Facultad
de
Ciencias

Descomposiciones de K_n y $K_n - I$ en ciclos.

Cycle decompositions of K_n and $K_n - I$.

Trabajo Fin de Grado para acceder al
Grado en Matemáticas

Autor: Sergio Barreda Becerro
Director: Daniel Sadornil Renedo

Junio 2022

Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a mi tutor Dani, por su tiempo, dedicación, interés y ayuda, así como su ímpetu para lograr mejorar cada pequeño detalle y de esta manera conseguir que esté más que satisfecho con el trabajo realizado.

A mis compañeros, que han compartido durante este periodo tantos momentos y que se han convertido en grandes amistades.

A mi madre, por preocuparse siempre y valorar el esfuerzo que ha supuesto este proceso. A mi hermana, por la ayuda que me ha proporcionado desde el día que empecé. A mi abuelo, por hacernos disfrutar de él. A mi padre, por animarme desde pequeño a decantarme por las Matemáticas, que tanto me gustaban, así como apoyarme durante todo este tiempo y acompañarme en tantas horas de estudio.

Por último, a mi abuela, que seguro estaría orgullosa.

Resumen

Descomponer un grafo en ciclos consiste en proporcionar una partición disjunta de sus aristas, de modo que cada una de ellas pertenezca a un único ciclo. En particular, se estudiará el grafo completo K_n, el cual se desea descomponer en ciclos disjuntos C_m.

Para que esta descomposición se pueda dar deben cumplirse una serie de condiciones que tienen que ver con el número de vértices del grafo y las longitudes de los ciclos. Entre ellas se encuentra que n tiene que ser impar. Es por ello que para poder abarcar el caso n par se deben estudiar las descomposiciones del grafo completo menos un 1-factor, esto es, el grafo $K_n - I$.

En este trabajo se muestran varias descomposiciones de estos dos grafos mediante el empleo de diversas técnicas, determinando que las condiciones necesarias son además suficientes y ofreciendo una construcción para poder llegar a ellas. Del mismo modo se muestran ejemplos ilustrativos que permiten acompañar dichas construcciones y visualizar las descomposiciones.

Palabras clave: grafo completo, descomposición, ciclos.

Abstract

Decomposing a graph into cycles is to provide a disjointed partition of its edges, so that each of them belongs to a single cycle. In particular, we will study the complete graph K_n, which we want to decompose into disjoint cycles C_m.

In order for this decomposition to occur, some conditions have to be met that have to do with the number of vertices of the graph and the lengths of the cycles. One of them is that n has to be odd. Therefore, in order to be able to cover the n-pair case, the decompositions of the complete graph minus a 1-factor, $K_n - I$, must be studied.

This paper shows several decompositions of these two graphs by employing different techniques, determining that the necessary conditions are also sufficient and offering a construction to reach them. In the same way, illustrative examples are shown that allow to accompany these constructions and visualize the decompositions.

Key words: complete graph, decomposition, cycles.

Índice general

Introducción **1**

1. Algunos conceptos básicos sobre Teoría de Grafos. **5**

2. Descomposiciones de K_n en ciclos. **11**
2.1. Descomposiciones de K_n en ciclos hamiltonianos. 12
2.2. Descomposiciones de K_n en C_m con m par. 16
2.3. Descomposiciones de K_n en ciclos de longitud $2p^e$. 23

3. Descomposiciones de $K_n - I$ en ciclos. **31**
3.1. Descomposiciones de $K_n - I$ en ciclos hamiltonianos. 32
3.2. Descomposiciones de $K_n - I$ en C_m con m par. 33

4. Otros resultados sobre descomposiciones. **43**

Bibliografía **47**

A. Ejemplos de descomposiciones **49**

Introducción

Quince alumnas salen a caminar agrupadas de tres en tres formando cinco filas durante siete días seguidos. ¿Es posible organizar los grupos diariamente de modo que al final de la semana no haya habido dos de ellas que hayan caminado juntas en la misma fila más de una vez? Este enunciado es conocido como "El problema de las colegialas de Kirkman"[10], propuesto y resuelto por él mismo. Si las estudiantes formasen el conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O\}$ una posible solución sería la siguiente:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
ABC	ADG	AEJ	AFO	AHK	AIM	ALN
DEF	BEH	BFL	BDM	BGN	BKO	BIJ
GHI	CJM	CHO	CGL	CFI	CEN	CDK
JKL	FKN	DIN	EIK	DJO	DHL	EGO
MNO	ILO	GKM	HJN	ELM	FGJ	FHM

Existen diversas formas de plantear el problema. Supongamos que lo relacionamos con la Teoría de Grafos. Pensemos en las alumnas como vértices de un grafo, los cuales estarán relacionados mediante una arista siempre que las alumnas que representan pertenezcan al mismo grupo. Como se pretende juntar en grupos a todas con todas, cada vértice se unirá con todos los restantes, por lo que se obtendrá el grafo completo K_{15}. Por tanto, el problema se resume en descomponer (esto es, dar una partición disjunta de las aristas) el grafo completo K_{15} en siete copias de G, donde G es una unión disjunta de cinco ciclos de longitud 3 (triángulos) sin vértices en común.

Ahora bien, podemos pensar más allá y eliminar el caso concreto de quince alumnas y grupos de tres, y plantear la cuestión general de si es posible y de qué forma se puede descomponer el grafo completo K_n en ciclos disjuntos C_m. ¿Qué condiciones han de verificar n y m para que se pueda dar tal descomposición? Y lo más importante, en caso de que se pueda descomponer, ¿cómo hacerlo?

Los primeros resultados conocidos se remontan a finales del siglo XIX, cuando Walecki [13] consideró el caso $n = m$, es decir, la descomposición en ciclos que pasen por todos los vértices del grafo, los cuales se conocen como ciclos hamiltonianos. Esta situación particular se corresponde con el problema de la mesa circular, más conocido como "El problema de Oberwolfach"[12], planteado en 1967 por Gerhard Ringel durante una conferencia de Teoría de Grafos en Oberwolfach, Alemania. En dichas conferencias, es costumbre que los participantes cenen juntos en una sala con mesas circulares, no todas del mismo tamaño, y con asientos asignados que reorganizan a los participantes de una comida a otra. El problema en cuestión centra su atención en este hecho. Su formulación es la siguiente:

Dado un conjunto de personas, se desea sentarles en un número específico de mesas redondas para una serie de comidas con las siguientes restricciones:

- *A cada persona se le asigna un asiento para cada comida, de modo que las mesas estén siempre llenas.*
- *Cada persona debe sentarse una única vez al lado (a derecha ó izquierda) de cada una de las restantes.*
- *Cada persona recibe una única vez cada una de las comidas.*

Matemáticamente se puede expresar de manera que dado un conjunto de n personas, se desea sentarles en s mesas redondas cada una de las cuales dispone de $k_1, k_2, ..., k_s$ asientos, de modo que $k_i \geq 3$ para cada $i \in \{1, ..., s\}$ y verificando $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$, para x comidas, tal que cada persona se siente al lado de cada una de las restantes tan sólo una vez, y cada persona recibe cada comida una única vez.

El conjunto de personas sentadas unas al lado de otras durante cada comida se puede representar como una unión disjunta de ciclos $C_{k_1}, ..., C_{k_s}$, identificando cada ciclo con la mesa correspondiente de igual longitud. Si $G = C_{k_1} \cup ... \cup C_{k_s}$, se tiene que G es una manera de descomponer en mesas a los participantes de la conferencia en una de las comidas. Por tanto, si se dispone de n personas, podemos pensar en el problema como la descomposición del grafo completo K_n en una unión de copias de G, donde cada ciclo que forma G no comparte ningún vértice con cada uno de los restantes ciclos.

Ejemplo 0.1. *La siguiente imagen muestra el caso en el que se dispone de 7 comensales y se les distribuye en una mesa de 3 personas y una mesa de 4 personas. Existen tres formas de distribuirles (podemos pensar en cada una de ellas como si de una comida se tratase). Se corresponde con la descomposición de K_7 en una unión de tres copias de G, donde $G = C_3 \cup C_4$:*

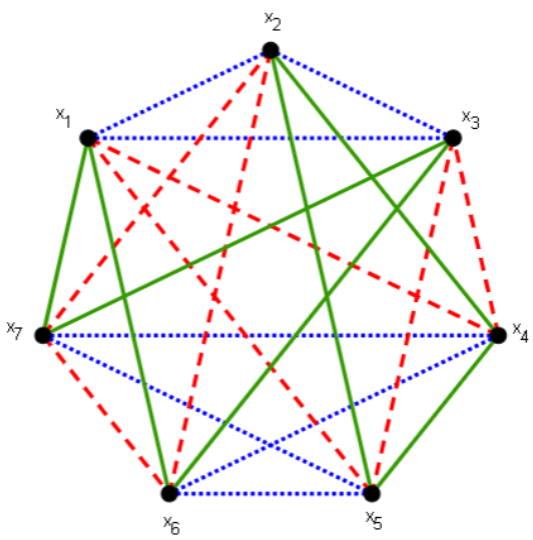


Figura 1: Solución del problema de Oberwolfach para el caso $n = 7$.

Nuestra cuestión es determinar cuándo el grafo completo K_n puede descomponerse en ciclos disjuntos y cómo puede hacerse, sin aplicarle ninguna de las restricciones del problema de Oberwolfach.

Tanto en el problema de las colegialas de Kirkman como en el problema de Oberwolfach, una condición necesaria es que n sea impar. ¿Qué ocurre con el caso n par? Pues bien, se puede plantear el mismo tipo de descomposiciones, pero tomando esta vez el grafo $K_n - I$, donde I es un emparejamiento completo. Es decir, los vértices estarán relacionados con todos los restantes, excepto con uno de ellos.

Este trabajo de fin de grado está dividido en varios capítulos. En el primero de ellos se definen y se muestran algunas propiedades de una serie de conceptos básicos relacionados con la Teoría de Grafos que estarán involucrados en el resto del contenido. El segundo capítulo presenta varios tipos de descomposiciones del grafo completo K_n empleando varias técnicas. Se presentarán resultados importantes acompañados de ejemplos que permitirán visualizar de un modo más eficaz las construcciones. El tercer capítulo abarca descomposiciones en este caso del grafo $K_n - I$, donde al igual que en el anterior se acompañarán de ejemplos ilustrativos. El cuarto y último capítulo está diseñado para mostrar que existen otros muchos métodos de descomponer grafos. De esta manera se pretende dar a conocer otros resultados acerca del estudio de descomposiciones de grafos completos. Finalmente, en el Anexo aparecen varios ejemplos detallados creados con el fin de aclarar las construcciones de algunas de las demostraciones de los resultados principales. Todos ellos tienen vinculados un archivo de Geogebra que permite al lector ver las descomposiciones completas de los grafos involucrados. Estos archivos están contenidos en la página https://www.geogebra.org/u/sergio-barreda [4].

Capítulo 1

Algunos conceptos básicos sobre Teoría de Grafos.

La Teoría de Grafos surgió en el siglo XVIII con el problema de los puentes de Königsberg. La ciudad estaba dividida en cuatro zonas separadas por el río Pregel. El problema planteaba si era posible cruzar exactamente una vez por cada uno de los siete puentes de la ciudad de Königsberg y regresar al punto de partida. Fue Euler en 1736 quién ofreció una solución al problema, tras reemplazar el mapa de la ciudad por un diagrama mucho más simple que incluía toda la información relevante.

Este capítulo está destinado principalmente a presentar diversas nociones básicas sobre Teoría de Grafos relacionadas con el tema tratado, con el objetivo de familiarizarnos con ellas debido a su aparición en los resultados y demostraciones posteriores. Muchas de ellas están incorporadas dentro de la asignatura del Grado *Matemática Discreta* [15].

Definición 1.1. *Un grafo (finito) $G = (V, E)$ es un par ordenado donde $V = V(G)$ es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se denominan vértices, y $E = E(G)$ es un conjunto finito cuyos elementos se llaman aristas. Las aristas se encargan de asociar vértices, de modo que si $a \in E(G)$ entonces $a = \{x, y\}$ con $x, y \in V(G)$, siendo x e y los extremos de la arista a. Además se verifica que $a = \{x, y\} = \{y, x\}$.*

En las condiciones de la definición precedente se dice que la arista a une x con y, que a es incidente con x e y o que x e y son adyacentes por a. Se dice que la arista a es un lazo si $a = \{x, x\}$ para algún $x \in V(G)$. Dos aristas son adyacentes si tienen un extremo en común.

Definición 1.2. *Un grafo G se dice simple si no tiene lazos y dos vértices distintos de G están unidos a lo sumo por una única arista.*

Definición 1.3. *Sea G un grafo. Diremos que un grafo H es un subgrafo de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.*

Definición 1.4. *Sea G un grafo y $x \in V(G)$ un vértice del grafo. Se denomina grado del vértice x y se denota por $\delta(x)$ al número de aristas incidentes con x.*

Algunos grafos particulares tienen características especiales y reciben un nombre concreto. A partir de ahora centraremos nuestra atención en uno de ellos: el grafo completo.

Definición 1.5. *Un grafo completo es un grafo simple donde cada par de vértices está conectado por una arista. Se denota por K_n al grafo completo de n vértices.*

Podemos denotar el conjunto de los vértices de K_n como $V(K_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, y el conjunto de sus aristas como $E(K_n) = \{x_i x_j : 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq n, \ \ i \neq j\}$. Se verifica que $|V(K_n)| = n$ y $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Definición 1.6. *Se llama multigrafo completo y se denota por λK_n al grafo completo K_n donde cada arista aparece λ veces.*

Es decir, si $x_i x_j \in E(K_n)$, entonces la arista $x_i x_j$ aparece λ veces en el grafo λK_n.

Para poder entender qué conocemos como $K_n - I$, debemos introducir la siguiente definición:

Definición 1.7. *Sea G un grafo. Un emparejamiento M en G es un conjunto de aristas de G no adyacentes entre sí, es decir, sin vértices en común. Se dice que el emparejamiento es completo si para cada $x \in V(G)$ existe una única arista $a \in E(G)$ incidente con él. Un 1-factor I de un grafo G es un emparejamiento completo entre los vértices de G.*

Definición 1.8. *Se llama $K_n - I$ al grafo completo K_n al que se le ha extraído un 1-factor I.*

En este caso se cumple que $|V(K_n - I)| = n$ y $|E(K_n - I)| = \frac{n \cdot (n-2)}{2}$.

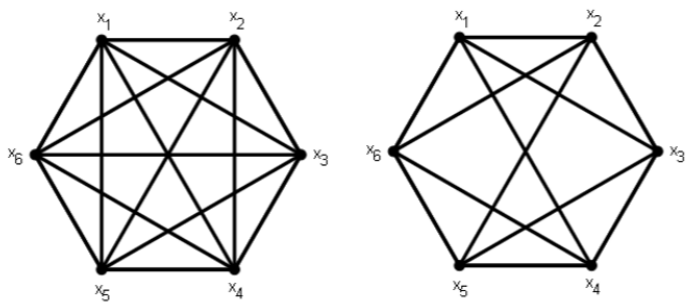


Figura 1.1: K_6 y $K_6 - I$, respectivamente.

Obsérvese que en la imagen de la derecha $I = \{x_1 x_5, x_2 x_4, x_3 x_6\}$.

Definición 1.9. *Un grafo G se dice regular si todos sus vértices tienen el mismo grado. Un grafo regular cuyos vértices tienen grado k se denomina grafo k-regular o grafo regular de grado k.*

Se verifica que K_n es un grafo $(n-1)$-regular y $K_n - I$ es un grafo $(n-2)$-regular ya que

$$\delta(x) = \begin{cases} n-1 & \text{si } x \in V(K_n), \\ n-2 & \text{si } x \in V(K_n - I). \end{cases}$$

Otro tipo de grafo que aparecerá en alguna de las demostraciones es el grafo bipartito, que se define del siguiente modo:

Definición 1.10. *Un grafo G se dice bipartito si existe una partición de $V(G)$, $V(G) = V_1 \oplus V_2$ (es decir, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(G)$), tal que todas las aristas de G unen vértices de V_1 con vértices de V_2.*

Definición 1.11. *Un grafo bipartito cuyo conjunto de vértices es $V(G) = V_1 \oplus V_2$ se dice completo si todos los vértices de V_1 están relacionados con todos los vértices de V_2. Se denota por $K_{n,m}$, donde n y m representan el número de vértices de V_1 y V_2 respectivamente.*

Se tiene que $V(K_{n,m}) = \{x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m\}$ y $E(K_{n,m}) = \{x_i y_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Por tanto, $|V(K_{n,m})| = n + m$ y $|E(K_{n,m})| = nm$.

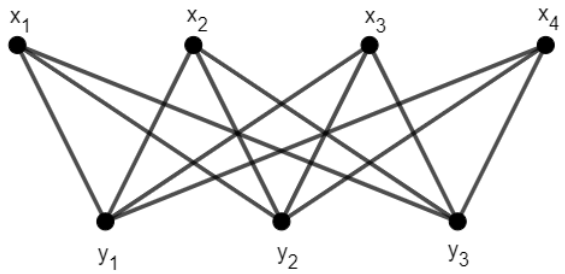


Figura 1.2: $K_{4,3}$.

Una vez introducidos los tipos de grafos objeto de estudio, se presentan ahora una serie de términos y operaciones comunes entre grafos que nos servirán de ayuda.

Definición 1.12. *Un camino P contenido en un grafo G es una sucesión $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ donde $x_i \in V(G)$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$ y $x_i x_{i+1} \in E(G)$ para cada $i \in \{1, ..., k-1\}$. Además, todas las aristas del camino son distintas.*

Si se elimina la condición de que todas las aristas son distintas, entonces P se llama recorrido.

Definición 1.13. *Un camino P se dice simple si es un camino sin vértices repetidos, salvo quizás el primero y el último.*

A partir de esta definición podemos dar paso a la siguiente, que introduce un tipo de camino que será de gran utilidad en las futuras descomposiciones:

Definición 1.14. *Un ciclo contenido en un grafo es un camino $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ de modo que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, salvo $x_1 = x_k$. Se denota por C_m al ciclo de m vértices. Un ciclo se dice hamiltoniano si pasa por todos los vértices del grafo.*

Algunas propiedades de los ciclos son las siguientes:

1. Se puede expresar el ciclo C_m como la sucesión $\{x_1, x_2, ..., x_m, x_1\}$.
2. El conjunto de vértices del ciclo C_m es $V(C_m) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$.
3. El conjunto de aristas del ciclo C_m es $E(C_m) = \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_m x_1\}$.
4. La longitud de un ciclo es el número total de aristas que tiene, esto es, el cardinal del conjunto $E(C_m)$.

En algunas ocasiones, el mismo grafo puede representarse de numerosas formas, pero en todas ellas conserva las mismas propiedades. Por tanto, nos interesará saber cuándo dos representaciones corresponden al mismo grafo.

Definición 1.15. *Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Se dice que G_1 y G_2 son isomorfos si existen biyecciones $\phi : V_1 \to V_2$ y $\varphi : E_1 \to E_2$ tal que si $a \in E_1$ une x con y $(x, y \in V_1)$ entonces $\varphi(a) \in E_2$ une $\phi(x)$ con $\phi(y)$. Se denota por $G_1 \cong G_2$.*

Definición 1.16. *Sea G un grafo. Se llama grafo complementario de G y se denota por $\overline{G}$ al grafo que posee el mismo conjunto de vértices de G y tal que dos vértices son adyacentes por medio de una arista si y sólo si esa arista no existe en G.*

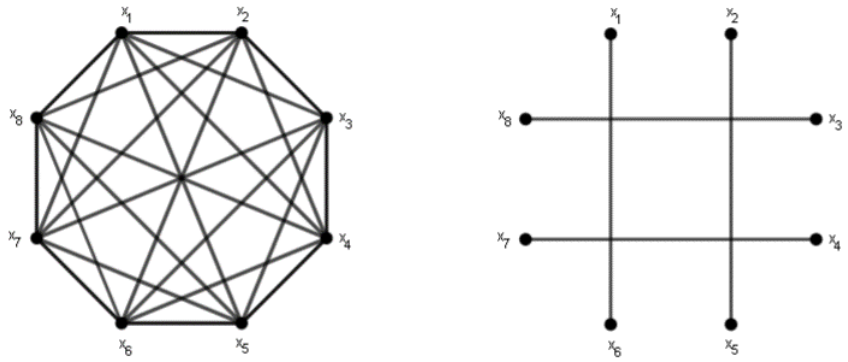


Figura 1.3: $K_8 - I$ y $\overline{K_8 - I}$, respectivamente.

Nótese que $\overline{K_8 - I} \cong I = \{x_1x_6, x_2x_5, x_3x_8, x_4x_7\}$.

Definición 1.17. *Sea G un grafo y H_1 y H_2 dos subgrafos de G. Se denota por $G = H_1 \cup H_2$ si G es la unión disjunta de aristas de los subgrafos H_1 y H_2, esto es, $V(G) = V(H_1) \cup V(H_2)$ y $E(G) = E(H_1) \cup E(H_2)$, con $E(H_1) \cap E(H_2) = \emptyset$ (es decir, H_1 y H_2 no tienen aristas en común). Si $G = H_1 \cup ... \cup H_k$, donde $H_1, ..., H_k$ son todos isomorfos a H, entonces G puede descomponerse en subgrafos isomorfos a H. Se denotará por $H \mid G$. Además, se verifica que $|E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E(H_i)|$.*

En particular, G se puede descomponer en ciclos C_m si $H_i \cong C_m$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Lo denotaremos como $C_m \mid G$.

Definición 1.18. *Si G y H son dos grafos con vértices distintos, se llama grafo suma de G y H y se denota por $G + H$ al grafo obtenido tomando todos los vértices de G y H y uniéndolos mediante todas las posibles aristas que tengan su origen en un vértice de G y su extremo en un vértice de H, además de las aristas ya existentes en G y H.*

Si $V(G) = \{x_1, ..., x_k\}, V(H) = \{y_1, ..., y_r\}, E(G) = \{a_1, ..., a_n\}$ y $E(H) = \{b_1, ..., b_m\}$ se tiene que $V(G + H) = \{x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_r\}$ y $E(G + H) = \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_{kr}\}$con $\{c_1, ..., c_{kr}\} = \{x_iy_j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq r\}$.

Definición 1.19. *Sean G y H dos grafos. Se llama producto entrelazado y se denota por $G \bowtie H$ al grafo obtenido reemplazando todos los vértices de G por una copia de H y cuyas aristas son aquellas que unen vértices de dos copias entre sí, sólo si los vértices del grafo G original estaban relacionados.*

Muchas de las descomposiciones que se verán a lo largo de este trabajo surgen de la acción de una permutación sobre un subgrafo. La siguiente definición precisa este hecho:

Definición 1.20. *Sea σ una permutación del conjunto de vértices $V = V(G)$ de un grafo G. Para cualquier subconjunto U de V, σ actúa como una función de U a V considerando la restricción de σ a U. Si H es un subgrafo de G cuyo conjunto de vértices es U y verifica que si $xy \in E(H)$ entonces $\sigma(x)\sigma(y) \in E(G)$, entonces $\sigma(H)$ es un subgrafo de G. En este caso, $\sigma(H)$ tiene como conjunto de vértices $\sigma(U)$ y como conjunto de aristas $\{\sigma(x)\sigma(y) : xy \in E(H)\}$.*

Nótese que $\sigma(H)$ no tiene por qué estar definido para todos los subgrafos H de un grafo G, porque la imagen de una arista de $E(H)$ puede que no esté en $E(G)$. No obstante, si $G = K_n$, entonces $\sigma(H)$ está definido para todo subgrafo H de G, ya que K_n contiene todas las aristas posibles entre sus vértices.

Si un grafo G admite una descomposición en subgrafos H_i con $i \in \{1, ..., k\}$, se tiene que $G = H_1 \cup ... \cup H_k$, como ya se vio anteriormente. Se puede denotar tal descomposición como $\mathfrak{R} = \{H_1, ..., H_k\}$. Ahora bien, el objeto de estudio de este trabajo se centra también en un tipo particular de descomposiciones: las descomposiciones de carácter cíclico, que son aquellas obtenidas gracias a la acción de una permutación sobre uno de los subgrafos de la descomposición.

Definición 1.21. *Sea $\mathfrak{R} = \{H_1, ..., H_k\}$ una descomposición de un grafo G. Diremos que $\mathfrak{R}$ es una descomposición cíclica de G si existe una permutación σ tal que si $H \in \mathfrak{R}$ entonces $\sigma^i(H) \in \mathfrak{R}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$.*

Por tanto, a partir de un subgrafo de la descomposición se generan los restantes. Además, se verifica que $\sigma^k(H) = H$.

Capítulo 2

Descomposiciones de K_n en ciclos.

