (proposición 1.3.13), se tiene que $\overline{SQ} \cong \overline{XY}$. Por consiguiente, el segmento \overline{XY} no es mayor que el segmento \overline{PQ} , lo que contradice la forma en la que escogimos Y , con lo que, $\angle PRQ < \angle XVY$ como afirmamos anteriormente.

Por otro lado, si el punto R se encuentra en la semirrecta \overrightarrow{AB} , entonces $\angle PRQ \cong \angle PRA$ y hemos terminado. Mientras que si R no está en \overrightarrow{AB} , entonces R y Q están en la semirrecta opuesta y, por el teorema del ángulo exterior (teorema 2.1.6), si R' es cualquier punto tal que $Q - R - R'$, entonces $\angle PR'Q < \angle PRQ < \angle XVY$. Obteniéndose de esta manera que $\angle PBA \cong \angle PBQ < \angle XVY$ tomando que $R' = B$. □

Proposición 1.3.15. *Si en un triángulo $\triangle ABC$ se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ entonces $\angle B \cong \angle C$. Por lo tanto, $\triangle ABC$ es isósceles.*

Demostración. Se consideran los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACB$. Por hipótesis se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Como ambos triángulos tienen el ángulo $\angle A$ común, por el criterio de congruencia LAL (axioma C6), se concluye que son triángulos congruentes. Por lo tanto, $\angle B \cong \angle C$ y, en consecuencia, el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles. □

Proposición 1.3.16 (Criterio de congruencia Lado-Lado-Lado: LLL). *Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tales que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ se cumple entonces que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.*

Demostración. Supongamos que tenemos dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ que verifican las hipótesis de la proposición. Por el axioma C4, sabemos que en el lado opuesto de B con respecto a la recta AC podemos tomar una semirrecta $\overrightarrow{AB''}$ de modo que $\angle C'A'B' \cong \angle CAB''$. Además, por el axioma C1, podemos suponer que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB''}$. Y ahora, por el criterio de congruencia LAL (axioma C6), se tiene que $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C$. Por lo tanto, nos basta con ver que $\triangle ABC \cong \triangle AB''C$.

Como B y B'' se encuentran en lados opuestos con respecto de la recta AC , el segmento $\overline{BB''}$ cortará a dicha recta en un punto D , el cual puede estar situado de cinco formas distintas: $D - A - C$, $D = A$, $A - D - C$, $D = C$ o $A - C - D$. Comenzaremos suponiendo que se cumple el último caso, es decir, $A - C - D$. Notemos que los triángulos $\triangle AB''B$ y $\triangle CB''B$ cumplen que $\overline{AB''} \cong \overline{AB}$ y $\overline{CB''} \cong \overline{CB}$. Por la proposición 1.3.15, se sabe que $\triangle AB''B$ y $\triangle CB''B$ son isósceles en A y C , respectivamente. Por lo tanto, $\angle AB''B \cong \angle ABB''$ y $\angle CB''B \cong \angle CBB''$ con lo que se tiene que $\angle ABC \cong \angle AB''C$. Aplicando ahora el criterio de congruencia LAL (axioma C6) llegamos a que $\triangle ABC \cong \triangle AB''C$. De forma similar se probarían los otros cuatro casos restantes. □

Capítulo 2

Geometría plana absoluta

Se conoce como geometría absoluta a la geometría basada en el sistema de axiomas para la geometría euclidiana que elimina el postulado de las paralelas o cualquiera de sus alternativas. Es decir, la geometría absoluta es el conjunto de teoremas que se pueden demostrar haciendo uso únicamente de los axiomas de incidencia, orden, congruencia y continuidad. El término fue acuñado por János Bolyai en 1832 y también se conoce como geometría neutra.

La geometría absoluta constituye un sistema axiomático incompleto, puesto que se pueden agregar otros axiomas independientes manteniendo la consistencia del sistema. Por ejemplo, se pueden agregar distintos axiomas sobre rectas paralelas, obteniendo de esa manera sistemas axiomáticos incompatibles pero consistentes, que dan lugar a la geometría euclidiana o a la hiperbólica. Por lo tanto, se tiene que todo teorema de geometría absoluta es válido tanto en geometría euclidiana como hiperbólica pero el recíproco no es cierto.

En un principio, podría parecer que se trata de un sistema axiomático bastante débil, sin embargo no es así. Por ejemplo, en “*Los elementos*” de Euclides, como se mencionó anteriormente, las 28 primeras proposiciones se prueban sin hacer uso del V postulado y, por lo tanto, todas ellas son válidas en esta geometría. Además, también se pueden demostrar otros resultados como el teorema del ángulo exterior o el teorema de Saccheri-Legendre, los cuales se analizarán posteriormente.

En este capítulo se estudiarán los teoremas fundamentales de la geometría absoluta, viendo así que teoremas de las geometrías euclidiana e hiperbólica no dependen del postulado de las paralelas. Para su elaboración, se han seguido principalmente las siguientes referencias: [4], [9] y [11].

2.1. Teorema de los ángulos internos-alternos.

Definición 2.1.1 (Ángulos internos-alternos). *Sea t una transversal a las rectas r y r' de forma que t corta a r en B y a r' en B' con $B \neq B'$. Tomamos dos puntos A, C en r y dos puntos A', C' en r' tales que A y A' están al mismo lado de t , C y C' están al mismo lado de t y $A-B-C$ y $A'-B'-C'$. Entonces, los ángulos $\angle A'B'B$, $\angle ABB'$, $\angle C'B'B$ y $\angle CBB'$ se denominan ángulos internos. Y cada una de las parejas $\{\angle A'B'B, \angle CBB'\}$ y $\{\angle ABB', \angle C'B'B\}$ se conoce como pareja de ángulos internos-alternos.*

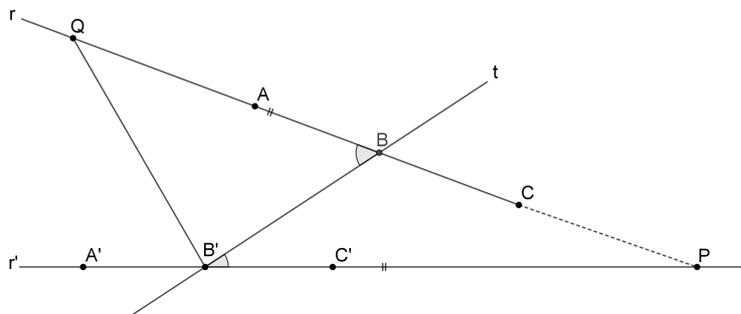


Figura 2.1: Ángulos internos-alternos.

Teorema 2.1.2 (Teorema de los ángulos internos-alternos). *Si dos rectas distintas, r y r' , son cortadas por una transversal t de forma que hay una pareja de ángulos internos-alternos congruentes, entonces r y r' son paralelas.*

Demostración. Consideramos r y r' dos rectas distintas cortadas por la transversal t de forma que $\angle ABB' \cong \angle C'B'B$. Ver figura 2.1. Hay que probar que las rectas r y r' no se cortan. Supongamos que se cortan en un punto P en el mismo lado de los puntos C y C' respecto de t . Existe, por tanto, un punto Q situado en la semirrecta \overrightarrow{BA} tal que $\overline{B'P} \cong \overline{BQ}$ (axioma C1). El segmento $\overline{BB'}$ es congruente consigo mismo, por lo tanto, por el criterio de congruencia LAL (axioma C6), $\triangle B'BQ \cong \triangle BB'P$. En particular, se tiene que $\angle QB'B \cong \angle PBB'$.

Como $\angle A'B'B$, $\angle PB'B$ y $\angle CBB'$, $\angle ABB'$ son parejas de ángulos suplementarios, entonces se tiene que $\angle A'B'B \cong \angle CBB'$ (proposición 1.3.12). Así que, $\angle A'B'B \cong \angle QB'B$. En consecuencia, el punto Q se encuentra en r' (axioma O1). Por lo tanto, r y r' tienen los puntos P y Q en común, lo que implica que $r = r'$, puesto que solo hay una recta entre dos puntos P y Q (axioma I2). Hemos llegado de esta manera a una contradicción y, entonces, r y r' no se cortan, por lo que son paralelas. \square

Corolario 2.1.3. *Si dos rectas distintas r y r' son perpendiculares a una misma recta, entonces r y r' son paralelas. En particular, existe una única recta a través de un punto P que es perpendicular a una recta dada s .*

Demostración. Sean r y r' dos rectas perpendiculares a una recta común t . Si la recta t corta a las rectas r y r' en dos puntos P y Q respectivamente, entonces todos los ángulos interiores son ángulos rectos. En consecuencia, son todos congruentes y, en particular, los ángulos internos-alternos son congruentes. Por lo tanto, las rectas r y r' son paralelas por el teorema de los ángulos internos-alternos (teorema 2.1.2). Si r y r' se cortasen con la recta t en el mismo punto, entonces dado que todos los ángulos rectos son congruentes, se tiene que $r = r'$.

Para ver que existe una única recta que pase por un punto P dado y sea perpendicular a una recta r distinguimos dos casos. Si P no está en la recta r , suponemos que existen dos rectas m y m' que son perpendiculares a r y que pasan por P . Entonces, por el teorema de los ángulos internos-alternos, m y m' son paralelas, lo que contradice el hecho de que comparten el punto P . En caso de que P esté en la recta r , la perpendicular a r por P es única debido a que todos los ángulos rectos son congruentes y dos rectas perpendiculares deben ser la misma. \square

Corolario 2.1.4. *Por un punto P que no está en una recta r pasa al menos una recta s paralela a r .*

Demostración. Por el corolario 2.1.3 sabemos que, por el punto P , pasa una única recta t perpendicular a r y una única recta s perpendicular a t . Como r y s son perpendiculares a la recta t tenemos que, de nuevo por el corolario 2.1.3, r y s son paralelas. \square

En resumen, se ha probado que, en geometría absoluta, siempre existe una recta s que pasa por P y es paralela a r . Sin embargo, no sabemos si esta recta s es única puesto que no estamos asumiendo el postulado de las paralelas de Hilbert. Por lo tanto, podría darse algún caso extraño en que haya otras líneas paralelas a r que pasen por P .

Definición 2.1.5 (Ángulo exterior y ángulos no adyacentes). *Un ángulo suplementario de un ángulo de un triángulo $\triangle ABC$ se dice que es un ángulo exterior del triángulo. Dado un ángulo exterior de un triángulo los dos ángulos del triángulo distintos a su interior suplementario diremos que son no adyacentes a dicho ángulo exterior y, análogamente, este es no adyacente a cualquiera de esos dos interiores.*

Teorema 2.1.6 (Teorema del ángulo exterior). *Un ángulo exterior de un triángulo $\triangle ABC$ siempre es mayor que cualquiera de sus correspondientes ángulos interiores no adyacentes.*

Demostración. Consideramos un punto D tal que $B - C - D$. Sea $\angle ACD$ un ángulo exterior del triángulo $\triangle ABC$ y $\angle BAC$ y $\angle ABC$ los correspondientes ángulos interiores no adyacentes. Analizamos los distintos casos posibles, para ello suponemos que el ángulo interior no adyacente $\angle BAC$ cumple que $\angle BAC \cong \angle ACD$. Por tanto, como consecuencia del teorema de los ángulos internos-alternos (teorema 2.1.2), se tiene que $AB \parallel CD$, lo que es una contradicción con que el punto B está en ambas rectas.

Suponemos ahora que $\angle BAC > \angle ACD$. Por lo tanto, existe una semirrecta \overrightarrow{AE} entre las semirrectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} tal que $\angle ACD \cong \angle EAC$ (axioma C4). Haciendo uso del teorema del segmento cruzado (proposición 1.3.10) la semirrecta \overrightarrow{AE} corta al segmento \overline{BC} en un punto P con $B - P - C$. Sin embargo, por el teorema de los ángulos internos-alternos (teorema 2.1.2), se tiene $AP \parallel CD$, lo que es una contradicción con el hecho de que P pertenece a ambas rectas.

De esta forma, hemos probado que dos de los casos posibles llevan a una contradicción, por lo tanto, debe cumplirse el caso restante: $\angle BAC < \angle ACD$. Consideramos ahora un punto F tal que $A - C - F$. Por ser opuestos por el vértice, se tiene que $\angle ACD \cong \angle FCB$ y, haciendo uso de lo que ya hemos probado, se obtiene que $\angle FCB > \angle CBA$. Por lo tanto, se cumple también que $\angle CBA < \angle ACD$. \square

Proposición 2.1.7 (Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Ángulo: LAA). Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos. Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Demostración. Comenzamos suponiendo que $\angle ABC > \angle A'B'C'$. Tomamos un punto $D \in \overset{\circ}{\angle} ABC$ tal que $\angle ABD \cong \angle A'B'C'$ (axioma C4). Se tiene que, por la proposición 1.3.8, la recta BD se corta con el segmento \overline{AC} en el punto E con $A - E - C$. Entonces, por el criterio de congruencia ALA (proposición 1.3.13), $\triangle ABE \cong \triangle A'B'C'$. Por tanto, $\angle AEB \cong \angle A'C'B'$ y, como $\angle A'C'B' \cong \angle ACB$, entonces $\angle AEB \cong \angle ACB$ (axioma C5). Además, como $\angle AEB$ es un ángulo exterior de $\triangle BCE$ en E , por el teorema del ángulo exterior (teorema 2.1.6), $\angle AEB > \angle ECB$, esto es, $\angle AEB > \angle ACB$. De este modo se ha llegado a una contradicción. Para el caso $\angle ABC < \angle A'B'C'$, razonando de un modo similar se llega de nuevo a una contradicción. Por tanto, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ y, por el criterio LAL (axioma C6) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

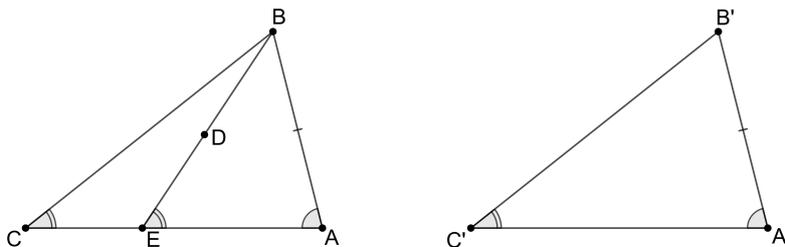


Figura 2.2: Criterio de congruencia Lado-Ángulo-Ángulo. □

Proposición 2.1.8. Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo son congruentes, respectivamente, a la hipotenusa y un cateto del otro.

Demostración. Suponemos que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo en $\angle A$ y que $\triangle A'B'C'$ es un triángulo rectángulo en $\angle A'$. Suponemos además que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$. Consideramos un punto D de modo que $D - A - C$ y que $\overline{AD} \cong \overline{A'C'}$ (axioma C1). Entonces, $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$ por el criterio de congruencia LAL (axioma C6). En consecuencia, $\overline{BD} \cong \overline{B'C'}$. Se tiene entonces que el triángulo $\triangle DBC$ es isósceles y por la proposición 1.3.15, $\angle BDA \cong \angle BCA$. Si aplicamos ahora el criterio de congruencia LAA (proposición 2.1.7) a los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, obtenemos que son congruentes. □

Definición 2.1.9 (Punto medio). Se denomina punto medio de un segmento \overline{AB} a un punto M con $A - M - B$ tal que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Proposición 2.1.10 (Teorema del punto medio). Todo segmento tiene un único punto medio.

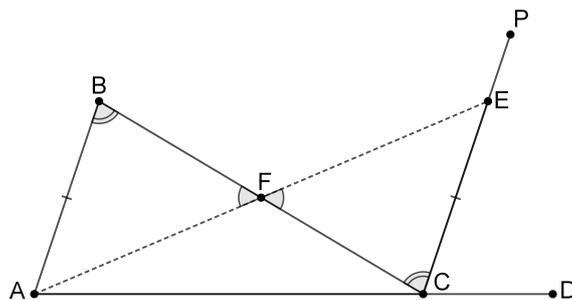


Figura 2.3: Construcción del punto medio.

Demostración. Consideramos un triángulo $\triangle ABC$ y busquemos el punto medio del segmento \overline{BC} . Para ello, comenzamos extendiendo el lado \overline{AC} hasta un punto D tal que $A - C - D$. Por tanto, los puntos A y D se encuentran en lados opuestos de la recta BC . Dado que, por el teorema del ángulo exterior (teorema 2.1.6), $\angle DCB > \angle ABC$, entonces existe una única semirrecta \overrightarrow{CP} entre las semirrectas \overrightarrow{CB} y \overrightarrow{CD} tal que $\angle ABC \cong \angle BCP$ (axioma C4). A continuación, haciendo uso del axioma C1, tomamos el único punto E de la semirrecta \overrightarrow{CP} tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$. Además, notemos que los puntos D , E y P se encuentran al mismo lado de la recta BC . Ahora, puesto que A y D se encuentran en lados contrarios de la recta BC entonces A y E se encuentran en lados contrarios de BC y, por lo tanto, la recta BC se corta con el segmento \overline{AE} en un punto F con $A - F - E$. Para ver que $B - F - C$, basta comprobar que por el teorema del segmento cruzado (proposición 1.3.10), $E \in \overset{\circ}{\angle} BAC$. En particular, E , P y B se encuentran en el mismo lado de la recta AC . Como $\angle ABC \cong \angle BCE$ y la recta CE es paralela a AB , entonces, E , P y C se encuentran en el mismo lado de la recta AB . Por tanto, $E \in \overset{\circ}{\angle} BAC$. En resumen, se tiene

que $\overline{AB} \cong \overline{EC}$, $\angle ABC \cong \angle ECB$ y $\angle AFB \cong \angle EFC$ (ángulos opuestos por el vértice). Entonces, por el criterio de congruencia LAA (proposición 2.1.7), $\triangle ABF \cong \triangle ECF$. En consecuencia, $\overline{BF} \cong \overline{CF}$.

A continuación, veamos que el punto medio de un segmento es único. Para ello, suponemos que el segmento \overline{BC} tiene dos puntos medios M y M' , con lo cual, se cumple que $B - M - C$, $B - M' - C$, $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ y $\overline{BM'} \cong \overline{M'C}$. Por tanto, como se tiene que $B - M - C$ y $B - M' - C$ entonces, o bien $B - M - M' - C$ o bien $B - M' - M - C$. Supongamos que se cumple que $B - M - M' - C$, entonces $M - M' - C$ y, en consecuencia, $\overline{M'C} < \overline{MC}$. De forma similar, como $A - M - M'$, se llega a que $\overline{AM} < \overline{AM'}$. Con lo cual, concluimos que $\overline{AM} < \overline{AM'} \cong \overline{M'B} < \overline{MB}$, lo que contradice la hipótesis de que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. De manera análoga, si suponemos que $A - M' - M - B$ llegamos a una contradicción. Por lo tanto, se cumple que $M = M'$. \square

Definición 2.1.11 (Mediatriz). *Se llama mediatriz del segmento \overline{AB} a la recta perpendicular a la recta AB que pasa por el punto medio M del segmento \overline{AB} .*

Proposición 2.1.12 (Teorema de la bisectriz). *Dado un ángulo $\angle BAC$, existe una única semirrecta \overrightarrow{AD} entre las semirrectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} con $\angle BAD \cong \angle DAC$. Dicha semirrecta \overrightarrow{AD} se denomina bisectriz del ángulo $\angle BAC$.*

Demostración. Gracias al axioma C1 sabemos que el ángulo $\angle BAC$ se puede representar de forma que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, es decir, que el triángulo $\triangle ABC$ sea isósceles en A. Haciendo uso del teorema del punto medio (proposición 2.1.10), se sabe que existe un punto M con $B - M - C$ y $\overline{BM} \cong \overline{MC}$. Y, aplicando el criterio de congruencia LLL (proposición 1.3.16), llegamos a que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$. Por lo tanto, $\angle BAM \cong \angle CAM$.

Probemos ahora la unicidad. Para ello, suponemos que existe otra semirrecta $\overrightarrow{AM'}$ que sea bisectriz de $\angle BAC$. Por el teorema 1.3.10, sabemos que $\overrightarrow{AM'}$ cortará al segmento \overline{BC} . Podemos sustituir M' por ese punto, que cumplirá que $B - M' - C$. Por lo tanto, M' es el punto medio \overline{BC} , pero como M también era el punto medio de \overline{BC} y este es único, entonces $M = M'$. En consecuencia, las semirrectas son coincidentes. \square

2.2. Medidas de segmentos y ángulos.

Hasta el momento, en nuestro estudio de la geometría no hemos utilizado la medición de segmentos y ángulos. Sin embargo, a continuación, veremos como haciendo uso de los axiomas de continuidad y de algunos resultados probados anteriormente se pueden medir segmentos y ángulos.

Definición 2.2.1 (Medida de segmentos). *Una medida de segmentos es una aplicación μ que a cada segmento \overline{AB} le asocia un número real positivo $\mu(\overline{AB})$ y que verifica las siguientes propiedades:*

1. Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\mu(\overline{AB}) = \mu(\overline{CD})$.
2. Si $A - B - C$, entonces $\mu(\overline{AC}) = \mu(\overline{AB}) + \mu(\overline{BC})$.
3. Existe un segmento $\overline{OO'}$ tal que $\mu(\overline{OO'}) = 1$.

