



Facultad  
de  
Ciencias

**Geometría de las superficies paralelas  
en  $\mathbb{R}^3$ .**  
*Geometry of offset surfaces in  $\mathbb{R}^3$ .*

Trabajo Fin de Grado para acceder al  
**Grado en Matemáticas**

Autor: Lucía Grande Pérez  
Director: Mario Alfredo Fioravanti Villanueva

Junio 2022

# Resumen

Dada una superficie  $\mathcal{S}$  en  $\mathbb{R}^3$ , una superficie paralela a  $\mathcal{S}$  está formada por los puntos que se encuentran a la misma distancia euclidiana  $d$  de  $\mathcal{S}$ . En este trabajo se estudiarán algunas propiedades geométricas de las superficies paralelas que dependen de las curvaturas de la superficie inicial  $\mathcal{S}$  y de la distancia  $d$ .

También se analizarán las superficies paralelas de las cuádricas y de otras familias de superficies. Además, se determinarán las singularidades y las autointersecciones de los distintos ejemplos de superficies considerados.

En el último capítulo se estudiarán las superficies racionales que admiten superficies paralelas racionales.

**Palabras clave:** Superficies paralelas, normal unitaria, cuádrica, singularidades, autointersecciones, parametrización racional.

# Abstract

Given a surface  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{R}^3$ , a surface parallel to  $\mathcal{S}$  is formed by the points that are at the same Euclidean distance  $d$  from  $\mathcal{S}$ . In this memory we will study some geometric properties of offset surfaces that depend on the curvatures of the initial surface  $\mathcal{S}$  and on the distance  $d$ .

Offsets to quadric surfaces and other families of surfaces will also be discussed. In addition, we will be considering different examples of surfaces and we will determine their singularities and self-intersections.

In the last chapter of this memory we will study the rational surfaces that admit rational offsets.

**Key words:** offsets, unit normal, quadric surface, singularities, self-intersections, rational parametrization.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Algunos conceptos básicos sobre superficies en el espacio euclídeo</b>	<b>3</b>
1.1. Superficies en $\mathbb{R}^n$	3
1.2. El operador forma	6
1.3. Curvatura de Gauss y curvatura media	7
<b>2. Superficies paralelas</b>	<b>9</b>
2.1. Definiciones	9
2.2. El operador forma de una superficie paralela	14
<b>3. Ejemplos</b>	<b>21</b>
3.1. Superficies de revolución	23
3.2. Superficies regladas	25
<b>4. Singularidades de superficies paralelas</b>	<b>33</b>
4.1. Puntos singulares en las superficies paralelas	33
4.2. Autointersecciones de las superficies paralelas de cuádricas en forma implícita	34
4.3. Autointersecciones de las superficies paralelas de cuádricas en forma paramétrica	38
<b>5. Superficies NP</b>	<b>41</b>
5.1. Introducción	41
5.2. Racionalidad de las cuádricas y de sus superficies paralelas	42
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>
<b>A. Anexo</b>	<b>49</b>



# Introducción

Cuando pensamos en dos planos paralelos, nos vienen a la cabeza distintas ideas o definiciones. Supongamos dos planos paralelos, llamémoslos  $\alpha$  y  $\beta$ , en  $\mathbb{R}^3$ . Estos cumplen que todos los puntos de  $\alpha$  están a la misma distancia  $d$  de  $\beta$ , y viceversa. También cumplen que no se cortan, es decir, que  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ . O que tienen la misma pendiente. O que tienen el mismo vector normal unitario. También podemos ser más rigurosos y decir que  $\alpha$  y  $\beta$  son dos planos paralelos si verifican que existe  $d \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $P \in \alpha$  si y solo si existe  $Q \in \beta$  tal que  $\overline{PQ} \perp \beta$  y  $|\overline{PQ}| = d$ . Sin embargo, esto que parece tan intuitivo en el caso del plano, no es tan fácil de imaginar para otras superficies.

Cuando se modelan objetos del mundo real, no solo se consideran las superficies, sino que también hay que tener en cuenta el grosor del material. Por ello, el proceso de construir la superficie paralela a una dada es muy utilizado y está presente en la mayoría de software de geometría y modelado 3D de la actualidad.

Las superficies paralelas, también llamadas superficies *offset*, se definen como el lugar geométrico de los puntos que están a distancia constante  $d$  a lo largo de la normal de la superficie inicial. Debido a que en la expresión del vector normal unitario aparece una raíz cuadrada, las superficies paralelas son, en general, más complejas que sus superficies iniciales. Por ejemplo, si la superficie inicial es racional, su superficie paralela suele ser no racional, a excepción de algunos casos que se mencionarán más adelante. También veremos que la orientabilidad de la superficie paralela no tiene por qué coincidir con la de la superficie inicial. En concreto, estudiaremos un ejemplo de superficie no orientable cuyas superficies paralelas sí son orientables. Otra dificultad que surge a la hora de hallar las superficies paralelas es la aparición de singularidades y autointersecciones, incluso si la superficie inicial es regular. Frecuentemente, en la práctica, habrá que “recortar” (en inglés, *trim off*) partes de la superficie paralela que surgen a partir de las autointersecciones.

Dos conceptos importantes a la hora de estudiar las superficies paralelas a una superficie regular son las curvaturas y el operador forma de la superficie inicial. Veremos en el capítulo 2 la relación de ambos entre una superficie y su paralela. Acabaremos demostrando un teorema que relaciona superficies de curvatura de Gauss constante con superficies de curvatura media constante, y que debe su nombre a Bonnet.

En el capítulo 3, presentaremos algunos ejemplos de superficies y estudiaremos sus superficies paralelas. Se calculará la fórmula para la superficie paralela a una superficie de revolución y a una superficie reglada cualesquiera. Además, se verán ejemplos concretos. Un resultado importante al que llegaremos es que las únicas cuádricas cuyas superficies paralelas siguen siendo del mismo tipo son las cuádricas naturales, esto es, la esfera, el cono circular y el cilindro circular.

Como era de imaginar, las superficies paralelas no serán siempre regulares. Su regularidad dependerá del parámetro  $d$ : cuanto mayor sea este en valor absoluto, “más” irregular será la superficie paralela. Veremos que en dichas superficies pueden aparecer dos tipos de singularidades, los puntos singulares y las autointersecciones. Estas últimas las estudiaremos tanto para cuádricas en forma implícita como en forma paramétrica. Lo aquí mencionado aparece en el capítulo 4.

Diremos que una superficie algebraica es racional si admite una parametrización racional. Dada una superficie algebraica racional con representación paramétrica racional  $f(u, v)$  y normal unitaria  $\vec{N} = (f_u \times f_v) / \|f_u \times f_v\|$ , la superficie paralela a distancia  $d$  dada por  $f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v)$  no es, en general, una representación racional, ya que  $\|f_u \times f_v\|$  no suele ser racional. Sin embargo, como las superficies racionales son la representación estándar de las superficies parametrizadas en los sistemas CAD (diseño asistido por ordenador, del inglés *Computer Aided Design*), la racionalidad de las superficies juega un papel importante en el modelado geométrico. Esto es lo que se estudiará en el capítulo 5, llegando así a un resultado importante, que es que todas las cuádricas excepto los conos elípticos y los cilindros elípticos e hiperbólicos son superficies NP, es decir, superficies racionales que admiten superficies paralelas racionales.

Los ejemplos gráficos han sido creados por la autora utilizando los programas *Geogebra 5* y *Matlab R2020a*, a excepción de aquellos en los que se cita la fuente.

# Capítulo 1

## Algunos conceptos básicos sobre superficies en el espacio euclídeo

En este primer capítulo se van a definir conceptos básicos relativos a superficies que se utilizarán a lo largo del desarrollo de este trabajo. En la sección 1.1 se presentan las principales nociones sobre superficies relacionadas con el tema a tratar. En la sección 1.2 introducimos el concepto de operador forma (en inglés, *shape operator*), que será muy útil para entender algunos resultados del capítulo siguiente. Por último, un breve repaso sobre las distintas curvaturas relativas a una superficie se menciona en la sección 1.3.

La referencia básica para superficies que se va a seguir es el libro de Alfred Gray [4], así como su versión traducida al castellano [1], además de las notas de Fernando Etayo de la asignatura *Geometría de Curvas y Superficies* [3].

### 1.1. Superficies en $\mathbb{R}^n$

Empezaremos considerando funciones de dos variables cuya imagen es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1.1.** Una **superficie parametrizada** o **parametrización local** es una aplicación diferenciable

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

siendo  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

Lo más frecuente es que el dominio de definición de una superficie parametrizada sea o bien un conjunto abierto o bien un rectángulo cerrado. En caso de que dicho dominio sea un conjunto arbitrario, llamémoslo  $A$ , se dice que una aplicación  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es una superficie parametrizada si  $f$  puede ser extendida a una aplicación diferenciable de  $U$  en  $\mathbb{R}^n$ , siendo  $U$  un subconjunto abierto que contiene a  $A$ .

Una superficie parametrizada se puede escribir como una  $n$ -tupla de funciones, de la forma

$$f(u, v) = (f_1(u, v), \dots, f_n(u, v)).$$

Por tanto, es posible definir la derivada parcial  $f_u$  de  $f$  respecto de  $u$ :

$$f_u(u, v) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial u}(u, v) \right),$$

y la derivada parcial  $f_v$  de  $f$  respecto de  $v$ :

$$f_v(u, v) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(u, v) \right).$$

El resto de derivadas parciales, como por ejemplo  $f_{uu}$  o  $f_{uv}$ , se definen de forma análoga.

**Definición 1.1.2.** La **matriz jacobiana** de una superficie parametrizada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la función con valores matriciales  $\mathcal{J}(f)$  dada por

$$\mathcal{J}(f)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u(u, v) \\ f_v(u, v) \end{pmatrix},$$

para cada  $(u, v) \in U$ . Si  $n = 2$ , se llama **determinante jacobiano** o **jacobiano** de  $f$  al determinante de la matriz jacobiana de  $f$ .

Recordemos que el rango de una matriz  $A$  es el mayor entero  $n$  tal que  $A$  posee una submatriz  $n \times n$  de determinante no nulo. De esta forma, ya estamos en condiciones de dar la definición de superficie parametrizada regular.

**Definición 1.1.3.** Una superficie parametrizada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es regular en un punto  $(u_0, v_0) \in U$  si su matriz jacobiana  $\mathcal{J}(f)(u, v)$  tiene rango 2 en  $(u_0, v_0)$ . Se dice que  $f(u_0, v_0)$  es un punto singular de la superficie si  $f$  no es regular en el punto  $(u_0, v_0)$ , o equivalentemente, si  $f_u(u_0, v_0) = 0$ , o si  $f_v(u_0, v_0) = 0$ , o si  $f_u(u_0, v_0)$  y  $f_v(u_0, v_0)$  son linealmente dependientes. Llamamos **superficie parametrizada regular** a una superficie parametrizada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuya matriz jacobiana tiene rango 2 en todo punto  $(u, v) \in U$ .

**Definición 1.1.4.** Una **superficie parametrizada inyectiva** es una superficie parametrizada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(u_1, v_1) = f(u_2, v_2)$  implica que  $u_1 = u_2$  y  $v_1 = v_2$ .

Centramos ahora nuestra atención en las superficies parametrizadas en  $\mathbb{R}^3$ , puesto que son las más fáciles de visualizar. En lo que sigue,  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

El siguiente lema nos proporciona un criterio muy útil para determinar si una superficie parametrizada en  $\mathbb{R}^3$  es o no regular.

**Lema 1.1.5.** Una superficie parametrizada  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es regular en  $(u_0, v_0) \in U$  si y solo si  $f_u \times f_v$  es no nulo en  $(u_0, v_0)$ .

*Demostración.* La matriz jacobiana de  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es

$$\mathcal{J}(f)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_3}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u(u, v) \\ f_v(u, v) \end{pmatrix},$$

para cada  $(u, v) \in U$ .

Por la definición de superficie parametrizada regular, sabemos que  $f$  es regular si la matriz jacobiana  $\mathcal{J}(f)(u, v)$  tiene rango 2 en todo punto  $(u, v) \in U$ .

Las submatrices  $2 \times 2$  de  $\mathcal{J}(f)$  son

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$f_u \times f_v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{i} - \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{j} + \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} \mathbf{k}.$$

Así,  $(f_u \times f_v)(u_0, v_0) = 0$  si y solo si el rango de  $\mathcal{J}(f)(u_0, v_0)$  es menor que 2. Por tanto,  $f$  es regular en  $(u_0, v_0)$  si y solo si  $(f_u \times f_v)(u_0, v_0) \neq 0$ . □

**Definición 1.1.6.** Para una superficie parametrizada inyectiva  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el **campo de vectores normal y unitario** o **normal unitaria**  $\vec{N}$  de la superficie está dado por

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u(u, v) \times f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\|},$$

en aquellos puntos  $(u, v) \in U$  en los cuales  $f_u \times f_v$  no se anula. Con frecuencia escribiremos de forma abreviada

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

Existen ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  a los que nos gustaría denominar también superficies, pero que no pueden ser descritos como la imagen biyectiva de una sola superficie parametrizada definida sobre un conjunto abierto. Algunos ejemplos claros de esta situación son la esfera y el toro. Es por ello que introducimos la noción de superficie regular. La idea es combinar convenientemente varias superficies parametrizadas.

**Definición 1.1.7.** Un subconjunto  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  es una **superficie regular** si para cada punto  $p \in \mathcal{M}$  existe un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap \mathcal{M}$  tal que:

- (i)  $f$  es diferenciable;
- (ii)  $f : U \rightarrow V \cap \mathcal{M}$  es un homeomorfismo. Esto significa que  $f$  posee una inversa continua  $f^{-1} : V \cap \mathcal{M} \rightarrow U$  tal que  $f^{-1}$  es la restricción a  $V \cap \mathcal{M}$  de una aplicación continua  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ , siendo  $W$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $V \cap \mathcal{M}$ ;
- (iii) cada aplicación  $f : U \rightarrow \mathcal{M}$  es una superficie parametrizada regular.

Cada aplicación  $f : U \rightarrow \mathcal{M}$  se denomina **carta local** o **sistema de coordenadas locales** en un entorno de  $p \in \mathcal{M}$ .

Otro concepto que vamos a necesitar cuando estudiemos las superficies paralelas es el de superficie orientada.

**Definición 1.1.8** (Definición 1 de [2], página 103). Una superficie regular  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  se dice que es **orientable** si se puede recubrir mediante una familia de sistemas de coordenadas locales de manera que, si un punto  $p \in \mathcal{M}$  pertenece a dos sistemas de la familia, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en  $p$ . La elección de una tal familia se llama una **orientación** de  $\mathcal{M}$ . En ese caso, se dice que  $\mathcal{M}$  está **orientada**. Si no es posible dar esa orientación, entonces la superficie es no orientable.

**Proposición 1.1.9** (Proposición 1 de [2], página 105). *Una superficie regular  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  es orientable si y solo si existe un campo de vectores normal y unitario diferenciable  $\vec{N} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  en  $\mathcal{M}$ .*

*Demostración.* Por la definición anterior, si  $\mathcal{M}$  es orientable, es posible recubrirla con una familia de sistemas de coordenadas de forma que, en la intersección de dos de ellos cualesquiera, el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo. En los puntos  $p = f(u, v)$  de cada sistema, definimos  $\vec{N}(p) = \vec{N}(u, v)$  por

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}(p). \tag{1.1}$$

$\vec{N}(p)$  está bien definido, ya que si  $p$  pertenece a dos sistemas de coordenadas, con parámetros  $(u, v)$  y  $(\bar{u}, \bar{v})$ , entonces los vectores normales  $\vec{N}(u, v)$  y  $\vec{N}(\bar{u}, \bar{v})$  coinciden, porque

$$\vec{f}_{\bar{u}} \times \vec{f}_{\bar{v}} = (f_u \times f_v) \mathcal{J}(f)(u, v),$$

donde  $\mathcal{J}(f)(u, v)$  es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas. Además, por la ecuación (1.1), las coordenadas de  $\vec{N}(u, v)$  en  $\mathbb{R}^3$  son funciones diferenciables de  $(u, v)$  y, por ello, la aplicación  $\vec{N} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es diferenciable, que es lo que queríamos probar.

Por otro lado, sea  $\vec{N} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo diferenciable de vectores normales unitarios, y consideremos una familia de sistemas de coordenadas conexos que recubren  $\mathcal{M}$ . Para los puntos  $p = f(u, v)$  de cada sistema de coordenadas  $f(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , resulta, por la continuidad de  $\vec{N}$ ,

$$\vec{N}(p) = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|},$$

intercambiando  $u$  y  $v$  si fuese necesario. De hecho, el producto escalar

$$\left\langle \vec{N}(p), \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} \right\rangle = g(p) = \pm 1,$$

es una función continua en  $f(U)$ . Como  $f(U)$  es conexo, el signo de  $g$  es constante. Si  $g = -1$ , intercambiamos  $u$  y  $v$  en la parametrización.