Antes de afrontar el problema de cómo puede descomponerse K_n en ciclos, hay que preguntarse qué deben verificar tanto el grafo como los ciclos para que esa descomposición sea posible. A continuación se presentan las condiciones necesarias que resuelven esta duda [16]:

Lema 2.1. *Si $C_m \mid K_n$, entonces:*

1. $3 \leq m \leq n$
2. *n es impar*
3. $n(n-1) \equiv 0 \mod 2m$

Demostración.

1. Trivial, ya que un ciclo debe tener al menos longitud 3, y no puede exceder del número total de vértices.
2. El grado de cada vértice en un ciclo es 2 (independientemente de la longitud del ciclo), de modo que el grado de cada vértice en K_n ($\delta(x) = n-1$ si $x \in V(K_n)$) debe ser par, lo que lleva a que n tiene que ser impar.
3. El número de aristas en K_n ($|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$) debe ser divisible por el número de aristas del ciclo C_m ($|E(C_m)| = m$), lo que nos lleva al resultado.

□

El ejemplo que se muestra a continuación ayuda a entender y permite visualizar la idea general de este capítulo para unos valores de n y m pequeños:

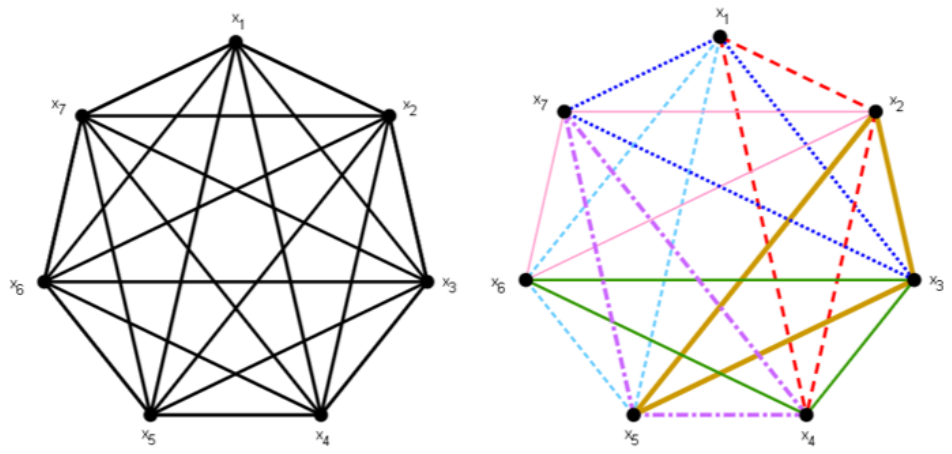


Figura 2.1: Descomposición de K_7 en ciclos disjuntos C_3 ($C_3 \mid K_7$).

La cuestión ahora es determinar si las condiciones necesarias para que K_n admita una descomposición en ciclos disjuntos C_m son también suficientes. Para hacerle frente, se van a analizar una serie de resultados que resuelven este hecho.

2.1. Descomposiciones de K_n en ciclos hamiltonianos.

Una primera idea de cómo afrontarlo es pensar en ciclos hamiltonianos, esto es, en el caso $m = n$. Parece una forma más sencilla, ya que en este caso los ciclos van a pasar por todos los vértices. Diremos que el grafo K_n posee una descomposición hamiltoniana si puede descomponerse en ciclos hamiltonianos disjuntos, esto es, si $C_n \mid K_n$.

En 1892, Lucas [13] acreditó a Walecki [1] el hecho de resolver el problema de las descomposiciones de grafos completos en ciclos para el caso $m = n$. Se muestra a continuación su construcción a partir del siguiente resultado:

Teorema 2.2. *El grafo completo K_n posee una descomposición hamiltoniana para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. El resultado es trivial para el caso $n = 3$, pues el grafo K_3 es isomorfo a C_3. Supongamos entonces que $n = 2m+1 > 3$ con $m \in \mathbb{N}$. Sea $V(K_n) = \{x_0, x_1, ..., x_{2m}\}$ el conjunto de los vértices de K_n. Sea C el ciclo hamiltoniano contenido en K_n definido como

$$C = \{x_0, x_1, x_2, x_{2m}, x_3, x_{2m-1}, x_4, x_{2m-2}, x_5, x_{2m-3}, ..., x_{m+3}, x_m, x_{m+2}, x_{m+1}, x_0\}$$

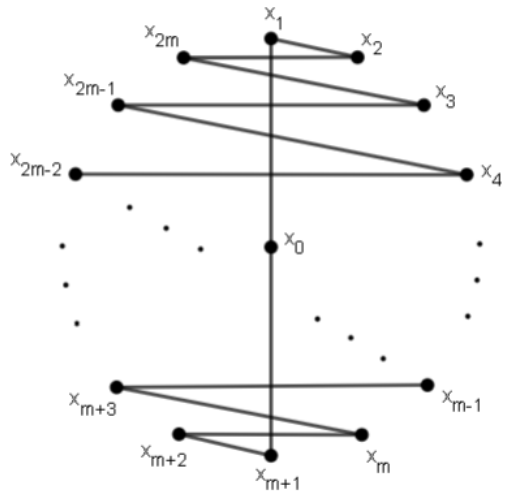


Figura 2.2: Construcción del ciclo hamiltoniano C.

Nótese que C tiene n aristas. La longitud de la arista $x_i x_j$ $(i, j \neq 0)$ es el valor $j - i \mod 2m$, cantidad que se encontrará en el conjunto $\{1, ..., m\}$. Sea σ la permutación $(x_0)(x_1 x_2 ... x_{2m})$ y sea $H_i = \sigma^i(C)$, para cada $i \in \{1, ..., m-1\}$ (se supone $C = H_0$). Por ejemplo, si $n = 7$, entonces $m = 3$, y se obtiene los tres siguientes ciclos tras aplicar dos veces σ:

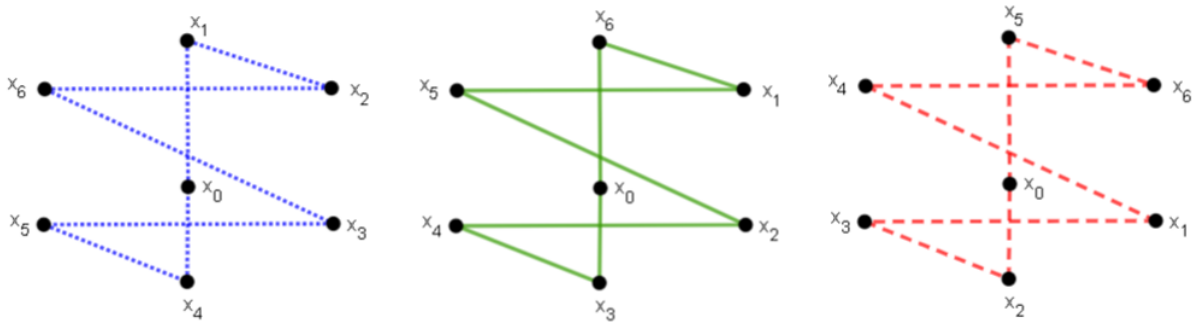


Figura 2.3: Acción de σ sobre los ciclos.

Se puede ver que σ actúa como una rotación de los vértices de K_n, obteniendo así ciclos con el mismo número de aristas y de igual longitud, pero extremos diferentes. Veamos cómo se clasifican las n aristas de C en función de sus longitudes:

- Una arista de longitud m, que es $x_i x_{i+m}$.
- Dos aristas incidentes a x_0, que son $x_0 x_{i+1}$ y $x_0 x_{m+i+1}$.
- Para cada r impar verificando $1 \leq r < m$, dos aristas de longitud r que son $x_{\frac{-r+3}{2}} x_{\frac{r+3}{2}}$ y $x_{\frac{2m-r+3}{2}} x_{\frac{2m+r+3}{2}}$.
- Para cada s par verificando $1 < s < m$, dos aristas de longitud s que son $x_{\frac{-s+2}{2}} x_{\frac{s+2}{2}}$ y $x_{\frac{2m-s+2}{2}} x_{\frac{2m+s+2}{2}}$.

Hay que recalcar que los subíndices de las aristas de longitud impar, par y m se toman $\mod 2m$, de modo que si en algún momento el subíndice resultase ser 0, se tomaría el valor $2m$ (ya que $2m \equiv 0 \mod 2m$), distinguiéndose así del vértice central x_0.

Como $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$ y C tiene n aristas, se necesitan m ciclos C_n para conseguir el mismo número de aristas. Estos ciclos se corresponden con $H_0, H_1, H_2, ..., H_{m-1}$. Falta ver que todos ellos son disjuntos, es decir, que no comparten ninguna arista. Para ello, supongamos que aplicamos al ciclo H_k, con $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$, la permutación σ^i, para algún $i \in \{1, ..., m-1\}$. Distinguimos varios casos, en función de las longitudes de las aristas de H_k:

- Aristas incidentes a x_0. Sean $a_1 = x_0 x_{k+1}$ y $a_2 = x_0 x_{m+k+1}$ las dos aristas incidentes a x_0 en H_k. Entonces $\sigma^i(a_1) = x_0 x_{k+1+i}$ y $\sigma^i(a_2) = x_0 x_{m+k+1+i}$. Para ver que son distintas se observa que en todos los posibles casos que se pueden dar si fuesen iguales se llega a una contradicción:

  - Si $k+1 = k+1+i \Rightarrow i = 0$ ó $2m$
  - Si $k+1 = m+k+1+i \Rightarrow i = 0$ ó m
  - Si $m+k+1 = k+1+i \Rightarrow i = m$
  - Si $m+k+1 = m+k+1+i \Rightarrow i = 0$ ó $2m$

  En todos los casos se llega a absurdos. Por tanto, todas las aristas incidentes a x_0 son distintas.

- Aristas de longitud m. Sea $a = x_k x_{k+m}$ la arista de longitud m del ciclo H_k (véase la imagen de la izquierda de la Figura 2.4). Se tiene que $\sigma^i(a) = x_{k+i}x_{k+m+i}$. La única manera de que ambas aristas coincidiesen, es que el vértice x_{k+i} fuese igual que el vértice x_{k+m}, lo cual implica que $i = m$, y llegamos a una contradicción. Por tanto, las aristas de longitud m no se repiten, y al igual que en K_n, hay en total m distintas.

- Aristas de longitud t con $1 \leq t \leq m-1$. Sean $b_1 = x_a x_{a+t}$ y $b_2 = x_{a+m}x_{a+m+t}$ las dos aristas de longitud t en el grafo H_k, con $a \in \{1, ..., 2m\}$ (véase la imagen de la derecha de la Figura 2.4). Se verifica que $\sigma^i(b_1) = x_{a+i}x_{a+t+i}$ y $\sigma^i(b_2) = x_{a+m+i}x_{a+m+t+i}$. Veamos que todas son distintas suponiendo que son iguales y llegando a una contradicción:

  - Si $x_{a+t+i} = x_{a+m} \Rightarrow i = m - t \Rightarrow \sigma^i(x_a) = \sigma^{m-t}(x_a) = x_{a+m-t} = x_{a+m+t} \Rightarrow t = 0$
  - Si $x_{a+t+i} = x_{a+t+m} \Rightarrow i = m$
  - Si $x_a = x_{a+i} \Rightarrow i = 2m$
  - Si $x_{a+t} = x_{a+i} \Rightarrow i = t \Rightarrow \sigma^t(x_{a+t}) = x_{a+t+t} = x_a \Rightarrow t = 0$ ó m.

  En todos los casos se llega a absurdos, por lo que todas las aristas son distintas.

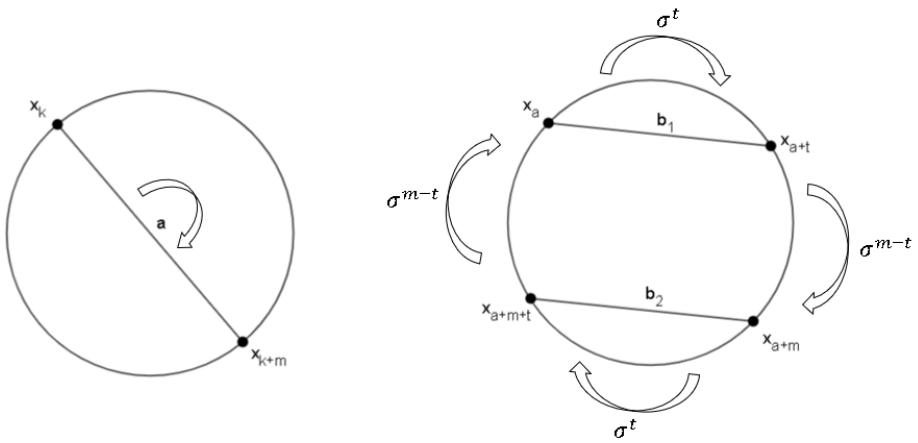


Figura 2.4: Aristas de longitud m (izquierda) y t (derecha) en H_k.

Por tanto, $\{C, \sigma(C), \sigma^2(C), ..., \sigma^{m-1}(C)\}$ es el conjunto de ciclos hamiltonianos que conforman la descomposición hamiltoniana de K_n. □

Observación 2.3. *Una vez obtenida una descomposición hamiltoniana de K_n, cualquier permutación $\tau \in S_n$ que actúe sobre los ciclos H_i proporciona otra descomposición hamiltoniana, en general distinta a la primera.*

Ejemplo 2.4. *Las siguientes imágenes ilustran cómo construir una descomposición de este tipo para el caso $n = 7$:*

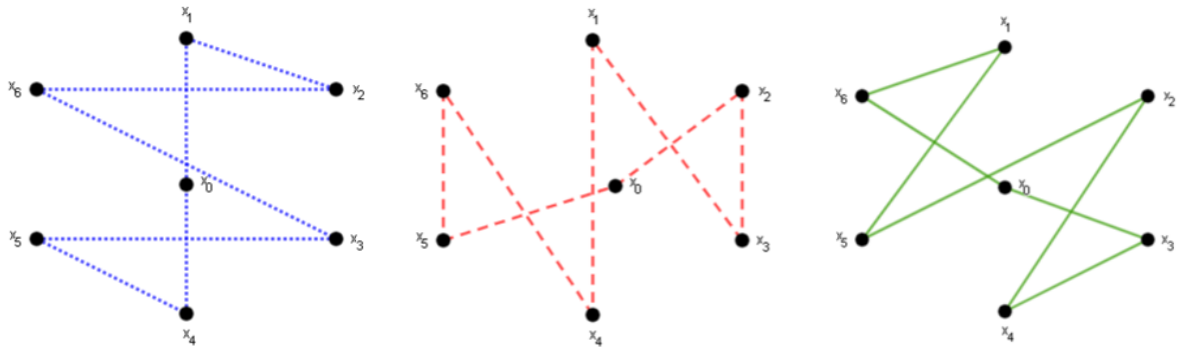


Figura 2.5: Construcción de C, $\sigma(C)$ y $\sigma^2(C)$ en K_7.

Obsérvese que el ciclo hamiltoniano C del teorema precedente se corresponde con el primer ciclo. Tras aplicarle la permutación $\sigma = (x_0)(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)$ se obtiene el ciclo del medio. Finalmente, el último ciclo se obtiene aplicando σ dos veces a C. Si se juntan los tres ciclos en un mismo grafo se obtiene el grafo K_7, completando de esta manera una descomposición hamiltoniana de éste, como se muestra en la siguiente figura:

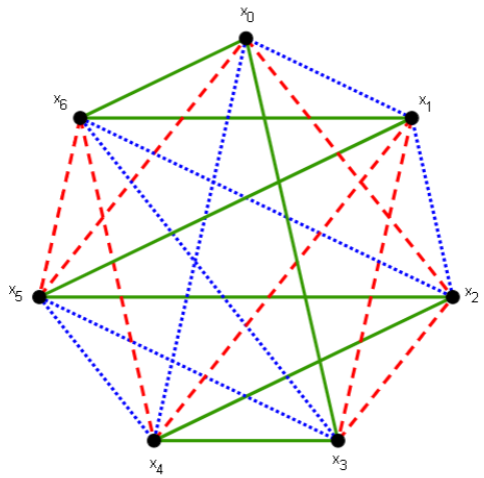


Figura 2.6: Descomposición de K_7 en ciclos hamiltonianos.

El caso par no puede resolverse así porque una de las condiciones necesarias es que n tiene que ser impar. No obstante, Walecki ofreció una descomposición en caminos para los grafos K_{2m}:

Corolario 2.5. *El grafo completo K_n puede descomponerse en caminos hamiltonianos para todo $n \in \mathbb{N}$ par.*

Demostración. Sea $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$. Basta obtener una descomposición hamiltoniana de K_{2m+1} y extraer un vértice y sus aristas incidentes. □

A diferencia de los ciclos, los caminos no tienen que ser necesariamente cerrados (esto es, el vértice en el cual se inicia el camino no tiene por qué ser igual al vértice donde termina).

Ejemplo 2.6. *En la siguiente imagen se observan las diferencias que supone la descomposición en caminos:*

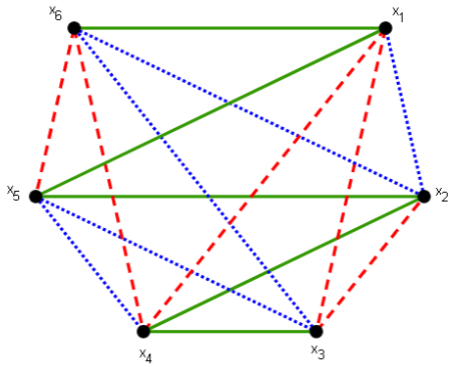


Figura 2.7: Descomposición de K_6 en caminos hamiltonianos.

Se parte del grafo completo K_7 al cual se le aplica una descomposición en ciclos hamiltonianos como la mostrada en la Figura 2.6. A continuación, se extrae el vértice x_0 junto a todas las aristas incidentes a él. De este modo, se tiene una descomposición de K_6 en tres caminos hamiltonianos que son:

$$C_1 = \{x_1, x_2, x_6, x_3, x_5, x_4\} \qquad C_2 = \{x_2, x_3, x_1, x_4, x_6, x_5\} \qquad C_3 = \{x_3, x_4, x_2, x_5, x_1, x_6\}$$

Se cumple que $C_2 = \sigma(C_1)$ y $C_3 = \sigma(C_2) = \sigma^2(C_1)$, siendo σ la permutación $\sigma = (x_1x_2x_3x_4x_5x_6)$.

2.2. Descomposiciones de K_n en C_m con m par.

El origen del problema de descomponer grafos completos en ciclos se remonta a mediados del siglo XIX. En 1847, T.P. Kirkman estableció que las condiciones necesarias para el caso $m = 3$ eran también suficientes. Además, fue precedido por Julius Plücker, quien discutió en sus libros lo que posteriormente se conocería como un sistema triple de Steiner. Como vimos en la sección precedente, en 1892 y gracias a las aportaciones de Walecki, se proporcionó solución al caso en que los ciclos fuesen hamiltonianos.

La siguiente contribución significante fue probar que para todo número par m y para cualquier $n \equiv 1 \mod 2m$, las condiciones necesarias para una descomposición de K_n en ciclos C_m eran además suficientes. Este resultado fue demostrado en un par de artículos. El primero en 1965 por Kotzig [11], que consideró el caso $m \equiv 0 \mod 4$. El segundo en 1966 por Rosa [14], que se centró en el caso $m \equiv 2 \mod 4$. En esta sección se analizarán ambos, ofreciendo detalles acerca de sus descomposiciones. En ambos casos se considera el grafo completo K_n, donde n es de la forma $n = 2km + 1$, con $k \in \mathbb{N}$.

En primer lugar nos centramos en Kotzig, quien ofreció respuesta a la pregunta de para qué valores de n existe una descomposición de K_n en ciclos C_{4p}. El siguiente teorema describe una forma de construir tal descomposición:

Teorema 2.7. *Sea n un número natural arbitrario impar y $m = 4p$ con n y $4p$ primos entre sí. Entonces $C_m \mid K_n$ si y sólo si $n \equiv 1 \mod 2m$.*

Demostración. Se demuestra en primer lugar la condición necesaria, esto es, que la descomposición de K_n en C_{4p} con n y $4p$ coprimos sólo existe si $n \equiv 1 \mod 8p$. Pero esto es trivial, pues n es impar, y por la tercera condición del Lema 2.1, el número de aristas de K_n tiene que ser divisible por $4p$. Por tanto se debe cumplir que:

$$\frac{1}{2}n(n-1) \equiv 0 \quad \text{mód } 4p \quad \text{entonces} \quad n(n-1) \equiv 0 \quad \text{mód } 8p$$

y como según las condiciones del teorema los números n y $4p$ son primos entre sí, debe ser $n \equiv 1$ mód $8p$.

Queda por demostrar que esta condición es suficiente. Sea $n = 2km + 1 = 8kp + 1$. Se denotan los vértices del grafo K_n por $V(K_n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Diremos que dos vértices arbitrarios x_i y x_j denotan el mismo vértice del grafo si $i \equiv j$ mód n. Diremos que la arista $h_{i,j}$, la cual conecta los vértices x_i y x_j, tiene longitud δ si $i - j \equiv \delta$ mód n. Por tanto, $\delta \in \{1, 2, ..., 4kp\}$. Además, se tiene que K_n tiene exactamente n aristas de longitud δ, para cada uno de sus posibles valores. Esto se debe a que cada vértice $x_i \in V(K_n)$ está conectado por medio de una arista con cada uno de los x_j restantes, con $j \in \{1, ..., n\}$, $j \neq i$. Por tanto, $i - j$ toma cada uno de los valores $\{1, 2, ..., 4kp\}$ exactamente dos veces. Como cada par de vértices comparte una arista, y $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$, habrá n aristas de cada tipo. Se define la matriz $Y = (y_{ij})$ de dimensión $k \times m$ del siguiente modo:

$$y_{ij} = \begin{cases} q-1 & si \quad j = 2q-1 \quad donde \quad q = 1, 2, ..., 2p \\ 4ip - r + 1 & si \quad j = 2r \quad donde \quad r = 1, 2, ..., p \\ 4ip - s & si \quad j = 2s \quad donde \quad s = p+1, p+2, ..., 2p \end{cases}$$

Si se analiza esta construcción de la matriz Y se observa que los primeros valores se corresponden con los lugares impares de la fila i-ésima, los segundos valores son los primeros p lugares pares, y los últimos se tratan de los p lugares pares restantes.

Sea ahora $x_v \in V(K_n)$. Denotamos por $Q_{i,v}$ al ciclo de longitud $4p$ de K_n cuyos vértices siguen el orden fijado en la secuencia $Q_{i,v} = \{x_{v+y_{i,1}}, x_{v+y_{i,2}}, ..., x_{v+y_{i,4p}}, x_{v+y_{i,1}}\}$. En efecto $Q_{i,v}$ es un ciclo ya que no se repite ningún vértice, pues la secuencia se construye a través de la fila i-ésima de la matriz Y, la cual no tiene valores repetidos ya que es de la forma:

$$\left(0, \quad 4ip, \quad 1, \quad 4ip-1, \quad 2, \quad ..., \quad p-1, \quad 4ip-p+1, \quad p, \quad 4ip-p-1, \quad ..., \quad 2p-1, \quad 4ip-2p\right).$$

Se deduce también de la construcción del ciclo a partir de esta fila que las longitudes de las aristas de K_n que conectan los vértices adyacentes de $Q_{i,v}$ forman la secuencia:

$$4ip, 4ip-1, ..., 4ip-2p+1, 4ip-2p-1, 4ip-2p-2, ..., 4ip-4p+1$$

y una arista de longitud $4ip - 2p$ que conecta el vértice $x_{v+y_{i,4p}}$ con $x_{v+y_{i,1}}$. Esto significa que las aristas del ciclo $Q_{i,v}$ tienen longitudes diferentes, y que las longitudes de las aristas de $Q_{i,v}$ forman el conjunto:

$$\{4(i-1)p+1, 4(i-1)p+2, ..., 4(i-1)p+4p\}$$

Por tanto, se tiene que $Q_{1,v}$ contiene aristas de longitud $1, 2, ..., 4p$, $Q_{2,v}$ contiene aristas de longitud $4p+1, 4p+2, ..., 8p$, y así sucesivamente hasta legar a $Q_{k,v}$, que contiene aristas de longitud $4p(k-1)+1, 4p(k-1)+2, ..., 4pk$.