De forma que se puede observar que una vez fijado un segmento “unidad” existe una única manera de medir segmentos, como se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.2. *Sean μ y ρ medidas de segmentos de forma que $\mu(\overline{OO'}) = \rho(\overline{OO'}) = 1$. Se cumple entonces que, para cada segmento \overline{AB} , se tiene $\mu(\overline{AB}) = \rho(\overline{AB})$.*

Proposición 2.2.3. *Sean μ y ρ medidas de segmentos de forma que $\mu(\overline{OO'}) = \rho(\overline{OO'}) = 1$. Se cumple entonces que, para cada segmento \overline{AB} , se tiene $\mu(\overline{AB}) = \rho(\overline{AB})$.*

Demostración. Consideramos un segmento \overline{AB} . Haciendo uso del axioma de Arquímedes se tiene que existe un número entero $n \geq 0$ y puntos A_0, A_1, \dots, A_{n+1} en la semirrecta \overrightarrow{AB} con $A_0 = A$ tales que $A_{i-1} - A_i - A_{i+1}$ y $\overline{A_{i-1}A_i} \cong \overline{OO'}$. Además, se tiene que o bien $B = A_n$ o bien $A_n - B - A_{n+1}$. Analicemos los dos casos:

- Si $B = A_n$ entonces $\mu(\overline{AB}) = \rho(\overline{AB})$.
- Si $A_n - B - A_{n+1}$, entonces, por el teorema del punto medio (proposición 2.1.10), se puede considerar el punto medio $M_{\frac{1}{2}}$ del segmento $\overline{A_n A_{n+1}}$. Distinguiéndose entonces tres posibilidades:

1. Si $B = M_{\frac{1}{2}}$, entonces, por el axioma C2, obtenemos que $\mu(\overline{AB}) = n + \frac{1}{2} = \rho(\overline{AB})$.
2. Si $A_n - B - M_{\frac{1}{2}}$ entonces $n \leq \mu(\overline{AB}) \leq n + \frac{1}{2}$ y $n \leq \rho(\overline{AB}) \leq n + \frac{1}{2}$. Por tanto, $|\mu(\overline{AB}) - \rho(\overline{AB})| \leq \frac{1}{2}$.
3. Si $M_{\frac{1}{2}} - B - A_{n+1}$, entonces $n + \frac{1}{2} \leq \mu(\overline{AB}) \leq n + 1$ y $n + \frac{1}{2} \leq \rho(\overline{AB}) \leq n + 1$. Por lo tanto, $|\mu(\overline{AB}) - \rho(\overline{AB})| \leq \frac{1}{2}$. Suponemos ahora que para un entero $k \geq 1$ tenemos puntos $M_{\frac{i}{2^k}}$ con $0 \leq i \leq 2^k$ tales que $M_{\frac{0}{2^k}} = A_n, M_{\frac{2^k}{2^k}} = A_{n+1}, \overline{M_{\frac{i-1}{2^k}} M_{\frac{i}{2^k}}} \cong \overline{M_{\frac{i}{2^k}} M_{\frac{i+1}{2^k}}$ con $0 < i < 2^k$ y existe un i tal que $0 \leq i < 2^k$ cumpliendo que $M_{\frac{i}{2^k}} - B - M_{\frac{i+1}{2^k}}$ y $|\mu(\overline{AB}) - \rho(\overline{AB})| \leq \frac{1}{2^k}$. Aplicando ahora el teorema del punto medio (proposición 2.1.10) para el entero $k + 1$, se obtienen puntos $M_{\frac{j}{2^{k+1}}}$ con $0 \leq j \leq 2^{k+1}$ tales que $M_{\frac{0}{2^{k+1}}} = A_n, M_{\frac{2^j}{2^{k+1}}} = M_{\frac{j}{2^k}}, M_{\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}} = A_{n+1}, \overline{M_{\frac{j-1}{2^{k+1}}} M_{\frac{j}{2^{k+1}}}} \cong \overline{M_{\frac{j}{2^{k+1}}} M_{\frac{j+1}{2^{k+1}}}}$ con $0 < j < 2^{k+1}$; y o bien existe un j con $0 \leq j \leq 2^{k+1}$ tal que $B = M_{\frac{j}{2^{k+1}}}$ o bien existe un j' tal que $M_{\frac{j'}{2^{k+1}}} - B - M_{\frac{j'+1}{2^{k+1}}}$. Con lo que, en el primer caso, se obtendría que $\mu(\overline{AB}) = \rho(\overline{AB})$ mientras que en el segundo se obtendría que $|\mu(\overline{AB}) - \rho(\overline{AB})| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Por lo tanto, se tiene que para todo entero no negativo l , $|\mu(\overline{AB}) - \rho(\overline{AB})| \leq \frac{1}{2^l}$ y, por la propiedad de Cantor para números reales, se tiene que $|\mu(\overline{AB}) - \rho(\overline{AB})| = 0$. Es decir, $\mu(\overline{AB}) = \rho(\overline{AB})$. \square

Notación. Elegido un segmento $\overline{OO'}$, asociamos a cada segmento \overline{AB} un número real positivo que denotaremos como $|\overline{AB}|$ y llamaremos medida o longitud de AB .

Lema 2.2.4. Si M es el punto medio de un segmento \overline{AB} y se tiene que $M - P - B$ entonces, si Q es un punto de la semirrecta \overline{PB} tal que $\overline{AP} \cong \overline{PQ}$, se cumple que $A - B - Q$.

Demostración. Se tiene que el punto Q tiene que cumplir una de las siguientes opciones: $Q = B, P - Q - B$ o $P - B - Q$. Si suponemos que $Q = B$ entonces P es también el punto medio del segmento \overline{AB} con lo que se tendría que $P = M$, contradiciendo el hecho de que $M - P - B$. Suponemos ahora que $P - Q - B$, entonces se tiene que $\overline{PQ} < \overline{PB} < \overline{MB} \cong \overline{AM}$ contradiciendo que $\overline{AM} < \overline{AP} \cong \overline{PQ}$. Con lo cual, tiene que cumplirse que $A - B - Q$. \square

Teorema 2.2.5. Fijado un segmento unidad $\overline{OO'}$, existe una única aplicación del conjunto de todos los segmentos al conjunto de los números reales positivos, $\overline{AB} \mapsto |\overline{AB}|$, satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (a) $|\overline{OO'}| = 1$.
- (b) $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$.
- (c) $A - B - C \Leftrightarrow |\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.
- (d) $|\overline{AB}| < |\overline{CD}| \Leftrightarrow \overline{AB} < \overline{CD}$.
- (e) Para cada número real positivo a , existe un segmento \overline{AB} tal que $|\overline{AB}| = a$.

Demostración. La demostración de estas propiedades no se incluye al ser muy extensa, sin embargo, puede encontrarse en [11]. \square

Una vez hemos definido la medida de segmentos y hemos analizado sus propiedades más importantes haremos lo mismo para la medida de ángulos. La principal diferencia con la medida de segmentos es que, mientras que para los segmentos escogíamos un segmento como unidad de medida, para los ángulos ya tenemos una clase distinguida, que será la de los ángulos rectos. En nuestro caso, a los ángulos rectos los asociaremos el valor $\frac{\pi}{2}$.

Definición 2.2.6 (Medida de ángulos). A cada ángulo $\angle ABC$ le asociamos un número real del intervalo $(0, \pi)$ que denotaremos como $|\angle ABC|$ y que llamaremos medida del ángulo $\angle ABC$.

Definición 2.2.7 (Ángulos sumables). Dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle A'B'C'$ se dice que son sumables si existe un ángulo $\angle ABD$ tal que $C \in \overset{\circ}{\angle} ABD$ y $\angle CBD \cong \angle A'B'C'$. Definimos la suma parcial como

$$\angle ABC + \angle C'B'D' := \angle ABD.$$

Definición 2.2.8 (Ángulo llano). Un semiplano se denomina también ángulo llano. Asumiremos además que todos los ángulos llanos son congruentes.

Teorema 2.2.9 (Medida de ángulos). Existe una única aplicación del conjunto de todos los ángulos al intervalo $(0, \pi)$, $\angle A \mapsto |\angle A|$, satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (a) $|\angle A| = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \angle A$ es un ángulo recto.
- (b) $|\angle A| = |\angle B| \Leftrightarrow \angle A \cong \angle B$.
- (c) Si D es un punto interior de un ángulo $\angle BAC$, entonces $|\angle BAC| = |\angle BAD| + |\angle DAC|$.
- (d) $|\angle A| < |\angle B| \Leftrightarrow \angle A < \angle B$.
- (e) Si $\angle A, \angle B$ son suplementarios, entonces $|\angle A| + |\angle B| = \pi$.
- (f) Para cada número real positivo $a \in (0, \pi)$, existe un ángulo $\angle ABC$ tal que $|\angle ABC| = a$.

Demostración. La demostración de estas propiedades no se incluye al ser muy extensa, sin embargo, puede encontrarse en [11]. \square

Definición 2.2.10. Dadas dos rectas r y r' que son cortadas por una transversal t , se denominan ángulos consecutivos interiores a los pares de ángulos situados entre las rectas y que se encuentran al mismo lado de la transversal. Siguiendo la notación de la figura 2.1 se tiene que $\angle A'B'B, \angle B'BA$ y $\angle C'B'B, \angle B'BC$ son pares de ángulos consecutivos interiores.

Teorema 2.2.11 (Teorema de los ángulos consecutivos interiores). Si dos rectas distintas cortadas por una transversal tienen una pareja de ángulos consecutivos interiores cuya suma de ángulos es un ángulo llano, entonces las dos rectas son paralelas.

Demostración. Consideramos dos rectas r y r' y una transversal t que corta a ambas. Ver esquema de la figura 2.1. Suponemos que $\angle C'B'B + \angle CBB' = \pi$. Entonces, puesto que $\angle ABB' + \angle CBB' = \pi$, vemos que $\angle C'B'B \cong \angle ABB'$ (proposición 1.3.12). Por lo tanto, por el teorema de los ángulos internos-alternos (teorema 2.1.2), $r \parallel r'$. \square

Proposición 2.2.12. En un triángulo $\triangle ABC$ se tiene que el ángulo mayor es opuesto al lado mayor y que el lado mayor es opuesto al ángulo mayor, es decir, $\overline{BC} > \overline{AC}$ si y solo si $\angle A > \angle B$.

Demostración. “ \Rightarrow ” Supongamos $\overline{BC} > \overline{AC}$, entonces existe un punto D tal que $B - D - C$ y $\overline{CD} \cong \overline{AC}$ (axioma C1). Por la proposición 1.3.8, sabemos que el punto D se encuentra en el interior de $\angle A$, con lo que, $\angle CAD < \angle A$ (teorema 2.2.9). Como el triángulo $\triangle ADC$ es isósceles en C , entonces $\angle CAD \cong \angle ADC$ (proposición 1.3.15). Por lo tanto, aplicando el teorema del ángulo exterior en $\triangle ABD$ (teorema 2.1.6), se tiene que $\angle ADC > \angle B$. En consecuencia, se tiene que $\angle B < \angle ADC = \angle CAD < \angle A$.

“ \Leftarrow ” Supongamos que $\angle A > \angle B$, se tiene entonces tres casos posibles: $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, $\overline{BC} < \overline{AC}$ o $\overline{BC} > \overline{AC}$. Comencemos viendo el caso $\overline{BC} \cong \overline{AC}$, entonces el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles en C y, por la proposición 1.3.15, $\angle A \cong \angle B$, lo que contradice nuestra hipótesis. Veamos ahora que en el caso $\overline{BC} < \overline{AC}$, por la implicación anterior se tiene que $\angle A < \angle B$, llegando de nuevo a una contradicción con nuestra hipótesis. Por lo tanto, se concluye que $\overline{BC} > \overline{AC}$. \square

Teorema 2.2.13 (Desigualdad triangular). Tres puntos distintos no alineados, A, B y C , cumplen que

$$|\overline{AC}| < |\overline{AB}| + |\overline{BC}|.$$

Demostración. Consideramos el triángulo $\triangle ABC$. Por el axioma C1 sabemos que existe un único punto D tal que $A - B - D$ y $\overline{BD} \cong \overline{BC}$. Entonces, como el triángulo $\triangle BCD$ es isósceles, se tiene que $\angle BCD \cong \angle BDC$ (proposición 1.3.15). Además, puesto que $\angle ACD > \angle BCD \cong \angle BDC$, se tiene que $\angle ACD > \angle BDC = \angle ADC$. Por consiguiente, $\overline{AD} > \overline{AC}$ (proposición 2.2.12). Ahora, dado que $\overline{AD} \cong \overline{AB} + \overline{BD}$, obtenemos que $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$ y, consecuentemente, $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| > |\overline{AC}|$.

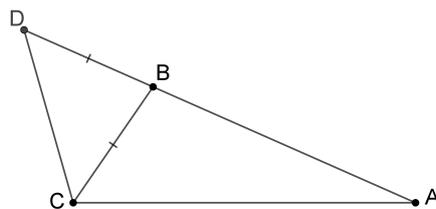


Figura 2.4: Desigualdad triangular. \square

Proposición 2.2.14. Sean $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ dos triángulos con $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. Entonces $\angle A > \angle A'$ si y solo si $\overline{BC} > \overline{B'C'}$.

Demostración. " \Rightarrow ": Suponemos que $\angle A > \angle A'$. Por el axioma C4 sabemos que existe una semirrecta \overrightarrow{AP} entre las semirrectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} tal que $\angle BAP \cong \angle B'A'C'$. Tomamos un punto D en la semirrecta \overrightarrow{AP} tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'C'}$ (axioma C1) y un punto E que sea la intersección de la semirrecta \overrightarrow{AP} con el segmento \overline{BC} de modo que $B - E - C$. Consideramos ahora la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ y denotaremos por F al punto de corte entre la bisectriz y el segmento \overline{CE} , de modo que $C - F - E$. Entonces, aplicando el criterio de congruencia LAL (axioma C6), se tiene que $\triangle ACF \cong \triangle ADF$. Por lo tanto, $\overline{FC} \cong \overline{FD}$. Ahora, por la desigualdad triangular (teorema 2.2.13), se tiene que $\overline{BF} + \overline{FD} > \overline{BD}$. Con lo cual, $\overline{BF} + \overline{FC} > \overline{BD}$ y, dado que $\overline{BF} + \overline{FC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{B'C'} \cong \overline{BD}$, se concluye que $\overline{BC} > \overline{B'C'}$.

" \Leftarrow ": Suponemos que $\overline{BC} > \overline{B'C'}$. En caso de que $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, entonces se tiene que por el criterio de congruencia LAL (axioma C6), $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, con lo que $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y tendríamos una contradicción. Suponemos ahora que $\angle BAC < \angle B'A'C'$, entonces se tendría que $\overline{B'C'} > \overline{BC}$, lo que es otra contradicción. Por tanto, al haber probado que los dos casos anteriores llevan a contradicción, debe cumplirse que $\angle BAC > \angle B'A'C'$.

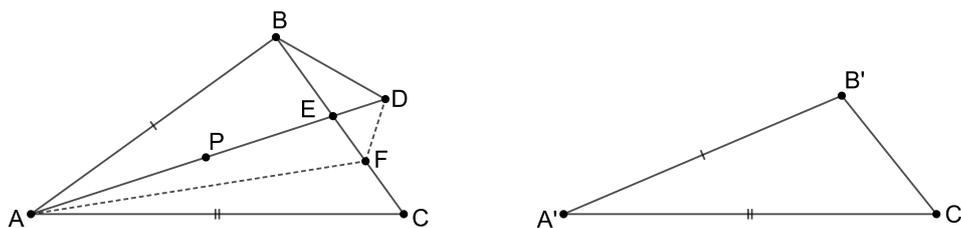


Figura 2.5: Esquema demostración 2.2.14. □

2.3. Teorema de Saccheri-Legendre

Lema 2.3.1. *Dado un triángulo $\triangle ABC$, sea M el punto medio del lado \overline{BC} y sea D un punto en la semirrecta \overrightarrow{AM} tal que $\overline{MD} \cong \overline{AM}$ y $A - M - D$. Trazando el segmento \overline{CD} se tiene que:*

1. *La suma de los ángulos de $\triangle ADC$ es igual a la suma de los ángulos de $\triangle ABC$.*
2. *O bien $|\angle DAC| \leq \frac{1}{2}|\angle BAC|$ o bien $|\angle ADC| \leq \frac{1}{2}|\angle BAC|$.*

Demostración. I. Por el criterio de congruencia LAL (axioma C6) se tiene que $\triangle ABM \cong \triangle DCM$. Por tanto, $\angle MAB \cong \angle MDC$, $\angle MBA \cong \angle MCD$, es decir, $\angle DAB \cong \angle ADC$, $\angle ABC \cong \angle BCD$. Entonces, la suma de los ángulos del triángulo $\triangle ADC$ es

$$|\angle DAC| + |\angle ADC| + |\angle ACB| + |\angle BCD| = |\angle DAC| + |\angle DAB| + |\angle ACB| + |\angle ABC|,$$

que es la suma de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$.

II. Como $|\angle BAC| = |\angle BAD| + |\angle CAD|$ y $|\angle BAD| = |\angle ADC|$, tenemos además que o bien $|\angle CAD| \leq \frac{1}{2}|\angle BAC|$ o bien $|\angle ADC| \leq \frac{1}{2}|\angle BAC|$.

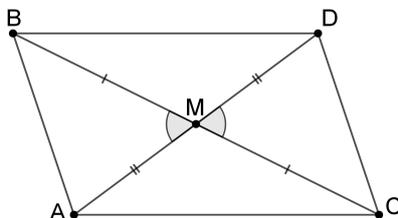


Figura 2.6: Esquema lema 2.3.1. □

Lema 2.3.2. *La suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es más pequeña que un ángulo llano.*

Demostración. Consideramos un triángulo $\triangle ABC$ y, por el teorema del ángulo exterior (teorema 2.1.6) sabemos que el ángulo exterior en $\angle C$ es mayor que $\angle B$. Como el ángulo $\angle C$ y su ángulo exterior suman un ángulo llano, entonces $|\angle B| + |\angle C| < \pi$, es decir, su suma es menor que uno llano. □

Teorema 2.3.3 (Saccheri-Legendre). *Para cualquier triángulo la suma de la medida de sus ángulos es menor o igual que un ángulo llano.*

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo. Suponemos que la suma de los ángulos de un triángulo $\triangle ABC$ es mayor que π , es decir, es igual a $\pi + \epsilon$ con $\epsilon > 0$. Entonces, por el lema 2.3.1, existe otro triángulo $\triangle A_1B_1C_1$ cuyos ángulos suman $\pi + \epsilon$ y $|\angle A_1| \leq \frac{1}{2}|\angle A|$. Por tanto, existe otro triángulo $\triangle A_2B_2C_2$ cuyos ángulos suman $\pi + \epsilon$ y $|\angle A_2| \leq \frac{1}{2}|\angle A_1|$, es decir, $|\angle A_2| \leq \frac{1}{2^2}|\angle A|$. Repitiendo este procedimiento, se obtienen triángulos $\triangle A_kB_kC_k$ cuyos ángulos suman $\pi + \epsilon$ y $|\angle A_k| \leq \frac{1}{2^k}|\angle A|$ con $k \geq 1$. Luego, cuando k es suficientemente grande, se tiene que $|\angle A_k| < \epsilon$ con lo que la suma de los otros ángulos de $\triangle A_kB_kC_k$ debe ser mayor que π , lo que contradice el hecho de que la suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que π (proposición 2.3.2). \square

Corolario 2.3.4. *La suma de las medidas de dos ángulos de un triángulo es menor o igual que la medida del correspondiente ángulo exterior no adyacente.*

Demostración. Consideramos un triángulo $\triangle ABC$ y denotamos al ángulo exterior de $\triangle ABC$ en A por $ext(A)$. Como la suma de A y $ext(A)$ es un ángulo llano, se tiene que

$$|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| \leq |\angle A| + |ext(\angle A)| \Rightarrow |\angle B| + |\angle C| \leq |ext(\angle A)|. \quad \square$$

Además, es natural generalizar el teorema de Saccheri-Legendre a otros polígonos que no sean triángulos. Para ello necesitamos definir el concepto de cuadrilátero convexo.

Definición 2.3.5 (Cuadrilátero convexo). *Un cuadrilátero $\square ABCD$ se dice convexo si tiene un par de lados opuestos, por ejemplo \overline{AB} y \overline{CD} , tales que \overline{CD} está contenido en un semiplano abierto definido por el segmento \overline{AB} y \overline{AB} está contenido en un semiplano abierto definido por \overline{CD} .*

Corolario 2.3.6. *La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo $\square ABCD$ es como mucho 2π .*

Demostración. Comenzamos dividiendo el cuadrilátero $\square ABCD$ por la diagonal \overline{AC} , de modo que se obtienen dos triángulos, $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$. Por el teorema de Saccheri-Legendre (teorema 2.3.3) se tiene que,

$$\begin{aligned} |\angle B| + |\angle BAC| + |\angle ACB| &\leq \pi, \\ |\angle D| + |\angle DAC| + |\angle ACD| &\leq \pi. \end{aligned}$$

Y por la propiedad (c) del teorema 2.2.9 tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} |\angle BAC| + |\angle DAC| &= |\angle BAD|, \\ |\angle ACB| + |\angle ACD| &= |\angle BCD|. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas igualdades en las desigualdades de arriba se obtiene que:

$$|\angle B| + |\angle D| + |\angle BAD| + |\angle BCD| \leq 2\pi. \quad \square$$

2.4. Defecto angular de triángulos.

Definición 2.4.1 (Defecto angular). *Se llama defecto angular de un triángulo $\triangle ABC$ a*

$$\delta_{ABC} := \pi - |\angle A| - |\angle B| - |\angle C|.$$

Proposición 2.4.2 (Aditividad del defecto angular). *Dado un triángulo $\triangle ABC$ y un punto D en el segmento \overline{AB} . Trazando el segmento \overline{CD} para obtener los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ se tiene que:*

$$\delta_{ABC} = \delta_{ACD} + \delta_{BCD}.$$

Demostración. Como el segmento \overline{CD} está entre los segmentos \overline{CA} y \overline{CB} , por el teorema 2.2.9 se tiene que $|\angle DCA| + |\angle DCB| = |\angle ACB|$. Además, como los ángulos $\angle ADC$ y $\angle BDC$ son suplementarios entonces $|\angle ADC| + |\angle BDC| = \pi$. En consecuencia,

$$\pi - (|\angle ADC| + |\angle DCA| + |\angle CAD|) + \pi - (|\angle DCB| + |\angle DBC| + |\angle CDB|) = \pi - (|\angle ABC| + |\angle BCA| + |\angle CAB|).$$

\square

Corolario 2.4.3. *Dado un triángulo $\triangle ABC$ y un punto D en el segmento \overline{AB} . Dibujando el segmento \overline{CD} para obtener triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ entonces la suma de los ángulos de $\triangle ABC$ es igual a π si y solo si la suma de los ángulos de los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ es igual a π .*

Demostración. Suponemos que $\delta ACD = 0$ y $\delta BCD = 0$ entonces, por la proposición 2.4.2, se tiene que $\delta ABC = 0 + 0 = 0$. Recíprocamente, si $\delta ABC = 0$ entonces, por la proposición 2.4.2, se tiene que $\delta ACD + \delta BCD = 0$. Como el defecto de un triángulo nunca puede ser negativo (teorema de Saccheri-Legendre) entonces $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ tienen defecto cero. \square

Faltaría por estudiar si en geometría neutra pueden existir de manera simultánea triángulos con defecto angular nulo y triángulos con defecto angular positivo. Se probará, a continuación, que esto no es posible y, o bien todos tienen defecto nulo o bien todos tienen defecto positivo.

