Rankings de distribuciones de renta basados en curvas de Lorenz ordenadas: un estudio empírico[1]

SARABIA ALEGRÍA, J.M*. y PASCUAL SÁEZ, MARTA**.
Departamento de Economía. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Cantabria.
Telf.: 942 20 16 35-Fax: 942 20 16 03 • *e-mail:sarabiaj@unican.es / **e-mail:pascualm@unican.es

RESUMEN

En el siguiente trabajo se presentan diversos rankings de las regiones españolas y de países del mundo, basados en el orden de Lorenz. Se usan los datos de la distribución personal de la renta en España de Callealta, Casas y Nuñez (1996) y los datos internacionales de Jain (1975). Se trabaja con un total de seis familias paramétricas de curvas de Lorenz ordenadas. Las ordenaciones obtenidas resultan bastante estables respecto la forma funcional elegida.

Palabras Clave: Curvas de Lorenz, Orden de Lorenz, Desigualdad, Distribución Personal de la Renta.

ABSTRACT

In this paper, several rankings of the spanish regions and countries, based on Lorenz ordering are considered. We use Spanish income data from the Casas, Callealta and Núñez Study (1996) and the international data from the Jain Study (1975). The Lorenz ordering is analyzed within six families of ordered Lorenz curves. The data generated a surprisingly stable empirical result.

Códigos UNESCO: 1209, 5399.

Artículo recibido el 20 de octubre de 2000. Aceptado el 21 de febrero de 2001.

1. Introducción

Durante la última década se ha producido un creciente interés y desarrollo de la teoría estadística para inferir la dominación de una distribución (renta, salarios etc.) sobre otra.

1. Una versión preliminar de este trabajo fue presentada como Ponencia en la XIV Reunión Asepelt-España, celebrada en Oviedo los días 22 y 23 de Junio de 2000.

Para este fin, se han utilizado diversos criterios, tales como la dominación estocástica de primer y segundo orden, la dominación de Lorenz, la dominación estocástica de tercer orden (aversión a la desigualdad en las rentas bajas) etc. Algunas referencias son Atkinson (1970), Dasgupta, Sen y Starrett (1973), Sen (1973), Marshall y Olkin (1979), Arnold (1987), Beach y Davidson (1986) y Bishop, Formby y Thistle (1992). Todos los criterios citados anteriormente suponen principios bastante generales tales como el principio de transferencias de Pigou-Dalton, anonimidad, eficiencia, equidad etc.

Típicamente con las comparaciones, se busca establecer rankings de desigualdad. En este trabajo no pretendemos medir el bienestar social en su conjunto, sino tan sólo uno de sus componentes que es la desigualdad de rentas y mostraremos diferentes ordenaciones según la desigualdad. Desafortunadamente, no siempre es posible establecer ordenaciones sin ambigüedad. Shorrocks y Foster (1987), señalan que a partir de los datos de Kuznets, Atkinson encuentra que de las 66 posibles comparaciones entre parejas, sólo el 24 por ciento pueden ordenarse según el criterio de Lorenz. Esta misma situación ocurre con otro tipo de ordenaciones estocásticas. Por ejemplo, ordenaciones basadas en la dominación estocástica de primer orden dan lugar a un porcentaje de ordenaciones de entre el 75 y el 78 por ciento de todas las posibles comparaciones entre parejas, mientras que ordenaciones basadas en la dominación estocástica de segundo orden (curvas de Lorenz generalizadas) dan lugar a un porcentaje de entre el 82 y 84 por ciento de todas las parejas (Bishop, Formby y Thistle, 1991).

El presente trabajo tiene un doble objetivo. Por un lado, se ajustan y comparan seis familias paramétricas de curvas de Lorenz ordenadas. Para ello se utilizan dos importantes conjuntos de datos: los datos sobre la distribución personal de la renta en España de Callealta, Casas y Nuñez (1996), y los datos internacionales propuestos por Jain (1975) y analizados por Shorrocks (1983). Puesto que se trabaja con familias de curvas de Lorenz ordenadas, es posible establecer ordenaciones sin ambigüedad. Como es obvio, los diferentes modelos de curvas de Lorenz suponen diferentes modelos para la distribución de rentas subyacente. La segunda parte del trabajo se dedica a una propiedad ordinal no muy explorada en los estudios de desigualdad. Si bien, existe una amplia literatura relativa a la comparación de formas funcionales paramétricas para la distribución subyacente (McDonald (1984), McDonald y Ransom (1979), Callealta, Casas y Nuñez (1996)), no es habitual encontrar estudios acerca de las ordenaciones a las que dan lugar las diferentes formas paramétricas. En esta segunda parte se explora este aspecto. Para ello, se obtienen y estudian las diferentes ordenaciones a las que dan lugar las seis formas paramétricas elegidas, comparándolas a su vez con las propuestas de ordenación de Callealta, Casas y Nuñez (1996). Una de las conclusiones del trabajo, es que entre grupos con una desigualdad moderada (con valores del índice de Gini entre 0.20 y 0.45), las ordenaciones obtenidas resultan bastantes estables, para el caso de los datos españoles. Por otro lado, existen familias de curvas que dan lugar a ordenaciones muy similares.

El trabajo se estructura de la siguiente manera. La sección 2 introduce la teoría básica sobre curvas de Lorenz y sobre comparaciones. La sección 3 presenta las seis familias paramétricas de curvas de Lorenz que se utilizan como instrumento de comparación, y se presentan algunos detalles sobre el proceso de estimación. Las secciones 4 y 5 se dedican al análisis empírico de los dos conjuntos de datos. Finalmente, en la sección 6 se presentan algunas conclusiones.

