Facultad
de
Ciencias

ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

(STABILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Julen Armendariz Platón

Directora: Delfina Gómez Gandarillas

Junio-2022

Resumen/Abstract

Resumen:

Es conocido que la estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes depende del signo de la parte real de los valores propios de la matriz de coeficientes. Sin embargo, cuando la matriz de coeficientes es no constante este resultado es falso. El objetivo del trabajo es dar contraejemplos y estudiar ciertos resultados que permitan caracterizar la estabilidad en algunos casos particulares como por ejemplo cuando los coeficientes son funciones periódicas o se trata de sistemas perturbados.

Palabras clave: estabilidad, sistemas periódicos, teoría de Floquet, sistemas perturbados.

Abstract:

It is well known that stability of linear differential systems with constant coefficients is determined by the sign of the eigenvalues of the coefficient matrix. Nevertheless, when the coefficient matrix is not constant that statement is false. The objective of this work is to give some counterexamples and to study other results that characterize the stability in some particular cases, for example, when the coefficients are periodic functions or when dealing with perturbed systems.

Keywords: stability, periodic systems, Floquet theory, perturbed systems.

Índice general

Introducción

Las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos han jugado y juegan un papel importante en la historia de las matemáticas puras y aplicadas. Los primeros pasos en el estudio de este tipo de ecuaciones se atribuyen a Isaac Newton y Gottfried Leibniz a finales del siglo XVII. En esta primera etapa, las ecuaciones diferenciales fueron usadas para describir fenómenos físicos de diferentes calibres, desde el movimiento ondulatorio de una cuerda en suspensión, hasta las leyes de posición planetaria. Al ser un ente matemático con gran utilidad práctica, su estudio fue aumentando con el paso del tiempo para convertirse en una nueva rama de las matemáticas.

En multitud de casos, las ecuaciones diferenciales son difíciles o incluso imposibles de resolver. Es por eso que a finales del siglo XIX, Henri Poincaré impulsa el desarrollo de lo que hoy en día tiene el nombre de "Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales", cuyo fundamento está en dar una alternativa a la resolución analítica de las ecuaciones y conocer el comportamiento de las soluciones de éstas sin calcularlas explícitamente. Actualmente, las ecuaciones diferenciales siguen siendo objeto de estudio en gran parte de las ciencias, como en la física, la biología, la economía, la ingeniería, etc.

Los resultados principales de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) comprenden la existencia y unicidad de soluciones y la teoría de la estabilidad y equilibrio. Lo primero surge debido a la dificultad en la resolución de algunas ecuaciones, con el fin de saber si efectivamente es dificultad o es que no existen soluciones para dichas ecuaciones. La estabilidad proporciona información sobre el comportamiento de soluciones que están próximas en un momento dado a medida que la variable independiente crece. Es una de las propiedades más importantes a estudiar en ecuaciones diferenciales ya que permite hacer predicciones de gran importancia en modelos matemáticos que las utilizan, aun cuando el modelo o los datos presenten perturbaciones, y será el tema principal de este trabajo.

El objetivo principal será extender los resultados conocidos que caracterizan la estabilidad de sistemas lineales de coeficientes constantes a sistemas con coeficientes periódicos. En base a una gran variedad de ejemplos, se sabe que dichos resultados no son válidos para sistemas con coeficientes no constantes pero, introduciendo los conceptos de matriz de monodromía, multiplicadores característicos y exponentes característicos y con las ideas de la Teoría de Floquet, se consiguen esas extensiones de resultados para coeficientes constantes que permiten determinar la estabilidad de sistemas lineales periódicos.

Para empezar, en un primer capítulo de preliminares, se introduce el concepto de estabilidad y se enuncian resultados conocidos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Se recuerda la relación entre la convergencia al origen y la acotación de soluciones de un sistema lineal homogéneo con su estabilidad. Es conocido que los signos de los valores propios de la matriz de coeficientes de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes determinan su estabilidad, pero mediante un ejemplo sencillo se deduce que esto es falso, en general, en sistemas lineales con coeficientes no constantes.

En el segundo capítulo, se profundiza en los contraejemplos que muestran que los signos de los valores propios de la matriz de coeficientes no determinan la estabilidad de sistemas lineales con coeficientes continuos, aunque éstos sean constantes, dando varios ejemplos clásicos y dando un método que permite construir contraejemplos de tales condiciones, por medio de matrices de rotación. Se concluye que mediante un cambio de variable, se puede reducir un sistema periódico construido con matrices de rotación a un sistema de coeficientes constantes, del cual se conoce el comportamiento de sus soluciones. De hecho, deshaciendo el cambio de variable, se puede relacionar el comportamiento de las soluciones de ambos sistemas, lo cual es la base de la Teoría de Floquet.

En tercer lugar, se verá un capítulo sobre sistemas lineales con coeficientes periódicos en el que se introducen los conceptos de matriz de monodromía y sus valores propios, esto es, los multiplicadores característicos. Los multiplicadores característicos pueden ser utilizados para determinar la existencia de soluciones periódicas de un sistema periódico, por lo que parece que se relacionan con la estabilidad. Se enuncia y demuestra el Teorema de Floquet, el cual garantiza que cualquier matriz fundamental de un sistema lineal homogéneo ω-periódico $x'(t) = A(t)x(t)$ se puede descomponer como producto de una matriz ω-periódica $P(t)$, y la exponencial matricial e^{Rt} con R matriz constante. El Teorema de Lyapunov se basa en la idea mencionada en el párrafo anterior, es decir, un cambio de variable que transforma un sistema lineal homogéneo de coeficientes periódicos en un sistema de coeficientes constantes. Tras unos resultados acerca de las soluciones de sistemas lineales periódicos no homogéneos se enuncia el resultado que se buscaba, en particular, se caracteriza la estabilidad de un sistema lineal periódico por los exponentes característicos, que son los valores propios de una de la matriz R que forma la descomposición de Floquet de una matriz fundamental y que a su vez coincide con la matriz de coeficientes del sistema de coeficientes constantes al que se ha llegado con el cambio de variable.

Finalmente, se aplican los resultados sobre sistemas periódicos para caracterizar la estabilidad de sistemas lineales periódicos perturbados, es decir, sistemas cuya matriz de coeficientes periódicos tiene una “pequeña”perturbación. Dependiendo de las condiciones que se le exigen a la perturbación para darle sentido a la palabra “pequeña”, se podrá garantizar, o no, que el sistema perturbado herede la estabilidad del sistema no perturbado, facilitando así en algunos casos el estudio de la estabilidad de esta clase de sistemas.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo, se recordarán conceptos y resultados ya conocidos y que se utilizarán a lo largo de la memoria. Se seguirán principalmente [4] y [2], aunque otras referencias como [7], [11] o [15] han sido también de gran ayuda.

1.1. El concepto de estabilidad.

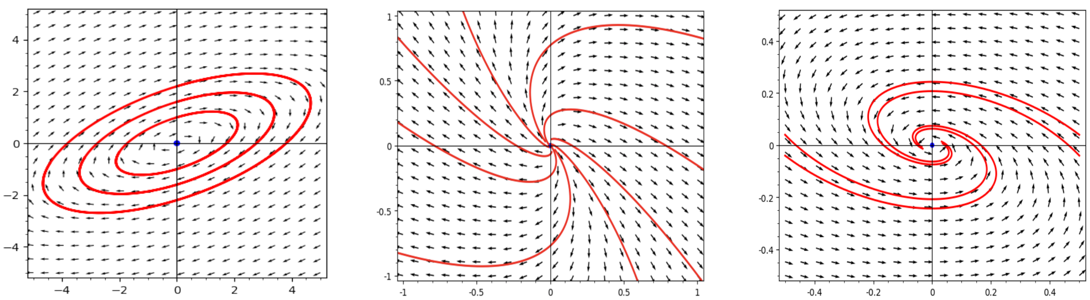
La estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales es una de las cualidades más importantes en el estudio del comportamiento de éstas. Informalmente, la estabilidad da información sobre cómo de parecido se comportan soluciones que en un momento dado están cerca, a medida que el tiempo avanza. A continuación se introducen las definiciones precisas.

Definición 1.1.1 *Sea $\varphi(t) : [r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ solución de $x'(t) = f(x(t), t)$, se dice que φ es solución estable en $[r, +\infty)$ si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $t_0 \in [r, +\infty)$, existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ tal que para toda solución ψ de $x'(t) = f(x(t), t)$ verificando $\|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta$, se tiene que ψ está definida para todo $t > t_0$ y $\|\varphi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$.*
En caso contrario, se dice solución inestable.

Definición 1.1.2 *Se dice que φ es solución asintóticamente estable en $[r, +\infty)$ si es estable y para todo $t_0 \in [r, +\infty)$ existe $\delta(t_0) > 0$ tal que para toda solución ψ de $x'(t) = f(x(t), t)$ verificando $\|\varphi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta$ se tiene que $\|\varphi(t) - \psi(t)\| \to 0$ cuando $t \to +\infty$.*

Definición 1.1.3 *Un sistema $x'(t) = f(x(t), t)$ se dice sistema estable (asintóticamente estable) en $[r, +\infty)$ si toda solución es estable (asintóticamente estable) en $[r, +\infty)$. En caso contrario, se dice sistema inestable.*

Observando los mapas de fases que aparecen en la Figura 1.1, parece razonable que exista una relación entre la estabilidad de soluciones y la acotación y, efectivamente, la hay. Pero hay que tener cuidado al caracterizar la estabilidad mediante la acotación de todas las soluciones, pues únicamente se puede hacer con sistemas lineales homogéneos (se verá más adelante, Teorema 1.2.5). No es difícil encontrar ejemplos en los que una solución estable no sea acotada y viceversa.



(a) Sistema estable. (b) Sistema inestable. (c) Sistema asint. estable.

Figura 1.1: Mapas de fases de los tres tipos de sistemas definidos previamente.

Ejemplo 1.1.4 Sea la ecuación $x'(t) = 1$, cuya solución general es $x(t) = t + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que la solución $x_0(t) = t$ es no acotada pero sin embargo es estable, al mantenerse constante la distancia entre dos soluciones cualesquiera.

Ejemplo 1.1.5 Sea la ecuación $x'(t) - 2x(t) = 0$. Su solución general es, trivialmente, $x(t) = e^{2t}C$ con $C \in \mathbb{R}$. La solución nula $x_0(t) = 0$ obviamente es acotada. Considérese ahora la solución $x_1(t) = e^{2t}$, se tiene que $\|x_0(t) - x_1(t)\| \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Luego la solución nula $x_0(t)$ es acotada pero no es estable.

1.2. Resultados previos para sistemas lineales.

En esta memoria, se estudiarán de manera general sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{1.1}$$

donde $x(t) = (x_i(t))_{i=1,\dots,n}$ es una función vectorial incógnita, $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ representa la matriz de coeficientes con $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo no trivial y donde el término independiente es un vector columna $b(t) = (b_i(t))_{i=1,\dots,n}$ con $b_i : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se dirá que es un sistema lineal homogéneo cuando $b(t) = 0$ para todo $t \in I$ y se dirá que es un sistema lineal de coeficientes constantes cuando todas las funciones $a_{ij}(t)$ son constantes.

Es conocido ([3]) que en las condiciones anteriores, se puede garantizar que las soluciones de (1.1) existen y están definidas en I. No se dará la demostración del siguiente Teorema, pero se puede ver en [2].

Teorema 1.2.1 *(Existencia y Unicidad)*
Sea $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ un sistema de ecuaciones diferenciales. Si $A(t)$ y $b(t)$ son continuas en

un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces el sistema $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ tiene una única solución $x(t)$ que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$ y está definida para todo $t \in I$.

En el siguiente Lema se recuerda el método de Variación de Parámetros, que permite obtener la solución general de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Es cierto que para aplicar dicha fórmula, será necesario conocer una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado y ya que el método requiere integración, se darán ocasiones en las que la solución se tendrá que dejar en función de alguna integral.

Lema 1.2.2 *(Fórmula de Variación de Parámetros)*
Sea el sistema $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ donde $A(t)$y $b(t)$ son continuas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y sean $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. La única solución del sistema satisfaciendo $x(t_0) = x_0$ viene dada por

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t)\phi^{-1}(s)b(s)ds \quad \forall t \in I \tag{1.2}$$

donde $\phi(t)$ es una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$.

A continuación, se darán algunos resultados que permiten determinar la estabilidad de sistemas y ecuaciones diferenciales lineales, dependiendo de su estructura.

Teorema 1.2.3 *Sea $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ con $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$, $b(t) = (b_j(t))_{j=1,\dots,n}$ y $a_{ij}, b_j : [r, +\infty) \to \mathbb{R}$ continuas.*

- *i)* *$x'(t) = A(t)x(t)+b(t)$ sistema estable en $[r, +\infty)$ si y solo si $x'(t) = A(t)x(t)$ sistema estable en $[r, +\infty)$.*
- *i)* *$x'(t) = A(t)x(t)+b(t)$ sistema asintóticamente estable en $[r, +\infty)$ si y solo si $x'(t) = A(t)x(t)$ sistema asintóticamente estable en $[r, +\infty)$.*

La idea que sigue la demostración de este teorema, es que dada $\varphi_1(t)$ solución de $x'(t) = A(t)x(t)+ b(t)$, con el cambio $y(t) = x(t)-\varphi_1(t)$ para $x(t)$ otra solución cualquiera de $x'(t) = A(t)x(t)+b(t)$, se tiene que $y(t)$ es solucion del sistema homogéneo asociado $x'(t) = A(t)x(t)$. Así, la estabilidad de $\varphi_1(t)$ queda determinada directamente por la estabilidad del sistema homogéneo.

Como el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo es un espacio vectorial, se puede probar que todas las soluciones de éste tienen el mismo comportamiento. Es por eso que bastará con comprobar la estabilidad de la solución nula.

Lema 1.2.4 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ donde $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ y $a_{ij} : [r, +\infty) \to \mathbb{R}$ continuas. El sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ es (asintóticamente) estable si y solo si la solución nula es (asintóticamente) estable.*

Se recordarán resultados que caractericen la estabilidad de sistemas homogéneos. Estos resultados están directamente ligados con el comportamiento asintótico de las soluciones, es decir, su comportamiento cuando $t \to +\infty$.