Procediendo de esta manera con todos los sistemas de coordenadas, tenemos que en la intersección de dos cualesquiera de ellos, supongamos  $f(u, v)$  y  $\bar{f}(\bar{u}, \bar{v})$ , el determinante de la matriz  $\mathcal{J}(f)(u, v)$  es positivo. En otro caso, se tendría

$$\frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \vec{N}(p) = -\frac{\bar{f}_{\bar{u}} \times \bar{f}_{\bar{v}}}{\|\bar{f}_{\bar{u}} \times \bar{f}_{\bar{v}}\|} = -\vec{N}(p),$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, la familia de sistemas de coordenadas dada, después de llevar a cabo ciertos intercambios de  $u$  y  $v$ , satisface las condiciones de la definición 1.1.8 y, en consecuencia,  $\mathcal{M}$  es orientable.  $\square$

## 1.2. El operador forma

Normalmente nos interesará conocer cómo se curva una superficie regular  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Un buen método para conseguirlo consiste en medir cómo varía la normal unitaria  $\vec{N}$  de la superficie punto a punto. Para ello usaremos un operador lineal denominado operador forma (*shape operator*). El operador forma aplicado a un vector tangente  $v_p$  es el opuesto de la derivada de  $\vec{N}$  en la dirección  $v_p$ . Para entender el concepto de operador forma de una superficie, introduciremos primero algunas definiciones.

**Definición 1.2.1.** Un **campo de vectores**  $V$  sobre un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación que a cada punto  $p \in U$  le asigna un vector tangente  $V(p) \in \mathbb{R}_p^n$ . Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, hacemos actuar  $V$  sobre  $f$  mediante la fórmula

$$V[f](p) = V(p)[f].$$

Se dice que el campo de vectores  $V$  es **diferenciable** si la función  $V[f] : U \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable.

**Definición 1.2.2.** Sea  $W$  un campo de vectores diferenciable sobre un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , y sea  $v_p$  un vector tangente a  $\mathbb{R}^n$  en  $p \in U$ . Entonces la **derivada** de  $W$  con respecto a  $v_p$  es el vector tangente  $D_v W \in \mathbb{R}_p^n$  dado por

$$D_v W = \widetilde{W}(p+tv)'(0)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left. \frac{\widetilde{W}(p+tv) - \widetilde{W}(p)}{t} \right|_p,$$

donde  $t \mapsto \widetilde{W}(p+tv)$  es la curva en  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$\widetilde{W}(p+tv)_{p+tv} = W(p+tv).$$

**Definición 1.2.3.** Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y sea  $\vec{N}$  una normal unitaria de la superficie  $\mathcal{M}$  definida en un entorno de un punto  $p \in \mathcal{M}$ . Para cada vector  $v_p$  tangente a  $\mathcal{M}$  en  $p$ , definimos

$$S(v_p) = -D_v \vec{N}.$$

El operador  $S$  así definido se denomina **operador forma** de  $\mathcal{M}$ .

Una propiedad elemental del operador forma es la siguiente:

**Lema 1.2.4.** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular. Entonces

$$S(f_u) = -\vec{N}_u \quad y \quad S(f_v) = -\vec{N}_v.$$

*Demostración.* Fijamos  $v$  y definimos una curva  $\alpha$  por  $\alpha(u) = f(u, v)$ . Entonces, se verifica

$$S(f_u(u, v)) = S(\alpha'(u)) = -D_{\alpha'(u)}\vec{N} = -(\vec{N} \circ \alpha)'(u).$$

Pero  $(\vec{N} \circ \alpha)'$  es precisamente  $\vec{N}_u$ . Luego  $S(f_u) = -\vec{N}_u$ .

De forma análoga, se tiene que  $S(f_v) = -\vec{N}_v$ . □

### 1.3. Curvatura de Gauss y curvatura media

Consideremos la aplicación de Weingarten  $\mathcal{L} : T_p \rightarrow T_p$  definida del plano tangente en sí mismo. Conocemos dos matrices para  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{pmatrix} = g^{-1}L, \quad \text{respecto de la base } \{f_u, f_v\},$$

donde  $g$  es la matriz de la primera forma fundamental de la superficie, y  $L$  es la matriz de la segunda forma fundamental, y

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de la base } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}.$$

La traza y el determinante son independientes de la base escogida, por ser  $\mathcal{L}$  un endomorfismo de un espacio vectorial.

**Definición 1.3.1.** Con la notación precedente, introducimos los siguientes conceptos:

1. **Curvaturas principales:** los valores propios  $k_1, k_2$  de  $\mathcal{L}$ .
2. **Curvatura de Gauss  $K$ :** el determinante de  $\mathcal{L}$ , es decir,

$$K = \det \mathcal{L} = k_1 k_2 = \frac{\det L}{\det g}.$$

3. **Curvatura media  $H$ :** la media de las curvaturas principales, es decir,

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$



## Capítulo 2

# Superficies paralelas

Este capítulo está destinado esencialmente a presentar los principales conceptos, propiedades y resultados sobre las superficies paralelas o superficies *offset*, con el objetivo de familiarizarse con ellos y así entender el desarrollo de este trabajo. El equivalente en dimensión 2 a las superficies paralelas son las curvas paralelas, pero no se estudiarán en este trabajo. En la sección 2.1 veremos cómo construir la superficie paralela  $\mathcal{M}(d)$  a una superficie dada  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ . El operador forma  $S(d)$  de  $\mathcal{M}(d)$  se expresa en términos del operador forma  $S$  de  $\mathcal{M}$ , como se presenta en la sección 2.2. Además, estudiaremos un teorema importante, que debe su nombre a Bonnet, y también veremos algunos ejemplos.

La referencia básica para superficies paralelas que se va a seguir es el libro de Alfred Gray [4], así como su versión traducida al castellano [1].

### 2.1. Definiciones

En esta sección veremos cómo construir la superficie paralela a una superficie dada  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ . En lo que sigue,  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.1.1.** Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular. La **superficie paralela recortada de  $\mathcal{M}$  a distancia  $d > 0$**  es el conjunto

$$\mathcal{M}(d) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \text{distancia}(p, \mathcal{M}) = d\}.$$

Si  $d$  es grande,  $\mathcal{M}(d)$  podría no ser una superficie regular, como veremos más adelante en algún ejemplo. Sin embargo, para  $d$  pequeño probaremos que  $\mathcal{M}(d)$  es una superficie regular. Para ello, introduzcamos primero la noción de superficie parametrizada paralela o parametrización local paralela. La idea es trasladar la superficie parametrizada una distancia  $d$  a lo largo de su normal unitaria  $\vec{N}$ . Queremos poder ir en cualquier dirección a lo largo del vector normal, por lo que permitimos que  $d$  sea positivo o negativo. Si el vector normal está orientado hacia afuera, llamaremos superficies paralelas exteriores a aquellas en las que  $d$  es positivo, e interiores a aquellas en las que  $d$  es negativo. Además,  $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}$ .

**Definición 2.1.2.** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular. Entonces la **superficie parametrizada paralela a  $f$  a distancia  $d \in \mathbb{R}$**  es la superficie parametrizada definida por

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v),$$

donde

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u(u, v) \times f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\|}.$$

El parámetro  $d$  se denominará **distancia offset**. Esta definición se puede extender a superficies que tengan puntos singulares, como por ejemplo el cono, restringiéndose a las regiones donde la superficie sí es regular. Notemos que la superficie descrita en la definición 2.1.1 es un subconjunto

de la superficie aquí definida (ver figura 2.1). En lo que sigue, siempre que utilicemos el término de superficie paralela nos referiremos a aquella dada por la definición 2.1.2. En caso de que en algún ejemplo estemos representando la superficie paralela recortada, se indicará explícitamente.

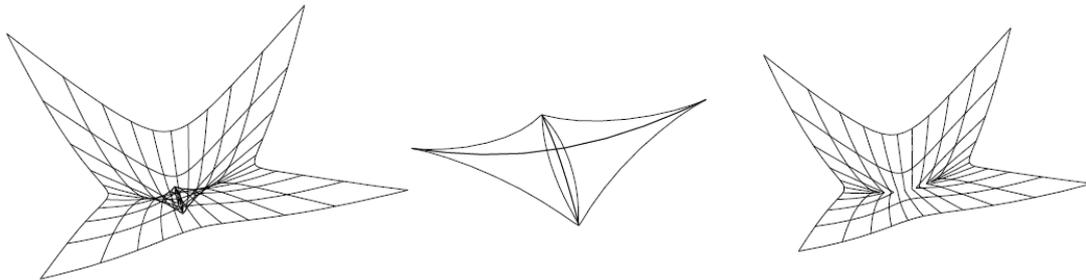


Figura 2.1: Superficie paralela con autointersección (izquierda), región encerrada por las curvas de autointersección (centro) y superficie paralela recortada (derecha), de un paraboloido elíptico  $z = \frac{1}{2}(1,75x^2 + 2y^2)$  con  $d = 0,6$  [12].

**Lema 2.1.3.** Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular para la cual existe una sola parametrización local regular  $f : U \rightarrow \mathcal{M}$ . Supongamos, además, que existe un número real  $d_0 > 0$  tal que

$$\det(I - dS) > 0 \quad \text{para } |d| < d_0 \text{ sobre } \mathcal{M},$$

donde  $I$  es la matriz identidad y  $S$  es el operador forma de  $\mathcal{M}$ . Entonces, para  $|d| < d_0$ ,  $f[d]$  es una parametrización local regular de  $\mathcal{M}(d)$ .

*Demostración.* La superficie parametrizada paralela a  $f$  a distancia  $d$  está definida por

$$f[d] = f + d\vec{N}.$$

Luego, derivando respecto de  $u$  y usando el lema 1.2.4, es fácil comprobar que

$$f[d]_u = f_u + d\vec{N}_u = (I - dS)f_u,$$

y análogamente para  $f[d]_v$ . Por lo tanto,

$$f[d]_u \times f[d]_v = (I - dS)f_u \times (I - dS)f_v = \det(I - dS)f_u \times f_v.$$

Así,  $f[d]_u \times f[d]_v$  es no nulo y, por tanto, por el lema 1.1.5,  $f[d]$  es regular. En consecuencia,  $\mathcal{M}(d)$  es una superficie regular, ya que está recubierta enteramente por la parametrización local regular  $f[d]$ . □

Ahora consideramos superficies paralelas a superficies regulares arbitrarias.

**Lema 2.1.4.** Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular, y denotamos por  $\mathcal{M}(d)$  la superficie paralela a  $\mathcal{M}$  a distancia  $d$ . Supongamos, además, que existe un número real  $d_0 > 0$  tal que

$$\det(I - dS) > 0 \quad \text{para } |d| < d_0 \text{ sobre } \mathcal{M},$$

donde  $I$  es la matriz identidad y  $S$  es el operador forma de  $\mathcal{M}$ . Entonces, para  $|d| < d_0$ , la superficie paralela  $\mathcal{M}(d)$  es una superficie regular.

*Demostración.* Sea  $f : U \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrización local regular e inyectiva para  $\mathcal{M}$ . Definimos  $f[d]$  por

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v).$$

Definimos también la aplicación  $y : U \times \{d : |d| < d_0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$y(u, v, d) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v).$$

La matriz jacobiana de  $y$  es

$$\mathcal{J}(y) = \begin{pmatrix} (I - dS)f_u \\ (I - dS)f_v \\ \vec{N} \end{pmatrix}.$$

Es claro que  $\det(\mathcal{J}(y)(u, v, d)) \neq 0$  para  $(u, v, d) \in U \times \{d : |d| < d_0\}$ . Por tanto,  $y$  es inyectiva en un entorno de cada punto de  $U \times \{d : |d| < d_0\}$ . En particular,  $f[d]$  es una parametrización local regular e inyectiva sobre un entorno de cada punto de  $U$ . Las parametrizaciones locales de la forma  $f[d]$  recubren  $\mathcal{M}(d)$ , luego  $\mathcal{M}(d)$  es una superficie regular.  $\square$

Con estos dos lemas queda probado que para una distancia  $d$  pequeña, la superficie paralela  $\mathcal{M}(d)$  a una superficie regular  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  es también regular. Veamos un ejemplo sencillo de cómo calcular la superficie paralela a una dada.

**Ejemplo 2.1.5.** En este ejemplo vamos a ver que la superficie paralela a distancia  $d$  de una esfera es otra esfera. Una parametrización de la esfera de radio  $r$  y centro el origen de coordenadas, de ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

es  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$f(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u),$$

con  $D = [0, \pi) \times [0, 2\pi]$ .

Para ver cuál es su superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$ , vamos a calcular

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v).$$

Empezamos hallando la normal unitaria de la superficie. Sabemos que

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

Así que calculamos

$$f_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u)$$

y

$$f_v = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f_u \times f_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r \cos u \cos v & r \cos u \sin v & -r \sin u \\ -r \sin u \sin v & r \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (r^2 \sin^2 u \cos v, r^2 \sin^2 u \sin v, r^2 \sin u \cos u) \\ &= \sin u (r^2 \sin u \cos v, r^2 \sin u \sin v, r^2 \cos u). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|f_u \times f_v\| &= \sqrt{\sin^2 u (r^4 \sin^2 u \cos^2 v + r^4 \sin^2 u \sin^2 v + r^4 \cos^2 u)} \\ &= \sqrt{\sin^2 u (r^4 \sin^2 u + r^4 \cos^2 u)} \\ &= \sqrt{r^4 \sin^2 u} = r^2 |\sin u| = r^2 \sin u, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta para la última igualdad que  $\sin u$  es no negativo si  $u \in [0, \pi)$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{N}(u, v) &= \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \frac{1}{r^2 \sin u} \cdot \sin u (r^2 \sin u \cos v, r^2 \sin u \sin v, r^2 \cos u) \\ &= (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u). \end{aligned}$$

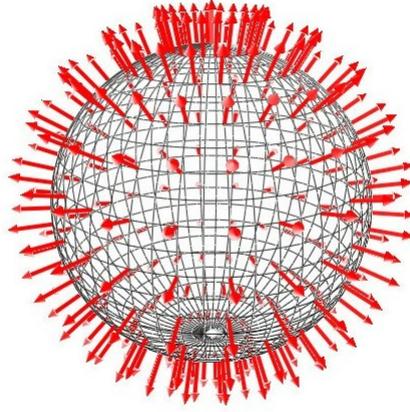


Figura 2.2: Normales a la esfera [13].

De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned}
 f[d](u, v) &= f(u, v) + d\vec{N}(u, v) \\
 &= (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u) + d(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \\
 &= ((r + d) \sin u \cos v, (r + d) \sin u \sin v, (r + d) \cos u).
 \end{aligned}$$

Es decir, la superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$  de una esfera de radio  $r$  es otra esfera de radio  $r + d$ . Sin pérdida de generalidad, supondremos  $d > -r$ .

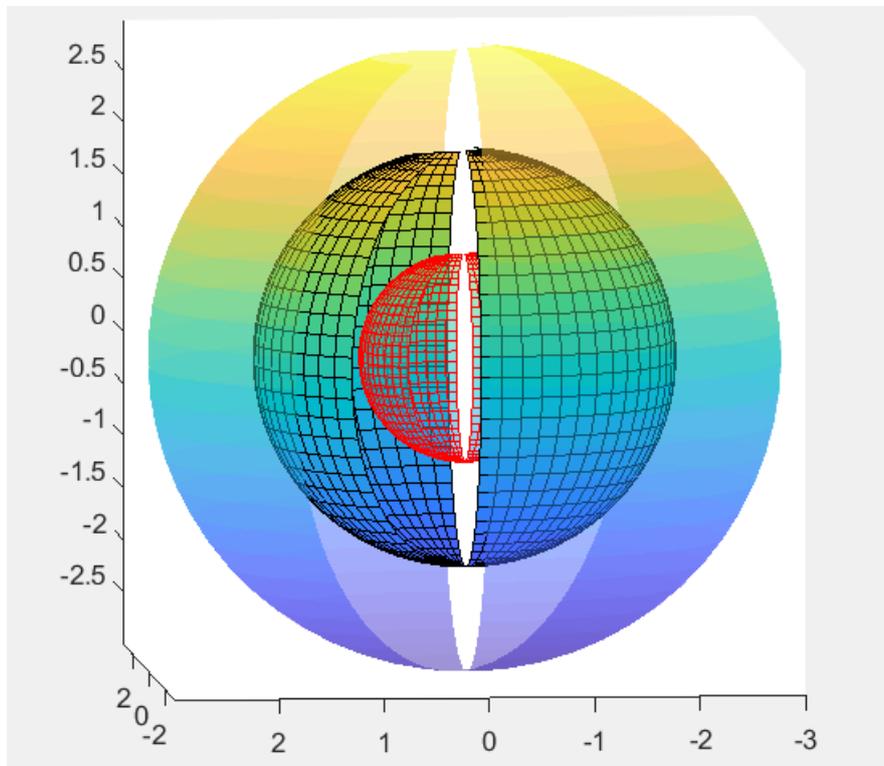


Figura 2.3: Esfera de radio 2 (medio) con superficies paralelas a distancia  $d = 1$  (exterior) y  $d = -1$  (interior).