Sea ahora σ la permutación que actúa sobre los vértices de K_n dada por $\sigma = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Se tiene que $Q_{i,v+j} = \sigma^j(Q_{i,v})$ para cada $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, donde los subíndices se toman

mód n. Las aristas del ciclo $\sigma^j(Q_{i,v})$ tienen las mismas longitudes que las aristas de $Q_{i,v}$. Esto es, dado $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, entonces la arista $x_{v+y_{i,z}} x_{v+y_{i,z+1}} \in E(Q(i,v))$, con $z \in \{1, 2, ..., m-1\}$ tiene la misma longitud que $x_{v+j+y_{i,z}} x_{v+j+y_{i,z+1}} \in E(\sigma^j(Q(i,v)))$. Además ambos ciclos son disjuntos, ya que sino se tendría que o bien

$$v + y_{i,z} \equiv v + j + y_{i,z} \quad \text{y} \quad v + y_{i,z+1} \equiv v + j + y_{i,z+1}, \quad \text{lo que implica} \quad j = 0$$

o bien

$$v + y_{i,z+1} \equiv v + j + y_{i,z} \quad \text{y} \quad v + y_{i,z} \equiv v + j + y_{i,z+1}, \quad \text{luego} \quad y_{i,z+1} \equiv j + y_{i,z} \equiv j + j + y_{i,z+1},$$

por lo que $2j \equiv 0$ mód n, que no puede ser pues n es impar. En ambos casos se llega a absurdos.

Por tanto, el conjunto:

$$Q = \{Q_{1,1}, ..., Q_{1,n}, Q_{2,1}, ..., Q_{2,n}, ..., Q_{k,1}, ..., Q_{k,n}\}$$

es una descomposición de K_n en ciclos C_{4p}.

□

Ejemplo 2.8. *Se muestra la descomposición de K_{17} en ciclos C_8 y C_4. Veamos cada caso por separado:*

- *En primer lugar se observa cómo $C_8 \mid K_{17}$. Se tiene que $k = 1$ y $p = 2$. Por tanto, la matriz Y es de la forma $Y = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 & 7 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Tomando el vértice x_1 se consigue $Q_{1,1} = \{x_1, x_9, x_2, x_8, x_3, x_6, x_4, x_5, x_1\}$. La descomposición buscada se consigue aplicando la permutación $\sigma = (x_1, x_2, ..., x_{17})$ un total de 16 veces sobre este ciclo.*

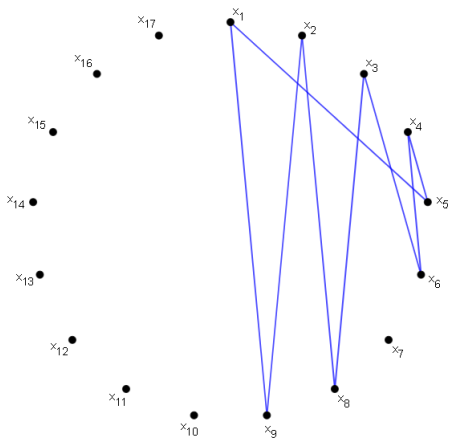


Figura 2.8: Ciclo C_8 inicial en la descomposición de K_{17}.

Enlace para ver esta descomposición: https://www.geogebra.org/m/qcbbnq4q

- *Por otro lado, se puede conseguir una descomposición de K_{17} en C_4. Para ello, como $k = 2$ y $p = 1$, se construye la matriz de dimensión 2×4*

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora, tomando de nuevo el vértice x_1, se forman los ciclos de longitud 4 siguientes:

$$Q_{1,1} = \{x_1, x_5, x_2, x_3, x_1\} \qquad\qquad Q_{2,1} = \{x_1, x_9, x_2, x_7, x_1\}$$

Del mismo modo que en el caso anterior, aplicando la permutación σ a ambos un total de 16 veces, obtenemos la descomposición deseada.

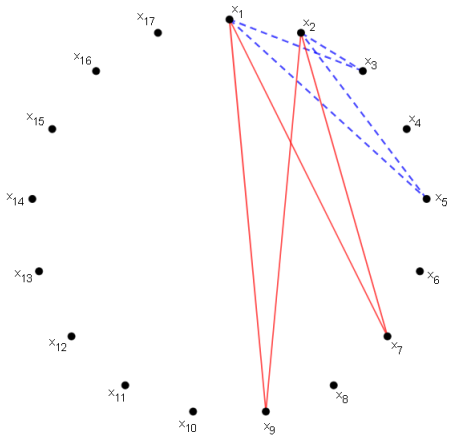


Figura 2.9: Ciclos C_4 iniciales en la descomposición de K_{17}.

Enlace para ver esta descomposición: https://www.geogebra.org/m/re8zghcx

Del Teorema 2.7 se deduce el siguiente resultado:

Corolario 2.9. *Sea $p > 1$ un número natural arbitrario. Entonces $C_{2^p} \mid K_n$ si y sólo si $n \equiv 1$ mód 2^{p+1}, $n > 1$.*

Con esto se finaliza la descomposición ofrecida por Kotzig. Queda abierto entonces el caso en el que $m \equiv 2$ mód 4, el cual se analiza a continuación, viendo que $C_m \mid K_n$ con $m = 4p + 2$, $p \in \mathbb{N}$. Este caso está atribuido al matemático Rosa. Para entender la demostración que aportó al resultado se necesita el siguiente teorema:

Teorema 2.10. *Sea k un número natural arbitrario, m un número de la forma $m = 4p + 2$, $p \in \mathbb{N}$, y sea $n = 2km+1$. Entonces existe una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $k \times m$ y constantes $\varepsilon_{ij} \in \{-1, +1\}$ de modo que*

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_{ij} \equiv 0 \quad \text{mód } n$$

para cada $i \in \{1, ..., k\}$.

Demostración. La matriz $A = (a_{ij})$ y las constantes ε_{ij} que satisfacen las condiciones del teorema están determinadas del siguiente modo:

$$a_{ij} = \begin{cases} (i-1)m + j & si \quad 1 \leq j \leq m-2 \\ (k-i+1)m - 1 & si \quad j = m-1 \\ (k-i+1)m & si \quad j = m \end{cases}$$

donde $\varepsilon_{i,4}$ es igual a -1 para todo $1 \leq i \leq k$ y todos los ε_{ij} restantes son iguales a +1 si $p = 1$; $\varepsilon_{i,4}$, $\varepsilon_{i,6}$, $\varepsilon_{i,7}$, $\varepsilon_{i,10}$, $\varepsilon_{i,11}$, $\varepsilon_{i,14}$, $\varepsilon_{i,15}$, ..., $\varepsilon_{i,m-4}$ y $\varepsilon_{i,m-3}$ son iguales a -1 y los restantes ε_{ij} son iguales a +1 si $p \geq 2$.

Hay que comprobar que se satisfacen las condiciones del teorema. Cada uno de los números $1, 2, ..., km$ aparece en la matriz A exactamente una vez. La fila i-ésima de dicha matriz es de la forma:

$$(i-1)m+1, (i-1)m+2, ..., im-4, im-3, im-2, (k-i+1)m-1, (k-1+1)m.$$

Distinguimos los dos posibles casos:

- Si $p = 1$:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_{ij} = [(i-1)m+1]+[(i-1)m+2]+[(i-1)m+3]-[(i-1)m+4]+[(k-i+1)m-1]+$$

$$+[(k-i+1)m] = 2(i-1)m+2+2(k-i+1)m-1 = 2km+1 = n$$

- Si $p \geq 2$:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_{ij} = [(i-1)m+1]+[(i-1)m+2]+[(i-1)m+3]-[(i-1)m+4]+[(i-1)m+5]-$$

$$-[(i-1)m+6]-[(i-1)m+7]+[(i-1)m+8]+[(i-1)m+9]-[(i-1)m+10]-[(i-1)m+11]+$$

$$+[(i-1)m+12]+...+(im-5)-(im-4)-(im-3)+(im-2)+[(k-i+1)m-1]+[(k-i+1)m] =$$

$$= 2(i-1)m+2+(k-i+1)m-1+(k-i+1)m = 2km+1 = n$$

□

Tanto la matriz A como la matriz formada por las constantes ε_{ij}, la cual se denotará por E, serán muy importantes a la hora de construir los ciclos que componen la descomposición que se muestra en el siguiente resultado:

Teorema 2.11. *Sea k un número natural arbitrario y sea m otro número arbitrario de la forma $m = 4p+2$, con $p \in \mathbb{N}$. Entonces existe una descomposición cíclica del grafo K_{2km+1} en ciclos C_m.*

Demostración. Sean C_j, $1 \leq j \leq k$, k ciclos del grafo completo K_{2km+1} con m aristas cada uno, de la forma siguiente:

$$C_j = \{v_{i_{j1}}, v_{i_{j2}}, v_{i_{j3}}, ..., v_{i_{jm}}, v_{i_{j1}}\}, \quad \{i_{j1}, ..., i_{jm}\} \subset \{1, 2, ..., 2km+1\}, \quad j \in \{1, 2, ..., k\}$$

Se define del mismo modo que en el Teorema 2.2 la longitud de una arista como el valor $j - i$ mód $2m$. Si todas las aristas del conjunto de ciclos $C_1, C_2, ..., C_k$ tienen distinta longitud, o equivalentemente si cada una de las posibles longitudes $1, 2, ..., km$ del grafo K_{2km+1} es la longitud de exactamente una de las km aristas de los ciclos $C_1, ...C_k$, entonces se llama sistema básico de tamaño m en el grafo K_{2km+1} al sistema de ciclos de longitud m $K = \{C_1, ..., C_k\}$. Se obtiene una descomposición cíclica de K_{2km+1} en C_m si cada uno de los ciclos de K es rotado sucesivamente $2km$ veces por medio de una permutación.

El sistema básico de ciclos en el grafo K_{2km+1} se puede determinar con la ayuda de la matriz dada en el Teorema 2.10. Esto se debe a que contiene todos los números desde 1 hasta km, es decir, en ella están todas las longitudes de las aristas de K_{2km+1}. Sea $A = (a_{ij})$ dicha matriz y sea $E = (\varepsilon_{ij})$ la correspondiente matriz de constantes. Los elementos de la matriz E indican cómo dirigir la arista en el ciclo, siendo el sentido horario si el correspondiente elemento es +1, y antihorario si es -1. La siguiente imagen precisa este hecho para los cuatro primeros valores de ε:

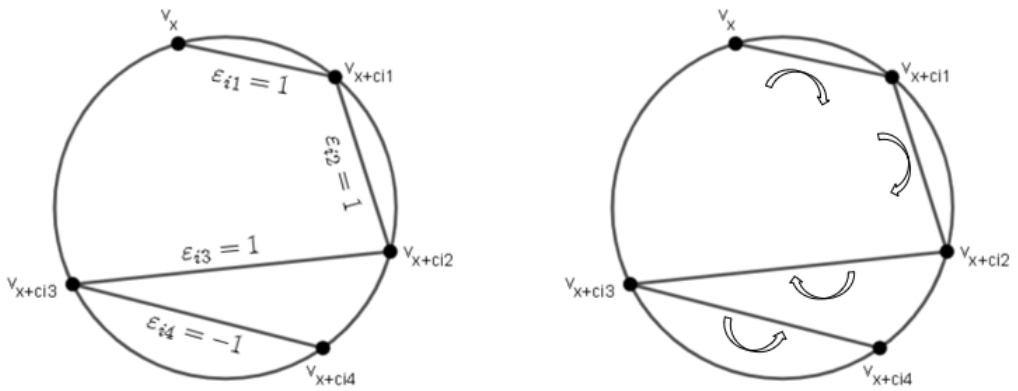


Figura 2.10: Sentido de orientación de las aristas en función de los valores ε_{ij}.

Denotamos por A' y E' las matrices que surgen a partir de las matrices A y E si los elementos de cada fila de las matrices A y E se permutan cuando $p \geq 2$ por la permutación σ definida del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 2p+2 & 2p+3 & 2p+4 & 2p+5 & \dots & 4p & 4p+1 & 4p+2 \\ 1 & \dots & 5 & 4p+1 & 4p-1 & 4p-3 & \dots & 9 & 7 & 4p & 4p-2 & \dots & 8 & 6 & 4p+2 \end{pmatrix}$$

La matriz A' satisface las condiciones del Teorema 2.10 con las constantes ε'_{ij}, ya que la permutación simplemente intercambia el orden de algunas de las columnas de ambas matrices, y por tanto se tiene que $\sum_{j=1}^{m} a'_{ij}\varepsilon'_{ij} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\varepsilon_{ij}$.

Sea $v_x \in V(K_{2km+1})$ un vértice arbitrario del grafo. El ciclo C_i se define de la siguiente forma:

$$C_i = \{v_x, v_{x+c_{i1}}, v_{x+c_{i2}}, ..., v_{x+c_{i,m-1}}, v_x\},$$

donde $c_{ij} = \sum_{v=1}^{j} a'_{iv}\varepsilon'_{iv}$, $i = 1, ..., k$; $j = 1, ..., m$.

Se tiene que $v_{x+c_{ij}}$ es el vértice que se encuentra a distancia a'_{ij} de v_x. El último vértice se corresponde con $v_{x+c_{im}}$, y como $c_{im} = \sum_{v=1}^{m} a'_{iv}\varepsilon'_{iv} = n$, entonces $v_{x+c_{im}} = v_x$, consiguiendo así el ciclo.

El motivo por el que hay que permutar es que a la hora de construir los ciclos, los valores c_{ij} calculados con los elementos de las matrices A y E se repiten, surgiendo así un ciclo que pasa dos veces por un mismo vértice, hecho que no puede ocurrir. Por tanto, tras la permutación de las matrices se verifica que ningún vértice aparece en la secuencia de los vértices de C_i más de dos veces. Se comprueba que este hecho es equivalente a que ninguna pareja de números a, b, tales que $a \equiv b \mod 2km+1$, aparecen en la siguiente secuencia de m números, que se corresponden con los valores de los elementos c_{ij}:

$$(i-1)m+1, 2(i-1)m+3, 3(i-1)m+6, 2(i-1)m+2, 3(i-1)m+7, m(2i+k-2)+6,$$
$$m(i+k-2)+9, m(2i+k-2)+4, m(i+k-2)+11, ..., m(i+k-2)+2p+3, m(2i+k-3)+2p+12,$$
$$m(i+k-2)+2p+5, m(2i+k-2)+2p+3, m(i+k-2)+2p+7, m(2i+k-2)+2p+1,$$
$$m(i+k-2)+2p+9, ..., m(i+k-1)-1, m(2i+k-2)+7, m(i+k-1)+1, 2km+1.$$

Por tanto, se obtiene que no se repite ninguna arista y se consigue así la descomposición cíclica buscada de K_{2km+1} en $k(2km+1)$ ciclos de longitud m. □

Ejemplo 2.12. *Se muestra cómo conseguir la descomposición del grafo completo K_{41} en C_{10}. Se tiene que $m = 10$, $p = 2$ y $k = 2$. Por tanto, las matrices A y E tienen dimensión 2×10, y son las siguientes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 19 & 20 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $\sum_{j=1}^{10} a_{ij}\varepsilon_{ij} = 41$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Como $p = 2$, hay que aplicar la permutación σ de la demostración del Teorema 2.11 a las matrices A y E, ya que sino se tendrían los siguientes valores c_{ij}:

$$c_{1j} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 1 & 35 & 2 & 21 & 41 \end{pmatrix}$$

$$c_{2j} = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 36 & 22 & 37 & 21 & 4 & 22 & 31 & 41 \end{pmatrix}$$

En ambas filas se repiten números, lo cual haría que se repitiesen vértices por lo que no conseguiríamos los ciclos deseados. Se necesitan por tanto las siguientes matrices A' y E':

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 19 & 7 & 8 & 6 & 20 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 9 & 17 & 18 & 16 & 10 \end{pmatrix}$$

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener los ciclos C_1 y C_2 del sistema básico de tamaño 10 se utilizan los valores $c_{ij} = \sum_{v=1}^{j} a'_{iv}\varepsilon'_{iv}$, que son:

$$c_{1j} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 & 7 & 26 & 19 & 27 & 21 & 41 \end{pmatrix}$$

$$c_{2j} = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 36 & 22 & 37 & 5 & 29 & 6 & 31 & 41 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se obtienen los ciclos C_1 y C_2, que partiendo del vértice v_1 son los siguientes:

$$C_1 = \{v_1, v_2, v_4, v_7, v_3, v_8, v_{27}, v_{20}, v_{28}, v_{22}, v_1\}$$

$$C_2 = \{v_1, v_{12}, v_{24}, v_{37}, v_{23}, v_{38}, v_6, v_{30}, v_7, v_{32}, v_1\}$$

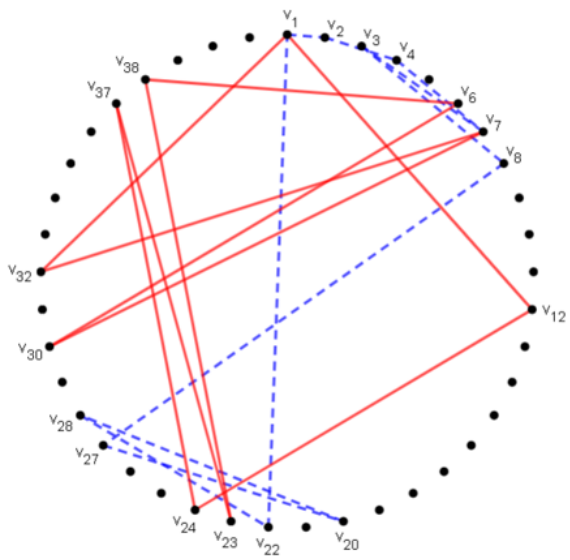


Figura 2.11: Ciclos del sistema básico de longitud 10 C_1 y C_2 en K_{41}.

La descomposición de K_{41} en C_{10} se consigue rotando 40 veces ambos ciclos.

Enlace para ver esta descomposición: https://www.geogebra.org/m/grsv6k7e

Rosa también comenzó el caso en el que m es impar y $n \equiv 1$ o $m \mod 2m$, y fue Jackson quien lo completó en 1988, mostrando que las condiciones necesarias eran también suficientes. Los resultados de estos dos matemáticos solucionaron el problema para el caso en el que m es una potencia prima impar.

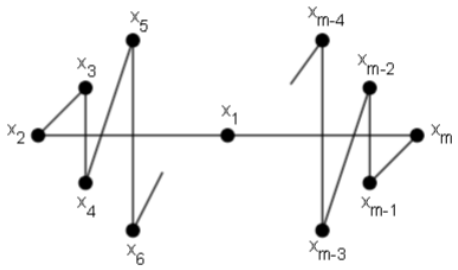
2.3. Descomposiciones de K_n en ciclos de longitud $2p^e$.

Otra de las aportaciones al problema fue la determinación de una solución para el caso en el que m fuese una potencia de un número primo multiplicada por 2. Esto fue uno de los trabajos de Alspach y Varma [3], los cuales se centraron en la descomposición del grafo completo K_n en ciclos de longitud $2p^e$, probando que las condiciones necesarias son también suficientes.

Para la demostración del teorema principal harán falta varios resultados. Se dará un esquema general de sus demostraciones ofreciendo las ideas esenciales. Además, en el anexo de este trabajo se muestran ejemplos con el objetivo de detallar explícitamente esta descomposiciones.

Teorema 2.13. *Si $m > 0$ y $m \equiv 3 \mod 4$, entonces $C_{2m} \mid K_{3m}$.*

Demostración. En primer lugar, se dividen los vértices de K_{3m} en tres conjuntos disjuntos de cardinal m, esto es, $V(K_{3m}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ donde $V_j = \{x_{ij} : 1 \leq i \leq m\}$ para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. Sea σ la permutación que actúa sobre los vértices de K_{3m} definida como $\sigma(x_{ij}) = x_{i,j+1} \mod 3$ con $1 \leq i \leq m$ y $j \in \{1, 2, 3\}$. Sea ahora $\{C^t : 1 \leq t \leq \frac{m-1}{2}\}$ el conjunto de ciclos hamiltonianos que completan la descomposición hamiltoniana de K_m del Teorema 2.2. Como es una descomposición de carácter cíclico, los ciclos se consiguen utilizando la permutación $\tau = (x_2, x_3, x_5, ..., x_{m-2}, x_m, x_{m-1}, x_{m-3}, ..., x_6, x_4)$ y obteniendo rotaciones sucesivas del ciclo C^1, el cual se corresponde con el ciclo de la siguiente imagen (nótese que es justamente el ciclo base de la construcción de Walecki):

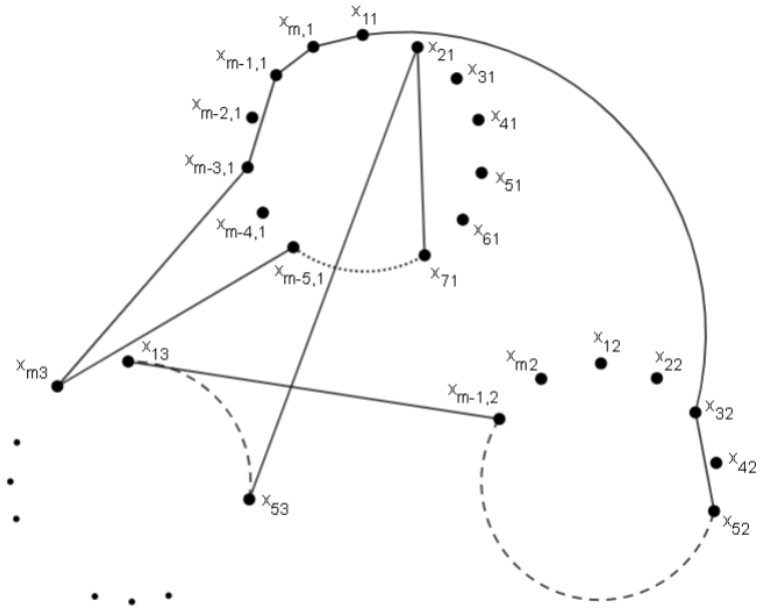


Como $m \equiv 3 \mod 4$, hay un número impar de ciclos hamiltonianos. Se emparejan estos ciclos de modo que cada par esté formado por dos rotaciones sucesivas del ciclo de la imagen anterior, empezando por C^1 (es decir, C^1 con C^2, C^3 con C^4, etc). Falta por emparejar el ciclo $C^{(m-1)/2}$, el cual se empleará más adelante. Hay por tanto un total de $\frac{m-3}{4}$ parejas.

Ahora bien, con cada pareja de ciclos se forma un ciclo en K_{3m} de longitud $2m$, de tal modo que el primer subíndice de los vértices contenidos en él va siguiendo el orden que marcan los subíndices de los vértices del par de ciclos hamiltonianos. Veamos esto con un ejemplo tomando la primera pareja de ciclos, los cuales son

$$C^1 = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{m-1}, x_m, x_1\} \text{ y } C^2 = \{x_1, x_3, x_5, x_2, x_7 x_4 x_9, ..., x_{m-5}, x_m, x_{m-3}, x_{m-1}, x_1\}$$

Estos dos ciclos permiten construir el ciclo C^* de la siguiente manera:



$$C^* = \{x_{11}, x_{32}, x_{52}, x_{62}, x_{72}, ..., x_{m-1,2}, x_{13}, x_{23}, ..., x_{53}, x_{21}, x_{71}, x_{41}, \\ x_{91}, ..., x_{m-5,1}, x_{m3}, x_{m-3,1}, x_{m-1,1}, x_{m1}, x_{11}\}$$

Las líneas rayadas son caminos desde x_{ij} hasta x_{kj} donde el primer índice cambia desde i hasta k teniendo en cuenta el ciclo C^1 y la línea punteada desde x_{71} hasta $x_{m-5,1}$ corresponde a un camino desde x_{71} hasta $x_{m-5,1}$ donde el primer índice cambia teniendo en cuenta el ciclo C^2

desde x_7 hasta x_{m-5}. Tanto en la línea punteada como en las líneas rayadas, los segundos índices se mantienen en todo momento constantes. Finalmente, las líneas normales corresponden a aristas de K_{3m} que son incluidas para completar el orden en los subíndices marcado por el ciclo C^1 ($x_{m1}x_{11}$) o C^2 ($x_{11}x_{32}, x_{32}x_{52}, x_{53}x_{21}, x_{21}x_{71}$,...) que faltaban por añadir.

Nótese que C^* tiene como primer subíndice cada uno de los valores $1, 2, ..., m$ exactamente dos veces, por lo que efectivamente la longitud del ciclo es $2m$. Si aplicamos la permutación σ dos veces a este ciclo, se verifica que C^*, $\sigma(C^*)$ y $\sigma^2(C^*)$ son tres ciclos disjuntos de longitud $2m$, ya que no tienen aristas en común por cómo está construido el ciclo. Además, los subíndices de los vértices relacionados por las aristas de los ciclos obtenidos tras permutar también siguen el orden marcado por los ciclos C^1 y C^2, como se mencionó anteriormente. De este modo, se han logrado construir tres ciclos a partir de la primera pareja. Si se sigue el mismo procedimiento con el resto de parejas, se consiguen un total de $3 \cdot \frac{m-3}{4}$ ciclos de longitud $2m$ en K_{3m}, los cuales son disjuntos debido a que los subíndices de los vértices involucrados en cada uno de ellos seguirán diferentes órdenes marcados por los distintos ciclos hamiltonianos.

