



FACULTAD
DE
CIENCIAS

Grafos hamiltonianos

(Hamiltonian graphs)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
Grado en Matemáticas

Autora: Marina Arroyo Prieto
Director: Daniel Sadornil Renedo
Junio - 2022

Agradecimientos

“El agradecimiento es la memoria del corazón”, por ello quiero comenzar dando las gracias a la parte más importante de mi corazón, mi familia, en especial a mi madre y a mi abuela, por el apoyo incondicional que me habéis dado durante estos duros años; y la confianza que habéis tenido en mí desde el primer momento, porque aún sabiendo que me iba a costar y viendo muchas veces que todo se volvía negro, no me dejasteis tirar la toalla nunca.

Álvaro, gracias a ti también por estar a mi lado en todo momento durante este largo camino, porque aún estando en la distancia, has sabido ayudarme, comprenderme y darme la fuerza para seguir cuando las cosas no se ponían fáciles.

Gracias a todos los que habéis formado parte de esta bonita historia. En especial, a Aída, Antonio, Cristina, Eloy, Irene, Marta, Pablo y Víctor; porque sin vosotros a mi lado esto no hubiera sido posible. Gracias por haberme dado un hombro donde llorar, por ayudarme y darme la mano para seguir adelante. Gracias por todos los buenos momentos que hemos pasado juntos, porque a pesar de que los malos ratos nos invadieran, hemos conseguido estar unidos como una piña, hemos sabido buscar el lado bueno de las cosas y disfrutar de todo y, lo más importante, hemos creado una bonita amistad.

Gracias a mi director del trabajo, Daniel Sadornil, por ayudarme a poner punto y final a esta historia.

Gracias a Cecilia Valero, por la paciencia que tuviste conmigo y la ayuda que me brindaste. Gracias por tener la puerta del despacho (y del corazón) siempre abierta.

No puedo terminar sin antes agradecer a Cristina Pérez todo lo que ha hecho por mí, porque desde el primer momento puso toda su fe en mí y me abrió sus puertas. Porque ha sido un pilar fundamental a lo largo de este camino. Gracias por confiar tanto en mí.

Resumen

El origen de la teoría de grafos se remonta al trabajo que realizó Euler en 1736, “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”, donde determinó una condición necesaria para recorrer todas las aristas de un grafo pasando por cada una de ellas una única vez. A mediados del siglo XIX el matemático William Hamilton modificó dicho problema y se preguntó si sería posible recorrer todos los vértices del grafo pasando por ellos una sola vez. Si se tiene tal recorrido y además el punto inicial es igual al final, entonces el grafo es hamiltoniano.

Para los grafos hamiltonianos, a diferencia de los eulerianos, no existe una condición necesaria y suficiente que determine dicha propiedad.

En este trabajo se enunciarán y demostrarán condiciones necesarias y condiciones suficientes para que un grafo sea hamiltoniano.

Palabras clave: Grafos hamiltonianos, recorridos en grafos y grado.

Abstract

The origin of graph theory goes back to Euler’s work in 1736, “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”, where he determined a necessary condition to go through all the edges of a graph passing through each of them a unique time. In the mid-nineteenth century, the mathematician William Hamilton modified this problem and wondered if it would be possible to traverse all the vertices of the graph passing through them only once. If there is such a path and also the initial point is equal to the end point, then the graph is hamiltonian.

For hamiltonian graphs, unlike Eulerian graphs, there is no necessary and sufficient condition that determines this property.

In this work, necessary conditions and sufficient conditions for a graph to be hamiltonian will be enunciated and demonstrated.

Key words: Hamiltonian graphs, traversals in graphs and degree.

Índice general

Introducción	1
1. Resultados básicos de la teoría de grafos	5
2. Condiciones necesarias	15
3. Condiciones suficientes	21
4. Otros teoremas	41
Bibliografía	45

Introducción

La teoría de grafos surge en el siglo XVIII a raíz del problema matemático de los puentes de Könisberg, que fue resuelto por *Leonhard Euler* en 1736. Su nombre se debe a Könisberg, la ciudad de Prusia Oriental que luego perteneció a Alemania, y en la actualidad es Kaliningrado (Rusia). Esta ciudad es atravesada por el río Pregel, el cual se bifurca y rodea la isla de Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, que entonces estaban unidas por siete puentes; tal como se muestra en la imagen.

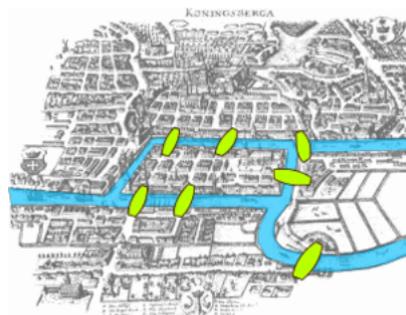


Figura 1. Puentes de Könisberg.

El problema que se planteó consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de partida.

La cuestión consistía en responder a lo siguiente:

Dado el mapa de Könisberg, con el río Pregel dividiendo al plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

Para dar respuesta a esta pregunta, podemos probar todos los posibles recorridos y, obtendremos que no existe un recorrido con dichas características. Sin embargo, Euler, en 1736, en su publicación *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [17] demuestra una solución generalizada del problema, que puede aplicarse a cualquier territorio en el que los accesos tengan ciertas conexiones restringidas, como los

puentes de Könisberg.

Para la demostración, Euler recurre a una abstracción del mapa, cada puente lo representó mediante una línea que unía a dos puntos, cada uno de los cuales representaba una región diferente. Así, el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que empiece en uno de los puntos y transite por todas las líneas una única vez, regresando al mismo punto de partida.

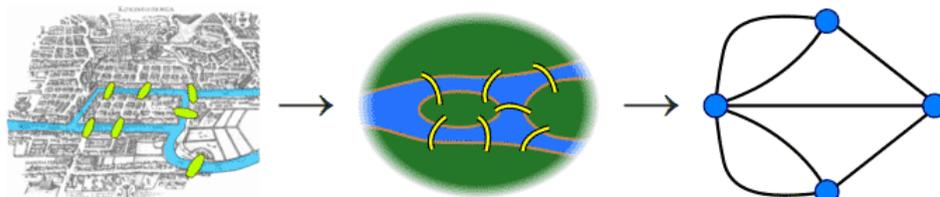


Figura 2. Abstracción del mapa de Könisberg.

En el contexto del problema, Euler determinó que los puntos intermedios de un recorrido posible han de estar necesariamente conectados a un número par de líneas. Luego, si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de ese punto es por una línea diferente. Esto significa que tanto el punto inicial como el final son los únicos que podrían estar conectados con un número impar de líneas. Sin embargo, el problema tiene una condición más que dice que el punto inicial debe ser igual al final, por lo que no podría existir ningún punto conectado con un número impar de líneas.

La primera prueba completa de esta última afirmación fue publicada en 1873 por *Carl Hierholzer* [29]. Esto se conoce como

Teorema (de Euler). *Un grafo conexo no dirigido G tiene un ciclo euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par. Y tiene un camino euleriano si y solo si hay exactamente dos vértices de grado impar.*

Como se observa en la Figura 2, los cuatro puntos tienen un número impar de líneas incidentes (tres de ellos tienen tres líneas y el restante tiene cinco), entonces se concluye que es imposible dar un recorrido con las características del problema.

Existe un problema similar que consiste en conocer si un grafo es hamiltoniano y en tal caso encontrar un ciclo hamiltoniano. Este problema es uno de los más antiguos de la teoría de grafos. Recibe su nombre del matemático Sir William Hamilton a quien suele atribuirse el origen del problema en cuestión.

En 1859 la compañía inglesa “*Jaques and Son*” compró los derechos de fabricar y comercializar “*The Icosian Game*”, un curioso pasatiempo que Hamilton presentó

en una reunión de la British Association en Dublín. El objetivo del juego consistía en realizar una ruta siguiendo las aristas del dodecaedro, de forma que se pasase una y sólo una vez por cada ciudad (vértice) atravesando algunas de las aristas para volver a la ciudad original.



Figura 3. The Icosian Game.

Una de las formas en las que el juego se comercializó se tituló *Un viaje alrededor del mundo*, y consistía en sustituir el dodecaedro por un diagrama plano del mismo, en el que las treinta aristas del tablero representan los únicos caminos que se permiten recorrer para visitar las veinte ciudades, que estaban representadas por vértices.

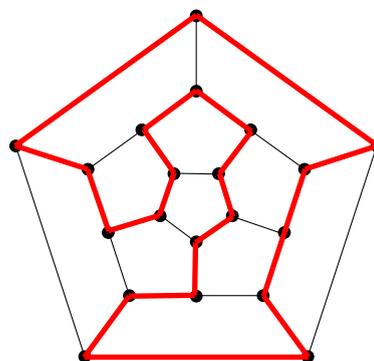


Figura 4. Tablero del juego *Un viaje alrededor del mundo* y un posible ciclo hamiltoniano.

Pese a lo intrigante y lleno de acción que suena el juego, no echó raíces en un sentido recreativo, pero la idea se convirtió en la semilla de lo que se convertiría en un importante rama de investigación dentro del campo de la teoría de grafos.

Desde sus orígenes, la teoría de grafos se ha utilizado para resolver juegos matemáticos, para el estudio de circuitos eléctricos y en diversas aplicaciones en una multitud de campos tan diferentes como la economía, psicología, tecnología, biología, etc. En la actualidad, se sigue aplicando dentro y fuera de las matemáticas.

La teoría de grafos es un fuerte apoyo para los problemas de transporte, ya que para hacer posible el transporte o la comunicación, son necesarios puntos específicos de transmisión o recepción y vías de comunicación. Estos dos elementos, puntos y caminos, están representados por vértices y aristas, respectivamente. Para resolver el problema de una red de transporte se usa la teoría de grafos hamiltonianos. Uno de los problemas más famosos que usa esta teoría es el problema del vendedor ambulante; el cual tiene diversas aplicaciones en la vida real, como pueden ser planificar viajes [32], la ruta de un repartidor, la ruta del autobús, ...

Además, los grafos hamiltonianos se utilizan en varios campos, como pueden ser la computación gráfica, el diseño de circuitos electrónicos, el mapeo de genomas (para combinar muchos fragmentos diminutos de código genético) o la investigación de operaciones financieras.

En este trabajo abordaremos el hecho de que al contrario que pasa con los caminos y circuitos eulerianos en los que existe una condición necesaria y suficiente para determinar la existencia de éstos, no se conoce una condición necesaria y suficiente para resolver el problema de encontrar un ciclo o camino hamiltoniano.

A continuación, podremos ver que hemos dividido el trabajo en cuatro capítulos. El primero de ellos trata los conceptos básicos de la teoría de grafos que vamos a necesitar a lo largo del trabajo. Alguno de estos ya se vieron en la asignatura de “Matemática Discreta” otros, sin embargo, son nuevos. Además, se hace una pequeña introducción a conceptos de grafos hamiltonianos, con los que nos familiarizaremos a lo largo del documento.

Como hemos dicho anteriormente, para los grafos hamiltonianos no existen condiciones necesarias y suficientes para ver si un grafo es o no hamiltoniano. Por lo que en el segundo capítulo nos centraremos en demostrar las condiciones necesarias y en el tercero enunciaremos y demostraremos algunas de las condiciones suficientes. Debido a la gran cantidad de condiciones suficientes que existen para grafos hamiltonianos, hemos escrito un cuarto capítulo donde solo enunciamos otras de estas muchas condiciones, éstas no las demostramos como sí hacíamos en el tercero de los capítulos, puesto que esto excedería la extensión permitida de la memoria.

Para realizar la memoria hemos usado los surveys [13], [23], [24], [25] y [33], en los que aparecen las condiciones necesarias y una gran cantidad de condiciones suficientes para la hamiltonicidad de grafos.

Capítulo 1

Resultados básicos de la teoría de grafos

Comenzaremos haciendo un repaso de conceptos vistos en la asignatura de “*Matemática Discreta*”. En esta sección se estudiarán definiciones básicas que se usarán a lo largo del trabajo, como las de grafo conexo, grafo hamiltoniano, grafo regular, camino hamiltoniano, o circuito hamiltoniano. Estos conceptos y resultados han sido tomados de las referencias [14], [22], [39] y [40].

Definición 1.1. *Un grafo (finito) es una terna $G = (V, A, \varphi)$ donde $V = V(G)$ es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se denominan vértices o nodos, $A = A(G)$ es un conjunto finito cuyos elementos se llaman aristas, y $\varphi : A \rightarrow P_2(V)$ es una aplicación que asocia a cada arista un par de vértices. Es decir, $\varphi(a) = \{x, y\}$ con $a \in A$ y $x, y \in V$. Denotaremos por xy a la arista que une el vértice x con el vértice y .*

Existen diferentes maneras de representar un grafo. En primer lugar, un grafo puede ser visto como la terna $G = (V, A, \varphi)$, o como una matriz. Sin embargo, la forma más común y natural para trabajar con ellos es mediante la representación gráfica. Los grafos se representan mediante un dibujo, donde cada vértice del grafo se representa por un punto y se unen dos vértices mediante una línea si hay una arista incidente a ambos.

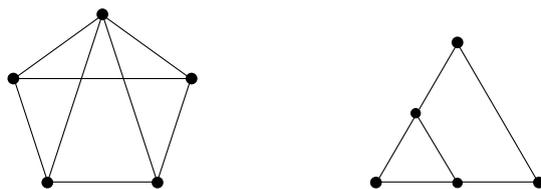


Figura 1.1. Distintas representaciones del mismo grafo

Hay que diferenciar entre el grafo y el dibujo, pues un mismo grafo puede tener dos representaciones distintas como se puede ver en la Figura 1.1.

Definición 1.2. Se llama orden de un grafo al número de vértices que tiene el grafo, y se denota por $|V|$. De igual modo, se llama tamaño de un grafo al número de aristas que tiene el grafo, y se denota por $|A|$.

Se dice que la arista a es un lazo si $\varphi(a) = \{x, x\}$ para un cierto $x \in V$. Las aristas múltiples son aristas con el mismo par de vértices finales.

Definición 1.3. Un grafo G es simple si no hay lazos y dos vértices están unidos a lo sumo por una única arista. De lo contrario, se llama multigrafo.

En el resto del trabajo, cuando decimos un grafo, nos referiremos a un grafo simple a menos de que haya alguna posibilidad de confusión.

Sea $a = uv$ una arista de un grafo G . Entonces, se dice que u y v son vértices adyacentes en G por a , o que a es una arista incidente con u y v . Se dice que un vértice es aislado si no existen aristas incidentes con él. Se dice que dos aristas son adyacentes si tienen un extremo común.

Definición 1.4. La vecindad de un vértice v es el conjunto de vértices adyacentes a él en G , es decir, es el conjunto de vecinos de v en G y se denota por $N(v)$.

Definición 1.5. Sea G un grafo y $v \in V$ un vértice del grafo. Se denomina grado del vértice v , y se denota por $d(v)$, al número de aristas incidentes a v , entendiendo que un lazo aporta 2 al grado.

La sucesión de grados de un grafo es la lista de grados de los vértices. Generalmente se escribe en orden creciente como $d_1 \leq \dots \leq d_n$.

Como el grado de un vértice cuenta las aristas incidentes a él, es obvio que la suma de los grados de todos los vértices del grafo está relacionada con el número total de aristas en el grafo, más concretamente $\sum \delta(v) = 2|A|$.

Definición 1.6. Dado un grafo G su mínimo grado viene dado por

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \{d(v)\}$$

Definición 1.7. Un grafo se dice regular si todos los vértices tienen el mismo grado. Un grafo regular con vértices de grado k se llama grafo k -regular.

Solo los grafos con conjuntos de aristas vacíos (que tienen conjuntos de vértices no vacíos) son 0-regulares. Estos se llaman grafos nulos. De manera similar, un grafo 1-regular consta de un conjunto de aristas tales que no hay dos aristas que incidan en un vértice común. Un grafo que consta de una lista de vértices tales que cada par de vértices consecutivos son adyacentes entre sí y el primer vértice también es adyacente al último, es un grafo 2-regular. Tal grafo se llama ciclo o ciclo simple. Un grafo formado por una colección de ciclos simples también es un grafo 2-regular.

