



**Facultad
de
Ciencias**

Introducción a la Geometría de Webs
Introduction to Web Geometry

Trabajo de Fin de Máster para acceder al
Máster Universitario en Matemáticas y Computación

Autor: Pablo E. Bustamante Vega

Directora: Nuria Corral Pérez

Septiembre 2021

*A Nuria, por su infinita paciencia,
y a Marc, por su invaluable compañía.*

Resumen

La geometría de webs consiste en el estudio de familias de foliaciones que están en posición general. En este trabajo nos centraremos en el estudio local de estos objetos y se estudiarán invariantes como la curvatura, la holonomía o el rango que se define en términos de lo que se conocen como relaciones abelianas. En particular, estos invariantes nos permitirán caracterizar cuando un web es hexagonal.

Palabras clave: web diferenciable, holonomía, curvatura, relación abeliana, foliación.

Abstract

Web geometry consists in the study of collections of foliations in general position. In this work we will focus on the local study of these objects through invariants such as the curvature, holonomy or rank, which is defined in terms of abelian relations. In particular, this invariants will allow us to determine whether or not a web is hexagonal.

Key words: smooth web, holonomy, curvature, abelian relation, foliation.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Repaso de Geometría Diferencial	3
1.2. Foliaciones	7
2. Webs: definición y primeros resultados	13
2.1. Definiciones básicas	13
2.2. Invariantes de webs planos	16
3. Relaciones Abelianas	27
3.1. De ecuaciones funcionales a ecuaciones diferenciales	28
3.2. Cota al rango de un web	34
A. Derivada de Lie	39
A.1. Sobre flujos asociados a campos vectoriales	39
A.2. Derivada de Lie, generalización y propiedades	43
Bibliografía	48

Introducción

Se considera que el origen de la geometría de webs fue en 1927, con la publicación de [11] por parte de Thomsen. En este artículo se demuestra una caracterización de una propiedad geométrica de superficies en \mathbb{R}^3 mediante la construcción de un 3-web sobre la propia superficie. Dicho de manera poco precisa, un 3-web sobre una superficie consiste en 3 familias de curvas tales que: cada familia de curvas cubre toda la superficie, las curvas de una misma familia no se cortan entre sí y los espacios tangentes a curvas de distintas familias deben ser distintos. En esta memoria no se va a trabajar con ese tipo de webs, definidos globalmente sobre una variedad, sino con webs locales, definidos en un entorno de un punto.

Estos objetos tienen dos precursores en el siglo XIX. El primero de ellos es la geometría diferencial, donde al considerar las curvas integrales de campos vectoriales se obtenían 2-webs. Al generalizar estas construcciones en la geometría proyectiva, se empezaron a estudiar 3-webs. El otro origen son los monogramas. Estas herramientas, ahora en desuso, servían para resolver analógicamente ecuaciones de la forma $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función. Consisten en un conjunto de curvas sobre las que se hacía una “escala”, como si fueran una regla curvada, y para usarlas se escogen puntos en las curvas que representan las variables “independientes” y se unen con rectas para cortar las curvas de la variable “dependiente” en los puntos que son solución de nuestra ecuación. Estos nomogramas no permiten una buena precisión, pero sí mucha velocidad, por lo que eran usados cuando lo importante era lo segundo.

Este trabajo está formado por tres capítulos. En el primero se introducen los conceptos básicos de la geometría diferencial ya que, aunque algunos se suelen estudiar en cualquier grado de matemáticas, conviene fijar notación y definiciones. Es en el segundo capítulo donde realmente empieza el trabajo, ahí se definen con precisión distintos invariantes de los 3-web planos y se dan varios ejemplos. En el tercer capítulo se generaliza uno de esos invariantes para webs en dimensión superior y se profundiza un poco en él.

Por último, hay un apéndice donde se estudia con detalle una herramienta de la geometría diferencial: la derivada de Lie. La decisión de añadir este apéndice viene de querer que este trabajo sea autocontenido, pero no querer cargar demasiado el capítulo 1. Al leer este trabajo puede simplemente consultarse el apéndice cuando se quiera mirar alguno de los resultados citados en el resto de la memoria.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Repaso de Geometría Diferencial

La intención de esta sección es fijar la notación usada al referirse a diversas nociones y resultados clásicos de la geometría diferencial que se usarán a lo largo del trabajo. Salvo que se indique lo contrario, la referencia usada para esta sección es [6]. Para definir ciertos conceptos, será necesario usar álgebra tensorial. Si no se está familiarizado con este concepto, como vamos a trabajar con espacios vectoriales y no con módulos, basta pensar que un tensor es una aplicación multilineal, de la misma manera que una matriz n por n es una aplicación bilineal. Si se quiere examinar la definición y propiedades básicas del producto tensorial, aparecen en el capítulo 12 de [6].

Sea M una n -variedad diferenciable dada por un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, esto es, para cada $i \in I$ tenemos un abierto U_i de M y un homeomorfismo $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, con $\varphi(U_i)$ un abierto de \mathbb{R}^n . Además, un atlas debe cumplir la ley de cambio de carta, esto es, que si la intersección de dos abiertos $U_i \cap U_j$ es no vacía entonces la composición $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es un difeomorfismo (de clase C^∞ y con inversa también de clase C^∞). De ahora en adelante cuando digamos que una función es diferenciable nos estaremos refiriendo a que es de clase C^∞ . Esta noción de variedad diferenciable se puede dar también con variedades cuyas cartas toman su imagen en \mathbb{C}^n , en cuyo caso se exige que el cambio de cartas sea un biholomorfismo; salvo por esta diferencia y para lo que vamos a desarrollar en esta sección los casos real y complejo son idénticos. Ahora vamos a intentar explicar, sin entrar en todos los detalles, lo que es el espacio tangente de una variedad en un punto. Dado un abierto $U \subset M$, denotaremos por $\mathfrak{F}(U)$ al anillo de funciones diferenciables $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Recordamos que en el lenguaje de variedades diferenciables una función f es diferenciable en un punto $p \in M$ si existe una carta (U, φ) con $p \in U$ tal que $f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(p)$. Ser diferenciable en un abierto U o en todo M significa ser diferenciable para todo punto en dichos conjuntos. Dado un punto $p \in M$, una **derivación** en p es una aplicación lineal $X : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple la regla de Leibnitz

$$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f), \text{ para todo } f, g \in \mathfrak{F}(M)$$

El **espacio tangente** de M en p , denotado por $T_p M$, es el \mathbb{R} -espacio vectorial de las derivaciones en p . Es decir, los vectores tangentes en un punto de nuestra variedad son, a su vez, operadores. Fijada una carta (U, φ) con $p \in U$, una base de este espacio vectorial viene dada por las derivadas parciales en p . Sean $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ las coordenadas

de p . Una derivada parcial en p es un operador

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : \mathfrak{F}(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f)(p) = (\frac{\partial f}{\partial x^i})(p) = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial t_i} \right) (\varphi(p))$, siendo (t_1, \dots, t_n) coordenadas en \mathbb{R}^n . Con esto tenemos dos posibles definiciones del espacio tangente de M en p , como el conjunto de derivaciones y como el espacio vectorial generado por las derivadas parciales. Ahora vamos con la tercera y última definición. Sean $J \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y $\gamma : J \rightarrow M$ una función diferenciable e inyectiva tal que p está en la imagen de γ . Sea $t_0 \in J$ tal que $\gamma(t_0) = p$. Tomando una carta (U, φ) con $\varphi(J) \subset U$, definimos $\gamma'(t_0) = \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(t_0)$, la **velocidad** de la curva γ en p . Esta velocidad de una curva en un punto coincide con la noción de **vector tangente**. Usaremos la notación $\gamma'(t_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \gamma(t)$. Otra posible definición de $T_p M$ es el conjunto de velocidades en p de todas las curvas γ que pasan por p .