Sea ahora $x_{ij}x_{i'j'}$ una arista cualquiera del ciclo C^* siguiendo el orden del ciclo C^1. Llamaremos aristas restantes del ciclo C^* siguiendo el orden de C^1 al conjunto de aristas $\{x_{ij}x_{i',j^*} : j^* \neq j'\}$. Como $j \in \{1, 2, 3\}$, se tiene que cada arista de C^* siguiendo el orden de C^1 proporciona dos aristas restantes, que serán $x_{ij}x_{i',j'+1}$ y $x_{ij}x_{i',j'+2}$ (donde los segundos subíndices se toman mód 3). Como el ciclo hamiltoniano tiene longitud m, habrá m aristas en C^* siguiendo su orden, de modo que el cardinal del conjunto de aristas restantes es $2m$. Siguiendo este razonamiento con el otro ciclo de la pareja, se obtienen otras $2m$ aristas restantes. Del mismo modo, si se razona igual con los ciclos $\sigma(C^*)$ y $\sigma^2(C^*)$, se obtienen otras $8m$ aristas restantes. En total, habrá $12m$ aristas restantes. La finalidad de obtener estas aristas es que con ellas se pueden forman un total de $\frac{12m}{2m} = 6$ nuevos ciclos disjuntos de longitud $2m$ (ver Ejemplo A.1 en el Anexo). Como hay un total de $\frac{m-3}{4}$ parejas, y hemos visto que con cada una se obtienen 6 ciclos mediante el uso de las aristas restantes, se consiguen otros $6 \cdot \frac{m-3}{4}$ ciclos disjuntos de longitud $2m$ en total.

Finalmente se emplea el ciclo $C^{(m-1)/2}$. Se define $\alpha(i)$ como el vértice i-ésimo del ciclo $C^{(m-1)/2}$ empezando por x_1. Se define el ciclo C del siguiente modo:

$$C = \{x_{11}, x_{12}, x_{\alpha(2),2}, x_{\alpha(2),1}, x_{\alpha(3),1}, x_{\alpha(3),2}, x_{\alpha(4),2}, ..., x_{\alpha(m-1),2}, x_{\alpha(m-1),3}, x_{\alpha(m),3}, x_{\alpha(m),1}, x_{1,1}\}$$

Los ciclos C, $\sigma(C)$ y $\sigma^2(C)$ tienen todos longitud $2m$ y son disjuntos, por lo que hemos conseguido 3 nuevos ciclos a partir del último ciclo hamiltoniano. Las aristas restantes a estos tres ciclos que siguen el orden del ciclo $C^{(m-1)/2}$ son un total de $6m$ aristas, por lo que se puede formar con ellas $\frac{6m}{2m} = 3$ ciclos disjuntos más de longitud $2m$, los cuales pueden construirse de la siguiente manera:

$$C_{ij} = \{x_{1i}, x_{\alpha(2)j}, x_{\alpha(3)i}, x_{\alpha(4)j}, ..., x_{\alpha(m-1)j}, x_{\alpha(m)i}, x_{1j}, x_{\alpha(2)i}, ..., x_{\alpha(m-1)i}, x_{\alpha(m)j}, x_{1i}\}$$

con $i \in \{1, 2\}$ y $j \in \{2, 3\}$ fijos tales que $j > i$.

Se verifica que en total hay $3 \cdot \frac{m-3}{4} + 6 \cdot \frac{m-3}{4} + 6$ ciclos disjuntos de longitud $2m$. Veamos ahora que son justamente los que se necesitan. Debe haber un total de $\frac{|E(K_{3m})|}{2m}$ ciclos. Esto es:

$$\frac{|E(K_{3m})|}{2m} = \frac{\frac{3m(3m-1)}{2}}{2m} = \frac{9m-3}{4} \quad \text{ciclos.}$$

Efectivamente son los que se han conseguido, ya que

$$3 \cdot \frac{m-3}{4} + 6 \cdot \frac{m-3}{4} + 6 = \frac{3m - 9 + 6m - 18 + 24}{4} = \frac{9m-3}{4} \quad \text{ciclos.}$$

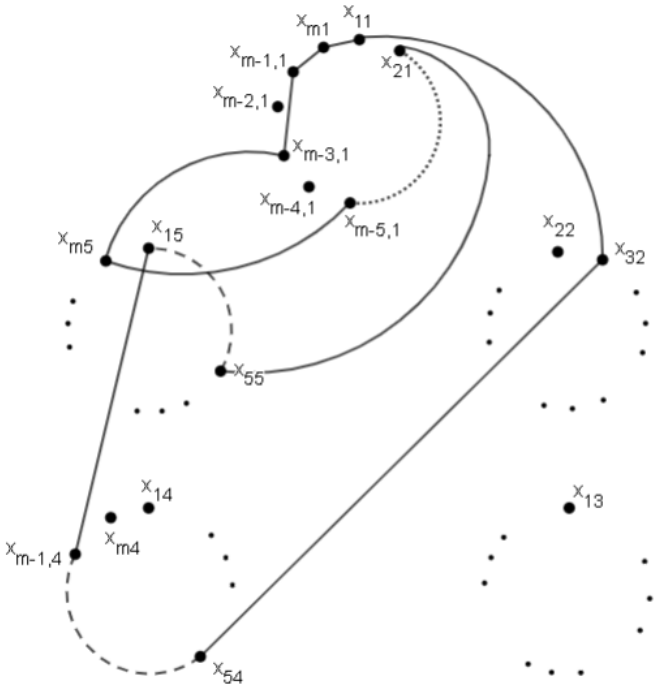
□

El siguiente resultado es bastante similar al precedente, por lo que su construcción sigue una estrategia bastante parecida a la que se acaba de mostrar:

Teorema 2.14. *Si $m > 0$ y $m \equiv 1 \mod 4$, entonces $C_{2m} \mid K_{5m}$.*

Demostración. La demostración es similar a la del teorema precedente, por lo que se omiten algunos detalles por su similitud a los explicados anteriormente. En primer lugar, se dividen los vértices de K_{5m} en cinco conjuntos disjuntos de cardinal m, esto es, $V(K_{5m}) = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_5$ donde $V_j = \{x_{ij} : 1 \leq i \leq m\}$ para cada $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sea σ la permutación que actúa sobre $V(K_{5m})$ definida como $\sigma(x_{ij}) = x_{i,j+1} \mod 5$ con $1 \leq i \leq m$ y $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sea ahora $\{C^t : 1 \leq t \leq \frac{m-1}{2}\}$ el conjunto de ciclos hamiltonianos que completan la descomposición hamiltoniana de K_m del Teorema 2.2. Como $m \equiv 1 \mod 4$, hay un número par de ciclos de este tipo. Se emparejan estos ciclos excepto los dos últimos ($C^{(m-3)/2}$ y $C^{(m-1)/2}$) de modo que cada par esté formado por dos rotaciones sucesivas del primer ciclo hamiltoniano de la descomposición, empezando por C^1 (es decir, C^1 con C^2, C^3 con C^4, etc). Los dos ciclos que quedan sin emparejar se emplearán más adelante. Hay por tanto un total de $\frac{m-5}{4}$ parejas.

Con cada pareja de ciclos se forma un ciclo en K_{5m} de longitud $2m$ de tal modo que el primer subíndice de los vértices contenidos en él va siguiendo el orden que marcan los subíndices de los vértices del par de ciclos hamiltonianos. Se toma de ejemplo la primera pareja, formada por los ciclos C^1 y C^2. Con ellos se permite construir el ciclo C^* de la siguiente manera:



$$C^* = \{x_{11}, x_{32}, x_{54}, x_{64}, x_{74}, ..., x_{m-1,4}, x_{15}, x_{25}, ..., x_{55}, x_{21}, x_{71}, x_{41}, \\ x_{91}, ..., x_{m-5,1}, x_{m5}, x_{m-3,1}, x_{m-1,1}, x_{m1}, x_{11}\}$$

Los convenios de las aristas rayadas, punteadas y normales son los mismos que en la demostración anterior. Si aplicamos la permutación σ cuatro veces a este ciclo, se verifica que C^*, $\sigma(C^*)$,

$\sigma^2(C^*)$, $\sigma^3(C^*)$ y $\sigma^4(C^*)$ son cinco ciclos disjuntos de longitud $2m$, ya que no tienen aristas en común por cómo esta construido el ciclo. Por tanto, como hay $\frac{m-5}{4}$ parejas de ciclos hamiltonianos y por cada una se obtienen 5 ciclos disjuntos de longitud $2m$, en total habrá $5 \cdot \frac{m-5}{4}$ ciclos.

Se obtienen ahora las aristas restantes de cada uno de esos ciclos que siguen el orden marcado por cada uno de los ciclos hamiltonianos de la pareja. Se cumple que cada arista proporciona cuatro aristas restantes. Por cada ciclo hamiltoniano, se obtienen $20m$ aristas restantes, por lo que en total hay $40m$ aristas restantes, con las que se pueden formar $\frac{40m}{2m} = 20$ nuevos ciclos disjuntos de longitud $2m$ (ver Ejemplo A.2 en el Anexo). Ahora bien, como hay $\frac{m-5}{4}$ parejas de ciclos, y hemos visto que con cada una se obtienen 20 nuevos ciclos, habrá un total de $20 \cdot \frac{m-5}{4}$ ciclos disjuntos de longitud $2m$.

Finalmente se emplean los ciclos $C^{(m-3)/2}$ y $C^{(m-1)/2}$. Se define $\alpha(i)$ como el vértice i-ésimo del ciclo hamiltoniano correspondiente empezando por x_1. Se define el ciclo C del siguiente modo:

$$C = \{x_{11}, x_{12}, x_{\alpha(2),2}, x_{\alpha(2),1}, x_{\alpha(3),1}, x_{\alpha(3),2}, ..., x_{\alpha(m-3),2}, x_{\alpha(m-3),3}, x_{\alpha(m-2),3}, \\ x_{\alpha(m-2),4}, x_{\alpha(m-1),4}, x_{\alpha(m-1),5}, x_{\alpha(m),5}, x_{\alpha(m),1}, x_{11}\}$$

Los ciclos C, $\sigma(C)$, $\sigma^2(C)$, $\sigma^3(C)$ y $\sigma^4(C)$ tienen todos longitud $2m$ y son disjuntos, por lo que hemos conseguido cinco nuevos ciclos a partir de cada uno de los ciclos hamiltonianos que faltaban por emplear, luego en total son diez. Las aristas restantes a estos diez ciclos que siguen el orden de los ciclos $C^{(m-3)/2}$ y $C^{(m-1)/2}$ son un total de $40m$ aristas, por lo que se puede formar con ellas $\frac{40m}{2m} = 20$ ciclos disjuntos más de longitud $2m$. Los diez ciclos que siguen el orden de cada ciclo hamiltoniano pueden construirse de la siguiente manera:

$$C_{ij} = \{x_{1i}, x_{\alpha(2)j}, x_{\alpha(3)i}, x_{\alpha(4)j}, ..., x_{\alpha(m-1)j}, x_{\alpha(m)i}, x_{1j}, x_{\alpha(2)i}, ..., x_{\alpha(m-1)i}, x_{\alpha(m)j}, x_{1i}\}$$

con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ fijos tales que $j > i$.

Se verifica que en total hay $5 \cdot \frac{m-5}{4} + 20 \cdot \frac{m-5}{4} + 30$ ciclos disjuntos de longitud $2m$. Veamos ahora que son justamente los que se necesitan. Debe haber un total de $\frac{|E(K_{5m})|}{2m}$ ciclos. Esto es:

$$\frac{|E(K_{5m})|}{2m} = \frac{\frac{5m(5m-1)}{2}}{2m} = \frac{25m-5}{4} \quad \text{ciclos.}$$

Efectivamente son los que se han conseguido, ya que

$$5 \cdot \frac{m-5}{4} + 20 \cdot \frac{m-5}{4} + 30 = \frac{5m - 25 + 20m - 100 + 120}{4} = \frac{25m-5}{4} \quad \text{ciclos.}$$

□

Finalmente, será necesaria una descomposición del grafo completo bipartito $K_{n,m}$, la cual fue proporcionada por Sotteau [17]. Para su demostración sólo se indicarán los ciclos que consiguen la descomposición.

Teorema 2.15. *Sean m, n y k enteros positivos. Entonces $C_{2k} \mid K_{m,n}$ si y sólo si m y n son pares, $m \geq k$, $n \geq k$ y $2k|mn$.*

Demostración. Las condiciones necesarias para que $C_{2k} \mid K_{m,n}$ sea posible son:

1. $m \geq k$, $n \geq k$.

2. El grado de cada vértice tiene que ser par, por lo que m y n tienen que ser pares.
3. El número de aristas de $K_{m,n}$ (que es mn) tiene que ser un múltiplo del número de aristas del ciclo C_{2k} (que es $2k$).

Por tanto, el resto de la demostración se centra en mostrar que además estas condiciones son suficientes. Ahora bien, sea $k = pq$, $m = rp$ y $n = sq$. Aplicando las condiciones se verifica lo siguiente:

- $m \geq k \Rightarrow rp \geq pq \Rightarrow r \geq q$
- $n \geq k \Rightarrow sq \geq pq \Rightarrow s \geq p$
- $m = rp$ y $n = sq$ son pares.
- Como $2k \mid mn \Rightarrow 2pq \mid rpsq \Rightarrow 2 \mid rs$, por lo que rs también es par.

Se distinguen por tanto los siguientes casos:

Caso 1. Al menos unos de los dos números p y q es par, y por tanto puede ocurrir que:

- Subcaso (a). q y r son pares. La descomposición de $K_{rp,sq}$ en C_{2pq} está determinada por los siguientes $rs/2$ ciclos:

$$C_{\lambda\mu} = (\cdots(\cdots x_{(2\mu+i)p+j} y_{(\lambda+j)q+i} \cdots)_{0\leq i\leq q-1})_{0\leq j\leq p-1}$$

  con $0 \leq \lambda \leq s-1$ y $0 \leq \mu \leq r/2-1$. Los subíndices de x e y se toman módulo m y n (ver Ejemplo A.3 en el Anexo).

- Subcaso (b). p y s son pares. La prueba es similar al subcaso (a) intercambiando los subíndices correspondientes de m y n.

Caso 2. p y q son impares. Esto implica que r y s son pares. Se distinguen también dos posibles casos:

- Subcaso (a). Si $p > 1$ y $q > 1$, entonces la descomposición de $K_{m,n}$ en ciclos de longitud $2pq$ está dada por los $rs/2$ ciclos $C_{\lambda\mu}$, con $0 \leq \lambda \leq s/2-1$ y $0 \leq \mu \leq r/2-1$, y $C'_{\lambda\mu}$, con $s/2 \leq \lambda \leq s-1$ y $0 \leq \mu \leq r/2-1$, los cuales están determinados del siguiente modo:

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu} = {} & (\cdots(x_{(2\mu+j)p+i}\ y_{(\lambda+i)q+j} \cdots)_{0\leq j\leq q-2}\ x_{(2\mu+q-1)p+i}\ y_{c_{i\lambda}})_{0\leq i\leq p-2} \\ & (\cdots x_{(2\mu+j)p+p-1}\ y_{(p-1+\lambda)q+j} \cdots)_{0\leq j\leq q-3}\ x_{(q-2+2\mu)p+p-1} \\ & y_{b_\lambda}\ x_{(q-1+2\mu)p+p-1}\ y_{d_\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C'_{\lambda\mu} = {} & (\cdots x_{(2\mu+j+1)p}\ y_{\lambda q+j} \cdots)_{0\leq j\leq q-3}\ x_{(q-1+2\mu)p}\ y_{a_\lambda}\ x_{(q+2\mu)p}\ y_{c_{0\lambda}} \\ & (\cdots(\cdots x_{(j+1+2\mu)p+i}\ y_{(\lambda+i)q+j} \cdots)_{0\leq j\leq q-2}\ x_{(q+2\mu)p+i}\ y_{c_{i\lambda}})_{1\leq i\leq p-2} \\ & (\cdots x_{(j+1+2\mu)p+p-1}\ y_{(p-1+\lambda)q+j} \cdots)_{0\leq j\leq q-3}\ x_{(q-1+2\mu)p+p-1} \\ & y_{b_\lambda}\ x_{(q+2\mu)p+p-1}\ y_{d_\lambda} \end{aligned}$$

  donde los subíndices de x e y se toman módulo m y n, a no ser que se precise hacerlo de otra manera. Se denota ahora por $\lceil l \rceil$ al valor del residuo $\mod sq/2$ de cualquier entero l. Los subíndices a_λ, b_λ, $\{c_{i\lambda} : 0 \leq i \leq p-2\}$ y d_λ con $0 \leq \lambda \leq s-1$ toman los siguientes valores:

- $a_{s/2} = (s-1)q + q - 1$ y si $s/2 + 1 \leq \lambda \leq s - 1$ entonces $a_\lambda = (\lambda - 1)q + q - 1$.
- Si $0 \leq \lambda \leq s - 1$ y $0 \leq i \leq p - 2$, entonces:

$$\begin{cases} c_{i\lambda} = \lceil (\lambda + i/2)q + q - 1 \rceil & \text{si i es par.} \\ c_{i\lambda} = \lceil (\lambda + (i-1)/2)q + q - 1 \rceil + sq/2 & \text{si i es impar.} \end{cases}$$

- Si $p < s/2 + 1$, para cada $0 \leq \lambda \leq s - 1$ se tiene que $d_\lambda = \lceil \lambda q + q - 2 \rceil + sq/2$. Si $0 \leq \lambda \leq s/2 - 1$, entonces $b_\lambda = \lceil (\lambda + (p-1)/2)q + q - 1 \rceil$, y si $s/2 \leq \lambda \leq s - 1$, $b_\lambda = \lceil \lambda q + q - 2 \rceil$.
- En caso de que $p \geq s/2 + 1$, para cada $0 \leq \lambda \leq s/2 - 1$ se tiene que $d_\lambda = \lceil (\lambda + p - 1)q + q - 2 \rceil + sq/2$, y si $sq/2 \leq \lambda \leq s-1$, $d_\lambda = \lambda q + q - 2$. Si $0 \leq \lambda \leq s - p$ y $3s/2 - p + 1 \leq \lambda \leq s - 1$, $b_\lambda = \lceil (\lambda + (p-1)/2)q + q - 1 \rceil$ y si $s - p + 1 \leq \lambda \leq 3s/2 - p$, $b_\lambda = \lceil (\lambda + (p-1)q + q - 2 \rceil$.

Además, en el caso de que $p > s/2 + 1$, si $i = p - s/2 - 1$, $j = q - 2$ entonces $y_{(\lambda+i)q+j}$ tiene que ser reemplazado por y_{e_λ}, donde $e_\lambda = (\lambda - 1)q + q - 2$ para cada $0 \leq \lambda \leq s - 1$.

- Subcaso (b). Supongamos que $p = 1$ (o $q = 1$, simplemente se intercambiaría p por q). Se quiere descomponer $K_{r,sq}$ en C_{2q} con r y s pares, $r \geq q$ y q impar. Sea $r = 2t$ y $s = 2u$. Entonces $K_{2t,2uq}$ es la unión de u grafos disjuntos isomorfos a $K_{2t,2q}$, por lo que basta ver cómo descomponer $K_{2t,2q}$ en C_{2q} con q impar y $2t \geq q$. Si $t = 2a$ es par, Bermond [5] probó que $C_{2q} \mid K_{4a,2q}$ si q es impar y $4a > q$. Sea ahora $t = 2a + 1$ impar. Sea $q = 2b + 1$. Los ciclos que consiguen la descomposición $C_{4b+2} \mid K_{4a+2,4b+2}$ son los siguientes:

$$C_{0\mu} = (\cdots x_{i+2\mu}\, y_i \cdots)_{0 \leq i \leq 2b-1}\, x_{2b+2\mu}\, y_{c_\mu},$$
$$C_{1\mu} = (\cdots x_{i+2\mu+1}\, y_{i+2b+1} \cdots)_{0 \leq i \leq 2b-2}\, x_{2b+2\mu}\, y_{d_\mu}\, x_{2b+2\mu+1}\, y_{c_\mu}$$

con $\{c_\mu, d_\mu, c_{\mu+b}\} = \{2b, 4b, 4b+1\}$ (donde $\mu + b$ se toma $\mod (2a+1)$). Si $a = b$ basta tomar $d_\mu = 4b + 1$ y

$$\begin{cases} c_\mu = 2b & \text{si } 0 \leq \mu \leq b - 1, \\ c_b = 4b + 1 & \\ c_\mu = 4b & \text{si } b + 1 \leq \mu \leq 2a. \end{cases}$$

Por otro lado, si $a \neq b$ sea h el mayor entero que cumple que $h \leq \mu/(2a - b + 1)$. Entonces:

$$\begin{cases} c_\mu = 2b & \text{si h es par,} \\ c_\mu = 4b + 1 & \text{si h es impar,} \\ c_\mu = 4b & \text{si } b \leq \mu \leq 2a. \end{cases}$$

□

Gracias a estos teoremas, se puede demostrar el resultado ofrecido por Alspach y Varma:

Teorema 2.16. *Sea p un número primo y e un entero positivo. Entonces $C_{2p^e} \mid K_n$ si y sólo si n es impar, $n \geq 2p^e$ y $2p^e$ divide a $\binom{n}{2}$.*

Demostración. Por el Lema 2.1 se tiene trivialmente que n impar, $n \geq 2p^e$ y $2p^e$ divide a $\binom{n}{2}$ son condiciones necesarias para que se consiga la descomposición, por lo que el resto de la demostración muestra que además son suficientes.

Si $p = 2$, entonces $2p^e = 2^{e+1}$ y por el Lema 2.1 se tiene que $n = d \cdot 2^{e+2} + 1$ para algún $d \in \mathbb{N}$. En la sección precedente se trató este caso, donde el Teorema 2.7 concluye que $C_k \mid K_{2dk+1}$ para cualquier número par $k \geq 4$. Tomando $k = 2p^e$, el teorema está probado para el caso $p = 2$.

De ahora en adelante, sea p un número primo impar. Como $2p^e$ divide a $\binom{n}{2}$, puede ocurrir que p^e divida a n o a $n-1$, pero no a ambos. Supongamos que p^e divide a $n-1$. Entonces, como $2 \mid \frac{n-1}{2}$, se tiene que $n = 2d \cdot 2p^e + 1$ para algún $d \in \mathbb{N}$. Por tanto, basta aplicar el Teorema 2.7 y el Teorema 2.11, y se verifica que $C_{2p^e} \mid K_n$.

Supongamos ahora que p^e divide a n. Entonces $n = 4dp^e + p^e$ si $p^e \equiv 1 \mod 4$ o $n = 4dp^e + 3p^e$ si $p^e \equiv 3 \mod 4$. Si $n = 4dp^e + p^e$, $p^e \equiv 1 \mod 4$, se puede obtener K_n del siguiente modo:

$$K_n = K_{4dp^e+p^e} = K_{4(d-1)p^e+(5p^e-1)+1} = K_{4(d-1)p^e+1} \cup K_{5p^e} \cup K_{4(d-1)p^e,5p^e-1}.$$

Esta idea de dividir K_n en tres grafos surge de que $K_{n+m+1} = K_{n+1} \cup K_{m+1} \cup K_{n,m}$, donde K_{n+1} y K_{m+1} comparten un vértice. Ahora analizando uno a uno se tiene que el grafo completo $K_{4(d-1)p^e+1}$ puede descomponerse en ciclos C_{2p^e} por el Teorema 2.7 y el Teorema 2.11. El grafo completo bipartito $K_{4(d-1)p^e,5p^e-1}$ también puede descomponerse en C_{2p^e} por el Teorema 2.15. Finalmente, el grafo K_{5p^e} puede descomponerse en C_{2p^e} por el Teorema 2.14. Por tanto, se concluye que $C_{2p^e} \mid K_n$.

Por otro lado, cuando $n = 4dp^e + 3p^e$, $p^e \equiv 3 \mod 4$, se tiene que K_n es de la forma:

$$K_n = K_{4dp^e+3p^e} = K_{4dp^e+(3p^e-1)+1} = K_{4dp^e+1} \cup K_{3p^e} \cup K_{4dp^e,3p^e-1}.$$

Del mismo modo que antes, el Teorema 2.7 y el Teorema 2.11 proporcionan una descomposición del grafo completo K_{4dp^e+1} en ciclos C_{2p^e} y por el Teorema 2.15 el grafo completo bipartito $K_{4dp^e,3p^e-1}$ se descompone en C_{2p^e}. El grafo K_{3p^e} puede descomponerse en C_{2p^e} por el Teorema 2.13. Se concluye así que $C_{2p^e} \mid K_n$. $\square$

Capítulo 3

Descomposiciones de $K_n - I$ en ciclos.