Además, vamos a calcular las curvaturas principales de una esfera de radio  $r$  cuando el vector normal apunta hacia afuera, ya que las necesitaremos para ejemplos de la sección siguiente.

Para calcular la aplicación de Weingarten,  $\mathcal{L}$ , tenemos que calcular previamente la primera y la segunda forma fundamental, es decir,  $g$  y  $L$ , respectivamente. Ya tenemos calculadas las derivadas parciales

$$f_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u)$$

y

$$f_v = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f_u \cdot f_u &= r^2 \cos^2 u \cos^2 v + r^2 \cos^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u = r^2 \cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + r^2 \sin^2 u \\ &= r^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) = r^2, \end{aligned}$$

$$f_u \cdot f_v = -r^2 \cos u \cos v \sin u \sin v + r^2 \cos u \sin v \sin u \cos v + 0 = 0,$$

$$f_v \cdot f_v = r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \sin^2 u \cos^2 v = r^2 \sin^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) = r^2 \sin^2 u.$$

Y así, la primera forma fundamental está dada por

$$g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

Además, ya hemos calculado anteriormente,

$$\vec{N} = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Por otro lado,

$$f_{uu} = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, -r \cos u),$$

$$f_{uv} = (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0),$$

$$f_{vv} = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, 0).$$

Luego,

$$\begin{aligned} f_{uu} \cdot \vec{N} &= -r \sin^2 u \cos^2 v - r \sin^2 u \sin^2 v - r \cos^2 u = -r \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) - r \cos^2 u \\ &= -r (\sin^2 u + \cos^2 u) = -r, \end{aligned}$$

$$f_{uv} \cdot \vec{N} = -r \cos u \sin v \sin u \cos v + r \cos u \cos v \sin u \sin v + 0 = 0,$$

$$f_{vv} \cdot \vec{N} = -r \sin^2 u \cos^2 v - r \sin^2 u \sin^2 v + 0 = -r \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) = -r \sin^2 u.$$

Y así, se tiene la segunda forma fundamental

$$L = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2 u \end{pmatrix}.$$

Y como

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{r^2 \sin^2 u}{r^4 \sin^2 u} & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{r^4 \sin^2 u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 u} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$g^{-1}L = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \sin^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} = \mathcal{L}.$$

Por tanto, las curvaturas principales de la esfera de radio  $r$  y centro el origen de coordenadas son

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{r}.$$

En consecuencia, su curvatura de Gauss y su curvatura media son

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{r^2} \quad \text{y} \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{-\frac{1}{r} - \frac{1}{r}}{2} = -\frac{1}{r},$$

respectivamente.

## 2.2. El operador forma de una superficie paralela

En esta sección veremos la relación entre algunos conceptos, como el operador forma, las curvaturas principales, la curvatura de Gauss y la curvatura media, de una superficie y sus superficies paralelas. Probemos, en primer lugar, que el operador forma de una superficie regular  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  determina el operador forma de cada una de sus superficies paralelas.

**Lema 2.2.1.** *Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular, y sea  $\mathcal{M}(d)$  la superficie paralela a  $\mathcal{M}$  a distancia  $d$ . Supongamos, además, que existe un número real  $d_0 > 0$  tal que*

$$\det(I - dS) > 0 \quad \text{para } |d| < d_0 \text{ sobre } \mathcal{M}.$$

Denotamos por  $S$  al operador forma de  $\mathcal{M}$  y por  $S(d)$  al operador forma de  $\mathcal{M}(d)$ . Entonces:

(i) la función con valores en el espacio de matrices reales  $2 \times 2$ ,  $d \mapsto S(d)$ , verifica la ecuación diferencial

$$S'(d) = S(d)^2;$$

$$(ii) \quad S(d) = S(I - dS)^{-1};$$

(iii) las curvaturas principales de  $\mathcal{M}(d)$  están dadas por

$$k_i(d) = \frac{k_i}{1 - dk_i},$$

para  $i = 1, 2$ , donde  $k_1$  y  $k_2$  denotan las curvaturas principales de  $\mathcal{M}$ .

*Demostración.* Sea  $f : U \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrización local regular. Entonces, por el lema 2.1.3, la parametrización local  $f[d]$  sobre  $\mathcal{M}(d)$  definida por

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v),$$

es regular. Sea  $\vec{N}[d]$  el campo de vectores sobre  $\mathcal{M}(d)$  definido por

$$\vec{N}[d](u, v) = \frac{f[d]_u(u, v) \times f[d]_v(u, v)}{\|f[d]_u(u, v) \times f[d]_v(u, v)\|}.$$

Puesto que  $\det(I - dS) > 0$ , la igualdad

$$f[d]_u \times f[d]_v = (I - dS)f_u \times (I - dS)f_v = \det(I - dS)f_u \times f_v \quad (2.1)$$

vista en la demostración del lema 2.1.3 implica que

$$\vec{N}[d] = \frac{f[d]_u \times f[d]_v}{\|f[d]_u \times f[d]_v\|} = \frac{\det(I - dS)(f_u \times f_v)}{\det(I - dS)\|f_u \times f_v\|} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \vec{N},$$

es decir,  $\vec{N}[d]$  coincide con  $\vec{N}$ . Por ello, y usando el lema 1.2.4, se verifica

$$S(d)f[d]_u = -\vec{N}[d]_u = -\vec{N}_u = Sf_u, \quad (2.2)$$

lo que prueba que la función  $d \mapsto S(d)f[d]_u$  no depende de  $d$ . En consecuencia,

$$(S(d)f[d]_u)' = 0,$$

donde la prima representa la derivada con respecto a  $d$ . Por otra parte, de

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v),$$

se sigue

$$f[d]'_u = \vec{N}_u = -Sf_u. \quad (2.3)$$

Ahora, como  $(S(d)f[d]_u)' = 0$ , se tiene que

$$(S(d)f[d]_u)' = S'(d)f[d]_u + S(d)f[d]'_u = 0 \iff S'(d)f[d]_u = -S(d)f[d]'_u.$$

A partir de esto y usando (2.3) y (2.2), se deduce que

$$S'(d)f[d]_u = -S(d)f[d]'_u = S(d)Sf_u = S(d)^2f[d]_u.$$

Así, se tiene que  $S'(d)f[d]_u = S(d)^2f[d]_u$ . Análogamente,  $S'(d)f[d]_v = S(d)^2f[d]_v$ .

La igualdad (2.1) implica que  $f[d]_u$  y  $f[d]_v$  son linealmente independientes. Por tanto,  $S'(d) = S(d)^2$ , como queríamos ver.

Para probar (ii), definimos  $\tilde{S}$  por

$$\tilde{S}(d) = S(I - dS)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k S^{k+1}.$$

A partir de ello, es claro que  $S$  conmuta con  $\tilde{S}(d)$  para todo  $d$ , y por tanto

$$\tilde{S}'(d) = S^2 [(I - dS)^{-1}]^2 = \tilde{S}(d)^2,$$

donde la prima representa la derivada con respecto a  $d$ . Puesto que  $\tilde{S}(0) = S$ , deducimos que  $\tilde{S}$  coincide con  $S$ . Y por la definición de  $\tilde{S}$ , podemos concluir que  $S(d) = \tilde{S}(d) = S(I - dS)^{-1}$ .

Por último, para probar (iii), necesitamos introducir un lema del cual se omite la demostración.

**Lema 2.2.2.** *Los autovalores del operador forma  $S$  de una superficie regular  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  en un punto  $p \in \mathcal{M}$  son precisamente las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  de  $\mathcal{M}$  en  $p$ .*

Por dicho lema, para calcular las curvaturas principales  $k_1(d)$  y  $k_2(d)$  de  $\mathcal{M}(d)$ , basta calcular los autovalores del operador forma  $S(d)$ . Y como por el apartado (ii) sabemos que  $S(d) = S(I - dS)^{-1}$ , calculando los autovalores de  $S(I - dS)^{-1}$  se tiene el resultado. Ahora,

$$S = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I - dS = \begin{pmatrix} 1 - dk_1 & 0 \\ 0 & 1 - dk_2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$S(I - dS)^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - dk_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - dk_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{1 - dk_1} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{1 - dk_2} \end{pmatrix}.$$

Así,  $\frac{k_1}{1 - dk_1}$  y  $\frac{k_2}{1 - dk_2}$  son las curvaturas principales de  $\mathcal{M}(d)$ .

□

**Lema 2.2.3.** La curvatura de Gauss,  $K(d)$ , y la curvatura media,  $H(d)$ , de  $\mathcal{M}(d)$  vienen dadas por

$$K(d) = \frac{K}{1 - 2dH + d^2K}$$

y

$$H(d) = \frac{H - dK}{1 - 2dH + d^2K},$$

donde  $K$  y  $H$  denotan la curvatura de Gauss y la curvatura media de  $\mathcal{M}$ , respectivamente.

*Demostración.* Usamos el apartado (iii) del lema 2.2.1 para calcular

$$K(d) = k_1(d)k_2(d) = \frac{k_1k_2}{(1 - dk_1)(1 - dk_2)} = \frac{k_1k_2}{1 - d(k_1 + k_2) + d^2k_1k_2} = \frac{K}{1 - 2dH + d^2K},$$

y

$$\begin{aligned} 2H(d) &= k_1(d) + k_2(d) = \frac{k_1}{1 - dk_1} + \frac{k_2}{1 - dk_2} = \frac{k_1(1 - dk_2) + k_2(1 - dk_1)}{(1 - dk_1)(1 - dk_2)} \\ &= \frac{k_1 + k_2 - 2dk_1k_2}{(1 - dk_1)(1 - dk_2)} = \frac{2H - 2dK}{1 - 2dH + d^2K}. \end{aligned}$$

□

Ahora ya podemos presentar uno de los resultados más importantes de este capítulo, dado por Bonnet. El teorema de Bonnet relaciona superficies de curvatura de Gauss constante con superficies de curvatura media constante.

**Teorema 2.2.4 (Bonnet).** Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y sea  $\mathcal{M}(d)$  la superficie paralela a  $\mathcal{M}$  a distancia  $d$ .

(i) Si  $\mathcal{M}$  tiene curvatura de Gauss constante positiva  $a^2$ , siendo  $a > 0$ , entonces  $\mathcal{M}(d)$  tiene curvatura media constante  $\mp a/2$ , para  $d = \pm 1/a$ .

(ii) Si  $\mathcal{M}$  tiene curvatura media constante  $1/2a$ , entonces  $\mathcal{M}(d)$  tiene curvatura de Gauss constante  $1/a^2$ , para  $d = a$ .

*Demostración.* Tomamos una normal unitaria  $\vec{N}$  sobre  $\mathcal{M}$  localmente. Sean  $k_1$  y  $k_2$  las curvaturas principales de  $\mathcal{M}$  relativas a  $\vec{N}$ . Entonces las curvaturas principales de  $\mathcal{M}(d)$  vienen dadas por

$$k_i(d) = \frac{k_i}{1 - dk_i} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Por tanto, para probar (i), se tiene que la curvatura media  $H(d)$  de  $\mathcal{M}(d)$  está dada por

$$2H(d) = k_1(d) + k_2(d) = \frac{k_1}{1 - dk_1} + \frac{k_2}{1 - dk_2}.$$

Si  $d = \pm 1/a$ , y teniendo en cuenta que  $k_1k_2 = a^2$ , la igualdad anterior se reduce a

$$\begin{aligned} 2H(d) &= \frac{k_1}{1 \mp \frac{k_1}{a}} + \frac{k_2}{1 \mp \frac{k_2}{a}} = \frac{k_1 \left(1 \mp \frac{k_2}{a}\right) + k_2 \left(1 \mp \frac{k_1}{a}\right)}{\left(1 \mp \frac{k_1}{a}\right) \left(1 \mp \frac{k_2}{a}\right)} = \frac{k_1 \mp \frac{k_1k_2}{a} + k_2 \mp \frac{k_1k_2}{a}}{1 \mp \frac{k_1}{a} \mp \frac{k_2}{a} + \frac{k_1k_2}{a^2}} \\ &= \frac{k_1 + k_2 \mp \frac{2k_1k_2}{a}}{1 \mp \frac{k_1 + k_2}{a} + \frac{k_1k_2}{a^2}} = \frac{k_1 + k_2 \mp 2a}{1 \mp \frac{k_1 + k_2}{a} + 1} = \frac{k_1 + k_2 \mp 2a}{\mp \frac{k_1 + k_2}{a} + 2} = \frac{\mp a(k_1 + k_2 \mp 2a)}{k_1 + k_2 \mp 2a} = \mp a. \end{aligned}$$

Por tanto, las superficies paralelas  $\mathcal{M}(\pm 1/a)$  tienen curvatura media constante  $\mp a/2$ .

Por otro lado, para probar (ii), se tiene que la curvatura de Gauss  $K(d)$  de  $\mathcal{M}(d)$  está dada por

$$K(d) = k_1(d)k_2(d) = \frac{k_1}{1-dk_1} \cdot \frac{k_2}{1-dk_2}.$$

Si  $d = a$ , la igualdad anterior se reduce a

$$\begin{aligned} K(d) &= \frac{k_1}{1-ak_1} \cdot \frac{k_2}{1-ak_2} = \frac{k_1k_2}{(1-ak_1)(1-ak_2)} = \frac{k_1k_2}{1-ak_1-ak_2+a^2k_1k_2} \\ &= \frac{k_1k_2}{1-a(k_1+k_2)+a^2k_1k_2} \stackrel{*}{=} \frac{k_1k_2}{1-a \cdot \frac{1}{a} + a^2k_1k_2} = \frac{k_1k_2}{a^2k_1k_2} = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

$$*) \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{1}{2a} \iff k_1+k_2 = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}.$$

Por tanto, las superficies paralelas  $\mathcal{M}(a)$  tienen curvatura de Gauss constante  $1/a^2$ . □

Ahora vamos a probar un recíproco parcial del teorema de Bonnet. Para ello, introducimos la siguiente definición.

**Definición 2.2.5.** Se dice que un punto es **umbílico** si sus curvaturas principales coinciden, es decir, si  $k_1 = k_2$ .

**Teorema 2.2.6.** Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular con curvatura de Gauss constante positiva  $a^2$ , siendo  $a > 0$ . Sea  $\mathcal{M}(d)$  la superficie paralela a  $\mathcal{M}$  a distancia  $d$ . Supongamos que los puntos umbílicos de  $\mathcal{M}$  son puntos aislados. Si  $\mathcal{M}(d)$  tiene curvatura media constante, entonces  $d = \pm 1/a$ .

*Demostración.* Fijamos  $d$  y supongamos que  $H(d)$  es constante sobre  $\mathcal{M}(d)$ . Procediendo como en la demostración del teorema 2.2.4, y siendo  $k_1$  y  $k_2$  las curvaturas principales de  $\mathcal{M}$ , se tiene que

$$2H(d) = k_1(d) + k_2(d) = \frac{k_1}{1-dk_1} + \frac{k_2}{1-dk_2} = \frac{k_1(1-dk_2) + k_2(1-dk_1)}{(1-dk_1)(1-dk_2)}$$

$$\iff k_1(1-dk_2) + k_2(1-dk_1) = 2H(d)(1-dk_1)(1-dk_2)$$

$$\iff k_1 + k_2 - 2dk_1k_2 = 2H(d)(1-d(k_1+k_2) + d^2k_1k_2).$$

Y, teniendo en cuenta que  $a^2 = k_1k_2$ , equivalentemente se verifica

$$k_1 + k_2 - 2da^2 = 2H(d) - 2dH(d)(k_1 + k_2) + 2H(d)d^2a^2.$$

Reordenando, tenemos que

$$(k_1 + k_2)(1 + 2dH(d)) = 2H(d) + 2H(d)d^2a^2 + 2da^2. \quad (2.4)$$

Por hipótesis, como la curvatura de Gauss,  $a^2$ , de  $\mathcal{M}$  y la curvatura media,  $H(d)$ , de  $\mathcal{M}(d)$  son constantes, el lado derecho de la igualdad es constante. Pero entonces, si el lado izquierdo es constante, debe anularse en los puntos no umbílicos de  $\mathcal{M}$ . Por tanto,

$$1 + 2dH(d) = 0 \quad (2.5)$$

en los puntos no umbílicos de  $\mathcal{M}$ . Las ecuaciones (2.4) y (2.5) implican que

$$0 = 2H(d) + 2H(d)d^2a^2 + 2da^2 = 2H(d)(1 + d^2a^2) + 2da^2$$

$$\stackrel{*}{=} -\frac{1}{d}(1 + d^2 a^2) + 2da^2 = -\frac{1}{d} - da^2 + 2da^2 = -\frac{1}{d} + da^2.$$

$$*) 1 + 2dH(d) = 0 \iff 2dH(d) = -1 \iff 2H(d) = -\frac{1}{d}.$$

Es decir,

$$0 = -\frac{1}{d} + da^2 \iff 0 = -1 + d^2 a^2 \iff 1 = d^2 a^2 \iff d^2 = 1/a^2,$$

de donde se sigue que  $d = \pm 1/a$ .