Sea $p \in M$, definimos el **fibrado tangente** de M como $TM = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M$, donde $\dot{\bigcup}$ denota la unión disjunta. El fibrado tangente de una variedad de dimensión n tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$. Tenemos una proyección $\pi : TM \rightarrow M$, que asocia todos los vectores tangentes en p al propio punto p . Llamaremos **sección** (diferenciable) a cualquier aplicación diferenciable $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$. En general, si tenemos una variedad N y una aplicación $\pi : N \rightarrow M$, llamamos sección (diferenciable) de N a cualquier aplicación diferenciable $\tau : M \rightarrow N$ tal que $\pi \circ \tau = Id_M$. A una sección del fibrado tangente de una variedad también se le llama **campo vectorial**. Como, fijada una carta (U, φ) con $p \in U$, las derivadas parciales son una base de $T_p M$, cada campo vectorial X se puede escribir como $X|_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} X^i$, donde $X^i \in \mathfrak{F}(U)$. Dada $f \in \mathfrak{F}(U)$, calcular $X(f)$ consiste en aplicar cada derivada parcial y multiplicar por cada función X^i , es decir, $X(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i$. La notación estándar para denotar el conjunto de campos vectoriales sobre una variedad es $\mathfrak{X}(M)$.

Una operación relevante relacionada con los campos vectoriales es el **corchete de Lie**. Sean X, Y campos vectoriales en M y sea $f \in \mathfrak{F}(M)$, se define el corchete de Lie como $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Es directo comprobar que es antisimétrico y aditivo.

Denotamos por $T_p^* M = (T_p M)^*$, el dual del espacio tangente, y se define $T^* M = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p^* M$, el fibrado cotangente. Fijada una carta (U, φ) con $p \in U$, podemos dar una base de $T_p^* M$ con los elementos de la forma

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

A las secciones del fibrado cotangente se les llama **1-formas diferenciables**.

Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, definimos su **aplicación tangente** $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_p N$, con $F_{*p}(X)(f) = X(f \circ F)$ para cada $f \in \mathfrak{F}(N)$ y para cada $X \in T_p M$. Si F_{*p} es sobreyectiva para todo $p \in M$, se dice que F es una **submersión**. Si F_{*p} es inyectiva para todo p , se dice que es una **inmersión**. Una variedad N contenida en M se dice **subvariedad** si la inclusión es una inmersión. Si además se cumple que la topología de N coincide con la restricción de la topología de M , entonces decimos que es una **subvariedad regular**. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable, diremos que es un **embedding regular** si f es una inmersión inyectiva y $F(M)$ es una subvariedad regular

de N .

También definimos la **aplicación cotangente** $F_p^* : T_{F(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ de F como $F_p^*(\omega)(X) = \omega(F_{*p}(X))$ para cada $X \in T_p M$ y para cada $\omega \in T_{F(p)}^* N$.

El siguiente resultado nos dice que si tenemos dos variedades M y N y una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ tal que el rango de la aplicación tangente es constante, entonces existen cartas adecuadas que nos simplifican la expresión de F en coordenadas locales, hasta tal punto de que F no es más que una inclusión o una proyección.

Teorema 1.1.1 (Del rango constante). *Sean M y N variedades diferenciables de dimensión m y n , respectivamente, y $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable tal que el rango de $F_{*,p}$ es constante e igual a r para todo $p \in M$. Para cada $p \in M$ existen unas cartas (U, φ) y (V, ψ) , respectivamente en M y N , con $p \in U$ tales que $F(U) \subset V$ y F tiene por expresión local*

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

En particular, si F es una submersión, entonces

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^{m-n-1}, x^{m-n}, \dots, x^m) = (x^{m-n}, \dots, x^m)$$

Si F es una inmersión, entonces

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$$

Corolario 1.1.2. *Sean M y N dos variedades diferenciables de dimensión m y n , respectivamente. Si $F : M \rightarrow N$ una submersión, entonces los conjuntos de la forma*

$$L_q = \{p \in M : F(p) = q\}$$

con $q \in N$ son subvariedades regulares en M de codimensión n .

Ahora vamos a dejar un poco de lado el lenguaje de variedades diferenciables para hablar un poco de álgebra. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n y sea V^* su espacio dual. Dado $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, un k -tensor covariante es un elemento de $V^* \otimes \dots \otimes V^* = T^k(V^*)$. Diremos que un k -tensor covariante es **simétrico** si su valor no cambia por intercambiar cualquiera de sus argumentos entre sí. Sea $\alpha \in T^k(V^*)$, definimos su **simetrización** como $\text{Sym}(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \alpha^\sigma$, donde $\alpha^\sigma(v_1, \dots, v_k) = \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ y Σ_k es el grupo simétrico de orden k . Es directo ver que la simetrización de cualquier elemento de $T^k(V^*)$ es un k -tensor covariante simétrico. Sean $\alpha \in T^k(V^*)$ y $\beta \in T^l(V^*)$, definimos su **producto simétrico** como $\text{Sym}(\alpha \otimes \beta)$. Se cumple que $\text{Sym}(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha)$. Diremos que un k -tensor covariante es **alternante** si $\alpha(v_1, \dots, v_k) = (-1)^{I(\sigma)} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$, donde $I(\sigma)$ es el índice de la permutación σ . El conjunto de k -tensores covariantes alternantes en V se denota por $\Lambda^k(V^*)$ y tiene dimensión $\binom{n}{k}$. Definimos la **alternación** de un k -tensor covariante como $\text{Alt}(\alpha) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} I(\sigma) \alpha^\sigma$. Es directo ver que la alternación de cualquier elemento de $T^k(V^*)$ es un k -tensor covariante alternante. En vez de definir un “producto alternante” como hemos hecho antes, en este caso lo que se define es el **producto exterior**. Sean $\omega \in T^k(V^*)$ y $\eta \in T^l(V^*)$, definimos $\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta)$.

Proposición 1.1.3. *Sean $\omega, \omega', \eta, \eta', \xi$ tensores covariantes. El producto exterior verifica las siguientes propiedades:*

1. *Bilineal*: para todo $a, a' \in \mathbb{R}$,

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta)$$

$$\omega \wedge (a\eta + a'\eta') = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega \wedge \eta')$$

2. *Asociativa*:

$$\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi$$

3. *Anticonmutativa*: Para $\omega \in T^k(V^*)$ y $\eta \in T^l(V^*)$,

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

4. Para 1-tensores covariantes $\omega^1, \dots, \omega^k$ y vectores $v_1, \dots, v_k \in V$,

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega^j(v_i))$$

Otra operación que usaremos en este trabajo es el **producto interior** de un vector $v \in V$ y $\omega \in \Lambda^k(V^*)$. Se puede ver como un operador $i_v : \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^{k-1}(V^*)$ definido como

$$i_v(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1})$$

Ahora volvemos al lenguaje de variedades diferenciables. A una sección de $\Lambda^k(T^*M)$ se le llama **k -forma diferencial** (k -forma para simplificar). El conjunto de k -formas se denota por $\Omega^k(M)$. Se puede extender la definición de k -forma al caso con $k = 0$: una 0-forma en M es un elemento de $\mathfrak{F}(M)$. Diremos que una k -forma ω es **descomponible** si $\omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k$, donde ω^i son 1-formas. Por el resultado sobre la dimensión de $\Lambda^k(V^*)$ que se mencionó previamente, es claro que, por ejemplo, si $n = 2$ entonces toda 2-forma es descomponible. Tomando coordenadas en una carta (U, φ) , denotamos por $dx^J = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ para una k -upla de índices $J = (j_1, \dots, j_k)$. Con esta notación podemos escribir cualquier k -forma ω como $\omega = \sum_{J \in I} \omega_J dx^J$, donde I es una familia de k -tuplas de índices y cada ω_J está en $\mathfrak{F}(U)$. Fijados un punto $p \in M$ y una carta (U, φ) con $p \in U$, definimos la **diferencial** de $f \in \mathfrak{F}(M)$ como $df|_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Definimos la **derivada exterior** como

$$\begin{aligned} d : \Omega^k(M) &\rightarrow \Omega^{k+1}(M) \\ d(\sum_{J \in I} \omega_J dx^J) &\mapsto \sum_{J \in I} d\omega_J \wedge dx^J \end{aligned}$$

donde $\sum_{J \in I} d\omega_J \wedge dx^J = \sum_{(j_1, \dots, j_k) \in I} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$.

Se dice que una k -forma ω es **exacta** si existe una $(k-1)$ -forma η tal que $d\eta = \omega$. Se dice que una k -forma ω es **cerrada** si $d\omega = 0$. En general, si una 1-forma es exacta entonces es cerrada (por la proposición 1.1.4). Si ω es una 1-forma definida en una variedad simplemente conexa, entonces es cerrada si y sólo si es exacta.