Definición 2.4.4 (Rectángulo). *Un cuadrilátero $\square ABCD$ se denomina rectángulo si los lados opuestos tienen la misma longitud y los cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. Un rectángulo cuyos cuatro lados tienen la misma longitud es un cuadrado.*

Teorema 2.4.5. *Si existe un triángulo cuyos ángulos sumen π entonces la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a π . Esto lo podemos dividir en las siguientes afirmaciones:*

- (a) *Si existe un triángulo cuyos ángulos sumen π entonces existe un rectángulo.*
- (b) *Si existe un rectángulo, entonces para cada triángulo rectángulo sus ángulos suman π .*
- (c) *Si para cada triángulo rectángulo sus ángulos suman π , entonces los ángulos de cualquier triángulo suman π .*

Demostración. Consideramos un triángulo $\triangle ABC$ y suponemos, sin pérdida de generalidad, que $\angle A$ y $\angle B$ son agudos (todo triángulo tiene al menos dos ángulos agudos). Además, por la proposición 2.1.3, existe una única recta CD que sea perpendicular a AB , siendo D el punto de corte entre ambas. Distinguimos ahora posibles casos. Si $D - A - B$ entonces se tiene que $\angle BAC > \angle ADC$ pero $\angle ADC$ es un ángulo recto, por lo tanto llegamos a una contradicción. Razonando del mismo modo, se llega a que $A - B - D$ también es imposible. Por tanto, tiene que cumplirse que $A - D - B$ y los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ son triángulos rectángulos.

(a) Suponemos que los ángulos de $\triangle ABC$ suman π , es decir, $\delta ABC = 0$. Por el corolario 2.4.3, sabemos que los ángulos de los triángulos rectángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ suman π , es decir, tienen defecto angular cero. A partir del triángulo rectángulo $\triangle BCD$ podemos construir un rectángulo $\square BDCE$. Para ello, trazamos la semirrecta \overrightarrow{CP} de modo que $\angle BCP \cong \angle CBD$ (axioma C4). Tomamos un punto E en la semirrecta \overrightarrow{CP} tal que $\overline{CE} \cong \overline{DB}$ (axioma C1). Entonces, aplicando el criterio de congruencia LAL (axioma C6), se tiene que $\triangle CBD \cong \triangle BCE$. Por lo tanto, como $\angle BCD \cong \angle CBE$ y $\angle BEC \cong \angle CDB$, se tiene que $\angle BEC$ es un ángulo recto. Como $\delta CBD = 0$ entonces $\delta BCE = 0$. Además, $\angle DCB + \angle BCE \cong \angle DCE$ es un ángulo recto. Por lo tanto, el cuadrilátero $\square BDCE$ es un rectángulo.

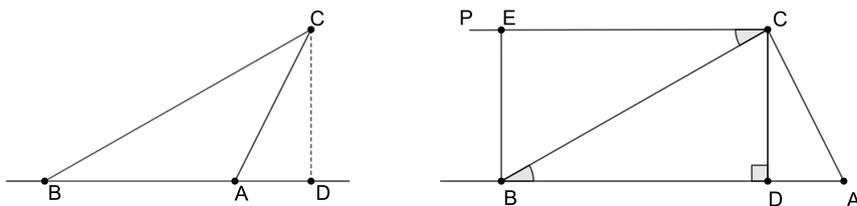


Figura 2.7: Esquema demostración teorema 2.4.5(a).

(b) Consideramos un triángulo rectángulo $\triangle A'B'C'$ siendo $\angle B'$ el ángulo recto y un rectángulo $\square ABCD$ tal que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ y $\overline{CB} > \overline{C'B'}$. Además, como los ángulos de $\square ABCD$ suman 2π y los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ son congruentes, se tiene que su defecto angular es cero. Tomamos ahora un punto P en el segmento \overline{AB} y un punto Q en el segmento \overline{BC} de tal forma que $A - P - B$, $C - Q - B$, $\overline{PB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{QB} \cong \overline{C'B'}$. Por lo tanto, $\triangle PBQ \cong \triangle A'B'C'$. Además, se tiene que por aditividad del defecto angular (proposición 2.4.2), $\delta PBC = 0$. Por tanto, $\delta PBQ = 0$ y, en consecuencia, $\delta A'B'C' = 0$.

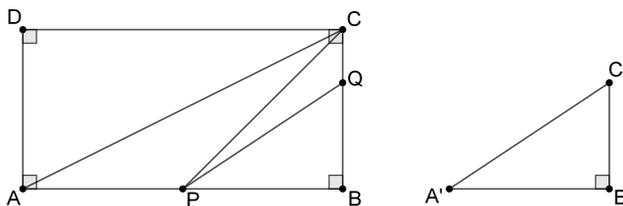


Figura 2.8: Esquema demostración teorema 2.4.5(b).

(c) Consideramos un triángulo $\triangle ABC$ y asumimos que $\angle A$ y $\angle B$ son agudos. Trazando el segmento \overline{CD} perpendicular a \overline{AB} , se tiene que el triángulo $\triangle ABC$ se puede dividir en dos triángulos rectángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$, con lo que ambos tienen defecto angular cero (apartado (b)). En consecuencia, se tiene que por aditividad del defecto angular (proposición 2.4.2), $\delta ABC = 0$ y la suma de los ángulos de $\triangle ABC$ es igual a π . \square

2.5. Cuadriláteros de Saccheri y de Lambert

En este punto, recordamos la definición 1.2.14 de cuadrilátero de Saccheri e introducimos la definición de cuadrilátero de Lambert, ambos conceptos muy utilizados en geometría absoluta.

Definición 2.5.1 (Cuadrilátero de Lambert). *Un cuadrilátero $\square ABCD$ se dice cuadrilátero de Lambert si tiene, al menos, tres ángulos rectos.*

Proposición 2.5.2. *En un cuadrilátero de Saccheri $\square ABCD$ los ángulos cumbre son congruentes.*

Demostración. Consideramos un cuadrilátero $\square ABCD$ con $\angle A$ y $\angle B$ ángulos rectos y con $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (figura 1.3). Trazamos las diagonales \overline{AC} y \overline{BD} . Por el criterio de congruencia LAL (axioma C6) se tiene que $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, con lo que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\angle BAC \cong \angle ABD$. En consecuencia, $\angle CAD \cong \angle DBC$. Además, aplicando de nuevo el criterio LAL (axioma C6), se tiene que $\triangle CAD \cong \triangle DBC$. Por lo tanto, $\angle ADC \cong \angle BCD$, es decir, los ángulos cumbre son congruentes. \square

Proposición 2.5.3. *Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero con dos ángulos rectos consecutivos, $\angle A$ y $\angle B$. Entonces,*

$$(a) \angle C < \angle D \Leftrightarrow \overline{AD} < \overline{BC}.$$

$$(b) \angle C \cong \angle D \Leftrightarrow \overline{AD} \cong \overline{BC}.$$

Demostración. (a) " \Leftarrow ": Suponemos que $\overline{AD} < \overline{BC}$. Tomamos un punto E en el segmento \overline{BC} tal que $\overline{BE} \cong \overline{AD}$ y $B - E - C$ (axioma C1). Un esquema de esta situación puede verse en la figura 2.9. Como los lados \overline{BC} y \overline{AD} son paralelos se tiene que B, E y C están en el mismo lado de AD . Veamos ahora que los puntos A y B se encuentran al mismo lado de la recta DC . Razonamos por reducción al absurdo. Si A y B estuviesen en lados contrarios de la recta DC , esta cortaría al segmento \overline{AB} en un punto P tal que $A - P - B$. Como los puntos C, D y P son colineales entonces, por el teorema del ángulo exterior (teorema 2.1.6), se tiene que $\angle APD (= \angle APC)$ es mayor que $\angle B$ y $\angle BPD$ es mayor que $\angle A$. Ahora, puesto que $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos rectos, entonces la suma de los ángulos $\angle APD$ y $\angle BPD$ no es un ángulo llano, lo que es una contradicción. Por tanto, A y B se encuentran al mismo lado de la recta DC .

Veamos ahora que $B \in \overset{\circ}{\angle} ADC$. Como $B - E - C$ entonces se tiene que $E \in \overset{\circ}{\angle} ADC$. Por lo tanto, la semirrecta \overrightarrow{DE} se encuentra comprendida entre las semirrectas \overrightarrow{DA} y \overrightarrow{DC} . En consecuencia, $\angle ADE \cong \angle BED$, y de nuevo por el teorema del ángulo exterior (teorema 2.1.6),

$$\angle D > \angle ADE \cong \angle BED > \angle C.$$

" \Rightarrow ": Suponemos que $\angle C < \angle D$. Distinguimos ahora los posibles casos. Si $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ entonces, por la proposición 2.5.2, se cumple que $\angle C \cong \angle D$, lo que contradice nuestra suposición. Si $\overline{BC} < \overline{AD}$ entonces, por el mismo argumento anterior, se tiene que $\angle C > \angle D$, lo que es otra contradicción. Por lo tanto, como las dos opciones anteriores llevan a contradicción, debe cumplirse que $\overline{AD} < \overline{BC}$.

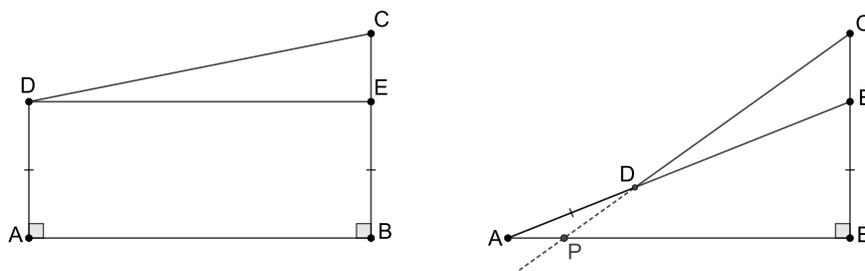


Figura 2.9: $\square ABED$ es un cuadrilátero de Saccheri.

(b) Se deduce del apartado a). \square

Proposición 2.5.4. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero de Lambert con ángulos rectos en $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$. Entonces,

- (a) El ángulo $\angle D$ es agudo o recto.
- (b) Si $\angle D$ es un ángulo recto, entonces los lados opuestos de $\square ABCD$ son congruentes.
- (c) Si el ángulo $\angle D$ es agudo entonces $\overline{DA} > \overline{CB}$ y $\overline{CD} > \overline{AB}$.

Demostración. (a) Como un cuadrilátero de Lambert es convexo y su ángulo suma es menor o igual que 2π (corolario 2.3.6) entonces,

$$|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| + |\angle D| \leq 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + |\angle D| \leq 2\pi \Rightarrow |\angle D| \leq \frac{\pi}{2}.$$

(b) El cuadrilátero $\square ABCD$ es un rectángulo. Por lo tanto, por la proposición 2.5.3, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

(c) Como $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son ángulos rectos entonces $\angle D < \angle A$ y $\angle D < \angle C$. Por lo tanto, por la proposición 2.5.3, se tiene que $\overline{AB} < \overline{DC}$ y $\overline{CB} < \overline{DA}$. \square

Lema 2.5.5. Consideramos un triángulo $\triangle ABC$ tal que $\angle C$ es un ángulo recto y $\angle A$ es un ángulo agudo y se extiende el lado \overline{AB} hasta un punto B' tal que $A - B - B'$ y $\overline{AB} \cong \overline{BB'}$. Se extiende el lado \overline{CB} hasta un punto P tal que $C - B - P$ y $B'P$ es perpendicular a BC y se extiende el lado \overline{AC} hasta un punto C' de modo que $A - C - C'$ y $B'C'$ es perpendicular a AC . Entonces se tiene que,

- (a) $\overline{B'C'}$ es al menos el doble de \overline{BC} .
- (b) $\overline{AC'}$ es al menos el doble de \overline{AC} .

Demostración. Como se tiene que $\overline{BA} \cong \overline{BB'}$, $\angle BCA \cong \angle BPB'$ que es un ángulo recto y $\angle ABC \cong \angle B'BP$ entonces se cumple que, por el criterio LAA (proposición 2.1.7), $\triangle ACB \cong \triangle B'BP$. Por tanto, $\overline{BC} \cong \overline{BP}$ y $\overline{B'P} \cong \overline{AC}$. Nótese además que $\square CC'B'P$ es un cuadrilátero de Lambert con ángulos rectos $\angle C'CP$, $\angle CC'B'$ y $\angle CPB'$. Entonces, por la proposición 2.5.4, se tiene que $|\overline{B'C'}| \geq |\overline{PC}| = 2|\overline{BC}|$ y $|\overline{CC'}| \leq |\overline{PB'}| = |\overline{AC}|$. En consecuencia, $|\overline{B'C'}| \geq 2|\overline{BC}|$ y $|\overline{AC'}| \leq 2|\overline{AC}|$.

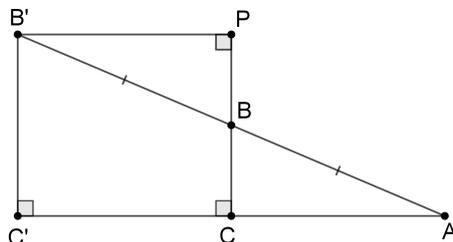


Figura 2.10: Esquema lema 2.5.5. \square

2.6. Equivalencia entre los postulados de las paralelas

Probaremos en esta sección que el V postulado de Euclides y el axioma de las paralelas de Hilbert son equivalentes.

Teorema 2.6.1. V postulado de Euclides ¹ \Leftrightarrow Axioma de las paralelas de Hilbert ².

Demostración. “ \Rightarrow ”: Consideramos una recta r y un punto P el cual no está en la recta. Trazamos la recta perpendicular a r por el punto P , que denotaremos por t (corolario 2.1.3). Consideramos Q el punto de corte entre r y t . A continuación, trazamos la recta perpendicular a t por el punto P , la cual denotaremos por s (corolario 2.1.3). Además, por el corolario 2.1.3, sabemos que r y s son paralelas. Por tanto, tenemos que ver que s es la única paralela a r que pasa por el punto P . Suponemos que existe otra recta s' que lo cumple. Consideramos entonces dos puntos $A, B \in s'$ con $A - P - B$. Notemos que los ángulos $\angle APQ$ y

¹V postulado de Euclides. Si dos rectas son cortadas por una transversal de modo que el ángulo suma de dos ángulos interiores en un mismo lado de la transversal es menor que π , entonces las dos rectas se cortan en un punto a ese lado de la transversal.

²Axioma de las paralelas de Hilbert. Por un punto P que no se encuentra en una recta r pasa como mucho una recta s paralela a r .

$\angle BPQ$ son suplementarios. Por lo tanto, como no son ángulos rectos (si lo fuesen s sería perpendicular a t), uno de ellos deberá ser agudo. En consecuencia, la suma de dicho ángulo agudo con el ángulo interno definido por r en el mismo lado de la transversal t será menor que π y, por el V postulado de Euclides, se tiene que la recta s' corta a r . En conclusión, s' y r no son paralelas.

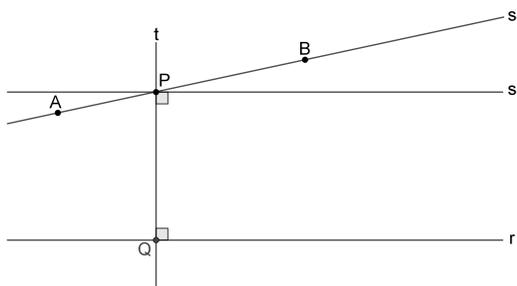


Figura 2.11: V postulado de Euclides implica axioma de las paralelas de Hilbert.

“ \Leftarrow ”: Consideramos dos rectas distintas r y s y una transversal t que corta a r y a s en los puntos P y Q , respectivamente. Sean A y B dos puntos en las rectas r y s , respectivamente, y que se encuentran al mismo lado de t . Suponemos que $|\angle APQ| + |\angle BQP| < \pi$. Tomamos un punto D tal que $B - Q - D$ (axioma O2), y por ser $\angle PQD$ y $\angle PQB$ ángulos suplementarios, se tiene que $|\angle PQD| = \pi - |\angle PQB|$. Además, $|\angle PQD| \neq |\angle APQ|$ ya que si fuesen iguales, se tendría que $|\angle APQ| + |\angle BQP| = |\angle PQD| + |\angle BQP| = \pi - |\angle BQP| + |\angle BQP| = \pi$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, existirá una semirrecta \overrightarrow{PF} tal que $\angle PQD \cong \angle FPQ$, con el punto F situado en el mismo que el punto A respecto de t (axioma C4). Denotaremos ahora a la recta $r' = PF$. Aplicando el teorema de los ángulos internos-alternos (teorema 2.1.2) se tiene que r' y s son paralelas y, por el axioma de las paralelas de Hilbert, llegamos a que r no puede ser paralela a s .

Denotamos ahora por C al punto de corte entre r y s , nos falta probar que C se encuentra en el mismo lado que el punto A respecto de t . Razonamos por reducción al absurdo y suponemos que están en lados contrarios. Consideramos el triángulo $\triangle CPQ$. Los ángulos $\angle CPQ$ y $\angle AQP$ son suplementarios, al igual que los ángulos $\angle CQP$ y $\angle BQP$. Como por hipótesis se tenía que $|\angle APQ| + |\angle BQP| < \pi$ entonces $|\angle CPQ| + |\angle CQP| = \pi - |\angle APQ| + \pi - |\angle BQP| = 2\pi - (|\angle APQ| + |\angle BQP|) > \pi$, lo que es una contradicción con 2.3.3.

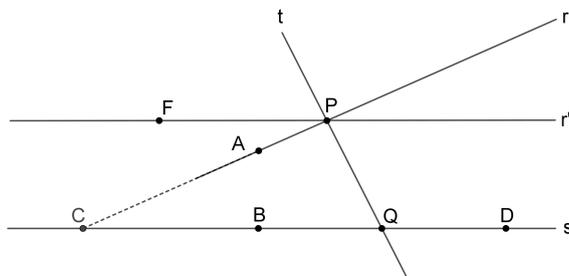


Figura 2.12: Axioma paralelas de Hilbert implica V postulado de Euclides. □

Definición 2.6.2. Dadas dos rectas que son cortadas por una transversal, se denominan *ángulos correspondientes* a los que están al mismo lado de las paralelas y al mismo lado de la transversal.

Proposición 2.6.3. Bajo el axioma de las paralelas de Hilbert, si r y s son dos rectas paralelas que son cortadas por una recta transversal t , entonces se cumple que:

- (a) Los ángulos internos alternos son congruentes.
- (b) Ángulos correspondientes son congruentes.
- (c) La suma de las medidas de ángulos consecutivos interiores es π .
- (d) La suma de la medida de los ángulos de un triángulo es π .

Demostración. (a) Consideramos dos rectas paralelas r y s y una transversal t . Sean P y Q los puntos de corte de t con las rectas r y s respectivamente. Tomamos un punto A en r y un punto B en s de forma que se encuentren en lados distintos de la recta t . Por tanto, existirá un punto A' en el mismo lado que A respecto de t , tal que $\angle A'PQ \cong \angle BQP$ (axioma C4). Denotaremos por $r' = PA'$. Por lo tanto, por el

teorema de los ángulos internos-alternos (teorema 2.1.2) se tiene que r' y s son paralelas. Sin embargo, por el axioma de las paralelas de Hilbert, se tiene que existe una única paralela a r por el punto Q . Por lo tanto, r y r' coinciden y $\angle APQ = \angle A'PQ \cong \angle BQP$.

(b) Se sigue del apartado (a), del hecho de que ángulos opuestos son congruentes y de que los suplementarios de ángulos congruentes son congruentes (proposición 1.3.12).

(c) Se sigue del hecho de que la suma de ángulos suplementarios es π .

(d) Procedemos a extender el segmento \overline{AC} hasta el punto E y trazar la semirrecta \overrightarrow{CD} tal que $\angle BCD \cong \angle B$. Entonces, por el teorema de los ángulos internos-alternos (proposición 2.1.2), la semirrecta \overrightarrow{CD} es paralela al segmento \overline{AB} y, en consecuencia, $\angle DCE \cong \angle A$. Por consiguiente, $|\angle A| + |\angle B| + |\angle C| = |\angle DCE| + |\angle BCD| + |\angle ACB| = \pi$.