Como cada vértice de K_n con n par tiene $n-1$ aristas incidentes a él y este número es impar, es imposible como se vio en el capítulo precedente obtener una descomposición en ciclos disjuntos de este grafo. Pero si a cada vértice le quitamos una única arista, entonces todos los vértices tendrán exactamente grado $n-2$, que resulta ser un número par, y de la misma forma que en el capítulo anterior se podrá obtener la descomposición deseada. Esto es equivalente a extraer a K_n un 1-factor. Por tanto, el problema ahora en cuestión se reduce a descomponer el grafo $K_n - I$ en ciclos. ¿Qué ha de verificarse para que exista tal descomposición? Veámoslo:

Lema 3.1. *Si $C_m \mid K_n - I$, entonces:*

1. $3 \leq m \leq n$
2. *n es par*
3. $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$

Demostración. La demostración es idéntica a la del Lema 2.1, sustituyendo en este caso que $\delta(x) = n-2$ si $x \in V(K_n - I)$ y que $|E(K_n)| = \frac{n(n-2)}{2}$. □

Ejemplo 3.2. *Se muestra una descomposición para el caso $n = 8$ y $m = 4$ con el fin de comprender visualmente lo que se pretende:*

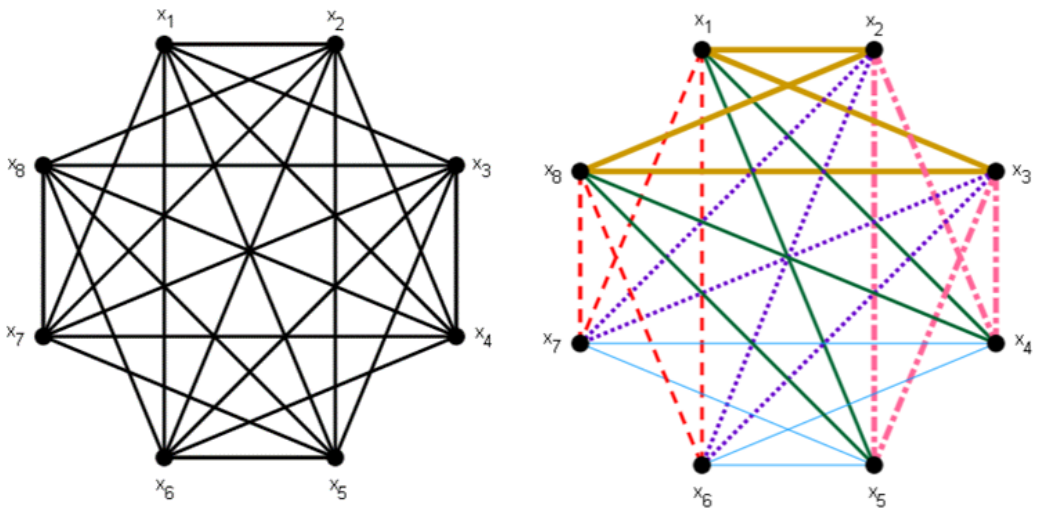


Figura 3.1: Descomposición de $K_8 - I$ en ciclos disjuntos C_4 ($C_4 \mid K_8 - I$).

Partiendo del grafo completo K_8 al que se le ha extraído el 1-factor $I = \{x_1x_8, x_2x_3, x_4x_5, x_6x_7\}$, este queda dividido en seis ciclos disjuntos de longitud 4. Trivialmente se comprueba que se verifican las condiciones del Lema 3.1.

3.1. Descomposiciones de $K_n - I$ en ciclos hamiltonianos.

En el Teorema 2.2 se observó cómo se puede descomponer K_n en ciclos hamiltonianos. Para cumplir con las condiciones necesarias del Lema 2.1, abarcaba únicamente los valores impares de n. Sería interesante obtener un resultado similar que completase el caso par.

Walecki [1] en su trabajo concluyó que era posible descomponer el grafo K_n en caminos hamiltonianos cuando n es un número par, como ya se vio anteriormente. No obstante, también puede descomponerse en ciclos hamiltonianos siempre y cuando previamente se le extraiga un 1-factor, como recoge el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *El grafo completo $K_n - I$ posee una descomposición hamiltoniana para todo $n \in \mathbb{N}$ par.*

Demostración. El resultado es trivial para el caso $n = 4$, ya que $K_4 - I$ es isomorfo a C_4. Supongamos entonces que $n = 2m > 4$ con $m \in \mathbb{N}$. Sea $V(K_n) = \{x_0, x_1, ..., x_{2m}\}$ el conjunto de los vértices de K_n. Sea C el ciclo hamiltoniano contenido en K_n definido como

$$C = \{x_0, x_1, x_2, x_{2m-1}, x_3, x_{2m-2}, x_4, x_{2m-3}, ..., x_{m-1}, x_{m+2}, x_m, x_{m+1}, x_0\}$$

y sea σ la permutación $(x_0)(x_1x_2...x_{2m-2}x_{2m-1})$. La demostración de que $C, \sigma(C), ..., \sigma^{m-2}(C)$ forman $m-1$ ciclos hamiltonianos disjuntos es similar a la proporcionada en el Teorema 2.2. Las aristas restantes $x_0x_m, x_{m-1}x_{m+1}, x_{m-2}x_{m+2}, ...,\ x_1x_{2m-1}$ forman un 1-factor de K_n, de modo que $K_n - I$ queda descompuesto en los ciclos hamiltonianos anteriores. □

Ejemplo 3.4. *La construcción para el caso $n = 8$ sería la siguiente:*

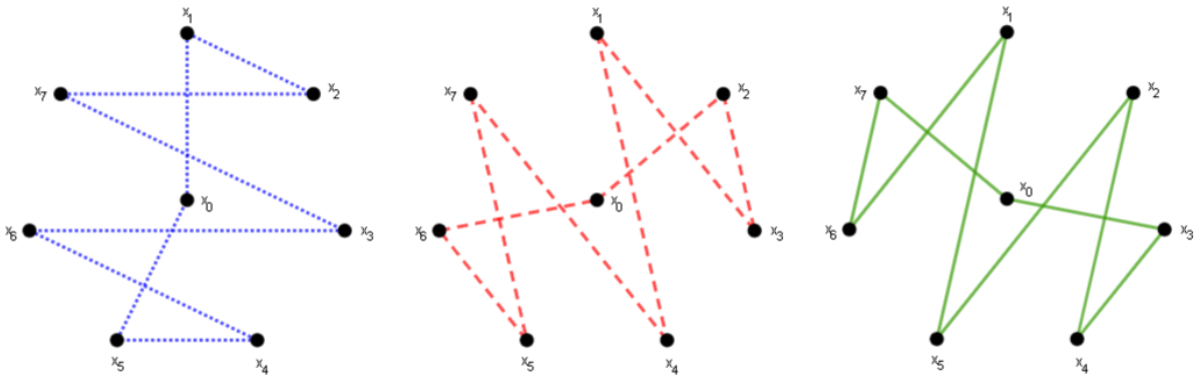


Figura 3.2: Construcción de C, $\sigma(C)$ y $\sigma^2(C)$ en K_8.

Aplicando dos veces la permutación $\sigma = (x_0)(x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7)$ al ciclo C, se obtienen los otros dos ciclos hamiltonianos. Si los posponemos en un mismo grafo observamos que son disjuntos y que completan K_8 salvo un 1-factor.

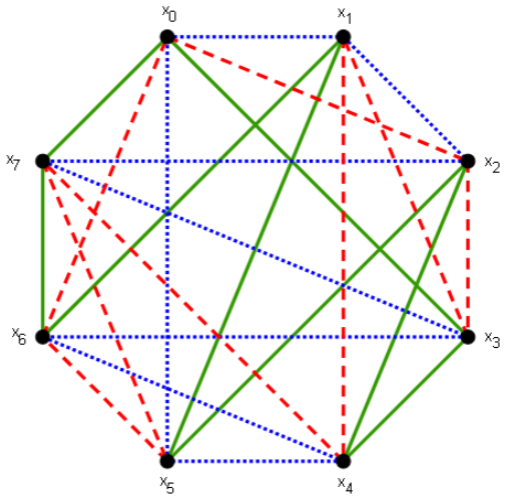


Figura 3.3: Descomposición de $K_8 - I$ en ciclos hamiltonianos.

Se verifica que $I = \{x_0x_4, x_1x_7, x_2x_6, x_3x_5\}$.

3.2. Descomposiciones de $K_n - I$ en C_m con m par.

En esta sección nos interesamos por la descomposición de $K_n - I$ en ciclos de longitud m cuando m es un número par y se verifica que $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$. La demostración de que esta descomposición es posible es de Alspach y Gavlas [2], y fue realizada en el año 1997. Para poder entender bien cómo es la construcción de los ciclos que generan la descomposición, en primer lugar se analizarán una serie de preliminares que abarcarán resultados y definiciones importantes para el entendimiento de la demostración del resultado en cuestión.

Para comenzar se introduce un nuevo tipo de grafo.

Definición 3.5. *Sea $A \subset \mathbb{N}$ un conjunto de números naturales. Se llama grafo circulante de orden n sobre A y se denota por $H(n, A)$ al grafo con vértices $x_1, ..., x_n$ que verifica que x_ix_j es una arista de $H(n, A)$ $(i, j \in \{1, ..., n\},\ i \neq j)$ si y sólo si $|j - i| \in A$.*

El valor $|j - i|$ se corresponde con la longitud de la arista x_ix_j, por lo que el conjunto A contiene todas las posibles longitudes de las aristas que forman el grafo circulante.

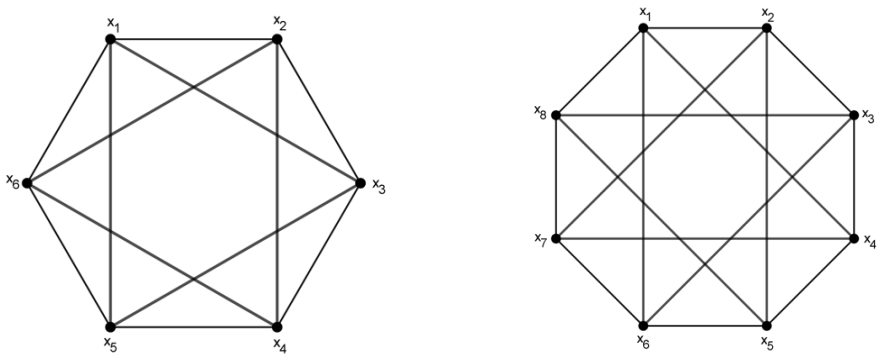


Figura 3.4: Grafos circulantes $H(6, A)$ y $H(8, B)$ con $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 3\}$.

Denotamos $H^*(n, A) = H(n-2, A) + \overline{K_2}$. Es fácil ver que $K_n - I \cong H^*(n, A)$ con $A = \{1, 2, ..., (n-4)/2\}$, $n > 4$. Si se denotan los vértices de $\overline{K_2}$ por u y w, se tiene que las aristas de longitud $(n-2)/2$ en $H(n-2, A)$ junto a la arista uw forman el conjunto de aristas del 1-factor I.

Definición 3.6. *Sea $x_i x_j$ una arista de longitud $|j-i|$ en un grafo circulante de orden n sobre A. La arista de longitud $|j-i|$ diametralmente opuesta a $x_i x_j$ es la arista $x_{i+n/2} x_{j+n/2}$, donde los subíndices se toman* $\mod n$.

Veamos ahora una serie de resultados que serán importantes para poder seguir la demostración del teorema principal:

Lema 3.7. *Sean n y m dos números naturales pares tales que $4 \leq m \leq n$. Si $C_m \mid K_n - I$ para todo n que verifique $m \leq n < 2m$ con $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$, entonces $C_m \mid K_n - I$ para todo $n \geq m$ con $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$.*

Demostración. Supongamos que $C_m \mid K_n - I$ siempre que $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$ y $m \leq n < 2m$. Sean m y n dos números naturales pares tales que $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$. Supongamos que $n = qm + r$ con q y r enteros y $0 \leq r < m$. Como $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$, entonces $r(r-2) \equiv 0 \mod 2m$. Se dividen los vértices de $K_n - I$ en $q-1$ conjuntos de m vértices cada uno y un conjunto de $m + r$ vértices. Cada uno de estos vértices junto a las aristas que los relacionan generan un subgrafo isomorfo a K_m o K_{m+r}, y las aristas que relacionan vértices de dos conjuntos distintos forman un subgrafo isomorfo a $K_{m,m}$ o $K_{m,m+r}$. Por el Teorema 2.15 se tiene que $C_m \mid K_{m,m}$ y $C_m \mid K_{m,m+r}$. Por el Teorema 3.3 se cumple que $C_m \mid K_m - I$. Como $m < m + r < 2m$ y $(m + r)(m + r - 2) \equiv 0 \mod 2m$, $C_m \mid K_{m+r} - I$ por hipótesis. □

Lema 3.8. *Si n, m y r son números naturales pares tales que $n = m + r$ y $n(n-2) \equiv 2m \mod 4m$, entonces:*

1. $m \equiv 0 \mod 4$
2. $r \equiv 0 \mod 8$ *o* $r \equiv 2 \mod 8$

Demostración. Como $n(n-2) \equiv 2m \mod 4m$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n(n-2) = 4m \cdot k + 2m$. Entonces $n(n-2)/2 = 2km + m = (2k+1)m$, con lo que $n(n-2)/2$ es un múltiplo impar de m. Sea $l = 2k + 1$. Como n y $n-2$ son ambos pares, entonces 4 divide a n o a $n-2$, y en consecuencia, $8 | n(n-2)$. Por tanto, $4 | \frac{n(n-2)}{2}$ y como l es impar, se verifica que $4 | m$.

Veamos ahora que $r \equiv 0 \mod 8$ o que $r \equiv 2 \mod 8$. Se tiene que:

$$\frac{n(n-2)}{2} = \frac{(m+r)(m+r-2)}{2} = \frac{m^2 + 2mr - 2m + r^2 - 2r}{2} = \frac{m(m+2r-2)}{2} + \frac{r(r-2)}{2} = lm$$

Como l es impar y $4 | m$, se sigue que m divide a $r(r-2)/2$. Supongamos que $r \equiv 4 \mod 8$, es decir, $r = 8d + 4$ con $d \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\frac{r(r-2)}{2} = \frac{(8d+4)(8d+2)}{2} = 32d^2 + 24d + 4 = 4(8d^2 + 6d + 1),$$

por lo que

$$\frac{r(r-2)}{8} = 8d^2 + 6d + 1.$$

Como $m | r(r-2)/2$, entonces $mt = r(r-2)/2$ para algún $t \in \mathbb{N}$ par. Como $4 | m$, se tiene que

$$\frac{m}{4} t = \frac{r(r-2)}{8} = 8d^2 + 6d + 1,$$

llegando a una contradicción. Por tanto, $r \not\equiv 4 \mod 8$.

Supongamos ahora que $r \equiv 6 \mod 8$, es decir, $r = 8d + 6$ con $d \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\frac{r(r-2)}{2} = \frac{(8d+6)(8d+4)}{2} = 32d^2 + 40d + 12 = 4(8d^2 + 10d + 3),$$

por lo que

$$\frac{r(r-2)}{8} = 8d^2 + 10d + 3.$$

Al igual que antes, sea $mt = r(r-2)/2$ para algún $t \in \mathbb{N}$ par. Como $4|m$, se tiene que

$$\frac{m}{4}t = \frac{r(r-2)}{8} = 8d^2 + 10d + 3,$$

llegando a una contradicción. En consecuencia, $r \not\equiv 4 \mod 8$.

De este modo, se tiene que o bien $r \equiv 0 \mod 8$ o bien $r \equiv 2 \mod 8$. □

El siguiente Lema proporciona una descomposición que será utilizada para descomponer grafos completos menos un 1-factor I, como veremos más adelante:

Lema 3.9. *Sean m y n dos números pares positivos verificando $4 \leq m < n < 2m$, y $m \equiv 0$ mód 4. Si $A = \{a_1, a_2, ..., a_{(m-4)/2}\}$, con a_i enteros positivos y $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{(m-4)/2} < (n-2)/2$, entonces $C_m \mid H^*(n, A)$.*

Demostración. Sean $x_0, x_1, ..., x_{n-3}$ los vértices de $H(n-2, A)$. Por definición, $x_i x_j$ es una arista de $H^*(n, A)$ si y sólo si $|j - i| \in A$. Sean u y w los vértices de $\overline{K_2}$. Se define el recorrido P del siguiente modo:

$$P = \{x_0 x_{a_1}, x_{a_1} x_{a_1 - a_2}, x_{a_1 - a_2} x_{a_1 - a_2 + a_3}, ..., x_{a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_{(m-6)/2}} x_{a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_{(m-6)/2} - a_{(m-4)/2}}\}$$

Nótese que P tiene longitud $\frac{m-4}{2}$ y que usa precisamente una arista de cada longitud de A. Además, todos los vértices de P son distintos. Más concretamente, los vértices en posición par (empezando por x_{a_1}) tienen índices crecientes, mientras que los vértices en posición impar (empezando por x_0) poseen índices decrecientes. En efecto:

- Vértices alternados empezando por x_{a_1}. Sea $i \in \{1, 3, 5, ..., \frac{m-10}{2}\}$. El vértice i-ésimo es de la forma $x_{a_1 - a_2 + ... + a_i}$ y el siguiente es $x_{a_1 - a_2 + ... + a_i - a_{i+1} + a_{i+2}}$. Como $a_{i+2} > a_{i+1}$, entonces $0 < -a_{i+1} + a_{i+2} < n$, y en consecuencia, $a_1 - a_2 + ... + a_i < a_1 - a_2 + ... + a_i - a_{i+1} + a_{i+2}$, por lo que todos los vértices son distintos.

- Vértices alternados empezando por x_0. Se razona de modo similar al anterior caso. Sea $j \in \{2, 4, 6, ..., \frac{m-8}{2}\}$. El vértice j-ésimo es de la forma $x_{a_1 - a_2 + ... - a_j}$ y el siguiente es $x_{a_1 - a_2 + ... - a_j + a_{j+1} - a_{j+2}}$. Como $a_{j+2} > a_{j+1}$, entonces $-n < a_{j+1} - a_{j+2} < 0$, y en consecuencia, $a_1 - a_2 + ... - a_j > a_1 - a_2 + ... - a_j + a_{j+1} - a_{j+2}$, por lo que no se repite ningún vértice.

Por lo tanto, P es un camino simple.

Sea ahora σ la permutación $(x_0 x_1 ... x_{n-3})(u)(w)$ que actúa sobre los vértices de $H^*(n, A)$. Se tiene que:

$$\sigma^{(n-2)/2}(P) = \{x_{\frac{n-2}{2}} x_{a_1 + \frac{n-2}{2}}, ..., x_{a_1 - a_2 + ... + a_{(m-6)/2} + \frac{n-2}{2}} x_{a_1 - a_2 + ... + a_{(m-6)/2} - a_{(m-4)/2} + \frac{n-2}{2}}\}$$

El camino simple $\sigma^{(n-2)/2}(P)$ no tiene vértices en común con P, y la arista de longitud a_i en P es diametralmente opuesta a la arista de longitud a_i en $\sigma^{(n-2)/2}(P)$. De este modo, se puede formar un ciclo C de longitud m en $H^*(n, A)$ de la siguiente manera:

$$C = \{ux_0, ux_{(n-2)/2}, wx_{a_1-a_2+\ldots-a_{(m-4)/2}}, wx_{(n-2)/2+a_1-a_2+\ldots-a_{(m-4)/2}}\} \cup P \cup \sigma^{(n-2)/2}(P)$$

Las aristas que parten del vértice u tienen como extremos los vértices que inician los caminos simples P y $\sigma^{(n-2)/2}(P)$. Por otro lado, las aristas con origen en w tienen como extremo los vértices finales de dichos caminos simples. Por ello, C es efectivamente un ciclo.

Si aplicamos ahora la permutación σ al ciclo C se obtiene un ciclo disjunto a C. Esto se debe a que las aristas de $\sigma(P)$ y $\sigma^{n/2}(P)$ tienen las mismas longitudes que las de P, y como ya se mencionó anteriormente, las aristas que forman los caminos simples P y $\sigma^{(n-2)/2}(P)$ son diametralmente opuestas, y por tanto no tienen ninguna en común, hecho que ocurre también con los caminos simples permutados. Además, las aristas incidentes a u o a w relacionan estos vértices con los vértices iniciales o finales de P y $\sigma^{(n-2)/2}(P)$, por lo que al ser permutadas no pueden repetirse. Por lo tanto, se tiene que C, $\sigma(C)$, $\sigma^2(C)$,...,$\sigma^{(n-4)/2}(C)$ es una descomposición de $H^*(n, A)$ en ciclos de longitud m. □

Ejemplo 3.10. *Veamos cómo se construye el ciclo C para descomponer el grafo $H^*(16, A)$ en ciclos C_{12}, siendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Como $n = 16$ y $m = 12$, se tiene que $P = \{x_0x_1, x_1x_{13}, x_{13}x_2, x_2x_{12}\}$ es un camino simple de longitud 4. Tras aplicar la permutación mencionada en la demostración, se obtiene $\sigma^7(P) = \{x_7x_8, x_8x_6, x_6x_9, x_9x_5\}$. Por tanto, el ciclo C será de la forma $C = \{ux_0, ux_7, wx_{12}, wx_5\} \cup P \cup \sigma^7(P)$.*

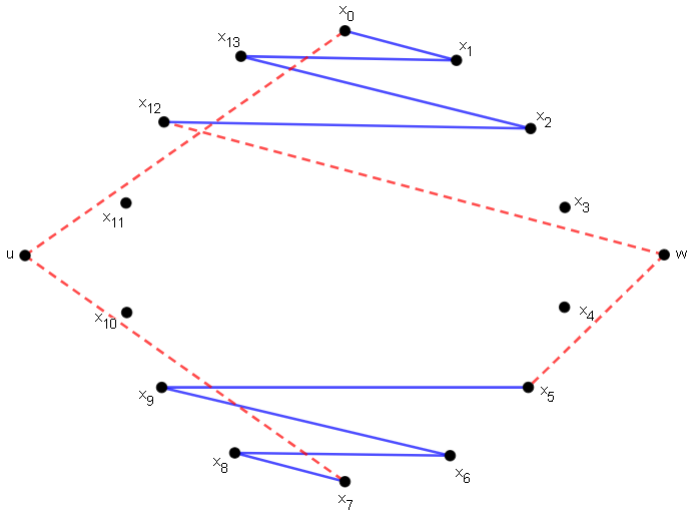


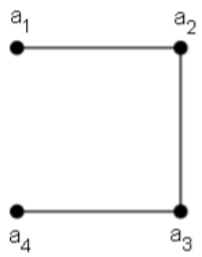
Figura 3.5: Ciclo C de $H^*(16, A)$, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

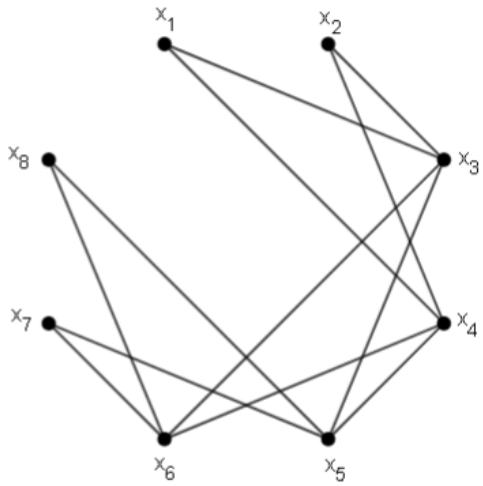
Las aristas rayadas se corresponden con las aristas que tienen uno de sus extremos en el vértice u ó w. De este modo, se observa cómo cierra el ciclo C. Si se aplica a este ciclo la permutación $\sigma = (x_0x_1...x_{13})(u)(w)$ un total de 5 veces, se obtendrá la descomposición deseada, consiguiendo 6 ciclos de longitud 12.