Previamente se definió F_p^* para 1-formas, donde $F : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, y la forma de generalizar esta definición para una k -forma ω , con $k \geq 1$, no es más que considerar la función que actúa multilinearmente sobre sobre cada “componente” de ω_k . Si $k = 0$ entonces F^* es el “pullback” de F , es decir, si $f \in \mathfrak{F}(N)$ y $p \in M$ entonces $F^*(f)(p) = f(F(p))$.

Proposición 1.1.4. *La derivada exterior cumple las siguientes propiedades:*

1. d es lineal sobre \mathbb{R}
2. Si ω es una k -forma y η es una l -forma entonces

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

3. $d \circ d = 0$.
4. La derivada exterior conmuta con cualquier aplicación cotangente, es decir, si $F : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entonces $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$, para cada $\omega \in \Omega^k(N)$.

Otra herramienta que aparecerá en este trabajo es la derivada de Lie. Tanto para su definición como sus propiedades, mírese el anexo A.

1.2. Foliaciones

Ahora vamos a definir el objeto que estudiaremos a lo largo de este trabajo, las foliaciones. Hay diversas aproximaciones, empezamos por la que quizá sea la más geométrica. A partir de aquí, los contenidos se han sacado de [10].

Definición 1.2.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m dada por un atlas $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Diremos que ese atlas es una **foliación** de codimensión $m - n$ si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\varphi_i(U_i) = D^n \times D^{m-n}$, donde D^n es el disco de centro 0 y radio 1 de dimensión n .
2. Para todo $i, j \in I$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el cambio de cartas $\varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ se puede escribir como

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, y) = (f_{i,j}(x, y), g_{i,j}(y))$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{m-n}$ y las funciones $f_{i,j} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_{i,j} : \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ son diferenciables.

En la siguiente figura se ilustra lo que quiere decir la definición 1.2.1. Esta figura está inspirada en una figura de [2], página 22.

Sea $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ la proyección sobre las últimas $m - n$ coordenadas. Dado $y \in \mathbb{R}^{m-n}$, a los conjuntos de la forma $\{p \in M : \pi(\varphi_i(p)) = y\}$ se les llama **placas** de \mathcal{F} . Con estas placas se define una relación de equivalencia en M : diremos que $p \sim q$ si y sólo si existe una cantidad finita de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tales que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$, $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_k$. Es directo comprobar que es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia definidas de esta manera se llaman las **hojas** de \mathcal{F} .

Ejemplo 1.2.2. Sean M y N dos variedades diferenciables, de dimensión m y n respectivamente. Sea $F : M \rightarrow N$ una submersión y para cada $c \in N$ consideramos $L_c = \{p \in M : F(p) = c\}$. Por el corolario 1.1.2 tenemos que los conjuntos L_c son subvariedades regulares de dimensión n . Veamos que son las hojas de una foliación. Para ello usaremos un resultado conocido como la forma local de una submersión, que también se puede encontrar en [10]. Este resultado nos dice lo siguiente:

Siendo M , N y F como se han definido hasta ahora. Existen atlas $\{(U, \varphi)\}$, $\{(V, \psi)\}$ de M y N respectivamente tales que

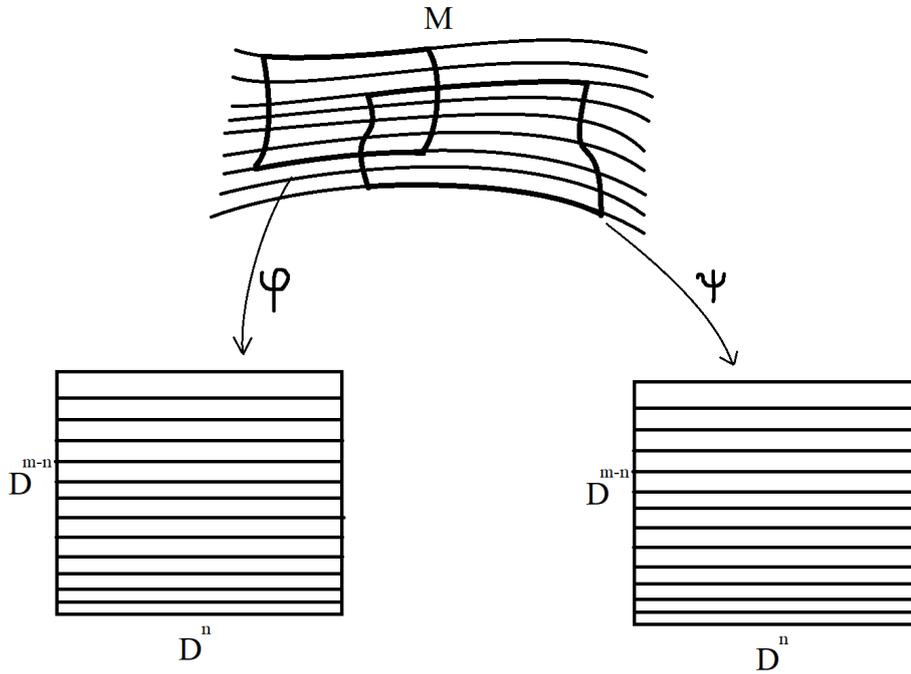


Figura 1.1: Cambio de cartas en una foliación

1. $\varphi(U) = D^n \times D^{m-n}$.
2. $\psi(V) = D^{m-n}$.
3. Para cada carta (U, φ) de M existe una carta $\{(V, \psi)\}$ de N tal que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} = \pi$, donde $\pi : D^n \times D^{m-n} \rightarrow D^{m-n}$ es la proyección sobre las últimas $m-n$ coordenadas.

El atlas $\mathcal{F} = \{(U, \varphi)\}$ es un atlas que cumple la definición 1.2.1, por lo que es una foliación. Para verlo, sean (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) dos cartas en \mathcal{F} y sean (V_1, ψ_1) , (V_2, ψ_2) las cartas de N correspondientes, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \pi \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} &= \psi_2 \circ F \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \psi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1} \\ &= \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \pi \end{aligned}$$

Por tanto $\pi \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ \pi$ no depende de $x \in D^n$. Con esto y por la condición 1 de la forma local de una submersión, tenemos lo que queríamos.

Desde aquí hasta el final de la sección, mientras no se indique lo contrario, los contenidos se han sacado de [2].

Teorema 1.2.3. *Sea \mathcal{F} una foliación de codimensión $m-n$ dada por un atlas de M , como en la definición 1.2.1. Las hojas de \mathcal{F} tienen estructura de variedad diferenciable de dimensión n .*

Demostración. Consideramos la construcción de las hojas F de \mathcal{F} descrita a partir de las placas. Sea (U, φ) una carta de \mathcal{F} , observemos que, fijado $c \in D^{m-n}$, la aplicación

$\varphi^{-1}|_{D^n \times \{c\}} : D^n \times \{c\} \rightarrow U$ es un embedding regular. Por lo tanto, las placas son subvariedades regulares conexas de dimensión n en M . Observemos además, que si α y β son dos placas de U , entonces o bien $\alpha \cap \beta = \emptyset$ o bien $\alpha = \beta$.

Dada una hoja F de \mathcal{F} , veamos que F tiene definida una estructura de variedad diferenciable inducida por las cartas de \mathcal{F} . Sea $p \in F$ y (U, φ) una carta de M tal que $p \in U$ y $\varphi(U) = D^n \times D^{m-n}$. Denotamos $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$, donde $\varphi^1 : U \rightarrow D^n$ y $\varphi^2 : U \rightarrow D^{m-n}$. Sea α una placa de U que contiene a p y definimos $\tilde{\varphi} : \alpha \rightarrow D^n$ como $\tilde{\varphi} = \varphi^1|_\alpha$. Es claro que $\tilde{\varphi}$ es un homeomorfismo ya que $\varphi(\alpha) = D^n \times \{c\}$ para algún $c \in D^{m-n}$. Veamos que la familia

$$\mathcal{A} = \{(\alpha, \tilde{\varphi}) : \alpha \subset F \text{ es una placa de } U \text{ con } (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$$

es un atlas de F , lo que lo dota de estructura de variedad diferenciable de dimensión n . Para ello tenemos que probar que si $(\alpha, \tilde{\varphi}), (\beta, \tilde{\psi}) \in \mathcal{A}$ con $\alpha \cup \beta \neq \emptyset$, entonces

1. $\tilde{\varphi}(\alpha \cup \beta)$ y $\tilde{\psi}(\alpha \cup \beta)$ son abiertos de \mathbb{R}^n .
2. $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1} : \tilde{\psi}(\alpha \cup \beta) \rightarrow \tilde{\varphi}(\alpha \cup \beta)$ es un difeomorfismo.