Teorema 1.2.5 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ con $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ y $a_{ij} : [r, +\infty) \to \mathbb{R}$ continuas.*

i) *$x'(t) = A(t)x(t)$ sistema estable en $[r, +\infty)$ si y solo si todas sus soluciones están acotadas en $[r, +\infty)$.*

ii) *$x'(t) = A(t)x(t)$ sistema asintóticamente estable en $[r, +\infty)$ si y solo si todas sus soluciones convergen al origen cuando $t \to +\infty$.*

1.3. Sistemas lineales con coeficientes constantes.

A continuación se estudia el caso particular de sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes. Los siguientes resultados relacionan los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema con el comportamiento asintótico de sus soluciones y por tanto, con su estabilidad.

Lema 1.3.1 *Sea $x'(t) = Ax(t)$ con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ fija. Sea λ un valor propio de A tal que $m_a(\lambda) = m$, donde $m_a(\lambda)$ denota la multiplicidad algebráica de λ.*

i) *Si $Re(\lambda) > 0$, entonces existen m soluciones linealmente independientes (l.i.) no acotadas en $[0, +\infty)$ asociadas a λ.*

ii) *Si $Re(\lambda) < 0$, entonces existen m soluciones l.i. que convergen al origen cuando $t \to +\infty$ asociadas a λ.*

iii) *Si $\lambda = 0$ y existen ℓ vectores propios l.i. asociados a λ (i.e. $m_g(\lambda) = \ell$), entonces existen ℓ soluciones l.i. constantes (y por tanto acotadas) y $m - \ell$ soluciones l.i. no acotadas en $[0, +\infty)$ asociadas a λ.*

iv) *Si $\lambda = i\beta$ con $\beta > 0$ y existen ℓ vectores propios l.i. asociados a λ (i.e. $m_g(\lambda) = \ell$) entonces existen 2ℓ soluciones l.i. periódicas de periodo $2\pi/\beta$ (y por tanto acotadas) y $2(m - \ell)$ soluciones l.i. no acotadas en $[0, +\infty)$ asociadas a λ y $\overline{\lambda}$.*

Teorema 1.3.2 *Sea $x'(t) = Ax(t)$ con $A \in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ fija.*

i) *$x'(t) = Ax(t)$ sistema estable en $[0, +\infty)$ si y solo si todos los valores propios de A tienen parte real negativa o nula y el número de vectores propios l.i. asociados a los valores propios con parte real nula coincide con su multiplicidad.*

ii) *$x'(t) = Ax(t)$ sistema asintóticamente estable en $[0, +\infty)$ si y solo si todos los valores propios de A tienen parte real negativa.*

En el siguiente ejemplo, se verá cómo cambia la estabilidad de una ecuación diferencial dependiendo de un parámetro.

Ejemplo 1.3.3 Sea la ecuación diferencial

$$y''(t) + ky'(t) + y(t) = e^t \quad k \in \mathbb{R}.$$

Se tratará de determinar su estabilidad. Mediante el cambio $x_1(t) = y(t)$ y $x_2(t) = y'(t)$, se obtiene su sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}}_{b(t)}. \tag{1.3}$$

Por el Teorema 1.2.3, para determinar la estabilidad de (1.3), bastará con determinar la estabilidad del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Es un sistema lineal de coeficientes constantes, así que por el Teorema 1.3.2 la estabilidad queda determinada por los valores propios de la matriz de coeficientes A. Calculando el polinomio característico de A, dichos valores propios son las soluciones de

$$\lambda^2 + \lambda k + 1 = 0 \tag{1.4}$$

es decir,

$$\lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Se distinguen los siguientes casos

i) Si $k > 2$, en este caso, $k > \sqrt{k^2 - 4}$, por lo que ambos valores propios son reales negativos y distintos. Luego el sistema, y por tanto la ecuación, son asintóticamente estables.

ii) Si $k = 2$, en este caso, los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, así que el sistema, y por tanto la ecuación, son asintóticamente estables.

iii) Si $0 < k < 2$, el radicando es negativo, luego los valores propios son complejos conjugados con parte real negativa. Así que el sistema, y por tanto la ecuación, son asintóticamente estables.

iv) Si $k = 0$, en este caso los valores propios son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. Obviamente existe un vector propio asociado a λ_1, por lo que existen dos soluciones l.i. 2π-periódicas y se concluye que el sistema, y por tanto la ecuación son estables pero no asintóticamente estables.

v) Si $-2 < k < 0$, el radicando vuelve a ser negativo, en este caso los valores propios son complejos conjugados con parte real positiva. Esto implica que el sistema y la ecuación son inestables.

vi) Si $k = -2$, en este caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, lo que implica directamente que el sistema, y por tanto la ecuación, son inestables.

vii) Si $k < -2$, en este último caso, los valores propios son reales positivos y distintos, por lo que el sistema y la ecuación son inestables.

Se puede observar cómo se da la estabilidad asintótica solo para valores positivos de k. Se señala que dicho resultado se puede obtener directamente de (1.4) debido a que todas las raíces de un polinomio de grado 2 tienen parte real negativa si y solo si todos sus coeficientes tienen el mismo signo. En ese caso, se dice que el polinomio es estable.

Para terminar con este capítulo de conceptos y resultados previos, se propone la siguiente pregunta, ¿determinan los valores propios de una matriz de un sistema lineal homogéneo con coeficientes continuos $x'(t) = A(t)x(t)$ su estabilidad? Es cierto que en muchas ocasiones dichos valores propios dependerán de t pero, ¿qué pasa si resulta que los valores propios son constantes y con parte real negativa, por ejemplo?, ¿se dará la estabilidad?

Lo cierto es que no, los valores propios de $A(t)$ no determinan en general la estabilidad del sistema $x'(t) = A(t)x(t)$, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.4 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A y $B(t)$ tienen el mismo valor propio doble con parte real negativa $\lambda = -1$. Por el Teorema 1.3.2 el sistema $x'(t) = Ax(t)$ es asintóticamente estable. En cambio, se puede comprobar que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t/2 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

es una solución de $x'(t) = B(t)x(t)$ cuya primera componente crece exponencialmente cuando $t \to +\infty$, luego $x'(t) = B(t)x(t)$ es inestable. Se concluye que la estabilidad de los sistemas lineales con coeficientes continuos no queda determinada por los signos de los valores propios de la matriz de coeficientes.

El Ejemplo 1.3.4 no es el único que confirma que la teoría de estabilidad para sistemas lineales de coeficientes constantes no puede aplicarse a sistemas con coeficientes continuos. En el siguiente capítulo se profundizará en dichos ejemplos.

Capítulo 2

Algunos ejemplos no autónomos.

Existe una gran variedad de ejemplos de sistemas lineales de coeficientes continuos con valores propios constantes tales que el comportamiento asintótico de sus soluciones no depende del signo de dichos valores propios. Este tipo de ejemplos son la motivación para el estudio de la estabilidad en sistemas lineales de coeficientes continuos, donde se quiere encontrar otro tipo de caracterización, por lo que es importante conocerlos más de cerca.

En este capítulo, se dará una forma de construir sistemas lineales de coeficientes continuos cuya matriz de coeficientes tenga valores propios constantes con parte real negativa, y resulte que el sistema sea inestable. Para ello se utilizarán matrices de rotación. Con el fin de facilitar la comprensión de las ideas, se estudiarán únicamente sistemas planos, es decir, sistemas de dimensión dos, aunque los resultados se pueden generalizar a sistemas de dimensiones mayores.

En primer lugar se verán algunos ejemplos clásicos como los que se busca construir en este capítulo.

Ejemplo 2.0.1 (Vinograd) [14]
Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ con

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 - 9\cos^2(6t) + 12\sin(6t)\cos(6t) & 12\cos^2(6t) + 9\sin(6t)\cos(6t) \\ -12\sin^2(6t) + 9\sin(6t)\cos(6t) & -1 - 9\sin^2(6t) - 12\sin(6t)\cos(6t) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

donde los valores propios de $A(t)$ son -1 y -10 para cualquier t. Se puede comprobar que el sistema tiene la siguiente solución.

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(6t) + 2\sin(6t)) + 2e^{-13t}(2\cos(6t) - \sin(6t)) \\ e^{2t}(2\cos(6t) - \sin(6t)) - 2e^{-13t}(\cos(6t) + 2\sin(6t)) \end{pmatrix}.$$

Es evidente que crece exponencialmente y por el Teorema 1.2.5 el sistema es inestable.

Obsérvese que la matriz de coeficientes del sistema siguiente tiene los mismos valores propios que (2.1),

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

aunque en este caso la solución general de (2.2) viene dada por $x_1(t) = C_1 e^{-10t}$ y $x_2(t) = C_2 e^{-t}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, que trivialmente tienden a 0 cuando $t \to +\infty$. Así que por el Teorema 1.2.5, el sistema (2.2) es asintóticamente estable.

Ejemplo 2.0.2 (Markus y Yamabe) [9]
Este ejemplo es similar al de Vinograd (Ejemplo 2.0.1), aunque en este caso Markus y Yamabe introducen un sistema lineal continuo tal que los valores propios de la matriz de coeficientes son complejos conjugados con parte real negativa, y el sistema es inestable. Dicho sistema es $x'(t) = A(t)x(t)$, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\sin(t)\cos(t) & -1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Los valores propios de (2.3) son

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{7}).$$

Se puede comprobar que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t/2}\cos t \\ e^{t/2}\sin t \end{pmatrix}$$

es solución de $x'(t) = A(t)x(t)$, que claramente crece exponencialmente cuando $t \to +\infty$ y por el Teorema 1.2.5 el sistema es inestable.

Se puede observar que los sistemas de los Ejemplos 2.0.1 y 2.0.2 tienen algo en común, ambos son sistemas periódicos. Como se verá en lo que queda de capítulo, esto se debe a que en la construcción de dichos ejemplos se utilizan matrices de rotación.

Lo que sigue de capítulo está basado en las ideas que aparecen en [8].

2.1. Condiciones necesarias de sistemas inestables.

En esta sección, se tratará de determinar alguna condición que cumpla un sistema lineal homogéneo que tenga alguna solución inestable. Sea el sistema inestable

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{2.4}$$

tal que $A(t)$ es continua en $[r, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ y tiene valores propios constantes con parte real negativa. Si $\widetilde{x}(t)$ es una solución inestable de (2.4), entonces la distancia entre $\widetilde{x}(t)$ y el origen ha de incrementarse en algún momento. En otras palabras, $|\widetilde{x}(t)|$ ha de ser creciente en al menos un subintervalo de $[r, +\infty)$, esto es

$$\frac{d}{dt}|\widetilde{x}(t)|^2 > 0 \tag{2.5}$$

para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset [r, +\infty)$ para algún $\epsilon > 0$ y $t_0 > r$. En lo que sigue, se considerará la norma

$$|x(t)| = \sqrt{x(t) \cdot x(t)}.$$

De la desigualdad (2.5),

$$\frac{d}{dt}|\widetilde{x}(t)|^2 = 2\widetilde{x}(t) \cdot \widetilde{x}'(t) = 2\widetilde{x}(t) \cdot A(t)\widetilde{x}(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon).$$

Se define ahora el conjunto de matrices

$$\mathcal{B} = \{B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \; Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) < 0 \quad \wedge \quad x \cdot Bx > 0 \;\text{ para algún } x \in \mathbb{R}^2\},$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de B. Por lo visto hasta ahora, se puede garantizar que si $\widetilde{x}(t)$ es una solución inestable de (2.4) en $[r, +\infty)$ entonces $A(t_0) \in \mathcal{B}$ para algún $t_0 > r$. En el Ejemplo 2.0.1, se sabe que el sistema es inestable, y efectivamente $A(0) \in \mathcal{B}$ ya que $(1, 1)A(0)(1, 1)^T > 0$.

2.2. Construcción de ejemplos.

Volviendo al objetivo original del capítulo, se tratará de construir ejemplos de sistemas lineales cuya matriz de coeficientes tenga valores propios constantes con parte real negativa y sean inestables. Para ello se tomará una matriz de la familia $\mathcal{B}$ definida en la sección anterior y se rotará su correspondiente campo vectorial a velocidad angular constante ω.

Sean $B \in \mathcal{B}$ y

$$G(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

de tal manera que

$$R(t, \omega) = e^{tG(\omega)} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

rota el plano a velocidad angular constante ω. Se considera ahora el sistema

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad \text{ donde } \quad A(t) = R(t, \omega)BR^{-1}(t, \omega). \tag{2.6}$$

La construcción de $A(t)$ implica que tiene los mismos valores propios que la matriz B, por lo que se ha construido una matriz con coeficientes continuos y con valores propios constantes con parte real negativa. Para resolver el sistema (2.6), se realiza el cambio de variable

$$y(t) = R^{-1}(t, \omega)x(t).$$

Derivando $y(t)$ respecto de t,

$$y'(t) = (R^{-1}(t,\omega))'x(t) + R^{-1}(t,\omega)x'(t) = -G(\omega)R^{-1}(t,\omega)x(t) + R^{-1}(t,\omega)R(t,\omega)BR^{-1}(t,\omega)x(t)$$

y se llega al sistema transformado

$$y'(t) = (B - G(\omega))y(t). \tag{2.7}$$

Dicho sistema es lineal homogéneo de coeficientes constantes y su solución es conocida,

$$y(t) = e^{(B-G(\omega))t}C \qquad C \in \mathbb{R}^2.$$

Deshaciendo ahora el cambio, se obtienen las soluciones de (2.6)

$$x(t) = R(t,\omega)e^{(B-G(\omega))t}C \qquad C \in \mathbb{R}^2.$$

Al ser $R(t,\omega)$ una matriz periódica, es acotada cuando $t \to +\infty$. Entonces el comportamiento asintótico de las soluciones $x(t)$ de $x'(t) = A(t)x(t)$, está determinado por el comportamiento de las soluciones $y(t)$ de (2.7): $y(t) = e^{(B-G(\omega))t}C$. Se puede interpretar el comportamiento de una solución $x(t)$ como una solución $y(t)$ que a medida que crece t, gira respecto al origen a velocidad angular constante ω. Es por esto que el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.6) queda completamente determinado por los valores propios de la matriz $B - G(\omega)$.