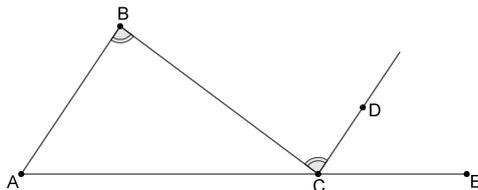


Figura 2.13: El ángulo suma de un triángulo es un ángulo llano. □

Teorema 2.6.4. *Si la suma de los ángulos de un triángulo mide π entonces estamos bajo el axioma de las paralelas de Hilbert.*

Demostración. Consideramos una recta r y un punto P que no se encuentra en la recta r . Sea t la única recta perpendicular a r que pasa por P (corolario 2.1.3). Denotamos por Q el punto de corte entre r y t . Entonces, por el corolario 2.1.3, por el punto P pasa una única recta s perpendicular a t y paralela a r . Trazamos ahora una recta n distinta de s que pasa por el punto P y es paralela a r . Tomamos un punto R en la recta s de modo que n pasa por el interior de $\angle QPR$. Consideramos otro punto S en la recta n de modo que $S \in \angle QPR$, por lo que el ángulo $\angle RPS$ es agudo. Ver figura 2.14.

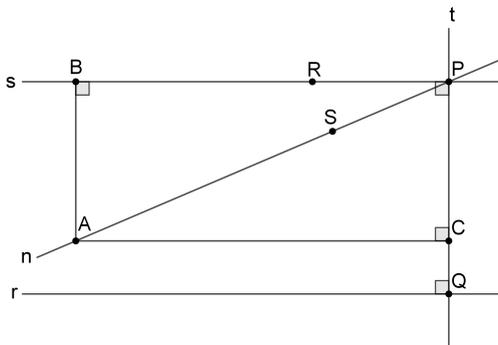


Figura 2.14: La existencia de rectángulos implica la unicidad de la paralela.

Sea $A \in \overrightarrow{PS}$ un punto perteneciente a la semirrecta abierta. Trazamos el segmento perpendicular \overline{AB} a la recta s con $B \in s$ y el segmento perpendicular \overline{AC} a la recta t con $C \in t$. Notemos que las rectas r y s y el segmento \overline{AC} son paralelos entre si. Por lo tanto, los puntos A y C se encuentran en el mismo lado de las rectas r y s . Con lo cual, se tiene que $P - C - Q$. Análogamente, se tiene que la recta t y el segmento \overline{AB} son paralelos, por lo que los puntos A y B están en el mismo lado de la recta t y los puntos P y C están en el mismo lado de \overline{AB} . Por consiguiente, el cuadrilátero $\square PBAC$ es convexo.

Notemos que los ángulos $\angle ACP$, $\angle CPB$ y $\angle PBA$ son ángulos rectos. Dado que cada triángulo tiene ángulo suma igual a π entonces $\angle CPA + \angle PAC$ es un ángulo recto y, vemos entonces que, $\angle APB \cong \angle PAC$. Por consiguiente, aplicando el criterio de congruencia LAA (proposición 2.1.7), se tiene que $\triangle PAB \cong \triangle APC$ y, por lo tanto, $\overline{PC} \cong \overline{AB}$.

Por el axioma de Aristóteles, podemos tomar ahora el punto A de modo que $\overline{AB} > \overline{PQ}$. Se tiene entonces que $\overline{PC} > \overline{PQ}$, lo cual es imposible. (El axioma de Aristóteles se puede deducir del axioma de Arquímedes cuando existen rectángulos. Sin embargo, no es necesario asumir la existencia de rectángulos para obtener el axioma de Aristóteles a partir del axioma de Arquímedes). □

Capítulo 3

Geometría hiperbólica en el plano

Como se mencionó anteriormente, la geometría hiperbólica (o geometría de Lobachevsky) es un modelo de geometría obtenido al asumir todos los axiomas de la geometría absoluta y reemplazar el axioma de las paralelas por su negación, el axioma hiperbólico. Por tanto, todos los resultados vistos en el capítulo anterior son también válidos en geometría hiperbólica. En este capítulo se realizará un estudio de las principales propiedades de esta geometría y se presentarán dos modelos “euclidianos” de la geometría hiperbólica. Para su elaboración se han utilizado las siguientes referencias: hasta la sección 3.3 se ha seguido [4], [9] y [17]; para la sección 3.4 se ha usado [10] y [20]; para las secciones 3.5 y 3.6 se ha utilizado [9], [13], [16], [23] y [24].

Comencemos enunciando el axioma hiperbólico:

Axioma hiperbólico (Negación del axioma de las paralelas de Hilbert). Existen una recta r y un punto P que no está en dicha recta de modo que al menos dos rectas distintas paralelas a r pasan por P .

Teorema 3.0.1. *En geometría hiperbólica, la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es menor que π .*

Demostración. En el teorema 2.6.4 vimos que si existían triángulos cuyos ángulos sumasen π entonces nos encontrábamos bajo el axioma de las paralelas de Hilbert, por tanto, como estamos bajo el axioma hiperbólico, se tiene que la suma debe ser menor que π . \square

Corolario 3.0.2. *En geometría hiperbólica, la suma de las medidas de los ángulos de cualquier cuadrilátero convexo es menor que 2π .*

Demostración. Consideramos un cuadrilátero convexo $\square ABCD$ y trazamos la diagonal \overline{AC} , que lo divide en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$. Por el teorema 3.0.1, sabemos que los ángulos de esos triángulos suman menos que π . Como el cuadrilátero es convexo, entonces la semirrecta \overrightarrow{AC} se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} y la semirrecta \overrightarrow{AC} se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{CB} y \overrightarrow{CD} , con lo que, por la proposición 2.2.9, se tiene que $|\angle BAC| + |\angle CAD| = |\angle BAD|$ y $|\angle ACB| + |\angle ACD| = |\angle BCD|$. Sumando los seis ángulos, se observa que la suma es menor que 2π . \square

Corolario 3.0.3. *Los rectángulos no existen.*

Demostración. Consecuencia directa del corolario anterior. \square

Usando este último corolario se puede establecer una versión universal del axioma hiperbólico.

Teorema 3.0.4 (Teorema hiperbólico universal). *En geometría hiperbólica, para cada recta r y para cada punto P que no se encuentra en la recta r , se tiene que por el punto P pasan al menos dos rectas distintas paralelas a r . De hecho, existen infinitas paralelas a r por el punto P .*

Demostración. Trazamos la recta perpendicular a recta r por el punto P y denotamos por Q al punto de corte entre ambas. Trazamos ahora la recta s que pasa por el punto P y es perpendicular a PQ . Por el corolario 2.1.3, sabemos que r y s son paralelas. Consideramos un punto $A \in r$ y trazamos la perpendicular a r por A , que será denotada por t . A continuación, trazamos una recta perpendicular PB a la recta t . Ahora bien, como las rectas PB y r son perpendiculares a la recta t se tiene que son paralelas (corolario 2.1.3). Por consiguiente, se obtiene que las rectas s y PB son rectas distintas, ya que en caso contrario se obtendría que el cuadrilátero $\square PQAB$ es un rectángulo, contradiciendo el corolario 3.0.3.

Para ver que en realidad existen infinitas paralelas, consideramos un punto A' en la recta r que sea distinto de Q y de A . Trazamos la perpendicular t' a la recta r por el punto A' . Se tiene ahora que existe una recta

PB' perpendicular a t' y que se corta con ella en B' . Ahora, si $PB = PB'$ entonces se tiene que $\square AA'B'B$ es un rectángulo, lo cual es imposible. Por lo tanto, PB y PB' son rectas distintas. Por consiguiente, hemos demostrado que para cada punto A en la recta r distinto de Q , las rectas PB son todas distintas y existen, por lo tanto, infinitas paralelas. \square

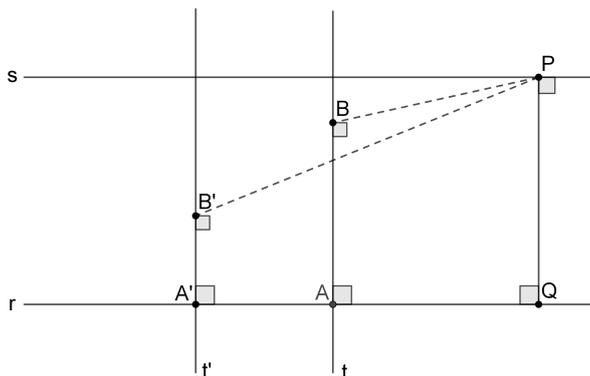


Figura 3.1: Teorema hiperbólico universal.

Definición 3.0.5 (Triángulos semejantes). *Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se dice que son semejantes si puede establecerse una correspondencia vértice a vértice de modo que sus ángulos son congruentes, es decir, $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\angle C \cong \angle C'$.*

Teorema 3.0.6 (Criterio de congruencia AAA). *En geometría hiperbólica, si dos triángulos son semejantes entonces son congruentes.*

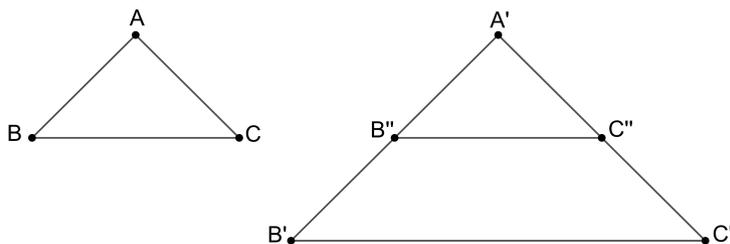


Figura 3.2: En geometría hiperbólica, los triángulos semejantes son congruentes.

Demostración. Consideramos dos triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$. Razonaremos por reducción al absurdo, es decir, suponemos que la afirmación del teorema es falsa y que $\triangle ABC \not\cong \triangle A'B'C'$. Por lo tanto, $\overline{AB} \not\cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \not\cong \overline{A'C'}$ y $\overline{BC} \not\cong \overline{B'C'}$, ya que en caso contrario, se tendría que son triángulos congruentes por el criterio de congruencia ALA (proposición 1.3.13). Suponemos ahora que $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ y que $\overline{AC} < \overline{A'C'}$. Por el axioma C1, podemos tomar un punto B'' en la semirrecta $\overrightarrow{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B''}$ y $A' - B'' - B'$ y un punto C'' en la semirrecta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$ y $A' - C'' - C'$. Por lo tanto, si aplicamos el criterio de congruencia LAL (axioma C6), se tiene que $\triangle ABC \cong \triangle A'B''C''$ y, en consecuencia, $\angle A'B''C'' \cong \angle B \cong \angle B'$ y $\angle A'C''B'' \cong \angle C \cong \angle C'$. Entonces, por la proposición 2.6.3, las rectas $B''C''$ y $B'C'$ son paralelas y, por tanto, se tiene que $\square B'C''C''B''$ es un cuadrilátero convexo. Ahora bien, puesto que los ángulos $\angle A'B''C''$ y $\angle B'B''C''$ son suplementarios, los ángulos $\angle A'C''B''$ y $\angle C'C''B''$ también lo son y, además, se tiene que $\angle B' \cong \angle A'B''C''$ y $\angle C' \cong \angle A'C''B''$. Por lo tanto, la suma de los ángulos del cuadrilátero $\square B'C''C''B''$ es 2π y hemos llegado a una contradicción. \square

En resumen, el teorema anterior establece que, en geometría hiperbólica, es imposible agrandar o encoger un triángulo sin distorsionarlo. Otra consecuencia de dicho teorema es que, en geometría hiperbólica, la medida de un segmento puede determinarse con la ayuda de un ángulo, lo cual en ocasiones, se expresa diciendo que la geometría hiperbólica tiene una medida absoluta de longitud.

3.1. Paralelas que admiten una perpendicular común

Definición 3.1.1 (Puntos equidistantes). *Dadas dos rectas r y r' y puntos A, B, C, \dots que se encuentran en la recta r . Sean $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \dots$ segmentos perpendiculares a r' que van desde A, B, C, \dots hasta los puntos A', B', C', \dots , respectivamente, que están situados en la recta r' . Entonces, si todos estos segmentos perpendiculares son congruentes entre sí, se dice que los puntos A, B, C, \dots son equidistantes de la recta r' .*

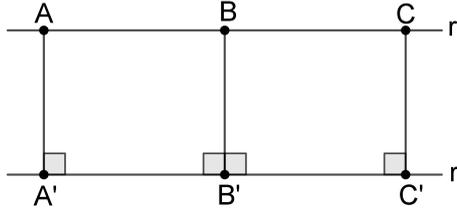


Figura 3.3: Los puntos A , B y C son equidistantes de r' .

Teorema 3.1.2. *En geometría hiperbólica, dadas dos rectas paralelas distintas r y r' se tiene que cualquier conjunto de puntos en r que equidista de r' contiene como mucho dos puntos.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo, suponemos que existe un conjunto de tres puntos A , B y C en la recta r que equidistan de la recta r' . Entonces, se tiene que los cuadriláteros $\square ABB'A'$, $\square ACC'A'$ y $\square BCC'B'$ son cuadriláteros de Saccheri, ver esquema figura 3.3. Por lo tanto, los ángulos cumbre de los cuadriláteros de Saccheri son congruentes, es decir, $\angle BAA' \cong \angle ABB'$, $\angle CAA' \cong \angle ACC'$ y $\angle CBB' \cong \angle BCC'$. Por consiguiente, $\angle ABB' \cong \angle CBB'$ (axioma C5). Dado que los ángulos $\angle ABB'$ y $\angle CBB'$ son suplementarios, entonces deben ser ángulos rectos y, en consecuencia, todos los cuadriláteros $\square ABB'A'$, $\square ACC'A'$ y $\square BCC'B'$ son rectángulos, lo cual es imposible (corolario 3.0.3). \square

Lema 3.1.3. *El segmento que une los puntos medios de la base y la cumbre de un cuadrilátero de Saccheri es perpendicular tanto a la base como a la cumbre, además, este segmento es más corto que los lados.*

Demostración. Consideramos un cuadrilátero de Saccheri $\square ABB'A'$ con ángulos rectos en la base $\angle A'$ y $\angle B'$ y lados opuestos iguales $\overline{AA'} \cong \overline{BB'}$. Sean M y M' los puntos medios de \overline{AB} y $\overline{A'B'}$. Trazamos ahora los segmentos $\overline{A'M}$ y $\overline{B'M}$. Notemos que $\overline{AA'} \cong \overline{BB'}$, $\angle A \cong \angle B$ y $\overline{AM} \cong \overline{BM}$. Entonces, por el criterio LAL (axioma C6), se tiene que $\triangle A'AM \cong \triangle B'BM$. Por consiguiente, $\overline{A'M} \cong \overline{B'M}$ y, aplicando el criterio LLL (proposición 1.3.16), se llega a que $\triangle A'MM' \cong \triangle B'MM'$. Por lo tanto, se tiene que $\triangle A'MM' \cong \triangle B'MM'$. Consecuentemente, los ángulos $\angle A'MM' \cong \angle B'MM'$ son rectos y, entonces, $\overline{MM'}$ es perpendicular a la base $\overline{A'B'}$. Notemos ahora que $\triangle A'MM' \cong \triangle B'MM'$ y que $\angle AMA' \cong \angle BMB'$. Entonces, $\angle A'MM' \cong \angle B'MM'$ por suma de ángulos. Por lo tanto, $\angle AMM'$ y $\angle BMM'$ son ángulos rectos, lo que implica que $\overline{MM'}$ es perpendicular a la cumbre \overline{AB} .

Veamos ahora que el segmento es más corto que los lados. Consideramos el cuadrilátero $\square A'M'MA$, que será un cuadrilátero de Lambert por tener tres ángulos rectos. Por tanto, como en geometría hiperbólica los ángulos de cualquier convexo suman menos que 2π entonces el ángulo $\angle A'AM$ es un ángulo agudo. Ahora, por la proposición 2.5.4, se tiene que $\overline{AA'} > \overline{MM'}$. De forma análoga, se obtiene que $\overline{BB'} > \overline{MM'}$. \square

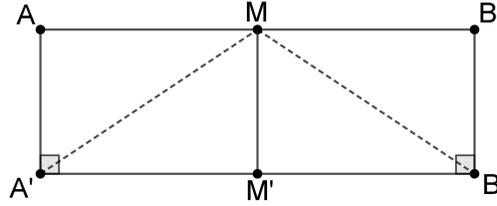


Figura 3.4: Segmento perpendicular que une los puntos medios de la base y la cumbre.

Proposición 3.1.4. *En geometría hiperbólica, si para dos rectas paralelas r y r' existe un par de puntos A y B en la recta r que equidistan de r' , entonces r y r' tienen un segmento perpendicular común que es, además, el segmento más corto entre r y r' .*

Demostración. Consideramos dos rectas r, r' y dos puntos $A, B \in r$ que equidistan de r' . Se forma entonces el cuadrilátero de Saccheri $\square A'B'BA$, siendo $A', B' \in r'$ los extremos de los segmentos perpendiculares desde A y B , respectivamente. Consideramos ahora los puntos M y M' que serán, respectivamente, los puntos medios de los segmentos \overline{AB} y $\overline{A'B'}$. Haciendo uso del lema 3.1.3 se sigue el resultado. \square

Proposición 3.1.5. *En geometría hiperbólica, si dos rectas r y r' tienen un segmento perpendicular común $\overline{MM'}$, entonces son paralelas y el segmento $\overline{MM'}$ es único. Además, si A y B son dos puntos cualesquiera que pertenecen a la recta r y tales que el punto M es el punto medio del segmento \overline{AB} , entonces los puntos A y B equidistan de la recta r' .*

Demostración. Por el corolario 2.1.3 sabemos que las rectas r y r' son paralelas. Veamos ahora que el segmento perpendicular común es único. Si existiese otro segmento perpendicular común $\overline{NN'}$ con $N \in r$ y $N' \in r'$, entonces el cuadrilátero $\square M'N'NM$ debería ser un rectángulo, lo cual es imposible

(corolario 3.0.3). Supongamos ahora que M es el punto medio del segmento \overline{AB} . Trazamos dos segmentos perpendiculares a la recta r , $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, y tenemos que probar que son congruentes. Ver figura 3.5. Se tiene que, por el criterio de congruencia LAL (axioma C6), $\triangle AM'M \cong \triangle BM'M$. En consecuencia, $\overline{AM'} \cong \overline{BM'}$ y $\angle AM'M \cong \angle BM'M$. Ahora, haciendo uso del teorema 2.2.9, se tiene que $|\angle A'M'A| = \frac{\pi}{2} - |\angle AM'M| = \frac{\pi}{2} - |\angle BM'M| = |\angle B'M'B|$, con lo cual, $\angle A'M'A \cong \angle B'M'B$. Por consiguiente, aplicando el criterio de congruencia LAA (proposición 2.1.7), se tiene que $\triangle AA'M' \cong \triangle BB'M'$, con lo que los lados $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son congruentes.

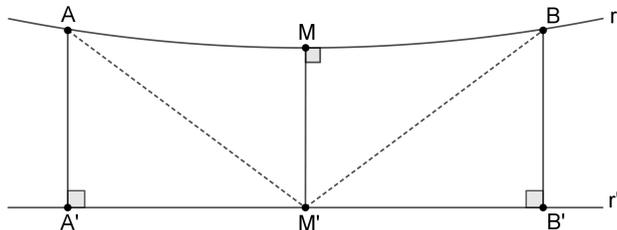


Figura 3.5: Esquema demostración 3.1.5. □

3.2. Semirrectas paralelas límite

Definición 3.2.1 (Semirrectas paralelas límite). *Sea r una recta en geometría hiperbólica y sea P un punto que no esté en la recta r . Consideramos una recta s que pasa por P y que es paralela a la recta r con la semirrecta \overrightarrow{PR} quedando a la izquierda de P . Se traza el segmento \overline{PQ} perpendicular a la recta r con el punto $Q \in r$. Consideramos las semirrectas situadas entre las semirrectas \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} . Se llama semirrecta paralela límite a izquierda a la recta r por el punto P a la semirrecta \overrightarrow{PX} tal que no corta con la recta r pero que cualquier otra semirrecta entre \overrightarrow{PX} y \overrightarrow{PQ} corta a la recta r . De manera análoga, se define la semirrecta paralela límite a derecha a la recta r por el punto P en el lado opuesto del segmento \overline{PQ} .*

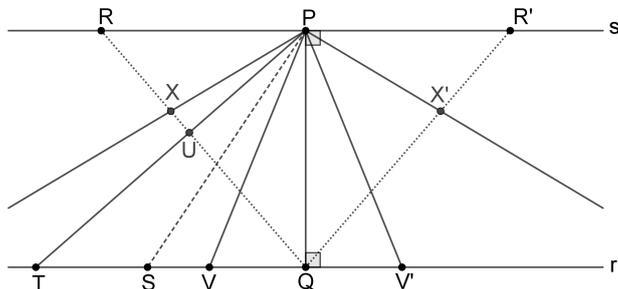


Figura 3.6: Semirrectas paralelas límite.

Teorema 3.2.2. *En geometría hiperbólica, si r es una recta y P un punto que no se encuentra en la recta r , dado un segmento \overline{PQ} perpendicular a la recta r con el punto $Q \in r$, entonces existen dos semirrectas no opuestas \overrightarrow{PX} y $\overrightarrow{PX'}$ en lados distintos de \overline{PQ} satisfaciendo que:*

- Las semirrectas \overrightarrow{PX} y $\overrightarrow{PX'}$ no se cortan con la recta r .
- Una semirrecta \overrightarrow{PY} se corta con r si y solo si está entre las semirrecta \overrightarrow{PX} y $\overrightarrow{PX'}$.
- $\angle XPQ \cong \angle X'PQ$.

Demostración. Sea s la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al segmento \overline{PQ} . Tomamos un punto $R \in s$ a la izquierda de P y un punto $R' \in s$ a la derecha de P . Trazamos los segmentos \overline{QR} y $\overline{QR'}$. Entonces, todas las semirrectas entre \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} , ambas incluidas, serán representadas por \overrightarrow{PY} con $Y \in \overline{QR}$. La figura 3.6 servirá de esquema para la demostración.