2. Resultados previos

En este trabajo consideramos la curva de Lorenz de acuerdo con la definición de Gastwirth (1971). Para una función de distribución $F_X(x)$ con soporte sobre un subconjunto de los números reales positivos, y con esperanza finita μ, se define la curva de Lorenz como,

$$L_X(p) = \mu^{-1} \int_0^p F_X^{-1}(x)dx; \quad 0 \leq p \leq 1,$$

donde,

$$F_X^{-1}(x) = \inf\{y : F_X(y) \geq x\}.$$

A la hora de elegir un criterio de ordenación tenemos diversas opciones, como anteriormente se ha comentado. Para el análisis de la desigualdad, el criterio adecuado es el de dominación de Lorenz, que da lugar a un orden parcial. De acuerdo con este criterio, una distribución de rentas *X* es menos desigual que otra *Y* en el sentido de Lorenz, si la curva de Lorenz asociada a *X* está por encima de la curva de Lorenz asociada a *Y*, es decir,

$$L_X(p) \geq L_Y(p) \quad \forall\ p \in [0,1].$$

Las ordenaciones obtenidas mediante el orden de Lorenz son las mismas que las que establecen los índices de desigualdad que son invariantes frente a cambios de escala y verifican el principio de transferencias de Pigou-Dalton.

3. Familias paramétricas de curvas de Lorenz ordenadas

En este apartado se presentan seis familias paramétricas de curvas de Lorenz ordenadas que serán utilizadas en el análisis empírico. La primera curva recibe el nombre de curva de Lorenz exponencial y viene dada por:

$$L_1(p;a)=\frac{e^{ap}-1}{e^{a}-1},\quad a>0.$$

Dicha familia fue propuesta por Chotikapanich (1993) y posteriormente ampliada dentro de una familia jerárquica de curvas ordenadas por Sarabia, Castillo y Slottje (2001). La familia está ordenada respecto del parámetro a, y el caso límite $a = 0$ corresponde a la recta de equidistribución. Dicha familia da lugar a buenos ajustes en una gran variedad de situaciones como prueban Chotikapanich (1993) y Sarabia, Castillo y Slottje (2001). El índice de Gini viene dado por:

$$G_1(a)=\frac{a(e^{a}+1)-2a(e^{a}-1)}{a(e^{a}-1)}.$$

El parámetro a se estima por mínimos cuadrados no lineales y la convergencia del método es bastante rápida según prueban los autores anteriores.

La segunda familia corresponde a la curva de Lorenz de la distribución clásica de Pareto (o distribución de Pareto tipo I en la jerarquía establecida por Arnold (1983)) y viene dada por:

$$L_2(p;\acute{a})=1-(1-p)^{\acute{a}},\ 0<\acute{a}\le 1.$$

La curva está nuevamente ordenada respecto del parámetro a, y el índice de Gini viene dado por:

$$G_2(\acute{a})=\frac{1-\acute{a}}{1+\acute{a}}.$$

La distribución de Pareto se la considera como la distribución de las rentas altas. Esto se pone de manifiesto en las investigaciones desarrolladas por Davis (1941), Mandelbrot (1960) y Budd (1970). Sin embargo y tal como veremos más adelante, las ordenaciones a las que dan lugar no se diferencian mucho de las ordenaciones de otras distribuciones con mejor ajuste en la parte central de la distribución.

Villaseñor y Arnold (1989) especifican una clase de curvas de Lorenz de tipo elíptico. Un caso particular de la clase anterior es la curva de Lorenz circular, que viene dada por:

$$L_3(p;a)=1-a-\sqrt{(1-a)^2+2ap-p^2},\ \ a<0.$$

Esta familia está nuevamente ordenada respecto del parámetro a, y ha sido recientemente redescubierta por Ogwang y Rao (1993). El valor del índice de Gini viene dado por:

$$G_3(a) = -1 + 2a + \left(1 - 2a + 2a^2\right)\left[arctg\left(\frac{a}{-1+a}\right) + arctg\left(\frac{-1+a}{a}\right)\right].$$

La cuarta curva de Lorenz considerada corresponde a la distribución log-normal cuya expresión es:

$$L_4(p;\sigma) = \Phi\left(\Phi^{-1}(p) - \sigma\right), \quad \sigma > 0,$$

donde $\Phi(x)$ representa la función de distribución de una variable normal de media 0 y desviación típica 1. Dicha curva está ordenada respecto del parámetro σ, y el valor del índice de Gini es:

$$G_4(\sigma) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 1.$$

Para la estimación del parámetro σ, utilizaremos un método eficiente de estimación propuesto por Castillo, Hadi y Sarabia (1998). El método, además de proporcionar estimadores explícitos, permite calcular fácilmente la varianza del estimador mediante técnicas de remuestreo. En una primera etapa, y a partir del dato (p_i, q_i), se obtiene un estimador inicial de σ por medio de:

$$\hat{\sigma}_i = \Phi^{-1}(p_i) - \Phi^{-1}(q_i), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Obsérvese que el error de estimación en la pareja i-ésima es cero. En una segunda etapa, se obtiene el estimador final de σ combinando los n estimadores iniciales mediante alguna función robusta, como puede ser la mediana o la mínima mediana de los cuadrados propuesta por Rousseuw (1984). La desviación típica del estimador se obtiene fácilmente mediante la técnica del Bootstrap.

La siguiente curva de Lorenz corresponde a la propuesta de Gupta (1984):

$$L_5(p;\alpha) = p\alpha^{p-1}, \quad \alpha > 1.$$

La familia está nuevamente ordenada respecto del parámetro α y la expresión del índice de Gini es:

$$G_5(\alpha) = 1 - 2\left(\frac{1 + \alpha \log(\alpha) - \alpha}{\alpha \log(\alpha)^2}\right).$$

La curva ha sido ajustada según el método propuesto por Gupta (1984).

La última curva de Lorenz considerada es la curva potencial:

$$L_6(p;a) = p^a, \quad a \geq 1,$$

cuyo índice de Gini es:

$$G_6(a) = \frac{a-1}{a+1}.$$

Esta familia ha sido utilizada por Casas, Herrerías y Nuñez (1990), y Herrerías y García (2000). Esta curva da lugar a una función de distribución de tipo potencial, con soporte finito. El parámetro a se estima por mínimos cuadrados.