En el Ejemplo de Vinograd (Ejemplo 2.0.1), $A(t)$ definida en (2.1) es de la forma

$$A(t) = R(t,\omega)BR^{-1}(t,\omega)$$

con $\omega = -6$ y

$$B = A(0) = \begin{pmatrix} -10 & 12 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como ya se ha visto, los valores propios de $A(t)$ los cuales coinciden con los de B, esto es, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -10$, no determinan la estabilidad del sistema; la determinan los valores propios de

$$B - G(-6) = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

es decir, $\mu_1 = -13$ y $\mu_2 = 2$. Por ser $Re(\mu_2) > 0$, se tiene que el sistema es inestable, como se había visto en el Ejemplo 2.0.1.

La matriz $A(t)$ definida en (2.3) en el Ejemplo de Markus y Yamabe (Ejemplo 2.0.2) también tiene la forma $A(t) = R(t,\omega)BR^{-1}(t,\omega)$ con $\omega = -1$ y

$$B = A(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y pese a que los valores propios de $A(t)$ sean constantes, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(1 \pm i\sqrt{7})$, y tengan parte real negativa, los valores propios de

$$B - G(-1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

son $\mu_1 = -1$ y $\mu_2 = \frac{1}{2}$ lo que implica que el sistema es inestable, como ya se ha visto en el Ejemplo 2.0.2.

En general, es difícil encontrar matrices $A(t)$ con valores propios constantes con parte real negativa y resulte que $x'(t) = A(t)x(t)$ sea inestable. Por lo visto hasta ahora, ese problema se ha reducido a encontrar una matriz B y un valor ω tal que B tenga valores propios con parte real negativa y $B - G(\omega)$ tenga al menos un valor propio con parte real positiva.

Aunque se haya descrito un método de construcción de ejemplos concretos de sistemas no autónomos inestables con valores propios constantes y con parte real negativa, también hay otros muchos ejemplos que se pueden generar con este método con distintas propiedades y que ponen de manifiesto que el Teorema 1.3.2 no se verifica para sistemas de coeficientes no constantes. En el siguiente y último ejemplo, se muestra un sistema lineal de coeficientes continuos asintóticamente estable, aunque con un valor propio con parte real positiva.

Ejemplo 2.2.1 (Wu) [16]
Sea el sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} + \frac{15}{2}\sin(12t) & \frac{15}{2}\cos(12t) \\ \frac{15}{2}\cos(12t) & -\frac{11}{2} - \frac{15}{2}\sin(12t) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Se puede comprobar que (2.8) tiene valores propios constantes $\lambda_1 = -13$ y $\lambda_2 = 2$. Aunque no tenga valores propios con parte real negativa, también se pueden utilizar las ideas de las páginas anteriores para ver que (2.8) se puede escribir de la forma

$$A(t) = R(t,\omega)BR^{-1}(t,\omega)$$

con $\omega = -6$ y

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & 15 \\ 15 & -11 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, los valores propios de $B - G(-6)$ resultan ser $\mu_1 = -10$ y $\mu_2 = -1$ lo que implica que el sistema es asintóticamente estable.

La conclusión de este capítulo es que los resultados para coeficientes constantes vistos en la Sección 1.3 no se pueden aplicar para coeficientes continuos. Se necesita otra teoría distinta para poder determinar la estabilidad de sistemas con coeficientes continuos. Lo ideal es poder extender los resultados que son conocidos; encontrar algún objeto matemático como el valor propio que permita determinar la estabilidad de un sistema sin necesidad de calcular sus soluciones.

En el método de construcción de ejemplos descrito, solo se han construido ciertos sistemas periódicos. Gracias al cambio de variable $y(t) = R^{-1}(t, \omega)x(t)$ que lleva al sistema de coeficientes constantes $y'(t) = [B - G(\omega)]y(t)$ y a la periodicidad de la matriz de rotación $R(t, \omega)$ se ha podido concluir que los valores propios de $B - G(\omega)$ determinaban la estabilidad de dicho sistema. En el siguiente capítulo, se tratará de extender estas ideas a sistemas más generales y encontrar resultados que permitan determinar la estabilidad de sistemas lineales de coeficientes periódicos cualesquiera.

Capítulo 3

Sistemas con coeficientes periódicos.

En este capítulo, se van a estudiar los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos. Como se ha indicado en el capítulo anterior, se tratará de enunciar y demostrar varios resultados que permitan conocer algunas de las propiedades que tienen estos sistemas y sus soluciones. El objetivo final será obtener resultados que permitan determinar la estabilidad de los sistemas lineales periódicos, sin calcular sus soluciones explícitamente.

Se llama sistema lineal homogéneo ω-periódico al sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ donde $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,...,n}$ con $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas, $\omega > 0$ y

$$a_{ij}(t) = a_{ij}(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i,j = 1,...,n.$$

Abreviadamente se escribirá $A(t) = A(t+\omega)$. Asimismo se llama sistema lineal no homogéneo ω-periódico a $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ donde $A(t)$ es la función matricial continua y ω-periódica definida al comienzo de este párrafo y el término independiente $b(t) = (b_i(t))_{i=1,...,n}$ es un vector columna tal que $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y

$$b_i(t) = b_i(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i = 1,...,n.$$

Las principales referencias al escribir este capítulo han sido [1], [2], [12] y [15].

3.1. Existencia de soluciones periódicas en sistemas lineales homogéneos.

Para abreviar, se escribirá “SLH” en vez de “sistema lineal homogéneo”. El objetivo de esta sección es determinar si un SLH ω-periódico tiene, o no, soluciones ω-periódicas. En caso afirmativo, es interesante saber cuántas soluciones ω-periódicas linealmente independientes existen sin calcularlas explícitamente. Para ello se definen nuevos objetos como la matriz de monodromía y sus valores propios, los multiplicadores característicos.

Para conocer las soluciones de un SLH ω-periódico, se empieza por estudiar algunas propiedades de las matrices fundamentales del sistema.

Proposición 3.1.1 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un SLH ω-periódico. Si $\phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema (m.f.), entonces $\phi(t+\omega)$ también lo es.*

$\underline{\mathscr{D}em.:}$ *Al ser $\phi(t)$ m.f. de $x'(t) = A(t)x(t)$, verifica la ecuación matricial*

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = A(t)\phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dt}\phi(t+\omega) = A(t+\omega)\phi(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Derivando $\phi(t+\omega)$ respecto de t por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}\phi(t+\omega) = \phi'(t+\omega)\frac{d}{dt}(t+\omega) = \phi'(t+\omega)$$

y como $A(t)$ es una matriz ω-periódica,

$$\phi'(t+\omega) = A(t)\phi(t+\omega).$$

Se tiene que $\phi(t+\omega)$ es solución del sistema matricial asociado. Falta ver que sus columnas son linealmente independientes, es decir, que el $det[\phi(t+\omega)] \neq 0$. Por la Fórmula de Abel-Liouville, se sabe que bastaría con tener $det[\phi(t+\omega)] \neq 0$ para algún $t = t_0$. En particular, tomando $t_0 = 0$,

$$det[\phi(t+\omega)_{t=0}] = det[\phi(\omega)] \neq 0, \quad \textit{por ser } \phi(t) \textit{ m.f.}$$

∎

Véase en el siguiente ejemplo que el resultado que se acaba de probar, no implica que las soluciones de un SLH ω-periódico sean también ω-periódicas.

Ejemplo 3.1.2 Sea la siguiente ecuación lineal homogénea y $2\pi-$periódica,

$$x'(t) = (1 + sin(t))x(t).$$

Sus soluciones son de la forma $x(t) = Ce^{t-\cos(t)}$ con $C \in \mathbb{R}$, que claramente no son periódicas. Pero es fácil comprobar que si $x(t)$ es solución de la ecuación, $x(t+2\pi)$ también lo es. En efecto,

$$x(t) = C_1 e^{t-\cos(t)}, \quad \textit{luego} \quad x(t+2\pi) = C_1 e^{t+2\pi-\cos(t)} = C_1 e^{2\pi} e^{t-\cos(t)}$$

que evidentemente es solución, tomando $C_2 = C_1 e^{2\pi}$, lo que corrobora la Proposición 3.1.1.

Al ser el conjunto de soluciones de un sistema diferencial lineal homogéneo un espacio vectorial y al estar la matriz fundamental formada por soluciones linealmente independientes del sistema, esta matriz forma una base de dicho espacio y existirá un cambio de base mediante el cual se obtenga otra matriz fundamental del sistema.

Proposición 3.1.3 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un SLH y sean $\phi(t)$ y $\psi(t)$ dos matrices fundamentales. Existe una matriz constante y no singular D tal que*

$$\psi(t) = \phi(t)D.$$

$\underline{\mathscr{D}em.:}$ *Sea $D(t) = \phi^{-1}(t)\psi(t)$. Está claro que existe por ser $\phi(t)$ no singular y que $D(t)$ no es singular. Además verifica $\psi(t) = \phi(t)D(t)$. Falta probar que $D(t)$ no depende de t. Por un lado*

$$\psi'(t) = A(t)\psi(t) = A(t)\phi(t)D(t)$$

por ser $\psi(t)$ m.f. y por definición de $D(t)$. Por otro lado, derivando como un producto y aplicando que $\psi(t)$ es m.f.,

$$\psi'(t) = (\phi(t)D(t))' = \phi'(t)D(t) + \phi(t)D'(t) = A(t)\phi(t)D(t) + \phi(t)D'(t).$$

Con esto, se deduce que $\phi(t)D'(t) = 0\ \forall t$. Al ser $\phi(t)$ m.f., es invertible, así que se multiplican ambos lados de la igualdad por $\phi^{-1}(t)$ y resulta que

$$D'(t) = 0 \quad \forall t.$$

Esto implica que D no depende de t, es decir, D es una matriz constante. ■

Las Proposiciones 3.1.1 y 3.1.3 permiten introducir la definición de matriz de monodromía.

Definición 3.1.4 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un SLH ω-periódico. Sea $\phi(t)$ una m.f. del sistema, al ser $\phi(t+\omega)$ también m.f., existe una matriz constante y no singular M tal que*

$$\phi(t+\omega) = \phi(t)M.$$

En este caso, a M se le llama matriz de monodromía asociada a $\phi(t)$.

Las matrices de monodromía de un SLH ω-periódico asociadas a matrices fundamentales distintas, guardan una relación entre ellas. De nuevo desde el punto de vista del Álgebra Lineal, en las condiciones de la Proposición 3.1.3 se sabe que $\psi(t) = \phi(t)D$, lo que implica que $\psi(t+\omega) = \phi(t+\omega)D$. La idea de la siguiente Proposición viene ilustrada en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\phi(t) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "M_\phi"] & \psi(t) \arrow[d, "M_\psi"] \\
\phi(t+\omega) \arrow[r, "D"] & \psi(t+\omega)
\end{tikzcd}$$

donde M_ϕ y M_ψ denotan las matrices de monodromía asociadas a $\phi(t)$ y $\psi(t)$ respectivamente.

Proposición 3.1.5 *Sean $\phi(t)$ y $\psi(t)$ dos matrices fundamentales de $x'(t) = A(t)x(t)$ sistema ω-periódico. Entonces las matrices de monodromía M_ϕ y M_ψ, asociadas a ϕ y ψ respectivamente, son semejantes.*

Dem. : *Por la Proposición 3.1.3 se sabe que $\psi(t) = \phi(t)D$ para alguna matriz invertible D. Por definición,*

$$M_\psi = \psi^{-1}(t)\psi(t+\omega).$$

Sustituyendo $\psi(t)$ y desarrollando la inversa de un producto de matrices,

$$M_\psi = (\phi(t)D)^{-1}\phi(t+\omega)D = D^{-1}\phi^{-1}(t)\phi(t+\omega)D$$

de donde por definición de M_ϕ, $M_\phi = \phi^{-1}(t)\phi(t+\omega)$, y se concluye que

$$M_\psi = D^{-1}M_\phi D$$

lo que implica que las matrices M_ψ y M_ϕ son semejantes. ∎

Como dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios, se deduce directamente el siguiente resultado.

Corolario 3.1.6 *Todas las matrices de monodromía de un mismo SLH ω-periódico tienen los mismos valores propios.*

En consecuencia, se introduce la definición de multiplicadores característicos.

Definición 3.1.7 *A los valores propios de una matriz de monodromía de un SLH ω-periódico se les llama multiplicadores característicos (m.c.) del sistema.*

Observación 3.1.8

i) *Cualquier matriz de monodromía es no singular, así que sus valores propios son no nulos, es decir, los multiplicadores característicos son no nulos.*

ii) *Si $\phi(t;0)$ denota la matriz fundamental principal en t=0 (i.e. $\phi(0;0) = I$, donde I es la matriz identidad), entonces la matriz de monodromía asociada a $\phi(t;0)$ es $\phi(\omega;0)$. Recuérdese que la matriz fundamental principal en el instante t_0 viene dada por $\phi(t;t_0) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)$ donde $\phi(t)$ es una matriz fundamental cualquiera.*

A continuación se verá un ejemplo donde se trasladan a la práctica los conceptos definidos hasta ahora.

Ejemplo 3.1.9 Sea el siguiente sistema lineal homogéneo y 2π-periódico

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Se calculará una matriz de monodromía y los multiplicadores característicos del sistema. Al ser la matriz de coeficientes del sistema triangular, se pueden resolver las ecuaciones por separado. Primero se resuelve la ecuación

$$x_1'(t) = (-1 + \cos(t))x_1(t)$$

de donde directamente, por separación de variables,

$$x_1(t) = C_1 e^{-t+\sin(t)} \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo ahora el valor de $x_1(t)$ en la segunda ecuación,

$$x_2'(t) = \cos(t) C_1 e^{-t+\sin(t)} - x_2(t)$$

y resolviendo con la Fórmula de Variación de Parámetros (Lema 1.2.2),

$$x_2(t) = C_2 e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^s \cos(s) C_1 e^{-s+\sin(s)} ds$$

La integral es inmediata por lo que se concluye que

$$x_2(t) = C_1 e^{-t}(e^{\sin(t)} - 1) + C_2 e^{-t}$$

y la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t+\sin(t)} \\ e^{-t}(e^{\sin(t)} - 1) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

En particular,

$$\phi(t; 0) = \begin{pmatrix} e^{-t+\sin(t)} & 0 \\ e^{-t}(e^{\sin(t)} - 1) & e^{-t} \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental principal en $t = 0$. Por la Observación 3.1.8, la matriz de monodromía asociada a $\phi(t; 0)$ es $M_\phi = \phi(2\pi; 0)$, es decir

$$M_\phi = \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}.$$

Evidentemente los valores propios de M_ϕ, es decir, los multiplicadores característicos del sistema (3.1), son $m_1 = m_2 = e^{-2\pi}$.