Un grafo 3-regular también se llama *grafo cúbico*. El grafo de Petersen, que veremos a continuación en el capítulo 2 es un grafo cúbico. Este grafo muestra algunas propiedades interesantes y también sirve como ejemplo y contraejemplo para muchos problemas en la teoría de grafos.

A partir de un grafo, es posible obtener otros mediante distintas construcciones.

Definición 1.8. Sea $G = (V, A, \varphi)$ un grafo. Un subgrafo de G es un nuevo grafo $G' = (V', A')$ donde $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$ y se verifica que $\varphi'_{G'}(a) = \varphi_G(a)$ para cualquier $a \in A'$. Diremos que el subgrafo es propio si $G \neq G'$. Si G' es un subgrafo de G , entonces G es un supergrafo de G' .

Si eliminamos algún vértice o arista de un grafo obtenemos otros subgrafos

- Dados un grafo G y $v \in V(G)$ denotamos por $G - \{v\}$ al grafo obtenido al eliminar el vértice v y las aristas incidentes a él de G .
- Dados un grafo G y $a \in A(G)$ denotamos por $G - \{a\}$ al grafo obtenido al eliminar de G la arista a .

Igualmente un conjunto de vértices de un grafo nos determina un subgrafo

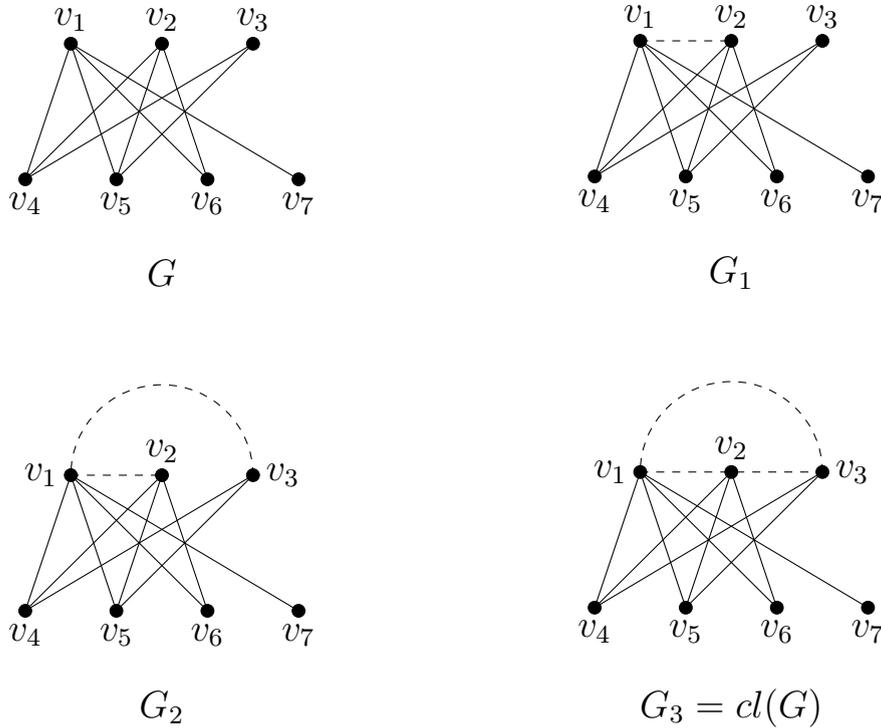
- Dado un grafo G y $V' \subset V(G)$ un subconjunto de vértices de G , el subgrafo generado por V' es el grafo con los vértices de V' y las aristas de G que tengan ambos extremos en V' . Se dice que H es un subgrafo generador de G si $V(H) = V(G)$.

Sea H un subgrafo de G . Entonces $N_H(v) = N(v) \cap V(H)$.

Definición 1.9. Sea G un grafo con n vértices. Si hay dos vértices no adyacentes u_1 y v_1 en G tal que $d(u_1) + d(v_1) \geq n$, unimos u_1 y v_1 por una arista para formar el supergrafo G_1 . Ahora, si hay dos vértices no adyacentes u_2 y v_2 en G_1 tales que $d(u_2) + d(v_2) \geq n$, unimos u_2 y v_2 por una arista para formar el supergrafo G_2 . Seguimos el proceso uniendo recursivamente pares de vértices no adyacentes cuya suma de grados es al menos n hasta que no quede ningún par. El supergrafo final así obtenido se denomina *clausura* de G y se denota por $cl(G)$.

Si dados dos vértices no adyacentes en el grafo se cumple la condición $d(u) + d(v) \geq n$ entonces $cl(G)$ es un grafo completo, pues como para cada par de vértices no adyacentes la suma de los grados es mayor o igual que n , entonces se pueden añadir todas las aristas a la clausura y esto da lugar al grafo completo.

Ejemplo 1.10. Las figuras siguientes muestran el proceso que se sigue para obtener la clausura de un grafo.



La primera figura muestra el grafo G del cual queremos calcular la clausura. Para obtener el grafo G_1 tenemos que fijarnos en el vértice de mayor grado en G , es decir, v_1 ; así se tiene que $d_G(v_1) = 4$ luego, tenemos que buscar vértices en G no adyacentes a él que tengan grado mayor o igual que 3. Este vértice que buscamos es v_2 , pues v_4 y v_5 ya son adyacentes a v_1 . Por tanto, añadimos la arista v_1v_2 a G y así obtenemos el nuevo grafo G_1 .

A continuación, para calcular G_2 tenemos que buscar el vértice de mayor grado en G_1 , que es también v_1 , pero en este caso, $d_{G_1}(v_1) = 5$ luego, ahora tenemos que buscar vértices con grado 2 o más, no adyacentes a v_1 . El único vértice que cumple esto es v_3 , por tanto se añade la arista v_1v_3 .

Finalmente, para obtener el grafo G_3 , miramos cuál es el vértice de mayor grado de G_2 . En este caso, sigue siendo v_1 , pero ya está unido a todos los vértices, por tanto no podemos añadir nuevas aristas de él a cualquier otro vértice. El siguiente vértice con mayor grado es v_2 que tiene $d_{G_2}(v_2) = 4$ y, así se tiene que debe ser adyacente a cualquier vértice v_j con $d_{G_3}(v_j) \geq 3$. Luego, tenemos que añadir la arista v_2v_3 . Como ya no se pueden añadir más aristas, se tiene que $G_3 = cl(G)$.

Definición 1.11. Sea G un grafo. Un subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ se llama conjunto independiente en G si para todo par de vértices $u, v \in V'$, no existe una arista en G que una los vértices u y v .

El número o grado de independencia de un grafo G es el tamaño de un conjunto independiente maximal, es decir, no existe ningún conjunto independiente más grande que contenga a este, y se denota por $\beta(G)$.

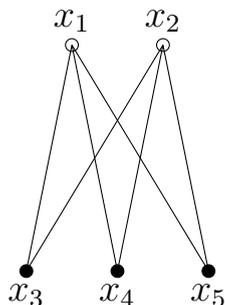
Ejemplo 1.12.

Figura 1.2. Conjunto independiente

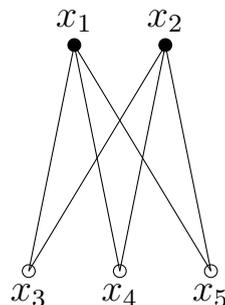
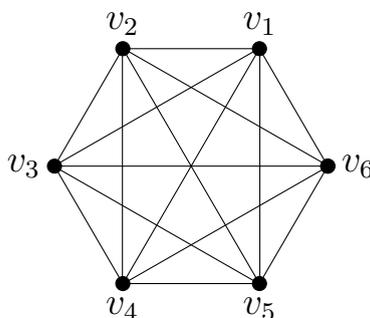


Figura 1.3. Grado de independencia 3

Claramente, $\beta(G) < n - \delta(G)$ pues si V' es un conjunto independiente maximal de cardinal β y $v \in V'$, como $d(v) \geq \delta(G)$, entonces $\beta = |V'| \leq n - \delta(G)$ pues ningún vértice adyacente de v puede estar en V' .

Ahora veremos algunas clases especiales de grafos que aparecerán en los capítulos siguientes. Un grafo en el que cada par de vértices distintos son adyacentes se llama *grafo completo*. Un grafo completo con n vértices se denota por K_n . Es trivial ver que K_n contiene $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

Figura 1.4. Grafo completo K_6

Definición 1.13. Un grafo G se dice *bipartito* si existe una partición de $V(G)$, $V(G) = V_1 \oplus V_2$ (es decir, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(G)$) tal que todas las aristas de G unen un vértice de V_1 con un vértice de V_2 . Llamamos a G *grafo bipartito completo* si para cada vértice $u \in V_1$ y cada vértice $v \in V_2$, existe una arista uv en G .

La siguiente figura muestra un ejemplo de un grafo bipartito completo donde los conjuntos independientes son de tamaño 3 y 4 respectivamente. Este grafo se denota por $K_{3,4}$. En general, un grafo bipartito completo se denota por $K_{n,m}$ si sus dos conjuntos independientes tienen n y m vértices respectivamente. Se puede ver fácilmente que $K_{n,m}$ tiene mn aristas.

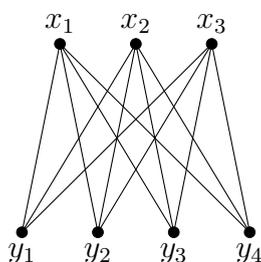


Figura 1.5. Grafo bipartito completo $K_{3,4}$

Como hemos visto en la introducción, la noción de grafo y sus primeros resultados surgieron al intentar resolver el problema de los puentes de Königsberg. La Figura 1.6 muestra el grafo correspondiente a este problema.

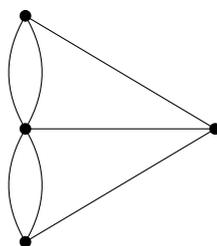


Figura 1.6. Grafo correspondiente al problema de los puentes de Königsberg

Es necesario introducir para ello las siguientes nociones sobre recorridos en grafos.

Definición 1.14. Sea $G = (V, A, \varphi)$ un grafo.

- Un recorrido en G es una sucesión $x_0 a_1 x_1 a_2 x_2 \dots x_{k-1} a_k x_k$ donde $x_i \in V$ y a_i es una arista incidente a x_{i-1} y a x_i .
- Un recorrido se dice camino si todas las aristas son distintas.
- Un camino se dice cerrado si $x_0 = x_k$ (acaba donde empieza).
- Un camino se dice simple si no hay vértices repetidos salvo quizás el primero y el último.
- Un camino se dice maximal si no está contenido en ningún otro camino.
- Un recorrido se denomina circuito si es un camino cerrado.
- Un recorrido se denomina ciclo si es un camino simple cerrado no trivial (no es lazo).

Por tanto, en un circuito puede haber o puede no haber vértices repetidos. Sin embargo, no puede haber aristas repetidas. Se tiene entonces, por ejemplo, que todo ciclo es un circuito, es un camino cerrado y es un camino.

La longitud del ciclo queda determinada por el número de aristas del recorrido. Así, un camino de n vértices tiene longitud $n - 1$, y un ciclo de n vértices tiene longitud n .

Definición 1.15. Dado G un grafo, se denomina distancia entre dos vértices $u, v \in G$ al número de aristas del camino más corto entre ellos. Se denota por $dist(u, v) = dist(v, u)$.

A un grafo se le denomina grafo L_i ($i \in \mathbb{Z}$) si para cada tripleta de vértices u, v, w con $dist(u, v) = 2$ y $w \in (N(u) \cap N(v))$,

$$d(u) + d(v) \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)| - i$$

o, equivalentemente, $|N(u) \cap N(v)| \geq |N(w) \setminus (N(u) \cup N(v))| - i$.

Definición 1.16. Se dice que un grafo G es conexo si hay un camino entre cada par de vértices en G . De lo contrario, G se llama grafo desconexo.

Un subgrafo conexo maximal de G es un subgrafo que es conexo y no está contenido en ningún otro subgrafo conexo de G . Un subgrafo conexo maximal de G se denomina componente conexa de G .

La noción de conexión de un grafo se muestra, lógicamente, de manera muy visual en la representación gráfica, podríamos decir que un grafo es conexo “si no está dividido en trozos”. No obstante, no siempre es fácil descubrirlo pues depende de la posición de los vértices en la representación y también, en gran medida, de la cantidad de ellos.

Definición 1.17. Se llama punto de corte al vértice del grafo tal que al eliminarlo de este se produce un aumento en el número de componentes conexas, es decir, al eliminarlo el grafo pasa de ser conexo a desconectarse.

Se llama conjunto de corte de un grafo G al subconjunto $S \subset V(G)$ tal que $G - S$ no es conexo.

Ejemplo 1.18.

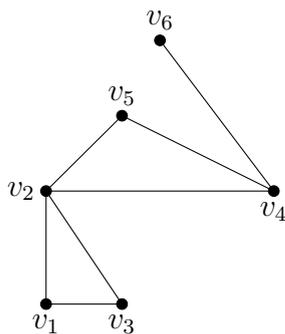


Figura 1.7. Punto de corte v_2

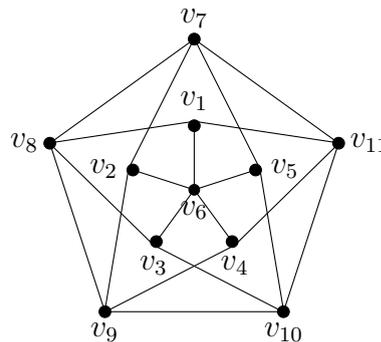


Figura 1.8. Conjunto de corte $\{v_8, v_2, v_5, v_{11}\}$

Definición 1.19. Un grafo G es k -conexo si $|V(G)| > k$, y eliminando menos de k vértices no se desconecta el grafo. La conectividad de un grafo, denotada por $\kappa(G)$, es el máximo k tal que G es k -conexo.

$$\kappa(G) = \min\{|S| : S \text{ es un conjunto de corte}\}.$$

Si $k = 2$, esta definición es equivalente a decir que cada par de vértices está conectado por al menos dos caminos disjuntos.

Probemos a continuación dicha equivalencia.

Teorema 1.20. G es un grafo 2-conexo si y solo si existen al menos dos caminos disjuntos para cada par de vértices u, v .

Demostración.

\Leftarrow Como hay al menos dos caminos disjuntos para cada par de vértices u y v ; entonces u y v no se pueden separar eliminando un vértice. Esto es cierto para todo u, v , luego el grafo no tiene conectividad 1. Por tanto, debe tener conectividad al menos 2 y, el grafo es por tanto 2-conexo.

\Rightarrow Esta implicación la demostraremos por inducción sobre la distancia de u a v que denotaremos por $dist(u, v)$.

Sean u y v vértices distintos del grafo. Por ser distintos, la menor distancia posible entre ellos es 1, lo que significa que son adyacentes.

Sea $z \in G$ un vértice distinto de u y v . Debido a que al eliminar el vértice u no se desconecta el grafo, existe un camino P_1 que conecta u con z y no contiene a v . De igual modo, al eliminar el vértice v no se desconecta el grafo y, por tanto, existe un camino P_2 que conecta v con z y no contiene a u .

El ciclo que contiene a u y a v está formado por la arista uv , el camino P_2 y el camino P_1 invertido; como podemos observar en la figura siguiente:

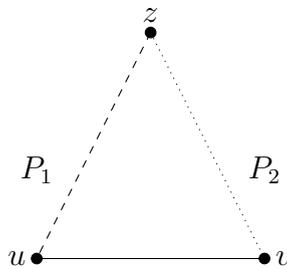


Figura 1.9. Caminos P_1 y P_2

Ahora, supongamos que la proposición es cierta para todos los pares de vértices con distancia menor o igual que k , y sea $dist(u, v) = k + 1$, donde $k \geq 0$. Consideremos el camino más corto de u a v y dejemos que w sea el vértice del camino que es adyacente a v . Como $dist(u, w) = k$, hay dos caminos disjuntos de u a w .