(a) Consideramos el conjunto de puntos $Y \in \overline{QR}$ tales que la semirrecta \overrightarrow{PY} no se corta con la recta r , que denotaremos por Σ_1 . Consideramos ahora el conjunto Σ_2 , que será el complementario de Σ_1 en \overline{QR} . Como ambos conjuntos son convexos se tiene que Σ_1, Σ_2 forman una cortadura de Dedekind de \overline{QR} . Por tanto, existe un único punto $X \in \overline{QR}$ tal que uno de los conjuntos Σ_1 o Σ_2 es una semirrecta con vértice en X y el otro es el complementario. Veamos que $X \in \Sigma_1$. Razonamos por reducción al absurdo y suponemos que $X \in \Sigma_2$, es decir, que la semirrecta \overrightarrow{PX} corta a la recta r en un punto S . Tomamos ahora un punto T en la recta r tal que $T - S - Q$. Por lo tanto, la semirrecta \overrightarrow{PT} se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{PR} y \overrightarrow{PX} .

En consecuencia, \overrightarrow{PT} corta al segmento \overline{QR} en un punto U con $R - U - X$, es decir, $U \in \Sigma_2$, lo que es una contradicción. Para probar la existencia de la semirrecta $\overrightarrow{PX'}$ se hace de forma análoga.

(b) Como $R \in \Sigma_1$ y $Q \in \Sigma_2$, se tiene que $R - X - Q$. Es claro que, si una semirrecta \overrightarrow{PY} está contenida en el semiplano abierto opuesto a $\overset{\circ}{H}(s, Q)$, entonces la semirrecta \overrightarrow{PY} no se corta con r . Por lo tanto, vemos que la semirrecta \overrightarrow{PY} se corta con r si y solo si \overrightarrow{PY} está entre las semirrectas \overrightarrow{PX} y $\overrightarrow{PX'}$.

(c) Por último, para probar que $\angle XPQ \cong \angle X'PQ$, razonaremos de nuevo por reducción al absurdo. Supongamos que los ángulos $\angle XPQ$ y $\angle X'PQ$ no son congruentes y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\angle XPQ < \angle X'PQ$. Por el axioma C4, sabemos que existe una semirrecta $\overrightarrow{PV'}$ entre las semirrectas $\overrightarrow{PX'}$ y \overrightarrow{PQ} de modo que $\angle V'PQ \cong \angle XPQ$. Además, el axioma C1 garantiza que existe un punto V que es opuesto a V' con respecto de la recta PQ que cumple que $V - Q - V'$ y $\overline{VQ} \cong \overline{V'Q}$. Ahora, por el criterio de congruencia LAL (axioma C6), sabemos que $\triangle VQP \cong \triangle V'PQ$. Por lo tanto, $\angle VPQ \cong \angle V'PQ$ y, por el axioma C5, se tiene que $\angle VPQ \cong \angle XPQ$, lo que es una contradicción, puesto que la semirrecta \overrightarrow{PV} se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{PX} y \overrightarrow{PQ} . \square

Definición 3.2.3 (Ángulo de paralelismo). *Siguiendo con la notación del teorema anterior, los ángulos $\angle XPQ$ y $\angle X'PQ$ que tienen, respectivamente, las semirrectas límite \overrightarrow{PX} y $\overrightarrow{PX'}$ se denominan ángulos de paralelismo y se denotan por $\pi(PQ)$.*

Además, se cumple que $|\pi(PQ)| < \frac{\pi}{2}$ ya que si se tuviese que $|\pi(PQ)| = \frac{\pi}{2}$, entonces se contradice el teorema hiperbólico universal. Es más, se cumple que $|\pi(PQ)|$ toma cualquier valor entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

Definición 3.2.4. *En geometría hiperbólica, un segmento unitario natural \overline{OI} es cualquier segmento \overline{OI} que cumple que $|\pi(OI)| = \frac{\pi}{4}$.*

3.3. Clasificación de paralelas

Hasta el momento hemos visto dos tipos de rectas paralelas a una recta dada r .

- El primer tipo consiste en las rectas paralelas s tales que r y s tienen una perpendicular común o, de forma equivalente, en una de las rectas existen parejas de puntos equidistante de la otra. Estas rectas se llamarán paralelas divergentes.
- El segundo tipo consiste de todas las rectas paralelas a r que están contenidas en una semirrecta paralela límite en una dirección. A estas las llamaremos paralelas asintóticas.

Teorema 3.3.1. *Dadas dos rectas paralelas r y r' en geometría hiperbólica.*

(a) *Si r contiene una semirrecta paralela límite a r' entonces r y r' son paralelas asintóticas.*

(b) *Si r no contiene una semirrecta paralela límite a r' entonces r y r' son paralelas divergentes.*

Demostración. Tomamos un punto $P \in r$ y trazamos el segmento perpendicular \overline{PQ} a la recta r' con $Q \in r'$. Consideramos ahora la recta s que pasa por el punto P y es perpendicular a \overline{PQ} . Tomamos un punto R , distinto de P , en la recta s y consideramos la semirrecta paralela límite \overrightarrow{PX} a r' con $X \in \overline{QR}$. Un esquema para esta demostración será la figura 3.7.

(a) Consideramos los puntos A, B, C y D en la recta r con $A - B - P - C - D$ y $A, B \in \overrightarrow{PX}$. Consideramos los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ perpendiculares a la recta r' con $A', B', C', D' \in r'$. Observamos ahora que el ángulo $\angle XPQ$ es agudo, el ángulo $\angle CPQ$ es obtuso y, como la suma de los ángulos del cuadrilátero $\square PQC'C$ es menor que 2π (corolario 3.0.2), entonces el ángulo $\angle PCC'$ es agudo. Por lo tanto, se tiene que $|\angle PCC'| < |\angle CPQ|$. Por consiguiente, aplicando la proposición 2.5.3, se tiene que $|\overline{PQ}| < |\overline{CC'}|$. De forma análoga se obtiene que $|\overline{CC'}| < |\overline{DD'}|$, puesto que el ángulo $\angle PDD'$ es agudo y el ángulo $\angle DCC'$ obtuso.

Vemos ahora que $|\overline{AA'}| \leq |\overline{PQ}|$ para todo punto A en la semirrecta abierta \overrightarrow{PX} . Razonamos por reducción al absurdo, suponemos que $|\overline{AA'}| > |\overline{PQ}|$. Consideramos un punto S en el segmento $\overline{AA'}$ tal que $|\overline{AS}| = \frac{1}{2}(|\overline{AA'}| - |\overline{PQ}|)$. Claramente, se tiene $|\overline{SA'}| > |\overline{PQ}|$ y, entonces, por la proposición 2.5.3 se tiene que $\angle A'SP < \angle XPQ$. Por tanto, $\angle A'SP$ tendrá que ser agudo. Ahora, dado que la semirrecta \overrightarrow{PS} se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PX} entonces la semirrecta \overrightarrow{PS} corta a la recta r' en un punto T . Notemos que el ángulo $\angle A'ST$ es agudo, con lo que el ángulo $\angle A'SP$ es obtuso, lo que contradice la suposición de que es agudo.

semirrecta \overrightarrow{DP} se corta con la semirrecta $\overrightarrow{BB'}$ en un punto F . Ahora, como $P \in \angle BAF$ entonces la semirrecta \overrightarrow{AP} se encuentra entre las semirrectas \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AF} . Por consiguiente, aplicando el teorema del segmento cruzado (proposición 1.3.10), la semirrecta \overrightarrow{AP} corta al segmento \overline{BF} en el punto G con $B-G-C$. Se tiene así que $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$.

" \Leftarrow " Suponemos que $\overrightarrow{AA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$ y veamos que $\overrightarrow{DA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$. Por el teorema del segmento cruzado (proposición 1.3.10), se tiene que toda semirrecta entre las semirrectas \overrightarrow{DB} y $\overrightarrow{DA'}$ corta al segmento \overline{AB} en un punto E con $A-E-B$. Tomamos una semirrecta \overrightarrow{DP} entre \overrightarrow{DB} y $\overrightarrow{DA'}$ con $D-E-P$. Notemos que $\angle A'AB > \angle BEP \cong \angle AED$, donde la congruencia se debe a que son opuestos por el vértice. Además, por el axioma C4, existe una semirrecta \overrightarrow{AQ} de modo que $\angle BAQ \cong \angle BEP$ y, por tanto, las semirrectas \overrightarrow{AQ} y \overrightarrow{EP} son paralelas. Como la semirrecta \overrightarrow{AQ} corta a $\overrightarrow{BB'}$, observamos que la semirrecta \overrightarrow{EP} debe cortar a la semirrecta $\overrightarrow{BB'}$, es decir, la semirrecta \overrightarrow{DP} corta a la semirrecta $\overrightarrow{BB'}$. En consecuencia, el biángulo $\angle A'DBB'$ es cerrado en el punto D , es decir, $\overrightarrow{DA'} \parallel \overrightarrow{BB'}$.

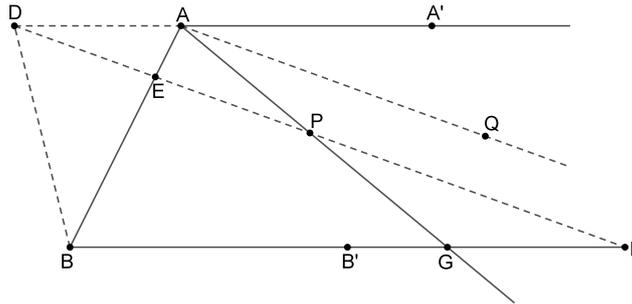


Figura 3.9: Biángulo y paralela límite.

(b) Utilizaremos la figura 3.10 como esquema de la demostración. Sea P un punto interior del ángulo $\angle ABB'$ y \overrightarrow{BP} una semirrecta. Razonaremos por reducción al absurdo y suponemos que las semirrectas \overrightarrow{BP} y $\overrightarrow{AA'}$ no se cortan. Entonces, por el corolario 1.3.14, existe un punto Q en la semirrecta \overrightarrow{BP} tal que $\angle AQB < \angle PBB'$. Notemos que la semirrecta \overrightarrow{AQ} se corta con $\overrightarrow{BB'}$ en un punto C . Por lo tanto, tenemos el triángulo $\triangle BCQ$ y, en consecuencia, $\angle AQB > \angle QBC \cong \angle PBB'$, lo que contradice que $\angle AQB < \angle PBB'$. Por consiguiente, la semirrecta \overrightarrow{BP} debe cortar a la semirrecta $\overrightarrow{AA'}$ y, por tanto, el biángulo $\angle A'ABB'$ es cerrado en B , es decir, $\overrightarrow{BB'} \parallel \overrightarrow{AA'}$.

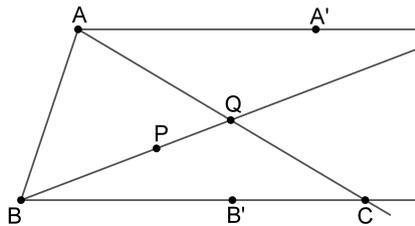


Figura 3.10: Esquema demostración 3.3.3. □

Proposición 3.3.4 (Transitividad de las paralelas límite). *Si las semirrectas $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ son paralelas límite a la semirrecta $\overrightarrow{CC'}$, entonces las semirrectas $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ son paralelas límite cada una de la otra.*

Demostración. Analizaremos los distintos casos posibles:

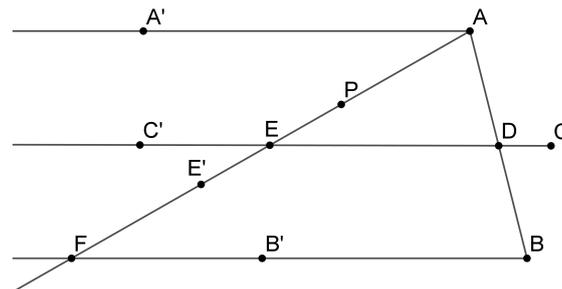


Figura 3.11: Caso 1.

Caso 1. Las rectas AA' y BB' se encuentran en lados opuestos de la recta CC' . Por tanto, las semirrectas $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ no tienen ningún punto en común. Ver situación de la figura 3.11. Consideramos el segmento \overline{AB} que corta a la recta CC' en un punto D con $C' - D - C$. Por tanto, como $\overrightarrow{AA'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CC'}$ para cada punto $P \in \angle A'AB$, la semirrecta \overrightarrow{AP} corta a la semirrecta $\overrightarrow{CC'}$ en un punto E . Suponemos ahora que $C' - E - C$, entonces, dado que $\overrightarrow{CC'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BB'}$ se tiene que la semirrecta $\overrightarrow{EE'}$ (con $E' \in \angle BDC'$) corta a $\overrightarrow{BB'}$ en un punto F , con $E - E' - F$. En consecuencia, la semirrecta \overrightarrow{AP} corta a la semirrecta $\overrightarrow{BB'}$ en F . Por lo tanto, se tiene que por definición, las semirrectas $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ son paralelas límite la una a la otra.

Caso 2. Las rectas AA' y BB' se encuentran al mismo lado de la recta CC' . Comenzamos viendo que las rectas AA' y BB' no se cortan. Para ello, razonamos por reducción al absurdo y suponemos que se cortan en un punto D , que pertenece a ambas semirrectas con $A - D - A'$ y $B - D - B'$. Tomamos un punto D' tal que $A - D - D'$. Por lo tanto, como $\overrightarrow{DB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CC'}$, se tiene que la semirrecta $\overrightarrow{DD'}$ corta a la semirrecta $\overrightarrow{CC'}$, es decir, la semirrecta $\overrightarrow{AA'}$ corta a $\overrightarrow{CC'}$, lo que es una contradicción. Ver esquema de la figura 3.12.

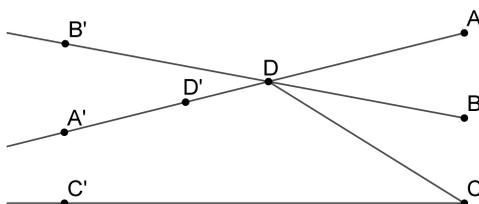


Figura 3.12: Caso 2.

Suponemos ahora que el segmento \overline{AC} corta a la recta BB' en un punto D tal que $B - D - B'$. Para cada punto $P \in \angle A'AC$, la semirrecta \overrightarrow{AP} corta a la semirrecta $\overrightarrow{CC'}$ en un punto E . Como la semirrecta \overrightarrow{BD} ($=\overrightarrow{BB'}$) corta al triángulo $\triangle DCE$, entonces la semirrecta $\overrightarrow{BB'}$ corta o bien a \overline{AE} o bien a \overline{CE} . Por otro lado, dado que la semirrecta $\overrightarrow{BB'}$ no corta a la semirrecta $\overrightarrow{CC'}$, entonces $\overrightarrow{BB'}$ corta a \overline{AE} en un punto F tal que $A - F - E$. Ahora, para cada punto $P \in \angle BAD$, la semirrecta \overrightarrow{AP} corta al segmento \overline{BD} y la semirrecta \overrightarrow{AP} corta con $\overrightarrow{BB'}$. En consecuencia, las semirrectas $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ son paralelas límites la una a la otra.

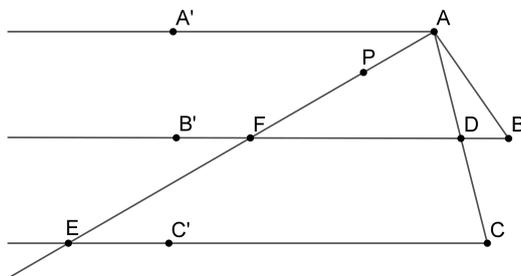


Figura 3.13: Caso 2.

□

3.4. Inversión circular

En esta sección trataremos el concepto de inversión circular, que tiene un papel importante a la hora de visualizar las transformaciones geométricas en las geometrías no euclidianas y que nos permitirá definir la congruencia en los modelos hiperbólicos y verificar los axiomas de congruencia. La inversión ofrece una forma de reflejar puntos respecto a una circunferencia, ya que se trata de una transformación del plano que deja fijos los puntos de una circunferencia dada y manda puntos de dentro de la circunferencia a puntos fuera de ella y viceversa. El estudio de este concepto se engloba dentro de la geometría euclidiana, sin embargo, no fue una técnica utilizada por Euclides. Para la elaboración de esta sección se ha seguido como referencia principal [10].

Definición 3.4.1 (Circunferencia). *Dados dos puntos O y A se denomina circunferencia de centro O al conjunto de puntos P tales que el segmento \overline{OP} es congruente con el segmento \overline{OA} . Además, cada uno de los segmentos \overline{OP} se denomina radio.*

Definición 3.4.2 (Inverso de un punto). Sea γ una circunferencia de radio r y centro O . Para cualquier punto P distinto de O , se tiene que el inverso de P con respecto a la circunferencia γ , denotado por P' , es el único punto P' en la semirrecta \overrightarrow{OP} tal que $|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP'}| = r^2$.

Notación. En adelante usaremos γ para referirnos a la circunferencia de inversión con centro en O .

A continuación, se presentan una serie de propiedades de la inversión que son inmediatas a partir de la definición, por lo que no se incluye su demostración.

- Proposición 3.4.3.**
1. $P = P'$ si y solo si P está situado en la circunferencia de inversión γ .
 2. Si P se encuentra dentro de la circunferencia γ entonces P' está fuera de ella, y si P se encuentra fuera de γ entonces P' está dentro de ella.
 3. $(P')' = P$.

Veremos ahora una proposición que nos dará las pautas para construir el punto inverso mediante tangentes. Para ello, primero necesitaremos enunciar un teorema auxiliar sobre semejanza de triángulos que nos será útil para demostrar la proposición.

Teorema 3.4.4 (Criterio AA de semejanza de triángulos). En geometría euclidiana, dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tales que $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$ son semejantes.

Proposición 3.4.5 (Construcción del punto inverso mediante tangentes). Sea P un punto interior de la circunferencia γ . Tranzando la semirrecta \overrightarrow{OP} y considerando \overline{AB} la cuerda que pasa por P y es perpendicular a la semirrecta \overrightarrow{OP} , se tiene que las tangentes a la circunferencia γ en A y B se cortarán con \overrightarrow{OP} en el mismo punto P' que es el inverso de P con respecto a la circunferencia γ .

Si el punto P se encuentra en el exterior de la circunferencia, el método para encontrar el punto P' es inverso. Se comienza tranzando las tangentes a la circunferencia de inversión por el punto P , que cortarán a la circunferencia en dos puntos A y B . Posteriormente, se traza la cuerda \overline{AB} que se cortará con la semirrecta \overrightarrow{OP} en un punto, dicho punto será el inverso buscado P' .

Demostración. Comencemos notando que, por simetría, las dos tangentes se cortarán con \overrightarrow{OP} en el mismo punto P' . Además, como el radio y la tangente de una circunferencia son perpendiculares, se tiene que $\triangle OAP'$ es un triángulo rectángulo en $\angle A$ (proposición 18 libro III Euclides). Adicionalmente, como $\angle OPA \cong \angle OAP'$ y $\angle POA \cong \angle P'OA$, aplicando el criterio de semejanza AA (teorema 3.4.4), se tiene que los triángulos rectángulos $\triangle OAP$ y $\triangle OAP'$ son semejantes. En consecuencia, los lados correspondientes son proporcionales y, en particular, se tiene que

$$\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OP'}|} \Leftrightarrow |\overline{OP}| \cdot |\overline{OP'}| = |\overline{OA}|^2 = r^2.$$

En definitiva, P y P' son inversos en γ .

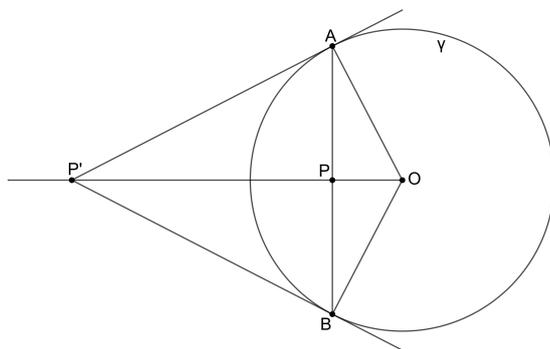


Figura 3.14: El punto P' es inverso de P . □

A continuación, veremos como son las transformaciones de las rectas y las circunferencias del plano mediante inversión.

Proposición 3.4.6. Una recta que pasa por O se transforma en ella misma por inversión circular. Una recta que no pasa por O se transformará en una circunferencia que pasa por O y, recíprocamente, una circunferencia que pasa por O se transformará en una recta que no pasa por O .

Demostración. Como por definición el inverso de un punto P está situado en la semirrecta \overrightarrow{OP} , entonces es claro que si una recta pasa por O se transforma en ella misma por inversión circular. Veamos ahora el caso en que r es una recta que no pasa por O . Sea \overline{OP} el segmento perpendicular a r con $P \in r$ y sea P' el inverso de P . Consideramos ahora la circunferencia c con diámetro $\overline{OP'}$ y veamos que los inversos de los puntos de la recta r están todos situados en c . Tomamos un punto Q cualquiera de la recta r y trazamos el segmento \overline{OQ} , que se cortará con c en el punto Q' . Entonces, se tiene que el triángulo $\triangle OQ'P'$ es un triángulo rectángulo (proposición 31 libro III Euclides). Dicho triángulo tiene el ángulo $\angle O$ en común con el triángulo rectángulo $\triangle OPQ$, por lo que aplicando el criterio de semejanza AA (teorema 3.4.4), tenemos que son triángulos semejantes. Por lo tanto, sus lados son proporcionales y se tiene que

$$\frac{|\overline{OQ'}|}{|\overline{OP'}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OQ}|} \Leftrightarrow |\overline{OQ}| \cdot |\overline{OQ'}| = |\overline{OP}| \cdot |\overline{OP'}|.$$

Pero como P' era el inverso de P entonces $|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP'}| = r^2$ y, en consecuencia, $|\overline{OQ}| \cdot |\overline{OQ'}| = r^2$: Por tanto, Q' es el inverso de Q y viceversa. De este modo hemos visto que el recíproco también es cierto, es decir, que el inverso de una circunferencia que pasa por O es una recta que no pasa por O .