Ahora se verán algunos resultados que relacionan las soluciones con los multiplicadores característicos de un mismo sistema lineal periódico. En particular, se determinará cuándo las soluciones de un sistema periódico también son periódicas.

Teorema 3.1.10 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un SLH ω-periódico y k una constante no nula. Entonces, existe una solución no nula de $x'(t) = A(t)x(t)$ verificando*

$$x(t+\omega) = kx(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

si y solo si k es un multiplicador característico.

$\mathscr{D}$em. :

$\Rightarrow$) *Sea $\phi(t;0)$ matriz fundamental principal en $t = 0$ de $x'(t) = A(t)x(t)$ y $x(t)$ una solución no nula de $x'(t) = A(t)x(t)$. Entonces se puede encontrar x_0 tal que*

$$x(t) = \phi(t;0)x_0 \quad \textit{con} \quad x_0 = x(0) \neq 0.$$

Nótese que si $x_0 = 0$, entonces x(t) es la solución nula.

Si $x(t)$ verifica $x(t+\omega) = kx(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, por un lado se tiene que

$$x(t+\omega) = kx(t) = k\phi(t;0)x_0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado,

$$x(t+\omega) = \phi(t+\omega;0)x_0 = \phi(t;0)Mx_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con M matriz de monodromía asociada a $\phi(t;0)$. De las dos igualdades anteriores se llega a que

$$k\phi(t;0)x_0 = \phi(t;0)Mx_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tomando $t = 0$ y teniendo en cuenta que $\phi(0;0) = I$

$$kx_0 = Mx_0 \quad \textit{con} \quad x_0 \neq 0.$$

Luego k es un valor propio de M y por tanto es un multiplicador característico.

$\Leftarrow$) *Sea k un multiplicador característico del sistema, entonces k es valor propio de una matriz de monodromía M, en particular de la matriz de monodromía asociada a $\phi(t;0)$, matriz fundamental principal en el instante $t = 0$. Luego existe x_0 no nulo tal que*

$$Mx_0 = kx_0. \tag{3.2}$$

Considérese $x(t) := \phi(t;0)x_0$. Se tiene que $x(t)$ es una solución no nula de $x'(t) = A(t)x(t)$. Multiplicando por $\phi(t;0)$ en el miembro de la izquierda de (3.2), por un lado aplicando la propia igualdad

$$\phi(t;0)Mx_0 = \phi(t;0)kx_0 = k\phi(t;0)x_0 = kx(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, al ser M la matriz de monodromía asociada a $\phi(t;0)$

$$\phi(t;0)Mx_0 = \phi(t+\omega;0)x_0 = x(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente se concluye que

$$kx(t) = x(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

Del Teorema 3.1.10 se deduce inmediatamente el siguiente resultado, que caracteriza los SLH's ω-periódicos para los cuales existen soluciones ω-periódicas.

Corolario 3.1.11 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un SLH ω-periódico de dimensión n. Existen soluciones ω-periodicas no nulas de $x'(t) = A(t)x(t)$ si y solo si 1 es multiplicador característico del sistema. Además, en caso afirmativo, las soluciones $x(t)$ ω-periódicas son aquellas que tienen como condición inicial $x(0) = x_0$ con x_0 soluciones de la ecuación*

$$(\phi(\omega; 0) - I)x_0 = 0$$

con $\phi(t; 0)$ matriz fundamental principal en $t = 0$. Así, el número de soluciones ω-periódicas linealmente independientes es igual a $n - rango(\phi(\omega; 0) - I)$.

Observación 3.1.12 *En virtud del Corolario 3.1.11 se puede garantizar que no existen soluciones 2π-periódicas no nulas para el sistema del Ejemplo 3.1.9, ya que sus multiplicadores característicos son $m_1 = m_2 = e^{-2\pi}$.*

Ejemplo 3.1.13 Se tratará de probar que todas las soluciones del sistema lineal 2π-periódico $x'(t) = A(t)x(t)$ son 2π-periódicas, donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Se puede probar que si

$$B(t)A(t) = A(t)B(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{donde} \quad B(t) = \int_0^t A(s)ds$$

entonces la matriz fundamental principal en $t = 0$ viene dada por

$$\phi(t; 0) = e^{B(t)}.$$

La exponencial de una matriz, así como algunas de sus propiedades que serán utilizadas vienen explicadas en el Apéndice A. En este caso,

$$B(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) + 1 \\ \cos(t) - 1 & \sin(t) \end{pmatrix}$$

y se puede comprobar que $A(t)$ y $B(t)$ conmutan, luego la matriz fundamental principal en $t = 0$ resulta ser

$$\phi(t; 0) = e^{\begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) + 1 \\ \cos(t) - 1 & \sin(t) \end{pmatrix}}.$$

La Observación 3.1.8 asegura que la matriz de monodromía asociada a $\phi(t; 0)$ es $M = \phi(2\pi; 0)$, que coincide con la exponencial de la matriz nula 2×2 $(0_{2\times 2})$, y en consecuencia $M = I$.

Se tiene que los multiplicadores característicos del sistema (i.e. los valores propios de M) son $m_1 = m_2 = 1$, y por el Corolario 3.1.11 se sabe que admite soluciones 2π-periódicas. También se sabe el número de soluciones 2π-periódicas linealmente independientes;

$$n - rango(\phi(2\pi; 0) - I) = 2 - rango(0_{2\times 2}) = 2.$$

Al ser el sistema lineal y homogéneo de dimensión 2, se concluye que todas las soluciones son 2π-periódicas.

Finalmente, se señala que se puede conocer el producto total de los multiplicadores característicos de un sistema, sin tener que calcularlos.

Proposición 3.1.14 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un SLH ω-periódico y $m_1, ..., m_n$ sus multiplicadores característicos. Entonces se verifica*

$$m_1 m_2 ... m_n = e^{\int_0^\omega traza(A(s))ds}.$$

Dem. : *Sea $\phi(t; 0)$ la matriz fundamental principal del sistema en $t = 0$. Por la Fórmula de Abel-Liouville,*

$$det(\phi(t; 0)) = det(\phi(t_0; 0))e^{\int_{t_0}^t traza(A(s))ds}.$$

Tomando $t = \omega$ y $t_0 = 0$, por la Observación 3.1.8 $\phi(\omega; 0)$ es la matriz de monodromía M asociada a $\phi(t; 0)$ y $\phi(0; 0) = I$. Así que se tiene

$$det(M) = e^{\int_0^\omega traza(A(s))ds}.$$

Como el determinante de M es el producto de sus valores propios, es decir, de los multiplicadores característicos, se concluye que

$$det(M) = m_1 m_2 ... m_n = e^{\int_0^\omega traza(A(s))ds}.$$

■

3.2. Teorema de Floquet.

En esta sección se enunciará y demostrará el Teorema de Floquet para SLH's periódicos junto con alguna consecuencia importante. Este Teorema garantiza la existencia de dos matrices especiales $P(t)$ y R, las cuales pueden ser usadas para transformar un SLH periódico en un SLH de coeficientes constantes (Teorema de Lyapunov). Es de gran importancia, ya que de esta manera se podrá ligar la estabilidad del sistema periódico con la del sistema transformado, que al ser de coeficientes constantes es completamente conocida (véase Teorema 1.3.2). También se definirán los exponentes característicos, los cuales están muy relacionados con los multiplicadores característicos y servirán para el estudio del comportamiento asintótico y estabilidad de las soluciones de este tipo de ecuaciones/sistemas diferenciales.

Ahora se verá un resultado cuya prueba no se va a escribir por ser demasiado extensa y por poder perder continuidad en el trabajo. No obstante se puede ver en [2] en el Apéndice 3.

Lema 3.2.1 *Si B es una matriz no singular, entonces existe otra matriz A (denominada logaritmo de B) tal que*

$$B = e^{A}.$$

Nótese que aunque $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, A puede no ser una matriz real. De hecho, solo si los valores propios de B son reales y positivos, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.2.2 *(Teorema de Floquet)*
Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un sistema homogéneo ω-periódico. Sea $\phi(t)$ una matriz fundamental del sistema, entonces, existe una matriz no singular y ω-periódica $P(t)$ y una matriz constante R tal que

$$\phi(t) = P(t)e^{tR} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dem. : *Sea M la matriz de monodromía asociada a $\phi(t)$ tal que $\phi(t+\omega) = \phi(t)M \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Como M es regular, por el Lema 3.2.1 existe R matriz compleja tal que*

$$M = e^{\omega R} \tag{3.3}$$

Se define $P(t) := \phi(t)e^{-tR}$. Entonces,

i) El producto de matrices regulares es regular, por tanto, $P(t)$ es regular.

ii) Ahora se verá que $P(t)$ es una matriz ω-periódica. Por definición de $P(t)$,

$$P(t+\omega) = \phi(t+\omega)e^{-(t+\omega)R}.$$

Al ser M la matriz de monodromía asociada a $\phi(t)$, entonces

$$\phi(t+\omega)e^{-(t+\omega)R} = \phi(t)Me^{-(t+\omega)R}.$$

Por la igualdad (3.3) y aplicando propiedades de la exponencial de una matriz,

$$\phi(t)Me^{-(t+\omega)R} = \phi(t)e^{\omega R}e^{-(t+\omega)R} = \phi(t)e^{-tR} = P(t)$$

y en conclusión,

$$P(t+\omega) = P(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

como se quería probar.

■

Observación 3.2.3 *Nótese que si $A(t) = A$ es una matriz constante, entonces es periódica de periodo $\omega > 0$ cualquiera. En ese caso, si $\phi(t)$ es la matriz fundamental principal en $t = 0$ de $x'(t) = Ax(t)$, su descomposición de Floquet viene dada por*

$$\phi(t;0) = e^{tR} \quad \text{donde} \quad P(t) = I \;\; \forall t \in \mathbb{R} \quad y \quad R = A.$$

El Teorema de Floquet puede ser usado para transformar un sistema lineal homogéneo ω-periódico en un sistema lineal de coeficientes constantes.

Teorema 3.2.4 *(Teorema de Liapunov)*
Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un sistema lineal homogéneo ω-periódico. Sean $P(t)$ y R las matrices ω-periódica y constante, respectivamente, dadas en el Teorema 3.2.2. Entonces el cambio de variable $x(t) = P(t)u(t)$ transforma $x'(t) = A(t)x(t)$ en el sistema de coeficientes constantes $u'(t) = Ru(t)$.

Dem. : *Sea el sistema lineal homogéneo y ω-periódico $x'(t) = A(t)x(t)$. Considérese el cambio $x(t) = P(t)u(t)$, donde $P(t)$ es la matriz ω-periódica del Teorema 3.2.2. Se tiene que $P(t)e^{tR}$ es una matriz fundamental del sistema, y por lo tanto satisface la ecuación matricial*

$$[P(t)e^{tR}]' = A(t)P(t)e^{tR}.$$

Derivando $P(t)e^{tR}$ como un producto,

$$[P(t)e^{tR}]' = P'(t)e^{tR} + P(t)Re^{tR}$$

y en resumen

$$P'(t)e^{tR} + P(t)Re^{tR} = A(t)P(t)e^{tR}.$$

Despejando $P'(t)$ y aplicando la inversa de una exponencial matricial, se obtiene que

$$P'(t) = A(t)P(t) - P(t)R. \tag{3.4}$$

Introduciendo el cambio $x(t) = P(t)u(t)$ y (3.4), por un lado se tiene

$$x'(t) = P(t)u'(t) + P'(t)u(t) = P(t)u'(t) + (A(t)P(t) - P(t)R)u(t)$$

y por otro lado

$$x'(t) = A(t)x(t) = A(t)P(t)u(t).$$

Así que

$$P(t)u'(t) + (A(t)P(t) - P(t)R)u(t) = A(t)P(t)u(t)$$

y se llega a la siguiente igualdad

$$P(t)u'(t) - P(t)Ru(t) = 0$$

que implica directamente $u'(t) = Ru(t)$ ya que la matriz $P(t)$ es no singular. ∎

Definición 3.2.5 *En las condiciones del Teorema 3.2.2, se les llama exponentes característicos a los valores propios de la matriz R.*

Observación 3.2.6

i) *Como $M = e^{\omega R}$, la relación entre los multiplicadores característicos m_i y los exponentes característicos ρ_i es*

$$m_i = e^{\rho_i \omega} \tag{3.5}$$

donde ω es el periodo del SLH en cuestión (véase Apéndice A).

ii) *Los exponentes característicos de un SLH no son únicos. De la relación* (3.5) *se deduce que quedan determinados salvo una cantidad $i2\pi k/\omega$. La parte real de los exponentes característicos sí que es única.*

Observación 3.2.7 *Sea v un vector propio asociado a ρ un valor propio de la matriz R. Se comprueba fácilmente derivando que $u(t) = e^{\rho t}v$ es una solución de $u'(t) = Ru(t)$. Lo que implica deshaciendo el cambio que $x(t) = P(t)e^{\rho t}v$ es una solución de $x'(t) = A(t)x(t)$.*

Ejemplo 3.2.8 Considérese el sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ donde,

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sin(t) & -1 \end{pmatrix}.$$

Al ser $A(t)$ continua y 2π-periódica, $x'(t) = A(t)x(t)$ es un sistema lineal homogéneo 2π-periódico. Se puede comprobar que se verifica

$$A(t)B(t) = B(t)A(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad B(t) = \int_0^t A(s)ds.$$

Así que la matriz fundamental principal en $t = 0$ del sistema viene dada por

$$\phi(t;0) = e^{\int_0^t A(s)ds} = e^{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1-\cos(t) & -t \end{pmatrix}}$$

Teniendo en cuenta la Observación 3.1.8, se tiene que la matriz de monodromía M asociada a $\phi(t;0)$ es

$$M = \phi(2\pi;0) = e^{\begin{pmatrix} -2\pi & 0 \\ 0 & -2\pi \end{pmatrix}} = e^{-2\pi I} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}.$$