Además, como al eliminar w no se desconecta a u de v , hay un camino P que conecta u con v pero que no contiene a w (ver Figura 1.10).

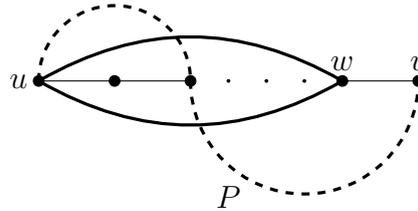


Figura 1.10. Caminos de u a w y camino P

Podemos conseguir dos caminos disjuntos de u a v a partir de P y los dos caminos disjuntos de u a w como podemos observar en la Figura 1.11.

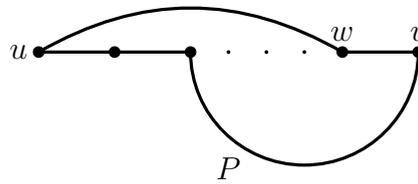


Figura 1.11. Caminos de u a v

□

Notemos que el grafo completo K_n no tiene puntos de corte. Este grafo será $n - 1$ -conexo porque tiene más de $n - 1$ vértices y eliminando menos de $n - 1$ vértices no, y no va a ser mayor que n , porque no tiene más de n vértices, es decir, $\kappa(K_n) = n - 1$. Si G no es conexo entonces $\kappa(G) = 0$.

Ejemplo 1.21.

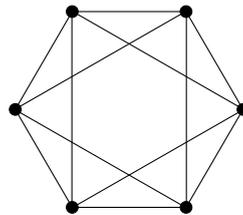


Figura 1.12. Grafo con conectividad 4

A continuación, estudiaremos las nociones básicas para grafos hamiltonianos. Consideremos un viaje de ida y vuelta a través de un grafo G dado tal que cada vértice se visite exactamente una vez.

Definición 1.22. Sea G un grafo de orden n . Un circuito hamiltoniano es un ciclo (camino cerrado simple) que pasa por todos los vértices una sola vez.

Un grafo que contiene un ciclo hamiltoniano se llama grafo hamiltoniano.

Un camino hamiltoniano en un grafo es un camino simple que pasa por todos los vértices.

Todo ciclo hamiltoniano de un grafo hamiltoniano de n vértices tiene exactamente n vértices y n aristas. Claramente K_n es hamiltoniano.

Ejemplo 1.23.

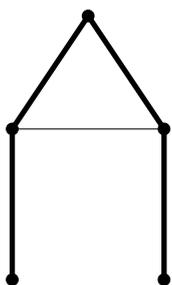


Figura 1.13. Camino hamiltoniano

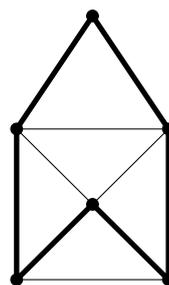


Figura 1.14. Ciclo hamiltoniano

Como hemos comentado no se dispone de un criterio sencillo para determinar si un grafo es hamiltoniano, ya que el problema de encontrar una caracterización de los grafos hamiltonianos es un problema abierto en teoría de grafos.

Capítulo 2

Condiciones necesarias

A lo largo de este capítulo estudiaremos una serie de condiciones necesarias que no nos servirán para asegurar que un grafo sea hamiltoniano, pero sí para demostrar que un grafo no lo es.

Este capítulo se apoya en las referencias [4], [6], [9], [10], [11] y [41].

Antes de nada introduciremos la siguiente proposición, que luego nos ayudará a demostrar otros teoremas.

Proposición 2.1. *Sea G un grafo hamiltoniano. Entonces:*

- a) G es 2-conexo.
- b) Si x es un vértice de grado 2, las dos aristas de G incidentes con x deben estar en cualquier circuito hamiltoniano.

El primer apartado de la Proposición 2.1 es equivalente a decir que G no tiene puntos de corte.

Demostración.

- a) Supongamos por reducción al absurdo que existe un grafo G que no es 2-conexo pero tiene un ciclo hamiltoniano. Entonces, como G no es 2-conexo, existe un vértice $x \in V(G)$ tal que $G - \{x\}$ no es conexo. Luego, existen dos vértices $u, v \in G - \{x\}$ tal que no existe un camino entre ellos en $G - \{x\}$. Equivalentemente, u, v están en componentes conexas distintas de $G - \{x\}$.

Sea $C = c_1, \dots, c_{i-1}, c_i, \dots, c_j, c_{j+1}, \dots, c_k$ un ciclo hamiltoniano de G . Como C es hamiltoniano, u y v aparecen en algún lugar de la sucesión. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $c_1 = x$ y que existen i, j con $i < j$ tal que $c_i = u$ y $c_j = v$. La parte del ciclo de u a v , es un camino de G que pasa por x , de lo contrario, es un camino de u a v en $G - \{x\}$. Y, la parte del ciclo de c_{j+1} a c_{i-1} , también es un ciclo de G que pasa por x . Pero esto significa que x aparece

dos veces en C . Lo cual es una contradicción con el hecho de que C es un ciclo hamiltoniano.

- b) Supongamos G un grafo hamiltoniano. Sea $C = c_1, \dots, c_k$ un ciclo hamiltoniano de G y sea $x \in G$ un vértice de grado 2. Por definición, debe existir un i con $1 \leq i \leq k$ tal que $c_i = x$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x = c_1$. Como x tiene grado 2, existen dos vértices u, v tales que las aristas xu y xv forman parte de G ; y para cualquier otro vértice de G , no existe ninguna arista que lo una con x .

Por otro lado, como C es un ciclo y $x \in C$, las aristas xc_k y xc_2 existen y pertenecen a C . Pero como hemos dicho antes, los únicos vértices que conectan con x son u y v , por lo que $c_k = v$ y $c_2 = u$, o viceversa. Si suponemos que se da el primer caso, pues el otro es análogo, tenemos que $xc_k = xv$ y $xc_2 = xu$, por lo que queda probado que las dos aristas de G que inciden en x pertenecen a C , probando así el resultado. □

Comenzamos con el siguiente teorema simple, pero importante.

Teorema 2.2. *Si el grafo G es hamiltoniano, entonces $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$.*

Demostración. Sea G un grafo hamiltoniano, entonces sabemos que tiene un ciclo hamiltoniano, y por tener un ciclo hamiltoniano, se sabe que tiene un ciclo que recorre todos los vértices, lo cual significa que todos los vértices aparecen en el ciclo con dos aristas. Por lo tanto, el grado de todos los vértices tiene que ser al menos 2. □

Esta condición no es necesaria para grafos que tienen caminos hamiltonianos, puesto que como podemos observar en la Figura 2.1, existe camino hamiltoniano pero uno de los vértices tiene grado 1.

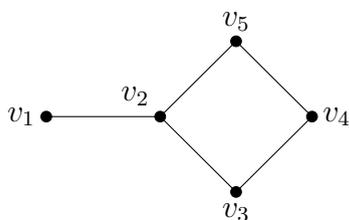


Figura 2.1.

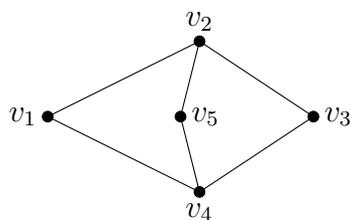


Figura 2.2.

El recíproco de este teorema no es cierto, veámoslo con el contraejemplo de la Figura 2.2.

El vértice v_1 tiene grado 2, entonces por la Proposición 2.1 las aristas incidentes a él deben pertenecer al ciclo. Partiendo de v_1 , y recorriendo la arista v_1v_2 , llegamos a

este segundo vértice, que tiene grado mayor que 2 y tenemos que decidir si tomamos la arista v_2v_3 o la arista v_2v_5 . Supongamos que tomamos la arista v_2v_3 , entonces eliminamos la otra, pues en un ciclo/camino hamiltoniano sólo se pasa una vez por cada vértice. En este caso, como v_3 tiene grado 2, la arista v_3v_4 tiene que estar incluida en nuestro ciclo. A continuación, como v_4 tiene grado 3, llegamos a un caso idéntico al que teníamos en v_2 :

- Si tomamos la arista v_4v_5 , no obtenemos un ciclo.
- Si tomamos la arista v_4v_1 hemos encontrado un ciclo que tiene 4 vértices.

En caso de tomar la arista v_2v_5 , como el vértice v_5 es de grado 2 la arista v_5v_4 debe pertenecer al ciclo. Además, la arista v_2v_3 la eliminamos. Como v_4 tiene grado 3 llegamos a un caso idéntico al anterior.

Luego G no es hamiltoniano, puesto que el número de vértices del ciclo que hemos encontrado es menor que el orden del grafo.

La Proposición 2.1 se puede generalizar.

Teorema 2.3. *Sea G un grafo hamiltoniano de orden n , sea S un subconjunto propio no vacío del conjunto de vértices $V(G)$, y sea $c(G - S)$ el número de componentes del grafo $G - S$. Entonces, $c(G - S) \leq |S|$.*

Demostración. Sea S un subconjunto propio no vacío de $V(G)$, y supongamos $c(G - S) = k \geq 1$. Sea C un ciclo hamiltoniano de G . Si al ciclo le eliminamos $p < n$ vértices, entonces se producirán como máximo p componentes conexas. El mayor número de componentes lo obtendremos cuando los vértices que eliminemos no sean adyacentes en el ciclo, pues si lo son no tienen por qué aumentar dicho número de componentes. Por lo tanto, para que un grafo sea hamiltoniano, siempre que se elimine un conjunto de vértices el número de componentes conexas producidas será menor o igual al cardinal de S , es decir, $c(C - S) \leq |S|$.

Además, $C - S$ es un subgrafo que contiene todos los vértices del grafo $G - S$ y por tanto, $c(G - S) \leq c(C - S)$. □

Como ilustración del teorema anterior, consideremos el siguiente grafo.

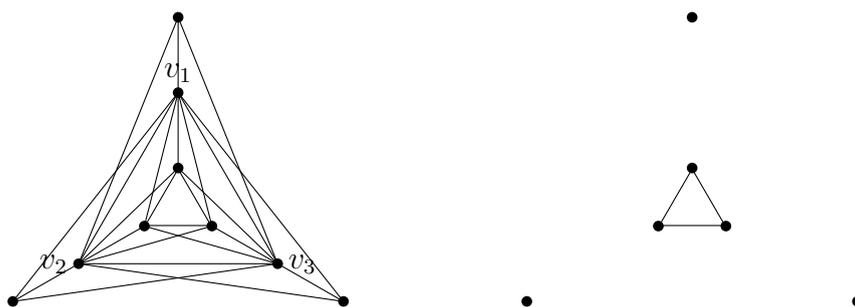


Figura 2.3. Ejemplo del Teorema 2.3

Este grafo tiene 9 vértices, eliminando los vértices v_1 , v_2 y v_3 , nos quedan 4 componentes conexas. Por lo tanto, no se satisface que $c(G - S) \leq |S|$, y se sigue por el teorema anterior que el grafo no es hamiltoniano.

Sin embargo, el recíproco no siempre es cierto, por ejemplo, el grafo de Petersen no es hamiltoniano, pero uno no puede deducirlo usando este teorema, puesto que este grafo satisface la condición de que para todo $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, $c(G - S) \leq |S|$. Es decir, se satisface la condición.

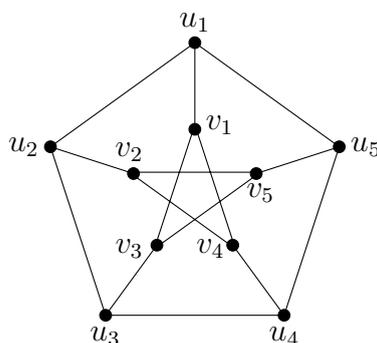


Figura 2.4. Grafo de Petersen

Teorema 2.4. *El grafo de Petersen no es hamiltoniano.*

Demostración. Antes de nada notemos que el grafo de Petersen tiene tres tipos de aristas: las de C' que se corresponden con las del pentágono exterior, las de C'' que son las del pentágono interior y las de la forma $u_i v_i$ que unen el pentágono interior con el exterior.

Supongamos que el grafo de Petersen, que denotaremos como P , es hamiltoniano. Entonces P contiene un ciclo hamiltoniano C , con diez aristas, pues P tiene diez vértices. Dos de las tres aristas incidentes en cada vértice de P pertenecen necesariamente a C . Por supuesto, C contiene las cinco aristas $u_i v_i$ con $1 \leq i \leq 5$, alguna o ninguna (este último caso no se puede dar porque entonces C contiene todas las aristas en $\{u_i u_j, v_k v_l\}$ y no es ciclo); por lo que al menos cinco aristas de C pertenecen a C' o a C'' , es decir, pertenecen a $C' \cup C''$. Por lo tanto, o bien C' contiene al menos tres aristas de C o bien C'' contiene al menos tres aristas de C , porque si cada una contuviera solo dos o menos, serían solo cuatro aristas y por lo tanto no se tienen las cinco mínimas que se requerían.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que C contiene al menos tres aristas de C' . Como ningún ciclo contiene un ciclo más pequeño como subgrafo, entonces las cinco aristas de C' no pueden pertenecer a C . Supongamos que C contiene exactamente cuatro aristas de C' (ver figura 2.5(a), donde las aristas discontinuas de P no pueden pertenecer a C , pues en un ciclo cada vértice solo tiene grado dos). Sin embargo, el ciclo C debe contener las aristas $u_4 v_4$, $u_3 v_3$ así como las aristas $v_1 v_3$ y $v_1 v_4$ (ver

figura 2.5(b)), para que estos vértices pertenezcan al ciclo. Esto implica que C es un ciclo de longitud 8, lo cual es imposible.

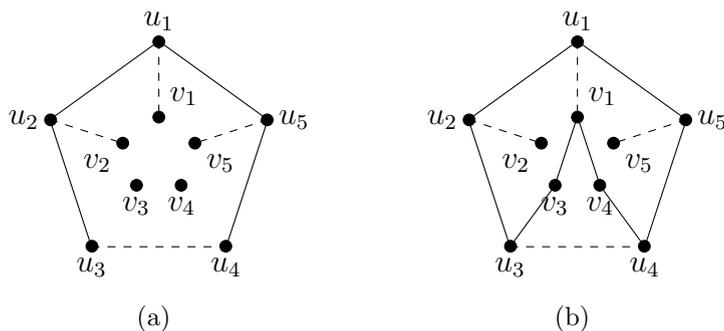


Figura 2.5. El ciclo C contiene exactamente cuatro aristas de C'

Entonces nos queda por ver el caso en que C contiene exactamente tres aristas de C' . Hay dos posibilidades: que las tres aristas de C' en C sean consecutivas en C' o que las tres aristas no sean consecutivas en C' .

Estas posibilidades se muestran en las Figuras 2.6(a) y 2.6(b), respectivamente. La situación de la Figura 2.6(a) es imposible pues u_1v_1 es la única arista incidente con u_1 que podría estar en C , y como C es un ciclo todo vértice tiene grado dos en C . Asimismo, la situación de la Figura 2.6(b) es imposible ya que C tendría que contener un ciclo más pequeño $u_4, v_4, v_1, v_3, u_3, u_4$. Este ciclo queda definido así porque como estamos en el caso de que las aristas de C' en C no son consecutivas, suponemos que las aristas u_2u_3 y u_4u_5 no están en el ciclo. Así, la arista u_1v_1 no puede estar en el ciclo pues u_1 es de grado dos. Del mismo modo, las aristas u_3v_3 y u_4v_4 tienen que pertenecer al ciclo, y por tanto, también pertenecerán las aristas v_1v_4 y v_1v_3 .