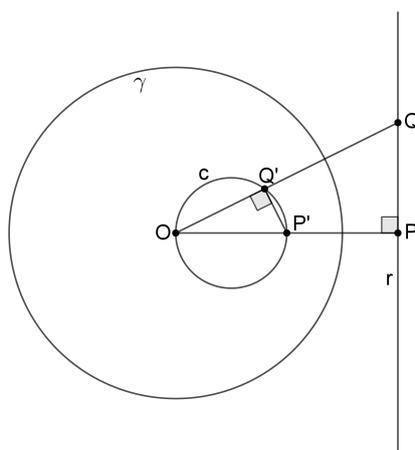


Figura 3.15: Inversión de una recta situada fuera de la circunferencia γ . □

Definición 3.4.7. El ángulo formado por dos circunferencias que se cortan o por una circunferencia que corta a una recta se define, respectivamente, como el ángulo formado por sus rectas tangentes en ese punto o como el ángulo entre la recta tangente y la otra recta.

Notemos que cuando dos circunferencias se cortan en dos puntos, el ángulo que forman entre ellos es el mismo en los dos puntos de corte puesto que las dos circunferencias son simétricas con respecto a la recta que une sus centros.

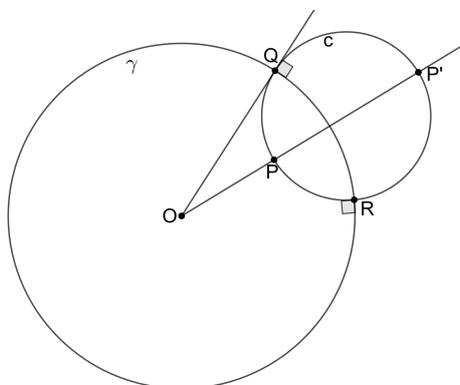


Figura 3.16: El inverso de una circunferencia perpendicular a γ es ella misma.

Proposición 3.4.8. Una circunferencia c perpendicular a la circunferencia de inversión se transforma en si misma por inversión circular. Recíprocamente, si una circunferencia c contiene una pareja de puntos inversos P, P' , entonces es perpendicular a la circunferencia de inversión y es enviada a si misma.

Demostración. Comenzamos suponiendo que c es perpendicular a γ y que se cortan en dos puntos Q y R . Por la proposición 18 del libro III de Euclides sabemos que radio y tangente de cualquier circunferencia son perpendiculares. Por tanto, el radio \overline{OQ} es tangente a c . Consideramos ahora otro punto $P \in c$ tal que \overline{OP} corta de nuevo a c en el punto P' . Por la proposición 36 del libro III de Euclides, se llega a que $|\overline{OQ}|^2 = |\overline{OP}| \cdot |\overline{OP}'|$ y, dado que $\overline{OQ} = r$, se llega a que P y P' son inversos. Como P era un punto cualquiera de c , se tiene que esto se cumple para cualquier punto de la circunferencia c y, por lo tanto, c es enviada a sí misma.

Probemos ahora el recíproco, suponemos que c es una circunferencia que pasa por un par de puntos inversos P, P' y que c se corta con γ en el punto Q . Trazamos el segmento \overline{OQ} y, dado que \overline{OQ} es un radio y P, P' son puntos inversos, se tiene que $|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP}'| = |\overline{OQ}|^2$. Además, por la propiedad 37 del libro III, se tiene que \overline{OQ} es tangente a c , lo que significa que c y γ son perpendiculares en Q y, en consecuencia, también en su otro punto de intersección R . \square

Proposición 3.4.9. *Una circunferencia c que no pasa por el centro O de γ se transforma por inversión circular en otra circunferencia c' .*

Demostración. Comenzamos suponiendo que la circunferencia c se encuentra fuera de la circunferencia de inversión γ . Trazamos la tangente \overline{OP} a la circunferencia c y consideramos una nueva circunferencia γ' con centro en O y que pasa por el punto P . Se tiene entonces que, la circunferencia c es enviada a sí misma por $\rho_{\gamma'}$ (donde $\rho_{\gamma'}$ representa la inversión en γ') y, en consecuencia, $\rho_{\gamma}(c) = \rho_{\gamma} \circ \rho_{\gamma'}(c)$. Denotaremos ahora por r al radio de γ , r' al radio de γ' y $\theta = \rho_{\gamma} \circ \rho_{\gamma'}$. Entonces, para cada punto A , denotaremos por $A' = \rho_{\gamma'}(A)$ y $A'' = \rho_{\gamma}(A')$. Por lo tanto, $\theta(A) = A''$ y, por definición de inversión, $|\overline{OA}| \cdot |\overline{OA'}| = (r')^2$ y $|\overline{OA'}| \cdot |\overline{OA''}| = r^2$. Dividiendo ambas ecuaciones se obtiene que

$$\frac{|\overline{OA''}|}{|\overline{OA}|} = \frac{r^2}{(r')^2} \Leftrightarrow |\overline{OA''}| = k \cdot |\overline{OA}| \quad \text{donde } k = \frac{r^2}{(r')^2}.$$

Esta transformación que deja el punto O fijo y estira los puntos hacia O (o los aleja de O) en una razón fija k se conoce como dilatación con centro O y razón k . En particular, una dilatación envía cualquier circunferencia y su centro en otra circunferencia con otro centro. Por lo tanto, $\rho_{\gamma}(c) = \rho_{\gamma} \circ \rho_{\gamma'}(c) = \theta(c)$ es una circunferencia.

Al principio de la demostración habíamos asumido que la circunferencia c se encontraba fuera de γ pero, para el caso contrario, podría realizarse una prueba análoga.

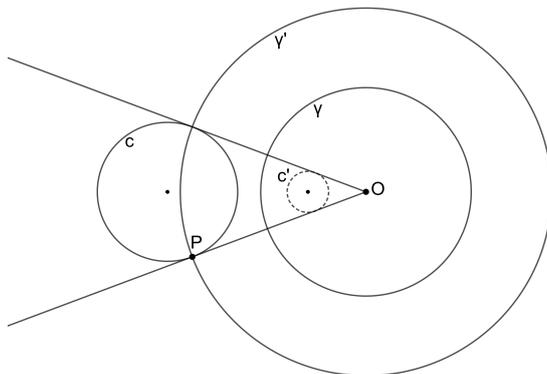


Figura 3.17: Inversión de una circunferencia que no pasa por O . \square

A continuación veremos que la inversión circular es conforme, es decir, que conserva los ángulos.

Proposición 3.4.10. *La transformación por inversión circular de dos curvas que se cortan (rectas o circunferencias) se cortan con los mismos ángulos.*

Demostración. Sean α y β dos curvas que se cortan, que podrán ser rectas o circunferencias, y veamos que su transformación por inversión circular se corta con los mismos ángulos. Comenzaremos analizando el caso en que α y β se cortan en un punto $P \notin \gamma$. Sean t_1 y t_2 sus respectivas tangentes en P (en caso de que α o β sean rectas consideramos la propia recta). Por la definición del ángulo de dos curvas que se cortan, se tiene que el ángulo formado por α y β será igual al formado por t_1 y t_2 . Sea P' el inverso de P , entonces se puede encontrar una circunferencia c_1 que pasa por los puntos P y P' y tiene a t_1 por tangente en P y otra circunferencia c_2 que pasa por los puntos P y P' y tiene a t_2 por tangente en P . Adicionalmente,

se tiene que c_1 y c_2 cortan a γ formando un ángulo recto. De hecho, si consideramos m_1 y m_2 las rectas perpendiculares a t_1 y t_2 , respectivamente, que pasan por el punto P se tiene que c_1 es la circunferencia que pasa por P y P' y su centro es la intersección entre m_1 y la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$ y c_2 es la circunferencia que pasa por P y P' y su centro es la intersección entre m_2 y la mediatriz de $\overline{PP'}$. Ahora, por la proposición 3.4.8, se tiene que c_1 y c_2 se transforman en ellas mismas. Por tanto, se tiene que la inversión del ángulo formado por t_1 y t_2 viene dada por las circunferencias c_1 y c_2 en su otro punto de intersección P' . Como dos circunferencias se cortan con el mismo ángulo en sus dos puntos de intersección se tiene que los dos ángulos iguales. Además, las curvas originales se transforman en curvas tangentes a c_1 y c_2 en P' , por lo que mantienen el mismo ángulo en P , puesto que cuando dos circunferencias se cortan tienen el mismo ángulo en ambos puntos de intersección. En consecuencia, la propiedad de tangencia se conserva por inversión circular.

Para el caso $P \in \gamma$ consideramos una circunferencia γ' concéntrica a γ de radio r' . Sea r el radio de γ . Al igual que en la demostración de la proposición 3.4.9 consideramos una dilatación S de razón $k = \frac{r^2}{(r')^2}$ que deja fijo al punto O , es decir, $\rho_\gamma(P) = S \circ \rho_{\gamma'}(P)$. Como nuestro ángulo no está en γ' entonces se conserva por la inversión respecto de γ' . Además, las dilataciones preservan los ángulos. Por tanto, la inversión respecto de γ también conserva nuestro ángulo.

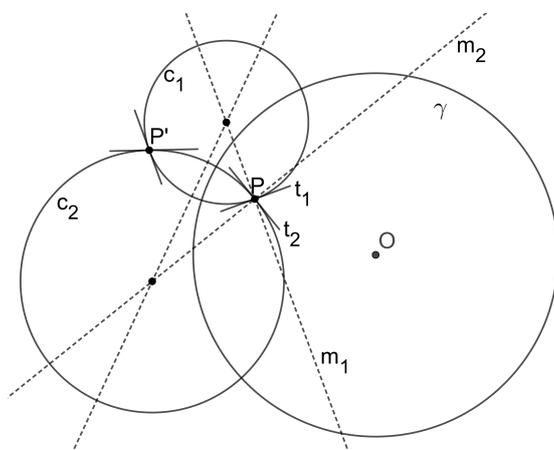


Figura 3.18: La inversión circular es conforme. □

Ejemplo 3.4.11. En el siguiente ejemplo se muestra el resultado por inversión de una serie de figuras geométricas.

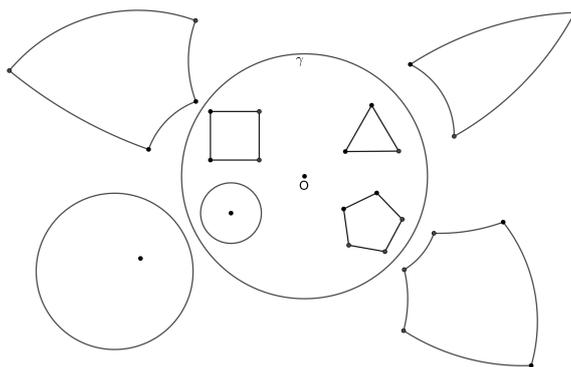


Figura 3.19: Inversión de distintas figuras geométricas.

Por último, faltaría analizar que ocurre con las distancias en inversión circular, pero es claro que esta propiedad no se conserva puesto que una distancia muy pequeña al centro O se transformará en una distancia muy grande. Además, también se puede observar que las razones de las distancias tampoco se conservan. Sin embargo, si tomamos cuatro puntos, si que existe una relación entre razones de distancias que se conserva, la cual se denomina “razón doble”.

Definición 3.4.12 (Razón doble). La “razón doble” de cuatro puntos colineales P, Q, R y S se define como:

$$[P, Q, R, S] = \frac{|\overline{PR}| \cdot |\overline{QS}|}{|\overline{PS}| \cdot |\overline{QR}|}.$$

Proposición 3.4.13. Sean P, Q, R y S cuatro puntos distintos en el plano, diferentes de O . Entonces, la inversión circular preserva la razón doble. Es decir, si sus inversos son los puntos P', Q', R' y S' respectivamente, entonces

$$[P, Q, R, S] = [P', Q', R', S'].$$

Demostración. Consideramos los puntos P y R y sus inversos P' y R' . Por definición, tenemos que

$$|\overline{OP}| \cdot |\overline{OP'}| = r^2 = |\overline{OR}| \cdot |\overline{OR'}| \Leftrightarrow \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OR}|} = \frac{|\overline{OR'}|}{|\overline{OP'}|}.$$

Distinguimos ahora dos casos distintos

- Caso 1. Suponemos que O, P y R no son puntos colineales, entonces, dado que los triángulos $\triangle OPR$ y $\triangle OR'P'$ tienen el ángulo O en común, son triángulos semejantes, y concluimos que $\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{P'R'}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OR'}|}$.
- Caso 2. Si los puntos O, P y R son colineales, entonces, $|\overline{PR}| = |\overline{OR}| - |\overline{OP}|$ y $|\overline{P'R'}| = |\overline{OR'}| - |\overline{OP'}|$ y usando la siguiente propiedad

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b},$$

se concluye que $\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{P'R'}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OR'}|}$.

Dado ahora otro punto S , se obtiene de forma análoga que $\frac{|\overline{PS}|}{|\overline{P'S'}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OS'}|}$ y, dividiendo con la expresión anterior, se obtiene que

$$\frac{|\overline{PR}|}{|\overline{P'R'}|} \div \frac{|\overline{PS}|}{|\overline{P'S'}|} = \frac{|\overline{OS'}|}{|\overline{OR'}|}.$$

Considerando otro punto Q y trabajando de forma análoga con R y S , se obtiene que

$$\frac{|\overline{QR}|}{|\overline{Q'R'}|} \div \frac{|\overline{QS}|}{|\overline{Q'S'}|} = \frac{|\overline{OS'}|}{|\overline{OR'}|}.$$

Con lo cual, se han obtenido dos expresiones que son iguales y despejando se obtiene que las razones dobles $[P, Q, R, S] = [P', Q', R', S']$. \square

3.5. Consistencia de la geometría hiperbólica

La consistencia de la geometría hiperbólica fue demostrada entre principios del siglo XIX y principios del XX por el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), el matemático alemán Felix Klein (1849-1925) y el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912). Para demostrarlo, crearon una serie de modelos “euclidianos” de la geometría hiperbólica. En estos modelos se dan definiciones “novedosas” de conceptos básicos como puntos, rectas, circunferencias o ángulos. Además, en todos ellos se demostró que los primeros cuatro postulados de Euclides eran ciertos, así como el postulado hiperbólico.

Puesto que cada uno de estos modelos son modelos “euclidianos”, es decir, están construidos dentro del marco lógico de la geometría euclidiana, entonces si la geometría hiperbólica tuviese alguna declaración interna contradictoria, esa misma declaración seguiría siendo contradictoria al trasladarla a la geometría euclidiana. Por lo tanto, al final de esta sección habremos comprobado que los postulados hiperbólicos son tan consistentes como los postulados euclidianos.

A continuación, se presentan dos ejemplos de modelos de geometría hiperbólica y se hará un estudio de los resultados más importantes.

3.5.1. El modelo de Beltrami-Klein

El modelo de Beltrami-Klein, también conocido como modelo del disco proyectivo o modelo del disco de Klein, es el modelo más antiguo y más simple de la geometría hiperbólica n -dimensional. Su origen se remonta a 1868, cuando el matemático italiano Eugenio Beltrami lo mencionó en dos de sus memorias [1][2], primero para el caso $n=2$ y posteriormente para cualquier dimensión n . En estos ensayos se demostró la equivalencia entre la geometría hiperbólica y la geometría euclidiana. Recibe también el nombre de Felix Klein ya que este dio una versión más comprensible del modelo en un artículo publicado en 1871 [14].

En dimensión n , el modelo es un conjunto de puntos en el interior de una bola unidad de dimensión n

$$B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\},$$

donde las rectas se presentan como cuerdas rectas, es decir, segmentos rectos con extremos en el borde de la esfera

$$\delta B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Los puntos hiperbólicos situados en δB^n no son considerados parte del modelo, sino que representan puntos en el infinito y reciben el nombre de puntos límite. Además, es claro que cada recta hiperbólica tiene dos puntos límite.

Para evitar confusiones, nos referiremos a las rectas y puntos dentro del modelo como rectas hiperbólicas y puntos hiperbólicos, mientras que las rectas y puntos en el sentido habitual se denominaran rectas y puntos euclidianos.

Definición 3.5.1. *En este modelo, una recta hiperbólica (o una recta de Klein) es cualquier cuerda del borde del disco, excepto los puntos situados en el borde.*

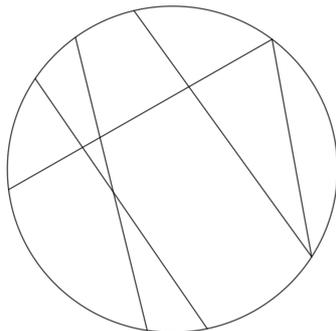


Figura 3.20: Ejemplo de rectas de Klein.

En adelante, centraremos nuestro análisis en la bola unidad de dimensión 2, B^2 , donde el modelo es el conjunto de puntos situados en el disco unidad abierto. En este conjunto es sencillo determinar que se cumplen los dos primeros axiomas de Euclides. Se tiene que, en el plano euclidiano, dos puntos cualesquiera determinan una única recta r y, además, como los puntos del borde están en el infinito, vamos a poder extender indefinidamente cualquier segmento hiperbólico.

Del mismo modo, se puede verificar el axioma hiperbólico en B^2 . Para ello, tomamos una recta hiperbólica r y un punto hiperbólico P que no esté en la recta r . Sea Q uno de los puntos límite de la recta r . Por tanto, existe un segmento euclidiano s que es paralelo en el sentido euclidiano a la recta r y que contiene al punto P . Permitiendo que s tenga extremos en δB^2 , entonces tenemos que s es una recta hiperbólica. En este punto, denotaremos por A al otro punto límite de la recta s . Dado que Q y A son puntos distintos, hay infinitos puntos entre ellos en δB^2 y cualquiera de ellos determina junto al punto P una recta hiperbólica que es paralela a r en el sentido hiperbólico de que no se cortan. Por lo tanto, existe una cantidad infinita de rectas hiperbólicas que contienen al punto P y no cortan a r .

A continuación, para demostrar que se cumple el tercer postulado de Euclides, debemos definir una función distancia o métrica en B^n , la cual debe cumplir que para cada par de puntos hiperbólicos P y Q :

- No negatividad. $d(P, Q) \geq 0$, cumpliéndose la igualdad solo si $P = Q$.
- Simetría. $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- Desigualdad triangular. Para todo punto hiperbólico R , $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$.

Sin embargo, la métrica euclidiana no es válida en nuestro modelo, puesto que falla la desigualdad triangular. Por lo tanto, es necesario definir la distancia hiperbólica entre dos puntos P y Q en el modelo de Klein.

Definición 3.5.2. *Dados dos puntos hiperbólicos P y Q en B^2 , y sean R y S los puntos límite de la recta hiperbólica que determina P y Q , de modo que $R - P - Q - S$. Se define la distancia hiperbólica entre P y Q como:*

$$d(P, Q) = \frac{1}{2} |\ln[P, Q, R, S]| = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{|\overline{PR}| \cdot |\overline{QS}|}{|\overline{PS}| \cdot |\overline{QR}|} \right) \right|.$$

Se puede ver de forma sencilla que la métrica que hemos definido cumple las dos primeras condiciones que establecimos anteriormente y, para la tercera de las condiciones, se tiene que la demostración es más trabajosa, la cual se puede encontrar en [16], página 157. Por tanto, una vez definida la métrica nos encontramos en situación de definir las circunferencias hiperbólicas.

Definición 3.5.3. Una circunferencia hiperbólica c de radio r centrada en un punto O del disco de Klein es el conjunto de puntos en el disco de Klein cuya distancia hiperbólica al punto O es igual a r .

Y con esta definición, se tiene que se satisface el tercer postulado de Euclides, para demostrarlo hay que hacer uso de la continuidad de la función logarítmica y del hecho de que el logaritmo es una función no acotada.

El cuarto postulado de Euclides trata sobre los ángulos rectos, es por ello que debemos introducir algunas nociones sobre ángulos. Como en este modelo las rectas son líneas rectas, entonces la noción euclidiana de ángulo no se conserva, puesto que en ese caso se tendría que la suma de los ángulos de un triángulo sería π , lo que contradice que la suma de los triángulos hiperbólico es menor que π .

En este punto, necesitamos una noción de perpendicularidad de dos rectas que se cortan. Comenzando por el caso más sencillo, se tiene que si r es un diámetro del disco de Klein y queremos definir otra recta s que sea una perpendicular hiperbólica a r en un punto P , únicamente tiene que ser perpendicular a r en el sentido euclidiano.

Para el caso en que la recta r no es un diámetro del disco, esta noción de perpendicularidad no se puede extender directamente puesto que, en ese caso, se tendría que los ángulos rectos tienen el mismo significado en el modelo de Klein que en el plano euclidiano, lo cual implicaría que las paralelas tendrían que satisfacer el postulado de las paralelas. En este caso, podríamos intentar ver si se puede extender alguna propiedad de las perpendiculares a un diámetro. Consideramos el plano extendido, con el punto en el infinito adjunto, y un diámetro del disco r . Se tiene entonces que todas las rectas perpendiculares al diámetro r se encuentran en el punto en el infinito. El punto en el infinito es el punto inverso al centro de inversión O con respecto a la circunferencia unitaria. Además, el origen O tiene una única posición en la recta r , es el punto medio de la cuerda que define r . Por tanto, si movemos r a una nueva posición de modo que no sea diámetro, llamémosla la recta s , entonces tiene sentido que las perpendiculares a r también se muevan a nuevas perpendiculares a s , pero de tal manera que todavía se corten en el punto inverso del punto medio de la cuerda s . Este punto medio se denomina polo de la cuerda.