□

Por tanto, podemos concluir que el teorema de Bonnet implica que la determinación de superficies de curvatura media constante es equivalente a la determinación de superficies de curvatura de Gauss constante positiva.

**Ejemplo 2.2.7.** Veamos un ejemplo del teorema de Bonnet aplicado a la esfera de radio 1. Como ya hemos visto en el ejemplo 2.1.5, las curvaturas principales de la esfera de radio 1 y centro el origen de coordenadas son

$$k_1 = k_2 = -1.$$

En consecuencia, su curvatura de Gauss y su curvatura media son

$$K = k_1 k_2 = 1 \quad \text{y} \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -1,$$

respectivamente.

En este ejemplo vamos a tomar como  $\mathcal{M}$  la esfera de radio 1, y como  $\mathcal{M}(d)$  su superficie paralela a distancia  $d$ . Como hemos visto en el ejemplo 2.1.5,  $\mathcal{M}(d)$  será otra esfera de radio  $1 + d$ .

En nuestro caso, como  $K = 1 = a^2$ , se tiene que  $a = 1 > 0$ . Vamos a comprobar que se verifica el apartado (i) del teorema de Bonnet, es decir, que  $H(d) = \mp a/2$  para  $d = \pm 1/a$ .

Por el apartado (iii) del lema 2.2.1, se tiene que

$$H(d) = \frac{k_1(d) + k_2(d)}{2} = \frac{\frac{k_1}{1-dk_1} + \frac{k_2}{1-dk_2}}{2} = \frac{\frac{-1}{1+d} + \frac{-1}{1+d}}{2} = \frac{\frac{-2}{1+d}}{2} = \frac{-1}{1+d}.$$

Distinguimos dos casos:

- Si  $d = +1/a = +1/1 = 1$ , se verifica que

$$H(d) = H(1) = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} = \frac{-a}{2},$$

como dice el teorema. En este caso,  $\mathcal{M}(d)$  es la esfera de radio 2 y centro el origen de coordenadas.

- Si  $d = -1/a = -1/1 = -1$ , llegamos a la siguiente contradicción

$$H(d) = H(-1) = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0},$$

ya que no se cumple que  $d > -1 = -r$ . Lo que ha ocurrido aquí es un tipo de singularidades que puede darse a la hora de construir la superficie paralela a una dada. Lo veremos más en profundidad en el capítulo 4.

Veamos ahora que se verifica el apartado (ii) del teorema de Bonnet, es decir, que  $K(d) = 1/a^2$  para  $d = a$ . En nuestro caso, como  $H = -1 = 1/2a$ , se tiene que  $a = -1/2$ . Sabemos que

$$K(d) = k_1(d)k_2(d) = \frac{k_1}{1 - dk_1} \cdot \frac{k_2}{1 - dk_2} = \frac{-1}{1 + d} \cdot \frac{-1}{1 + d} = \frac{1}{(1 + d)^2}.$$

Luego, para  $d = a = -1/2$ ,

$$K(d) = K(-1/2) = \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = \frac{1}{(1/2)^2} = \frac{1}{1/4} = 1/a^2,$$

como dice el teorema. En este caso,  $\mathcal{M}(d)$  es la esfera de radio  $1/2$  y centro el origen de coordenadas.

Veamos ahora que el recíproco parcial del teorema de Bonnet (teorema 2.2.6) no se cumple para la esfera.

Consideramos  $\mathcal{M}$  la esfera de radio 1 y centro el origen de coordenadas, que tiene curvatura de Gauss constante positiva  $K = 1 = a^2$ , luego  $a = 1 > 0$ . Sea  $\mathcal{M}(d)$  la superficie paralela a  $\mathcal{M}$  a distancia  $d$ . Tomamos  $d = 2$ , luego  $\mathcal{M}(2)$  es la esfera de radio 3. Esta tiene curvatura media constante  $H(d) = H(2) = -1/3 = -1/r$ . Sin embargo, no se verifica que  $d = \pm 1/a = \pm 1/1 = \pm 1$ , puesto que hemos tomado  $d = 2$ .

No se cumple porque los puntos umbílicos de la esfera no son puntos aislados. Todos los puntos de la esfera son umbílicos:  $k_1 = k_2 = -\frac{1}{r}$ .



# Capítulo 3

## Ejemplos

En este capítulo vamos a presentar algunos ejemplos de superficies y a estudiar sus superficies paralelas. En la sección 3.1 veremos qué parametrización toma la superficie paralela a una superficie de revolución cualquiera, y analizaremos un caso concreto. En la sección 3.2 haremos lo mismo con las superficies paralelas a una superficie reglada y, además, estudiaremos en detalle el caso de la banda de Möbius, un ejemplo de superficie no orientable cuyas superficies paralelas sí son orientables.

La referencia básica para los ejemplos que se va a seguir es el libro de Alfred Gray [4], así como las notas de B. Odehnal, H. Stachel y G. Glaeser [10].

**Ejemplo 3.0.1 (Elipsoide).** Supongamos que el elipsoide está centrado en el origen de coordenadas y tiene por ecuación

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

donde  $a > 0, b > 0, c > 0$ . Si los tres parámetros son iguales, la superficie se reduce a una esfera de radio  $a = b = c$ . Si dos de los parámetros  $a, b, c$  son iguales, entonces se tiene una superficie de revolución con eje de rotación en uno de los ejes de coordenadas. Una parametrización del elipsoide  $\mathcal{E}$  sería  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$f(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u),$$

con  $D = [0, \pi) \times [0, 2\pi]$ .

Para ver cuál es su superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$ , vamos a calcular

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v).$$

Empezamos hallando la normal unitaria de la superficie. Sabemos que

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

Así que calculamos

$$f_u = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, -c \sin u)$$

y

$$f_v = (-a \sin u \sin v, b \sin u \cos v, 0).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} f_u \times f_v &= (bc \sin^2 u \cos v, ac \sin^2 u \sin v, ab \sin u \cos u) \\ &= \sin u (bc \sin u \cos v, ac \sin u \sin v, ab \cos u). \end{aligned}$$

Luego,

$$\|f_u \times f_v\|^2 = \sin^2 u (b^2 c^2 \sin^2 u \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \cos^2 u).$$

Y así,

$$\begin{aligned} \|f_u \times f_v\| &= \sqrt{\sin^2 u (b^2 c^2 \sin^2 u \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \cos^2 u)} \\ &= \sin u \sqrt{b^2 c^2 \sin^2 u \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \cos^2 u}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que  $\sin u$  es no negativo si  $u \in [0, \pi)$ .

Por tanto,

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \frac{(bc \sin u \cos v, ac \sin u \sin v, ab \cos u)}{\sqrt{b^2 c^2 \sin^2 u \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \cos^2 u}}.$$

De esta forma, se tiene que la superficie paralela  $\mathcal{E}(d)$  de  $\mathcal{E}$  a distancia  $d \in \mathbb{R}$  se puede parametrizar como

$$\begin{aligned} f[d](u, v) &= f(u, v) + d \vec{N}(u, v) \\ &= (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) + \frac{d}{W} (bc \sin u \cos v, ac \sin u \sin v, ab \cos u), \end{aligned}$$

donde  $W := \sqrt{b^2 c^2 \sin^2 u \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \cos^2 u}$ .

Una distancia positiva  $d \in \mathbb{R}$  conduce a las superficies paralelas exteriores, mientras que una distancia negativa conduce a las paralelas interiores. Además,  $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}$ .

Las superficies paralelas exteriores a un elipsoide, es decir, aquellas en las que el vector normal a la superficie está orientado hacia afuera y la distancia  $d$  es postiva, son muy similares a un elipsoide, pero no lo son. A medida que  $d$  va aumentando,  $\mathcal{E}(d)$  va tomando la forma de una esfera, como podemos ver en la figura 3.1.

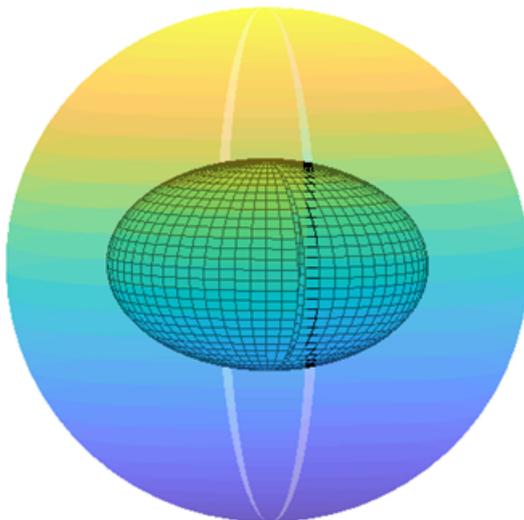


Figura 3.1: Elipsoide de parámetros  $a = 2$ ,  $b = 1,5$  y  $c = 1$  (interior) con una de sus superficies paralelas exteriores (exterior).

La figura 3.2 muestra algunas superficies paralelas interiores a un elipsoide. Es importante señalar que aquí “interior” hace referencia a que el vector normal a la superficie está orientado hacia afuera y la distancia  $d$  es negativa. Este término puede llevar a confusión ya que las paralelas

interiores no tienen por qué estar totalmente en el interior del elipsoide, como se puede ver en la imagen inferior derecha de la figura 3.2. De hecho, escogiendo un  $d$  suficientemente grande en valor absoluto, la superficie paralela interior del elipsoide puede estar completamente fuera de la cuádrica.

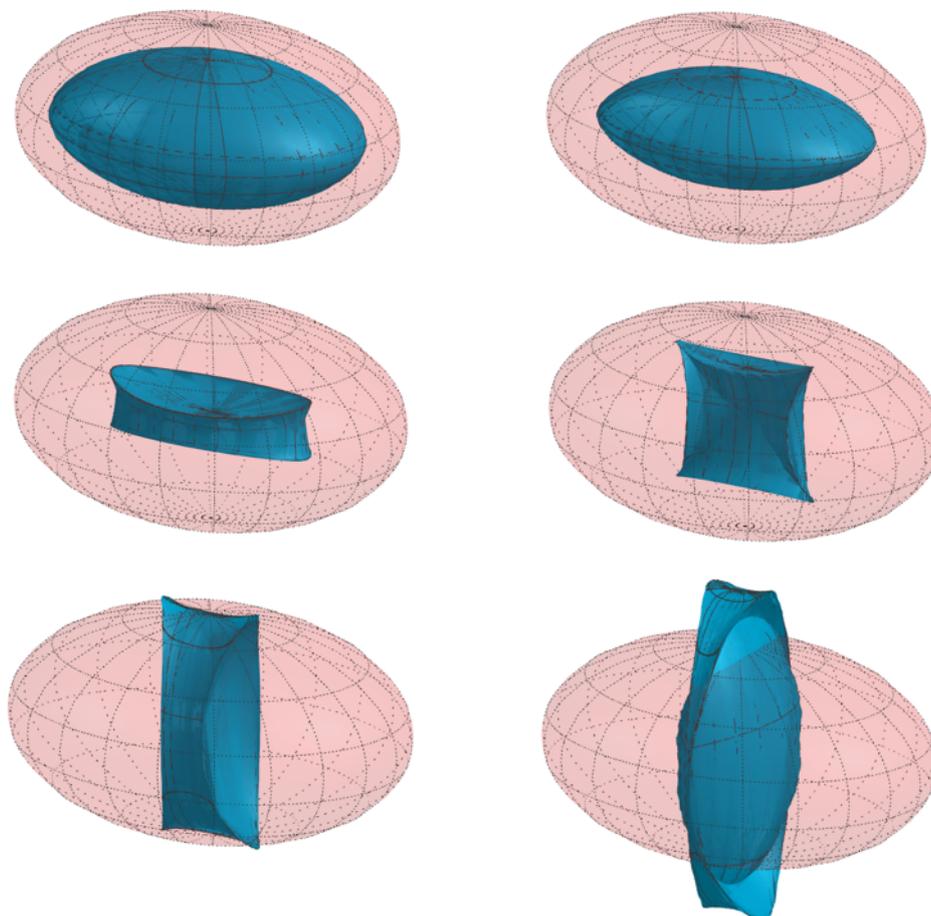


Figura 3.2: Elipsoide de parámetros  $a = 2$ ,  $b = 1,5$  y  $c = 1$  (en rojo) con superficies paralelas (en azul) a distancias  $d = -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}$  (de arriba a abajo, y de izquierda a derecha).

Como se puede observar en la figura 3.2, las superficies paralelas pueden tener curvas singulares y autointersecciones. Esto se tratará en el capítulo 4.

### 3.1. Superficies de revolución

En esta sección veremos cómo construir la superficie paralela a una superficie de revolución cualquiera en  $\mathbb{R}^3$ . Empezamos dando la definición de superficie de revolución.

**Definición 3.1.1.** Sea  $\alpha$  una curva regular plana y  $R$  una recta contenida en el mismo plano que la curva y que no corta a esta. Se llama **superficie de revolución** de **generatriz** la curva  $\alpha$  y **directriz** la recta  $R$  a la superficie obtenida al girar cada uno de los puntos de la curva tomando como eje de rotación la recta  $R$ .

Sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular donde  $\alpha(u) = (r(u), z(u))$ , con  $r(u) > 0$ , entonces la superficie de revolución generada por la curva al rotar respecto del eje vertical está cubierta por las superficies simples  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  siendo

$$f(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u)),$$

donde  $U = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$  y  $U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

Ahora ya podemos calcular la superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$  de una superficie de revolución genérica.

Sea  $f(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u))$  una parametrización de la superficie de revolución donde  $\alpha(u) = (r(u), z(u))$ , con  $r(u) > 0$ . Las derivadas parciales son

$$f_u = (r'(u) \cos v, r'(u) \sin v, z'(u))$$

y

$$f_v = (-r(u) \sin v, r(u) \cos v, 0).$$

Ahora,

$$f_u \times f_v = (-r(u) z'(u) \cos v, -r(u) z'(u) \sin v, r(u) r'(u)).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|f_u \times f_v\|^2 &= r(u)^2 z'(u)^2 \cos^2 v + r(u)^2 z'(u)^2 \sin^2 v + r(u)^2 r'(u)^2 \\ &= r(u)^2 z'(u)^2 + r(u)^2 r'(u)^2 = r(u)^2 (z'(u)^2 + r'(u)^2). \end{aligned}$$

Y así,

$$\begin{aligned} \|f_u \times f_v\| &= \sqrt{r(u)^2 (z'(u)^2 + r'(u)^2)} = |r(u)| \sqrt{z'(u)^2 + r'(u)^2} \\ &= \text{sign}(r(u)) r(u) \sqrt{z'(u)^2 + r'(u)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \frac{\text{sign}(r(u))}{\sqrt{z'(u)^2 + r'(u)^2}} (-z'(u) \cos v, -z'(u) \sin v, r'(u)).$$

Así que la superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$  de una superficie de revolución cualquiera es

$$\begin{aligned} f[d](u, v) &= f(u, v) + d \vec{N}(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, z(u)) \\ &+ d \frac{\text{sign}(r(u))}{\sqrt{z'(u)^2 + r'(u)^2}} (-z'(u) \cos v, -z'(u) \sin v, r'(u)). \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.1.2 (Toro elíptico).** Veamos ahora el caso de un ejemplo concreto de superficie de revolución: el toro elíptico. Supongamos que el toro elíptico se obtiene al rotar sobre el eje  $z$  una elipse de semieje horizontal  $a$  y semieje vertical  $b$ , contenida en el plano  $xz$ , y situada a distancia  $c$  del eje  $z$ . Una parametrización de este sería  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$f(u, v) = ((c + a \cos v) \cos u, (c + a \cos v) \sin u, b \sin v),$$

con  $D = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi]$ .