Para ver ambas afirmaciones, primero probaremos que $\alpha \cup \beta$ son abiertos en α y en β . Sean (U, φ) y (V, ψ) cartas en \mathcal{F} tales que α es una placa de U , β es una placa de V , $\tilde{\varphi} = \varphi|_\alpha$ y $\tilde{\psi} = \psi|_\beta$. Sean $a, b \in D^{m-n}$ tales que $\alpha = \{p \in M : \pi(\varphi(p)) = a\}$ y $\beta = \{p \in M : \pi(\psi(p)) = a\}$. Por la definición 1.2.1 sabemos que $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ es de la forma $\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (f(x, y), g(y)) \in D^n \times D^{m-n}$. En particular,

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x, b) = (f(x, b), g(b)) = (f(x, b), a)$$

Por esto $\psi(\beta \cap U) = \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap (D^n \times \{b\})$ y $\varphi(\alpha \cap V) = \varphi(U \cap V) \cap (D^n \times \{a\})$. Con esto tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(\beta \cap U) &= \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(\beta \cap U)) = \varphi \circ \psi^{-1}(\psi(U \cap V)) \cap (D^n \times \{b\}) \\ &\subset \varphi(U \cap V) \cap (D^n \times \{a\}) = \varphi(\alpha \cap V) \end{aligned}$$

Es decir, $\beta \cap U \subset \alpha \cap V$. De la misma manera, $\alpha \cap V \subset \beta \cap U$ por lo que $\alpha \cap \beta = \alpha \cap V = \beta \cap U$ y con esto tenemos que $\alpha \cup \beta$ es abierto en α y β , por ser α y β subvariedades regulares.

Como $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\psi}$ son homeomorfismos entonces $\tilde{\varphi}(\alpha \cap \beta)$ y $\tilde{\psi}(\alpha \cap \beta)$ deben ser abiertos en \mathbb{R}^n . La aplicación $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1} : \tilde{\psi}(\alpha \cup \beta) \rightarrow \tilde{\varphi}(\alpha \cup \beta)$ es un difeomorfismo por ser $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1} = f(x, b)$ si $x \in \tilde{\psi}(\alpha \cup \beta)$. □

Diremos que dos foliaciones $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ definidas en M son **equivalentes** si existe un difeomorfismo φ (o biholomorfismo en el caso complejo) de M en M tal que la imagen de cada hoja de \mathcal{F}_1 está contenida en una hoja de \mathcal{F}_2 , y viceversa para φ^{-1} . Es más, $\varphi|_{F_1} : F_1 \rightarrow F_2$ debe ser un difeomorfismo. A parte, definimos el espacio tangente de una foliación \mathcal{F} en un punto p como $T_p\mathcal{F} = T_pF$, donde F es la hoja de \mathcal{F} que contiene a p .

Definición 1.2.4. Sea M una variedad de dimensión n y sea $0 < k < m$. Una k – **distribución diferenciable** es una familia $D = \{D_p \subset T_pM : p \in M\}$, donde cada D_p es un subespacio vectorial de T_pM de dimensión k y para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) tal que $D|_U$ está generada por k campos vectoriales X_1, \dots, X_k en U . Una subvariedad regular $N \xrightarrow{i} M$ se dice **subvariedad integral** de la distribución diferenciable D si $i_{*p}(T_pN) = D_p$ para todo $p \in N$. Diremos que una distribución es **completamente integrable** si para cada $p \in M$ existe una subvariedad integral de D que contenga a p .

Una distribución D se dice **involutiva** si dados dos campos de vectores X e Y en M tales que $X_p, Y_p \in D_p$ para todo $p \in M$, se tiene que $[X, Y]_p \in D_p$, donde $[X, Y]$ denota el corchete de Lie. El siguiente resultado, conocido como teorema de Frobenius, nos relaciona la condición “ser completamente integrable” con “ser involutiva”. Este resultado puede encontrarse en la página 182 de [2].

Teorema 1.2.5 (Frobenius). *Sea D una distribución de dimensión k . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La distribución D es completamente integrable.*
2. *La distribución D es involutiva.*

La siguiente versión del teorema de Frobenius, que se encuentra en la página 36 de [2], nos relaciona las distribuciones involutivas con las foliaciones:

Teorema 1.2.6 (Frobenius). *Si D es una distribución involutiva en M , entonces existe una foliación \mathcal{F} en M cuyo espacio tangente en p es igual a D_p para cada $p \in M$.*

Una manera de dar una distribución es mediante un conjunto de 1-formas. Sean $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-k}\}$ un conjunto de 1-formas definidas en una variedad M de dimensión n . Entonces

$$D_p = \{\ker(\omega_1|_p) \cap \dots \cap \ker(\omega_{n-k}|_p)\}$$

es una k -distribución. La siguiente versión del teorema de Frobenius, que se puede encontrar en la página 185 de [2], nos relaciona la integrabilidad de una distribución dada por 1-formas en términos de las propias 1-formas.

Teorema 1.2.7 (Frobenius). *Sea D una distribución de dimensión k . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La distribución D es completamente integrable.*
2. *Si la distribución D viene dada por un conjunto $\{\omega_1, \dots, \omega_{n-k}\}$ de 1-formas, entonces para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que*

$$d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n-k} = 0$$

Es por este teorema que diremos que una 1-forma ω es **integrable** si $\omega \wedge d\omega = 0$, ya que es en este caso en el que ω nos define una foliación, juntando los teoremas 1.2.7 y 1.2.6. Por otra parte, en este trabajo vamos a usar foliaciones dadas por 1-formas y por submersiones, de ahí que hayamos hablado de ambos casos. Aunque en un principio sean formas distintas de construir una foliación, en realidad no son tan distintas. Para ver esto tenemos que introducir la idea de integral primera, usaremos [3] como referencia. Sea ω una 1-forma en \mathbb{C}^n . Si $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $\omega = GdF$, con $G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ otra función holomorfa, entonces diremos que F es una **integral primera** de ω . Para enunciar el siguiente resultado resulta conveniente decir que una 1-forma es no singular si es no nula en cualquier punto.

Teorema 1.2.8. *Si $\omega \in \Omega^1(\mathbb{C}^n)$ es integrable y no singular, ω admite integral primera.*

Con este resultado, si F es una integral primera de ω entonces F es una submersión, por ser ω no singular. Sean $p \in \mathbb{C}^n$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n)$. Si $dF(X) = 0$ entonces X es tangente a la curva de nivel de F que contiene a p . Por otra parte, $\omega(X) = 0$ por ser $\omega = GdF$, es

decir, los vectores tangentes a las curvas de nivel de F son a su vez elementos de la distribución definida por ω , y viceversa. Es por esta razón que F nos define, como submersión, la misma foliación que ω , como 1-forma. De la misma manera, si tenemos una foliación F entonces podemos considerar la 1-forma dF y esta siempre es no singular, por ser F una submersión, e integrable por ser $d(dF) = 0$. Con esto tenemos que dar una foliación con una 1-forma es lo mismo que darla con una submersión.

Proposición 1.2.9. *Sean $u, v : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dos submersiones que nos definen la misma foliación, es decir, $du \wedge dv = 0$. Entonces existe un holomorfismo $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $v = \lambda(u)$.*

Demostración. Por el teorema del rango constante 1.1.1, sabemos que existen cartas (U, φ) , (V, ψ) de \mathbb{C}^n y \mathbb{C} , respectivamente, tales que $(\psi \circ u \circ \varphi^{-1})(x, y) = x$. Aplicando este “cambio de coordenadas” a v obtenemos $(\psi \circ v \circ \varphi^{-1})(x, y) = \tilde{v}(x, y) = h(x)$, donde h es una cierta función holomorfa. Esta función h depende sólo de x porque u y v definen la misma foliación y esta viene dada por conjuntos de la forma $\{x = cte\}$, por lo que $\tilde{v}(x, y)$ debe ser independiente de y . Con esto tenemos la igualdad

$$h \circ \psi \circ u \circ \varphi^{-1} = \psi \circ v \circ \varphi^{-1}$$

Y por esto tenemos que $v = \psi^{-1} \circ h \circ \psi \circ u$, por lo que tomando $\lambda = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$ tenemos lo que queremos. \square

Esto que hemos hecho en la demostración de la proposición 1.2.9 se puede hacer considerando que la función u sea una submersión y v una función holomorfa (sin pedir que sea submersión), lo importante es que se cumpla que $du \wedge dv = 0$.