Otras propuestas de formas paramétricas para la curva de Lorenz se encuentran en Arnold et al. (1987), Basmann et al. (1990), Ortega et al. (1991), Ryu y Slottje (1996) y Sarabia, Castillo y Slottje (1999), entre otras. Asimismo, Esteban et al. (2000) realizan un estudio teórico, acerca de los sistemas generadores de renta así como de las diferentes distribuciones de probabilidad descriptivas de la distribución de renta.

El hecho de trabajar con familias paramétricas ordenadas de curvas de Lorenz permite ordenar distribuciones de renta según la desigualdad, si bien limita la forma funcional. En general, esto no ocurre si se trabaja directamente con los datos muestrales ni con otro tipo de especificaciones funcionales directas sobre la renta, como se pone de manifiesto en Callealta, Casas y Nuñez (1996). Si se trabaja con modelos de distribuciones más complejos, si bien no siempre ordenados, se pueden obtener mejores ajustes. En este sentido, los modelos log-Student y de Dagum, proporcionan muy buenos ajustes, según prueban Callealta, Casas y Nuñez (1996).

4. Breve referencia metodológica sobre los datos

Los datos utilizados corresponden a la distribución de la renta “per capita” disponible de España, propuestos por Callealta, Casas y Nuñez (1996), dentro del trabajo “Distribución Personal de la Renta en España”, dirigido por Bernardo Pena. Los datos corresponden a las distribuciones de la renta derivadas de las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares, y compatibilizadas con los agregados deducidos a partir de las Contabilidades Nacionales en diversas categorías: nivel nacional, Comunidades Autónomas, categorías socioprofesionales y clases de hábitat. Una vez detectada la ocultación en los datos de renta, dichos autores proceden a un proceso de corrección mediante una tasa de ocultación progresiva.

La información básica procede de las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares (EBPF) realizadas en 1973, 1980 y 1990. El ámbito poblacional es idéntico en las EBPF de 1973-74, 1980-81 y 1990-91, es decir, las unidades de análisis son los hogares privados que residen en viviendas familiares principales, investigándose todas las personas que resultan ser miembros del hogar. El ámbito geográfico es casi común en las tres encuestas, con la única excepción de la exclusión de Ceuta y Melilla en la EBPF de 1973-74. El ámbito temporal es en las tres encuestas un periodo continuo de doce meses, idéntico para las EBPF de 1980-81 y 1990-91, y con un desfase de un trimestre para la de 1973-74. En ninguno de los tres casos este periodo coincide con el año de calendario que comienza el 1 de enero y termina el 31 de diciembre. Sin embargo, se considera que los datos de las EBPF se refieren al año en el que se realizan la mayor parte de las observaciones. Esta asignación es más fácil de admitir para las encuestas de 1990-91 y 1980-81 que comenzaron en abril, y bastante más discutible para la de 1973-74 que comenzó en julio.

Para la clasificación de los hogares por categorías socioprofesionales se toman los ingresos de cada una de las personas que componen el hogar, se elige a una de ellas como sustentador principal, y luego se tienen en cuenta un conjunto de características de esta persona para clasificarla en una categoría socioprofesional, que es a su vez la que se asigna al hogar del que forma parte. Entre las características del sustentador principal que se recogen en las EBPF cabe destacar:

- Relación con la actividad económica.
- Ocupación, profesión o puesto de trabajo.
- Situación profesional.
- Nivel de instrucción.
- Rama de actividad del establecimiento donde trabaja.

De este modo, el hogar en su conjunto se clasifica en la categoría socioprofesional que corresponde al sustentador principal del mismo. Las diferentes categorías socioprofesionales y clases de hábitat se encuentran recogidas en las correspondientes tablas.

Para nuestro estudio hemos utilizado los datos correspondientes a la renta “per capita” disponible en 1973, 1980 y 1990, en pesetas constantes del año base 1986, teniendo en cuenta las aclaraciones anteriores.

Los datos internacionales aparecen en Shorrocks (1983). La información procede del estudio realizado por Jain (1975). Los 19 países incluidos son especialmente interesantes porque corresponden a grupos con diferente grado de desigualdad. Los datos estaban divididos en 11 grupos de ingresos, correspondientes a los percentiles 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 y 95.

5. Ajuste y rankings de distribuciones

Comenzaremos con un breve comentario relativo a la bondad de ajuste de las 6 curvas propuestas. Como criterio de bondad de ajuste se ha elegido la suma de cuadrados de los residuos (analizando su media y su desviación típica). Los resultados obtenidos referentes a 1990 se encuentran en el ANEXO 1[2]. Tanto en lo relativo a los datos a nivel autonómico, como en las categorías socioprofesionales y clases de hábitat, la curva de la distribución Log-normal proporciona los mejores ajustes en los tres períodos considerados. Las curvas Circular y Exponencial (en este orden) dan igualmente lugar a ajustes bastante aceptables. La siguen las curvas de Pareto, de Gupta y Potencial. En lo relativo a los datos internacionales, la Log-normal da lugar a los mejores ajustes, excepto en países con alta desigualdad, siempre considerando los modelos elegidos.

A continuación analizaremos la desigualdad en las distribuciones de renta “per capita” para las diferentes Comunidades Autónomas, Categorías Socioprofesionales y Clases de Hábitat de España. De este modo, centramos nuestra atención en el análisis transversal de la desigualdad registrada utilizando distintas familias paramétricas. Como una primera aproximación para realizar el análisis transversal se ha procedido a la ordenación de las regiones y grupos a partir de las diferentes estimaciones correspondientes a las 6 curvas. Los resultados obtenidos se encuentran en las TABLAS 1, 2 y 3.

En contra de lo que se podía esperar, las ordenaciones correspondientes a las 6 curvas son bastante estables, en especial en las partes altas y bajas de los rankings, con algunas excepciones. Esto ocurre en los tres períodos considerados.