Para ver cuál es su superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$ , vamos a calcular

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d \vec{N}(u, v).$$

Empezamos hallando la normal unitaria de la superficie. Así que calculamos

$$f_u = (-(c + a \cos v) \sin u, (c + a \cos v) \cos u, 0)$$

y

$$f_v = (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, b \cos v).$$

Ahora,

$$f_u \times f_v = (b \cos u \cos v(c + a \cos v), b \sin u \cos v(c + a \cos v), a \sin v(c + a \cos v)).$$

Luego,

$$\|f_u \times f_v\| = \sqrt{b^2 \cos^2 v(c + a \cos v)^2 + a^2 \sin^2 v(c + a \cos v)^2}.$$

Por tanto,

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

De esta forma, se tiene que la superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$  de un toro elíptico se puede parametrizar como

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v) = ((c + a \cos v) \cos u, (c + a \cos v) \sin u, b \sin v) + \frac{d}{W}(b \cos u \cos v(c + a \cos v), b \sin u \cos v(c + a \cos v), a \sin v(c + a \cos v)),$$

donde  $W := \sqrt{b^2 \cos^2 v(c + a \cos v)^2 + a^2 \sin^2 v(c + a \cos v)^2}$ .

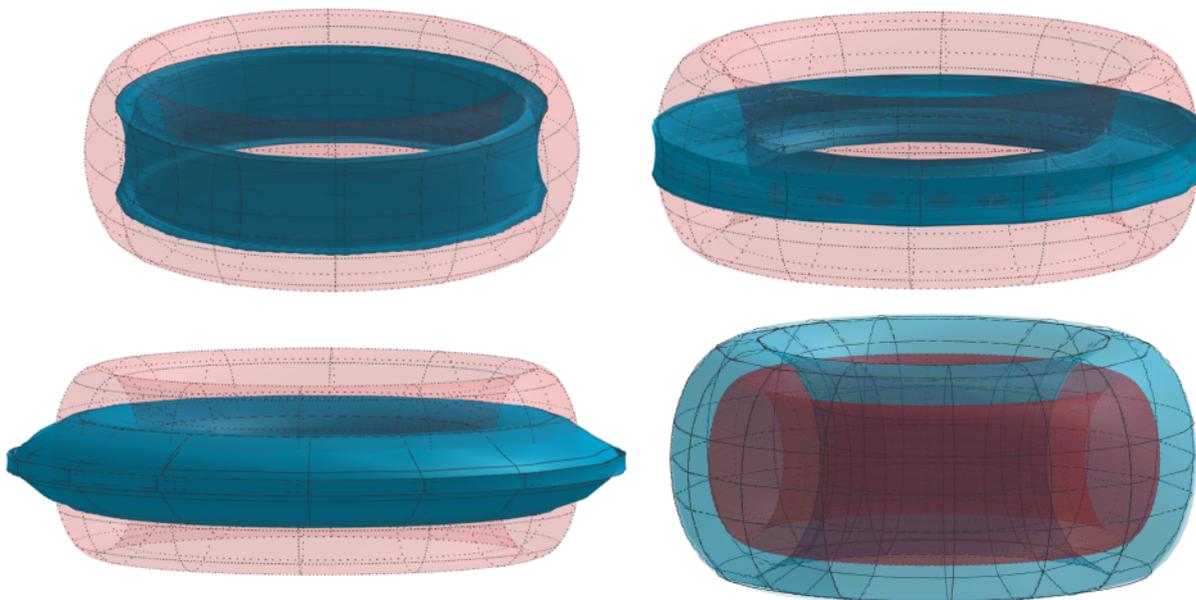


Figura 3.3: Toro elíptico de parámetros  $a = 0,5$ ,  $b = 1$  y  $c = 2,5$  (en rojo) con superficies paralelas (en azul) a distancias  $d = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$  (de arriba a abajo, y de izquierda a derecha).

### 3.2. Superficies regladas

En esta sección veremos cómo construir la superficie paralela a una superficie reglada cualquiera en  $\mathbb{R}^3$ . Empezamos dando la definición de superficie reglada.

**Definición 3.2.1.** Una **superficie reglada** es la superficie generada por una recta de dirección variable  $\beta(u)$  que se mueve sobre una curva  $\alpha(u)$ ,  $u \in I \subset \mathbb{R}$ , llamada *curva base* o *directriz*. Una superficie reglada tiene siempre una parametrización en forma reglada:

$$f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u).$$

Para cada  $u_0 \in I$  tenemos una recta  $f(u_0, v) = \alpha(u_0) + v\beta(u_0)$  llamada *generatriz*.

Ahora ya podemos calcular la superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$  de una superficie reglada genérica.

Sea  $f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$  una parametrización de la superficie reglada. Las derivadas parciales son

$$f_u = \alpha'(u) + v\beta'(u)$$

y

$$f_v = \beta(u).$$

Vamos a considerar

$$\alpha(u) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad y \quad \beta(u) = \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Ahora,

$$f_u \times f_v = ((\alpha'_2 + v\beta'_2)\beta_3 - (\alpha'_3 + v\beta'_3)\beta_2, (\alpha'_3 + v\beta'_3)\beta_1 - (\alpha'_1 + v\beta'_1)\beta_3, (\alpha'_1 + v\beta'_1)\beta_2 - (\alpha'_2 + v\beta'_2)\beta_1).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|f_u \times f_v\|^2 &= ((\alpha'_2 + v\beta'_2)\beta_3 - (\alpha'_3 + v\beta'_3)\beta_2)^2 \\ &+ ((\alpha'_3 + v\beta'_3)\beta_1 - (\alpha'_1 + v\beta'_1)\beta_3)^2 + ((\alpha'_1 + v\beta'_1)\beta_2 - (\alpha'_2 + v\beta'_2)\beta_1)^2. \end{aligned}$$

Y como

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|},$$

la superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$  de una superficie reglada cualquiera es

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v) = f(u, v) + d \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

**Ejemplo 3.2.2 (Cono).** Veamos ahora el caso de un ejemplo concreto de superficie reglada: el cono circular. Supongamos que el cono está centrado en el origen de coordenadas y tiene por ecuación

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = z^2.$$

Una parametrización de este sería  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$f(u, v) = (rv \cos u, rv \sin u, v),$$

con  $D = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

Para ver cuál es su superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$ , vamos a calcular

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v).$$

Empezamos hallando la normal unitaria de la superficie. Para ello calculamos las derivadas parciales

$$f_u = (-rv \sin u, rv \cos u, 0)$$

y

$$f_v = (r \cos u, r \sin u, 1).$$

Ahora,

$$f_u \times f_v = (rv \cos u, rv \sin u, -r^2v).$$

Luego,

$$\|f_u \times f_v\|^2 = r^2v^2 \cos^2 u + r^2v^2 \sin^2 u + r^4v^2 = r^2v^2 + r^4v^2 = v^2r^2(1 + r^2).$$

Y así,

$$\|f_u \times f_v\| = |v|r \sqrt{1 + r^2} = \text{sign}(v)vr\sqrt{1 + r^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\vec{N}(u, v) &= \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \frac{1}{\text{sign}(v) v r \sqrt{1+r^2}} (r v \cos u, r v \sin u, -r^2 v) \\ &= \frac{\text{sign}(v)}{\sqrt{1+r^2}} (\cos u, \sin u, -r).\end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que la superficie paralela  $\mathcal{C}(d)$  de  $\mathcal{C}$  a distancia  $d \in \mathbb{R}$  se puede parametrizar como

$$\begin{aligned}f[d](u, v) &= f(u, v) + d \vec{N}(u, v) \\ &= (r v \cos u, r v \sin u, v) + d \frac{\text{sign}(v)}{\sqrt{1+r^2}} (\cos u, \sin u, -r).\end{aligned}$$

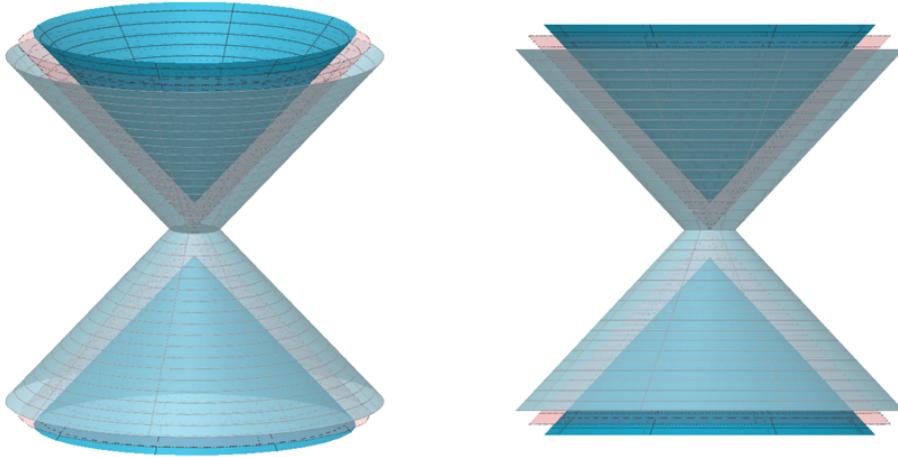


Figura 3.4: Cono circular de radio 1 (en rojo) con superficies paralelas recortadas a distancia  $d = 1$  (en azul, opacidad baja) y  $d = -1$  (en azul).

Notemos que la superficie paralela a un cono cualquiera no será, en general, otro cono. Solo si la superficie inicial es un cono circular, su superficie paralela será también un cono circular.

**Definición 3.2.3.** Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie reglada. Entonces  $\mathcal{M}$  es el **desarrollable tangencial** de una curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  si admite una parametrización de la forma

$$f(u, v) = \alpha(u) + v \alpha'(u).$$

Todas las generatrices de una superficie desarrollable tangencial son tangentes a la curva  $\alpha$ , la cual se llama *curva de regresión*. Se puede ver que el plano osculador a la curva de regresión en  $\alpha(u_0)$  coincide con el plano tangente a la superficie en la generatriz  $\alpha(u_0) + v \alpha'(u_0)$ . Además, en estas superficies la curvatura de Gauss es cero en todo punto.

La figura 3.5 muestra la superficie paralela interior de un cono elíptico de parámetros  $a = 2$ ,  $b = 1,5$  a distancia  $d = -\frac{2}{3}$ . Es una superficie desarrollable, distinta de un cono o un cilindro, con una curva no trivial  $g$  de regresión y que tiene autointersecciones.

**Ejemplo 3.2.4 (Cilindro).** Veamos de forma breve (ya que los cálculos son los mismos que los vistos hasta ahora) que las superficies paralelas a los cilindros circulares son cilindros circulares. Una parametrización del cilindro circular de radio  $r$  sería  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$f(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v),$$

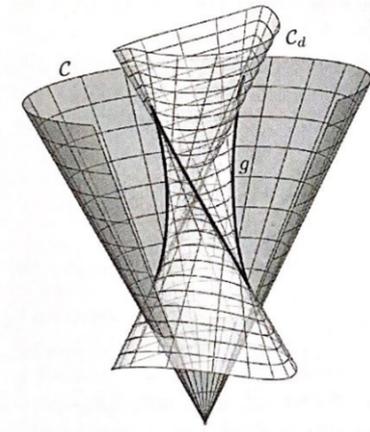


Figura 3.5: Cono elíptico con una de sus paralelas interiores (página 433 de [10]).

con  $D = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ . Luego,

$$f_u = (-r \sin u, r \cos u, 0) \quad \text{y} \quad f_v = (0, 0, 1).$$

Así,

$$f_u \times f_v = (r \cos u, r \sin u, 0),$$

y

$$\|f_u \times f_v\| = \sqrt{r^2 \cos^2 u + r^2 \sin^2 u} = \sqrt{r^2} = r.$$

Por tanto,

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|} = \frac{1}{r} (r \cos u, r \sin u, 0) = (\cos u, \sin u, 0).$$

De esta forma, se tiene que la superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$  de un cilindro circular se puede parametrizar como

$$\begin{aligned} f[d](u, v) &= f(u, v) + d\vec{N}(u, v) \\ &= (r \cos u, r \sin u, v) + d(\cos u, \sin u, 0) = ((r + d) \cos u, (r + d) \sin u, v). \end{aligned}$$

Es decir, la superficie paralela a distancia  $d \in \mathbb{R}$  de un cilindro circular de radio  $r$  es otro cilindro circular de radio  $r + d$ .

Al igual que ocurría en el caso del cono, la superficie paralela a un cilindro cualquiera no será, en general, otro cilindro. Solo si la superficie inicial es un cilindro circular, su superficie paralela será también un cilindro circular.

Además del cilindro y del cono, algunas otras cuádricas, como por ejemplo el paraboloides hiperbólico y el hiperboloides de una hoja, son también superficies regladas. Estas son, de hecho, superficies doblemente regladas, que son aquellas en las cuales por cada uno de sus puntos pasan dos generatrices.

**Ejemplo 3.2.5 (Banda de Möbius).** Podemos definir la banda de Möbius como la superficie reglada cuya curva directriz es una circunferencia de radio  $a$ , y cuyas generatrices son segmentos acotados de longitud  $2b$ ,  $0 < b \leq a$ . Una parametrización de esta sería  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$f(u, v) = \left( a \cos u + b v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \cos u, a \sin u + b v \cos \left( \frac{u}{2} \right) \sin u, b v \sin \left( \frac{u}{2} \right) \right), \quad (3.1)$$

con  $D = [0, 2\pi) \times (-1, 1)$ .

Para presentar la banda de Möbius formalmente como una superficie regular, se necesitan al menos dos parametrizaciones o sistemas de coordenadas. Además, para ver que no es orientable, hay que probar que no se puede definir un campo vectorial normal y unitario diferenciable en toda la banda.

Una parametrización de la banda de Möbius es la dada por (3.1), con  $0 < u < 2\pi$  y  $-1 < v < 1$ . Esta parametrización omite la generatriz que se obtendría tomando  $u = 0$ . Por tanto, tomamos también la parametrización (3.1) con  $-\pi < u < \pi$  y  $-1 < v < 1$ , que omite la generatriz que se obtendría tomando  $u = \pi$  en la carta anterior. Estos dos sistemas de coordenadas cubren toda la banda de Möbius y se pueden usar para probar que se trata de una superficie regular.

Cualquier intento de definir globalmente un campo de vectores unitario y normal a la banda de Möbius está condenado al fracaso. Naturalmente, es posible definir una normal unitaria localmente. Pero si uno trata de extender esa definición local de la normal unitaria a toda la banda de Möbius siguiendo su circunferencia central, al regresar al punto de partida se la encontrará apuntando al lado contrario de la superficie [1].

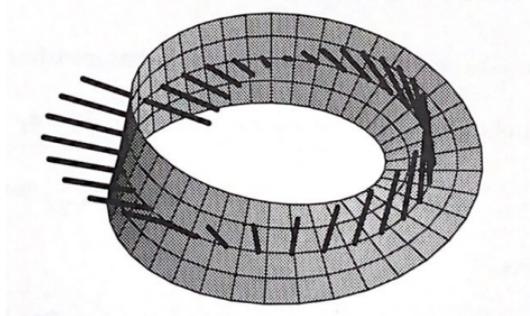


Figura 3.6: Normales a la banda de Möbius (página 270 de [1]).

Ahora vamos a ver que la banda de Möbius es una superficie no orientable. Llamamos  $\mathcal{M}$  a la banda de Möbius parametrizada por (3.1). Supongamos que  $\mathcal{M}$  sí es orientable. Entonces, por la proposición 1.1.9, existiría un campo diferenciable  $\vec{N} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vectores normales unitarios. Desplazando estos vectores a lo largo de la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  vemos que, después de una vuelta completa, el vector  $\vec{N}$  vuelve al punto de partida como  $-\vec{N}$  (ver figura 3.6), lo cual es una contradicción. Ahora estudiaremos de forma analítica lo que hemos mencionado.

Por simplicidad, podemos suponer que el vector normal se encuentra en la circunferencia central de la banda de Möbius, es decir, que  $v = 0$ . Por tanto, a partir de (3.1), se tiene

$$f(u, 0) = (a \cos u, a \sin u, 0),$$

$$f_u(u, 0) = (-a \sin u, a \cos u, 0),$$

$$f_v(u, v) = \left( b \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos u, b \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin u, b \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right) = f_v(u, 0).$$

Y así,

$$(f_u \times f_v)(u, 0) = \left( ab \cos u \sin\left(\frac{u}{2}\right), ab \sin u \sin\left(\frac{u}{2}\right), -ab \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right).$$

Este vector  $(f_u \times f_v)(u, 0)$  representa la dirección normal a  $\mathcal{M}$  en  $f(u, 0)$ , es decir, en los puntos de la circunferencia central de la banda de Möbius. Notemos que para nuestro razonamiento, el denominador del vector  $\vec{N}$  no va a intervenir, ya que  $\|f_u \times f_v\|$  es siempre positivo, luego no afecta al sentido del vector que estamos considerando.