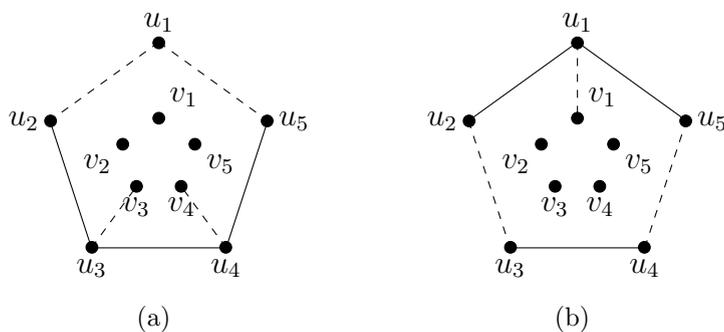


Figura 2.6. El ciclo C contiene exactamente tres aristas de C'

Por lo tanto P no es hamiltoniano. □

La primera condición de la Proposición 2.1 es menos exigente que la del Teorema 2.3, pues solo se consideran conjuntos de cardinal 1, y por tanto, el recíproco sigue siendo falso.

Ninguna conectividad garantiza que un grafo sea hamiltoniano. Por ejemplo, sea $k \geq 2$ un entero positivo y consideremos el grafo $G = K_{k,k+1}$, que es k -conexo. Sea S un conjunto de cardinal k . Entonces $c(G - S) = k + 1 > |S|$, lo que implica por el Teorema 2.3 que el grafo G no es hamiltoniano.

Ahora daremos una condición de hamiltonicidad para grafo bipartitos.

Teorema 2.5. *Sea G un grafo bipartito. Si el grafo G es hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$.*

Demostración. Sea X un conjunto de tamaño r e Y uno de tamaño n y sean x_i e y_i los elementos de cada uno de ellos, respectivamente.

Por reducción al absurdo podemos suponer que $r < n$ y que C es el ciclo hamiltoniano $x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_r y_r x_1$. Pero, entonces $y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_n$ no están en el ciclo, luego $r \geq n$. De forma análoga tenemos que $n \geq r$ y, por tanto, $r = n$. Como cada vez vamos de un vértice de X a uno de Y , sin repetir ninguno y volviendo al punto inicial, tendremos el mismo número de vértices en X y en Y .

La Figura 2.7 muestra gráficamente este hecho. □

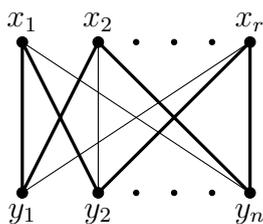


Figura 2.7.

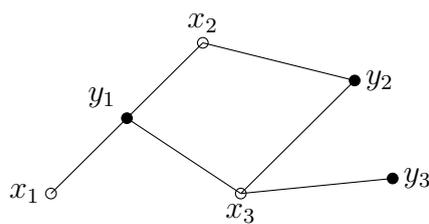


Figura 2.8.

Todas estas condiciones necesarias sirven para demostrar que un grafo no es hamiltoniano, pero no permiten asegurar que lo es. Hay algunas condiciones suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos, que veremos en el Capítulo 3, pero tampoco sirven para encontrar explícitamente un ciclo.

Desde un punto de vista algorítmico el problema de buscar un ciclo hamiltoniano en un grafo G es un problema difícil. Es decir, un problema computacionalmente intratable. Esto no significa que no se puedan encontrar ciclos hamiltonianos en un grafo, pero se deben usar algoritmos que exploren todas las posibilidades técnicas de vuelta atrás.

Capítulo 3

Condiciones suficientes

Ahora veremos una serie de condiciones suficientes que se han establecido para que un grafo sea hamiltoniano.

Para escribir este capítulo nos hemos basado en las referencias [4], [10], [14], [26] y [28], y en los artículos originales que hablan de resultados de condiciones suficientes para la hamiltonicidad de un grafo en cuyo caso citaremos en los teoremas correspondientes.

Empezaremos el capítulo con el Teorema de Ore que se obtiene de la idea de que si hay un número suficiente de aristas en el grafo, entonces existirá un ciclo hamiltoniano. Para asegurar un número suficiente de aristas, trataremos de mantener la suma de grados de pares no adyacentes de vértices a un nivel bastante alto. Podemos ver el efecto que proporciona este control cuando consideramos un vértice x de grado “bajo”. Como x tiene muchos vértices no adyacentes en el grafo, los grados de todos estos vértices se ven obligados a ser “altos”, para garantizar que la suma de grados siga siendo lo suficientemente grande. Por lo tanto, el grafo tiene muchos vértices de grado alto, por lo que se espera que tenga suficiente estructura para garantizar que sea hamiltoniano.

Teorema 3.1 (Ore). *Sea G un grafo de orden $n \geq 3$. Si $d(u) + d(v) \geq n$ para cualquier par de vértices no adyacentes $u, v \in G$, entonces G es hamiltoniano.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existe un grafo G no hamiltoniano tal que para cualquier par de vértices u, v no adyacentes del grafo, $d(u) + d(v) \geq n$. Añadimos aristas a G hasta obtener un subgrafo H de K_n , tal que H no contenga un ciclo hamiltoniano pero que, para cualquier arista a , del grafo completo K_n , que no esté en H , $H + a$ tiene un ciclo hamiltoniano.

Tomamos G no hamiltoniano y todas las aristas de K_n , si existe alguna arista a tal que $G + a$ no es hamiltoniano, entonces nuestro subgrafo H será $G + a$. Ahora tomamos todas las aristas de K_n que no estén en $G + a$, si hay alguna arista b tal que $H + b$ no es hamiltoniano, entonces construimos $H + b$ y así sucesivamente, pero

desde G hasta K_n hay un número finito de aristas, entonces en algún momento este proceso se pasará de un grafo no hamiltoniano a uno hamiltoniano.

Como $H \neq K_n$, existen vértices $x, y \in V$, donde V es el conjunto de vértices, tales que la arista xy no pertenece a H , pero $H + xy$ tiene un ciclo hamiltoniano C . El grafo H no tiene dicho ciclo, por lo que la arista xy forma parte del ciclo C . Enumeraremos los vértices de H sobre el ciclo C del siguiente modo:

$$x(=v_1) \rightarrow y(=v_2) \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n \rightarrow x$$

Para cualquier i , $3 \leq i \leq n$, si la arista yv_i está en el grafo H , entonces tendremos que la arista xv_{i-1} no puede ser una arista de H puesto que si ambas están en el grafo, obtendremos el ciclo hamiltoniano

$$y \rightarrow v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n \rightarrow x \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_{i-2} \rightarrow \dots \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow y$$

en el grafo H que no tenía ciclos hamiltonianos como habíamos dicho anteriormente. Por tanto, para cada $3 \leq i \leq n$, como máximo una de las aristas yv_i , xv_{i-1} está en H . En consecuencia, $d_H(x) + d_H(y) < n$, donde $d_H(v)$ denota el grado del vértice v en H . Para cualquier $v \in V(G)$, $d_H(v) \geq d_G(v) = d(v)$, por lo que tenemos los vértices x, y no adyacentes en G que cumplen

$$d(x) + d(y) < n.$$

Esto contradice la hipótesis

$$d(v) + d(u) \geq n$$

para cualquier par de vértices no adyacentes, por lo que rechazamos nuestra suposición y vemos que G contiene un ciclo hamiltoniano. \square

El siguiente resultado surge de que la demostración del Teorema 3.1 no utiliza todas las condiciones del enunciado, pues no usa que cada par de vértices no adyacentes $u, v \in G$ cumpla la condición $d(u) + d(v) \geq n$.

Teorema 3.2. *Sea G un grafo simple. Si u y v son vértices no adyacentes con $d(u) + d(v) \geq n$, entonces G es hamiltoniano si y solo si $G + uv$ es hamiltoniano.*

Demostración. Si G es un grafo hamiltoniano, entonces $G + uv$ es hamiltoniano para dos vértices no adyacentes u y v de G , pues el mismo ciclo de G recorre todos los vértices de $G + uv$. Por lo tanto, solo necesitamos probar lo contrario.

Sea $G + uv$ un grafo hamiltoniano para dos vértices no adyacentes u y v de un grafo G , y supongamos, por el contrario, que G no es hamiltoniano. Esto implica que todo ciclo hamiltoniano $G + uv$ debe tener la arista uv , por lo que G contiene un camino hamiltoniano de u a v

$$u = x_1x_2x_3 \dots x_n = v.$$

De la misma forma que en la demostración del Teorema 3.1, existe un i con u adyacente a x_{i+1} y v adyacente a x_i . Si no fuera así, $N(u) = \{x_k : ux_k \in G\}$ con

$|N(u)| = d(u)$, $|N(v)| = d(v)$, $\{x_k \in N(v)\} \cap \{x_{k-1} : x_{k-1} \in N(u)\}$ y $d(u) + d(v) < n$ pues $x_n \notin N(u) \cup N(v)$.

Así tenemos que G contiene un ciclo hamiltoniano, lo cual es una contradicción. \square

Del Teorema anterior se deduce el siguiente resultado que relaciona la hamiltonicidad de un grafo y su clausura.

Teorema 3.3. *Un grafo G es hamiltoniano si y sólo si $cl(G)$ es hamiltoniano.*

Este Teorema es consecuencia de la Definición 1.9 y el Teorema 3.2.

Si $cl(G) = K_n$, entonces es inmediato que $cl(G)$ es hamiltoniano y, por tanto que G es hamiltoniano. Esta observación ofrece otra prueba del Teorema 3.1 y del Teorema 3.7.

Corolario 3.4. *Sea G un grafo con al menos 3 vértices. Si $cl(G)$ es completo, entonces G es hamiltoniano.*

Si un grafo satisface las condiciones del Teorema 3.1, entonces $cl(G)$ es completo y por el Corolario 3.4, es hamiltoniano. Por lo tanto, el Teorema 3.1 es un corolario inmediato del Teorema 3.3 (aunque fue anterior a él).

Muchas de las condiciones suficientes que se conocen para que un grafo sea hamiltoniano según los grados de sus vértices se pueden deducir del Corolario 3.4. Para demostrar los siguientes resultados nos apoyaremos en dicho corolario.

Teorema 3.5. *Sea G un grafo de orden n y sea $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ la secuencia de grados de los vértices de G con $d_i = d(v_i)$. Supongamos que no existen enteros i, j tales que $i < j$, $i + j \geq n$, $v_i v_j \notin A(G)$, $d(v_i) \leq i$, $d(v_j) \leq j - 1$ y $d(v_i) + d(v_j) \leq n - 1$. Entonces G es hamiltoniano.*

Demostración. Por el Corolario 3.4 solo tenemos que probar que $cl(G)$ es un grafo completo. Supongamos que $H = cl(G)$ no es un grafo completo, y tomemos en H dos vértices no adyacentes v_i, v_j tales que

(I) j sea lo más grande posible

(II) i sea lo más grande posible teniendo en cuenta (I).

Viendo que i y j satisfacen todas las condiciones del teorema llegaremos a una contradicción.

Tal y como hemos elegido i y j tenemos que $i < j$. Como H es la clausura, tenemos

$$d_H(v_i) + d_H(v_j) \leq n - 1 \quad (1)$$

y así, $d(v_i) + d(v_j) \leq n - 1$. Por (I), v_i debe ser adyacente en H a todos los v_k con $k > j$ y así

$$d_H(v_i) \geq n - j. \quad (2)$$

Por (II), v_j debe ser adyacente en H a todos los v_k con $k > i$, $k \neq j$ y así

$$d_H(v_j) \geq n - i - 1. \quad (3)$$

Ahora, (1) y (2) implican que $d(v_j) \leq d_H(v_j) \leq n - 1 - (n - j) = j - 1$ y; (1) y (3) implican $d(v_i) \leq d_H(v_i) \leq n - 1 - (n - i - 1) = i$. Finalmente, (2) y (3) implican que $i + j \geq 2n - 1 - d_H(v_i) - d_H(v_j) \geq n$ por (1). \square

El Teorema 3.3 es más fuerte que el Teorema 3.5, pero el Teorema 3.5 es más fuerte que el siguiente resultado de Chvátal que solo tiene en cuenta los grados de los vértices.

Deducir el Teorema de Chvátal del anterior no es inmediato, pero se puede demostrar de modo similar al Teorema 3.5.

Teorema 3.6. *Sea G un grafo de orden $n \geq 3$, de forma que la sucesión de grados es creciente. Es decir, existe una ordenación de los vértices x_1, \dots, x_n tal que si $d_i = d(x_i)$ entonces $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Si no hay un valor $k < \frac{n}{2}$ para el cual $d_k \leq k$ y $d_{n-k} \leq n - k - 1$, entonces G es hamiltoniano.*

Demostración. Veamos que $cl(G)$ es completo lo que, por el Corolario 3.4, implica que G es hamiltoniano.

Supongamos, por el contrario, que $cl(G)$ no es completo. Sean u y w un par de vértices no adyacentes de $cl(G)$ para los cuales $d_{cl(G)}(u) + d_{cl(G)}(w)$ es lo más grande posible. Como u y w son vértices no adyacentes de $cl(G)$, se sigue que

$$d_{cl(G)}(u) + d_{cl(G)}(w) \leq n - 1.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $d_{cl(G)}(u) \leq d_{cl(G)}(w)$. Así, si $k = d_{cl(G)}(u)$, tenemos que $k \leq \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$ y $d_{cl(G)}(w) \leq n - 1 - k$.

Sea W el conjunto de los vértices distintos de w que no son adyacentes a w en $cl(G)$. Entonces

$$|W| = n - 1 - d_{cl(G)}(w) \geq k.$$

Además, como hemos elegido u y w de modo que $d_{cl(G)}(u) + d_{cl(G)}(w)$ es máximo, cada vértice $v \in W$ satisface

$$d_G(v) \leq d_{cl(G)}(v) \leq d_{cl(G)}(u) = k.$$

Así, G tiene al menos k vértices de grado como máximo k y $d_k \leq k$.

Análogamente, denotemos con U al conjunto de los vértices distintos de u que no son adyacentes a u en $cl(G)$. Entonces

$$|U| = n - 1 - d_{cl(G)}(u) = n - k - 1.$$

Todo vértice $v \in U$ satisface $d_G(v) \leq d_{cl(G)}(v) \leq d_{cl(G)}(w) \leq n - 1 - k$, por la maximidad de $d_{cl(G)}(u) + d_{cl(G)}(w)$. Así G tiene $n - k - 1$ vértices de grado como

máximo $n - k - 1$, lo que implica que $d_{n-k-1} \leq n - k - 1$. Sin embargo, como u también tiene grado k

$$k = d_G(u) \leq d_{cl(G)}(u) \leq d_{cl(G)}(w) \leq n - 1 - k,$$

y esto nos da un total de al menos $n - k$ vértices con grado menor que $n - k$ y entonces $d_{n-k} \leq n - k - 1$. Esto, sin embargo, contradice la hipótesis del teorema. Por lo tanto, $cl(G)$ es completo. \square

A menudo se puede deducir que un grafo dado es hamiltoniano simplemente calculando su secuencia de grados y aplicando el Teorema 3.5 o el Teorema 3.6. Este último es más fuerte que el teorema que veremos a continuación, pero no tan fuerte como el Corolario 3.4.

Quizás, la condición suficiente más simple para que un grafo sea hamiltoniano se deba a Dirac. El siguiente teorema es consecuencia de cada uno de los Teoremas 3.1, 3.4 y 3.6. A continuación, daremos una demostración aportada por Dirac de forma independiente [28].

Teorema 3.7 (Dirac). *Sea G un grafo de orden $n \geq 3$ y $\delta(G)$ el mínimo grado de G . Si $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces G es hamiltoniano.*

Demostración. Sea G un grafo que satisface las condiciones del teorema, y supongamos que G no es hamiltoniano. Sea $P = v_1, v_2, \dots, v_p$ un camino en G de longitud máxima, es decir, $p = n$ y v_1v_p no es arista o $p < n$. Debido a la maximidad de P , sabemos que todos los vecinos de v_1 y de v_p están en P , si no fuera así, aumentaríamos la longitud del camino añadiendo algún vértice adyacente a v_1 o a v_p en contra de la maximidad de P . Y como $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, tanto v_1 como v_p tiene al menos $\frac{n}{2}$ vecinos en P .