Ejemplo 1.2.10. Como vamos a dedicar una parte del trabajo a hablar de foliaciones en el plano dadas por 1-formas diferenciables, vamos a ver un poco cómo se comportan. Sea ω una 1-forma en \mathbb{R}^2 . Es claro que existen $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ tales que $\omega = \alpha dx + \beta dy$. Es directo comprobar que $d\omega = (\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}) dx \wedge dy$, por lo que se da siempre que $d\omega \wedge \omega = 0$ y, por el teorema de Frobenius 1.2.7 y 1.2.6, tenemos que debe existir una foliación \mathcal{F} tal que $T_p \mathcal{F} = \ker(\omega_p)$. Ahora, veamos qué quiere decir esto.

En este caso, estamos buscando una familia de curvas de la forma $\{F(x, y) = C\}_{C \in \mathbb{R}}$ que cubran todo el plano y que su espacio tangente en p sea igual al núcleo de $\ker \omega_p$. Es decir, queremos resolver la ecuación diferencial $\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} = 0$. En el caso de que $d\omega = 0$, sabemos que debe existir una función G tal que $dG = \omega$, por ser \mathbb{R}^2 simplemente conexo. La condición de ser cerrada es equivalente a que $\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$, que es la condición para que nuestra ecuación diferencial sea exacta. En este caso, las funciones de la forma $G + C$ serían las funciones F que buscamos.

Hasta ahora hemos trabajado siempre con cosas “globales”, es decir, definidas para una variedad M cualquiera. Sin embargo, de ahora en adelante vamos a trabajar con cosas “locales”. Cuando se use el símbolo (M, p) , donde M es una variedad y p un punto, lo que queremos decir es que la variedad que estamos considerando está formada por un dominio de carta U de M que contenga a p . Como las cartas son difeomorfismos, entonces trabajar en (M, p) es lo mismo que trabajar en $(\mathbb{C}^n, 0)$, si M es una variedad compleja. Además, como sólo nos interesa lo que sucede en $(\mathbb{C}^n, 0)$, a la hora de definir cualquier objeto nos olvidamos de lo que suceda “lejos” del origen. Más preciso, si tenemos dos objetos A, B definidos en entornos U, V de p (respectivamente), entonces consideraremos que A

es equivalente a B si existe un entorno $W \subset U \cap V$ tal que $A = B$ en W . De esta manera se definen los **gérmenes** de funciones, de k -formas, de biholomorfismos, foliaciones, etc. Consisten en las clases de equivalencia inducidas por la relación previamente descrita. Pese a que un germen es una clase de equivalencia, elegiremos cualquier elemento de la clase de equivalencia para representar a dicho germen.

Capítulo 2

Webs: definición y primeros resultados

Si interpretamos un germen de una foliación de codimensión 1 como su conjunto de hojas, entonces si tenemos varios germenes de foliaciones en $(\mathbb{C}^2, 0)$ tales que sus espacios tangentes están en posición general podemos interpretarlo como un conjunto de curvas que “se cruzan formando una red”. O, como nos referiremos a este concepto de aquí en adelante, forman un **web**.

2.1. Definiciones básicas

Definición 2.1.1. Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ una familia de germenes de foliaciones holomorfas de codimensión 1 en $(\mathbb{C}^n, 0)$. Diremos que forman un **germen de un k -web diferenciable de codimensión 1** si sus espacios tangentes están en posición general, es decir, si las foliaciones vienen dadas por 1-formas ω_i entonces $\omega_{i_1}(0) \wedge \dots \wedge \omega_{i_m}(0) \neq 0$, con $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, k\}$ y $m \leq \min\{k, n\}$. Si sus espacios tangentes son distintos dos a dos, entonces diremos que forman un web **cuasi-diferenciable**. En ambos casos, lo denotaremos por $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_k$.

Por comodidad, de ahora en adelante usaremos k -web o, simplemente, web para referirnos a un germen de un k -web diferenciable de codimensión 1. Típicamente trabajaremos con foliaciones dadas por germenes de 1-formas diferenciables ω_i , que sean no nulas en $0 \in \mathbb{C}^n$ y que cumplan la condición de integrabilidad $\omega_i \wedge d\omega_i = 0$ del teorema de Frobenius 1.2.7. Por esto, también usaremos la notación $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_k)$ para referirnos a k -webs dadas por 1-formas. También trabajaremos con foliaciones dadas por submersiones $u_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, en cuyo caso denotaremos el k -web correspondiente por $\mathcal{W}(u_1, \dots, u_k)$.

Ejemplo 2.1.2. Un tipo de webs que vamos a estudiar son los llamados **webs algebraicos**. Para definir estos webs seguimos [5]. Estos son webs en $(\check{\mathbb{P}}^n, p)$, donde p es un punto de $\check{\mathbb{P}}^n$, (que es difeomorfo a $(\mathbb{C}^n, 0)$) que se construyen a partir de una curva algebraica C . Sea $C \subset \mathbb{P}^n$ una curva proyectiva de grado k . Sea $l(0) \in \check{\mathbb{P}}^n$ un punto que se corresponda, por dualidad, con un hiperplano en \mathbb{P}^n que corte a C en k puntos distintos, denotados por $\{p_1, \dots, p_k\}$. Si tomamos un entono para cada p_i e intersecamos esos entornos con C , obtenemos k germenes de curvas C_1, \dots, C_k . Por dualidad, los puntos p_1, \dots, p_k se corresponden con k hiperplanos en $\check{\mathbb{P}}^n$ que pasan por $l(0)$. Repitiendo este procedimiento conseguimos un k -web en un entorno de $l(0)$. Sea $l(p)$ un punto suficientemente cercano a $l(0)$. Entonces $l(p)$, como hiperplano en \mathbb{P}^n , corta a cada C_i en un único punto, llamemos a estos puntos q_1, \dots, q_k . A su vez, estos puntos se corresponden con k hiperplanos que pasan por $l(p)$.

Aplicando este método a todos los puntos en $(\check{\mathbb{P}}^n, l(0))$ obtenemos k foliaciones $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ cuyos espacios tangentes están en posición general. A este web se le denota por $\mathcal{W}_C(l(0))$. Veamos que si tomamos un entorno lo bastante pequeño de $l(0)$ podemos garantizar que estas foliaciones no tienen ninguna singularidad, esto es, que dos hojas de una misma foliación no se cortan entre sí. Supongamos que dos hojas L_1, L_2 de una misma foliación \mathcal{F}_i se cortan. Cada una de esas hojas se ha construido, respectivamente, con puntos $l(p_1)$ y $l(p_2)$. Tomamos un punto $l(q)$ en la intersección de L_1 y L_2 . Por dualidad, $l(q)$ se corresponde con un hiperplano que corta a uno de los gérmenes C_i en los puntos que se corresponden con L_1 y L_2 . Pero al construir nuestro web nos quedamos con un entorno de $l(0)$ lo bastante pequeño como para que cada punto se corresponda con un hiperplano que corte a cada C_i en un único punto. Por tanto este punto $l(q)$ está fuera del entorno donde hemos construido nuestro web y, por ello, fuera del entorno donde tenemos definido \mathcal{F}_i . Con esto tenemos que podemos exigir que las hojas de cada foliación \mathcal{F}_i no se corten entre sí en un entorno de $l(0)$, pese a no estar formados por rectas paralelas. En la figura 2.1 se intenta representar cómo es esta construcción para una curva de grado 3. A la izquierda se ve una curva de grado 3 y dos hiperplanos que la intersecan transversalmente. Cada uno de esos hiperplanos se corresponden con puntos en el dual, y los puntos de la intersección de los hiperplanos con la curva se corresponden con rectas, que nos dan las hojas de las foliaciones. En el dibujo de la derecha se representa que nos estamos quedando con un entorno lo bastante pequeño como para que las foliaciones no sean singulares.