Finalmente, serán necesarios varios resultados para entender cómo lograr alguna de las descomposiciones involucradas en el teorema principal. El primero proporcionado por Häggkvist [7], el segundo por Tarsi [18] y el último por Bermond [5]:

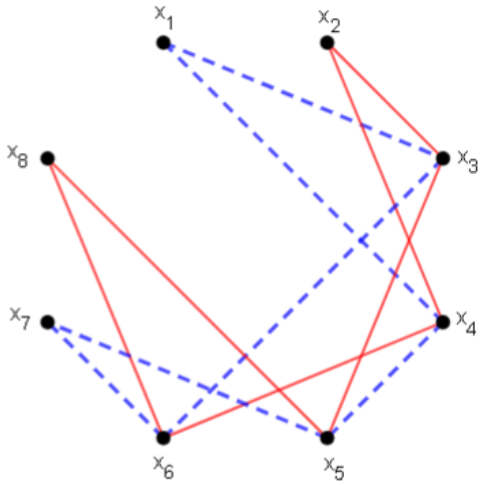
Lema 3.11. *Sea P un camino o un ciclo con n aristas y sea H un grafo 2-regular de $2n$ vértices donde todas sus componentes tienen un número par de vértices. Entonces $P \bowtie \overline{K_2} = G' \cup G''$, donde $G' \cong H \cong G''$, esto es, $H \mid (P \bowtie \overline{K_2})$.*

Ejemplo 3.12. *Supongamos que tenemos un camino $P = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de longitud 3, luego $n = 3$. En la siguiente figura se muestra el camino P (izquierda) junto a $P \bowtie \overline{K_2}$ (derecha):*





Supongamos ahora que $H \cong C_6$, de modo que H es un grafo 2-regular de $2n = 6$ vértices, ya que $\delta(x) = 2$ si $x \in C_6$ (el grado de los vértices de un ciclo es siempre 2). Por tanto, $P \bowtie \overline{K_2} = G' \cup G''$ donde G' y G'' son ambos dos ciclos de longitud 6, y por tanto isomorfos a H. Veámoslo en la siguiente imagen:



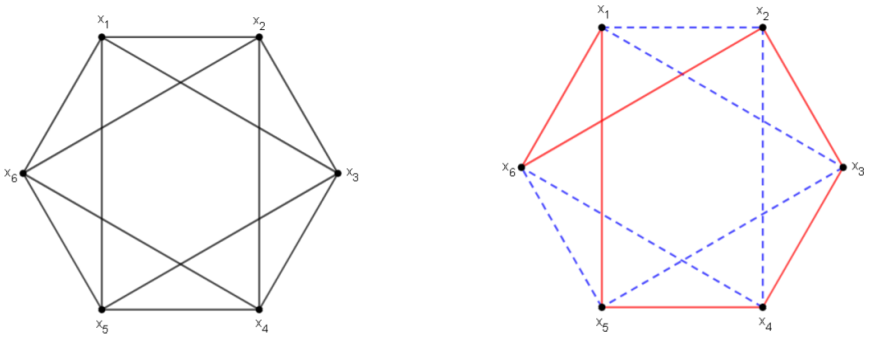
Se cumple que $G' = \{x_1, x_3, x_6, x_7, x_5, x_4, x_1\}$ y $G'' = \{x_2, x_3, x_5, x_8, x_6, x_4, x_2\}$.

Teorema 3.13. *$P_m \mid \lambda K_n$ si y sólo si $\lambda n(n-1) \equiv 0 \mod 2m$ y $n \geq m+1$.*

Si $\lambda = 1$, esto nos indica que podemos descomponer el grafo completo K_n en caminos disjuntos.

Teorema 3.14. *Todo grafo circulante 4-regular puede descomponerse en dos ciclos hamiltonianos.*

Ejemplo 3.15. *El grafo circulante $H(6, A)$ donde $A = \{1, 2\}$ puede descomponerse en los dos ciclos hamiltonianos, $H_1 = \{x_1, x_2, x_4, x_6, x_5, x_3, x_1\}$ y $H_2 = \{x_1, x_5, x_4, x_3, x_2, x_6, x_1\}$, como se observa en la siguiente imagen:*



Con todos estos resultados y definiciones, se puede dar paso al teorema principal:

Teorema 3.16. *Sean n y m dos números naturales pares con $4 \leq m \leq n$. Entonces $C_m \mid K_n - I$ si y sólo si $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$.*

Demostración. Por el Lema 3.1, si $C_m \mid K_n - I$, entonces $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$, por lo que basta demostrar la suficiencia de esta condición.

Sean m y n dos números naturales pares tales que $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$. Supongamos que $n(n-2)/2$ es un múltiplo par de m, esto es, $n(n-2)/2 = km$ con $k \in \mathbb{N}$ par. Para lograr la descomposición basta tener en cuenta que $K_n - I \cong K_{n/2} \bowtie \overline{K_2}$. Un camino P de longitud $m/2$ en $K_{n/2}$ se convierte en $P \bowtie \overline{K_2}$ en $K_n - I$, y este grafo puede descomponerse en dos ciclos de longitud m por el Lema 3.11. La descomposición se completa descomponiendo $K_{n/2}$ en caminos de longitud $m/2$ haciendo uso del Teorema 3.13.

Supongamos pues que $n(n-2)/2$ es un múltiplo impar de m, esto es, $n(n-2)/2 = km$ con $k \in \mathbb{N}$ impar. Por el Lema 3.7 basta suponer que $n < 2m$. Por tanto $n = m + r$ para algún número natural r con $0 \leq r < m$. Si $r = 0$ se verifica que $n = m$. Este caso está resuelto en el Teorema 3.3, ya que se trata de una descomposición hamiltoniana de $K_n - I$. Por tanto, a partir de ahora se supone $0 < r < m$.

Como $n(n-2)/2$ es un múltiplo impar de m y r es impar se verifica que $m^2 + 2mr + r^2 - 2r = 2m(k+1)$ y como k es impar se concluye que $r(r-2)/2$ es un múltiplo par de m.

Sea $A = \{1, 2, ..., (n-4)/2\}$. Se denota el conjunto de vértices de $H^*(n, A)$ como $V(H^*(n, A)) = \{x_0, x_1, ..., x_{n-3}, u, w\}$, donde u y w son los vértices de $\overline{K_2}$. Supongamos que B es un subconjunto de A tal que $|B| = r/2$, y que se puede descomponer el grafo circulante $H(n-2, B)$ en ciclos de longitud m. Entonces, como $H^*(n, A) = H^*(n, A - B) \cup H(n-2, B)$ y el grafo $H^*(n, A - B)$ se puede descomponer en C_m por el Lema 3.9, se tiene la descomposición buscada de $H^*(n, A)$ en C_m. Por tanto, hay que determinar el conjunto B que contenga $r/2$ longitudes de modo que $H(n-2, B)$ pueda descomponerse en C_m.

Si $r = 2$, entonces $n = m + 2$ y es suficiente tomar $B = \{1\}$, de modo que $H(n-2, B)$ es un ciclo de longitud $n - 2 = m$, ya que sus aristas son de la forma $x_i x_{i+1}$ con $i \in \{0, 2, ..., n-1\}$ y el último vértice coincide con el primero. Así, tenemos una descomposición de $K_{m+2} - I$ en C_m. Supongamos ahora que $r \neq 2$. Por el Lema 3.8 se tiene que o bien $r \equiv 0 \mod 8$ o bien $r \equiv 2$

mód 8, por lo que se distinguen estos dos casos:

► *Caso 1.* Supongamos que $r \equiv 0 \mod 8$ (ver Ejemplo A.4 en el Anexo). Sea $r = 2^e a$, donde a es un número natural impar y $e \geq 3$. Se tiene que $r(r-2)/2 = 2^e a(2^{e-1}a-1)$. Como $m|r(r-2)/2$ y $m \equiv 0 \mod 4$, entonces $m = 2^d a'b'$, donde $a'|a$, $b'|(2^{e-1}a-1)$ y $2 \leq d < e$. Por tanto

$$n-2 = m+r-2 = 2^d a'b' + 2^e a - 2 = b'(2^d a' + (2^e a - 2)/b')$$

Se dividen ahora los vértices de $H^*(n, A)$ en b' conjuntos, cada uno de los cuales tendrá $l = 2^d a' + (2^e a - 2)/b'$ vértices. Además, cada uno de ellos proporcionará $2^d a'$ aristas en la creación de un ciclo de longitud m (ya que $m = 2^d a'b'$). Veamos cómo construir este ciclo:

Se define el camino $P_{0,0}$ del siguiente modo:

$$P_{0,0} = \{x_0, x_2, x_{-1}, x_3, x_{-2}, ..., x_{2^{d-2}a'}, x_{-2^{d-2}a'+1}, x_{2^{d-2}a'+2}, x_{-2^{d-2}a'},$$
$$x_{2^{d-2}a'+3}, x_{-2^{d-2}a'-1}, ..., x_{2^{d-1}a'+1}, x_{-2^{d-1}a'+1}, x_{l+1}, x_l\}$$

donde los subíndices se toman $\mod (n-2)$. En el caso en que $d = 2$ y $a' = 1$, esta definición de $P_{0,0}$ no tiene sentido, pues $2^{d-2}a' = 1$. En este caso basta tomar $P_{0,0} = \{x_0, x_3, x_{-1}, x_{l+1}, x_l\}$. Sea ahora $\sigma = (x_0 x_1 ... x_{n-3})(u)(w)$ una permutación que actúa sobre los vértices de $H^*(n, A)$. Se define $P_{0,1} = \sigma^l(P_{0,0})$. Como $l > 2^d a'$, entonces $2^{d-1}a' + 1 < l - 2^{d-1}a' + 1$ y por tanto, todos los vértices de $P_{0,1}$ son distintos a los de $P_{0,0}$, excepto x_l, que es el último vértice de $P_{0,0}$ y el primero de $P_{0,1}$. De la misma manera, los caminos

$$P_{0,0}, P_{0,1} = \sigma^l(P_{0,0}), P_{0,2} = \sigma^{2l}(P_{0,0}), ..., P_{0,b'-1} = \sigma^{(b'-1)l}(P_{0,0})$$

son disjuntos salvo que el camino $P_{0,i}$ comienza en el último vértice de $P_{0,i-1}$ con $1 \leq i \leq b'-1$ y $P_{0,b'-1}$ tiene a x_0 como último vértice, ya que $\sigma^{(b'-1)l}(x_l) = x_{(b'-1)l+l} = x_{b'l}$ y como $b'l = b'(2^d a' + (2^e a - 2)/b') = n-2$ y los subíndices se toman $\mod (n-2)$, entonces $x_{b'l} = x_0$. Se tiene así que se puede construir un ciclo de la forma $C_0 = P_{0,0} \cup P_{0,1} \cup ... \cup P_{0,b'-1}$. Se cumple que C_0 tiene longitud m, pues cada $P_{0,i}$ tiene longitud $2^d a'$ y hay un total de b' caminos formando el ciclo, luego $|E(C_0)| = 2^d a'b' = m$. Además, las longitudes de las aristas de C_0 forman el conjunto $B_0 = \{1, 2, ..., 2^{d-1}a' - 1, 2^{d-1}a' + l, 2^{d-1}a' + 1, ..., 2^d a'\}$.

Sea $b = r/(2^{d+1}a') = 2^{e-d-1}a/a'$. Si $b > 1$, se obtiene el camino $P_{1,0}$ sumando l a cada uno de los subíndices de los vértices que ocupan los lugares pares en $P_{0,0}$ empezando por x_2, esto es

$$P_{1,0} = \{x_0, x_{2+l}, x_{-1}, x_{3+l}, x_{-2}, ..., x_{2^{d-2}a'+l}, x_{-2^{d-2}a'+1}, x_{2^{d-2}a'+2+l}, x_{-2^{d-2}a'},$$
$$x_{2^{d-2}a'+3+l}, x_{-2^{d-2}a'-1}, ..., x_{2^{d-1}a'+1+l}, x_{-2^{d-1}a'+1}, x_{2l+1}, x_l\}$$

Al igual que antes, se aplica la permutación σ sobre este camino, creando así los caminos $P_{1,1} = \sigma^l(P_{1,0}), P_{1,2} = \sigma^{2l}(P_{1,0}), ..., P_{1,b'-1} = \sigma^{(b'-1)l}(P_{1,0})$. Del mismo modo que ocurría anteriormente, el camino $P_{1,i}$ comienza en el último vértice de $P_{1,i-1}$ para cada $1 \leq i \leq b'-1$ y además el último vértice de $P_{1,b'-1}$ es x_0. Por tanto, se construye otro ciclo $C_1 = P_{1,0} \cup P_{1,1} \cup ... \cup P_{1,b'-1}$ de longitud m, cuyas longitudes forman el conjunto $B_1 = \{1+l, 2+l, 3+l, ..., 2^{d-1}a' - 1 + l, 2^{d-1}a' + 2l, 2^{d-1}a' + 1 + l, ..., 2^d a' + l\}$.

Siguiendo la estrategia que se ha empleado para la construcción de C_0 y C_1, para cada j con $2 \leq j \leq b$, se obtiene $P_{j,0}$ sumando jl a los subíndices de los vértices que ocupan los lugares pares de $P_{0,0}$ empezando por x_2. Entonces, aplicando la permutación σ se obtienen los caminos

$P_{j,1} = \sigma^l(P_{j,0}), P_{j,2} = \sigma^{2l}(P_{j,0}), ..., P_{j,b'-1} = \sigma^{(b'-1)l}(P_{j,0})$. El vértice inicial del camino $P_{j,i}$ coincide con el vértice final de $P_{j,i-1}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., b'-1\}$ y el último vértice de $P_{j,b'-1}$ es x_0. Por tanto, $C_j = P_{j,0} \cup P_{j,1} \cup ... \cup P_{j,b'-1}$ es un ciclo de longitud m cuyas longitudes forman el conjunto $B_j = \{1+jl, 2+jl, 3+jl, ..., 2^{d-1}a'-1+jl, 2^{d-1}a'+1+jl, ..., 2^d a'+jl, 2^{d-1}a'+(j+1)l\}$.

Sea $B = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_{b-1}$. La mayor longitud de B es $bl + 2^{d-1}a'$. Como $r = 2^e a < 2^d a' b' = m$, se tiene que $2^{e-d}a/a' + 1 \leq b'$, y se sigue que

$$bl + 2^{d-1}a' = 2^{e-d-1}\frac{a}{a'}l + 2^{d-1}a' = 2^{e-d-1}\frac{a}{a'}l + \frac{l}{2} - \frac{2^{e-1}a-1}{b'} \leq \frac{b'}{2}l - \frac{2^{e-1}a-1}{b'} < \frac{b'l}{2} = \frac{n-2}{2}$$

En consecuencia, las aristas de B son todas distintas. Veamos ahora cuál es el cardinal de B. Cada ciclo tiene longitud m y B contiene las longitudes de las aristas de un total de b ciclos. Además, cada ciclo tiene b' aristas de igual longitud. Por tanto:

$$|B| = \frac{m \cdot b}{b'} = \frac{2^d a' b' \cdot r/(2^{d+1}a')}{b'} = \frac{2^d a' \cdot r}{2^{d+1}a'} = \frac{r}{2}$$

que es exactamente la cantidad que buscábamos. Por tanto, el conjunto

$$\{C_j, \sigma(C_j), \sigma^2(C_j), ..., \sigma^{l-1}(C_j) : 0 \leq j \leq b-1\}$$

es una descomposición de $H(n-2, B)$ en C_m.

► *Caso 2.* Supongamos que $r \equiv 2 \mod 8$. Como el caso $r = 2$ se trató previamente, se considera $r = 8k+2 > 2$, con $k \in \mathbb{N}$. Se cumple así que $r(r-2)/2 = 8k(4k+1) = 2^e a(4k+1)$, donde $2^e a = 8k$, a es impar, y $mcd(a, 4k+1) = 1$. Por tanto, $m = 2^d a' b'$, donde $2 \leq d < e$, $a'|a$ y $b'|(4k+1)$. Sea $r/2 = bb'$. Entonces

$$n - 2 = m + r - 2 = 2^d a' b' + 2^e a = 2^d a'(b' + 2^{e-d}a/a')$$

Sea ahora $l = b' + 2^{e-d}a/a' \geq b'+2$. Se distinguen dos casos dependiendo de la congruencia de $b' \mod 4$:

- *Subcaso 2.1.* Supongamos que $b' \equiv 1 \mod 4$. Se tiene que $b' \geq 5$, ya que si fuese $b' = 1$ entonces $m = 2^d a' \leq 2^e a = r-2$ lo cual sería una contradicción ya que $m > r$. Sea ahora $s = l - (b'+1)/2 - 1$. Se define $P_{0,0}$ del siguiente modo:

$$P_{0,0} = \{x_{-s}, x_0, x_2, x_{-1}, x_3, ..., x_{-(s-3)/2}, x_{(s+1)/2}, x_{-(s+1)/2}, x_{(s+3)/2}, \\ x_{-(s+3)/2}, x_{(s+5)/2}, ..., x_{-(b'-1)/2}, x_{(b'+1)/2}\}$$

  Como $s \geq (b'+2) - (b'+1)/2 - 1 = (b'-1)/2 + 1$, se tiene que todos los vértices de $P_{0,0}$ son distintos, por lo que se trata de un camino. En el caso particular $s = 3$ se tiene que $b' = 5$ y $l - s = 4$, con lo que se toma $P_{0,0} = \{x_{-3}, x_0, x_2, x_{-2}, x_3\}$. Las longitudes de las aristas de $P_{0,0}$ son $2, 3, ..., b'$. Se aplica ahora la permutación σ de modo que $P_{0,1} = \sigma^l(P_{0,0})$. Como $l - s = (b'+3)/2$, los caminos $P_{0,0}$ y $P_{0,1}$ son disjuntos. Se unen ahora el primer vértice de $P_{0,1}$ (x_{l-s}) con el último vértice de $P_{0,0}$ ($x_{(b'+1)/2}$), obteniéndose así una arista de longitud $l - s - (b'+1)/2 = l - l + (b'+1)/2 + 1 - (b'+1)/2 = 1$. Del mismo modo que con $P_{0,1}$, se consiguen los caminos $P_{0,2} = \sigma^{2l}(P_{0,0}), ..., P_{0,2^d a'-1} = \sigma^{(2^d a'-1)l}(P_{0,0})$. Si se une el último vértice de $P_{0,i}$ ($x_{il+(b'+1)/2}$) con el primer vértice de $P_{0,i+1}$ ($x_{(i+1)l-s}$) para cada $0 \leq i \leq 2^d a' - 2$ y el último vértice de $P_{0,2^d a'-1}$ ($x_{(2^d a'-1)l+(b'+1)/2}$) con el primer vértice de $P_{0,0}$ (x_{-s}) se forma el ciclo C_0. Las aristas que se forman uniendo esos vértices son

todas de longitud 1, por lo que el conjunto de longitudes del ciclo C_0 es $B_0 = \{1, 2, 3, ..., b'\}$.

Si $b > 1$ se obtiene el camino $P_{1,0}$ restando l al subíndice del primer vértice de $P_{0,0}$ y sumando l a los subíndices de los vértices restantes que ocupen un lugar impar en el camino $P_{0,0}$, esto es:

$$P_{1,0} = \{x_{-(l+s)}, x_0, x_{2+l}, x_{-1}, x_{3+l}, ..., x_{-(s-3)/2}, x_{(s+1)/2+l}, x_{-(s+1)/2}, \\ x_{(s+3)/2+l}, x_{-(s+3)/2}, x_{(s+5)/2+l}, ..., x_{-(b'-1)/2}, x_{(b'+1)/2+l}\}$$

Las longitudes de las aristas de $P_{1,0}$ son $2+l, 3+l, ..., b'+l$. Al igual que antes, se obtienen lo caminos $P_{1,1} = \sigma^l(P_{1,0}), ..., P_{1,2^d a'-1} = \sigma^{(2^d a'-1)l}(P_{1,0})$. Para cada $0 \leq i \leq 2^d a' - 2$ se une el último vértice de $P_{1,i}$ $(x_{il+(b'+1)/2+l})$ con el primer vértice de $P_{1,i+1}$ $(x_{(i+1)l-(l+s)})$, y el último vértice de $P_{1,2^d a'-1}$ con el primer vértice de $P_{1,0}$, consiguiendo formar así el ciclo C_1. Estas aristas tienen longitud $il + (b'+1)/2 + l - (i+1)l + (l+s) = 2l - 1$. Igualmente, para cada $2 \leq j \leq b-1$ se obtiene el camino $P_{j,0}$ restando jl al subíndice del primer vértice de $P_{0,0}$ y sumando jl a los subíndices de los vértices que ocupan los restantes lugares impares del camino $P_{0,0}$. De esta forma se obtienen los caminos $P_{j,1} = \sigma^l(P_{j,0}), ..., P_{j,2^d a'-1} = \sigma^{(2^d a'-1)l}(P_{j,0})$. Siguiendo la misma estrategia que antes, uniendo el último vértice de $P_{j,i}$ $(x_{il+(b'+1)/2+jl})$ con el primer vértice de $P_{j,i+1}$ $(x_{(i+1)l-(jl+s)})$ para cada $0 \leq i \leq 2^d a' - 2$, y el último vértice de $P_{j,2^d a'-1}$ $(x_{(2^d a'-1)l+(b'+1)/2+jl})$ con el primer vértice de $P_{j,0}$ $(x_{-(jl+s)})$, se consigue construir el ciclo C_j. Estas últimas aristas formadas tienen longitud $il + (b'+1)/2 + jl - (i+1)l + (jl+s) = 2jl - 1$.

Sea ahora $B_j = \{2+jl, 3+jl, ..., b'+jl, 2jl-1\}$ el conjunto que forman las longitudes del ciclo C_j para cada $1 \leq j \leq b-1$, y sea $B = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_{b-1}$. La arista de mayor longitud en B tiene longitud $b' + (b-1)l$ o $2(b-1)l - 1$. Ahora como $r = 2bb'$, $m = 2^d a' b'$ y $r < m$, se tiene que $2b < 2^d a'$, por lo que $2bl < 2^d a' l = n - 2$. Esto significa que las longitudes $1, 2l-1, 4l-1, ..., 2(b-1)l - 1$ son todas distintas. Además,

$$b' + (b-1)l < l + (2^{d-1}a' - 1)l = 2^{d-1}a'l = (n-2)/2,$$

por lo que todas las aristas de B son distintas. Cada ciclo tiene m aristas, de las cuales hay $2^d a'$ de cada longitud (ya que cada ciclo se obtiene mediante la unión de $2^d a'$ caminos los cuales se consiguen mediante permutaciones de uno dado). Como B contiene las longitudes de b ciclos, se tiene que

$$|B| = \frac{m \cdot b}{2^d a'} = \frac{2^d a' b' \cdot r/(2b')}{2^d a'} = \frac{b' \cdot r}{2b'} = \frac{r}{2}$$

que es lo que se quería conseguir. Entonces el conjunto

$$\{C_j, \sigma(C_j), \sigma^2(C_j), ..., \sigma^{l-1}(C_j) : 0 \leq j \leq b-1\}$$

es una descomposición de $H(n-2, B)$ en C_m.

- *Subcaso 2.2.* Supongamos que $b' \equiv 3 \mod 4$ (ver Ejemplo A.5 en el Anexo). Si $b' = 3$ se construye el camino $P_{0,0} = \{x_0, x_3, x_{-4}\}$. En caso de que $b' = 7$, $P_{0,0} = \{x_0, x_2, x_{-2}, x_3, x_{-3}, x_4, x_{1-l}\}$. En otro caso, sea

$$P_{0,0} = \{x_0, x_2, x_{-1}, x_3, ..., x_{-(b'-7)/4}, x_{(b'+1)/4}, x_{-(b'+1)/4}, \\ x_{(b'+5)/4}, ..., x_{-(b'-1)/2}, x_{(b'+1)/2}, x_{1-l}\}.$$

En todo momento los subíndices de los vértices se toman $\mod (n-2)$. $P_{0,0}$ contiene una arista de cada una de las siguientes longitudes: $2, 3, ..., (b'-3)/2, (b'-1)/2+l, (b'+1)/2, ..., b'$. Sin embargo, no contiene ninguna cuya longitud es congruente con $\pm 1 \mod l$. Sean ahora los caminos

$$P_{0,1} = \sigma^l(P_{0,0}), \;\; P_{0,2} = \sigma^{2l}(P_{0,0}), \;\; ..., \;\; P_{0,2^d a'-1} = \sigma^{(2^d a'-1)l}(P_{0,0}).$$

Nótese que $P_{0,i}$ empieza en x_{il} y termina en $x_{(i-1)l+1}$. Ahora bien, si $b > 1$ se obtiene el camino $P_{1,0}$ sumando l a los índices de los vértices pares de $P_{0,0}$. Igual que antes, se obtienen los caminos $P_{1,1}$, $P_{1,2}$, ..., $P_{1,2^d a'-1}$. Estos caminos contienen aristas de longitudes $2+l, 3+l, ..., (b'-3)/2+l, (b'-1)/2+2l, (b'+1)/2+l, ..., b'+l$.