Luego, debe existir algún j ($1 \leq j \leq p - 1$) tal que $v_j \in N(v_p)$ y $v_{j+1} \in N(v_1)$. Supongamos por el momento que ese no es el caso. Luego para todo vecino v_i de v_p en P , v_{i+1} no es un vecino de v_1 . Esto significa que

$$d(v_1) \leq p - 1 - \frac{n}{2} < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

contradiciendo el hecho de que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Por lo tanto, existe dicho j (ver Figura 3.1).

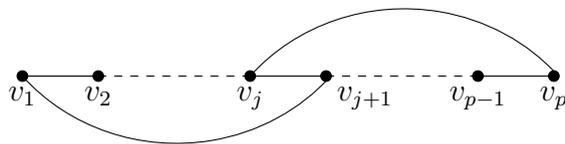


Figura 3.1.

Sea C el ciclo $v_1, v_2, \dots, v_j, v_p, v_{p-1}, \dots, v_{j+1}, v_1$. Habíamos supuesto que G no era hamiltoniano, luego, debe haber al menos un vértice de G que no esté en P . Veamos que como $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces G es conexo. Sean $x, y \in G$, si fueran adyacentes, están unidos por un camino; si no lo son $d(x) + d(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ y por tanto, hay al menos n aristas de los vértices x, y a los otros $n - 2$ vértices del ejemplo (no hay arista xy), entonces existe otro vértice z adyacente a ambos, y se tiene xyz y ambos vértices están unidos por un camino. Luego, G es conexo. Por lo tanto, debe haber un vértice u que no está en P que sea adyacente a un vértice, v_i , en P , pues la longitud del camino P es al menos $\frac{n}{2}$ (los vértices de v_1) y u tiene grado mayor o igual que $\frac{n}{2}$. Pero entonces, el camino en G que empieza en u , después va a v_i , y luego va alrededor del ciclo C , es un camino más largo que nuestro camino maximal P . Luego, llegamos a contradicción, es decir nuestra suposición inicial es incorrecta. Por lo tanto, G es hamiltoniano. \square

Se ve fácilmente que el teorema falla si los vértices son de grado $\frac{n}{2} - 1$, pues entonces se puede poner como contraejemplo un grafo de dos componentes conexas de n vértices cada uno un grafo completo.

Notemos que el Teorema 3.6 (y por tanto, el Teorema 3.5) generaliza los resultados de Ore y Dirac (Teorema 3.1 y Teorema 3.7, respectivamente), así como otros resultados de Pósa (Teorema 3.8), Bondy (Teorema 4.8) y Nash-Williams (Teorema 3.12).

Como podemos ver a continuación, el Teorema 3.7 se puede demostrar de forma constructiva usando otra interpretación [37].

Dado un grupo de $2n$ personas, cada una de ellas amiga de al menos n de estas personas (amistad reflexiva), tenemos que ver que existe una forma de sentarlos alrededor de una mesa redonda de modo que nadie se siente al lado de un desconocido.

Para demostrarlo iremos añadiendo m personas de las que todo el mundo es amigo. Con este nuevo grupo de persona pueden ocurrir dos casos: que exista una forma de sentarlos de modo que ninguno se siente al lado de algún desconocido o no.

Si $m = 2n$ existe una posible forma de sentarlos, simplemente alternando estos últimos entre las personas iniciales.

Sea k el menor m para el cual la disposición de asientos es posible. Debemos demostrar que $k = 0$ así que, supongamos $k > 0$ y la disposición $APB \dots A$, donde P es una persona de la que todo el mundo es amigo (ver Figura 3.2(a)). Si P no va ahí, irá en algún sitio $AB \dots XP \dots A$ y reordenaremos $XP \dots X$.

Sea A' un amigo de A y B' un amigo de B . Si en la sucesión anterior en algún momento aparece la pareja $A'B'$ (ver Figura 3.2(b)), entonces se tiene la disposición $AP[B \dots A']B' \dots A$, y eliminando a P e invirtiendo el trozo $B \dots A'$ tenemos $AA' \dots BB' \dots A$, que es una posible disposición de asientos (ver Figura 3.2(c)). Si $A = B'$ no tenemos que invertir el trozo $B \dots A'$.

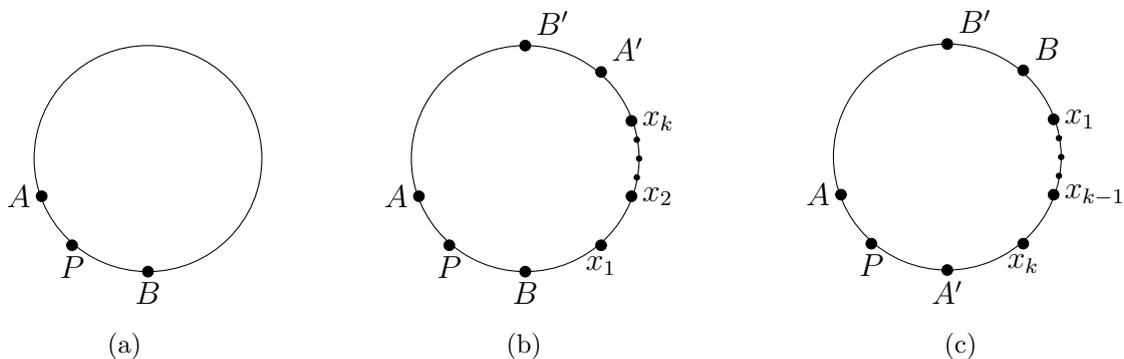


Figura 3.2. Disposiciones de asientos

Como $k > 0$, sin P no puede existir una forma de sentarlos, por tanto $A'B'$ no aparece nunca después de B y esto implica que $A'B'$ no aparece nunca y, luego, después de cada A' aparecerá un $V - N(B)$, es decir, un desconocido de B .

Luego, $|V - N(B)| \geq |A'| \geq n + k$. Además, $|B'| \geq n + k$. Uniendo estas dos desigualdades tenemos que el número total de personas es mayor o igual que $2n + 2k$, o $2n + k \geq 2n + 2k$, lo cual es una contradicción puesto que habíamos supuesto $k > 0$.

Cada una de las condiciones suficientes presentadas hasta ahora requiere que el grafo tenga algún vértice de grado al menos $\frac{n}{2}$.

El Teorema 3.1 y el Teorema 3.7 se pueden generalizar en el siguiente resultado de Pósa.

Teorema 3.8. *Sea G un grafo de orden $n \geq 3$ y secuencia de grados $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Si para todo $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ se tiene que $d_k \leq k$ entonces G es hamiltoniano.*

Demostración. Supongamos que el Teorema 4.8 no es cierto, entonces existen j y k con $d_j \leq j$, $d_k \leq k - 1$ y $d_j + d_k < n$. Esto nos da $i = d_j < \frac{n}{2}$. Pero entonces, $d_j \leq j$ da un $d_{d_j} \leq d_j$, ya que la sucesión es creciente. Por lo tanto, $d_i \leq d_j = i$. Así que hay un i con $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ y $d_i \leq i$, lo que contradice el enunciado del teorema.

Si el Teorema 3.6 no es cierto, hay un k con $d_k \leq k < \frac{n}{2}$ y $d_{n-k} \leq n - k - 1$. Entonces $d_k + d_{n-k} \leq n - 1$. Tomando $n - k = j$, se tiene $k < j$, $d_k \leq k$, $d_j \leq j - 1$ y $d_j + d_k \leq n - 1$. Esto contradice el Teorema 3.6, y por tanto se tiene que G es hamiltoniano. \square

El siguiente resultado, involucra la cardinalidad de conjuntos independientes de vértices y la conectividad del grafo.

Teorema 3.9. *Sea G un grafo conexo con $n \geq 3$ vértices, conectividad $\kappa(G)$ y grado de independencia $\beta(G)$. Si $\kappa(G) \geq \beta(G)$, entonces G es hamiltoniano.*

Demostración. Si G cumple las condiciones del teorema, entonces $\kappa(G) \geq 2$, pues si $\kappa(G)$ fuera 1 entonces $\beta(G) = 1$ y por tanto, G es K_1 o K_2 , contradiciendo el hecho

de que $n \geq 3$.

Supongamos que G es un grafo no hamiltoniano que cumple las condiciones del teorema; debemos llegar a una contradicción. Sea C un ciclo de máxima longitud en G , y sea v un vértice del grafo que no pertenece a C . Sea H la componente conexa de $G - V(C)$ que contiene a v . Sean c_1, c_2, \dots, c_r los vértices de C que son adyacentes a algún vértice de H y, supongamos que esos vértices están colocados en el ciclo en el sentido de las agujas del reloj. Para cada i con $1 \leq i \leq r$, sea h_i el vértice de H adyacente a c_i y sea d_i el siguiente vértice de c_i en el ciclo.

Como podemos observar, si eliminamos los vértices c_1, c_2, \dots, c_r del grafo G , entonces el grafo H se desconecta de G . Como $\kappa(G)$ es el tamaño del conjunto de corte más pequeño, se deduce que $r \geq \kappa(G) \geq 2$ por lo visto al principio de la demostración.

A continuación, veamos que los vértices del conjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ no son consecutivos. Para ello, supongamos que hay algún i tal que c_i y c_{i+1} son consecutivos en C . Sea P el camino de h_i a h_{i+1} en H y, consideremos el ciclo formado al cambiar la arista $c_i c_{i+1}$ por el camino $c_i P c_{i+1}$. Este ciclo es más largo que C luego llegamos a una contradicción. Además, de esta forma, los conjuntos $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ y $\{d_1, d_2, \dots, d_r\}$ son disjuntos.

Ahora tenemos que ver que cada d_i con $1 \leq i \leq r$ no es adyacente a v . Suponemos que existe la arista $d_i v$ para algún i y sea Q el camino de h_i a v en H . En este caso, el ciclo formado al cambiar la arista $c_i d_i$ por el camino $c_i Q d_i$ es más largo que C y, por tanto, d_i no es adyacente a v para ningún i .

Como $\beta(G) \leq \kappa(G)$, el conjunto $S = \{v, d_1, \dots, d_r\}$ no es un conjunto independiente, pues por la primera observación que hemos hecho tenemos que $|S| \geq \kappa(G) + 1 > \beta(G)$ y esto significa que algún par de vértices en S deben ser adyacentes. De la última observación, podemos deducir que d_i debe ser adyacente a d_j para algún $i < j$. Si R es un camino de h_i a h_j en H entonces el ciclo $c_i h_i \dots h_j c_j d_j d_{j-1} \dots c_{i+1} d_i d_j d_{j+1} \dots c_{i-1} c_i$ de la Figura 3.3 es más largo que C .

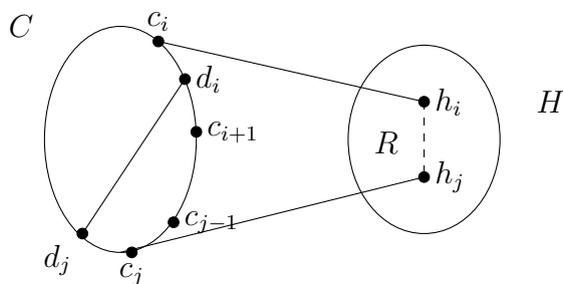


Figura 3.3.

Como habíamos supuesto que G no era hamiltoniano, llegamos a contradicción y tiene que serlo. □

La cota de este teorema no puede mejorarse, es decir, si $\kappa(G) \geq \beta(G) - 1$ puede que el grafo no sea hamiltoniano, por ejemplo, el grafo completo bipartito $K_{r,r+1}$ o el grafo de Petersen (Figura 2.4) son algunos ejemplos que lo prueban.

El siguiente teorema pertenece a una categoría de resultados que relacionan la hamiltonicidad con los subgrafos prohibidos. Dados los grafos G y H , si G no contiene una copia de H como subgrafo inducido, entonces decimos que G está libre de H . Si S es un conjunto de grafos, y si G no contiene ninguno de los grafos de S como subgrafos inducidos, entonces decimos que G es libre de S .

Teorema 3.10. *Si G es un grafo 2-conexo libre de $K_{1,3}$ y Z_1 con $Z_1 = K_{1,3} + a$, entonces es hamiltoniano.*

Demostración. Supongamos G un grafo 2-conexo libre de $K_{1,3}$ y Z_1 y sea C un ciclo máximo en G . Si C no es hamiltoniano, entonces debe existir un vértice $v \notin C$ que sea adyacente a un vértice $w \in C$. Sean x e y los vértices anterior y posterior a w respectivamente en C .

Si x o y fueran adyacentes a v , existiría un ciclo más largo que C , luego ni x ni y serán adyacentes a v . Ahora, si x no es adyacente a y , entonces el subgrafo inducido por los vértices $\{w, v, x, y\}$ es $K_{1,3}$ (ver Figura 3.4 (a)), y sabemos que G es libre de $K_{1,3}$. Así que, $xy \in A(G)$. Pero si estamos en este caso, entonces el subgrafo inducido por $\{w, v, x, y\}$ es Z_1 (ver Figura 3.4 (b)), lo cual es una contradicción. Por lo tanto, C es un ciclo hamiltoniano. \square

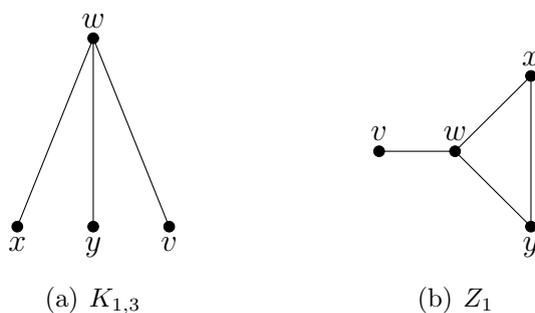


Figura 3.4.

Ahora obtendremos el resultado siguiente a partir del Teorema 3.1. Éste nos dará una condición suficiente para que un grafo tenga un ciclo hamiltoniano examinando el tamaño del conjunto de aristas A .

Teorema 3.11. *Si $G = (V, A)$ es un grafo de orden $n \geq 3$, y $|A| \geq \binom{n-1}{2} + 2$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Sea G un grafo que satisface las condiciones anteriores. Si no existen dos vértices no adyacentes es porque todos los vértices son adyacentes y entonces el

grafo sería K_n , que es hamiltoniano. Ahora, supongamos que si existen dos vértices no adyacentes $x, y \in G$. Como x e y no son adyacentes, si probamos que $d(x) + d(y) \geq n$, usando el Teorema 3.1 tendremos que el grafo G es hamiltoniano.

Sea $H = (V', A') = G - \{x, y\}$. Entonces, $|A| = |A'| + d(x) + d(y)$ pues x e y no son adyacentes.

Como $|V'| = n - 2$, H es un subgrafo del grafo completo K_{n-2} , luego $|A'| \leq \binom{n-2}{2}$. Por consiguiente, $\binom{n-1}{2} + 2 \leq |A| = |A'| + d(x) + d(y) \leq \binom{n-2}{2} + d(x) + d(y)$, y se tiene que

$$\begin{aligned} d(x) + d(y) &\geq \binom{n-1}{2} + 2 - \binom{n-2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \\ &= \frac{(n-2)[(n-1) - (n-3)]}{2} + 2 = \frac{2(n-2)}{2} + 2 = (n-2) + 2 = n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.1 se tiene que el grafo G tiene un ciclo hamiltoniano. \square

Ahora probaremos un resultado que descubrió Nash-Williams [13] y que es más fuerte que el Teorema de 3.7 y, por tanto, más fuerte aún que el Teorema 3.9, cuando $\delta(G)$ no es tan pequeño.

Teorema 3.12 (Nash-Williams). *Sea G un grafo 2-conexo con n vértices, $\delta(G) \geq \frac{n+2}{3}$. Entonces, podemos encontrar en G tanto un ciclo hamiltoniano o un conjunto independiente de tamaño $\delta(G) + 1$.*

Equivalentemente, si G es un grafo 2-conexo de orden n con $\delta(G) \geq \max\{\frac{n+2}{3}, \beta(G)\}$, entonces G es hamiltoniano.