Para el año 1973, existe unanimidad en todas las formas funcionales y es la Comunidad Balear la que tiene menor desigualdad en su distribución de renta, seguida por Cataluña. Es a partir del tercer lugar donde surgen las primeras discrepancias. A la vista de la magnitud de las correlaciones, podemos afirmar que en todos los casos el grado de concordancia es superior al 85 por ciento y en 11 de las 15 combinaciones posibles es superior al 90 por ciento. Aunque el grado de concordancia de las ordenaciones es bastante elevado, si continuamos con el análisis de los coeficientes de correlación de estas ordenaciones, observamos que la mayor concordancia en los tres periodos considerados se produce entre las familias Exponencial y Circular y la menor entre el modelo Potencial y Gupta.

Casas, Callealta y Nuñez utilizando la renta “per capita” media disponible, el percentil 10, la mediana y el percentil 90, concluyen que los tres primeros lugares los ocupan la Comunidad de Madrid, País Vasco y Cataluña, siguiéndoles muy de cerca Baleares y los cuatro últimos puestos corresponden a Castilla-La Mancha, Murcia, Andalucía y

2. Las tablas relativas a la bondad de ajuste de las 6 curvas propuestas para los años 1973 y 1980, que no aparecen en el texto, están disponibles en una versión más amplia de este trabajo.

Tabla 1: Ordenación de las categorías profesionales* según las diferentes familias paramétricas 1973, 1980 y 1990.

		Familias Paramétricas					
		Exponenc.	**Pareto**	**Circular**	**Gupta**	**Potencial**	**Lognorm.**
Rankings	**1973**	JNA ONA RAA EASA CMNA NASA EACA CSNA NACA OTRO	ONA JNA RAA EASA CMNA NASA EACA CSNA NACA OTRO	JNA ONA EASA CMNA NASA EACA CSNA NACA OTRO RAA	JNA ONA CMNA RAA EASA NASA EACA CSNA NACA OTRO	JNA ONA CMNA RAA EASA NASA EACA CSNA NACA OTRO	ONA JNA RAA CMNA EASA NASA EACA CSNA NACA OTRO
	1980	JNA ONA CMNA RAA NASA EASA CSNA NACA OTRO EACA	JNA ONA CMNA RAA EASA NASA CSNA NACA OTRO EACA	JNA ONA CMNA RAA NASA EASA CSNA NACA OTRO EACA	JNA ONA CMNA RAA NASA EASA CSNA EACA NACA OTRO	JNA ONA CMNA RAA NASA CSNA EASA EACA NACA OTRO	JNA ONA CMNA RAA NASA EASA CSNA NACA EACA OTRO
	1990	JNA ONA EASA CMNA RAA NASA CSNA OTRO NACA EACA	JNA ONA EASA CMNA RAA CSNA NASA OTRO EACA NACA	JNA ONA EASA CMNA RAA NASA CSNA OTRO NACA EACA	JNA ONA CMNA EASA NASA CSNA RAA NACA OTRO EACA	JNA ONA CMNA EASA CSNA NASA RAA NACA OTRO EACA	JNA ONA CMNA EASA RAA NASA CSNA OTRO NACA EACA

* NOTA: Las abreviaturas anteriores hacen referencia a las siguientes categorías socioprofesionales:
EACA: Empresarios agrarios con asalariados, y directores, gerentes y personal titulado agrario
EASA: Empresarios agrarios sin asalariados
RAA: Resto de activos agrarios
NACA: Empresarios no agrarios con asalariados y profesionales liberales con o sin asalariados
NASA: Empresarios no agrarios sin asalariados y trabajadores independientes
CSNA: Directivos, gerentes y cuadros superiores no agrarios y profesionales de las Fuerzas Armadas
CMNA: Cuadros medios y resto del personal administrativo, comercial y técnico
JNA: Contramaestres, capataces y jefes de grupo no agrarios
ONA: Obreros no agrarios y resto de trabajadores de los servicios
OTRO: Activos no clasificables, incluso parados y no activos

Tabla 2: Ordenación de las clases de hábitat según las diferentes familias paramétricas. Años 1973, 1980 y 1990.**

		Familias Paramétricas					
		Exponenc.	**Pareto**	**Circular**	**Gupta**	**Potencial**	**Lognorm.**
Rankings	**1973**	TIPO3SC TIPO1 TIPO2 TIPO4CC	TIPO1 TIPO3SC TIPO2 TIPO4CC	TIPO3SC TIPO1 TIPO2 TIPO4CC	TIPO3SC TIPO2 TIPO1 TIPO4CC	TIPO3SC TIPO2 TIPO1 TIPO4CC	TIPO3SC TIPO1 TIPO2 TIPO4CC
	1980	TIPO3SC TIPO2 TIPO4CC TIPO1	TIPO3SC TIPO2 TIPO4CC TIPO1	TIPO3SC TIPO2 TIPO4CC TIPO1	TIPO3SC TIPO4CC TIPO2 TIPO1	TIPO3SC TIPO4CC TIPO2 TIPO1	TIPO3SC TIPO4CC TIPO2 TIPO1
	1990	TIPO1 TIPO2 TIPO3SC TIPO4CC	TIPO1 TIPO2 TIPO3SC TIPO4CC	TIPO1 TIPO2 TIPO3SC TIPO4CC	TIPO1 TIPO2 TIPO3SC TIPO4CC	TIPO1 TIPO2 TIPO3SC TIPO4CC	TIPO1 TIPO2 TIPO3SC TIPO4CC

** NOTA: Las abreviaturas anteriores hacen referencia a las siguientes clases de hábitat:
Tipo 1: Municipios de hasta 2000 habitantes
Tipo 2: Municipios de 2001 hasta 10000 habitantes
Tipo 3SC: Municipios de 10001 hasta 50000 habitantes, excepto capitales
Tipo 4CC: Municipios de más de 50000 habitantes y capitales

Extremadura. Los resultados aquí obtenidos son consistentes con las observaciones anteriores.

Para el año 1980 en donde ya se dispone información para Ceuta y Melilla, se pone de manifiesto que el País Vasco y La Rioja ocupan el primer y segundo lugar respectivamente en todas las familias paramétricas estudiadas y el último lugar lo ocupa la Comunidad de Madrid. De manera análoga a como hemos hecho para los periodos 1973 y 1980, obtenemos la ordenación para 1990. Aunque en 1980 el grado de correlación entre las ordenaciones disminuye, especialmente con la familia potencial, en 1990 es siempre superior al 80 por ciento, llegándose a alcanzar valores del 99 por ciento.