Definición 3.5.4. El polo de una cuerda \overline{PQ} en una circunferencia c es el punto inverso del punto medio de \overline{PQ} con respecto a la circunferencia.

Además, por la proposición 3.4.5 es claro que el polo de la cuerda \overline{PQ} es también la intersección de las tangentes a la circunferencia en P y Q .

A continuación, consideramos una recta hiperbólica que tiene como punto medio euclidiano a M y tangentes en los puntos A y B (los cuales no pertenecen al modelo) que se cortan en el polo P . Fijémonos en la figura 3.21. Las cuerdas r_1, r_2 y r_3 dentro de la circunferencia tienen la propiedad de que, cuando las extendemos, pasan por el polo. Por tanto, podemos extender nuestra definición para decir que estas tres cuerdas serán perpendiculares, en el sentido hiperbólico, a la recta dada \overline{AB} en los puntos de intersección.

Definición 3.5.5. En el modelo de Klein, una recta s es perpendicular a una recta r si la recta euclidiana que contiene a s pasa por el polo P de r .

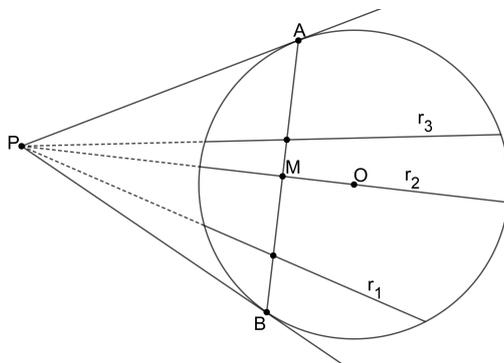


Figura 3.21: Extensión de la noción de perpendicularidad.

Definición 3.5.6. Dada una recta r en el modelo de Klein (definida como la cuerda \overline{AB}) y un punto P que no está en la recta r , existen dos cuerdas \overline{BC} y \overline{AD} que pasan por el punto P y son paralelas a r y tienen, además, la propiedad de dividir el conjunto de todas las rectas que pasan por P en dos subconjuntos: el de las rectas que cortan a r y el de las que son paralelas a r . A las paralelas \overline{AD} y \overline{BC} se les denomina rectas paralelas límite a r por P .

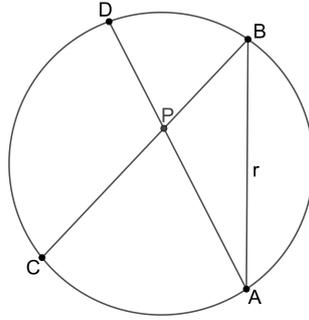


Figura 3.22: Rectas paralelas límite en el modelo de Klein.

Definición 3.5.7. En la misma situación de la definición anterior, trazamos una perpendicular por el punto P a la recta r , siendo Q el punto de corte entre ambas. Consideramos el ángulo hiperbólico $\angle QPT$, donde T es un punto en la semirrecta hiperbólica \overrightarrow{PB} . Este ángulo se llamará ángulo de paralelismo para r en P .

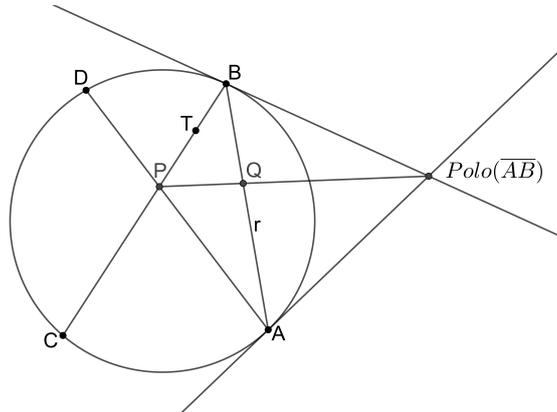


Figura 3.23: Ángulo de paralelismo en el modelo de Klein.

Por lo tanto, hemos visto que en el modelo de Klein se cumplen los cuatro primeros postulados de Euclides y que el axioma hiperbólico también es válido, en consecuencia, se puede concluir que la geometría en el disco de Klein es tan lógicamente válida como la geometría euclidiana basada en los postulados de Euclides. Además, si hubiese resultados contradictorios sobre rectas, circunferencias o puntos en esta nueva geometría, tendrían que ser igualmente contradictorios en la geometría euclidiana.

Sin embargo, para ser totalmente exhaustivos y comprobar que realmente la geometría hiperbólica es consistente en relación a la geometría euclidiana, habría que comprobar que se cumplen los axiomas de Hilbert y no únicamente los postulados de Euclides. Esto es debido a que, como se comentó al principio, el sistema axiomático de Euclides tenía algunos problemas, pero al ser la comprobación de los axiomas de Hilbert muy extensa no se realizará en este trabajo.

3.5.2. Modelo de Poincaré

El modelo del disco de Poincaré fue desarrollado por el matemático francés Henri Poincaré. Se trata de un modelo posterior al modelo de Beltrami-Klein, con el que tiene numerosas similitudes pero que, a diferencia del anterior, éste sí que conserva los ángulos euclidianos, lo que lo hace más interesante. Se conoce también como representación conforme, C^n , y se trata de un modelo de la geometría hiperbólica n -dimensional en el que los puntos de la geometría están en un disco o bola n -dimensional

$$C^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\}.$$

Al igual que anteriormente, centraremos nuestro análisis en dimensión 2, donde un punto se define como cualquier punto en el interior del disco unidad, es decir, los puntos $P = (x, y)$ tales que $x^2 + y^2 < 1$. La colección de todos esos puntos se llamará disco de Poincaré. En este caso, los puntos del borde del conjunto también serán considerados como puntos en el infinito que no forman parte del modelo y se llamarán puntos límite. Sin embargo, las rectas se definirán de manera distinta.

Definición 3.5.8. En el modelo de Poincaré, una recta hiperbólica (o recta de Poincaré) es un arco euclidiano o un segmento euclidiano dentro del disco de Poincaré que se corta con el borde del disco formando ángulos rectos.

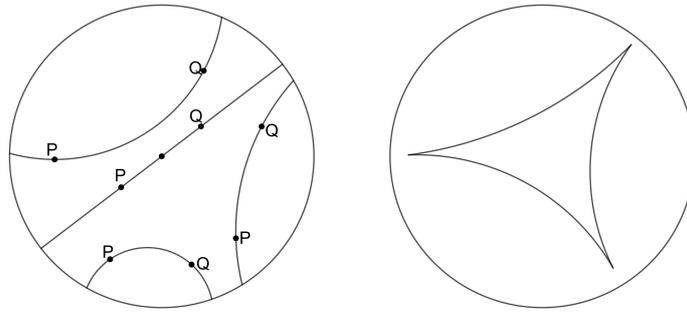


Figura 3.24: Ejemplo de rectas y triángulo en el modelo de Poincaré.

Como en el modelo anterior, para verificar que realmente se trata de un modelo para la geometría hiperbólica, debemos comprobar que se verifican los cuatro primeros postulados de Euclides y el axioma hiperbólico. Demostraremos primero los dos primeros postulados de Euclides, es decir, que dados dos puntos existe una recta que los contiene y que un segmento puede extenderse indefinidamente, entendiendo como segmento los subconjuntos de rectas de Poincaré. Para ello necesitaremos hacer uso del siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [13], capítulo 2.

Teorema 3.5.9. *Dada una circunferencia c con centro en O y radio \overline{OA} y dados dos puntos distintos P y Q situados en el interior de la circunferencia c de modo que ambos son distintos de O , entonces existe una única circunferencia c' (o recta) que pasa por los puntos P y Q y es ortogonal a la circunferencia c . Este es un teorema en geometría euclidiana.*

Comenzamos verificando el primer postulado, para ello distinguimos dos casos posibles. Si P y Q son dos puntos que se encuentran en un diámetro del borde del disco de Poincaré, entonces, como el diámetro corta al borde del disco en ángulos rectos se tiene que P y Q están en una recta hiperbólica. Ahora, si los puntos P y Q no se encuentran sobre un diámetro entonces, por el teorema 3.5.9, existe una única circunferencia que pasa por P y Q y corta al borde del disco formando ángulos rectos. Esta circunferencia la encontramos construyendo el punto inverso P' de P con respecto al borde del disco. La circunferencia que pasa por los puntos P , P' y Q cortará con el borde del disco formando ángulos rectos. La parte de esta circunferencia que se encuentre dentro del disco unidad formará la recta que contiene a P y Q . Un ejemplo de estas dos situaciones puede verse en la figura 3.24.

Para comprobar el segundo postulado, como los puntos del borde no pertenecen al modelo, vamos a poder extender indefinidamente cualquier segmento hiperbólico. Consideramos una recta hiperbólica que pasa por los puntos P y Q y se corta (en el sentido euclidiano) con el borde del disco en un punto A . Entonces, como P no puede estar en el borde del disco, la distancia de P a A será siempre positiva y, por tanto, podemos encontrar otro punto B entre estos dos puntos con BQ extendiendo PQ .

Para verificar el tercer postulado debemos definir la noción de circunferencia, para lo que a su vez necesitamos definir la noción de distancia. Dado que los puntos en el borde del disco no pertenecen al modelo y son tratados como puntos en el infinito, buscamos una definición de distancia tal que la distancia tienda a infinito según nos acercamos al borde del disco de Poincaré.

Definición 3.5.10. *La distancia hiperbólica de P a Q está dada por:*

$$d(P, Q) = |\ln[P, Q, R, S]| = \left| \ln \left(\frac{|\overline{PR}| \cdot |\overline{QS}|}{|\overline{PS}| \cdot |\overline{QR}|} \right) \right|,$$

donde R y S son los puntos donde la recta hiperbólica que pasa por P y Q se corta con el borde del disco y $|\overline{AB}|$ representa la distancia euclidiana entre los puntos.

Se puede observar que esta distancia satisface la definición de una función distancia. Es no-negativa y vale cero solo cuando $P = Q$. Es aditiva a lo largo de las rectas y cumple la desigualdad triangular para triángulos contruidos con segmentos hiperbólicos. Además, si nos fijamos en como está definida, podemos ver que según P o Q se aproximan a los puntos del borde, la fracción que se encuentra dentro del logaritmo o bien tiende a 0 o bien tiende a infinito, y en consecuencia, la propia función distancia tiende a infinito.

Además, esta fórmula puede ser interpretada para la distancia de Poincaré de una forma interesante para el diámetro de una circunferencia. Siguiendo el esquema de la figura 3.25, consideramos una circunferencia de radio 1 con centro en O y un punto B en el interior de la circunferencia, con lo que

$$d(O, B) = |\ln[O, B, R, S]| = \left| \ln \left(\frac{|\overline{OR}| \cdot |\overline{BS}|}{|\overline{OS}| \cdot |\overline{BR}|} \right) \right|.$$

Ahora, denotamos la distancia euclidiana del centro O al punto B por x , y como tenemos una circunferencia de radio 1 sabemos también que la distancia de R a S es 2. Además, podemos ver que la distancia euclidiana de R a B es $(1+x)$ y la de S a O es 1. En consecuencia, $|\overline{RB}| \cdot |\overline{SO}| = (1+x)$ y, de forma similar, se obtiene que $|\overline{RO}| \cdot |\overline{SB}| = (1-x)$. Por lo tanto, se tiene que $d(B, O) = \left| \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right|$.

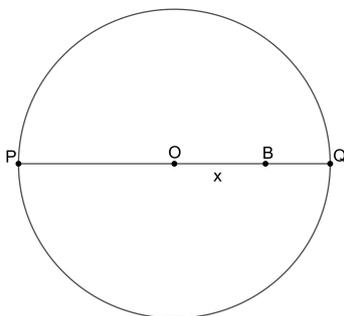


Figura 3.25: Distancia de Poincaré.

En resumen, hemos obtenido el siguiente teorema

Teorema 3.5.11. *Si un punto B que se encuentra dentro del disco unidad está a distancia x del centro O , entonces la distancia de Poincaré de B a O viene dada por*

$$d(B, O) = \left| \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right|.$$

Nótese que, la distancia euclidiana $x = |\overline{OB}|$ nunca puede valer 1 porque el punto B se encuentra dentro del disco unidad. Sin embargo, según B se acerca el borde del disco la distancia crece hacia infinito. Por lo tanto, una vez hemos definido la noción de distancia, estamos en condiciones para definir las circunferencias hiperbólicas.

Definición 3.5.12. *Una circunferencia hiperbólica c de radio r centrada en un punto O dentro del disco de Poincaré es el conjunto de puntos en el disco de Poincaré cuya distancia al punto P es r .*

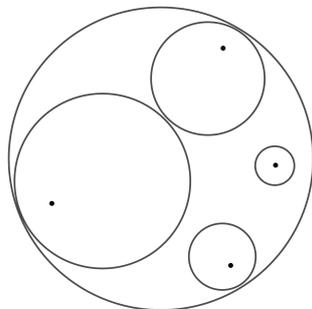


Figura 3.26: Ejemplo circunferencias hiperbólicas con sus respectivos centros.

Además, por la forma en la que habíamos definido la distancia hiperbólica es obvio que existen circunferencias, ya que por cada recta que pasa por el punto O se pueden encontrar puntos a distancia r de O , ya que según nos acercamos a los puntos límite la distancia crece sin límite.

Para demostrar el cuarto postulado debemos definir ángulos como están definidos en la geometría euclidiana. Usaremos las tangentes euclidianas a las rectas de Poincaré para determinar ángulos.

Definición 3.5.13. *Se define el ángulo determinado por dos rectas hiperbólicas en el modelo de Poincaré como el ángulo que determinan sus tangentes euclidianas.*

De este modo, como los ángulos heredan su significado euclidiano, se tiene que el cuarto postulado es automáticamente cierto. Por tanto, quedaría comprobar que el postulado hiperbólico también se cumple, es decir, que existen una recta r y un punto P que no se encuentra en la recta de forma que al menos dos rectas paralelas distintas pasan por P .

Veamos ahora que se cumple el axioma hiperbólico. Consideramos una recta r y un punto P que no esté en la recta r . Consideramos A y B los puntos límite de la recta r . Entonces, por el teorema 3.5.9, sabemos

que existen dos arcos de circunferencia, uno que pasa por P y A y otro que pasa por P y B tales que son ortogonales al borde del disco. Suponemos ahora que el arco que pasa por P y A se corta con r en un punto Q dentro de la circunferencia. Entonces, A y Q estarán en la recta r y en el arco que pasa por P y A . Por la parte de unicidad del teorema 3.5.9, estos dos arcos deben ser coincidentes, lo cual es imposible, dado que se había supuesto que P no estaba en r . Por lo tanto, los dos arcos que pasan por P serán dos rectas hiperbólicas que no cortan a r dentro del disco y, por definición, son paralelas a r .

Por lo tanto, al igual que en el modelo anterior, hemos visto que se cumplen los primeros cuatro postulados de Euclides y el axioma hiperbólico, con lo que podemos concluir que la geometría en el disco de Poincaré es tan consistente como la geometría euclidiana. Sin embargo, como comentamos anteriormente, como el sistema axiomático de Euclides tenía algunos problemas, para ser totalmente rigurosos habría que haber comprobado los axiomas de Hilbert, pero al ser esta comprobación muy extensa no se realizará en este trabajo.

3.5.3. Isomorfismo entre el modelo de Klein y el modelo de Poincaré

Se dice que dos modelos son isomorfos si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre sus objetos mientras que se conservan las relaciones entre ellos. En esta sección mostraremos que los modelos del disco de Poincaré y de Klein son isomorfos, para lo que haremos uso de las proyecciones ortogonal y estereográfica sobre la esfera.

Para establecer el isomorfismo partiremos de una esfera de radio r situada en el espacio euclídeo tridimensional y denotamos por N al polo norte de la esfera. Usaremos la figura 3.27 como referencia. Colocamos ahora el disco de Klein (también de radio r) en el plano tangente a la esfera de modo que el polo sur de la esfera, S , coincide con el centro del disco. A continuación, proyectamos el modelo de Klein ortogonalmente en el hemisferio sur de la esfera, de modo que las cuerdas en el modelo de Klein se transforman en arcos de circunferencia ortogonales al ecuador de la esfera. Esta será la denominada proyección ortogonal.

Ahora, para obtener el modelo de Poincaré, debemos proyectar estereográficamente el hemisferio sur desde el polo norte N sobre el plano original. De acuerdo con la notación de la figura, proyectamos la cuerda \overline{PQ} hacia arriba convirtiéndose en el arco $P'Q'$ y, a continuación, conectamos el polo norte N de la esfera con cada uno de los puntos de los arcos de circunferencia que fueron creados por las cuerdas del modelo de Klein y los proyectamos en el plano original. De esta forma, se origina la recta $\hat{P}\hat{Q}$ que aparece en la imagen. Si proyectamos el ecuador siguiendo el mismo proceso se formará una circunferencia c más grande que la original. Además, la proyección del hemisferio inferior aterrizará dentro de esta nueva circunferencia, la cual crea el modelo de Poincaré. Por tanto, mediante la composición de las proyecciones ortogonal y estereográfica existe un isomorfismo entre ambos modelos, que transforma los puntos y rectas del modelo de Klein en puntos y rectas del modelo de Poincaré.

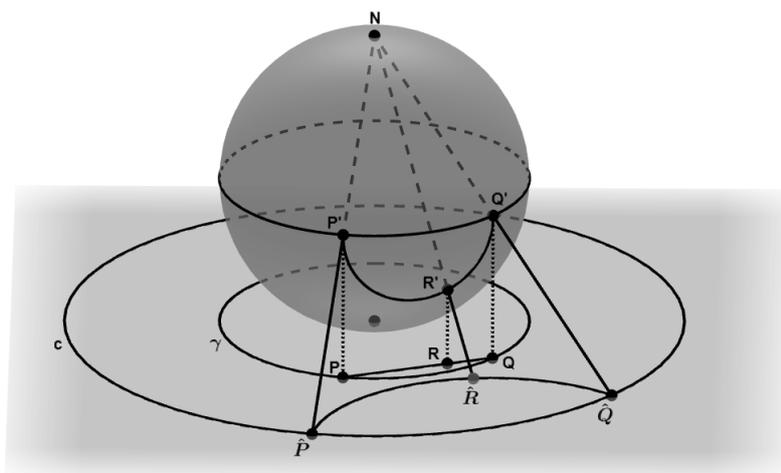


Figura 3.27: Isomorfismo entre los modelos de Poincaré y de Klein.

De este modo, hemos visto que realmente existe un isomorfismo entre ambos modelos. Sin embargo, todavía podemos ser un poco más precisos y definir un isomorfismo $F : D_p \rightarrow D_{bk}$, que irá del modelo del disco de Poincaré (D_p) al modelo de Beltrami-Klein (D_{bk}), tal que si $B \in D_p$ es un punto con $|\overline{OB}| = t$ (siendo O el centro de la circunferencia unitaria) entonces, la imagen de B por el isomorfismo, $F(B)$, será el punto contenido en la semirrecta \overrightarrow{OB} situado a una distancia $\hat{F}(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ con $0 \leq t < 1$. Por tanto, consideramos

γ la circunferencia con centro en O y radio 1 y el punto B que está situado dentro de la circunferencia. Además, sabemos por el teorema 3.5.11 que

$$e^{d(O,B)} = \frac{1 + |\overline{OB}|}{1 - |\overline{OB}|},$$

y denotando $x = d(O, B)$ y $t = |\overline{OB}|$ en la fórmula anterior, se tiene que

$$\sinh x = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \cosh x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \quad \text{y} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Adicionalmente, por la proposición 3.4.8, sabíamos que si un punto en el modelo de Poincaré se sitúa sobre un arco ortogonal, entonces su inverso está también en la circunferencia que contiene al arco pero fuera del disco. Denotamos por R y V a los puntos de intersección entre el arco ortogonal que contiene a B y la circunferencia unidad. Comenzaremos viendo que F es el isomorfismo buscado cuando consideramos un punto A por el cual pasa la mediatriz a la cuerda \overline{RV} y después veremos que el isomorfismo es válido para cualquier punto que se encuentre en la cuerda. Para ello, usaremos la figura 3.28 como referencia.

Consideramos el punto B' que será el inverso de B . Por tanto, su distancia a O será $\frac{1}{t}$. Tomamos ahora el punto P de forma que su distancia a O es la media de las distancias de O a B y de O a B' , es decir, $|\overline{OP}| = \frac{\frac{1}{t} + t}{2} = \frac{1+t^2}{2t}$. Veamos que la distancia de O a A es $\frac{2t}{1+t^2}$. Para ello, consideramos los triángulos $\triangle OVP$ y $\triangle OAV$ y, aplicando el criterio de semejanza AA (teorema 3.4.4), concluimos que son semejantes. Por tanto, se tiene que

$$\frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OV}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OV}|} \Leftrightarrow |\overline{OA}| \cdot |\overline{OP}| = |\overline{OV}| \cdot |\overline{OV}| = 1.$$

Es decir, los puntos A y P son inversos. Además, $|\overline{OA}| = \frac{2t}{1+t^2}$ como queríamos probar. Veamos ahora que para cualquier punto C en la cuerda \overline{RV} se tiene esta relación. Consideramos un punto G y su inverso G' y suponemos que la distancia de G a O es s . Por tanto, la distancia de O a G' será $\frac{1}{s}$. Tomamos ahora el punto E cuya distancia a O es la media de las distancias anteriores, es decir, $|\overline{OE}| = \frac{\frac{1}{s} + s}{2} = \frac{1+s^2}{2s}$. De nuevo, al igual que antes, aplicando el criterio de semejanza AA se tienen dos triángulos semejantes, $\triangle OAC$ y $\triangle OEP$, con lo que

$$\frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OE}|} \Leftrightarrow |\overline{OC}| \cdot |\overline{OE}| = |\overline{OA}| \cdot |\overline{OP}| = 1.$$

Por tanto, C y E son inversos. Además, $|\overline{OC}| = \frac{2s}{1+s^2}$ como queríamos probar. En resumen, F es un isomorfismo del modelo de Poincaré al modelo de Klein.