Evidentemente los multiplicadores característicos son $m_1 = m_2 = e^{-2\pi}$. Por el Corolario 3.1.11 se puede garantizar que no existen soluciones 2π-periódicas distintas de la solución nula. En este caso, resulta sencillo el cálculo de la matriz R tal que $M = e^{\omega R}$, $R = -I$. Por el Teorema de Floquet (Teorema 3.2.2), se sabe que existe una matriz $P(t)$ no singular y 2π-periódica tal que la matriz fundamental principal en $t = 0$ queda descompuesta de la siguiente manera,

$$\phi(t;0) = P(t)e^{tR} = P(t)e^{-tI} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se va a calcular dicha matriz $P(t)$, que tiene la siguiente forma

$$P(t) = \phi(t;0)e^{tI} = e^{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1-\cos(t) & -t \end{pmatrix}} e^{tI}.$$

Al conmutar las matrices de los exponentes se puede escribir

$$P(t) = e^{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1-\cos(t) & -t \end{pmatrix}} e^{tI} = e^{\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1-\cos(t) & -t \end{pmatrix} + tI} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-\cos(t) & 0 \end{pmatrix}}$$

y por la definición de exponencial matricial,

$$P(t) = e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-\cos(t) & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\cos(t) & 1 \end{pmatrix}$$

que efectivamente es no singular, 2π-periódica y verifica

$$\phi(t;0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\cos(t) & 1 \end{pmatrix} e^{-tI} = P(t)e^{-tI}.$$

Haciendo el cambio $x(t) = P(t)u(t)$ se llegará al sistema de coeficientes constantes $u'(t) = Ru(t)$. En efecto,

$$x_1(t) = u_1(t) \Longrightarrow u_1(t) = x_1(t).$$
$$x_2(t) = (1-\cos(t))u_1(t) + u_2(t) \Longrightarrow u_2(t) = (\cos(t)-1)x_1(t) + x_2(t).$$

Derivando $u(t)$ respecto de t,

$u_1'(t) = x_1'(t) = -x_1(t) = -u_1(t)$.
$u_2'(t) = ((\cos(t)-1)x_1(t))' + x_2'(t) = -\sin(t)x_1(t) - (\cos(t)-1)x_1(t) + \sin(t)x_1 - x_2(t) = -u_2(t)$.

Como se quería probar, mediante el cambio $x(t) = P(t)u(t)$ el SLH ω-periódico $x'(t) = A(t)x(t)$ se transforma en el sistema de coeficientes constantes $u'(t) = Ru(t)$.

La pregunta natural es si alguna propiedad del SLH de coeficientes periódicos, se conservará en el sistema transformado. Al estar las soluciones de ambos sistemas relacionadas por el cambio de variable $x(t) = P(t)u(t)$ y ser $P(t)$ matriz periódica, se espera que los comportamientos de las soluciones $x(t)$ y $u(t)$ también estén relacionados. Efectivamente es así y se verá en la Sección 3.4.

3.3. Caso no homogéneo.

En esta sección se verán algunos resultados sobre las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos y periódicos. En concreto, se determinará cuándo una solución de un sistema lineal no homogéneo ω-periódico es también ω-periódica y se dará una relación entre las soluciones ω-periódicas del no homogéneo y del homogéneo asociado.

Se considera el sistema

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

donde $A(t)$ y $b(t)$ son continuas y ω-periódicas, es decir, $A(t) = A(t+\omega)$ y $b(t) = b(t+\omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.3.1 *Sea $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ un sistema lineal no homogéneo ω-periódico. Una solución $x(t)$ de $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ es ω-periódica si y solo si $x(\omega) = x(0)$.*
<u>*Dem.* :</u>

$\Rightarrow$) *Trivial.*

$\Leftarrow$) *Sea $x(t)$ una solución de $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ verificando $x(\omega) = x(0)$. Se define*

$$y(t) = x(t + \omega).$$

Es evidente que $y(t)$ es derivable. A continuación se ve que además, $y(t)$ es solución del sistema

$$y'(t) = x'(t + \omega) = A(t + \omega)x(t + \omega) + b(t + \omega).$$

Como $A(t)$ y $b(t)$ son ω-periódicas

$$y'(t) = A(t)x(t + \omega) + b(t) = A(t)y(t) + b(t).$$

Además, se tiene que $y(0) = x(\omega) = x(0)$. Por el Teorema de Existencia y Unicidad para el problema de Cauchy (Teorema 1.2.1)

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) + b(t) \\ z(0) = x(0) \end{cases}$$

se deduce que $x(t) = y(t) = x(t + \omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

■

En el Teorema 3.3.1 se ha visto un criterio para asegurar cuándo una solución de un sistema lineal no homogéneo y ω-periódico también es ω-periódica. En dicho resultado es necesario conocer una solución del sistema, lo cual puede parecer poco útil. El siguiente teorema se basa en algunas condiciones del sistema homogéneo asociado para determinar si el sistema no homogéneo tiene, o no, soluciones periódicas.

Teorema 3.3.2 *Sea el sistema*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{3.6}$$

donde $A(t)$ una función matricial continua y ω-periódica. Para cada $b(t)$ función vectorial continua y ω-periódica, (3.6) tiene una única solución ω-periódica si y solo si el sistema homogéneo asociado $x'(t) = A(t)x(t)$ tiene como única solución ω-periódica la solución nula, es decir, si y solo si 1 no es multiplicador característico del sistema $x'(t) = A(t)x(t)$.

<u>*Dem.* :</u> *Sea $\phi(t; 0)$ la matriz fundamental principal en $t = 0$ del sistema homogéneo $x'(t) = A(t)x(t)$. Por la Fórmula de Variación de Parámetros (Lema 1.2.2), toda solución $x(t)$ de $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ es de la forma*

$$x(t) = \phi(t; 0)x(0) + \int_0^t \phi(t; 0)\phi^{-1}(s; 0)b(s)ds. \tag{3.7}$$

En virtud del Teorema 3.3.1, la solución $x(t)$ será ω-periódica si y solo si $x(0) = x(\omega)$. Evaluando (3.7) en $t = \omega$,

$$x(\omega) = \phi(\omega; 0)x(0) + \int_0^{\omega} \phi(\omega; 0)\phi^{-1}(s; 0)b(s)ds$$

que con la condición de periodicidad $x(0) = x(\omega)$, se transforma en

$$(I - \phi(\omega; 0))x(0) = \int_0^{\omega} \phi(\omega; 0)\phi^{-1}(s; 0)b(s)ds.$$

Lo obtenido se corresponde con un sistema lineal de ecuaciones algebráicas, cuya solución $x(0)$, coincide con las condiciones iniciales de la solución periódica en cuestión. El Álgebra Lineal asegura que dicho sistema tiene una única solución para cualquier vector $b(t)$ dado, si y solo si $det(I - \phi(\omega; 0)) \neq 0$. En concreto, al ser $\phi(t; 0)$ la matriz fundamental principal en $t = 0$, ocurre que $det(I - \phi(\omega; 0)) \neq 0$ si y solo si 1 no es valor propio de $\phi(\omega; 0)$, es decir, 1 no es multiplicador característico del sistema (véase Corolario 3.1.11). ■

Ejemplo 3.3.3 Considérese el siguiente sistema de la forma $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & 1 \\ 0 & 1 + \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{\sin(t)} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Nótese que $A(t)$ y $b(t)$ son continuas y 2π-periódicas, luego (3.8) es un sistema lineal no homogéneo 2π-periódico.

Al ser $A(t)$ triangular, el sistema homogéneo asociado se puede resolver de manera sencilla como en el Ejemplo 3.1.9. De esta manera, se llega a que la matriz fundamental principal en $t = 0$ del sistema homogéneo asociado es

$$\phi(t; 0) = \begin{pmatrix} e^{\sin(t)} & e^{\sin(t)}(e^t - 1) \\ 0 & e^{t+\sin(t)} \end{pmatrix}.$$

Por la Observación 3.1.8, se sabe que la matriz de monodromía asociada a $\phi(t; 0)$ es

$$M = \phi(2\pi; 0) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2\pi} - 1 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Claramente los multiplicadores característicos son $m_1 = 1$ y $m_2 = e^{2\pi}$, lo que implica que existen soluciones 2π-periódicas del sistema homogéneo asociado. Nótese que al ser $n - rango(M - I) = 2 - 1 = 1$, se puede garantizar que no todas las soluciones de este sistema son 2π-periódicas. De hecho, en virtud del Corolario 3.1.11, las soluciones periódicas del sistema lineal homogéneo se corresponderán con aquellas que tienen como condición inicial $x(0) = x_0$ donde x_0 es la solución del sistema

$$(\phi(2\pi; 0) - I)x_0 = 0$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \text{ arbitrario.}$$

Por el Teorema 3.3.2, se sabe que el sistema no homogéneo (3.8) no va a tener una solución periódica única, o bien no tiene, o bien hay más de una. Como ya se ha visto en la prueba del Teorema 3.3.2, si existen soluciones 2π-periódicas del sistema no homogéneo (3.8), serán las que tengan por condición inicial las soluciones del sistema

$$(I - \phi(2\pi;0))x(0) = \int_0^{2\pi} \phi(2\pi;0)\phi^{-1}(s;0)b(s)ds.$$

El sistema resultante es el siguiente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-e^{2\pi} \\ 0 & 1-e^{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

que evidentemente es un sistema incompatible, lo que implica que no existen soluciones 2π-periódicas del sistema no homogéneo (3.8).

Considérese ahora el sistema lineal no homogéneo $x'(t) = A(t)x(t) + \hat{b}(t)$ donde

$$\hat{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin(t)} \\ e^{\sin(t)} \end{pmatrix}.$$

Con un razonamiento análogo al anterior, se llega a que si existen soluciones 2π-periódicas para el sistema $x'(t) = A(t)x(t) + \hat{b}(t)$, estas tendrán como condiciones iniciales las soluciones del sistema

$$(I - \phi(2\pi;0))x(0) = \int_0^{2\pi} \phi(2\pi;0)\phi^{-1}(s;0)\hat{b}(s)ds$$

es decir, las soluciones de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-e^{2\pi} \\ 0 & 1-e^{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+e^{2\pi} \\ -1+e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Efectivamente, el nuevo sistema $x'(t) = A(t)x(t) + \hat{b}(t)$ tiene soluciones 2π-periódicas y se corresponden con aquellas que tienen por condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \alpha \text{ arbitrario.}$$

Como conclusión de este ejemplo, se puede decir que la existencia de soluciones ω-periódicas del sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ (1 es m.c. del sistema), no implica la existencia de soluciones ω-periódicas al añadirle un término no homogéneo. Se ha visto que $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ no tiene soluciones ω-periódicas, mientras que $x'(t) = A(t)x(t) + \hat{b}(t)$ sí que las tiene.

Ejemplo 3.3.4 Considérese ahora el sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ del Ejemplo 3.1.9, es decir

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\cos(t) & 0 \\ \cos(t) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

En el ejemplo citado, se ha probado que (3.9) no tenía soluciones 2π-periódicas, pues sus multiplicadores característicos eran $m_1 = m_2 = e^{-2\pi}$. En virtud del Teorema 3.3.2, añadiendo un término no homogéneo $b(t)$ continuo y 2π-periódico, el sistema $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ debería tener una única solución periódica. Sea

$$b(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin(t)} \\ e^{\sin(t)} - 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

que claramente es continuo en sus dos componentes y 2π-periódico. Las soluciones 2π-periódicas de $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ son las que tienen por condición inicial las soluciones del sistema

$$(I - \phi(2\pi;0))x(0) = \int_0^{2\pi} \phi(2\pi;0)\phi^{-1}(s;0)b(s)ds \tag{3.11}$$

donde $\phi(t;0)$ es la matriz fundamental principal en $t = 0$ de (3.9), que se ha calculado previamente en el Ejemplo 3.1.9

$$\phi(t;0) = \begin{pmatrix} e^{-t+\sin(t)} & 0 \\ e^{-t}(e^{\sin(t)} - 1) & e^{-t} \end{pmatrix}$$

donde su inversa es

$$\phi^{-1}(t;0) = \begin{pmatrix} e^{t-\sin(t)} & 0 \\ e^{t}(e^{-\sin(t)} - 1) & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Calculando el término de la derecha de (3.11), se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s-\sin(s)} & 0 \\ e^{s}(e^{-\sin(s)} - 1) & e^{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\sin(s)} \\ e^{\sin(s)} - 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2\pi} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así que el sistema de ecuaciones lineales (3.11) resulta ser

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

que efectivamente tiene solución única. Con esto, la única solución 2π-periódica del sistema lineal no homogéneo $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ con $b(t)$ definido en (3.10), es la que tiene por condición inicial

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que corrobora el Teorema 3.3.2.

3.4. Estabilidad de sistemas lineales con coeficientes periódicos.

En esta sección se tratará de estudiar la estabilidad de las soluciones de un sistema lineal ω-periódico. Como se ha visto en el Teorema 1.2.3, la estabilidad dependerá únicamente del sistema homogéneo asociado por lo que solo se considerarán los de esta forma. Por el Teorema de Lyapunov (Teorema 3.2.4), se sabe que un sistema lineal homogéneo ω-periódico se puede transformar a un sistema lineal de coeficientes constantes. En las condiciones del Teorema 3.2.4,

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad \xrightarrow{x(t)=P(t)u(t)} \quad u'(t) = Ru(t).$$

Al ser $P(t)$ periódica, es acotada. Así que se puede reducir el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$ al estudio de $u(t)$. Al ser solución de un sistema lineal de coeficientes constantes, su comportamiento asintótico estará determinado por los valores propios de R, es decir, los exponentes característicos del sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ (véase el Teorema 1.3.2).