En cuanto a las categorías socioprofesionales, y teniendo en cuenta las correlaciones, podemos afirmar que en 1973 el grado de concordancia es superior al 60 por ciento y en 10 de las 15 combinaciones posibles es superior al 93 por ciento. Asimismo, la mayor concordancia se produce entre las familias Gupta y Potencial y la menor entre los modelos Circular y Gupta, y Circular y Potencial. Tanto en 1980 como en 1990 el grado de correlación entre las ordenaciones es siempre superior al 90 por ciento, llegándose a alcanzar valores del 100 por ciento. No obstante, dentro de esta estabilidad en la ordenación, existe un grupo de curvas que presentan un mayor consenso, correspondientes a las familias

Tabla 3: Ordenación de las CCAA según las diferentes familias paramétricas para el año 1990

		Familias Paramétricas					
	1990	**Exponenc.**	**Pareto**	**Circular**	**Gupta**	**Potencial**	**Lognorm.**
Rankings		Asturias	Asturias	Asturias	Asturias	Asturias	Asturias
		Navarra	Navarra	Navarra	Navarra	Navarra	Navarra
		Aragón	P.Vasco	Aragón	Aragón	Aragón	Aragón
		P.Vasco	Aragón	C.Valenc.	C.Valenc.	C.Valenc.	P.Vasco
		C.Valenc.	Cantabria	P.Vasco	Rioja	Rioja	C.Valenc.
		Cantabria	Baleares	Cantabria	Galicia	Galicia	Cantabria
		Rioja	C.Valenc.	Rioja	P.Vasco	P.Vasco	Rioja
		Galicia	Galicia	Galicia	Cantabria	Cantabria	Galicia
		Baleares	Rioja	Baleares	Cataluña	Cataluña	Baleares
		Cataluña	Cataluña	Cataluña	C.Mancha	C.Mancha	Cataluña
		Extremad.	Canarias	Extremad.	Cast-León	Cast-León	Cast-León
		Cast-León	Cast-León	Cast-León	Baleares	Madrid	Extremad.
		Canarias	Extremad.	España	Extremad.	Extremad.	C.Mancha
		España	España	Canarias	Madrid	Baleares	España
		C.Mancha	Andalucía	C.Mancha	España	España	Canarias
		Andalucía	C.Mancha	Madrid	Canarias	Canarias	Madrid
		Madrid	Madrid	Andalucía	Andalucía	Andalucía	Andalucía
		Murcia	Murcia	Murcia	Murcia	Murcia	Murcia
		CYM	CYM	CYM	CYM	CYM	CYM

Lognormal, Circular, Exponencial y Pareto. Mientras que las ordenaciones a las que dan lugar las curvas Gupta y Potencial son las más discordantes con el resto.

En el ANEXO 2 (TABLAS 8 y 9) se recogen las correlaciones de rangos de Spearman entre cada pareja de ordenaciones correspondientes a las Curvas de Lorenz ajustadas para el año 1990 por Comunidades Autónomas y categorías socioprofesionales.

Si comparamos estas ordenaciones de categorías socioprofesionales con las realizadas por Casas, Callealta y Nuñez utilizando el índice de Gini, observamos que nuestros resultados son consistentes con los obtenidos por los citados autores.

Análogamente, hemos analizado la desigualdad en la distribución de la renta per cápita de las distintas clases de hábitat que se han definido. Se ha procedido a la ordenación de los grupos considerados a partir de las diferentes estimaciones correspondientes a las 6 curvas. Asimismo, en el ANEXO 1 (TABLA 6) se incluye la suma de los cuadrados de los residuos de las curvas ajustadas. En todas las formas funcionales (excepto Pareto para 1973) existe unanimidad sobre la clase de hábitat que presenta menor desigualdad en su distribución de renta ("Municipios de 10001 hasta 50000 habitantes, excepto capitales" para 1973 y 1980 y "Municipios de hasta 2000 habitantes" para 1990). Tal y como podemos comprobar, el grado de concordancia entre las ordenaciones proporcionadas oscila entre el 40 por ciento y el 100 por ciento. Las familias más discordantes son Pareto y Gupta, cuyo ajuste es peor tal y como muestra la suma de los cuadrados de los residuos. Es importante señalar que en 1990, el grado de concordancia es el 100 por ciento en todas las familias consideradas.

Por último y con objeto de realizar una comparación de la desigualdad en la distribución de la renta "per cápita" de las categorías socioprofesionales con la registrada a nivel nacional, presentamos la siguiente tabla formada por los índices de Gini poblacionales para España correspondientes a cada forma funcional, en los tres períodos considerados.

Tabla 4: Indices de Gini poblacionales correspondientes a cada forma funcional para España

		Indices de Gini				
		Exponenc.	**Pareto**	**Circular**	**Lognorm.**	**Observado**
Años	1973	0.375	0.343	0.374	0.375	0.386
	1980	0.364	0.332	0.363	0.366	0.375
	1990	0.340	0.306	0.339	0.343	0.349

La tabla anterior, indica que se ha producido una disminución global de la desigualdad de rentas en España entre 1973 y 1990 y por tanto, un aumento de bienestar con relación al nivel de vida-renta. Análogamente, este análisis puede repetirse para cada una de las Comunidades Autónomas y para los periodos estudiados.

Se observa que los índices teóricos de Gini de todos los modelos paramétricos estudiados, están por debajo del coeficiente de Gini observado. Este hecho ha sido igualmente señalado por Prieto y Pena (2000), a partir de modelos para la distribución de la renta basados en funciones de densidad y funciones de distribución, como por ejemplo la distribución de Singh-Maddala y la distribución GB2 propuesta por McDonald (1984). Según demuestran Chakravarty y Eichhron (1994), si un índice de desigualdad verifica la propiedad de simetría y el principio de transferencias de Pigou-Dalton, bajo un esquema de tipo aditivo, la desigualdad verdadera o teórica de la renta, es más pequeña que la desigualdad de renta observada.