Del mismo modo, para cada $2 \leq j \leq b-1$ se obtiene el camino $P_{j,0}$ sumando jl a los subíndices de los vértices pares de $P_{0,0}$, y después se consiguen los caminos $P_{j,1}$, $P_{j,2}$, ..., $P_{j,2^d a'-1}$. Sea ahora P_j el conjunto formado por los caminos $P_{j,0}$, $P_{j,1}$, $P_{j,2}$, ..., $P_{j,2^d a'-1}$ y B_j el conjunto formado por las longitudes de las aristas de P_j, para cada $0 \leq j \leq b-1$. Se cumple que

$$B_j = \{2+jl, 3+jl, ..., \frac{b'-3}{2}+jl, \frac{b'-1}{2}+(j+1)l, \frac{b'+1}{2}+jl, ..., b'+jl\}.$$

Por tanto, $B = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_{b-1}$ contiene $b(b'-1)$ aristas, por lo que aun faltan otras b aristas para conseguir un total de $r/2$. Se ofrece a continuación un esquema de cómo obtener esas aristas:

1. Sea G un grafo circulante auxiliar cuyos vértices son $v_0, v_1, ..., v_{2^d a'-1}$, y sea C un ciclo hamiltoniano contenido en G. Se orienta el ciclo C para obtener un ciclo dirigido $\overrightarrow{C}$.
2. Si existe una arista en $\overrightarrow{C}$ de v_i a v_k (de longitud $k-i$), se inserta una arista de longitud $(k-i+1)l-1$ que une el vértice final de $P_{j,i}$ con el vértice inicial de $P_{j,k}$. Si se sigue este proceso con cada arista de $\overrightarrow{C}$ se tiene que los caminos de P_j se unen entre ellos formando un ciclo de longitud m.
3. Como la arista que une el vértice final de $P_{j,i}$ al vértice inicial de $P_{j,k}$ tiene distinta longitud que la que une el vértice final de $P_{j,k}$ al vértice inicial de $P_{j,i}$, se utiliza ahora la orientación opuesta de C, esto es, $\overleftarrow{C}$, de modo que se unen los caminos de P_t, $t \neq j$, para formar un ciclo de longitud m. Todas estas aristas tienen longitud congruente con $\pm 1 \mod l$, y por tanto no habían sido usadas en las construcciones de $\{P_j : 0 \leq j \leq b-1\}$.

Por el Teorema 3.14, cualquier grafo circulante 4-regular puede descomponerse en dos ciclos hamiltonianos. Se eligen dos longitudes s_1 y s_2 de G de modo que $mcd(s_1, s_2) = 1$, de manera que el grafo circulante cuyo conjunto de conexión es $\{s_1, s_2\}$ pueda descomponerse en dos ciclos hamiltonianos, los cuales se orientan de dos formas cada uno. De este modo, se usan cuatro orientaciones para formar cuatro ciclos de longitud m. Estos utilizan las aristas congruentes con $\pm 1 \mod l$ de $H(n-2, B)$.

Una vez conseguidos los ciclos de longitud m, se rotan mediante la permutación σ, de modo que

$$\{C_j, \sigma(C_j), \sigma^2(C_j), ..., \sigma^{l-1}(C_j) : 0 \leq j \leq b-1\}$$

es una descomposición de $H(n-2, B)$ en C_m.

$\square$

Capítulo 4

Otros resultados sobre descomposiciones.

A lo largo del trabajo se han mostrado varios tipos de descomposiciones de K_n y $K_n - I$ siguiendo varios métodos: uso de ciclos hamiltonianos, distinción de la paridad de m y n, construcciones de carácter cíclico mediante el uso de permutaciones, etc. Este capítulo tiene como principal objetivo dar a conocer otras aportaciones al estudio de este tipo de descomposiciones acerca de los casos que faltan por analizar. Para ello se muestran a continuación algunos de los teoremas más importantes conocidos, relacionándolos con sus autores. No obstante, a diferencia de los resultados vistos con anterioridad no se entrará en detalle acerca de su demostración o cómo construir la descomposición.

Del mismo modo que en el Teorema 3.16, Alspach y Gavlas [2] llegaron a un resultado similar para el grafo completo K_n:

Teorema 4.1. *Sean n y m dos números naturales impares con $3 \leq m \leq n$. Entonces $C_m \mid K_n$ si y sólo si $n(n-1) \equiv 0 \mod 2m$.*

Ambos resultados son muy importantes porque concluyen que si la paridad de m y n coinciden, los grafos K_n y $K_n - I$ (según corresponda) pueden descomponerse en ciclos disjuntos si se verifican las condiciones necesarias para que se puedan dar tales descomposiciones. Por otro lado, quedan un par de casos por resolverse: ¿qué ocurre si n y m tienen distinta paridad? Sajna [16] ofreció una construcción para las descomposiciones de estos casos, completando los siguientes resultados:

Teorema 4.2. *$C_m \mid K_n$ si n es impar, m es par, $4 \leq m \leq n$ y $n(n-1) \equiv 0 \mod 2m$.*

Teorema 4.3. *$C_m \mid K_n - I$ si n es par, m es impar, $3 \leq m \leq n$ y $n(n-2) \equiv 0 \mod 2m$.*

Ahora bien, en la mayoría de los resultados que se han visto la longitud de los ciclos que descomponen los grafos es siempre la misma, esto es, m es un valor fijo. No obstante, se puede descomponer el grafo completo en ciclos de distintas longitudes $(m_1, m_2, ..., m_r)$, como se ve en el siguiente resultado de Wu y Fu [6]:

Teorema 4.4. *Sean $m_1, m_2, ..., m_k$ enteros positivos de modo que $m_i \geq 3$ para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, y que además verifican que $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Entonces existe una descomposición cíclica de K_{2n+1} en ciclos $C_{m_1}, C_{m_2}, ..., C_{m_k}$.*

Veamos un caso particular de descomposición de K_n proporcionado por Hilton [8], en el que además de utilizar ciclos de distinta longitud, se especifica cuántos de cada tipo son necesarios:

Teorema 4.5. *Sea $n \geq 3$ un entero positivo y sean p, q y r enteros no negativos. Entonces K_n (si n es impar) o $K_n - I$ (si n es par) se pueden descomponer en p C_4, q C_6 y r C_8 si y sólo si*

1. $4p+6q+8r = \begin{cases} |E(K_n)| & \text{si } n \text{ es impar,} \\ |E(K_n - I)| & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

2. *Todos los ciclos tienen como máximo longitud n.*

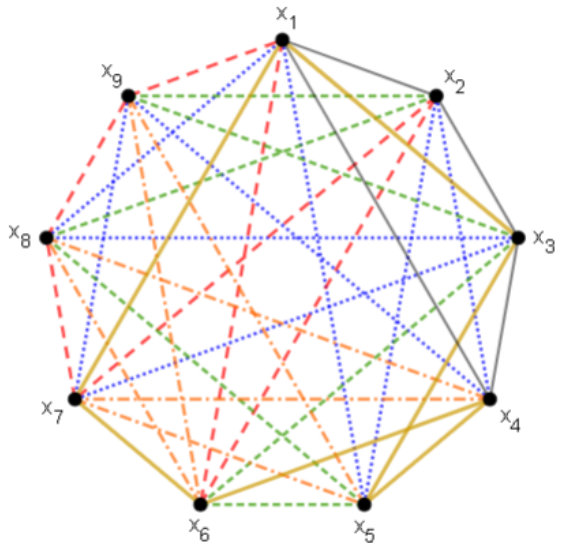


Figura 4.1: Descomposición de K_9 en un C_4, cuatro C_6 y un C_8.

Se puede conseguir un resultado similar para el grafo completo bipartito:

Teorema 4.6. *$K_{n,m}$ se puede descomponer en p C_4, q C_6 y r C_8 si y sólo si*

1. *m y n son pares.*

2. *Ningún ciclo tiene longitud mayor que $2 \cdot min\{m, n\}$.*

3. *$mn = 4p + 6q + 8r$.*

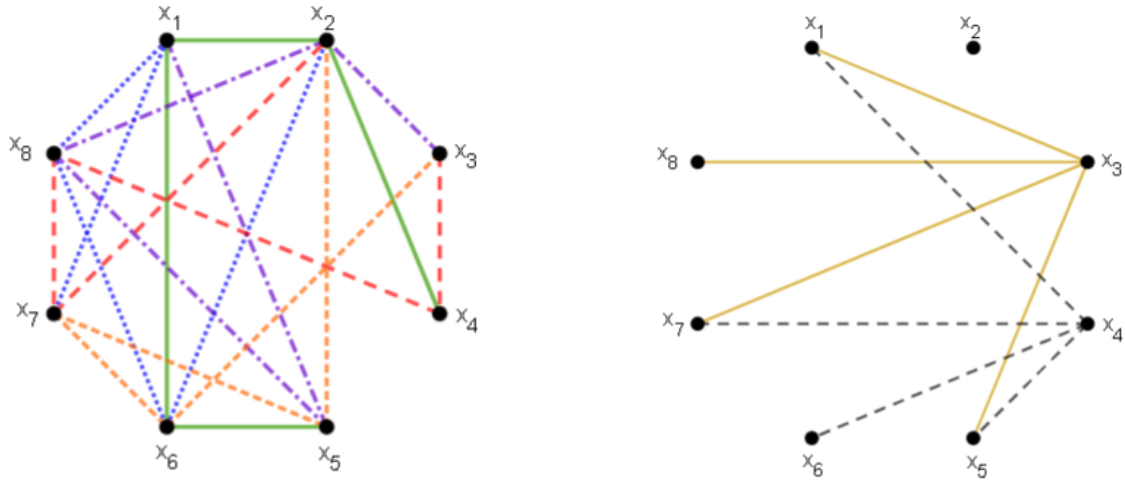
4. *Si $m = n = 4$, entonces $r \neq 1$.*

En todos estos casos nos hemos centrado en descomposiciones en ciclos. No obstante, existen numerosas descomposiciones de grafos en caminos, circuitos, estrellas... Se llama estrella de k aristas al grafo bipartito completo $K_{1,k}$ ($S_{k+1} \equiv K_{1,k}$). Aquí se muestra un ejemplo proporcionado por Ilayaraja, Sowndhariya y Muthusamy [9]:

Teorema 4.7. *Sean r y s dos enteros no negativos y n un entero positivo tal que $n \geq 16$. Entonces K_n se puede descomponer en r P_5 y s S_5 si y sólo si $4(r + s) = |E(K_n)|$.*

Lema 4.8. *Si $n = 8, 9$, entonces K_n se puede descomponer en r P_5 y s S_5.*

Ejemplo 4.9. *Veamos cómo descomponer K_8 en cinco caminos P_5 y dos estrellas S_5 (caso $r = 5$ y $s = 2$). En la siguiente figura se muestran a la izquierda los caminos y a la derecha las estrellas:*



Nótese que $S_5 \equiv K_{1,4}$. Finalmente, si se posponen ambas imágenes se obtiene la descomposición:

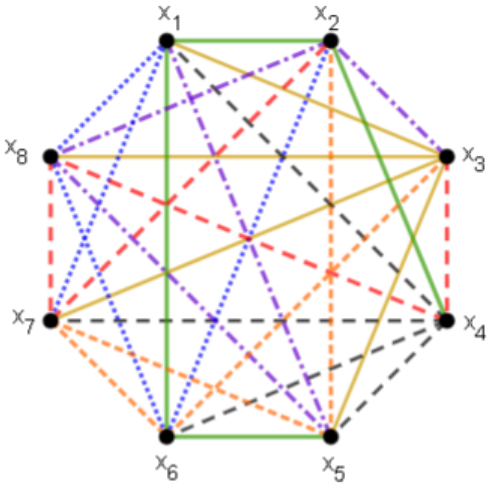


Figura 4.2: Descomposición de K_8 en cinco P_5 y dos S_5.

Bibliografía

[1] Alspach, B. (2008). *The wonderful Walecki construction*, Bulletin of the ICA, Vol. 52, 7–20.

[2] Alspach, B., & Gavlas, H. (2001). Cycle Decompositions of K_n and $K_n - I$. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 81(1), 77–99.

[3] Alspach, B., & Varma, B.N. (1980). *Decomposing complete graphs into cycles of length* $2p^e$, Ann. Discrete Math. 9, 155-162.

[4] Barreda, S. (2022). *Ejemplos de descomposiciones.* https://www.geogebra.org/u/sergio-barreda

[5] Bermond, J.C., Favaron, O., & Maheo, M. (1989). *Hamiltonian decomposition of Cayley graphs of degree 4*, J. Combin. Theory Ser. B 46, 142-153.

[6] Fu, H. L., & Wu, S. L. (2004). *Cyclically decomposing the complete graph into cycles*, Discrete Mathematics, 282 (1–3), 267–273.

[7] Häggkvist, R. (1985). *A lemma on cycle decompositions*, Ann. Discrete Math. 27, 227-232.

[8] Hilton, A. J. W., & Johnson, M. (2006). *Cycle decompositions of the complete graph*, Ars Combinatoria - Waterloo then Winnipeg, 1–12.

[9] Ilayaraja, M., Sowndhariya, K., & Muthusamy, A. (2020). *Decomposition of product graphs into paths and stars on five vertices*, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 17(3), 777–783.

[10] Kirkman, T.P. (1850). *Query VI*, Lady's and Gentleman's Diary, 48.

[11] Kotzig, A. (1965). *On the decomposition of a complete graph into 4k-gons* (en ruso), Matematicko-fyzikálny časopis , Vol. 15, 229–233.

[12] KSU — Faculty Web - Sarah's Oberwolfach Problem Page. Kennesaw State University. https://facultyweb.kennesaw.edu/shollid4/oberwolfach.php

[13] Lucas, D.E. (1892). *Récréations Mathématiques, vol. II*, Gauthiers Villars, Paris.

[14] Rosa, A. (1966). *On cyclic decompositions of the complete graph into (4m+2)-gons*, Mat.-Fyz. Cas. 16, 349-352.

[15] Sadornil, D. (2017). Apuntes de "Matemática Discreta". Universidad de Cantabria.

[16] Sajna, M. (1999). *Cycle decompositions of* K_n *and* $K_n - I$, PhD thesis, Simon Fraser University, 1–151.

[17] Sotteau, D. (1981). *Decomposition of* $K_{m,n}$ *(*$K^*_{m,n}$*) into cycles (circuits) of length 2k.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, 29 (1981), 75–81.

[18] Tarsi, M. (1983). *Decomposition of a complete multigraph into simple paths: Nonbalanced handcuffed designs*, J. Combin. Theory Ser. A 34, 60-70.

Apéndice A

Ejemplos de descomposiciones

Ejemplo A.1. ***Descomposición de*** K_{21} ***en*** C_{14}**.** *Se muestra la descomposición* $C_{14} \mid K_{21}$ *para seguir la demostración del Teorema 2.13 de manera más eficaz. Se tiene que* $m = 7$*. Se cumple que* $|E(K_{21})| = \binom{21}{2} = 210$*, por lo que serán necesarios* $\frac{210}{14} = 15$ *ciclos* C_{14} *para lograr la descomposición.*

La descomposición hamiltoniana de K_7 *está formada por los tres ciclos siguientes:*

$$C^1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_1\}$$

$$C^2 = \{x_1, x_3, x_5, x_2, x_7, x_4, x_6, x_1\}$$

$$C^3 = \{x_1, x_5, x_7, x_3, x_6, x_2, x_4, x_1\}$$

Se empareja C^1 *con* C^2 *para formar el ciclo* C^**, que tras permutarlo dos veces, se obtienen los tres ciclos:*

$$C^* = \{x_{11}, x_{32}, x_{52}, x_{62}, x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}, x_{53}, x_{21}, x_{73}, x_{41}, x_{61}, x_{71}, x_{11}\}$$

$$\sigma(C^*) = \{x_{12}, x_{33}, x_{53}, x_{63}, x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{22}, x_{71}, x_{42}, x_{62}, x_{72}, x_{12}\}$$

$$\sigma^2(C^*) = \{x_{13}, x_{31}, x_{51}, x_{61}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{52}, x_{23}, x_{72}, x_{43}, x_{63}, x_{73}, x_{13}\}$$

Las aristas de C^* *que siguen el orden marcado por el ciclo* C^1 *son*

$$\{x_{52}x_{62}, x_{13}x_{23}, x_{23}x_{33}, x_{33}x_{43}, x_{43}x_{53}, x_{61}x_{71}, x_{71}x_{11}\}$$

Del mismo modo, las aristas obtenidas tras permutar las del conjunto anterior y que están contenidas en los ciclos $\sigma(C^*)$ *y* $\sigma^2(C^*)$ *también siguen el orden marcado por* C^1*. Por tanto, las aristas restantes siguiendo el orden marcado por el ciclo* C^1 *son las siguientes:*

$$\begin{array}{llllll}
x_{52}x_{61}, & x_{52}x_{63}, & x_{53}x_{61}, & x_{53}x_{62}, & x_{51}x_{62}, & x_{51}x_{63}, \\
x_{13}x_{21}, & x_{13}x_{22}, & x_{11}x_{22}, & x_{11}x_{23}, & x_{12}x_{21}, & x_{12}x_{23}, \\
x_{23}x_{31}, & x_{23}x_{32}, & x_{21}x_{32}, & x_{21}x_{33}, & x_{22}x_{31}, & x_{22}x_{33}, \\
x_{33}x_{41}, & x_{33}x_{42}, & x_{31}x_{42}, & x_{31}x_{43}, & x_{32}x_{41}, & x_{32}x_{43}, \\
x_{43}x_{51}, & x_{43}x_{52}, & x_{41}x_{52}, & x_{41}x_{53}, & x_{42}x_{53}, & x_{42}x_{51}, \\
x_{61}x_{73}, & x_{61}x_{72}, & x_{62}x_{71}, & x_{62}x_{73}, & x_{63}x_{71}, & x_{63}x_{72}, \\
x_{71}x_{12}, & x_{71}x_{13}, & x_{72}x_{11}, & x_{72}x_{13}, & x_{73}x_{11}, & x_{73}x_{12}.
\end{array}$$

Con estas aristas se generan tres nuevos ciclos C_{14}*, que son los siguientes:*

$$C^*_{12} = \{x_{11}, x_{22}, x_{31}, x_{42}, x_{51}, x_{62}, x_{71}, x_{12}, x_{21}, x_{32}, x_{41}, x_{52}, x_{61}, x_{72}, x_{11}\}$$

$$C^*_{13} = \{x_{11}, x_{23}, x_{31}, x_{43}, x_{51}, x_{63}, x_{71}, x_{13}, x_{21}, x_{33}, x_{41}, x_{53}, x_{61}, x_{73}, x_{11}\}$$

$$C^*_{23} = \{x_{12}, x_{23}, x_{32}, x_{43}, x_{52}, x_{63}, x_{72}, x_{13}, x_{22}, x_{33}, x_{42}, x_{53}, x_{62}, x_{73}, x_{12}\}$$

Las aristas de C^* que siguen el orden marcado por el ciclo C^2 son

$$\{x_{11}x_{32}, x_{32}x_{52}, x_{62}x_{13}, x_{53}x_{21}, x_{21}x_{73}, x_{73}x_{41}, x_{41}x_{61}\}$$

Igualmente, las aristas obtenidas tras permutar las del conjunto anterior y que están contenidas en los ciclos $\sigma(C^*)$ y $\sigma^2(C^*)$ también siguen el orden marcado por C^2. Por tanto, las aristas restantes siguiendo el orden marcado por el ciclo C^2 son las siguientes:

$$\begin{array}{llllll}
x_{11}x_{31}, & x_{11}x_{33}, & x_{12}x_{31}, & x_{12}x_{32}, & x_{13}x_{32}, & x_{13}x_{33}, \\
x_{32}x_{51}, & x_{32}x_{53}, & x_{33}x_{51}, & x_{33}x_{52}, & x_{31}x_{52}, & x_{31}x_{53}, \\
x_{62}x_{11}, & x_{62}x_{12}, & x_{63}x_{12}, & x_{63}x_{13}, & x_{61}x_{11}, & x_{61}x_{13}, \\
x_{53}x_{22}, & x_{53}x_{23}, & x_{51}x_{21}, & x_{51}x_{23}, & x_{52}x_{21}, & x_{52}x_{22}, \\
x_{21}x_{71}, & x_{21}x_{72}, & x_{22}x_{72}, & x_{22}x_{73}, & x_{23}x_{71}, & x_{23}x_{73}, \\
x_{73}x_{42}, & x_{73}x_{43}, & x_{71}x_{41}, & x_{71}x_{43}, & x_{72}x_{41}, & x_{72}x_{42}, \\
x_{41}x_{62}, & x_{41}x_{63}, & x_{42}x_{61}, & x_{42}x_{63}, & x_{43}x_{61}, & x_{43}x_{62}.
\end{array}$$

Con estas aristas se generan tres nuevos ciclos C_{14}, que son los siguientes:

$$C' = \{x_{11}, x_{31}, x_{52}, x_{21}, x_{72}, x_{41}, x_{62}, x_{12}, x_{32}, x_{51}, x_{23}, x_{73}, x_{42}, x_{61}, x_{11}\}$$

$$C'' = \{x_{13}, x_{33}, x_{51}, x_{21}, x_{71}, x41, x_{63}, x_{12}, x_{31}, x_{53}, x_{22}, x_{73}, x_{43}, x_{61}, x_{13}\}$$

$$C''' = \{x_{11}, x_{33}, x_{52}, x_{22}, x_{72}, x_{42}, x_{63}, x_{13}, x_{32}, x_{53}, x_{23}, x_{71}, x_{43}, x_{62}, x_{11}\}$$

Finalmente, a partir del ciclo C^3, se forma el ciclo C de la siguiente manera:

$$C = \{x_{11}, x_{12}, x_{52}, x_{51}, x_{71}, x_{72}, x_{32}, x_{31}, x_{61}, x_{62}, x_{22}, x_{23}, x_{43}, x_{41}, x_{11}\}$$

Si se permuta dos veces, se obtienen otros dos ciclos C_{14}, que son los siguientes:

$$\sigma(C) = \{x_{12}, x_{13}, x_{53}, x_{52}, x_{72}, x_{73}, x_{33}, x_{32}, x_{62}, x_{63}, x_{23}, x_{21}, x_{41}, x_{42}, x_{12}\}$$

$$\sigma^2(C) = \{x_{13}, x_{11}, x_{51}, x_{53}, x_{73}, x_{71}, x_{31}, x_{33}, x_{63}, x_{61}, x_{21}, x_{22}, x_{42}, x_{43}, x_{13}\}$$

Las aristas de C que siguen el orden marcado por el ciclo C^3 son

$$\{x_{12}x_{52}, x_{51}x_{71}, x_{72}x_{32}, x_{31}x_{61}, x_{62}x_{22}, x_{23}x_{43}, x_{41}x_{11}\}$$

Las aristas obtenidas tras permutar las del conjunto anterior y que están contenidas en los ciclos $\sigma(C)$ y $\sigma^2(C)$ también siguen el orden marcado por C^3. Por tanto, las aristas restantes siguiendo el orden marcado por el ciclo C^3 son las siguientes:

$$\begin{array}{llllll}
x_{12}x_{51}, & x_{12}x_{53}, & x_{13}x_{51}, & x_{13}x_{52}, & x_{11}x_{52}, & x_{11}x_{53}, \\
x_{51}x_{72}, & x_{51}x_{73}, & x_{52}x_{71}, & x_{52}x_{73}, & x_{53}x_{71}, & x_{53}x_{72}, \\
x_{72}x_{31}, & x_{72}x_{33}, & x_{73}x_{31}, & x_{73}x_{32}, & x_{71}x_{32}, & x_{71}x_{33}, \\
x_{31}x_{62}, & x_{31}x_{63}, & x_{32}x_{61}, & x_{32}x_{63}, & x_{33}x_{61}, & x_{33}x_{62}, \\
x_{62}x_{21}, & x_{62}x_{23}, & x_{63}x_{21}, & x_{63}x_{22}, & x_{61}x_{22}, & x_{61}x_{23}, \\
x_{23}x_{41}, & x_{23}x_{42}, & x_{21}x_{42}, & x_{21}x_{43}, & x_{22}x_{41}, & x_{22}x_{43}, \\
x_{41}x_{12}, & x_{41}x_{13}, & x_{42}x_{13}, & x_{42}x_{11}, & x_{43}x_{11}, & x_{43}x_{12}.
\end{array}$$

Con estas aristas se generan tres nuevos ciclos C_{14}, que son los siguientes:

$$C_{12} = \{x_{11}, x_{52}, x_{71}, x_{32}, x_{61}, x_{22}, x_{41}, x_{12}, x_{51}, x_{72}, x_{31}, x_{62}, x_{21}, x_{42}, x_{11}\}$$

$$C_{13} = \{x_{11}, x_{53}, x_{71}, x_{33}, x_{61}, x_{23}, x_{41}, x_{13}, x_{51}, x_{73}, x_{31}, x_{63}, x_{21}, x_{43}, x_{11}\}$$

$$C_{23} = \{x_{12}, x_{53}, x_{72}, x_{33}, x_{62}, x_{23}, x_{42}, x_{13}, x_{52}, x_{73}, x_{32}, x_{63}, x_{22}, x_{43}, x_{12}\}$$

Con todo esto hemos obtenido un total de 15 ciclos de longitud 14 que son disjuntos y por tanto constituyen la descomposición buscada, $C_{14} \mid K_{21}$.