Teorema 3.4.1 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un sistema lineal homogéneo ω-periódico. Sea ρ exponente característico de $x'(t) = A(t)x(t)$ con multiplicidad m. Suponiendo que R tiene exactamente k vectores propios linealmente independientes asociados a ρ, se tiene:*

i) Si $Re(\rho) > 0$, $x'(t) = A(t)x(t)$ tiene exactamente m soluciones l.i. correspondientes a ρ que no permanecen acotadas cuando $t \to \infty$.

ii) Si $Re(\rho) < 0$, $x'(t) = A(t)x(t)$ tiene exactamente m soluciones l.i. correspondientes a ρ que tienden a 0 cuando $t \to \infty$.

iii) Si $Re(\rho) = 0$, $x'(t) = A(t)x(t)$ tiene exactamente k soluciones l.i. que son acotadas y $m-k$ soluciones l.i. no acotadas asociadas a ρ.

iv) Si $\rho = \beta i$ y $\beta\omega/2\pi = a/b$ es un número racional con $b > 0$, $x'(t) = A(t)x(t)$ tiene k soluciones l.i. $b\omega$-periódicas y $m-k$ soluciones no acotadas asociadas a ρ.

Nótese que al ser R matriz compleja, los valores propios imaginarios no tienen porque venir en pares conjugados.

<u>*Dem.*</u> : *En virtud del Teorema de Floquet (Teorema 3.2.2) y del Teorema de Lyapunov (Teorema 3.2.4), transformando en sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ en $u'(t) = Ru(t)$ y aplicando el Lema 1.3.1 se deducen directamente los apartados i), ii) y iii).*

Con respecto al apartado iv), como $x(t) = P(t)u(t)$, se puede garantizar que $x(t)$ será periódica si $u(t)$ es periódica y los periodos de $P(t)$ y $u(t)$ están relacionados por un número racional. Esto es, si $\rho = \beta i$ es un exponente característico del sistema ω-periódico $x'(t) = A(t)x(t)$, por el Lema 1.3.1 existe $u(t)$ solución de $u'(t) = Ru(t)$ periódica de periodo $\theta = 2\pi/\beta$, que al ser solución de *un SLH de coeficientes constantes, $u(t) = e^{\rho t}v$ con v vector propio asociado a ρ. Si los periodos de $P(t)$ y $u(t)$ están relacionados por un número racional, es decir*

$$\frac{a}{b}\theta = \omega$$

donde a y b son enteros primos entre sí y $b > 0$, entonces

$$x(t + b\omega) = P(t + b\omega)u(t + b\omega)$$

y al ser $P(t)$ matriz ω-periódica y por las propiedades de la exponencial de una matriz,

$$P(t + b\omega)u(t + b\omega) = P(t)e^{\rho(t+b\omega)}v = P(t)e^{\rho t}e^{\rho b\omega}v = x(t)e^{\rho b\omega}.$$

Pero se tiene que

$$\rho b\omega = i\frac{\beta ba2\pi}{b\beta} = i2\pi a \quad a \in \mathbb{Z}$$

luego

$$e^{\rho b\omega} = 1$$

y se concluye que $x(t+b\omega) = x(t)$ para todo t, en otras palabras, $x(t)$ es una solución $b\omega$-periódica de $x'(t) = A(t)x(t)$. ∎

Como se ha dicho al final del Capítulo 1, el objetivo era extender el Teorema 1.3.2 que caracteriza la estabilidad de soluciones para sistemas lineales de coeficientes constantes. Se recuerda la Observación 3.2.3 la cual garantiza que hablar de sistemas periódicos incluye los sistemas de coeficientes constantes. En efecto, el siguiente resultado extiende el Teorema 1.3.2.

Corolario 3.4.2 *Sea $x'(t) = A(t)x(t)$ un SLH ω-periódico.*

i) $x'(t) = A(t)x(t)$ sistema asintóticamente estable si y solo si todos los exponentes característicos tienen parte real negativa.

i) $x'(t) = A(t)x(t)$ sistema estable si y solo si todos los exponentes característicos tienen parte real negativa o nula, y el número de vectores propios asociados a los valores propios con parte real nula coincide con su multiplicidad.

Dem. : *Se deduce del Teorema 3.4.1 y del Teorema 1.2.5.* ∎

Observación 3.4.3 *De la Observación 3.2.6,*

$$m_i = e^{\rho_i \omega}$$

donde m_i y ρ_i son un multiplicador y un exponente característico respectivamente de un SLH ω-periódico. Nótese que

$$Re(\rho_i) < 0 \quad \text{si y solo si} \quad |m_i| < 1$$

y que

$$Re(\rho_i) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad |m_i| = 1.$$

Con esto, se puede reescribir el Corolario 3.4.2 en función de los multiplicadores característicos.

3.5. Aplicaciones. Ecuación de Hill.

Las principales referencias de esta sección han sido [2], [5], [12], [13] y [15].

En 1877, George William Hill publicó un artículo [6] sobre el movimiento del perigeo lunar, en el que aparecieron por primera vez soluciones periódicas del problema de los tres cuerpos, un problema clásico que consiste en determinar las posiciones y velocidades de tres cuerpos sometidos a una atracción gravitacional mutua. En este artículo, Hill obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden con coeficientes periódicos que pudo reducir a una sola ecuación diferencial lineal de segundo orden.

En principio, cualquier ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes periódicos se puede reducir a una ecuación de tipo Hill. Sea la ecuación

$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0 \tag{3.12}$$

donde $a_0, a_1, a_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas a_1, a_2 derivables en $\mathbb{R}$, $a_2(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $a_i(t + \omega) = a_i(t)$ para un cierto periodo $\omega > 0$ con $i = 0, 1, 2$. Se puede comprobar que el cambio de variable

$$y(t) = u(t)e^{-\frac{1}{2}\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt}$$

transforma la ecuación (3.12) en

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0$$

donde

$$q(t) = \frac{1}{a_2(t)^2}\left[a_2(t)a_0(t) - \frac{1}{4}a_1(t)^2 - \frac{1}{2}(a_2(t)a_1'(t) - a_2'(t)a_1(t))\right]$$

y obviamente $q(t)$ es una función continua y ω-periódica.

La ecuación de Hill puede ser escrita de la forma

$$x''(t) + (a + b\Theta(t))x(t) = 0 \tag{3.13}$$

donde a y b son dos constantes reales y $\Theta(t)$ es una función real continua y ω-periódica.

El caso particular cuando $\Theta(t) = 2q\cos(2t)$ y $\omega = \pi$, recibe el nombre de Ecuación de Mathieu. Fue introducida por E. L. Mathieu en 1868 [10] con el fin de describir las vibraciones de una membrana elíptica. Esta ecuación ha sido empleada en la resolución de otros problemas, así como el análisis del movimiento de un péndulo con su origen desplazándose en dirección vertical en torno a una posición de equilibrio.

Se tratará de determinar el comportamiento asintótico de las soluciones de (3.13). Para empezar, mediante el cambio $x'(t) = y(t)$ se obtiene la ecuación en su forma matricial,

$$X' = A(t)X, \quad X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - b\Theta(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\phi(t;0)$ la matriz fundamental principal del sistema en $t=0$ y sean $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ las dos soluciones linealmente independientes de (3.13) con condiciones inciales $\varphi_1(0)=1,\ \varphi_1'(0)=0$ y $\varphi_2(0)=0,\ \varphi_2'(0)=1$. Entonces

$$\phi(t;0)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{pmatrix}.$$

La Fórmula de Abel-Liouville

$$det(\phi(t))=det(\phi(t_0))e^{\int_{t_0}^{t} traza(A(s))ds}$$

muestra que $det(\phi(t;0))$ es constante, al ser $traza(A(t))=0$. Sea M la matriz de monodromía asociada a $\phi(t;0)$, entonces $M=\phi(\omega;0)$ y la Fórmula de Abel-Liouville también asegura que $det(M)=1$.

A continuación se calculan los multiplicadores característicos del sistema, es decir, los valores propios de $M=\phi(\omega;0)$. Para abreviar, $traza(M)=tr(M)$.

$$\begin{aligned}det(\phi(\omega;0)-mI)&=(\varphi_1(\omega)-m)(\varphi_2'(\omega)-m)-\varphi_1'(\omega)\varphi_2(\omega)=\\&=m^2-(\varphi_1(\omega)+\varphi_2'(\omega))m+\varphi_1(\omega)\varphi_2'(\omega)-\varphi_1'(\omega)\varphi_2(\omega)=\\&=m^2-tr(M)m+det(M)=m^2-tr(M)m+1.\end{aligned}$$

Así, mediante la fórmula para ecuaciones de segundo grado

$$m=\frac{tr(M)\pm\sqrt{tr(M)^2-4}}{2}. \tag{3.14}$$

Se concluye que el comportamiento asintótico de las soluciones, y por tanto la estabilidad, está determinado por el número $tr(M)$. En general, si no se conocen las soluciones $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ el número $tr(M)$ será imposible de calcular. Sin embargo se puede obtener mucha información acerca de las soluciones partiendo de (3.14). Recuérdense las Observaciones 3.2.6 y 3.2.7 y el Teorema 3.4.1, ya que se usarán para determinar la forma de los exponentes característicos y la estabilidad del sistema en cada caso. Se consideran los siguientes casos,

i) $tr(M)>2$

Se deduce que m_1 y m_2 son números reales positivos, distintos y no iguales a 1. Al ser $m_1m_2=1$, se puede suponer la siguiente relación, $0<m_1<1<m_2$. Se tiene que los exponentes característicos son

$$\rho_1=\frac{1}{\omega}\ln(m_1)<0,\quad \rho_2=\frac{1}{\omega}\ln(m_2)>0$$

donde ln denota el logaritmo neperiano. Se concluye que existe una solución que no permanece acotada y otra que tiende a 0 cuando $t\to+\infty$. Por tanto, el sistema es inestable en este caso.

ii) $tr(M) = 2$

Implica directamente que los dos multiplicadores característicos son iguales a 1 (Recuérdese que, por el Corolario 3.1.11, se puede garantizar la existencia de al menos una solución ω-periódica no nula). Así que los dos exponentes característicos serán iguales a 0, lo que conduce a dos subcasos,

ii.a) La matriz R tal que $M = e^{\omega R}$, tiene dos vectores propios l.i., lo que implica que existen dos soluciones l.i. ω-periódicas, así que el sistema es estable.

ii.b) La matriz R tiene un único vector propio l.i., lo que implica que existe una solución ω-periódica y otra solución no acotada, en este caso el sistema es inestable.

iii) $-2 < tr(M) < 2$

En este caso los multiplicadores característicos son complejos conjugados con $m_1 m_2 = 1$. Luego $2m_1 = tr(M) + \sqrt{tr(M)^2 - 4}$ y $2m_2 = tr(M) - \sqrt{tr(M)^2 - 4}$ y se pueden escribir en su forma de exponencial compleja $m = e^{\pm i\theta}$ con $0 < \theta < \pi$. Se tiene que

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta).$$

Recordando la relación $m_i = e^{\rho_i \omega}$, se concluye que los exponentes característicos son

$$\rho = \pm \frac{\theta}{\omega} i, \quad \text{donde} \quad \theta = \arccos(tr(M)/2).$$

En este caso existen dos soluciones l.i. acotadas del sistema, lo cual implica que el sistema es estable.

iv) $tr(M) = -2$

Este caso supone que los dos multiplicadores característicos sean idénticos e iguales a -1. Como en el caso *ii)*, los exponentes característicos serán iguales y se vuelven a considerar dos subcasos. Por definición de matriz de monodromía,

$$\phi(t + \omega) = \phi(t)M.$$

iv.a) Si M tiene dos vectores propios l.i., entonces si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones l.i. de (3.13) entonces

$$x_1(t + \omega) = -x_1(t) \quad y \quad x_2(t + \omega) = -x_2(t)$$

luego las dos soluciones l.i. son 2ω-periódicas, así que el sistema es estable.

iv.b) La matriz M tiene un único vector propio l.i., lo que implica que existe una solución 2ω-periódica y otra solución no acotada, en este caso el sistema es inestable.

v) $tr(M) < -2$

En este último caso, los multiplicadores característicos son reales, negativos, distintos y no iguales a -1. De nuevo, al ser $m_1 m_2 = 1$, se supone la relación $m_1 < -1 < m_2 < 0$. En este caso los exponentes característicos se pueden escribir como logaritmos complejos. Nótese que de la relación $m_1 m_2 = 1$ se deduce que $\ln(m_1) = -\ln(m_2)$. Expresando m_1 en forma polar,

$$m_1 = -m_1 e^{i\pi}, \quad \text{nótese que} \quad -m_1 > 0$$

y con esto se puede calcular su logaritmo,

$$\ln(m_1) = \ln(-m_1) + i\pi.$$

Luego los exponentes característicos son

$$\rho = \pm \ln(-m_1) + i\pi$$

y al ser $Re(\rho_1) = Re(\ln(-m_1) + i\pi) > 0$ y $Re(\rho_2) = Re(-\ln(-m_1) + i\pi) < 0$ se concluye que existe una solución que tiende a 0 cuando $t \to +\infty$ y otra no acotada. El sistema en este caso es inestable.

Capítulo 4

Sistemas perturbados.

En lo que va de trabajo, se ha empezado por determinar la estabilidad de sistemas lineales con coeficientes constantes, y se ha conseguido extender algún resultado para determinar la estabilidad en algunos casos particulares de sistemas lineales con coeficientes continuos, concretamente en el caso periódico. El objetivo de este capítulo es abordar el problema de las perturbaciones en sistemas lineales con coeficientes periódicos. Por otra parte, recuérdese el Teorema 1.2.3, por el cual solo serán considerados sistemas lineales homogéneos, cuando se trate de determinar la estabilidad de un sistema. Las principales referencias al escribir este capítulo han sido [2] y [15].

Las perturbaciones son muy comunes en las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales, generalmente se deben a errores en la modelización, errores en el tratamiento de los datos, incertidumbres, etc. Obviamente, dichas perturbaciones han de ser pequeñas, pero ¿en qué sentido? En este trabajo se está estudiando la estabilidad de los sistemas lineales que como se sabe está relacionada con el comportamiento asintótico de las soluciones cuando $t \to +\infty$ (véase Teorema 1.2.5). Esto motiva que el sentido de perturbación “pequeña”, sea también cuando el tiempo tienda a infinito.