Para realizar la demostración de este teorema nos hemos basado en la que aparece en [31], pues la original de Nash-Williams [36] requiere de otros conceptos y resultados previos que hacen aún más larga la demostración.

Demostración. Todos los ciclos que consideraremos en la demostración son simples. Antes de comenzar, denotaremos $V = V(G)$.

Tomemos C un ciclo arbitrario de G (el hecho de que G sea 2-conexo nos garantiza la existencia de un ciclo, pues cada par de vértices está conectado por al menos dos caminos disjuntos (ver Definición 1.19)).

A partir de C extendemos dicho ciclo en ciclos sucesivamente más largos hasta que alcancemos un ciclo hamiltoniano o encontremos un conjunto independiente del tamaño que nos interesa. A menos que hayamos encontrado un ciclo hamiltoniano, se tiene que $|C| = k < n$.

Supongamos que $V - C$ es un conjunto independiente, y sea $v \in V - C$ un vértice cualquiera. Debido a la independencia de $V - C$ tenemos que $N(v) \subseteq C$ (por ser $V - C$ un conjunto independiente todos los vecinos de v tienen que estar fuera de $V - C$, es decir, en C).

Si dos vecinos de v están unidos por una arista de C , entonces inmediatamente podemos extender C por v , sustituyéndola por las dos aristas que los unen con v .

Asumamos por tanto, que este no es el caso.

Sean $C = x_1, x_2, \dots, x_k$, y $N^+ = \{v_{i+1} \in C/v_i \in N(v)\}$ el conjunto de vértices siguientes en el ciclo a los vértices de $N(v)$. Entonces, $|N^+| \geq \delta(G)$.

De nuevo, si dos vértices $x, y \in N^+$ están unidos por una arista o camino en G , entonces C se puede extender aún más sustituyendo la parte $v_{i+1} \dots v_{l+1}$ por $v_i v v_l v_{j+1} v_j \dots v_{i+1} v_{l+1}$ tal como se muestra en la Figura 3.5.

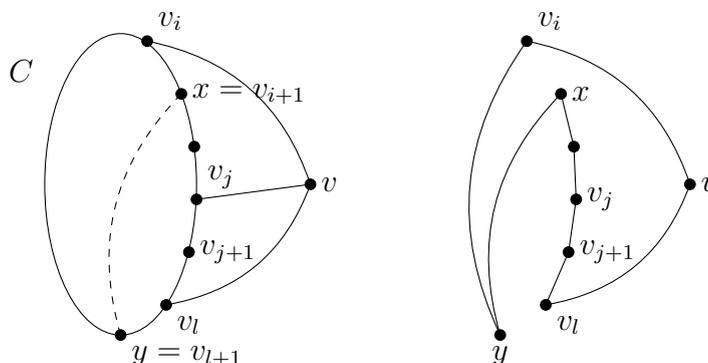


Figura 3.5.

Por lo tanto, $N^+ \cup \{v\}$ es un conjunto independiente en G del tamaño que queríamos. Ahora quedaría por demostrar que C se puede ampliar siempre que $V - C$ no sea un conjunto independiente. Claramente, $|V - C| \geq 2$.

Como antes, sea $C = x_1, x_2, \dots, x_k$ y $P = (x_1, p_1, p_2, \dots, x_{t+1})$ con $1 \leq t \leq k$, un camino simple de longitud al menos 3, que interseca a C solo en los vértices finales x_1 y x_{t+1} como se muestra a continuación en la Figura 3.6.

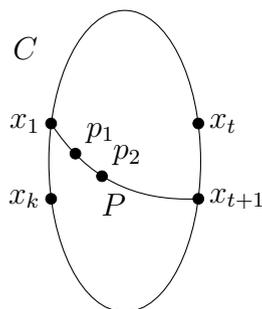


Figura 3.6.

En primer lugar, veamos que se puede asegurar la existencia de este camino. Como G es conexo y $|V - C| \geq 2$, consideremos el camino (u, v, w) en G , donde $u \in C$ y $v, w \in V - C$, este camino debe existir puesto que hemos asumido que $V - C$ no es independiente y G es 2-conexo; empecemos en una arista que no esté en C y consideremos el camino que une un vértice de C con uno de los extremos de la arista (ver figura 3.7).

Si hay un camino (disjunto de $\{u, v\}$) de w a un vértice arbitrario $x \in C - \{u\}$, entonces podremos obtener el camino deseado tomando $x_1 = u$, $p_1 = v$, $p_2 = w$ y $x_{t+1} = x$. Si no existe tal camino, entonces debe existir un camino R disjunto internamente de los vértices $\{u, v\}$ de v a un vértice arbitrario $x \in C - \{u\}$; de lo contrario, si se elimina u , G se desconecta y esto contradice el hecho de que G es $2 - \text{conexo}$. Además, tiene que existir un camino Q que una u y w sin contener a v ; de lo contrario al eliminar v se separarían u y w e internamente, no debe tener vértices en común con C y R (de lo contrario tendríamos un camino de w a un vértice de $C - \{u\}$, el cual habíamos descartado antes) ver figura 3.7.

Ahora, obtenemos la estructura deseada con $x_1 = u, x_{t+1} = x$ y p_1, p_2 el segundo y tercer vértice de Q , y la arista wv .

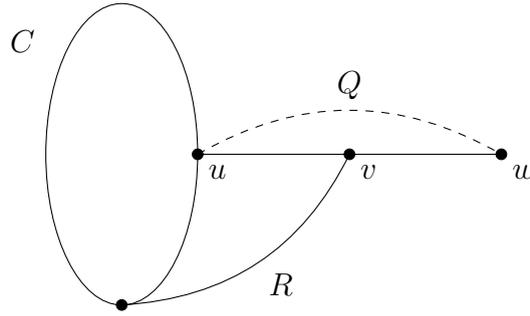


Figura 3.7.

Una vez se tiene el camino $P = (x_1, p_1, p_2, \dots, x_{t+1})$, sean $d_t^\uparrow, d_k^\uparrow, d_2^\uparrow$ el número de vecinos x_i con $1 \leq i \leq t$ de x_t, x_k, p_2 respectivamente. Del mismo modo, denotemos por $d_t^\downarrow, d_k^\downarrow, d_2^\downarrow$ el número de vecinos x_i con $t < i \leq k$ de x_t, x_k, p_2 respectivamente. Y, sean $d_t^\circ, d_k^\circ, d_2^\circ$ el número de vecinos en $V - C$ de x_t, x_k, p_2 respectivamente. Es decir, d^\uparrow es, para cada uno de los vértices, el número de vecinos que tienen en la parte del ciclo x_1, x_2, \dots, x_t ; d^\downarrow el número de vecinos en la parte del ciclo x_{t+1}, \dots, x_k (recordemos que el ciclo tiene k vértices) y d° es el número de vecino de cada vértice que no pertenecen al ciclo.

Al menos una de las siguientes desigualdades se cumple:

- 1) $d_t^\uparrow + d_k^\uparrow + d_2^\uparrow > t + 1$
- 2) $d_t^\downarrow + d_k^\downarrow + d_2^\downarrow > k - t + 1$
- 3) $d_t^\circ + d_k^\circ + d_2^\circ > n - k - 1$

Si no fuera así, entonces, la suma de los grados de x_t, x_k y p_2 es como mucho $(t + 1) + (k - t + 1) + (n - k - 1) \leq n + 1$ y, por tanto, al menos uno de ellos tiene grado como máximo $\frac{n+1}{3} < \delta$, lo cual es absurdo por hipótesis.

En lo que sigue podemos suponer $d_2^\uparrow \leq 1$, ya que si p_2 está unido a algún x_i con $1 < i \leq t$, entonces podemos elegir un índice t menor en nuestra construcción.

- 1) Supongamos que se cumple la primera inecuación de la afirmación anterior. Por tanto, $d_t^\uparrow + d_k^\uparrow + d_2^\uparrow > t + 1$ con lo que $d_t^\uparrow + d_k^\uparrow > t$ y por el Principio de Palomar, hay algún $1 \leq i < t$ tal que $x_k x_{i+1}$ y $x_t x_i$ son aristas de G . Si no existe un i tal que para todo x_i vecino de x_t , $x_{i+1} x_k$ no es arista, entonces $d_k^\uparrow \leq t - 1 - d_t^\uparrow$. Luego, $d_t^\uparrow + d_k^\uparrow \leq d_t^\uparrow + t - 1 - d_t^\uparrow \leq t - 1$, lo que contradice la condición. Entonces C se puede extender añadiendo dichas aristas y el camino $(x_1, p_1, \dots, x_{t+1})$ y eliminando las aristas $x_k x_1$, $x_t x_{t+1}$ y $x_i x_{i+1}$ como se ve en la Figura 3.8.

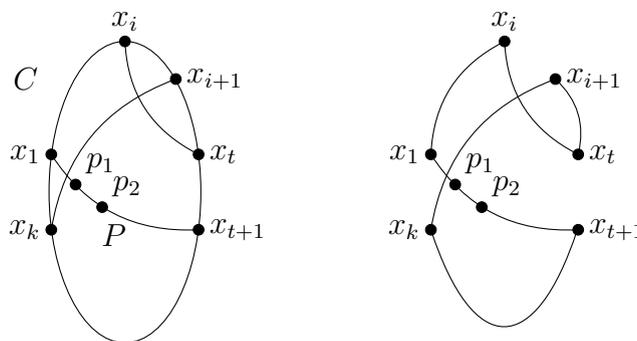


Figura 3.8.

- 2) Supongamos que se cumple la segunda de las inecuaciones. Entonces hay algún $t + 1 \leq i < k$ tal que alguna de las siguientes condiciones es cierta:
- $x_k x_i$ y $x_t x_{i+1}$ son aristas de G .
 - $x_t x_i$ y $p_2 x_{i+1}$ son aristas de G .
 - $i < k - 1$ y $x_k x_i$ y $p_2 x_{i+2}$ son aristas de G .
 - $x_k x_t$ o $p_2 x_k$ es una arista de G .

Suponemos que no se cumple ninguna. Entonces, para cualquier $t + 1 \leq i < k$:

- Como no se cumple 2a, si $x_t x_{i+1}$ es una arista, entonces $x_k x_i$ no puede serlo.
- Como no se cumple 2b, si $p_2 x_{i+1}$ es una arista, entonces $x_t x_i$ no puede serlo.
- Como no se cumple 2c, si $i < k - 1$, $p_2 x_{i+2}$ es una arista, entonces $x_k x_i$ no puede serlo
- Como no se cumple 2d, x_k no es adyacente ni a x_t ni a p_2 . Entonces quitamos $d_t^\downarrow - 1$ posibles vecinos de x_k (pues x_{t+1} es adyacente a x_t y este no lo es a x_k), que serán los anteriores a los vecinos adyacentes a x_t . Además, le quitaremos también a lo sumo $d_2^\downarrow - 1$ posibles vecinos, que serán los vértices x_{i-2} tales que x_i es adyacente a p_2 y si x_{t+1} es adyacente a p_2 , x_{t-1} no está en el conjunto $x_{t+1} \dots x_k$. Además, estos vértices eliminados del conjunto

$x_{t+1} \dots x_k$, por los dos casos, no son los mismos porque la condición 2b no se cumple. Luego,

$$d_k^\downarrow \leq k - t - 1 - (d_t^\downarrow + d_2^\downarrow - 2) = k - t + 1 - d_t^\downarrow - d_2^\downarrow$$

Entonces, $d_t^\downarrow + d_k^\downarrow + d_2^\downarrow \leq d_t^\downarrow + (k - t + 1 - d_t^\downarrow - d_2^\downarrow) + d_2^\downarrow = k - t + 1$, con lo que llegamos a un absurdo, pues habíamos supuesto que se cumplía la segunda de las inecuaciones.

Por tanto, se tiene que cumplir una de ellas.

- Si se cumpliera 2a, eliminamos las aristas $x_t x_{t+1}$, $x_i x_{i+1}$ y $x_k x_1$ y añadimos las aristas $x_i x_k$, $x_{i+1} x_t$ y el camino $x_1 p_1 p_2 \dots x_{t+1}$ que al menos tiene tres más. Ver Figura 3.9.
- Si ocurriera 2b quitaríamos las aristas $x_t x_{t+1}$ y $x_i x_{i+1}$ y añadiríamos la arista $x_t x_i$, la arista $x_{i+1} p_2$ y el camino $p_2 \dots x_{t+1}$ que al menos tiene una más. Ver Figura 3.10.
- Si se cumple 2c, quitamos las aristas $x_i x_{i+1}$, $x_{i+1} x_{i+2}$, $x_k x_1$ y añadimos $x_{i+2} p_2$ y $x_i x_k$ y el camino $x_1 p_1 p_2$ que tiene dos aristas más. Ver Figura 3.11.
- Si ocurre 2d, tenemos dos opciones distintas:
 1. Si $x_k x_t$ es arista, eliminamos $x_t x_{t+1}$ y $x_k x_1$ y añadimos $x_k x_t$, y las del camino $x_1 p_1 p_2 \dots x_{t+1}$, que al menos tiene tres más. Ver Figura 3.12.
 2. Si $p_2 x_k$ es arista, quitamos la arista $x_k x_1$ y añadimos $x_k p_2$, y las dos del camino $x_1 p_1 p_2$. Ver Figura 3.13.

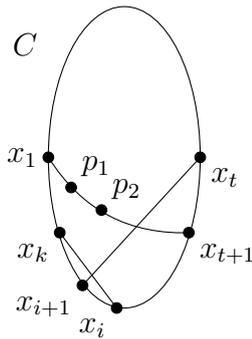


Figura 3.9.

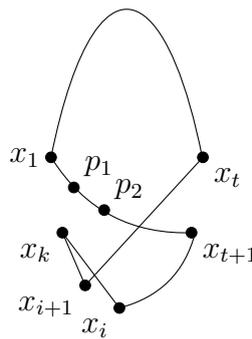
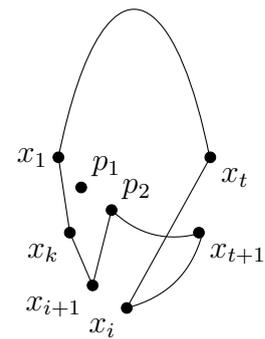
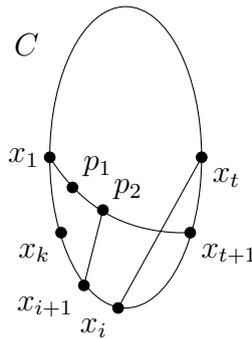


Figura 3.10.



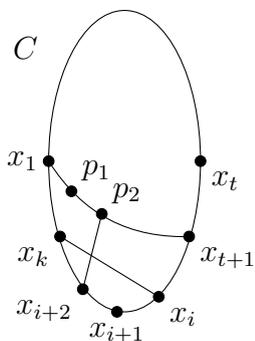


Figura 3.11.

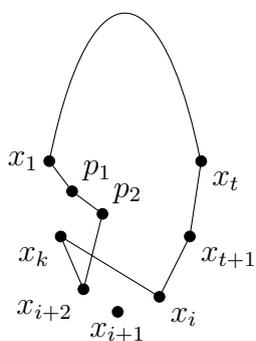


Figura 3.12.

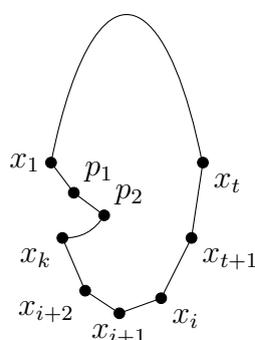
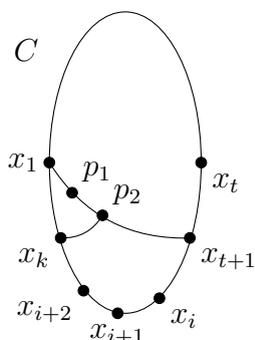
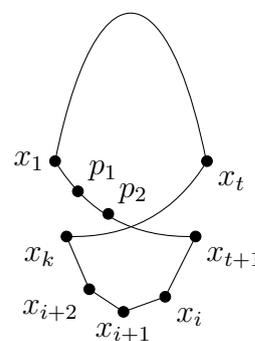
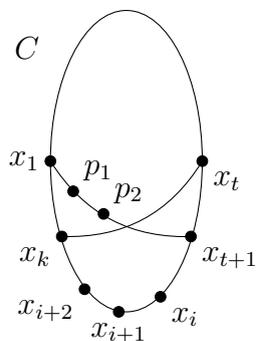


Figura 3.13.