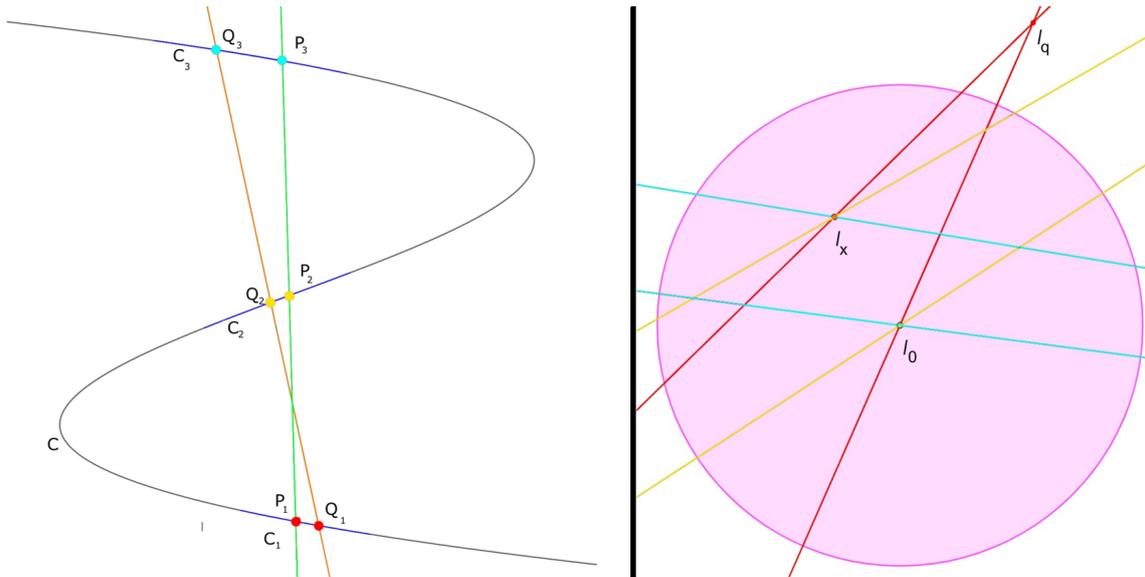


Figura 2.1: A la izquierda, una curva proyectiva. A la derecha, su web asociado en el espacio proyectivo dual.

Nota 2.1.3. Hasta ahora tan sólo hemos definido formalmente k -webs en $(\mathbb{C}^n, 0)$, pero es sencillo modificar la definición 2.1.1 para que valga para un entorno de cualquier variedad holomorfa.

Como es típico en varias áreas de las matemáticas, un objetivo del estudio de webs es clasificarlos bajo la acción de un grupo. En concreto, vamos a estudiar su clasificación bajo la acción de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0) \times \Sigma_k$, donde $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ es el grupo de gérmenes de biholomorfismos en $(\mathbb{C}^n, 0)$ y Σ_k es el grupo simétrico de orden k . La presencia de este segundo grupo es

porque, como resulta razonable, dos webs dados por las mismas foliaciones pero en distinto orden deben ser equivalentes. Diremos que dos k -webs $\mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_k)$ y $\mathcal{W}(\omega'_1, \dots, \omega'_k)$ son **biholomórficamente equivalentes** si existen $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$, $\sigma \in \Sigma_k$ y $u_i \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$, donde $\mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$ representa el conjunto de gérmenes de funciones holomorfas invertibles, tales que

$$\varphi^*(\omega_i) = u_i \omega'_{\sigma(i)}, \text{ para todo } i = 1, \dots, k$$

donde $\varphi^*(\omega)$ denota el pullback de ω a través de φ . Es obvio que la relación “ser biholomórficamente equivalentes” es una relación de equivalencia. En el caso en que $n \geq k$, existe una única clase de equivalencia. Para ver esto, supongamos que nuestro web viene dado por submersiones $u_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$. Podemos construir $U : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^k$ con $U = (u_1, \dots, u_k)$ una submersión, por la hipótesis de que los espacios tangentes están en posición general. El teorema de rango constante 1.1.1 asegura la existencia de un cambio de coordenadas φ que lleva cada función u_i a la función coordenada x_i para cada i . Es decir, $\varphi^* u_i = x_i$. Por tanto, el caso interesante es cuando $k \geq n + 1$.

Ahora vamos a hablar un poco del caso con $n = 2$ y $k = 3$, los webs con esos valores se llaman 3-webs planos. Antes de enunciar el siguiente resultado, como usaremos la notación $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ resulta conveniente decir que esto representa el conjunto de gérmenes de funciones holomorfas.

Lema 2.1.4. *Todo 3-web en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy, df)$, donde $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ tiene la forma:*

$$f(x, y) = x + y + xy(x - y)(\mathcal{K} + h.o.t.)$$

para un cierto $\mathcal{K} \in \mathbb{C}$.

Demostración. Como ya se mencionó previamente, todo 2-web en el plano es equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy)$. Por esto podemos asumir que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(dx, dy, dg)$, con $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$ y $g(0) = 0$. Por hipótesis, $dx \wedge dg(0) \neq 0$ y $dy \wedge dg(0) \neq 0$ o, equivalentemente, $g_x(0) \neq 0 \neq g_y(0)$. La notación g_x, g_y simboliza las derivadas parciales de g respecto de x e y , respectivamente. Después de hacer el pullback de \mathcal{W} mediante el biholomorfismo $\varphi_1 = (\frac{x}{g_x(0)}, \frac{y}{g_y(0)})$ tenemos que \mathcal{W} sigue siendo equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy, dg)$ pero ahora podemos garantizar que $g_x(0) = 1 = g_y(0)$, es decir, que $x + y$ es el término lineal de g . Para esto no hace falta más que hacer las cuentas

$$\varphi^*(g)(x, y) = g(\varphi(x, y)) = g\left(\frac{x}{g_x(0)}, \frac{y}{g_y(0)}\right) = g_x(0) \frac{x}{g_x(0)} + g_y(0) \frac{y}{g_y(0)} + h.o.t. = x + y + h.o.t.$$

Sean $a(t) = g(t, 0)$ y $b(t) = g(0, t)$, que son dos gérmenes de biholomorfismos de $(\mathbb{C}, 0)$. Sea $\varphi(x, y) = (a^{-1}(x), b^{-1}(y))$ y sea $h(x, y) = \varphi^* g(x, y) = g(a^{-1}(x), b^{-1}(y))$. Nótese que $\varphi^* \mathcal{W}(dx, dy, dg)$ es equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy, dh)$ y $h(t, 0) = h(0, t) = t$ por lo que $h(x, y) = x + y + xy\tilde{h}(x, y)$. Además, $h(t, t)/2 = t + h.o.t.$

Para el siguiente paso vamos a necesitar un resultado conocido como “Teorema de Linealización de Poincaré”, que nos dice que si tenemos una serie de potencias en $\mathbb{C}\{z\}$ (anillo de series de potencias convergentes) de la forma $f(z) = az + h.o.t.$, con $|a| \neq 1$, entonces existe $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $(\psi \circ f \circ \psi^{-1}) = az$. Este resultado se puede encontrar en [7].

Continuamos con la demostración. Definiendo el germen $\alpha(t) = h(t, t) = 2t + h.o.t.$, por el Teorema de Linealización de Poincaré existe $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $\psi^{-1} \circ \alpha \circ \psi(t) = 2t$.

Tomando $\varphi(x, y) = (\psi(x), \psi(y))$ y $f = \psi^{-1} \circ h \circ \psi$ tenemos que $f(t, 0) = f(0, t) = f(t, t)/2 = t$. Para terminar esta demostración tan sólo falta comprobar los efectos de estas igualdades en la serie $f(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$.

$$f(t, 0) = a_{10}t + a_{20}t^2 + a_{30}t^3 + h.o.t = t \Rightarrow a_{10} = 1, a_{20} = 0 = a_{30}$$

$$f(0, t) = a_{01}t + a_{02}t^2 + a_{03}t^3 + h.o.t = t \Rightarrow a_{01} = 1, a_{02} = 0 = a_{03}$$

$$f(t, t) = 2t + a_{11}t^2 + a_{21}t^3 + a_{12}t^3 + h.o.t = 2t \Rightarrow a_{11} = 0 = a_{12} + a_{21}$$

Tomando $\mathcal{K} = a_{12} = -a_{21}$, llegamos a la afirmación del enunciado. \square