Por último, pasamos a comentar los resultados obtenidos en el caso internacional. Tal y como hemos señalado anteriormente, el interés de este estudio reside en que los 19 países incluidos en la muestra presentan diferentes grados de desigualdad y se ha procedido a la ordenación de los países a partir de las diferentes estimaciones correspondientes a las 6 curvas. La TABLA 5 corresponde a la ordenación de los países según las diferentes familias paramétricas Asimismo, en el ANEXO 1 (TABLA 7) y en el ANEXO 2 (TABLA 10) se incluyen, respectivamente, la suma de los cuadrados de los residuos en miles de las curvas ajustadas y las correlaciones de rangos de Spearman entre cada pareja de ordenaciones.

TABLA 5: Ordenación de los países según las diferentes familias paramétricas

		Familias Paramétricas					
	Países	**Exponenc.**	**Pareto**	**Circular**	**Gupta**	**Potencial**	**Lognorm.**
Rankings		Japón	Japón	Japón	Japón	Japón	Japón
		Noruega	Dinamarca	R.Unido	Indonesia	Indonesia	R.Unido
		R.Unido	Noruega	Noruega	R.Unido	R.Unido	Noruega
		Dinamarca	N.Zelanda	Dinamarca	Dinamarca	Dinamarca	Dinamarca
		N.Zelanda	Suecia	N.Zelanda	India	India	N.Zelanda
		Suecia	R.Unido	Suecia	Suecia	Sri Lanka	Suecia
		Sri Lanka	Sri Lanka	Sri Lanka	Sri Lanka	Tanzania	Sri Lanka
		Panamá	Finlandia	Panamá	N.Zelanda	Suecia	Indonesia
		Holanda	Holanda	Indonesia	Tanzania	N.Zelanda	Panamá
		Indonesia	Panamá	Holanda	Noruega	Túnez	India
		India	Uruguay	India	Túnez	Noruega	Finlandia
		Finlandia	Túnez	Finlandia	Panamá	Panamá	Túnez
		Uruguay	India	Uruguay	Holanda	Holanda	Uruguay
		Túnez	Malasia	Túnez	Kenia	Kenia	Malasia
		Malasia	Indonesia	Malasia	Malasia	Malasia	Holanda
		Tanzania	Colombia	Tanzania	Uruguay	Uruguay	Tanzania
		Colombia	Tanzania	Colombia	Colombia	Colombia	Colombia
		Kenia	Brasil	Kenia	Finlandia	Brasil	Kenia
		Brasil	Kenia	Brasil	Brasil	Finlandia	Brasil

En todas las formas funcionales existe unanimidad sobre el país que presenta menor desigualdad en su distribución de renta (Japón), pero difieren ligeramente en lo referente al país con mayor desigualdad. Tal y como podemos comprobar, el grado de concordancia entre las ordenaciones proporcionadas oscila entre el 48.2 por ciento y el 99.6 por ciento. De nuevo la familia más discordante es la Potencial, cuyo ajuste es peor tal y como muestra la suma de los cuadrados de los residuos.

6. Conclusiones

En este trabajo se han presentado diversos rankings de las Comunidades Autónomas, categorías socioprofesionales y clases de hábitat españoles y de países del mundo, basados en el orden de Lorenz. Se han ajustado y comparado seis familias paramétricas de curvas de Lorenz ordenadas y se han estudiado las ordenaciones a las que dan lugar las seis formas funcionales. En cuanto a la bondad de ajuste, se pone de manifiesto que la distribución

Log-normal da lugar a los mejores ajustes, si consideramos únicamente las seis formas paramétricas estudiadas.

Por otro lado, podemos afirmar que existe estabilidad en las ordenaciones obtenidas y son consistentes con las ordenaciones de Callealta, Casas y Nuñez (1986). En algunas situaciones existe unanimidad total, como es el caso de las clases de hábitat, donde el coeficiente de correlación de Spearman es 1. Dentro de esta estabilidad en la ordenación, existe un grupo de curvas que presentan mayor consenso, correspondientes a las familias Lognormal, Circular, Exponencial y Pareto. Las ordenaciones a las que dan lugar las curvas Gupta y Potencial son las más discordantes con el resto.

Además, se observa que los índices teóricos de Gini de todos los modelos paramétricos de curvas de Lorenz estudiados, están por debajo del índice de Gini observado, afirmación que es consistente con otros estudios sobre la distribución de la renta.

Agradecimientos

Los autores agradecen los comentarios de un evaluador anónimo que han contribuido en la mejora del trabajo.

Bibliografía

ARNOLD, B.C. (1983): *Pareto Distributions*. International Cooperative Publishing House, Fairland, MD.

ARNOLD, B.C. (1987): *Majorization and the Lorenz Curve: A Brief Introduction*. Springer Verlag, New York.

ATKINSON, A. (1970): On the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, 2, 244-263.

BASMANN, R.L.,HAYES, K.J., SLOTTJE, D.J., JOHNSON, J.D. (1990): A General Functional Form for Approximating the Lorenz Curve. *Journal of Econometrics,* 43, 77-90.

BEACH, C.M., DAVIDSON, R. (1986): Distribution-Free Statistical Inference with Lorenz Curves and Incomes Shares. *Review of Economic Studies*, 50, 723-764.

BISHOP, J., FORMBY, J., THISTLE, P. (1991): Rank Dominance and International Comparisons of Income Distributions. *European Economic Review*, 35, 1399-1409.

BISHOP, J., FORMBY, J., THISTLE, P. (1992): Convergence of the South and Non-South Income Distributions, 1969-1979. *American Economic Review*, 82, 262-272.

CALLEALTA, F.J., CASAS, J.M., NUÑEZ, J. (1996): Distribución de la Renta per capita Disponible en España: Descripción, Desigualdad y Modelización. En: *Distribución Personal de la Renta en España*, Cap. 5, B. Pena (director): Pirámide, Madrid.