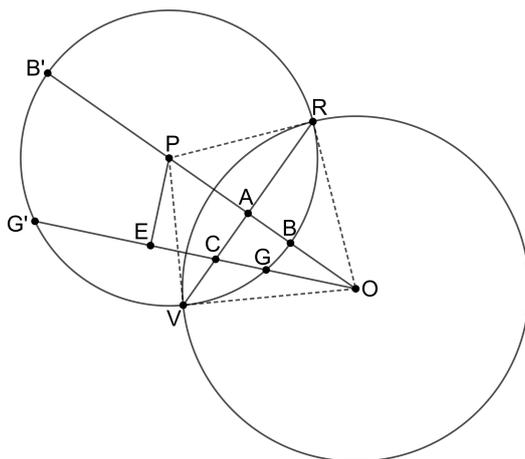


Figura 3.28: Isomorfismo F del modelo de Poincaré al de Klein.

3.6. Trigonometría hiperbólica

La trigonometría es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, es decir, de las medidas de los triángulos. En términos generales, se trata del estudio de las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente.

En geometría euclidiana, dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle C$ el ángulo recto, α y β los ángulos en A y en B y los lados a, b, c opuestos a los vértices A, B, C se tienen las siguientes relaciones:

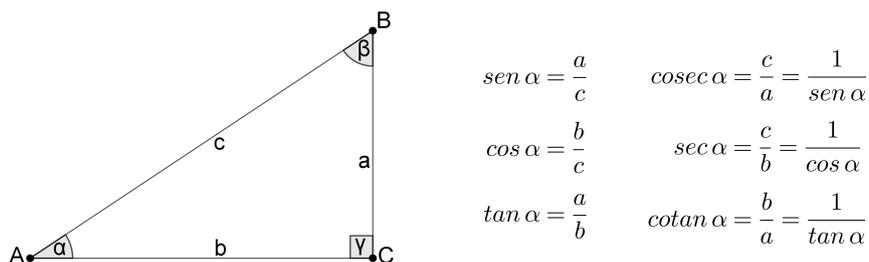


Figura 3.29: Relaciones trigonométricas geometría euclidiana.

La trigonometría hiperbólica que desarrollaremos en esta sección hace lo mismo en el plano hiperbólico, obteniéndose una serie de relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo que nos permitirán trabajar con mayor facilidad. En geometría hiperbólica, los triángulos tienen formas muy diferentes, por lo que las razones euclidianas no se verifican en todos los casos y, por lo tanto, es necesario definir otras funciones diferentes en el plano hiperbólico. Las funciones circulares (seno, coseno y tangente) se definen en términos de su serie de Taylor

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{y} \quad \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}.$$

Pero la geometría hiperbólica no engloba únicamente las funciones circulares sino que, además, se tienen también las funciones hiperbólicas, que también se pueden definir usando las series de Taylor,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{y} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Observamos en las fórmulas anteriores que la expansión de Taylor de las funciones hiperbólicas es la misma que la de las funciones circulares eliminando el coeficiente $(-1)^n$. Estas funciones reciben su nombre por la identidad hiperbólica siguiente,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

A partir de la cual, las ecuaciones paramétricas $x = \cosh \theta$ y $y = \sinh \theta$ nos dan una parte de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en el plano cartesiano.

3.6.1. Ángulo de paralelismo

En esta sección estudiaremos el ángulo de paralelismo, que nos dará una relación directa entre las funciones circulares y las funciones hiperbólicas. Para ello, trabajaremos en el modelo de Poincaré.

Teorema 3.6.1. *Sea α el ángulo de paralelismo para el punto P con respecto de la recta r y sea d la distancia euclidiana del punto P a Q , donde \overline{PQ} es perpendicular a r . Entonces, se tiene la conocida como fórmula de Bolyai-Lobachevsky*

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = e^{-d}.$$

Demostración. Comenzamos considerando un arco de circunferencia que contiene a los puntos P y R . Sea O el centro del disco unidad. Entonces podemos dibujar el triángulo $\triangle OPR$ en el sentido euclidiano. Tomemos S el punto de intersección entre la recta \overline{OR} y la recta tangente al arco de circunferencia por el punto P . Haciendo uso de la fórmula para la distancia en el modelo de Poincaré, sabemos que $-d = \left| \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right|$ y, en consecuencia,

$$e^{-d} = \left(\frac{1-x}{1+x} \right).$$

Tenemos ahora que $|\angle SPR| = \frac{1}{2} |\angle OPS|$ y $|\angle SRP| = \frac{1}{2} |\angle OPS|$ con lo que $\angle SPR \cong \angle SRP \cong \beta$. Entonces, haciendo uso del triángulo $\triangle OPR$, se tiene que

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \alpha + 2\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \beta.$$

Aplicamos ahora la fórmula $\tan(\theta - \gamma) = \frac{\tan(\theta) - \tan(\gamma)}{1 + \tan(\theta)\tan(\gamma)}$ y se tiene que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{1 - \tan(\beta)}{1 + \tan(\beta)} = \frac{1 - x}{1 + x} = e^{-d}.$$

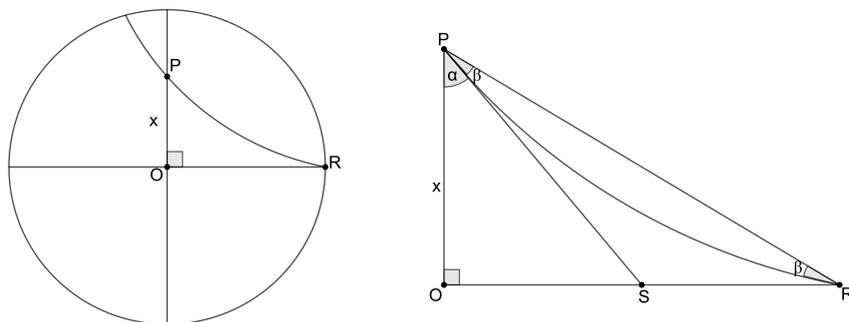


Figura 3.30: Demostración de la fórmula de Bolyai-Lobachevsky. □

3.6.2. Formas alternativas de la fórmula de Bolyai-Lobachevsky

La fórmula de Bolyai-Lobachevsky tiene gran importancia ya que ofrece una relación entre el ángulo de paralelismo y la distancia. Además, es posible establecer una relación entre las funciones circulares y las hiperbólicas simplemente reescribiendo la fórmula.

En los siguientes teoremas usaremos la notación que utilizó Lobachevsky, quien denotó $\alpha = \pi(d)$, ya que de esta forma es claro que el ángulo de paralelismo está relacionado con la distancia d . Y, a partir de la fórmula $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-d}$, se puede ver que

$$\pi(d) = 2 \cdot \arctan(e^{-d}).$$

Veamos ahora una serie de identidades para el ángulo de paralelismo.

Teorema 3.6.2. *Sea $\pi(x)$ el ángulo de paralelismo y x la distancia hiperbólica. Entonces se tiene que*

$$\sin(\pi(x)) = \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

$$\cos(\pi(x)) = \tanh(x).$$

$$\tan(\pi(x)) = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}.$$

Demostración. Comenzamos denotando $y = \arctan(e^{-x})$, entonces $\tan(y) = e^{-x}$. Por tanto, a partir de la identidad $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ obtenemos que:

$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)} \Leftrightarrow \sec^2(y) = \tan^2(y) + 1 = e^{-2x} + 1.$$

y se tiene entonces que

$$\frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{e^{-2x} + 1} \Leftrightarrow \cos(y) = \frac{1}{\sqrt{e^{-2x} + 1}},$$

Además, de forma similar se puede obtener que

$$\sin(y) = \tan(y)\cos(y) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2x} + 1}}.$$

Ahora, por la fórmula del ángulo doble para el seno, sabemos que $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$ y, como $\pi(x) = 2\arctan(e^{-x}) = 2y$, entonces se tiene que

$$\sin(\pi(x)) = \sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y) = 2 \cdot \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2x} + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^{-2x} + 1}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

Por lo tanto, hemos probado la primera de las ecuaciones. Ahora, para la segunda de ellas, haremos uso de la fórmula del ángulo doble para el coseno, $\cos(2y) = \cos^2(y) - \sin^2(y)$. Entonces,

$$\cos(\pi(x)) = \cos(2y) = \cos^2(y) - \sin^2(y) = \frac{1}{(e^{-2x} + 1)} - \frac{e^{-2x}}{(e^{-2x} + 1)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x).$$

Con lo que hemos probado la segunda de las ecuaciones. Para la última de ellas se tiene que

$$\tan(\pi(x)) = \frac{\sin(\pi(x))}{\cos(\pi(x))} = \frac{\operatorname{sech}(x)}{\tanh(x)} = \operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}.$$

Habiéndose probado así las tres ecuaciones. \square

3.6.3. Identidades para triángulos rectángulos

Al igual que en la geometría euclidiana, se tiene que en geometría hiperbólica existen una serie de identidades que únicamente pueden ser utilizadas cuando se trabaja con triángulos rectángulos. En esta sección, se expondrá un teorema con tres identidades que pueden ser usadas para cualquier triángulo rectángulo.

Teorema 3.6.3. *En geometría hiperbólica, dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $\angle C$ el ángulo recto y siendo $a = |\overline{BC}|$, $b = |\overline{AC}|$ y $c = |\overline{AB}|$ las longitudes de los lados opuestos al vértice respectivo. Entonces se cumplen las siguientes identidades,*

$$\sin A = \frac{\sinh a}{\sinh c} \quad \text{y} \quad \cos A = \frac{\tanh b}{\tanh c}. \quad (3.1)$$

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b = \cotan A \cdot \cotan B. \quad (3.2)$$

$$\cosh a = \frac{\cos A}{\sin B}. \quad (3.3)$$

Demostración. Para demostrar estas identidades comenzaremos demostrando la primera de ellas y, posteriormente, veremos que las otras dos se siguen de la primera.

Para ello, comenzaremos suponiendo que el vértice A del triángulo rectángulo coincide con el centro O de la circunferencia γ en el modelo del disco de Poincaré. Se puede ver un ejemplo de la situación en la figura 3.31, la cual usaremos como referencia a lo largo de la demostración. Los puntos B' y C' son las imágenes de B y C mediante el isomorfismo F que definimos en la sección anterior. Consideramos ahora el punto B'' , que será la intersección de la semirrecta \overrightarrow{OB} con la circunferencia ortogonal c que contiene a la recta de Poincaré BC . Del triángulo euclidiano $\triangle AB'C'$ que se ha formado, tenemos que

$$\cos A = \frac{|\overline{OC'}|}{|\overline{OB'}|}.$$

Por la fórmula $\tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$, donde $x = d(O, B)$ y $t = \frac{|\overline{OB}|}{2}$, sabemos que la tangente hiperbólica de la distancia de Poincaré de O a B es igual a la distancia euclidiana de O a B' y, en consecuencia, se tiene que

$$\cos A = \frac{|\overline{OC'}|}{|\overline{OB'}|} = \frac{\tanh b}{\tanh c}.$$

que es la mitad de la identidad que queríamos probar. Para la otra mitad, por la proposición 3.4.8, se tiene que B'' es el inverso de B en γ , con lo cual

$$|\overline{BB''}| = |\overline{OB''}| - |\overline{OB}| = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t}.$$

Y usando que $\sinh x = \frac{2t}{2+t^2}$, se llega a que

$$|\overline{BB''}| = \frac{2}{\sinh c} \quad \text{y} \quad |\overline{CC''}| = \frac{2}{\sinh b}.$$

Consideramos ahora B_1 , que será el punto medio del segmento $\overline{BB''}$. Además, B_1 será también la base de la perpendicular que va del centro O_1 de la circunferencia c al segmento $\overline{BB''}$. Sea la semirrecta $\overrightarrow{B_1G}$ la tangente a c en el punto B . Además, se tiene que $\angle O_1B_1G$ es un ángulo recto y $\angle O_1B_1B \cong \angle GBO_1$. Por tanto, $\angle BO_1B_1 \cong \angle GBB_1 = \alpha$ puesto que los dos ángulos son complementarios del ángulo $\angle B_1BO_1$. En consecuencia,

$$\sin B = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{O_1B}} = \frac{\overline{BB''}}{2} \cdot \frac{1}{\overline{O_1B}} = \frac{\overline{BB''}}{\overline{CC''}} = \frac{2}{\sinh c} \cdot \frac{\sinh b}{2} = \frac{\sinh b}{\sinh c}.$$

Y puesto que $\angle B$ es un ángulo agudo arbitrario en un triángulo rectángulo, podemos intercambiarlo por A para obtener la fórmula buscada.

Consideramos ahora un triángulo hiperbólico $\triangle ABC$ y trazamos un segmento perpendicular al lado \overline{AC} que pase por el punto B , el cual denotaremos por \overline{BD} . Suponemos ahora que $|\overline{BD}| = x$ y que $b = b_1 + b_2$. Haciendo uso de las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.8) se tiene que

$$\begin{aligned} \cosh c &= \cosh b_1 \cdot \cosh x = \cosh(b - b_2) \cdot \cosh x = (\cosh b \cdot \cosh b_2 - \sinh b \cdot \sinh b_2) \cdot \cosh x \\ &= \cosh b \cdot \cosh a - \sinh b \cdot \sinh a \cdot \frac{\cosh a \cdot \sinh b_2}{\cosh b_2 \cdot \sinh a} = \cosh b \cdot \cosh a - \sinh b \cdot \sinh a \cdot \frac{\tanh b_2}{\tanh a} \\ &= \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos C. \end{aligned}$$

Con lo que hemos probado la primera de las ecuaciones que queríamos demostrar (3.4). Veamos ahora que se cumple (3.5). Al igual que antes, partimos de un triángulo hiperbólico $\triangle ABC$, pero en este caso, trazamos el segmento perpendicular al lado \overline{BC} que pase por A , el cual denotaremos por \overline{AE} y supondremos que $|\overline{AE}| = y$. Usando la ecuación (3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\sin A}{\sinh a} &= \frac{1}{\sinh a} \cdot \frac{\sinh x}{\sinh c} = \frac{\sinh x}{\sinh a} \cdot \frac{1}{\sinh c} = \frac{\sin C}{\sinh c}. \\ \frac{\sin C}{\sinh c} &= \frac{1}{\sinh c} \cdot \frac{\sinh y}{\sinh b} = \frac{\sinh y}{\sinh c} \cdot \frac{1}{\sinh b} = \frac{\sin B}{\sinh b}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado también la ecuación (3.5) y nos quedaría ver únicamente que se cumple (3.6). Al igual que en los casos anteriores, partimos del triángulo hiperbólico $\triangle ABC$ y trazamos el segmento perpendicular de C a \overline{AB} , el cual dividirá $\angle C$ en dos ángulos $\angle \alpha$ y $\angle \beta$. Además, suponemos que $|\overline{AB}| = z$ y, usando las ecuaciones (3.1), (3.3) y (3.7), se obtiene que

$$\begin{aligned} \cosh c &= \cosh(c_1 + c_2) \\ &= \cosh c_1 \cdot \cosh c_2 + \sinh c_1 \cdot \sinh c_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin A} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin B} + \sinh b \cdot \sin \alpha \cdot \sinh a \cdot \sin \beta \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sinh^2 z}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{(\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta) + (\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sinh^2 z)}{\sin A \cdot \sin B} \\ &= \frac{\cos C + (\sin \alpha \cdot \cosh z) \cdot (\sin \beta \cdot \cosh z)}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}. \end{aligned}$$

Habiéndose probado de esta forma las tres identidades del teorema. Hay que destacar que, para la demostración de las identidades, se ha supuesto que al trazar las perpendiculares cortan al triángulo $\triangle ABC$. Aunque podría darse el caso en que esto no fuese así, la demostración sería prácticamente idéntica.

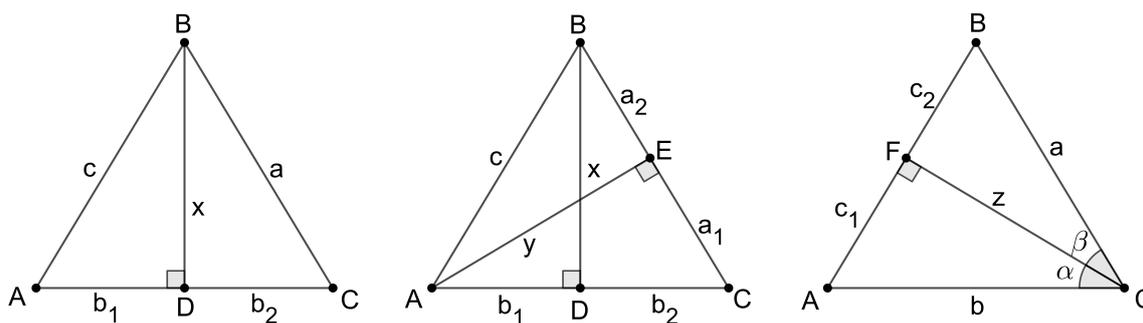


Figura 3.32: Esquema demostración ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6). □

Bibliografía

- [1] Beltrami, E. (1868). Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea. *Giornale di Mathematiche*. VI.
- [2] Beltrami, E. (1868). Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. Serie II.
- [3] Brannan, D. A., Esplen, M. F., & Gray, J. J. (2011). *Geometry* (2nd Revised ed.). Cambridge University Press.
- [4] Chen, B. (2013). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*. Apuntes de la asignatura Math4221. Hong Kong University of Science and Technology. <https://www.math.hkust.edu.hk/~mabfchen/Math4221/>
- [5] Elementos de Euclides. Wikipedia, la enciclopedia libre. Fecha acceso 17 de noviembre de 2021, de <https://es.wikipedia.org/wiki/ElementosdeEuclides>
- [6] E., & Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover Publications.
- [7] Euclides y el quinto postulado: Biografía de Euclides, los postulados de Euclides y la geometría no euclidea. Matesfacil. <https://www.matesfacil.com/matematicos/Euclides/biografia-Euclides-quinto-postulado-geometria-no-euclidea.html>
- [8] Giovannini, E. N. (2014). Geometría, formalismo e intuición: David Hilbert y el método axiomático formal (1891–1905). *Revista de Filosofía* (Madrid), 39(2), 121–146. <https://doi.org/10.5209/revresf.2014.v39.n2.47307>
- [9] Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History* (3 Sub ed.). W H Freeman & Co (Sd).
- [10] Hartshorne, R. (2005). *Geometry: Euclid and Beyond* (Corrected 2000. Corr. 3rd Printing 2005 ed.). Springer.
- [11] Hernández, L. J., Malinova, E., & Rivas, M. T. (2021). *Geometría plana neutral*. Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones.
- [12] Hilbert, D., & Cebrián, F. (2015). *Fundamentos de la geometría*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas.
- [13] Hvidsten, M. (2016). *Exploring Geometry* (Textbooks in Mathematics) (English Edition) (2.a ed.). Chapman and Hall/CRC.
- [14] Klein, F. (1871). Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*.4.
- [15] Marshall, D.G., & Scott, P.R. (2004). A Brief History of Non-euclidean Geometry. *The Australian mathematics teacher*, 60, 2-4.
- [16] McMullen, C. T. (2002). Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 95(1), 151–183. <https://doi.org/10.1007/s102400200001>
- [17] Moise, E. (1990). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint* (3rd ed.). Pearson.
- [18] Moore, E. H. (2010). *On The Projective Axioms Of Geometry* (1902). Kessinger Publishing.
- [19] Oré, C. F. A. (2017). La axiomática. Dialnet. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7762128>
- [20] Ross, S. W. (2000). *Non-Euclidean Geometry*. DigitalCommons@UMaine. <https://digitalcommons.library.umaine.edu/etd/426/>
- [21] Smith, J. (2021). *Methods of Geometry* (English Edition). Wiley-Interscience.
- [22] Stoll, R. R. (1974). *Sets, Logic, and Axiomatic Theories*. W. H. Freeman.
- [23] Thorgeirsson, S. (2014). *Hyperbolic geometry: history, models, and axioms*. <https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:729893/FULLTEXT01.pdf>
- [24] Traver, T. (2014). *Trigonometry in the Hyperbolic Plane*. Whitman College. <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2014/brewert.pdf>

Apéndice A

Proposiciones de Euclides

“*Los elementos*” de Euclides contienen 465 proposiciones. En este apéndice, recogemos solo las que hemos usado explícitamente en el trabajo.

Proposición 18 libro III. Si una recta toca una circunferencia y se traza una recta desde el centro de la circunferencia hasta el punto de contacto, la recta trazada será perpendicular a la tangente. Esta proposición se usará para demostrar las proposiciones 3.4.5 y 3.4.8.

Proposición 31 libro III. El ángulo en un semicircunferencia es un ángulo recto. Esta proposición será de utilidad en la demostración de la proposición 3.4.6.

Proposición 36 libro III. Por un punto exterior a una circunferencia se traza una recta secante y una tangente. Entonces, el rectángulo comprendido por la secante entera y la parte exterior determinada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente. La usaremos para demostrar la proposición 3.4.8.

Proposición 37 libro III. Por un punto fuera de una circunferencia se trazan dos rectas que cortan a la circunferencia de modo que el cuadrado de una es igual al rectángulo formado por los segmentos de la otra, entonces la primera es una recta tangente. Esta proposición la usaremos para demostrar la proposición 3.4.8.