Ahora, calculando la dirección al llegar por  $u = 0$  (calculamos el límite lateral cuando  $u \rightarrow 0^+$ ) se tiene

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} (f_u \times f_v)(u, 0) = (0, 0, -ab),$$

mientras que al llegar por  $u = 2\pi$  (calculamos el límite lateral cuando  $u \rightarrow 2\pi^-$ ) resulta

$$\lim_{u \rightarrow 2\pi^-} (f_u \times f_v)(u, 0) = (0, 0, ab).$$

Y aquí tenemos la contradicción, ya que de existir un campo diferenciable  $\vec{N} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vectores normales unitarios, se tendría el mismo límite lateral en los dos casos.

Esto es la traducción analítica del hecho de que al seguir continuamente una determinación del vector normal y darle una vuelta a la banda de Möbius, llegamos al valor opuesto del que comenzamos teniendo.

Ahora vamos a ver que las superficies paralelas a la banda de Möbius, que es no orientable, son orientables. Para estudiar sus superficies paralelas a distancia  $d \in \mathbb{R}$ , vamos a calcular

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v).$$

Para ello utilizaremos Matlab, ya que los cálculos son muy tediosos. Ahora, fijando  $d$  y tomando  $u = 0, v = 0$  se tiene

$$f[d](0, 0) = (a, 0, -d),$$

mientras que si tomamos  $u = 2\pi, v = 0$  resulta

$$f[d](2\pi, 0) = (a, 0, d),$$

es decir, estos dos puntos se encuentran en la misma recta normal y a la misma distancia de la banda, pero en sentidos opuestos, como se puede ver en la figura 3.7 .

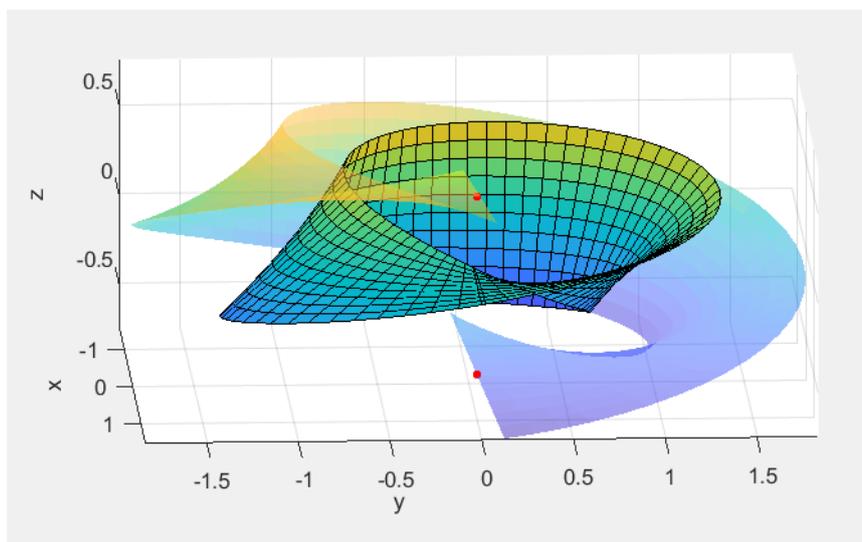


Figura 3.7: Banda de Möbius (con cuadrícula) con su superficie paralela a distancia 0.5, y en color rojo los puntos  $f[d](0, 0)$  (inferior) y  $f[d](2\pi, 0)$  (superior).

Como podemos ver en la figura 3.7, si recorremos la superficie paralela de 0 a  $2\pi$ , nos queda una superficie ya orientable, a diferencia de la superficie inicial (la banda de Möbius).

Para llegar a tener la superficie paralela a toda la banda de Möbius, que es una superficie de una sola componente y orientable, tenemos dos opciones: o bien fijar  $d \in \mathbb{R}$  y tomar la parametrización de 0 a  $4\pi$ , recorriendo de esta forma toda la banda de Möbius para que así su paralela vuelva al punto de partida; o bien fijar  $d$  y tomar la unión de las superficies paralelas a distancia  $d$  y  $-d$ . En ambos casos se obtiene el mismo resultado, que es el que aparece en la figura 3.8.

Aunque gráficamente se puede ver que la superficie paralela a la banda de Möbius es orientable, vamos a probarlo analíticamente. Todos los cálculos se realizarán con Matlab y no se incluirán explícitamente debido a la dimensión de los vectores.

Dada la parametrización de la superficie paralela a la banda de Möbius,  $f[d](u, v)$ , calculamos, por un lado,  $f[d](u, 0)$  y derivamos respecto de  $u$ , obteniendo así  $f[d]_u(u, 0)$ . Y por otro lado, calculamos  $f[d]_v(u, v)$  para conseguir  $f[d]_v(u, 0)$ .

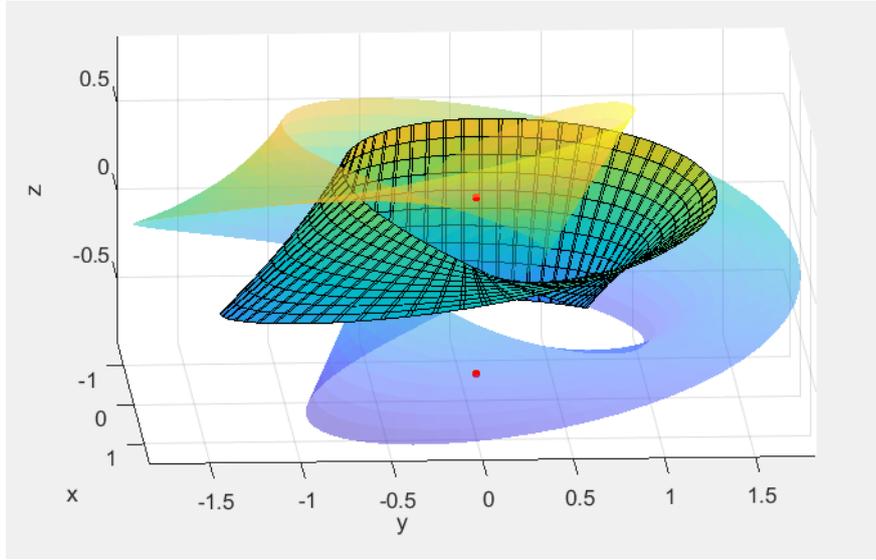


Figura 3.8: Banda de Möbius (con cuadrícula) con su superficie paralela a distancia 0.5 ampliada hasta  $u = 4\pi$ , y en color rojo los puntos  $f[d](0,0)$  (inferior) y  $f[d](2\pi,0)$  (superior).

De esta forma, ya podemos calcular el producto  $(f[d]_u \times f[d]_v)(u,0)$ , que representa la dirección normal a  $\mathcal{M}(d)$  en  $f[d](u,0)$ . Al igual que como razonamos antes, el denominador del vector  $\vec{N}[d]$  no va a intervenir, ya que al ser  $\|f[d]_u \times f[d]_v\|$  siempre positivo, no va a afectar al sentido del vector que estamos considerando.

Ahora, calculando la dirección al llegar por  $u = 0$  (calculamos el límite lateral cuando  $u \rightarrow 0^+$ ) se tiene

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} (f[d]_u \times f[d]_v)(u,0) = (-a^2 b d, \frac{a^2 b^2 d^2}{2}, -a^2),$$

mientras que al llegar por  $u = 2\pi$  (calculamos el límite lateral cuando  $u \rightarrow 2\pi^-$ ) resulta

$$\lim_{u \rightarrow 2\pi^-} (f[d]_u \times f[d]_v)(u,0) = (-a^2 b d, \frac{a^2 b^2 d^2}{2}, -a^2).$$

Es decir, se obtiene el mismo límite lateral en los dos casos. Por tanto, la superficie paralela  $\mathcal{M}(d)$  a la banda de Möbius  $\mathcal{M}$  sí es orientable.

Es importante señalar que aquí no hay superficie paralela exterior ( $d > 0$ ) y superficie paralela interior ( $d < 0$ ). Fijado un  $d$ , la unión de las superficies paralelas a distancia  $d$  y  $-d$  forman una sola componente.

A modo de conclusión de esta sección, lo más llamativo que hemos visto es que las superficies paralelas a las cuádricas naturales, es decir, la esfera, el cono circular y el cilindro circular, son también cuádricas naturales. Son las únicas cuádricas en las que ocurre esto. Para el resto, la superficie paralela a una dada no es del mismo tipo que la superficie inicial.

Además, con el caso de la banda de Möbius, hemos estudiado un ejemplo de superficie no orientable cuyas superficies paralelas sí que son orientables; es decir, que la orientabilidad de una superficie paralela no depende de la orientabilidad de su superficie inicial.



## Capítulo 4

# Singularidades de superficies paralelas

En este capítulo se van a presentar las principales singularidades de las superficies paralelas. En la sección 4.1 veremos los tipos de singularidades que pueden darse a la hora de construir la superficie paralela a una superficie dada. En las secciones 4.2 y 4.3 estudiaremos las autointersecciones en las superficies paralelas a las cuádricas en forma implícita y en forma paramétrica, respectivamente.

La referencia básica para singularidades que se va a seguir es el libro de N. M. Patrikalakis y T. Maekawa [11].

### 4.1. Puntos singulares en las superficies paralelas

Hay dos tipos de singularidades en las superficies paralelas: los puntos singulares y las autointersecciones. En primer lugar, sea

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v)$$

la parametrización de la superficie paralela  $\mathcal{M}(d)$  de  $\mathcal{M}$  a distancia  $d \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{N}$  la normal unitaria de  $\mathcal{M}$  y  $f(u, v)$  una parametrización de la superficie  $\mathcal{M}$ .

Entonces, los puntos singulares de la parametrización  $f[d]$  se corresponden con los puntos de  $\mathcal{M}$  en los que  $1/d$  es una curvatura principal, es decir, en los puntos que satisfacen

$$k_1(u, v) = \frac{1}{d} \quad \text{o} \quad k_2(u, v) = \frac{1}{d}.$$

Para verlo, consideramos las curvas coordenadas que pasan por el punto  $f(u_0, v_0)$ : con  $v = cte$ ,  $\phi(u) = f(u, v_0)$ , y con  $u = cte$ ,  $\psi(v) = f(u_0, v)$  que son, cerca del punto en cuestión, líneas de curvatura con curvaturas  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente.

Entonces tenemos

$$f[d]_u = f_u + d\vec{N}_u = f_u + d(-k_1 f_u)$$

y

$$f[d]_v = f_v + d\vec{N}_v = f_v + d(-k_2 f_v).$$

Por tanto, vemos que si  $d = 1/k_i$  para  $i = 1$  o  $i = 2$ , una de las derivadas parciales de  $f[d]$  se anula y entonces la parametrización no es regular en tal punto.

Cuando la superficie es parte de una esfera de radio  $r$ , se tiene que  $k_1 = k_2 = -\frac{1}{r}$  en todos los puntos. Por tanto, si la superficie paralela está a distancia  $d = -r$ , entonces esta se degenera a un punto el cual se corresponde con el centro de la esfera. Esto es lo que vimos que ocurría en el ejemplo 2.2.7 al tomar  $d = -1$ .

Por otro lado, las autointersecciones de una superficie paralela se definen encontrando pares de distintos valores paramétricos  $(s, t) \neq (u, v)$  tales que

$$f(s, t) + d\vec{N}(s, t) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v).$$

## 4.2. Autointersecciones de las superficies paralelas de cuádricas en forma implícita

Las superficies algebraicas de segundo orden, comúnmente conocidas como cuádricas, son muy utilizadas en el diseño mecánico. En concreto, las cuádricas naturales, es decir, la esfera, el cono circular y el cilindro circular, son el resultado de operaciones de mecanizado como laminación (*rolling*), torneado (*turning*), fileteado (*filleting*), taladrado (*drilling*) y fresado (*milling*). Como vimos en el capítulo 3, las superficies paralelas a las cuádricas naturales son también cuádricas naturales. Maekawa [8] demostró que las curvas de autointersección de las superficies paralelas de todas las cuádricas en forma implícita son cónicas planas en forma implícita, y su curva correspondiente en la superficie inicial se puede expresar como la curva de intersección entre un elipsoide, cuyos semiejes son proporcionales a la distancia *offset*  $d$ , y la propia superficie cuádrica en forma implícita.

Las ecuaciones de las cuádricas en forma implícita, incluyendo elipsoides, hiperboloides de una y dos hojas, conos elípticos, cilindros elípticos y cilindros hiperbólicos, se pueden expresar en la siguiente forma estándar:

$$F(x, y, z) = \zeta \frac{x^2}{a^2} + \eta \frac{y^2}{b^2} + \xi \frac{z^2}{c^2} - \delta = 0, \quad (4.1)$$

donde  $\zeta, \eta$  y  $\xi$  toman los valores  $-1, 0$  o  $1$  y  $\delta$  los valores  $0$  o  $1$ , dependiendo de la clasificación de las cuádricas (ver tabla 4.1). En lo que sigue, supondremos, sin pérdida de generalidad,  $a \leq b \leq c$ .

Cuádricas en forma implícita	$\zeta$	$\eta$	$\xi$	$\delta$
Elipsoide	1	1	1	1
Hiperboloide de una hoja	1	1	-1	1
	1	-1	1	1
	-1	1	1	1
Hiperboloide de dos hojas	1	-1	-1	1
	-1	1	-1	1
	-1	-1	1	1
Cono elíptico	1	1	-1	0
	1	-1	1	0
	-1	1	1	0
Cilindro elíptico	1	1	0	1
	1	0	1	1
	0	1	1	1
Cilindro hiperbólico	1	-1	0	1
	-1	1	0	1
	1	0	-1	1
	-1	0	1	1
	0	1	-1	1
	0	-1	1	1

Tabla 4.1: Clasificación de cuádricas en forma implícita.

Las componentes  $x[d], y[d], z[d]$  del vector de posición  $f[d]$  de la superficie paralela a la superficie implícita  $F(x, y, z) = 0$  se pueden expresar como

$$x[d](x, y, z) = x + d \frac{F_x(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|}, \quad (4.2)$$

$$y[d](x, y, z) = y + d \frac{F_y(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|}, \quad (4.3)$$

$$z[d](x, y, z) = z + d \frac{F_z(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|}, \quad (4.4)$$

donde  $(x, y, z)$  satisface  $F(x, y, z) = 0$  y  $F_x, F_y, F_z$  son las componentes de  $\nabla F(x, y, z)$ . Notemos que  $\|\nabla F(x, y, z)\|$  es cero en el vértice de un cono y, en este caso, el vector normal no está definido. Sustituyendo (4.1) en (4.2), (4.3), (4.4) resulta que

$$x[d](x, y, z) = x + \frac{\zeta x d}{a^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z^2}{c^4}}}, \quad (4.5)$$

$$y[d](x, y, z) = y + \frac{\eta y d}{b^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z^2}{c^4}}}, \quad (4.6)$$

$$z[d](x, y, z) = z + \frac{\xi z d}{c^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z^2}{c^4}}}. \quad (4.7)$$

Es claro a partir de (4.5) - (4.7) que las superficies paralelas a una cuádrica en forma implícita estándar son simétricas respecto de los planos  $xy$ ,  $xz$  y  $yz$ .

Las autointersecciones de las paralelas de superficies en forma implícita se pueden formular buscando pares de puntos distintos en la superficie inicial, es decir,  $(x_1, y_1, z_1) \neq (x_2, y_2, z_2)$ , tales que

$$x[d](x_1, y_1, z_1) = x[d](x_2, y_2, z_2), \quad (4.8)$$

$$y[d](x_1, y_1, z_1) = y[d](x_2, y_2, z_2), \quad (4.9)$$

$$z[d](x_1, y_1, z_1) = z[d](x_2, y_2, z_2). \quad (4.10)$$

Por lo tanto, usando (4.5) - (4.7), las ecuaciones para las autointersecciones (4.8) - (4.10) se reducen a

$$x_1 + \frac{\zeta x_1 d}{a^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x_1^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y_1^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z_1^2}{c^4}}} = x_2 + \frac{\zeta x_2 d}{a^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x_2^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y_2^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z_2^2}{c^4}}}, \quad (4.11)$$

$$y_1 + \frac{\eta y_1 d}{b^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x_1^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y_1^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z_1^2}{c^4}}} = y_2 + \frac{\eta y_2 d}{b^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x_2^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y_2^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z_2^2}{c^4}}}, \quad (4.12)$$

$$z_1 + \frac{\xi z_1 d}{c^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x_1^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y_1^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z_1^2}{c^4}}} = z_2 + \frac{\xi z_2 d}{c^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x_2^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y_2^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z_2^2}{c^4}}}. \quad (4.13)$$

La curva de autointersección de una superficie paralela se puede considerar como el lugar geométrico del centro de una esfera, cuyo radio es la distancia *offset*, que se desliza sobre la superficie inicial con dos puntos de contacto. Por la simetría de las superficies paralelas a las cuádricas en forma implícita, el centro de dicha esfera se debe mover solo en los planos de simetría y, por tanto, las curvas de autointersección están en los planos de simetría. En otras palabras, un par de puntos  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  en la superficie inicial están situados simétricamente respecto del plano  $yz$ ,  $xz$  o  $xy$  y sus paralelas se autointersecan en el plano  $yz$ ,  $xz$  o  $xy$ .