Enlace para ver esta descomposición: https://www.geogebra.org/m/a2znkem6

Ejemplo A.2. ***Descomposición de*** K_{25} ***en*** C_{10}. *Se analiza la descomposición* $C_{10} \mid K_{25}$ *conseguida a partir de la demostración del Teorema 2.14 (concretamente se trata del caso* $m = 5$*). Esta descomposición consta de* $\frac{|E(K_{25})|}{10} = \frac{300}{10} = 30$ *ciclos de longitud 10.*

La descomposición hamiltoniana de K_5 *está formada por dos ciclos:*

$$C^1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1\}$$
$$C^2 = \{x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_1\}$$

Como sólo hay dos ciclos en este caso no se emparejan, sino que directamente se construye el ciclo C *de la demostración. En primer lugar se emplea el ciclo* C^1*, con el que se consiguen los siguientes ciclos tras permutar:*

$$\begin{aligned}
C &= \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}, x_{44}, x_{45}, x_{55}, x_{51}, x_{11}\} \\
\sigma(C) &= \{x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45}, x_{41}, x_{51}, x_{52}, x_{12}\} \\
\sigma^2(C) &= \{x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{35}, x_{31}, x_{41}, x_{42}, x_{52}, x_{53}, x_{13}\} \\
\sigma^3(C) &= \{x_{14}, x_{15}, x_{25}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{42}, x_{43}, x_{53}, x_{54}, x_{14}\} \\
\sigma^4(C) &= \{x_{15}, x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{33}, x_{43}, x_{44}, x_{54}, x_{55}, x_{15}\}
\end{aligned}$$

Ahora bien, con las aristas restantes de estos ciclos se generan otros diez nuevos ciclos disjuntos C_{10}*, los cuales son:*

$$\begin{aligned}
C_{12} &= \{x_{11}, x_{22}, x_{31}, x_{42}, x_{51}, x_{12}, x_{21}, x_{32}, x_{41}, x_{52}, x_{11}\} \\
C_{13} &= \{x_{11}, x_{23}, x_{31}, x_{43}, x_{51}, x_{13}, x_{21}, x_{33}, x_{41}, x_{53}, x_{11}\} \\
C_{14} &= \{x_{11}, x_{24}, x_{31}, x_{44}, x_{51}, x_{14}, x_{21}, x_{34}, x_{41}, x_{54}, x_{11}\} \\
C_{15} &= \{x_{11}, x_{25}, x_{31}, x_{45}, x_{51}, x_{15}, x_{21}, x_{35}, x_{41}, x_{55}, x_{11}\} \\
C_{23} &= \{x_{12}, x_{23}, x_{32}, x_{43}, x_{52}, x_{13}, x_{22}, x_{33}, x_{42}, x_{53}, x_{12}\} \\
C_{24} &= \{x_{12}, x_{24}, x_{32}, x_{44}, x_{52}, x_{14}, x_{22}, x_{34}, x_{42}, x_{54}, x_{12}\} \\
C_{25} &= \{x_{12}, x_{25}, x_{32}, x_{45}, x_{52}, x_{15}, x_{22}, x_{35}, x_{42}, x_{55}, x_{12}\} \\
C_{34} &= \{x_{13}, x_{24}, x_{33}, x_{44}, x_{53}, x_{14}, x_{23}, x_{34}, x_{43}, x_{54}, x_{13}\} \\
C_{35} &= \{x_{13}, x_{25}, x_{33}, x_{45}, x_{53}, x_{15}, x_{23}, x_{35}, x_{43}, x_{55}, x_{13}\} \\
C_{45} &= \{x_{14}, x_{25}, x_{34}, x_{45}, x_{54}, x_{15}, x_{24}, x_{35}, x_{44}, x_{55}, x_{14}\}
\end{aligned}$$

Por otro lado, se utiliza el ciclo C^2 del mismo modo que anteriormente se usó el ciclo C^1 para conseguir los ciclos:

$$\begin{aligned}
C' &= \{x_{11}, x_{12}, x_{32}, x_{33}, x_{53}, x_{54}, x_{24}, x_{25}, x_{45}, x_{41}, x_{11}\} \\
\sigma(C') &= \{x_{12}, x_{13}, x_{33}, x_{34}, x_{54}, x_{55}, x_{25}, x_{21}, x_{41}, x_{42}, x_{12}\} \\
\sigma^2(C') &= \{x_{13}, x_{14}, x_{34}, x_{35}, x_{55}, x_{51}, x_{21}, x_{22}, x_{42}, x_{43}, x_{13}\} \\
\sigma^3(C') &= \{x_{14}, x_{15}, x_{35}, x_{31}, x_{51}, x_{52}, x_{22}, x_{23}, x_{43}, x_{44}, x_{14}\} \\
\sigma^4(C') &= \{x_{15}, x_{11}, x_{31}, x_{32}, x_{52}, x_{53}, x_{23}, x_{24}, x_{44}, x_{45}, x_{15}\}
\end{aligned}$$

Como antes, las aristas restantes a estos cinco ciclos permiten construir otros diez ciclos C_{10} disjuntos:

$$\begin{aligned}
C'_{12} &= \{x_{11}, x_{32}, x_{51}, x_{22}, x_{41}, x_{12}, x_{31}, x_{52}, x_{21}, x_{42}, x_{11}\} \\
C'_{13} &= \{x_{11}, x_{33}, x_{51}, x_{23}, x_{41}, x_{13}, x_{31}, x_{53}, x_{21}, x_{43}, x_{11}\} \\
C'_{14} &= \{x_{11}, x_{34}, x_{51}, x_{24}, x_{41}, x_{14}, x_{31}, x_{54}, x_{21}, x_{44}, x_{11}\} \\
C'_{15} &= \{x_{11}, x_{35}, x_{51}, x_{25}, x_{41}, x_{15}, x_{31}, x_{55}, x_{21}, x_{45}, x_{11}\} \\
C'_{23} &= \{x_{12}, x_{33}, x_{52}, x_{23}, x_{42}, x_{13}, x_{32}, x_{53}, x_{22}, x_{43}, x_{12}\} \\
C'_{24} &= \{x_{12}, x_{34}, x_{52}, x_{24}, x_{42}, x_{14}, x_{32}, x_{54}, x_{22}, x_{44}, x_{12}\} \\
C'_{25} &= \{x_{12}, x_{35}, x_{52}, x_{25}, x_{42}, x_{15}, x_{32}, x_{55}, x_{22}, x_{45}, x_{12}\} \\
C'_{34} &= \{x_{13}, x_{34}, x_{53}, x_{24}, x_{43}, x_{14}, x_{33}, x_{54}, x_{23}, x_{44}, x_{13}\} \\
C'_{35} &= \{x_{13}, x_{35}, x_{53}, x_{25}, x_{43}, x_{15}, x_{33}, x_{55}, x_{23}, x_{45}, x_{13}\} \\
C'_{45} &= \{x_{14}, x_{35}, x_{54}, x_{25}, x_{44}, x_{15}, x_{34}, x_{55}, x_{24}, x_{45}, x_{14}\}
\end{aligned}$$

De este modo se tienen un total de 30 ciclos C_{10} disjuntos, de manera que $C_{10} \mid K_{25}$.

Enlace para ver esta descomposición: https://www.geogebra.org/m/vpahy5h7

Ejemplo A.3. ***Descomposición de $K_{12,8}$ en C_{12}.*** *Esta descomposición del grafo completo bipartito $K_{12,8}$ contiene $\frac{|E(K_{12,8})|}{12} = \frac{12 \cdot 8}{12} = 8$ ciclos de longitud 12. Teniendo en cuenta el Teorema 2.15, como $m = 12$, $n = 8$ y $k = 9$, se tiene que $p = 3$, $q = 2$, $r = 4$ y $s = 4$. Los ciclos buscados son $C_{\lambda,\mu}$, con $0 \leq \lambda \leq 3$ y $0 \leq \mu \leq 1$, donde*

$$C_{\lambda,\mu} = (\cdots(\cdots x_{3(2\mu+i)+j}\ y_{2(\lambda+j)+i} \cdots)_{0 \leq i \leq 1})_{0 \leq j \leq 2}.$$

Los subíndices de x se toman $\mod 12$, *y los subíndices de y* $\mod 8$. *Por tanto, los ciclos son los siguientes:*

$$\begin{aligned}
C_{0,0} &= \{x_0, y_0, x_3, y_1, x_1, y_2, x_4, y_3, x_2, y_4, x_5, y_5, x_0\} \\
C_{0,1} &= \{x_6, y_0, x_9, y_1, x_7, y_2, x_{10}, y_3, x_8, y_4, x_{11}, y_5, x_6\} \\
C_{1,0} &= \{x_0, y_2, x_3, y_3, x_1, y_4, x_4, y_5, x_2, y_6, x_5, y_7, x_0\} \\
C_{1,1} &= \{x_6, y_2, x_9, y_3, x_7, y_4, x_{10}, y_5, x_8, y_6, x_{11}, y_7, x_6\} \\
C_{2,0} &= \{x_0, y_4, x_3, y_5, x_1, y_6, x_4, y_7, x_2, y_0, x_5, y_1, x_0\} \\
C_{2,1} &= \{x_6, y_4, x_9, y_5, x_7, y_6, x_{10}, y_7, x_8, y_0, x_{11}, y_1, x_6\} \\
C_{3,0} &= \{x_0, y_6, x_3, y_7, x_1, y_0, x_4, y_1, x_2, y_2, x_5, y_3, x_0\} \\
C_{3,1} &= \{x_6, y_6, x_9, y_7, x_7, y_0, x_{10}, y_1, x_8, y_2, x_{11}, y_3, x_6\}
\end{aligned}$$

Enlace para ver esta descomposición: https://www.geogebra.org/m/tmpqrxz5

Ejemplo A.4. ***Descomposición de*** $K_{20} - I$ ***en*** C_{12}***.*** *Para conseguir la descomposición* $C_{12} \mid K_{20} - I$ *se tendrán en cuenta el Teorema 3.16 y el Lema 3.9. Se tiene que* $n = 20$, $m = 12$ *y* $r = 8$, *por lo que* $K_{20} - I \cong H^*(20, A)$ *con* $A = \{1, 2, 3, ..., 8\}$. *A su vez,* $H^*(20, A) = H^*(20, A - B) \cup H(18, B)$ *siendo* $B = \{1, 3, 4, 8\}$, *y en consecuencia* $A - B = \{2, 5, 6, 7\}$. *Por tanto, la descomposición se separa en dos partes:*

- *Descomposición* $C_{12} \mid H(18, B)$. *Como* $|E(H(18, B))| = 72$, *serán necesarios* $\frac{72}{12} = 6$ *ciclos. Aplicando el Teorema 3.16, se crea el camino simple* $P_{0,0} = \{x_0, x_3, x_{17}, x_7, x_6\}$. *Se aplica ahora la permutación* $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_{17})$, *de modo que* $P_{0,1} = \sigma^6(P_{0,0}) = \{x_6, x_9, x_5, x_{13}, x_{12}\}$ *y* $P_{0,2} = \sigma^{12}(P_{0,0}) = \{x_{12}, x_{15}, x_{11}, x_1, x_0\}$. *Con estos caminos se puede formar el ciclo* $C_0 = P_{0,0} \cup P_{0,1} \cup P_{0,2}$. *Si se aplica* σ *sobre este ciclo, se obtiene la descomposición buscada:*

$$\begin{aligned}
C_0 &= \{x_0, x_3, x_{17}, x_7, x_6, x_9, x_5, x_{13}, x_{12}, x_{15}, x_{11}, x_1, x_0\} \\
\sigma(C_0) &= \{x_1, x_4, x_0, x_8, x_7, x_{10}, x_6, x_{14}, x_{13}, x_{16}, x_{12}, x_2, x_1\} \\
\sigma^2(C_0) &= \{x_2, x_5, x_1, x_9, x_8, x_{11}, x_7, x_{15}, x_{14}, x_{17}, x_{13}, x_3, x_2\} \\
\sigma^3(C_0) &= \{x_3, x_6, x_2, x_{10}, x_9, x_{12}, x_8, x_{16}, x_{15}, x_0, x_{14}, x_4, x_3\} \\
\sigma^4(C_0) &= \{x_4, x_7, x_3, x_{11}, x_{10}, x_{13}, x_9, x_{17}, x_{16}, x_1, x_{15}, x_5, x_4\} \\
\sigma^5(C_0) &= \{x_5, x_8, x_4, x_{12}, x_{11}, x_{14}, x_{10}, x_0, x_{17}, x_2, x_{16}, x_6, x_5\}
\end{aligned}$$

- *Descomposición* $C_{12} \mid H^*(20, A - B)$. *Como* $|E(H^*(20, A - B))| = 108$, *serán necesarios* $\frac{108}{12} = 9$ *ciclos. Se emplea ahora el Lema 3.9 para construir el camino simple* $P = \{x_0, x_2, x_{15}, x_3, x_{14}\}$. *Sea ahora* $\rho = (x_0, x_1, ..., x_{17})(u)(w)$ *una permutación. Se tiene que* $\rho^9(P) = \{x_9, x_{11}, x_6, x_{12}, x_5\}$ *es un camino simple que contiene las aristas diametralmente opuestas a las de* P. *Con estos dos caminos se puede formar el ciclo*

$$C = \{u, x_0, x_2, x_{15}, x_3, x_{14}, w, x_5, x_{12}, x_6, x_{11}, x_9, u\}$$

Si se aplica a C *la permutación* ρ, *se obtiene la descomposición:*

$$\begin{aligned}
C &= \{u, x_0, x_2, x_{15}, x_3, x_{14}, w, x_5, x_{12}, x_6, x_{11}, x_9, u\} \\
\rho(C) &= \{u, x_1, x_3, x_{16}, x_4, x_{15}, w, x_6, x_{13}, x_7, x_{12}, x_{10}, u\} \\
\rho^2(C) &= \{u, x_2, x_4, x_{17}, x_5, x_{16}, w, x_7, x_{14}, x_8, x_{13}, x_{11}, u\} \\
\rho^3(C) &= \{u, x_3, x_5, x_0, x_6, x_{17}, w, x_8, x_{15}, x_9, x_{14}, x_{12}, u\} \\
\rho^4(C) &= \{u, x_4, x_6, x_1, x_7, x_0, w, x_9, x_{16}, x_{10}, x_{15}, x_{13}, u\} \\
\rho^5(C) &= \{u, x_5, x_7, x_2, x_8, x_1, w, x_{10}, x_{17}, x_{11}, x_{16}, x_{14}, u\} \\
\rho^6(C) &= \{u, x_6, x_8, x_3, x_9, x_2, w, x_{11}, x_0, x_{12}, x_{17}, x_{15}, u\} \\
\rho^7(C) &= \{u, x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_3, w, x_{12}, x_1, x_{13}, x_0, x_{16}, u\} \\
\rho^8(C) &= \{u, x_8, x_{10}, x_5, x_{11}, x_4, w, x_{13}, x_2, x_{14}, x_1, x_{17}, u\}
\end{aligned}$$

Se obtienen así 15 ciclos disjuntos de longitud 12, que efectivamente son los necesarios, ya que

$$\frac{|E(K_{20} - I)|}{12} = \frac{\frac{20 \cdot 18}{2}}{12} = \frac{360}{24} = 15.$$

Enlace para ver esta descomposición: https://www.geogebra.org/m/zx7cbn9w

Ejemplo A.5. ***Descomposición de*** $K_{42} - I$ ***en*** C_{24}**.** *La descomposición de* $K_{42} - I$ *en ciclos de longitud* 24 *consta de* $\frac{|E(K_{42}-I)|}{24} = 35$ *ciclos. Para conseguirlos se emplearán el Teorema 3.16 y el Lema 3.9. Se verifica que* $n = 42$, $m = 24$ *y* $r = 18$, *de modo que* $K_{42} - I \cong H^*(42, A)$ *con* $A = \{1, 2, 3, ..., 19\}$. *A su vez,* $H^*(42, A) = H^*(42, A - B) \cup H(40, B)$ *siendo* $B = \{1, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 17, 19\}$, *y por lo tanto* $A - B = \{2, 4, 5, 6, 10, 11, 14, 15, 16, 18\}$. *Se divide la descomposición en dos partes:*

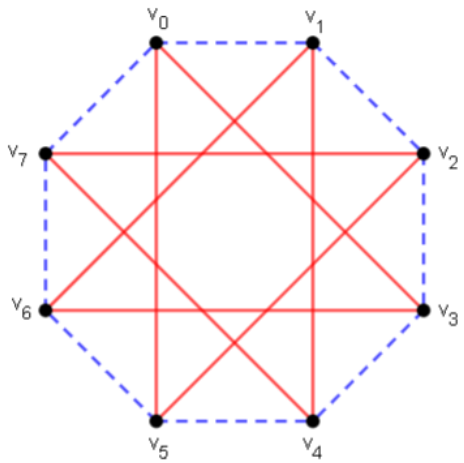
- *Descomposición* $C_{24} \mid H(40, B)$. *Para esta descomposición hacen falta* $\frac{|E(H(40,B)|}{24} = 15$ *ciclos, los cuales se obtienen empleando el Teorema 3.16. En primer lugar, se construye el camino* $P_{0,0} = \{x_0, x_3, x_{36}\}$. *A partir de él se utiliza la permutación* $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_{39})$ *para obtener los caminos*

$$P_{0,1} = \sigma^5(P_{0,0}), \;\; P_{0,2} = \sigma^{10}(P_{0,0}), \;\; P_{0,3} = \sigma^{15}(P_{0,0}), \;\; P_{0,4} = \sigma^{20}(P_{0,0}),$$

$$P_{0,5} = \sigma^{25}(P_{0,0}), \;\; P_{0,6} = \sigma^{30}(P_{0,0}), \;\; P_{0,7} = \sigma^{35}(P_{0,0}).$$

  Ahora se obtiene el camino $P_{1,0} = \{x_0, x_8, x_{36}\}$ *y del mismo modo que antes, se construyen los caminos* $P_{1,1}, P_{1,2}, ..., P_{1,7}$. *Se realiza el mismo proceso para crear el camino* $P_{2,0} = \{x_0, x_{13}, x_{36}\}$ *y los caminos* $P_{2,1}, P_{2,2}, ..., P_{2,7}$.

  Denotamos $P_0 = \{P_{0,0}, P_{0,1}, ..., P_{0,7}\}$, $P_1 = \{P_{1,0}, P_{1,1}, ..., P_{1,7}\}$ *y* $P_2 = \{P_{2,0}, P_{2,1}, ..., P_{2,7}\}$. *Sea* B_j, $0 \leq j \leq 2$, *el conjunto de las longitudes de las aristas de los caminos que forman el conjunto* P_j. *Se verifica que* $B_0 = \{3, 7\}$, $B_1 = \{8, 12\}$ *y* $B_2 = \{13, 17\}$. *Sea ahora* $B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 = \{3, 7, 8, 12, 13, 17\}$. *Nótese que para que* B *tenga* $\frac{r}{2} = \frac{18}{2} = 9$ *longitudes en total hacen falta añadir tres más a este conjunto. Para ello se utiliza un grafo circulante auxiliar* $G = H(8, \{1, 3\})$, *el cual se descompone en dos ciclos hamiltonianos:*



  Los dos ciclos hamiltonianos son

$$H_1 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_0\} \;\; \text{y} \;\; H_2 = \{v_0, v_3, v_6, v_1, v_4, v_7, v_2, v_5, v_0\}.$$

  Para construir los ciclos que necesitamos para la descomposición, tomamos las dos posibles orientaciones de H_1 *(*$\overrightarrow{H_1}, \overleftarrow{H_1}$*) y una de las orientaciones de* H_2 *(*$\overrightarrow{H_2}$*) ya que con ellas conseguiremos conectar los caminos que componen* P_0, P_1 *y* P_2.

Veamos cómo conectar los caminos de P_0. Sea $\overrightarrow{H_1} = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_0\}$. Como existe una arista entre v_0 y v_1, se inserta una arista de longitud 9 que une el vértice final de $P_{0,0}$ y el vértice inicial de $P_{0,1}$ ($x_{36}x_5$). Del mismo modo, como existe una arista entre v_1 y v_2 se inserta una arista de longitud 9 entre el vértice final de $P_{0,1}$ y el vértice inicial de $P_{0,2}$ (x_1x_{10}). Si se sigue este proceso con cada arista de $\overrightarrow{H_1}$ se consiguen unir los caminos de P_0 formando un ciclo de longitud 24:

$$C_0 = \{x_0, x_3, x_{36}, x_5, x_8, x_1, x_{10}, x_{13}, x_6, x_{15}, x_{18}, x_{11}, x_{20}, \\ x_{23}, x_{16}, x_{25}, x_{28}, x_{21}, x_{30}, x_{33}, x_{26}, x_{35}, x_{38}, x_{31}, x_0\}.$$

Se sigue el mismo método constructivo para conectar los caminos de P_1. Sea $\overleftarrow{H_1} = \{v_0, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_0\}$. Como existe una arista entre v_0 y v_7, se inserta una arista de longitud 1 que une el vértice final de $P_{1,0}$ y el vértice inicial de $P_{1,7}$ ($x_{36}x_{35}$). Del mismo modo, como existe una arista entre v_7 y v_6 se inserta una arista de longitud 1 entre el vértice final de $P_{1,7}$ y el vértice inicial de $P_{1,6}$ ($x_{31}x_{30}$). Si se sigue este proceso con cada arista de $\overrightarrow{H_1}$ se consiguen unir los caminos de P_1 formando un ciclo de longitud 24:

$$C_1 = \{x_0, x_8, x_{36}, x_{35}, x_3, x_{31}, x_{30}, x_{38}, x_{26}, x_{25}, x_{33}, x_{21}, x_{20}, \\ x_{28}, x_{16}, x_{15}, x_{23}, x_{11}, x_{10}, x_{18}, x_6, x_5, x_{13}, x_1, x_0\}.$$

Finalmente, para conectar los caminos de P_2 se utiliza el ciclo $\overrightarrow{H_2} = \{v_0, v_3, v_6, v_1, v_4, v_7, v_2, v_5, v_0\}$. Como existe una arista entre v_0 y v_3, se inserta una arista de longitud 19 que une el vértice final de $P_{2,0}$ y el vértice inicial de $P_{2,3}$ ($x_{36}x_{15}$). Del mismo modo, como existe una arista entre v_3 y v_6 se inserta una arista de longitud 19 entre el vértice final de $P_{2,3}$ y el vértice inicial de $P_{2,6}$ ($x_{11}x_{30}$). Si se sigue este proceso con cada arista de $\overrightarrow{H_2}$ se consiguen unir los caminos de P_2 formando un ciclo de longitud 24:

$$C_2 = \{x_0, x_{13}, x_{36}, x_{15}, x_{28}, x_{11}, x_{30}, x_3, x_{26}, x_5, x_{18}, x_1, x_{20}, \\ x_{33}, x_{16}, x_{35}, x_8, x_{31}, x_{10}, x_{23}, x_6, x_{25}, x_{38}, x_{21}, x_0\}.$$

Por tanto, se añaden las longitudes de estas aristas (9, 1 y 19) al conjunto B, de modo que este ya tiene 9 longitudes distintas. Así, el conjunto $\{C_j, \sigma(C_j), \sigma^2(C_j), ..., \sigma^4(C_j) : 0 \leq j \leq 2\}$ es la descomposición $C_{24} \mid H(40, B)$ que buscábamos.

- *Descomposición $C_{24} \mid H^*(42, A - B)$. En este caso serán necesarios $\frac{|E(H^*(42,A-B))|}{24} = 20$ ciclos. Mediante la construcción proporcionada en el Lema 3.9 se inicia la descomposición construyendo el camino simple $P = \{x_0, x_2, x_{38}, x_3, x_{37}, x_7, x_{36}, x_{10}, x_{35}, x_{11}, x_{33}\}$. Se hace ahora uso de la permutación $\rho = (x_0, x_1, ..., x_{39})(u)(w)$ para formar el camino simple $\rho^{20}(P) = \{x_{20}, x_{22}, x_{18}, x_{23}, x_{17}, x_{27}, x_{16}, x_{30}, x_{15}, x_{31}, x_{13}\}$, el cual contiene las aristas diametralmente opuestas a las de P. Con ambos, se forma el ciclo de longitud 24*

$$C = \{u, x_0, x_2, x_{38}, x_3, x_{37}, x_7, x_{36}, x_{10}, x_{35}, x_{11}, x_{33}, w, \\ x_{13}, x_{31}, x_{15}, x_{30}, x_{16}, x_{27}, x_{17}, x_{23}, x_{18}, x_{22}, x_{20}, u\}.$$

Nótese que $C = P \cup \rho^{20}(P) \cup \{ux_0, ux_{20}, wx_{33}, wx_{13}\}$, donde las aristas del último conjunto se consiguen uniendo el vértice u con los vértices iniciales de P y $\rho^{20}(P)$ y el vértice w con los vértices finales de estos.

Se tiene así que el conjunto $\{\rho^j(C) : 0 \leq j \leq 19\}$ *(donde* $\rho^0(C) = C$*) es la descomposición* $C_{24} \mid H^*(42, A - B)$.

Enlace para ver esta descomposición: https://www.geogebra.org/m/edwqautj