De esta manera, se considerarán sistemas lineales de la forma

$$x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t) \tag{4.1}$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ representa la matriz de coeficientes ω-periódicos, esto es,

$$A(t+\omega) = A(t) \quad \omega > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ representa el término de la perturbación, que se exigirá que sea continuo, es decir que $b_{ij} : [r, +\infty) \to \mathbb{R}$ sean funciones continuas. Como se ha dicho, en un principio, se requerirá la propiedad de que la perturbación sea pequeña en el sentido de

$$\lim_{t\to+\infty} |B(t)| = 0. \tag{4.2}$$

A lo largo de este capítulo, se tomarán las siguientes normas vectoriales y matriciales,

$$|x(t)| = \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \quad \text{y} \quad |B(t)| = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}(t)|.$$

Con esto, es natural preguntarse si el comportamiento asintótico de las soluciones de (4.1) será el mismo que el de las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$, o bien si no hay relación alguna entre éstos.

Los sistemas lineales de coeficientes constantes se pueden considerar también periódicos de periodo $\omega > 0$ cualquiera. Recuérdese la Observación 3.2.3, en la que se ve la forma que tendrían las matrices $P(t)$ y R que compondrían la descomposición de Floquet de una matriz fundamental de dicho sistema. De esta manera, los siguientes resultados sobre sistemas de coeficientes periódicos perturbados extienden los de coeficientes constantes.

Ejemplo 4.0.1 Sea la siguiente ecuación

$$x'(t) = [-10 + \frac{1}{t+1}]x(t). \tag{4.3}$$

donde $A(t) = -10 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ y $B(t) = \frac{1}{t+1}$ para $t \geq 0$. Nótese que la función $B(t)$ es continua en $[0, +\infty)$, $\lim_{t \to +\infty} |B(t)| = 0$ y que $A(t)$ es una función ω-periódica para $\omega > 0$ cualquiera.

Por el Teorema 1.3.2, es claro que la ecuación $x'(t) = A(t)x(t)$ es asintóticamente estable, y sus soluciones vienen dadas por $x(t) = e^{-10t}C$ con $C \in \mathbb{R}$. Este caso es sencillo, pues se puede calcular la solución de (4.3) inmediatamente,

$$x(t) = e^{-10t}(1+t)C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se deduce que las soluciones de (4.3) también tienden al origen cuando t tiende a infinito y por lo tanto el sistema perturbado también es asintóticamente estable.

El Ejemplo 4.0.1 muestra un sistema perturbado $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$ que comparte el mismo comportamiento asintótico (y por tanto la estabilidad) que el sistema sin perturbar $x'(t) = A(t)x(t)$. El objetivo del capítulo será dar condiciones suficientes para $A(t)$ y $B(t)$ que garanticen que el sistema $x'(t) = [A(t)+B(t)]x(t)$ hereda la estabilidad del sistema $x'(t) = A(t)x(t)$. Previamente, se darán las ideas fundamentales utilizadas en las demostraciones y algunos resultados previos que se utilizarán en las mismas.

4.1. Resultados previos.

Con el objetivo de conocer las soluciones de un sistema lineal perturbado de la forma (4.1), se empezará por adaptar la Fórmula de Variación de Parámetros (Lema 1.2.2) al caso que se está estudiando, obteniendo una expresión de las soluciones del sistema perturbado (4.1) en función de las soluciones del sistema sin perturbar $x'(t) = A(t)x(t)$. De esta manera se podrá también estimar la norma de las soluciones y estudiar su comportamiento cuando $t \to +\infty$.

Lema 4.1.1 *Sea el sistema*

$$x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t) \tag{4.4}$$

donde $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,...,n}$ *y* $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1,...,n}$ *con* $a_{ij}, b_{ij} : [r, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continuas para todo* $i, j = 1, ..., n$. *Toda solución* $x(t)$ *de (4.4) verifica la fórmula*

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x(t_0) + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)x(s)ds \quad \forall t > t_0.$$

con $t_0 > r$ *y* $\phi(t)$ *matriz fundamental de* $x'(t) = A(t)x(t)$.

<u>$\mathscr{D}$em. :</u> *Se deduce de aplicar la Fórmula de Variación de Parámetros al sistema lineal no homogéneo* $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ *tomando por término no homogéneo a* $b(t) = B(t)x(t)$. ■

El Lema de Gronwall, es un resultado conocido ([3],[4]) cuya importancia está en la acotación de una función no negativa $u(t)$, como puede ser una norma, por otra función que no depende de $u(t)$. En el Lema 4.1.1 se puede observar que la fórmula que se obtiene para una solución $x(t)$ de (4.1), depende de sí misma por lo que se podrá usar el Lema de Gronwall para estimar la norma de $x(t)$ por una cantidad que no dependa de la propia solución $x(t)$ y así poder estudiar su comportamiento asintótico. A continuación se muestra en detalle el enunciado; la demostración se puede ver en [5] en la página 36.

Lema 4.1.2 *(Lema de Gronwall)*
Sean $u, \phi, k : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas con* $k(t) > 0$ *para todo* $t \in [a, b]$. *Si se verifica*

$$0 \leq u(t) \leq \phi(t) + \int_a^t k(s)u(s)ds \quad \forall t \in [a, b]$$

entonces

$$0 \leq u(t) \leq \phi(t) + \int_a^t k(s)\phi(s)e^{\int_s^t k(z)dz}ds \quad \forall t \in [a, b].$$

El siguiente Lema, también es conocido ([3],[4]) y trata de estimar la norma de una exponencial matricial. La importancia del siguiente resultado en este caso, está en poder acotar la norma de la matriz e^{Rt}, que a su vez servirá para acotar normas de soluciones de un SLH periódico, ya que por el Teorema de Floquet (Teorema 3.2.2) una matriz fundamental $\phi(t)$ de un SLH periódico se descompone como $\phi(t) = P(t)e^{Rt}$, con $P(t)$ matriz periódica. La demostración se puede ver en [2] en las páginas 80-81.

Lema 4.1.3 *Sean* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *los distintos valores propios de una matriz* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *donde la multiplicidad algebráica de* λ_i *es* n_i, *es decir,* $n_1 + ... + n_k = n$. *Sea*

$$\mu > \max_{i=1,...,k} Re(\lambda_i)$$

entonces existe una constante $M > 0$ *tal que*

$$|e^{At}| \leq Me^{\mu t} \quad \forall t \geq 0.$$

4.2. Condiciones suficientes para la estabilidad asintótica.

A continuación se enunciará y demostrará el teorema que garantiza que $x'(t) = [A(t)+B(t)]x(t)$ hereda la estabilidad de $x'(t) = A(t)x(t)$, bajo ciertas condiciones para la matriz $A(t)$ y en especial para el término de perturbación $B(t)$.

Teorema 4.2.1 *Sea el sistema*

$$x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t) \tag{4.5}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son continuas en $[r, +\infty)$, $A(t)$ es ω-periódica y $B(t)$ verifica $|B(t)| \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Si todas las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$ tienden al origen cuando $t \to +\infty$ entonces todas las soluciones de (4.5) tienden al origen cuando $t \to +\infty$.

Dem. : *Supóngase que todas las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$ tienden al origen cuando $t \to +\infty$. Se tratará de acotar la norma de las soluciones de (4.5) por una cantidad que tienda a 0.*

Sea $x(t)$ una solución de (4.5). Por el Lema 4.1.1 se sabe que tiene la siguiente forma

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x(t_0) + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)x(s)ds \quad \forall t > t_0$$

con $\phi(t)$ m.f. de $x'(t) = A(t)x(t)$ y $r \leq t_0 < +\infty$. Tomando normas,

$$|x(t)| \leq |\phi(t)||\phi^{-1}(t_0)x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |\phi(t)\phi^{-1}(s)||B(s)||x(s)|ds \quad \forall t > t_0. \tag{4.6}$$

Como $A(t)$ es ω-periódica, por el Teorema de Floquet (Teorema 3.2.2), sea $\phi(t) = P(t)e^{tR}$ una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$. Ahora se tratará de acotar los términos de la ecuación (4.6) con $\phi(t) = P(t)e^{tR}$. En primer lugar,

$$|\phi(t)| \leq |P(t)||e^{tR}| \quad \forall t.$$

Al ser $x'(t) = A(t)x(t)$ asintóticamente estable, todos los exponentes característicos, es decir, los valores propios de R, tienen parte real negativa. Por el Lema 4.1.3, existen $\mu, M_1 > 0$ tales que

$$|\phi(t)| \leq |P(t)|M_1e^{-\mu t} \quad \forall t \geq 0.$$

Además, al ser $P(t)$ ω-periódica, es acotada y existe $M_2 > 0$ tal que

$$|\phi(t)| \leq M_2M_1e^{-\mu t} \quad \forall t \geq 0.$$

En segundo lugar, se define $|\phi^{-1}(t_0)x(t_0)| = M_3$, ya que es un valor constante.

En tercer lugar, utilizando propiedades de la exponencial de una matriz (véase Apéndice A)

$$|\phi(t)\phi^{-1}(s)| = |P(t)e^{tR}(e^{sR})^{-1}P^{-1}(s)| = |P(t)e^{tR}e^{-sR}P^{-1}(s)| \leq |P(t)||P^{-1}(s)||e^{(t-s)R}| \quad \forall t > s.$$

Por los razonamientos anteriores, $P(t)$ periódica y Lema 4.1.3, se tiene

$$|\phi(t)\phi^{-1}(s)| \leq M_2|P^{-1}(s)|M_1e^{-(t-s)\mu} \quad \forall s,t \quad con \quad t>s.$$

Nótese que $|P^{-1}(s)|$ también está acotada. Basta con acotar los elementos de la inversa de $P(s)$. Sean $p_{ij}^{-1}(s)$ y $p_{ij}(s)$ los elementos en la fila i y columna j de $P^{-1}(s)$ y $P(s)$ respectivamente, entonces

$$p_{ij}^{-1}(s) = \frac{Adj(p_{ji}(s))}{det(P(s))}. \tag{4.7}$$

Los elementos $(Adj(p_{ji}(s)))$ están acotados, ya que son una suma de productos de funciones ω-periódicas. Por otra parte $P(s)$ es no singular, por lo que $det(P(s)) \neq 0$, y al ser periódica también se tiene que $\lim_{t\to+\infty} \det(P(t)) \neq 0$ y $|P^{-1}(s)|$ está acotada. Con esto, existe $M_4>0$ tal que

$$|\phi(t)\phi^{-1}(s)| \leq M_2M_4M_1e^{-(t-s)\mu} \quad \forall s,t \quad con \quad t>s.$$

En resumen, sustituyendo las cotas en (4.6),

$$|x(t)| \leq M_1M_2e^{-\mu t}M_3 + \int_{t_0}^{t} M_2M_4M_1e^{-(t-s)\mu}|B(s)||x(s)|ds \quad \forall t>t_0. \tag{4.8}$$

Por hipótesis, $\lim_{t\to+\infty}|B(t)| = 0$ luego para cualquier constante $M_5>0$ existe $t_0>r$ tal que

$$|B(t)| \leq M_5 \quad \forall t > t_0.$$

Por razones que se verán al final de la demostración, se toma M_5 tal que

$$M_1M_2M_4M_5 < \mu. \tag{4.9}$$

Así, se llega a la siguiente desigualdad

$$|x(t)| \leq C_1e^{-\mu t} + C_2\int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)\mu}|x(s)|ds \quad \forall t>t_0 \tag{4.10}$$

donde $C_1 = M_1M_2M_3$ y $C_2 = M_1M_2M_4M_5$. Multiplicando ambos lados de la desigualdad por la cantidad $e^{\mu t}>0$ para todo t,

$$|x(t)|e^{\mu t} \leq C_1 + C_2\int_{t_0}^{t} e^{s\mu}|x(s)|ds \quad \forall t>t_0.$$

En este momento se puede aplicar el Lema de Gronwall (Lema 4.1.2) donde $u(t) = |x(t)|e^{\mu t}$, $\phi(t) = C_1$ y $k(t) = C_2$, y se obtiene la estimación

$$|x(t)|e^{\mu t} \leq C_1 + C_1C_2\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t C_2dz}ds \quad \forall t>t_0.$$

Realizando los cálculos correspondientes en el lado de la derecha y multiplicando ahora ambos lados por $e^{-\mu t}$, se llega a la expresión

$$|x(t)| \leq C_1e^{-C_2t_0}e^{(C_2-\mu)t} \quad \forall t>t_0. \tag{4.11}$$

Como ya se ha comentado, se ha elegido M_5 tal que $C_2 = M_1M_2M_4M_5 < \mu$ (véase (4.9)) y de la desigualdad (4.11) se sigue que

$$0 \leq \lim_{t\to+\infty} |x(t)| \leq \lim_{t\to+\infty} C_1 e^{-C_2 t_0} e^{(C_2-\mu)t} = 0$$

y por la Regla del Sandwich, $|x(t)| \to 0$ cuando $t \to +\infty$ como se quería probar. ∎

Ejemplo 4.2.2 Considérese el sistema del Ejemplo 3.2.8, es decir

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \sin(t) & -1 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

En primer lugar, se recuerda que la matriz fundamental principal de (4.12) es

$$\phi(t;0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t}(1-\cos(t)) & e^{-t} \end{pmatrix}$$

por lo que se sabe que todas las soluciones tienden a 0 cuando $t \to +\infty$.

Por el Teorema 4.2.1, se puede garantizar que todas las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+e^{-2t} & \frac{1}{t+15} \\ \sin(t)-\sin(1/t) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

tienden a 0 cuando $t \to +\infty$, sin más que considerar el sistema perturbado

$$x'(t) = [A(t)+B(t)]x(t)$$

donde

$$B(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & \frac{1}{t+15} \\ -\sin(1/t) & 0 \end{pmatrix}$$

que obviamente verifica la condición (4.2). En consecuencia el sistema (4.13) es asintóticamente estable.

Por otra parte, considerando el sistema (4.12) de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{C(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin(t) & 0 \end{pmatrix}}_{D(t)} \right] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

se garantiza que las condiciones de estabilidad asintótica dadas en el Teorema 4.2.1 son suficientes pero no necesarias, pues aunque $|D(t)| \nrightarrow 0$ cuando $t \to +\infty$, se tiene que (4.14) es asintóticamente estable y hereda la estabilidad de $x'(t) = C(t)x(t)$, que también es asintóticamente estable.

En el siguiente ejemplo, se ve la importancia de exigir la condición (4.2) al término de perturbación.