Cuando la curva de autointersección de la superficie paralela se encuentra en el plano  $yz$ , podemos establecer  $x = x_1 = -x_2$ ,  $y = y_1 = y_2$ ,  $z = z_1 = z_2$  y  $\zeta \neq 0$ , luego  $\zeta^2 = 1$  y, por tanto, (4.11) se reduce a

$$a^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z^2}{c^4}} = -\zeta d, \quad (4.14)$$

mientras que (4.12) y (4.13) se reducen a una identidad. De forma análoga, obtenemos

$$b^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \xi^2 \frac{z^2}{c^4}} = -\eta d, \quad (4.15)$$

$$c^2 \sqrt{\zeta^2 \frac{x^2}{a^4} + \eta^2 \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = -\xi d, \quad (4.16)$$

para los planos  $xz$  y  $xy$ , respectivamente. Como el lado izquierdo de las igualdades es positivo, el lado derecho de ellas,  $-\zeta d$ ,  $-\eta d$  y  $-\xi d$ , respectivamente, debe ser también positivo. Mirando la tabla 4.1, podemos deducir en cuál de las dos superficies paralelas con pie en  $(x, y, z)$ , dependiendo del signo de  $d$ , se produce la autointersección. Elevando al cuadrado ambos lados de (4.14) - (4.16), y resumiendo lo que hemos visto, obtenemos el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.1.** *La superficie paralela a una cuádrica en forma implícita se autointerseca en el plano  $yz$  si la superficie inicial interseca con el siguiente elipsoide, siempre que la distancia offset se tome tal que  $-\zeta d$  sea positivo,*

$$EP_x : \frac{x^2}{d^2} + \eta^2 \frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^4 d^2} + \xi^2 \frac{z^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^4 d^2} = 1. \quad (4.17)$$

*Análogamente, las autointersecciones en los planos  $xz$  y  $xy$  ocurren si la superficie inicial interseca con los siguientes elipsoides*

$$EP_y : \zeta^2 \frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^4 d^2} + \frac{y^2}{d^2} + \xi^2 \frac{z^2}{\left(\frac{c}{b}\right)^4 d^2} = 1, \quad (4.18)$$

$$EP_z : \zeta^2 \frac{x^2}{\left(\frac{a}{c}\right)^4 d^2} + \eta^2 \frac{y^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^4 d^2} + \frac{z^2}{d^2} = 1, \quad (4.19)$$

*siempre que  $-\eta d$  y  $-\xi d$  sean positivos, respectivamente. Las curvas de intersección entre la superficie inicial y cada elipsoide son las curvas en la superficie inicial formadas por los pies del vector perpendicular  $d\vec{N}$  de los puntos de autointersección de la superficie paralela. Nos referiremos a estas curvas como curvas base.*

**Nota 4.2.2.** Cuando uno de los coeficientes  $\zeta, \eta, \xi$  es cero, la superficie inicial se reduce bien a un cilindro elíptico o bien a un cilindro hiperbólico (ver tabla 4.1). Además, los tres elipsoides (4.17), (4.18) y (4.19) se reducen a dos cilindros elípticos.

El teorema 4.2.1 proporciona un método generalizado para obtener las curvas de autointersección de las superficies paralelas y las correspondientes curvas base en la superficie cuádrica inicial. El teorema es útil para la generación de trayectorias de herramientas en el control numérico mecanizado y otras aplicaciones de ingeniería.

Usando (4.1), (4.5) - (4.7) y (4.14) - (4.16), se puede comprobar que las curvas de autointersección son cónicas en forma implícita en los planos  $yz$ ,  $xz$  y  $xy$  dadas por

$$\frac{\eta b^2 - \zeta \eta^2 a^2}{(\zeta b^2 - \eta a^2)^2} y^2 + \frac{\xi c^2 - \zeta \xi^2 a^2}{(\zeta c^2 - \xi a^2)^2} z^2 = \frac{\delta a^2 - \zeta d^2}{a^2}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\zeta a^2 - \eta \zeta^2 b^2}{(\eta a^2 - \zeta b^2)^2} x^2 + \frac{\xi c^2 - \eta \xi^2 b^2}{(\eta c^2 - \xi b^2)^2} z^2 = \frac{\delta b^2 - \eta d^2}{b^2}, \quad (4.21)$$

$$\frac{\zeta a^2 - \xi \zeta^2 c^2}{(\xi a^2 - \zeta c^2)^2} x^2 + \frac{\eta b^2 - \xi \eta^2 c^2}{(\xi b^2 - \eta c^2)^2} y^2 = \frac{\delta c^2 - \xi d^2}{c^2}. \quad (4.22)$$

**Ejemplo 4.2.3.** Las superficies cilíndricas incluyen los cilindros elípticos y los cilindros hiperbólicos, entre otros. Vamos a examinar el caso del cilindro hiperbólico con  $\zeta = \delta = 1$ ,  $\eta = -1$  y  $\xi = 0$ , es decir,

$$CH : F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (4.23)$$

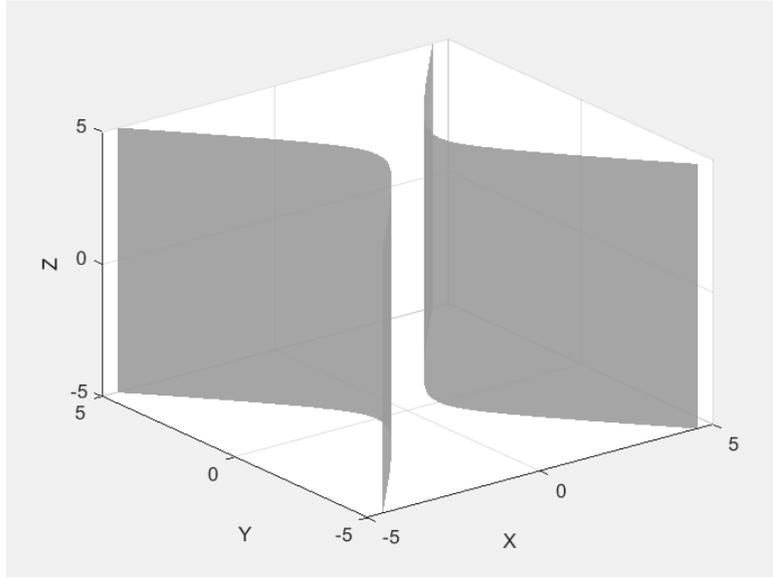


Figura 4.1: Cilindro hiperbólico de parámetros  $\zeta = \delta = 1$ ,  $\eta = -1$  y  $\xi = 0$  con  $a = 0,8$  y  $b = 1$ .

El resto de casos de superficies cilíndricas (ver tabla 4.1) se pueden deducir de forma similar. Las curvaturas del cilindro hiperbólico (4.23) están dadas por

$$K = 0, \quad H = \frac{-b^2x^2 + a^2y^2}{2a^4b^4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$k_1 = \frac{-b^2x^2 + a^2y^2}{a^4b^4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = 0,$$

donde  $(x, y, z) \in CH$ .

Los tres elipsoides (4.17), (4.18) y (4.19) se reducen a los siguientes dos cilindros elípticos

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^4 d^2} = 1, \quad (4.24)$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^4 d^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1. \quad (4.25)$$

Como  $-\zeta d$  tiene que ser positivo para que la superficie paralela tenga autointersecciones en el plano  $yz$ , y sabemos que  $\zeta = 1$ , entonces  $d$  deberá ser negativo. En cambio,  $d$  tendrá que ser positivo para tener autointersección en el plano  $xz$ , y así satisfacer que  $-\eta d$  sea positivo, ya que  $\eta = -1$ .

Consideramos ahora la autointersección en el plano  $yz$ , la cuál está ilustrada en la figura 4.2. De acuerdo con el teorema 4.2.1, el cilindro hiperbólico (4.23) debe intersectar con el cilindro elíptico (4.24) para que haya autointersecciones de la superficie paralela en el plano  $yz$ .

La figura 4.2 muestra la sección transversal de las autointersecciones de las superficies paralelas de un cilindro hiperbólico (con  $a = 0,8$ ,  $b = 1$ ) en el plano  $yz$  con  $d = -3$  (a), y en el plano  $xz$  con  $d = 3$  (b). Las líneas continuas gruesa y fina representan el cilindro hiperbólico y su paralela, respectivamente. Las líneas gruesas de puntos y rayas representan los cilindros elípticos (4.24) y (4.25). Cuatro líneas finas de rayas originándose en los puntos de intersección e intersectando con los puntos de autointersección de las paralelas son el vector  $d\vec{N}$ .

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (4.23) y (4.24), obtenemos los cuatro puntos de intersección entre el cilindro hiperbólico (4.23) y el cilindro elíptico (4.24) que aparecen en la

figura 4.2 (a)

$$\left( \pm \sqrt{\frac{b^2 d^2 + a^4}{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b^2}{a} \sqrt{\frac{d^2 - a^2}{a^2 + b^2}} \right).$$

Análogamente, los cuatro puntos de intersección entre el cilindro hiperbólico (4.23) y el cilindro elíptico (4.25) en la figura 4.2 (b) están dados por

$$\left( \pm \frac{a^2}{b} \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{a^2 + b^2}}, \pm \sqrt{\frac{a^2 d^2 - b^4}{a^2 + b^2}} \right).$$

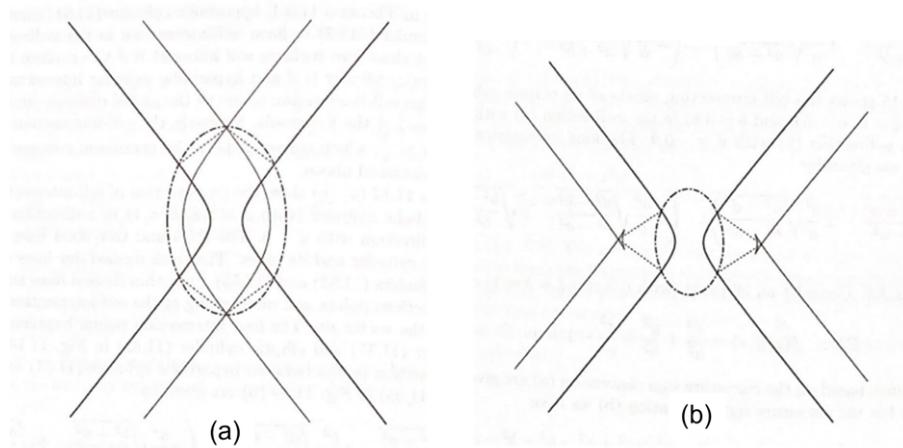


Figura 4.2: Secciones transversales de las autointersecciones de las superficies paralelas a un cilindro hiperbólico de parámetros  $a = 0,8$ ,  $b = 1$ : (a)  $d = -3$ , (b)  $d = 3$  (página 324 de [11]).

### 4.3. Autointersecciones de las superficies paralelas de cuádricas en forma paramétrica

Esta sección se apoyará, además de en el libro mencionado en la introducción del capítulo, en las notas de N. M. Patrikalakis [12].

Como hemos visto, las autointersecciones de una superficie paralela se definen encontrando pares de distintos valores paramétricos  $(s, t) \neq (u, v)$  tales que

$$f(s, t) + d\vec{N}(s, t) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v).$$

Para superficies paramétricas

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

la normal unitaria de una superficie regular

$$\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}$$

en términos de las componentes de los vectores  $f_u$  y  $f_v$  está dada por

$$\begin{aligned} \vec{N}(u, v) &= \frac{(y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)}{\sqrt{(y_u z_v - y_v z_u)^2 + (x_v z_u - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2}} \\ &= \left( \frac{N_x(u, v)}{S(u, v)}, \frac{N_y(u, v)}{S(u, v)}, \frac{N_z(u, v)}{S(u, v)} \right), \end{aligned}$$

donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_z$  denotan las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  del vector  $f_u \times f_v$ , y  $S(u, v) = \|f_u \times f_v\|$ .

Las autointersecciones de las superficies paralelas a una superficie en forma paramétrica se pueden formular buscando pares de puntos distintos en la superficie inicial, es decir,  $(s, t) \neq (u, v)$ , tales que

$$x[d](s, t) = x[d](u, v), \quad (4.26)$$

$$y[d](s, t) = y[d](u, v), \quad (4.27)$$

$$z[d](s, t) = z[d](u, v). \quad (4.28)$$

Esto es,

$$x(s, t) + d \frac{N_x(s, t)}{S(s, t)} = x(u, v) + d \frac{N_x(u, v)}{S(u, v)}, \quad (4.29)$$

$$y(s, t) + d \frac{N_y(s, t)}{S(s, t)} = y(u, v) + d \frac{N_y(u, v)}{S(u, v)}, \quad (4.30)$$

$$z(s, t) + d \frac{N_z(s, t)}{S(s, t)} = z(u, v) + d \frac{N_z(u, v)}{S(u, v)}, \quad (4.31)$$

que es un sistema de tres ecuaciones con cuatro variables  $s, t, u, v$ .

Como podemos fijar una de las cuatro variables  $(s, t, u, v)$ , el sistema de ecuaciones (4.29) - (4.31) se reduce a tres ecuaciones con tres variables.

Podemos reemplazar  $S(s, t)$  y  $S(u, v)$  por variables auxiliares  $\sigma$  y  $\omega$  tales que  $\sigma^2 = S^2(s, t)$  y  $\omega^2 = S^2(u, v)$ .

Como consecuencia, el sistema que involucraba polinomios y raíces cuadradas de polinomios se ha reducido a un sistema polinomial no lineal que consta de cinco ecuaciones con cinco variables:

$$\sigma\omega[x(s, t) - x(u, v)] + d[\omega N_x(s, t) - \sigma N_x(u, v)] = 0, \quad (4.32)$$

$$\sigma\omega[y(s, t) - y(u, v)] + d[\omega N_y(s, t) - \sigma N_y(u, v)] = 0, \quad (4.33)$$

$$\sigma\omega[z(s, t) - z(u, v)] + d[\omega N_z(s, t) - \sigma N_z(u, v)] = 0, \quad (4.34)$$

$$\sigma^2 - N_x^2(s, t) - N_y^2(s, t) - N_z^2(s, t) = 0, \quad (4.35)$$

$$\omega^2 - N_x^2(u, v) - N_y^2(u, v) - N_z^2(u, v) = 0. \quad (4.36)$$

Como  $s = u$  y  $t = v$  son soluciones triviales, tenemos que excluirlas del sistema. Para excluir las soluciones triviales se requieren métodos que se salen del contenido de este trabajo. Por ejemplo, se puede ver [9] para más detalles.



# Capítulo 5

## Superficies NP

En este último capítulo se van a estudiar las superficies racionales que admiten superficies paralelas racionales, conocidas como superficies con normal pitagórica o superficies NP. En la sección 5.2 veremos una condición necesaria y suficiente para que las superficies paralelas a una superficie racional sean racionales, la cuál será la base para probar que la mayoría de cuádricas admiten superficies paralelas racionales.

La referencia básica para superficies racionales que se va a seguir son los artículos de W. Lü [6] y [7], y las notas de R. Krasauskas y M. Peternell [5].

### 5.1. Introducción

En esta sección se presentan las superficies racionales con superficies paralelas racionales. Estas superficies se caracterizan por tener un campo de vectores normal unitario racional, y se denominan superficies con normal pitagórica. El procedimiento de construir superficies paralelas está presente en la mayoría de herramientas modernas de modelado 3D. Dado que las superficies polinómicas y racionales a trozos son la representación estándar de las superficies parametrizadas en los sistemas CAD (diseño asistido por ordenador, del inglés *Computer Aided Design*), la racionalidad de las superficies paralelas juega un papel importante en el modelado geométrico.

Como ya hemos visto en capítulos anteriores, dada una superficie parametrizada racional  $f(u, v)$  con un campo de vectores normal unitario racional  $\vec{N}(u, v)$ , la superficie paralela a distancia  $d$  se representa paramétricamente por

$$f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v). \quad (5.1)$$

Debido a la normalización del vector normal  $\vec{N}$ , las superficies paralelas a superficies racionales  $f(u, v)$  son, en general, no racionales. Pero incluso si la superficie racional  $f(u, v)$  posee superficies paralelas racionales, la representación (5.1) suele ser no racional.

Definamos las superficies racionales con superficies paralelas racionales.