2.2. Invariantes de webs planos

Ahora introducimos dos formas de caracterizar los webs planos: su curvatura y su holonomía. Empecemos por su curvatura. Supongamos que nuestro web viene dada por 1-formas, $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Veamos que existen funciones $u_i \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$ tales que

$$u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3 = 0 \quad (2.1)$$

Diremos que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(u_1\omega_1, u_2\omega_2, u_3\omega_3)$ es una **normalización** de \mathcal{W} . Si δ_{ij} son funciones holomorfas definidas como $\delta_{ij}dx \wedge dy = \omega_i \wedge \omega_j$ entonces se tiene que

$$\delta_{23}\omega_1 + \delta_{31}\omega_2 + \delta_{12}\omega_3 = 0$$

Para probarlo, supongamos que $\omega_i = a_i dx + b_i dy$. Es directo que $\omega_i \wedge \omega_j = (a_i b_j - b_i a_j) dx \wedge dy$. Con esto tenemos que $\delta_{ij} = a_i b_j - b_i a_j$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \delta_{23}\omega_1 + \delta_{31}\omega_2 + \delta_{12}\omega_3 &= (a_2 b_3 - b_2 a_3)(a_1 dx + b_1 dy) + (a_3 b_1 - b_3 a_1)(a_2 dx + b_2 dy) \\ &\quad + (a_1 b_2 - b_1 a_2)(a_3 dx + b_3 dy) \\ &= (a_1 a_2 b_3 - a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 a_3) dx \\ &\quad + (b_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 a_3 + b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3) dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lema 2.2.1. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ tres 1-formas tales que sus productos exteriores $\alpha_i \wedge \alpha_j$ sean no nulos si $i \neq j$. Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, entonces existe una única 1-forma η tal que $d\alpha_i = \eta \wedge \alpha_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Demostración. Como la dimensión del espacio ambiente es 2, toda 2-forma es descomponible. En particular, cada $d\alpha_i$ lo es, existen funciones β_i tales que $d\alpha_i = \beta_i dx \wedge dy$.

Denotamos $\alpha_i = \alpha_i^1 dx + \alpha_i^2 dy$, supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha_i^1(0) \neq 0$, ya que $\alpha_i(0) \neq 0$. Entonces tomando $\gamma_i = \frac{-\beta_i}{\alpha_i^1} dy$ tenemos que $\gamma_i \wedge \alpha_i = d\alpha_i$.

Por tanto, existen 1-formas γ_i tales que $d\alpha_i = \gamma_i \wedge \alpha_i$, para todo i . Nótese que podemos sustituir γ_i por $\gamma_i + a_i \alpha_i$ con $a_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$. La diferencia $\gamma_1 - \gamma_2$ es una 1-forma y como $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ es una base de $\Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$, podemos escribir $\gamma_1 - \gamma_2 = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2$. Definimos $\eta = \gamma_1 - a_1 \alpha_1 = \gamma_2 - a_2 \alpha_2$, es claro que $d\alpha_1 = \eta \wedge \alpha_1$ y $d\alpha_2 = \eta \wedge \alpha_2$. Como $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$, entonces $d\alpha_3 = \eta \wedge \alpha_3$. Con esto tenemos la existencia de η . Para la unicidad, supongamos que existe $\eta' \neq \eta$ con $d\alpha_i = \eta' \wedge \alpha_i$, para $i = 1, 2, 3$. Entonces $(\eta - \eta') \wedge \alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y esto sólo es posible si $\eta - \eta' = 0$, por ser α_1 y α_2 linealmente independientes (por la propiedad 4 de la proposición 1.1.3). \square

La **curvatura** de $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathcal{W}(\delta_{23}\omega_1, \delta_{31}\omega_2, \delta_{12}\omega_3)$ es $d\eta$. Lo denotaremos por $K(\mathcal{W})$. Hasta ahora hemos demostrado que existe una única 2-forma η , que viene determinada por la presentación escogida de \mathcal{W} . Para ver que es un invariante de \mathcal{W} falta ver que $d\eta$ no depende de la presentación escogida. Supongamos que tenemos tres 1-formas ω'_1, ω'_2 y ω'_3 que nos definen el mismo 3-web que ω_1, ω_2 y ω_3 . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\omega'_i = a_i\omega_i$ para $i = 1, 2, 3$. Una normalización de esta presentación viene dada por las funciones $\delta'_{ij} = a_i a_j \delta_{ij}$, siguiendo la notación previa al lema 2.2.1, es decir, $\delta'_{23}\omega'_1 + \delta'_{31}\omega'_2 + \delta'_{12}\omega'_3 = 0$, porque tenemos

$$\delta'_{23}\omega'_1 + \delta'_{31}\omega'_2 + \delta'_{12}\omega'_3 = a_1 a_2 a_3 (\delta_{23}\omega_1 + \delta_{31}\omega_2 + \delta_{12}\omega_3).$$

Por lo que, en realidad, comprobar que $d\eta$ no depende de la presentación de \mathcal{W} escogida es lo mismo que comprobar que no depende de la normalización empleada. Denotemos $g = a_1 a_2 a_3$. Tenemos que $d(g\omega_i) = dg \wedge \omega_i + g d\omega_i = \left(\frac{dg}{g} + \eta\right) \wedge (g\omega_i) = (d \log(g) + \eta) \wedge (g\omega_i)$. Con esto, la 1-forma η' correspondiente a la segunda normalización es $\eta' = d \log(g) + \eta$. Como $d(d \log(g)) = 0$, tenemos que $d\eta' = d\eta$. Además, es obvio que la curvatura no depende del orden en el que demos las 1-formas que definen \mathcal{W} . Por tanto la curvatura $K(\mathcal{W})$ es un invariante de \mathcal{W} . El siguiente lema nos da una forma para calcular esta curvatura para un 3-web plano.

Lema 2.2.2. *Si $\mathcal{W} = \mathcal{W}(dx, dy, df)$, con $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0)$, entonces*

$$K(\mathcal{W}) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\log(f_x/f_y)) dx \wedge dy$$

En particular, si $f(x, y) = x + y + xy(x - y)(\mathcal{K} + h.o.t)$ entonces la curvatura en el origen es

$$K(\mathcal{W})(0) = 4\mathcal{K} dx \wedge dy$$

donde $\mathcal{K} \in \mathbb{C}$.

Demostración. Denotemos $df = f_x dx + f_y dy$. Como vamos a acumular varios índices de derivadas parciales, también usaremos la notación ∂_x, ∂_y para denotar a las derivadas parciales respecto de x e y , respectivamente. Tomamos como normalización $\omega_1 = -f_x dx$, $\omega_2 = -f_y dy$ y $\omega_3 = df$. Sabemos que $f_x \neq 0 \neq f_y$ por ser $dx \wedge df \neq 0 \neq dy \wedge df$ (condición de posición general de los espacios tangentes de las foliaciones). Veamos que $\eta = \frac{\partial_x f_y}{f_y} dx + \frac{\partial_y f_x}{f_x} dy$. Tenemos que

$$d\omega_1 = -df_x \wedge dx - f_x d(dx) = -(\partial_x f_x dx + \partial_y f_x dy) \wedge dx = \partial_y f_x dx \wedge dy$$

$$\eta \wedge (-f_x dx) = \left(\frac{\partial_x f_y}{f_y} dx + \frac{\partial_y f_x}{f_x} dy \right) \wedge (-f_x dx) = \partial_y f_x dx \wedge dy$$

El caso de ω_2 es exactamente igual, intercambiando las x por y y viceversa; con $d\omega_2 = -\partial_x f_y dx \wedge dy$. Como $d\omega_3 = (-\partial_y f_x + \partial_x f_y) dx \wedge dy = d(df) = 0$ y

$$\eta \wedge \omega_3 = \left(\frac{\partial_x f_y}{f_y} dx + \frac{\partial_y f_x}{f_x} dy \right) \wedge (f_x dx + f_y dy) = (-\partial_y f_x + \partial_x f_y) dx \wedge dy = 0$$

Tenemos que η es la 1-forma que buscábamos. Ahora tenemos que calcular $d\eta$.