ÍNDICE

CASAS, J.M., HERRERÍAS, R., NÚÑEZ, J.J. (1997): Familias de formas funcionales para estimar la curva de Lorenz. *Anales de Economía Aplicada, Actas IV Reunión de Asepelt-España*.

CASTILLO, E., HADI, A.S., SARABIA, J.M. (1998): A Method for Estimating Lorenz Curves. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 27, 2037-2063.

CHAKRAVARTY, S.R., EICHHRON, W. (1994): Measurement of Income Inequality: Observed versus True Data. En: *Models and Measurement of Welfare and Inequality*, W. Eichhron Editor. Springer-Verlag, Berlín.

CHOTIKAPANICH, D., (1993): A comparison of Alternative Functional Forms for the Lorenz Curves. *Economic Letters*, 41, 129-138.

DASGUPTA, P, SEN, A. STARRETT, D. (1973): Notes on the Measurement of Inequality. *Journal of Economic Theory*, 6, 180-187.

ESTEBAN GARCÍA, J., LÓPEZ RODRÍGUEZ, M.I., RUÍZ PONCE, F. (2000): Una Revisión de los Sistemas Generadores y Modelos de Probabilidad Descriptivos de la Distribución de la Renta. *Estudios de Economía Aplicada*, 14, 47-72.

GASTWIRTH, J.L. (1971): A General Definition of the Lorenz Curve. *Econometrica*, 39, 1037-1039.

GUPTA, M.R. (1984): Functional Form for Estimating the Lorenz Curve. *Econometrica*, 52, 1313-1314.

HERRERÍAS, R., GARCÍA, R.M. (2000): Análisis de la Desigualdad de la Renta en Granada, a partir de los Datos de la E.P.F. y Diferentes Estimaciones de la Curva de Lorenz. *Anales de Economía Aplicada, Actas XIV Reunión de Asepelt-España.*

JAIN, S. (1975): *Size Distribution of Income: A Compilation of Data*. Washington: The World Bank.

MARSHALL, A.W., OLKIN, I. (1979): *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*. Academic Press, New York.

McDONALD, J.B. (1984): Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income. *Econometrica,* 52, 647-663.

McDONALD, J.B., RANSOM, M.R. (1979): Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution of Income. *Econometrica,* 47, 1513-1525.

OGWANG, T., RAO, U.L.G. (1993): A New Functional Form for Aproximating the Lorenz Curve. *Economic Letters,* 52, 21-29.

PENA TRAPERO, B., PRIETO ALÁIZ, M. (2000): Repercusiones de la Ocultación de Renta sobre la Medición de la Desigualdad. *Estudios de Economía Aplicada*, 14, 153-172.

ROUSSEEUW, P.J. (1984): Least Median of Squares Regression. *Journal of the American Statistical Association*, 79, 871-880.

RYU, H., SLOTTJE, D. (1996): Two Flexible Functional Forms for Approximating the Lorenz Curve. *Journal of Econometrics*, 72, 251-274.

ÍNDICE

SARABIA, J.M., CASTILLO, E. (1998): Curvas de Lorenz de Pareto Generalizadas. Aplicación al Estudio de la Desigualdad y la Pobreza en España. *Actas de XII Reunión Asepelt España. Córdoba*.

SARABIA, J.M., CASTILLO, E., SLOTTJE, D.J. (1999): An Ordered Family of Lorenz Curves. *Journal of Econometrics*, 91, 43-60.

SARABIA, J.M., CASTILLO, E., SLOTTJE, D.J. (2001): An Exponential Family of Lorenz Curves. *Southern Economic Journal*. En prensa.

SEN, A. (1973): *The Economics of Inequality*. Oxford University Press, Oxford.

SHORROCKS, A.F. (1983): Ranking Income Distributions. *Economica,* 50, 3-17.

SHORROCKS, A.F., FOSTER, J.E. (1987): Transfer Sensitive Inequality Measures. *Review of Economic Studies,* 54, 485-497.

VILLASEÑOR, J.A., ARNOLD, B.C. (1989): Elliptical Lorenz Curves*. Journal of Econometrics*, 40, 327-338.

ANEXO 1: MEDIDAS DE BONDAD DE AJUSTE DE LAS CURVAS AJUSTADAS

Tabla 6: Suma de los Cuadrados de los Residuos (en miles) de las Curvas Ajustadas. Año 1990. Categorías Socioprofesionales, Clases de Hábitat y Comunidades Autónomas.