Ejemplo 4.2.3 Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Se definen

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de tal manera que (4.15) se puede escribir como $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$. Todas las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$ tienden a 0 cuando $t \to +\infty$, ya que los valores propios de $A(t)$ tienen parte real negativa. En cambio, se puede comprobar que la solución general de (4.15) es la siguiente

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

que claramente no tiende a 0 cuando $t \to +\infty$. Esto sucede debido a que el término de perturbación $B(t)$ considerado no cumple la condición (4.2), ya que en este caso

$$\lim_{t \to +\infty} |B(t)| = +\infty.$$

4.3. Condiciones suficientes para la estabilidad.

Ahora se verá un resultado que garantiza también que un sistema perturbado comparte la estabilidad del mismo sistema sin perturbar. Pero en este caso no será la estabilidad asintótica, sino la acotación de las soluciones la propiedad que compartirán los dos sistemas cuando t tiende a infinito, y por tanto la estabilidad.

Como para que se de la estabilidad del sistema perturbado $x'(t) = [A(t)+B(t)]x(t)$ es necesaria la acotación de sus soluciones (Teorema 1.2.5), se puede pensar que basta con que todas las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$ estén acotadas y que la perturbación $|B(t)|$ permanezca acotada cuando $t \to +\infty$, pero eso es falso, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.1 Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \cos(t) & \frac{1}{2} + \sin(t) \\ -\frac{1}{2} + \sin(t) & -\frac{1}{4} + \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Se puede comprobar que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/4} \sin(\frac{t}{2}) \\ e^{t/4} \cos(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$$

es una solución de (4.16), la cual es no acotada cuando $t \to +\infty$. Considérense las matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad y \quad B(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

de tal manera que (4.16) se puede escribir como $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$. Los valores propios de $A(t)$ son $\lambda_{1,2} = -1/4 \pm i/2$, por lo que todas las soluciones del sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ tienden al origen cuando $t \to +\infty$ y en consecuencia también están acotadas cuando $t \to +\infty$.

También se tiene que $|B(t)|$ es acotada cuando $t \to +\infty$ pero como se ha visto, una solución de $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$ es no acotada, y se concluye que no basta con la acotación del término de perturbación para que el sistema perturbado herede la acotación de soluciones del sistema sin perturbar.

Se puede pensar también que al exigir la condición (4.2) al término de perturbación, se podrá deducir la acotación de las soluciones de $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$ a partir de la acotación de las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$. Pero como se ve en el siguiente ejemplo, esto también es falso.

Ejemplo 4.3.2 Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Sean las matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/t & 0 \end{pmatrix}$$

tales que (4.17) se puede escribir como $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$. Los valores propios de $A(t)$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 0$ y por el Teorema 1.3.2 el sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ es estable en $[0, +\infty)$ y por tanto todas sus soluciones están acotadas en $[0, +\infty)$.

Claramente, $B(t)$ verifica la condición (4.2), pero se puede comprobar que

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una solución de $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$ que no es acotada en $[1, +\infty)$, por lo que se ha de exigir una condición más fuerte al término de perturbación para que el sistema perturbado herede la acotación, y por tanto la estabilidad, del sistema no perturbado.

Teorema 4.3.3 *Sea el sistema*

$$x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t) \tag{4.18}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son continuas en $[r, +\infty)$, $A(t)$ es ω-periódica y se verifica la condición

$$\int_{t_0}^{+\infty} |B(s)| ds < +\infty$$

para algún $t_0 \geq r$. Si todas las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$ están acotadas en $[t_0, +\infty)$ entonces todas las soluciones de $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$ están acotadas en $[t_0, +\infty)$.

<u>*Dem.* :</u> *Para probar este resultado se procederá como en la prueba del Teorema 4.2.1, se buscará una cota para la norma de una solución genérica de (4.18). Sea $x(t)$ solución de (4.18), por el Lema 4.1.1*

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x(t_0) + \phi(t)\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)B(s)x(s)ds \quad \forall t > t_0 \tag{4.19}$$

con $r \leq t_0 < +\infty$ y donde $\phi(t)$ es una matriz fundamental de $x'(t) = A(t)x(t)$, que por el Teorema de Floquet se sabe que tiene la forma $\phi(t) = P(t)e^{tR}$ con $P(t)$ ω-periódica y R matriz constante. Al suponer que todas las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$ están acotadas en $[t_0, +\infty)$ para un cierto $t_0 \geq r$, se tiene que $\phi(t)$ está acotada en $[t_0, +\infty)$. Análogamente a (4.7), se puede garantizar que $\phi^{-1}(t)$ también está acotada en $[t_0, +\infty)$. Los adjuntos de elementos de $\phi(t)$ son sumas de productos de funciones acotadas, y $\det(\phi(t)) \neq 0$ por ser matriz fundamental. Con esto,

$$|\phi(t)\phi^{-1}(t_0)x(t_0)| \leq C_1 \qquad \forall t \geq t_0$$
$$|\phi(t)\phi^{-1}(s)| \leq C_2 \qquad \forall t \geq s \geq t_0.$$

Aplicando dichas cotas en (4.19) se tiene

$$|x(t)| \leq C_1 + C_2\int_{t_0}^{t} |B(s)||x(s)|ds \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.20}$$

Se aplica el Lema de Gronwall (Lema 4.1.2) con $u(t) = |x(t)|$, $\phi(t) = C_1$ y $k(t) = C_2|B(t)|$ y se llega a la desigualdad

$$|x(t)| \leq C_1 + C_1C_2\int_{t_0}^{t} |B(s)|e^{\int_{t_0}^{t} |B(z)|dz}ds \quad \forall t > t_0. \tag{4.21}$$

Por hipótesis,

$$q := \lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} |B(s)|ds < +\infty$$

luego de (4.21) se tiene que

$$|x(t)| \leq C_1 + C_1C_2\int_{t_0}^{+\infty} |B(s)|e^{q}ds \leq C_1 + C_1C_2qe^{q} < +\infty$$

como se quería probar. ■

Ejemplo 4.3.4 Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) - te^{-t^2} & \sin(t) \\ -\sin(t) + \frac{1}{t^2+1} & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 4t^5 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Se tratará de determinar la estabilidad del sistema (4.22). En primer lugar, por el Teorema 1.2.3, bastará con determinar la estabilidad del sistema homogéneo asociado

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) - te^{-t^2} & \sin(t) \\ -\sin(t) + \frac{1}{t^2+1} & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Se definen

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B(t) = \begin{pmatrix} -te^{-t^2} & 0 \\ \frac{1}{t^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$

y se puede escribir (4.23) como $x'(t) = [A(t) + B(t)]x(t)$. Nótese que $A(t)$ y $B(t)$ son continuas en $[0, +\infty)$. Es conocido (Ejemplo 3.1.13) que todas las soluciones de $x'(t) = A(t)x(t)$ son periódicas, y por tanto están acotadas en $[0, +\infty)$. Además,

$$\int_0^{+\infty} |B(t)| dt = \int_0^{+\infty} \left(|te^{-t^2}| + \left| \frac{1}{t^2+1} \right| \right) dt = \frac{1+\pi}{2}. \tag{4.24}$$

Por el Teorema 4.3.3, se puede garantizar que todas las soluciones del sistema (4.23) están acotadas en $[0, +\infty)$ y por tanto es estable (véase Teorema 1.2.5). Aplicando el Teorema 1.2.3 se deduce que (4.22) es estable en $[0, +\infty)$, pero no se puede asegurar que sus soluciones estén acotadas al tratarse de un sistema no homogéneo (recuérdese el Ejemplo 1.1.4).

Bibliografía

[1] ARRATE, M., *Ecuaciones Diferenciales*, Universidad de Cantabria, (2002).

[2] BRAUER, F. y NOHEL, J.A., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* An Introduction-Dover Publications (1989).

[3] GÓMEZ, D., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidad de Cantabria, (2018-2019).

[4] GÓMEZ, D., *Teoría Cualitativa de EDO*, Universidad de Cantabria, (2020-2021).

[5] HALE, J., *Ordinary Differential Equations*, Krieger Publishing Company, (1980).

[6] HILL, G.W.,*On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon.* Reprinted, with some aditions, from a paper published at Cambridge U.S.A., (1877), Acta Math., Vol 8, (1886) , pp. 1-36.

[7] HIRSCH, M.W., SMALE, S., DEVANEY, R.L., *Differential Equations, Dynamical Systems An Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, 2^{nd} edition, (2004).

[8] KREŠIMIR, J., ROSENBAUM, R., *Unstable Solutions of Nonautonomous Linear Differential Equations*, SIAM Review, Vol 50, No. 3, (2008), pp. 570–584.

[9] MARKUS, L., YAMABE, H., *Global stability criteria for differential systems*, Osaka Math. J., Vol 12, (1960), pp. 305-317.

[10] MATHIEU, E., *Le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*, J. Math. Pures Appl., Vol 13, (1868), pp. 137-203 .

[11] MYINT-U, T., *Ordinary Differential Equations*, Elsevier North-Holland, (1978).

[12] NOVO, S., OBAYA, R. Y ROJO, J., *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, Editorial McGraw-Hill, Madrid, (1995).

[13] PATTY, W., *Espectro de Floquet y Lyapunov*, Proyecto de Fin de Grado (dirigido por CRUZ, E.) Universidad de San Andres, Bolivia. (2012).

[14] VINOGRAD, R.È., *On a criterion of instability in the sense of Lyapunov of the solutions of a linear system of ordinary differential equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., Vol 84, (1952), pp. 201-204.

[15] WILSON, H.K., *Ordinary Differential Equations*, Editorial Addison-Wesley Educational Publishers Inc, (1971).

[16] WU, M.Y., *A note on stability of linear time-varying systems*, IEEE Trans. Automat. Control, Vol 19, (1974), p. 162.

Apéndice A

Exponencial de una matriz.

Las referencias principales de este Apéndice han sido [11], [12], [7]

Definición A.0.1 *Sea A una matriz cuadrada. Se define su exponencial e^A mediante la serie*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots \tag{A.1}$$

Se puede probar que la serie (A.1) *es convergente, pues es necesario para la buena definición de la exponencial matricial. De manera resumida, se toma una norma matricial multiplicativa arbitraria y se tiene la siguiente desigualdad*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

y por la serie de potencias que define la exponencial de un número real,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < +\infty.$$

Por el criterio M de Weierstrass se concluye que es absolutamente convergente.

Se razona de manera similar para definir la exponencial de e^{At}

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

y para estudiar la convergencia de e^{At} para todo $t \in \mathbb{R}$.

Propiedad A.0.2 *La exponencial e^{At} cumple que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.*

<u>*Dem.*</u> *: Al ser la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ *absolutamente convergente* $\forall t \in \mathbb{R}$*, podemos derivar término a término de tal manera que*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l t^l}{l!} = Ae^{At}.$$

■

Propiedad A.0.3 *La exponencial* e^{At} *cumple* $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$*.*

<u>*Dem.*</u> *: Sean* $\phi(t) = e^{A(t+s)}$ *y* $\psi(t) = e^{At}e^{As}$*. Derivando respecto de t y por la Propiedad A.0.2 se tiene que*

$$\phi'(t) = Ae^{A(t+s)} = A\phi(t)$$
$$\psi'(t) = Ae^{At}e^{As} = A\psi(t).$$

Además, $\phi(0) = \psi(0) = e^{As}$*. Luego* $\phi(t)$ *y* $\psi(t)$ *son soluciones del mismo problema de Cauchy y por el Teorema de Existencia y Unicidad 1.2.1 son la misma,*

$$\phi(t) = \psi(t) \implies e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

■

Propiedad A.0.4 *Si dos matrices A y B conmutan (AB = BA), se cumple*

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}.$$

<u>*Dem.*</u> *: Sean* $\phi(t) = e^{(A+B)t}$ *y* $\psi(t) = e^{At}e^{Bt}$*. Derivando respecto de t y por la Propiedad A.0.2 se tiene que*

$$\phi'(t) = (A+B)e^{(A+B)t} = (A+B)\phi(t)$$
$$\psi'(t) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt} = (A+B)\psi(t).$$

Además, $\phi(0) = \psi(0) = I$*, y como en la Propiedad A.0.3, al ser* $\phi(t)$ *y* $\psi(t)$ *soluciones del mismo problema de Cauchy, son la misma,*

$$\phi(t) = \psi(t) \implies e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}.$$

La importancia de la hipótesis de la conmutatividad de A y B está en la definición de la exponencial matricial. Al definirse como una serie de potencias, para la buena definición esta, ha de exigirse que $e^{A+B} = e^{B+A}$ *y para ello se ha de cumplir que* $AB = BA$*.* ■

Propiedad A.0.5 *La exponencial* e^{At} *es invertible y se cumple que* $(e^{At})^{-1} = e^{-At} \quad \forall t \in \mathbb{R}$*.*

<u>*Dem.*</u> *: Por la Fórmula de Abel-Liouville,*

$$det(e^{At}) = det(e^{At_0})e^{\int_{t_0}^{t} traza(A(s))ds} = det(e^{At_0})e^{(t-t_0)traza(A)} \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

Al evaluar en $t_0 = 0$ y al darse $e^b \neq 0 \;\; \forall b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$det(e^{At}) = e^{t \cdot traza(A)} \neq 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

y por tanto e^{At} es invertible. Ahora por la Propiedad A.0.3,

$$e^{At}e^{-At} = e^{-At}e^{At} = e^{A(t-t)} = I \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

y por tanto $(e^{At})^{-1} = e^{-At} \;\; \forall t \in \mathbb{R}$. ∎

Propiedad A.0.6 *Si P es una matriz no singular y*

$$A = PBP^{-1}$$

entonces

$$e^A = Pe^B P^{-1}.$$

Propiedad A.0.7 *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriz cuadrada y $J_1, ..., J_k$ las cajas que constituyen la forma canónica de Jordan J de A, es decir,*

$$A = PJP^{-1}$$

con P no singular,

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & J_k \end{array}\right) \qquad y \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$$

siendo λ valor propio de A. Entonces

$$e^J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_2} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & e^{J_k} \end{array}\right).$$

Observación A.0.8 *La exponencial de una caja de Jordan*

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$$

es

$$e^{J_i} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \frac{e^{\lambda_i}}{2!} & \dots & \frac{e^{\lambda_i}}{(n_i-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i} & \frac{e^{\lambda_i}}{1!} & \dots & \frac{e^{\lambda_i}}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i} \end{pmatrix}.$$