**Definición 5.1.1.** Una superficie  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$  se dice que es una **superficie con normal pitagórica** o **superficie NP** si posee una parametrización racional  $f(u, v)$  y un campo de vectores normal unitario racional  $\vec{N}(u, v)$  correspondiente a  $f(u, v)$ . En ese caso, la superficie paralela  $\mathcal{S}(d)$  de  $\mathcal{S}$  a distancia  $d \in \mathbb{R}$  admite una parametrización racional  $f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v)$ .

La racionalidad de una superficie no depende de la parametrización escogida. Sabemos que el vector  $\vec{N}(u, v)$  se calcula normalizando el producto vectorial  $f_u \times f_v$ , es decir,

$$\vec{N}(u, v) = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}.$$

Así, si la norma  $\|f_u \times f_v\|$  es una función racional, la parametrización (5.1) es una representación racional de las superficies paralelas  $\mathcal{S}(d)$  de  $\mathcal{S}$ , y se denomina parametrización NP. Pero normalmente esta norma involucra raíces cuadradas, incluso para superficies paralelas racionales, por lo que se tienen que llevar a cabo reparametrizaciones adecuadas.

## 5.2. Racionalidad de las cuádricas y de sus superficies paralelas

Empezamos viendo una condición necesaria y suficiente para que las superficies paralelas a una superficie racional sean racionales.

**Teorema 5.2.1.** *Supongamos que  $F(x, y, z) = 0$  es una superficie algebraica racional irreducible. Entonces una condición necesaria y suficiente para que sus superficies paralelas sean racionales es que la siguiente superficie en el espacio  $(x, y, z, r)$*

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ F_x^2(x, y, z) + F_y^2(x, y, z) + F_z^2(x, y, z) - r^2 = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

admira una parametrización racional.

Las curvas paralelas a las parábolas son curvas racionales de grado 6. Por desgracia, la parábola es la única cónica con curvas paralelas racionales. Las elipses y las hipérbolas, a excepción de las circunferencias, no admiten curvas paralelas racionales (ver sección 3.1 de [6]).

A partir de estos dos resultados, se puede deducir que las superficies paralelas a los paraboloides se pueden expresar como superficies racionales en forma paramétrica de grado a lo sumo 6, y que las superficies paralelas a los conos circulares y a las superficies cilíndricas cuyas directrices son parábolas o circunferencias, son racionales.

A diferencia de las cónicas, el conjunto de cuádricas cuyas superficies paralelas admiten representaciones racionales no se limita solo a paraboloides y esferas. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 5.2.2.** *Las superficies paralelas a paraboloides, esferas, elipsoides e hiperboloides son todas superficies racionales.*

*Demostración.* Probaremos el resultado para el caso del hiperboloide de una hoja. En el resto de casos se procede de forma análoga. Como vimos en la tabla 4.1, los hiperboloides de una hoja se pueden escribir en la siguiente forma estándar:

$$x^2 + ay^2 + bz^2 = 1 \quad \text{con } ab < 0. \quad (5.3)$$

Por el teorema 5.2.1, para ver si las superficies paralelas a (5.3) son racionales, tenemos que analizar si la superficie

$$\begin{cases} x^2 + ay^2 + bz^2 - 1 = 0, \\ x^2 + a^2y^2 + b^2z^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

se puede parametrizar de forma racional.

Sustituyendo la transformación cuádrica

$$\begin{cases} x = \delta + 1, \\ y = u\delta, \\ z = v\delta, \\ r = 2(w\delta + 1), \end{cases} \quad (5.5)$$

en (5.4) tenemos que

$$\delta = \frac{-2}{1 + au^2 + bv^2} = \frac{-2(1-w)}{1 + a^2u^2 + b^2v^2 - w^2}. \quad (5.6)$$

Por tanto, sustituyendo el segundo miembro de (5.6) en (5.5), y esto a su vez en la segunda ecuación de (5.4), se tiene que la racionalidad de (5.4) depende solo de la racionalidad de la siguiente superficie algebraica cúbica en el espacio  $(u, v, w)$

$$S' : f(u, v, w) = a(a + w - 1)u^2 + b(b + w - 1)v^2 + w(1 - w) = 0. \quad (5.7)$$

Veamos cómo parametrizar (5.7). Primero, notemos que para cada valor fijado  $w'$ , la intersección de  $S'$  con el plano  $w = w'$  es una cónica. Sin embargo, como  $a$  y  $b$  tienen signos opuestos, podemos elegir dos números distintos  $w = w_i$  ( $i = 1, 2$ ) entre los cuatro planos  $w = 0$ ,  $w = 1$ ,  $w = 1 - a$  y  $w = 1 - b$  tales que cada curva de intersección de (5.7) con el plano  $w = w_i$  contiene una recta en el espacio real

$$L_i : \begin{cases} f(u, v, w_i) = 0, \\ w = w_i, \end{cases}$$

con  $i = 1, 2$ , y las dos líneas de intersección seleccionadas son no coplanares.

Sean las líneas de intersección  $L_1$  y  $L_2$  escritas en las formas paramétricas

$$L_1 : \begin{cases} u_1(s) = a_1 + c_1s, \\ v_1(s) = b_1 + d_1s, \\ w_1(s) = w_1, \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} u_2(t) = a_2 + c_2t, \\ v_2(t) = b_2 + d_2t, \\ w_2(t) = w_2. \end{cases}$$

A continuación, definimos una familia biparamétrica de rectas, variando  $s$  y  $t$ , por

$$\begin{cases} u = (1 - k)u_1(s) + k u_2(t), \\ v = (1 - k)v_1(s) + k v_2(t), \\ w = (1 - k)w_1(s) + k w_2(t). \end{cases} \quad (5.8)$$

Sustituyendo (5.8) en la ecuación (5.7) de la superficie  $S'$  resulta una ecuación cúbica en  $k$  cuyos coeficientes son polinomios racionales en  $s$  y  $t$ . Es claro que  $k = 0$  y  $k = 1$  satisfacen esta ecuación, y por tanto la tercera raíz  $k = k(s, t)$  debe ser una función racional en  $s$  y  $t$ .

Con esto y junto con las ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.8) tenemos una parametrización racional en  $s$  y  $t$  de la superficie (5.4).  $\square$

**Ejemplo 5.2.3.** En este ejemplo vamos a ver en detalle cómo hallar la parametrización racional de la superficie paralela a una cuádrica. Consideramos el hiperboloide de una hoja de parámetros  $a = 4$  y  $b = -2$ ,

$$S : x^2 + 4y^2 - 2z^2 = 1. \quad (5.9)$$

Tenemos que ver si la superficie

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 1 = 0, \\ x^2 + 16y^2 + 4z^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

admite una parametrización racional.

Usando la transformación cuádrica (5.5) obtenemos

$$\delta = \frac{-2}{1 + 4u^2 - 2v^2} = \frac{-2(1 - w)}{1 + 16u^2 + 4v^2 - w^2}. \quad (5.11)$$

Así que basta parametrizar de forma racional la superficie

$$S' : f(u, v, w) = 4(3 + w)u^2 + 2(3 - w)v^2 + w(1 - w) = 0. \quad (5.12)$$

Tomamos

$$w_1 = 1 - a = 1 - 4 = -3 \quad \text{y} \quad w_2 = 1 - b = 1 + 2 = 3.$$

Luego,

$$f(u, v, -3) = 12v^2 - 12 = 0 \iff v^2 = 1 \iff v = \pm 1$$

y

$$f(u, v, 3) = 24u^2 - 6 = 0 \iff u^2 = \frac{1}{4} \iff u = \pm \frac{1}{2}.$$

Notemos que las dos rectas no coplanares

$$L_1 : \begin{cases} u = s, \\ v = 1, \\ w = -3, \end{cases} \quad L_2 : \begin{cases} u = \frac{1}{2}, \\ v = t, \\ w = 3, \end{cases}$$

están en  $S'$ . Por tanto, intersecando  $S'$  con la recta

$$\begin{cases} u = s(1 - k) + \frac{1}{2}k, \\ v = (1 - k) + tk, \\ w = -3(1 - k) + 3k, \end{cases} \quad (5.13)$$

resulta la raíz no constante

$$k(s, t) = \frac{4s^2 + 4t + 1}{4s^2 - 2t^2 - 4s + 4t - 1}. \quad (5.14)$$

Con ello, sustituyendo (5.14) en (5.13), obtenemos la parametrización racional de  $S'$  que buscábamos

$$\begin{cases} u(s, t) = \frac{-2s^2 - 2st^2 - 2s + 2t + \frac{1}{2}}{4s^2 - 2t^2 - 4s + 4t - 1}, \\ v(s, t) = \frac{4s^2t + 2t^2 - 4s + t - 2}{4s^2 - 2t^2 - 4s + 4t - 1}, \\ w(s, t) = \frac{12s^2 + 6t^2 + 12s + 12t + 9}{4s^2 - 2t^2 - 4s + 4t - 1}. \end{cases} \quad (5.15)$$

Además, sustituyendo (5.15) en (5.11), resulta

$$\delta(s, t) = \frac{-4s^2 + 2t^2 + 4s - 4t + 1}{-4s^2t^2 + 4s^2 + t^2 + 4s + 8t + 8st + 3}. \quad (5.16)$$

Por tanto, sustituyendo (5.15) y (5.16) en (5.5) tenemos una parametrización racional para (5.10):

$$\begin{cases} x(s, t) = 1 + \frac{-4s^2 + 2t^2 + 4s - 4t + 1}{-4s^2t^2 + 4s^2 + t^2 + 4s + 8t + 8st + 3}, \\ y(s, t) = \frac{4s^2 + 4st^2 + 4s - 4t - 1}{-8s^2t^2 + 8s^2 + 2t^2 + 8s + 16t + 16st + 6}, \\ z(s, t) = \frac{4s^2t + 2t^2 - 4s + t - 2}{4s^2t^2 - 4s^2 - t^2 - 4s - 8t - 8st - 3}, \\ r(s, t) = \frac{2(4s^2t^2 + 8s^2 + 5t^2 + 8s + 4t - 8st + 6)}{4s^2t^2 - 4s^2 - t^2 - 4s - 8t - 8st - 3}. \end{cases} \quad (5.17)$$

Esta parametrización es impropia, es decir, a cada punto de la superficie le corresponde más de un par de valores paramétricos distintos. Ahora, sea

$$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 1 = 0,$$

nuestro hiperboloide de una hoja (5.9). Entonces,

$$\nabla F(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 8y, -4z).$$

Además, de la segunda ecuación de (5.2) tenemos que

$$r^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2,$$

es decir, que  $r = \|\nabla F\|$ .

Como ya vimos, las componentes  $x[d], y[d], z[d]$  del vector de posición  $f[d]$  de la superficie paralela a la superficie implícita  $F(x, y, z) = 0$  se pueden expresar como

$$\begin{aligned}x[d] &= x + d \frac{F_x}{\|\nabla F\|}, \\y[d] &= y + d \frac{F_y}{\|\nabla F\|}, \\z[d] &= z + d \frac{F_z}{\|\nabla F\|}.\end{aligned}$$

Luego, en este caso, tenemos

$$x[d] = x + d \frac{F_x}{\|\nabla F\|} = x + d \cdot \frac{2x}{r} = x \left(1 + \frac{2d}{r}\right),$$

y análogamente para  $y[d]$  y  $z[d]$ .

Por tanto, con esto, utilizando (5.17) y simplificando, obtenemos una parametrización racional de la superficie paralela  $S(d)$  a distancia  $d$  del hiperboloide de una hoja (5.9):

$$\left\{ \begin{aligned}x[d](s, t) &= \left(1 + \frac{-4s^2 + 2t^2 + 4s - 4t + 1}{-4s^2t^2 + 4s^2 + t^2 + 4s + 8t + 8st + 3}\right) \left(1 + \frac{d(4s^2t^2 - 4s^2 - t^2 - 4s - 8t - 8st - 3)}{4s^2t^2 + 8s^2 + 5t^2 + 8s + 4t - 8st + 6}\right), \\y[d](s, t) &= \left(\frac{4s^2 + 4st^2 + 4s - 4t - 1}{-8s^2t^2 + 8s^2 + 2t^2 + 8s + 16t + 16st + 6}\right) \left(1 + \frac{4d(4s^2t^2 - 4s^2 - t^2 - 4s - 8t - 8st - 3)}{4s^2t^2 + 8s^2 + 5t^2 + 8s + 4t - 8st + 6}\right), \\z[d](s, t) &= \left(\frac{4s^2t + 2t^2 - 4s + t - 2}{4s^2t^2 - 4s^2 - t^2 - 4s - 8t - 8st - 3}\right) \left(1 - \frac{2d(4s^2t^2 - 4s^2 - t^2 - 4s - 8t - 8st - 3)}{4s^2t^2 + 8s^2 + 5t^2 + 8s + 4t - 8st + 6}\right).\end{aligned}\right.$$

**Nota 5.2.4.** Las cuádricas que faltan por mencionar son los cilindros y los conos. Sabiendo que las elipses y las hipérbolas, a excepción de los círculos, no admiten superficies paralelas racionales (ver Corolario 1 de [6]), se puede probar que los cilindros y los conos, a excepción de los cilindros parabólicos, los cilindros circulares y los conos circulares, no poseen superficies paralelas racionales.



# Bibliografía

- [1] L. A. Cordero, M. Fernández, A. Gray. *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica<sup>®</sup>*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
- [2] M. P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [3] F. Etayo Gordejuela. Apuntes de la asignatura *Geometría de curvas y superficies*. Universidad de Cantabria, 2018.
- [4] A. Gray. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica<sup>®</sup>*. CRC Press, 1998.
- [5] R. Krasauskas, M. Peternell. *Rational offset surfaces and their modeling applications*. Nonlinear Computational Geometry 151, 109-135, 2010.
- [6] W. Lü. *Rationality of the offsets to algebraic curves and surfaces*. Applied Mathematics (A Journal of Chinese Universities) 9 (Ser. B), 265-278, 1994.
- [7] W. Lü. *Rational parameterization of quadrics and their offsets*. Computing 57, 135-147, 1996.
- [8] T. Maekawa. *Self-intersections of offsets of quadratic surfaces: Part I, explicit surfaces*. Engineering with Computers 14, 1-13, 1998.
- [9] T. Maekawa, W. Cho, N. M. Patrikalakis. *Computation of self-intersections of offsets of Bézier surface patches*. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 119(2), 275-283, 1997.
- [10] B. Odehnal, H. Stachel, G. Glaeser. *The universe of quadrics*, 417-456. Springer, 2020.
- [11] N. M. Patrikalakis, T. Maekawa. *Shape interrogation for computer aided design and manufacturing*. Springer, 2002.
- [12] N. M. Patrikalakis. *Offsets of parametric curves and surfaces*. Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- [13] A. Rejbrand. The Rejbrand Encyclopædia of Curves and Surfaces. <https://trece.se/sphere.php>. Última modificación 2014-02-09 23:54.



# Apéndice A

## Anexo

Aquí se pretende explicar brevemente los archivos que se adjuntan en el zip.

- esfera\_paralela.m: representación de la esfera con dos de sus superficies paralelas. Figura 2.3.
- elipsoide\_paralela.m: representación del elipsoide con una de sus superficies paralelas exteriores. Figura 3.1.
- elipsoide\_paralela.ggb: representación del elipsoide con seis de sus superficies paralelas interiores. Figura 3.2.
- toro\_paralela.ggb: representación del toro elíptico con tres de sus superficies paralelas interiores y una de sus exteriores. Figura 3.3.
- cono\_paralela.ggb: representación del cono circular con dos de sus superficies paralelas, una interior y otra exterior. Figura 3.4.
- mobius\_paralela\_cuentas.m: cuentas para calcular la superficie paralela a la banda de Möbius:  $f[d](u, v) = f(u, v) + d\vec{N}(u, v)$ .
- mobius\_paralela\_puntos.m: cuentas para calcular los puntos  $f[d](0, 0)$  y  $f[d](2\pi, 0)$  de la superficie paralela a la banda de Möbius.
- mobius\_paralela\_figura.m: representación gráfica de la banda de Möbius y de su superficie paralela. Figuras 3.7 y 3.8.
- cuentas\_orientabilidad.m: cuentas de la superficie paralela a la banda de Möbius que se utilizan en el archivo orientabilidad\_mobius\_paralela.m.
- orientabilidad\_mobius\_paralela.m: cuentas para probar que la superficie paralela a la banda de Möbius es orientable.
- cuentas\_tma522\_ec56.m: cuentas para obtener la ecuación (5.6) de la demostración del teorema 5.2.2.
- cuentas\_tma522\_ec57.m: cuentas para obtener la ecuación (5.7) de la demostración del teorema 5.2.2.
- cuentas\_ej523\_ec514.m: cuentas para obtener la ecuación (5.14) del ejemplo 5.2.3.
- cuentas\_ej523\_ec515\_ec516\_ec517.m: cuentas para obtener las ecuaciones (5.15), (5.16) y (5.17) del ejemplo 5.2.3.