3) Supongamos que se cumple la tercera inecuación.

Entonces, una de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) $x_i p_j$ o $x_k p_j$ es una arista de G para algún vértice p_j en el camino P .
- b) Al menos dos de las siguientes aristas $x_t w$, $x_k w$ y $p_2 w$ son aristas de G , para algún $w \in V - (C \cup P)$.

Antes de demostrar que alguna se cumple, veamos como en todos estos casos C puede ser extendido de modo similar a los casos anteriores.

- Si $x_i p_j$ es arista, eliminamos la arista $x_t x_{t+1}$ y añadimos al menos dos que estarán en el camino $p_j x_{t+1}$. Ver Figura 3.14.
- Si $x_k p_j$ es arista de G , eliminamos la arista $x_k x_1$ y añadimos al menos tres que serán $x_1 p_1$, $x_2 p_2$, $p_j x_k$ y las que haya en el camino $p_2 p_j$. Ver Figura 3.15.
- Si $x_t w$ y $x_k w$ son aristas de G , eliminamos $x_t x_{t+1}$ y $x_k x_1$ y añadimos al menos cuatro. Ver Figura 3.16.

- Si $x_t w$ y $p_2 w$ son aristas de G , quitamos la arista $x_t x_{t+1}$ y añadimos al menos dos. Ver Figura 3.17.
- Si $x_k w$ y $p_2 w$ son aristas de G , eliminamos la arista $x_1 x_k$ y añadimos $x_k w$ y $p_2 w$. Ver Figura 3.18.

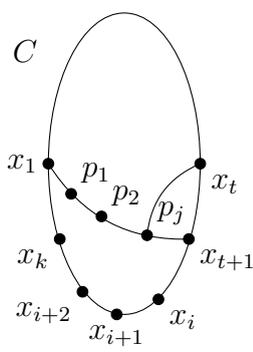


Figura 3.14.

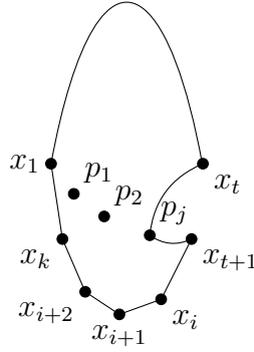


Figura 3.15.

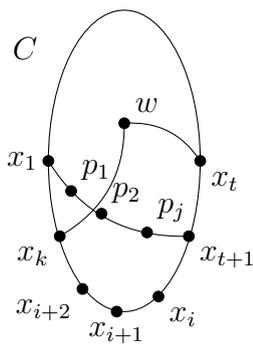
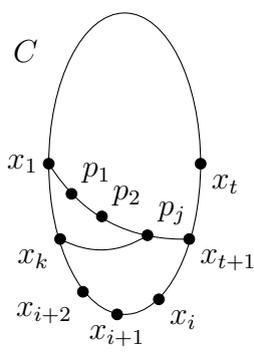


Figura 3.16.

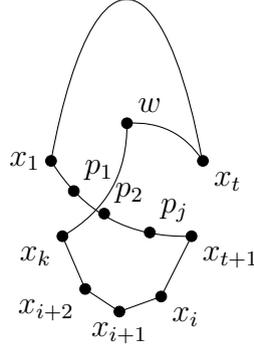


Figura 3.17.

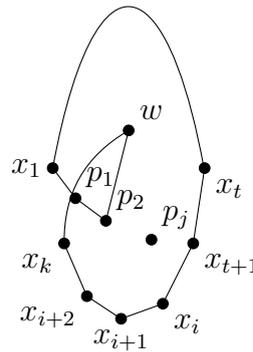
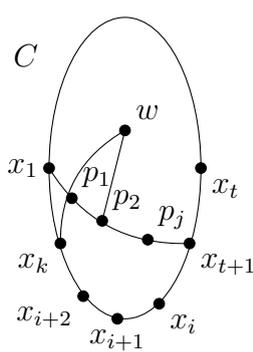
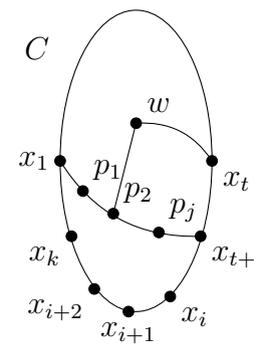


Figura 3.18.

Si se cumple 3a), ya estaría. Si 3a) no se cumple, veamos que necesariamente se da 3b). En caso contrario, si no existe ese w , todos los vértices de $V - (C \cup P)$ están unidos como mucho a uno de los vértices x_t , x_k o p_2 . Además, como no pasa 3a), tenemos que

$$N(x_t) \cap P = \emptyset \Rightarrow d_t^\circ = |N(x_t) \cap (V - (C \cup P))| = |A_t|$$

$$N(x_k) \cap P = \emptyset \Rightarrow d_k^\circ = |N(x_k) \cap (V - (C \cup P))| = |A_k|$$

$$d_2^\circ \leq |P| - 1 + |N(p_2) \cap (V - (C \cup P))| = |P| - 1 + |A_2|$$

donde $|P| - 1$ son los vecinos de dentro de $P - \{p_2\}$ y $|N(p_2) \cap (V - (C \cup P))|$ son los de fuera.

Luego, $d_t^\circ + d_k^\circ + d_2^\circ \leq |A_t| + |A_k| + |A_2| + |P| - 1$ porque los vecinos se pueden repetir, y también la cota de d_2° . Así,

$$\begin{aligned} d_t^\circ + d_k^\circ + d_2^\circ &\leq |A_t| + |A_k| + |A_2| + |P| - 1 \leq \\ &\leq |(V - (C \cup P))| + |P| - 1 = \\ &= |V| - |C| - |P| + |P| - 1 = n - k - 1 \end{aligned}$$

Lo cual es contradictorio con la tercera condición. Por tanto, en todos los casos podemos ampliar C . \square

A continuación, dependiendo de la k -conectividad eliminamos la ambigüedad de si es o no hamiltoniano [27].

Teorema 3.13. *Sea G un grafo 2-conexo de orden n con $\delta(G) \geq \frac{(n+k)}{3}$. Entonces G es hamiltoniano.*

Demostración. Probaremos que todo grafo con $\delta(G) \geq \frac{(n+k)}{3}$ satisface que el grado mínimo es mayor o igual que el cardinal de cualquier conjunto de vértices independientes, $\delta(G) \geq \beta(G)$. Por tanto, por el Teorema 3.12, G admite un ciclo hamiltoniano.

Supongamos que G es un grafo con $\delta(G) \geq \frac{(n+k)}{3}$ para el cual $\beta(G) > \delta(G)$, y sea T un conjunto independiente de $\beta(G)$ vértices en G . Sea S un conjunto de k vértices, de forma que al eliminar esos k vértices se desconecta el grafo luego, estos k vértices aumentan el número de componentes de 1 a s , pues es k -conexo; y denotemos por G_1, G_2, \dots, G_s a las componentes de $G - S$. Supongamos que $\beta(G) \geq 2$, ya que de lo contrario G sería completo y, por tanto, hamiltoniano.

Consideremos un par cualquiera de vértices $v_1, v_2 \in T$ con $v_1 \neq v_2$. Como

$$|N(v_1) \cap N(v_2)| = |N(v_1)| + |N(v_2)| - |N(v_1) \cup N(v_2)|$$

y como ningún vértice de T es adyacente a cualquier vértice de T por ser éste un conjunto independiente,

$$|N(v_1) \cup N(v_2)| \leq n - \beta(G).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} |N(v_1) \cap N(v_2)| &\geq 2\frac{n+k}{3} - (n - \beta(G)) \geq 2\frac{n+k}{3} - n + \delta(G) + 1 \geq \\ &\geq 2\frac{n+k}{3} - n + 2\frac{n+k}{3} + 1 \geq k + 1 \end{aligned}$$

pues $\beta(G) > \delta(G)$.

Veamos que $T \subset S \cup V(G_i)$ para algún i . En efecto, si para todo $v \in T$ tenemos que $v \in S$ se cumple. Ahora hay que ver que los vértices de $S - T$ están todos en la misma componente G_i . Si $v_1, v_2 \in S - T$ como $|N(v_1) \cap N(v_2)| \geq k + 1$ y en S hay k vértices, entonces hay al menos un vértice más $y \notin S$ adyacente a v_1 y a v_2 . Por tanto, $y \in G - S$ y v_1, v_2 están en la misma componente G_i , podemos tomar $i = 1$. Si $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces obviamente $\delta(G) \geq \beta(G)$, por el comentario que aparece después de la Definición 1.11 tenemos que

$$\beta(G) < n - \delta(G) \leq n - \frac{n}{2} \leq \frac{n}{2}$$

y estamos suponiendo $\beta(G) > \delta(G)$. Por tanto, $\delta(G) < \frac{n}{2}$. Por otra parte, veamos que $k \leq \delta(G)$. Supongamos que existe un vértice $v \in G$ con $d(v) < k$ (entonces $\delta(G) < k$). Por tanto, $|N(v)| \leq k - 1$. Eliminando los como mucho $k - 1$ vértices adyacentes de v el grafo $G - N(v)$ es aún conexo pues era k -conexo. Pero en $G - N(v)$, v es un vértice aislado sin vértices adyacentes. Luego, $k \leq \delta(G)$. De esta forma

$$\beta(G) > \delta(G) \geq \frac{n+k}{3} > \frac{2\delta(G) + k}{3} \geq \frac{3k}{3} = k.$$

Por lo tanto, existe un vértice $u \in T - S$, es decir, en G_1 . Sea $v \in G_2$. Entonces, como v no tiene vecinos en G_1 y u no tiene vecinos en T

$$|N(u) \cup N(v)| \leq n - |T \cap V(G_1)|$$

y como $T \subset S \cup V(G_1)$, y en G_1 no hay vecinos de S ,

$$n - |T \cap V(G_1)| = n - (\beta(G) - |S \cap T|).$$

Además, teníamos que

$$|N(u) \cap N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)|$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |N(u) \cap N(v)| &\geq 2\frac{n+k}{3} - n + \beta(G) - |S \cap T| \geq \\ &\geq 2\frac{n+k}{3} - n + \delta(G) + 1 - |S \cap T| \geq k + 1 - |S \cap T|. \end{aligned}$$

La última desigualdad se obtiene usando que $\delta(G) > \frac{n+k}{3}$.

Pero obviamente $N(u) \cap N(v) \subset S - T$, al estar u en G_1 y v en G_2 . Entonces $|N(u) \cap N(v)| \leq k - |S \cap T|$.

Esta contradicción muestra que $\delta(G) \geq \beta(G)$ y queda probado el teorema. \square

El siguiente resultado se debe a Nash-Williams [36].

Teorema 3.14. *Sea G un grafo k -regular con $2k + 1$ nodos. Entonces, G es hamiltoniano.*

Demostración. Sea G un grafo k -regular con $2k + 1$ vértices. Añadimos un nuevo vértice v a G y lo conectamos con el resto de vértices del grafo. Así, tenemos un nuevo grafo H de $2k + 2$ vértices con mínimo grado $k + 1$, que posee un ciclo hamiltoniano por el Teorema 3.7. En G , por lo tanto, debe haber un camino hamiltoniano $v_0, v_1, \dots, v_{2k-1}, v_{2k}$.

Supongamos que G no es hamiltoniano, por lo que si v_0 es adyacente a v_i entonces v_{i-1} no es adyacente a v_{2k} porque sino tendríamos un ciclo hamiltoniano. Como v_0 y v_{2k} son ambos de grado k , también tenemos que si v_0 no es adyacente a v_i entonces v_{i-1} es adyacente a v_{2k} . Los únicos vértices en el conjunto $\{v_2, v_3, \dots, v_{2k-2}\}$ que podrían ser adyacentes a v_{2k} son aquellos v_i tales que v_{i+1} no es adyacente a v_0 , pues lo anterior se refiere a que si v_0v_i es una arista, entonces $v_{i-1}v_{2k}$ no lo es, con lo que si $v_{i-1}v_{2k}$ es arista entonces v_0v_i no puede serlo. Luego,

$$N(v_{2k}) \cap \{v_1, \dots, v_{2k-2}\} \leq 2k - 2 - (k - 1) = k - 1.$$

Pero v_{2k} tiene grado k y $v_{2k-1}v_{2k}$ es una arista en G , lo que implica que v_{2k} tiene exactamente $k - 1$ vértices adyacentes en $\{v_2, \dots, v_{2k-2}\}$. Luego ambos conjuntos coinciden; es decir, si v_0v_i no es una arista, entonces $v_{i-1}v_{2k}$ si lo es. Distingamos dos casos.

Supongamos primero que v_0 es adyacente a v_1, v_2, \dots, v_k y, por tanto, v_{2k} es adyacente a $v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k-1}$. Como v_k es adyacente a k vértices ($\delta(v_k) = k$) y en G , v_k es adyacente a v_{k+1} (en el camino hamiltoniano); existe un i con $1 \leq i < k$ tal que v_i no es adyacente a v_k . Así, v_i es adyacente a v_j para algún j con $k < j \leq 2k - 1$, ya que v_i tiene grado k en G . Por lo tanto, tenemos el ciclo hamiltoniano $v_i v_{i-1} \dots v_1 v_0 v_{i+1} v_{i+2} \dots v_{j-1} v_{2k} v_{2k-1} \dots v_j v_i$, pues $i + 1 \leq k$ y v_0 es adyacente a v_1, \dots, v_k .

En caso contrario, sea $1 \leq i \leq 2k - 1$ tal que v_{i+1} es adyacente a v_0 pero v_i no lo es. Por lo anterior, v_{i-1} es adyacente a v_{2k} , por lo que G contiene el ciclo dado por $v_{i-1} \dots v_0 v_{i+1} \dots v_{2k}$ que tiene longitud $2k$ y no contiene a v_i .

Sea $C = u_1 \dots u_{2k}$ cualquier ciclo de longitud $2k$ en G y sea $u_0 = v_i$ el vértice restante en G . Como C es maximal en G , pues G no es hamiltoniano, u_0 no puede ser adyacente a dos vértices consecutivos de C , pues si lo fuera tendríamos un ciclo con más vértices, lo cual va en contra de que C sea maximal o que G no sea hamiltoniano. Luego u_0 es adyacente a todos los vértices que ocupan las posiciones impares $u_1, u_3, \dots, u_{2k-1}$ o a los que ocupan las posiciones pares. Supongamos que u_0 es adyacente a $u_1, u_3, \dots, u_{2k-1}$. Sustituyendo en C u_{2i} por u_0 , obtenemos otro ciclo máximo, por lo que u_{2i} también debe ser adyacente a $u_1, u_3, \dots, u_{2k-1}$. En este

caso u_1 es adyacente a u_0, u_2, \dots, u_{2k} , lo cual implica que $d(u_1) \geq k + 1$ y esto es una contradicción con el hecho de que G es k -regular. \square

Los Teoremas 3.1 y 3.7 establecen condiciones suficientes para la hamiltonicidad que involucran el número total de vértices del grafo. Además, estas condiciones implican que la distancia máxima entre los pares de vértices de los grafos considerados sea de 2. A diferencia de estos, el Teorema 3.16, que se debe a Asratian y Khachatryan [2], generaliza los teoremas anteriores y permite grafos con distancia máxima entre pares de vértices arbitraria.

Antes enunciaremos un lema que nos ayudará a demostrar el teorema.