		Familias Paramétricas					
		Exponenc.	Pareto	Circular	Gupta	Potencial	Lognorm.
1990	EACA	1,978	39,682	0,646	15,023	329,053	0,069
	EASA	1,807	27,639	3,722	27,382	141,054	0,242
	RAA	3,336	20,539	2,974	32,203	175,555	0,263
	NACA	5,528	17,638	2,557	28,685	304,372	0,747
	NASA	2,943	23,37	1,731	20,729	212,87	0,136
Categ.	CSNA	2,451	27,081	1,112	14,399	237,312	0,239
Socioprof.	CMNA	4,657	13,545	4,092	23,896	222,879	0,184
	JNA	1,039	20,918	2,827	12,09	86,492	0,089
	ONA	1,984	23,309	1,793	17,469	156,077	0,021
	OTRO	3,793	21,768	2,937	50,578	179,72	3,082
	MEDIA	2,951	23,548	2,439	24,245	204,538	0,507
	D.TIPICA	1,322	6,661	1,047	10,836	69,799	0,879
1990	TIPO1	2,933	17,166	3,292	26,003	146,244	0,291
	TIPO2	4,562	16,099	3,353	27,593	216,331	0,606
Clase	TIPO3SC	4,327	17,745	2,937	32,906	210,789	0,502
De	TIPO4CC	4,549	19,665	2,527	36,095	233,004	0,438
Hábitat	MEDIA	4,092	17,668	3,027	30,649	201,592	0,459
	D.TIPICA	0,676	1,294	0,328	4,052	32,984	0,114
1990	España	4,39	19,11	2,55	32,92	228,13	0,45
	Andalucía	5,39	18,03	2,97	39,23	249,99	0,61
	Aragón	3,33	15,34	4,62	30,74	132,76	0,44
	Asturias	1,96	19,19	2,28	9,80	167,57	0,18
	Baleares	2,45	24,76	2,80	72,84	120,82	0,17
	Canarias	2,49	30,38	1,63	41,87	190,62	0,05
	Cantabria	2,53	22,46	2,09	24,98	166,36	0,12
	C. León	4,10	20,07	2,49	31,95	222,61	0,46
	C. Mancha	8,73	7,66	7,95	40,05	296,16	2,64
	Cataluña	3,63	19,21	2,32	21,01	221,37	0,40
CCAA.	C.Valenc.	3,77	15,39	3,62	21,69	182,73	0,53
	Extremad.	4,48	17,64	3,19	34,74	207,94	0,53
	Galicia	3,49	17,65	2,82	24,23	186,75	0,37
	C.Madrid	8,78	9,57	6,72	43,53	328,21	2,45
	Murcia	6,17	18,65	2,86	48,81	282,94	0,75
	Navarra	1,89	22,55	3,06	29,81	113,34	0,10
	P.Vasco	1,31	31,26	2,42	12,99	173,76	0,23
	Rioja	4,32	14,87	4,51	28,43	187,12	0,71
	Ceuta y Melilla	4,58	27,56	1,16	120,66	229,82	0,26
	Media	4,09	19,54	3,27	37,38	204,68	0,60
	D.Típica	2,00	5,95	1,63	23,87	55,85	0,99

Tabla 7: Suma de Cuadrados de los Residuos (en miles) de las Curvas Ajustadas. Datos Internacionales.

		Familias Paramétricas					
		Exponenc.	**Pareto**	**Circular**	**Gupta**	**Potencial**	**Lognorm.**
MUNDO	**Brasil**	67,01	12,77	11,54	665,40	2728,32	19,13
	Colombia	35,32	30,55	2,28	259,20	995,94	3,53
	Dinamarca	1,41	122,89	5,55	172,07	115,05	2,09
	Finlandia	5,69	105,29	4,29	776,90	153,24	6,00
	India	42,34	6,43	16,93	174,87	628,68	13,19
	Indonesia	65,27	6,82	42,61	251,09	775,26	30,13
	Japón	3,59	43,35	2,31	19,48	184,76	0,10
	Kenya	83,59	4,59	22,72	994,85	3032,88	36,92
	Malasia	20,35	47,57	0,69	292,38	560,46	1,02
	Holanda	9,97	61,06	1,67	293,07	261,80	1,00
	N. Zelanda	2,38	93,69	8,85	487,21	66,29	3,73
	Noruega	2,77	88,74	13,62	960,21	116,79	6,28
	Panamá	10,67	57,09	1,75	308,42	259,42	1,07
	Sri Lanka	4,92	81,15	1,09	73,60	309,82	0,26
	Suecia	3,28	87,70	3,33	173,56	158,27	1,13
	Tanzania	61,08	5,83	19,56	523,10	1792,91	24,42
	Túnez	10,46	100,71	1,01	138,89	1257,59	0,93
	R. Unido	8,10	33,19	5,00	122,10	163,29	1,00
	Uruguay	4,08	145,57	2,26	106,01	603,87	3,09
	Media	23,28	59,74	8,79	357,49	745,51	8,16
	D.Típica	26,28	42,38	10,36	288,29	855,87	10,92

ANEXO 2: CORRELACIONES DE RANGOS DE SPEARMAN ENTRE LAS PAREJAS DE ORDENACIONES.

Tabla 8. Correlaciones de rangos de Spearman entre cada pareja de ordenaciones (p-valor entre paréntesis). Categoría Profesional. Año 1990.

	Exponencial	**Pareto**	**Circular**	**Gupta**	**Potencial**	**Lognormal**
Exponencial	-	0.976** (0.000)	1.000** (0.000)	0.939** (0.000)	0.927** (0.000)	0.988** (0.000)
Pareto		-	0.976** (0.043)	0.939** (0.000)	0.915** (0.000)	0.964** (0.000)
Circular			-	0.939** (0.054)	0.927** (0.000)	0.988* (0.048)
Gupta				-	0.988** (0.000)	0.952** (0.000)
Potencial					-	0.939** (0.000)
Lognormal						-

Tabla 9: Correlaciones de rangos de Spearman entre cada pareja de ordenaciones (p-valor entre paréntesis). Comunidades Autónomas. Año 1990.

	Exponencial	Pareto	Circular	Gupta	Potencial	Lognormal
Exponencial	-	0.974** (0.000)	0.995** (0.000)	0.928** (0.000)	0.900** (0.000)	0.989** (0.000)
Pareto		-	0.960** (0.043)	0.935** (0.000)	0.907** (0.000)	0.954** (0.000)
Circular			-	0.909** (0.054)	0.895** (0.000)	0.991** (0.048)
Gupta				-	0.888** (0.000)	0.918** (0.000)
Potencial					-	0.875** (0.000)
Lognormal						-

Tabla 10: Correlaciones de rangos de Spearman entre cada pareja de ordenaciones (p-valor entre paréntesis). Datos Internacionales.

	Exponencial	Pareto	Circular	Gupta	Potencial	Lognormal
Exponencial	-	0.932** (0.000)	0.996** (0.000)	0.716** (0.001)	0.644** (0.003)	0.974** (0.000)
Pareto		-	0.937** (0.043)	0.695** (0.000)	0.565* (0.000)	0.916** (0.000)
Circular			-	0.753** (0.054)	0.640** (0.003)	0.977** (0.048)
Gupta				-	0.482* (0.036)	0.726** (0.000)
Potencial					-	0.619** (0.005)
Lognormal						-

NOTA: ** La correlación es significativa al nivel 0.01 (bilateral)
* La correlación es significativa al nivel 0.05 (bilateral)