Lema 3.15. *Sea G un grafo L_1 , v un vértice de G y $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ un subconjunto de $N(v)$ de cardinal k . Supongamos que G contiene un conjunto independiente $U = \{u_1, \dots, u_k\}$ de cardinal k tal que $U \cap (N(v) \cup \{v\}) = \emptyset$ y, para $i = 1, \dots, k$, $u_i w_i \in A(G)$ y $N(u_i) \cap (N(v) \setminus W) = \emptyset$. Entonces*

$$N(w_i) \setminus (N(v) \cup \{v\}) \subseteq N(u_i) \cup U \text{ con } i = 1, \dots, k.$$

Teorema 3.16. *Si G es un grafo L_0 conexo de orden al menos 3, entonces es hamiltoniano.*

Demostración. Sea G un grafo L_0 conexo con $|V(G)| \geq 3$. Suponiendo que G no es hamiltoniano, definimos C un ciclo maximal de G con una orientación dada y $v \in V(G) \setminus V(C)$ con $N(v) \cap V(C) \neq \emptyset$. Fijemos $W = N(v) \cap V(C)$ y $k = |W|$. Sean w_1, \dots, w_k los vértices de W que aparecen en C . Sean u_i los sucesores de w_i en C con $i = 1, \dots, k$ y $U = \{u_1, \dots, u_k\}$. Por la elección de C , se cumplen las condiciones del Lema 3.15. Es decir,

$$N(u_i) \cap N(v) = N(u_i) \cap W \text{ con } i = 1, \dots, k$$

y como U es un conjunto independiente,

$$N(w_i) \setminus (N(u_i) \cup N(v)) \supseteq (N(w_i) \cap U) \cup \{v\} \text{ con } i = 1, \dots, k.$$

Como G es un grafo L_0 se tiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^k (|N(u_i) \cap N(v)| - |N(w_i) \setminus (N(u_i) \cup N(v))|) = \\ &= \sum_{i=1}^k |N(u_i) \cap N(v)| - \sum_{i=1}^k |N(w_i) \setminus (N(u_i) \cup N(v))| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k |N(u_i) \cap W| - \sum_{i=1}^k (|N(w_i) \cap U| + 1) = -k < 0 \end{aligned}$$

una contradicción inmediata. \square

Capítulo 4

Otros teoremas

En este capítulo, como habíamos comentado en la introducción, recopilaremos una serie de resultados sobre condiciones suficientes para que los grafos sean hamiltonianos, los cuales no demostraremos puesto que la extensión de la memoria no lo permite. Estos teoremas que enunciaremos será por que nos han parecido interesantes o son muy similares a alguno de los ya demostrados en los capítulos anteriores añadiendo alguna condición.

Comenzaremos con el siguiente teorema que es muy similar al Teorema 3.1, aunque para tres nodos no adyacentes.

Teorema 4.1. [19] *Sea G un grafo 2-conexo de orden n tal que para cualquier conjunto independiente de vértices u, v, w se tiene*

$$d(u) + d(v) + d(x) \geq n + |N(u) \cap N(v) \cap N(x)|,$$

entonces G es hamiltoniano.

Otro resultado relacionado con el anterior es el siguiente Teorema de Fan [18], que se basa en el Teorema 3.7 añadiendo la condición de distancia.

Teorema 4.2. *Sea G un grafo 2-conexo de orden n . Si para todo par de vértices u y v con $\text{dist}(u, v) = 2$ se tiene que*

$$\max\{d(u), d(v)\} \geq \frac{n}{2}$$

entonces G es hamiltoniano.

El siguiente resultado [1] es una versión más fuerte del Teorema 4.1.

Teorema 4.3. *Sea G un grafo 2-conexo de orden n . Si para todo par de vértices u, v con $\text{dist}(u, v) = 2$ y $\max\{d(u), d(v)\} < \frac{n}{2}$ tenemos que $d(u) + d(v) + d(x) \geq n + |N(u) \cap N(v) \cap N(x)|$ para todo*

$$x \in \begin{cases} T_{uv} & \text{si } |N(u) \cap N(v)| = 1 \\ K_{uv} & \text{si } |N(u) \cap N(v)| \geq 2 \end{cases}$$

donde

$$T_{uv} = \{x \in V(G) \setminus \{u, v\} : u, v \notin N(x)\}$$

y

$$K_{uv} = \{x \in V(G) : u, v, x \text{ son extremos de un grafo } K_{1,3} \text{ inducido}\}$$

entonces G es hamiltoniano.

Además, es una generalización de los Teoremas 4.1 y 4.2.

El Teorema de Bondy [8] que se enuncia a continuación es una de las formas en las que se ha extendido el Teorema 3.9.

Teorema 4.4. *Si G es un grafo 2-conexo de orden n tal que*

$$d(u) + d(v) + d(x) \geq \frac{3n}{2}$$

para todo conjunto de tres vértices independientes de G , entonces G es hamiltoniano.

Podemos considerar el Teorema 3.7 como una condición de vecindad en un nodo. Al requerir que la conectividad fuera 2, Fraudee, Gould, Jacobsen y Schelp [21] consideraron la unión de vecindad de 2 nodos.

Teorema 4.5. *Si G es un grafo 2-conexo tal que para todo par de vértices no adyacentes u y v se tiene que*

$$|N(u) \cup N(v)| \geq \frac{2n-1}{3}$$

entonces G es hamiltoniano.

Fraisse [20] amplió aún más el conjunto de nodos no adyacentes al exigir una mayor conectividad.

Teorema 4.6. *Sea G un grafo k -conexo de orden $n \geq 3$. Supongamos que existe algún t con $t \leq k$, tal que para todo conjunto independiente $S \subset V(G)$ de cardinal t tenemos $N(S) > \frac{t(n-1)}{t+1}$ entonces G es hamiltoniano.*

Es fácil probar que el siguiente teorema es más fuerte que el Teorema 3.7 y el Teorema 4.5.

Teorema 4.7. [12] *Sea G un grafo 2-conexo de orden $n \geq 3$. Si para cada par de vértices distintos no adyacentes x e y ,*

$$2|N(x) \cup N(y)| + d(x) + d(y) \geq 2n - 1$$

entonces G es hamiltoniano.

El siguiente resultado es una condición más de hamiltonicidad que solo tiene en cuenta los grados de los vértices, como ocurría en los Teoremas 3.6 y 3.8.

Teorema 4.8. [7] *Un grafo G de orden $n \geq 3$ con la sucesión de grados $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ es hamiltoniano si $j < k$, $d_j \leq j$, $d_k \leq k - 1$ y $d_j + d_k < n$.*

Con el Teorema 3.7 directamente se tiene que si $n \leq 2k$, todo grafo k -regular de orden $n \geq 3$ es hamiltoniano. Varios autores han obtenido cotas superiores sucesivamente más grandes en un grafo G k -regular, 2-conexo para el cual G es necesariamente hamiltoniano.

Teorema 4.9.

a) [16] *Sea G un grafo 2-conexo, k -regular de $2k + 4$ nodos, donde $k \geq 4$. Entonces, G es hamiltoniano.*

b) [15] *Sea G un grafo 2-conexo, $(m - k)$ -regular de orden $2m - t$. Si*

$$m \geq \begin{cases} k^2 + k + 1 & \text{si } t = 0 \\ sk^2 - 3k + 3 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

entonces G es hamiltoniano. De hecho, su resultado muestra que todo grafo 2-conexo, k -regular de orden n es hamiltoniano si $n \leq 2k + ck^{\frac{1}{2}}$, donde c es una constante positiva.

c) [5] *Si $n \leq \frac{9k}{4}$, entonces todo grafo 2-conexo, k -regular de orden n es hamiltoniano.*

d) [30] *Todo grafo 2-conexo, k -regular con $3k$ vértices como mucho, es hamiltoniano.*

e) [34] *Todo grafo 2-conexo, k -regular de orden $n \geq 3k + 1$ es hamiltoniano excepto el grafo de Petersen y el grafo obtenido al extender un vértice a un triángulo.*

f) [35] *Todo grafo 2-conexo, k -regular ($k \geq 3$) de orden $n \geq 3k + 3$ es hamiltoniano excepto el grafo de Petersen.*

Las uniones de vecindades están estrechamente relacionadas con las condiciones de suma de grados. Esto a menudo conduce a condiciones menos estrictas ya que la suma de grados cuenta ciertos nodos dos veces, a diferencia de las condiciones de vecindad. Para $k \geq 2$ definimos

$$\sigma_k(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k d(x_i) : x_1, x_2, \dots, x_k \text{ son vértices independientes de } G \right\}.$$

El teorema siguiente generaliza el Teorema 3.13.

Teorema 4.10. [3] *Si G es un grafo 2-conexo de orden n y conectividad k tal que $\sigma_3(G) \geq n + k$, entonces G es hamiltoniano.*

Bondy [8] optó por aumentar aún más el número de vértices involucrados en el conjunto independiente.

Teorema 4.11. *Sea G un grafo k -conexo de orden $n \geq 3$. Si*

$$\sigma_{k+1}(G) > \frac{(k+1)(n-1)}{2},$$

entonces G es hamiltoniano.

Polický [38] llamó $\omega(u, v)$ al número de componentes de $G(N(u))$ que no contienen ningún vecino de v . Y, a continuación probó el siguiente teorema.

Teorema 4.12. *Dado G un grafo de orden n . Si para cada par de vértices no adyacentes u y v se tiene $d(u) + d(v) + \max\{\omega(u, v), \omega(v, u)\} \geq n$, entonces G es hamiltoniano.*

Antes de enunciar el siguiente teorema denotamos $\delta_k(G) = \min |\cup_{u \in S} N(u)|$ donde el mínimo se toma sobre todos los subconjuntos S de k elementos de $V(G)$.

Teorema 4.13. *Sean $r \geq 1$ y $m \geq 3$ números enteros. Entonces, para cada función no negativa $f(r, m)$ existe una constante $C = C(r, m, f)$ tal que si G es un grafo de orden n ($n > r$, $n > m$) con $\delta_r \geq \frac{n}{3} + C$ y a lo sumo $f(r, m)$ vértices, entonces G es hamiltoniano si $\delta_1 \geq r + 1$ y G es 2-conexo.*

Bibliografía

- [1] Ainouche, A. A Short Proof of a Theorem on Hamiltonian Graphs. *Journal of Graph Theory*. 83-87. 1996.
- [2] Hasratian, A. y Khachatryan, N. Some localization theorems on hamiltonian circuits. *Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 49, Issue 2, Pages 287-294*. 1990.
- [3] Bauer, D., Broersma, H. J., Veldman, H. J. y Rao, L. A generalization of a result of Häggkvist and Nicoghossian. *J. Combin. Theory B*. 1989.
- [4] Beineke, L. W., Wilson, R. J. *Selected Topics in Graph Theory*. Academic Press. 1978.
- [5] Bollobás, B. y Hobbs, A. M. *Hamiltonian cycles in regular graphs*. *Advances in Graph Theory*. North Holland, Amsterdam. 1978.
- [6] Bondy, J. A., y Murty, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. Macmillan Education UK. 1976.
- [7] Bondy, J. A. Properties of graphs with constraints on degrees. *Studia Sci. Math. Hungar.* 4. 473-475. 1969.
- [8] Bondy, J. A. Longest paths and cycles in graphs of high degree. Research Report CORR 80-16, Dept. of Combinatorics and Optimization, Faculty of Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada. 1980.
- [9] Borges, J., Clarisó, R., Masià, R., Pujol, J., Rifà, J., Vancells, J. y Villanueva, M. *Apuntes de Matemática Discreta*. Universitat Oberta de Catalunya. Segunda edición, 2007.
- [10] Chartrand, G. *Graphs and digraphs*. CRC Press. 2016.
- [11] Chartrand, G. y Zhang, P. *A first course in Graph Theory*. Dover Publications. 2013.
- [12] Chen, G. One Sufficient Condition for Hamiltonian Graphs. *Journal of Graph Theory*, Vol. 14, No. 4, 501-508. 1990.

- [13] De Leon, M. A study of sufficient conditions for hamiltonian cycles. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal: Vol. 1 : Iss. 1 , Article 6. 2000.
- [14] Diestel, R. Graph theory. Springer. 1997.
- [15] Erdos, P. y Hobbs, A. M. Hamiltonian cycles in regular graphs. Advances in Graph Theory. North Holland, Amsterdam. 1978.
- [16] Erdos, P. y Hobbs, A. M. A class of Hamiltonian regular graphs. J. Combinat. Theory 2. 129-135. 1978.
- [17] Euler, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Volume 8, 128–140. 1736.
- [18] Fan, G. H. New Sufficient Conditions for cycles in graphs. J. Combinat. Theory. B37. 221-227. 1984
- [19] Flandrin, E., Jung, H. A. y Li, H. Hamiltonism, degrees sums and neighborhood intersections. Discrete Math. 90. 41-52. 1991.
- [20] Fraisse, P. A New Sufficient Condition for Hamiltonian graphs. J. of Graph Theory. Vol. 10, No. 3. 405-409. 1986.
- [21] Fraudree, R. J., Gould, R. J., Jacobson, M.S. y Schelp, R. H. Neighborhood Unions and Hamiltonian Properties in Graphs. J. Combin. Theory, 47. 1-9. 1989.
- [22] González-Moreno, D. Introducción a la teoría de las gráficas. Universidad Autónoma Metropolitana. 2017.
- [23] Gould, R. J. Updating the Hamiltonian Problem - A Survey. Journal of Graph Theory, Vol. 15, No. 2, 121-157. 1991.
- [24] Gould, R. J. Advances on the Hamiltonian Problem – A Survey. Graphs and Combinatorics 19, 7–52. 2003.
- [25] Gould, R.J. Recent Advances on the Hamiltonian Problem: Survey III. Graphs and Combinatorics 30, 1–46. 2014.
- [26] Grimaldi, R. Discrete and combinatorial mathematics : an applied introduction. Boston: Pearson Addison Wesley, 2004.
- [27] Haggkvist, R. and Nicoghossian, G. G. A Remark on Hamiltonian cycles. J. Combinat. Theory B30, 118-120. 1981.
- [28] Harris, J. M., Hirst, J. L. y Mossinghoff, M. J. Combinatorics and Graph Theory, 2008.
- [29] Hierholzer, C., Wiener, C. Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. Math. Ann. 6, 30–32. 1873.

- [30] JACKSON, B. Hamilton cycles in regular 2-connected graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B* 29. 27-46. 1980.
- [31] Jansen, B. M. P., Kozma, L., y Nederlof, J. Hamiltonicity below Dirac's condition, *Lecture Notes in Computer Science*, Volume 11789, 27-39. 2019.
- [32] Jordán, C., Sanabria-Codesal, E. Grafos hamiltonianos en el diseño de viajes. *Modelling in Science Education and Learning*. Volumen 6(2), Número 11. 2013.
- [33] Li, H. Generalizations of Dirac's theorem in Hamiltonian graph theory - A survey. *Discrete Mathematics*. Volume 313, Issue 19, 2034-2053. 2013.
- [34] Liu, Z. Yu, Z. y Zhu, Y. An improvement of Jackson's result on Hamilton cycles in 2-connected regular graphs. B. R. Alspach, C. D. Godsil (Eds.), *Cycles in Graphs*. *Ann. Disc. Math.* Vol. 27. 237-247. 1985.
- [35] Liu, Z. Yu, Z. y Zhu, Y. 2-connected k -regular graphs on at most $3k + 3$ vertices to be Hamiltonian. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences* 6. 36-49 y 136-145. 1986.
- [36] Nash-Williams, C. Edge-disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency, in "Studies in Pure Mathematics" (L. Mirsky, Ed.), 157-183. Academic Press, London. 1971.
- [37] Newman, D. J. A problem in Graph Theory. *The American Mathematical Monthly*, Volume 65, 611. 1958.
- [38] Polický, I. A sufficient condition for hamiltonian graphs. *Math. Slovaca* 45. 115-119. 1995.
- [39] Sadornil, D. Apuntes de la asignatura "Matemática Discreta". Teoría de grafos. Universidad de Cantabria. 2017.
- [40] Saidur, Md. Basic graph theory. Springer. 2017.
- [41] Wallis, W.D. A Beginner's Guide to Graph Theory. Birkhäuser Boston. 2007.