$$\begin{aligned} d\eta &= d\left(\frac{\partial_x f_y}{f_y}\right) \wedge dx + d\left(\frac{\partial_y f_x}{f_x}\right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial_{xy}^2 f_y}{f_y} - \partial_x f_y \frac{\partial_y f_y}{f_y^2}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial_{xy}^2 f_x}{f_x} - \partial_y f_x \frac{\partial_x f_x}{f_x^2}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_y \log \left(\frac{f_x}{f_y} \right) dx \wedge dy &= \partial_x \left(\frac{\partial_y f_x}{f_x} - \frac{\partial_y f_y}{f_y} \right) dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{f_x \partial_{xy}^2 f_x - \partial_x f_x \partial_y f_x}{f_x^2} - \frac{f_y \partial_{xy}^2 f_y - \partial_y f_y \partial_x f_y}{f_y^2} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que $d\eta = \partial_x \partial_y \log \left(\frac{f_x}{f_y} \right) dx \wedge dy$. Ahora nos queda la última parte. Vamos a calcular unas derivadas de f teniendo en cuenta los *h.o.t* para ver que podemos obviarlos, ya que sus sucesivas derivadas siempre quedan multiplicadas por x o y , y por tanto se anulan en 0. Primero calculamos $f_x = 1 + (\mathcal{K} + h.o.t)(2xy - y^2) + xy(x - y)h.o.t_x$, $f_y = 1 + (\mathcal{K} + h.o.t)(-2xy + x^2) + xy(y - x)h.o.t_y$, $\partial_x f_x = 2(\mathcal{K} + h.o.t)y + (2xy - y^2)h.o.t_x + (2xy - y^2)h.o.t_x + xy(x - y)h.o.t_{xx}$. Con esto ya se ve que podemos omitir los *h.o.t* sin problema. Seguimos calculando, $\partial_y f_x = 2\mathcal{K}x - 2\mathcal{K}y$, $\partial_x f_y = -2\mathcal{K}y + 2\mathcal{K}x$, $\partial_y f_y = -2\mathcal{K}x$, $\partial_{xy}^2 f_x = 2\mathcal{K}$ y $\partial_{xy}^2 f_y = -2\mathcal{K}$. Ahora sustituimos en la expresión que ya hemos calculado para $d\eta$.

$$d\eta = \left(\frac{(1+k(2xy-y^2))2\mathcal{K}-2\mathcal{K}y(2\mathcal{K}x-2\mathcal{K}y)}{(1+\mathcal{K}(2xy-y^2))^2} + \frac{(1+\mathcal{K}(-2xy+x^2))2\mathcal{K}+2\mathcal{K}x(2\mathcal{K}y-2\mathcal{K}x)}{(1+k(-2xy+x^2))^2} \right) dx \wedge dy$$

Y al evaluar esta expresión en 0 llegamos a que $d\eta = 4\mathcal{K}dx \wedge dy$ □

Ahora vamos a introducir otro invariante para 3-webs, su holonomía. Sea $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3$, denotaremos por L_1, L_2, L_3 las hojas de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ que contienen al origen, respectivamente. Sea $p_1 \in L_1$ un punto lo suficientemente cercano al origen como para que la intersección de la hoja de \mathcal{F}_3 que lo contiene con L_2 sea un único punto, p_2 . Esto es posible porque la hipótesis de que sus espacios tangentes sean distintos dos a dos se cumple en un entorno de 0. Esta asignación nos da el germen de un biholomorfismo $h_{12} : (L_1, 0) \rightarrow (L_2, 0)$. De forma análoga se definen h_{23}, h_{31} . Definimos el (germen de) biholomorfismo

$$\begin{aligned} h &: (L_1, 0) \longrightarrow (L_1, 0) \\ h &= h_{31} \circ h_{23} \circ h_{12} \circ h_{31} \circ h_{23} \circ h_{12} \end{aligned}$$

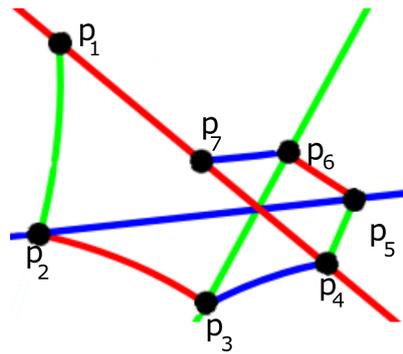


Figura 2.2: Holonomía de un 3-web

En la figura 2.2 las curvas rojas se corresponden con \mathcal{F}_1 , las azules con \mathcal{F}_2 y las verdes con \mathcal{F}_3 . Veamos que el biholomorfismo h correspondiente a cualquier otro 3-web \mathcal{W}' biholomórficamente equivalente a \mathcal{W} es una conjugación de h o de h^{-1} mediante un elemento de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Con esto tendremos que h es un invariante de \mathcal{W} . A la clase de conjugación a través de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ del grupo generado por h es a lo que llamaremos **holonomía** de \mathcal{W} en 0. Aunque esa sea la definición precisa, de ahora en adelante nos referiremos a h

como la holonomía de \mathcal{W} . Empezamos comprobando lo que pasa al permutar los papeles de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$. Vamos a hacer con todo detalle un caso, el resto son análogos y tan sólo daremos el resultado. La notación que usamos para permutaciones es la siguiente: (123) representa la permutación en la que el 1 va al 2, el 2 al 3 y el 3 al 1. Si consideramos la permutación (123) entonces el biholomorfismo correspondiente h' se corresponde con

$$L_2 \xrightarrow{h_{23}} L_3 \xrightarrow{h_{31}} L_1 \xrightarrow{h_{12}} L_2 \xrightarrow{h_{23}} L_3 \xrightarrow{h_{31}} L_1 \xrightarrow{h_{12}} L_2$$

Por lo que es obvio que $h' = h_{12} \circ h \circ h_{12}^{-1}$. En la siguiente tabla se pone la relación entre h y h' para las permutaciones restantes.

Permutación	h'	Permutación	h'
(23)	h^{-1}	(12)	$(h_{31} \circ h_{23})^{-1} \circ h^{-1} \circ h_{31} \circ h_{23}$
(13)	$h_{23} \circ h_{12} \circ h^{-1} \circ (h_{23} \circ h_{12})^{-1}$	(132)	$h_{13} \circ h \circ h_{13}^{-1}$

Sean $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ y $\mathcal{W}' = \varphi^* \mathcal{W}$, entonces el biholomorfismo correspondiente h' es igual a $\varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$. Para ver esto, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L_i & \xrightarrow{h_{ij}} & L_j \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ L'_i & \xrightarrow{h'_{ij}} & L'_j \end{array}$$

Con el que es obvio que se cumple que $h'_{ij} = \varphi^{-1} \circ h_{ij} \circ \varphi$. A partir de esto es claro que $h' = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$.

Lema 2.2.3. Sean $\mathcal{K} \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{W} = \mathcal{W}(dx, dy, df)$, con $f(x, y) = x + y + xy(x - y)(\mathcal{K} + h.o.t)$, entonces la holonomía de \mathcal{W} en 0 está generada por $h : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ con

$$h(x) = x - 4\mathcal{K}x^3 + h.o.t$$

Demostración. Sea $p_1 = (0, t) \in (L_1, 0)$. Para calcular p_2 , nótese que f es igual a t al evaluarse en $p_1 = (0, t)$. Por esto la hoja de \mathcal{F}_3 que pasa por p_1 corta a \mathcal{F}_2 en $p_2 = (t, 0)$. Ahora buscamos p_3 , el punto de intersección de L_3 con la hoja de \mathcal{F}_1 que contenga a p_2 . Es claro que la primera coordenada debe ser t , por ser cada hoja de \mathcal{F}_1 constante en la primera coordenada. Para calcular la segunda coordenada hay que resolver $f(t, y) = 0$. Con un cálculo directo se obtiene $y = -t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t$. y por ello $p_3 = (t, -t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t)$. Comprobemos este paso, notemos que es posible despejar y por el teorema de la función implícita, sea $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$. Sustituimos en la ecuación y obtenemos $a_0 = 0$, $a_1 + 1 = 0$, $a_2 = 0$ y $a_3 - \mathcal{K}(a_1)^2 + \mathcal{K}a_1 = 0$, de donde obtenemos que $y = -t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t$. Ahora queremos calcular $p_4 \in L_1$. Como nos estamos moviendo a través de una hoja de \mathcal{F}_2 , es claro que dejamos la segunda coordenada fija y nos movemos por la primera coordenada hasta llegar a $p_4 = (0, -t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t)$. Ahora tenemos que repetir exactamente el mismo proceso que hemos hecho hasta ahora. Primero usamos que f es igual a $-t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t$ al evaluarse en p_4 y por lo tanto $p_5 = (-t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t, 0)$. Ahora, es claro que la primera coordenada de p_6 es igual a $-t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t$, para calcular su segunda coordenada hay que resolver $f(-t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t, y) = 0$. Se obtiene que $y = t - 4\mathcal{K}t^3 + h.o.t$, por lo que $p_6 = (-t + 2\mathcal{K}t^3 + h.o.t, t - 4\mathcal{K}t^3 + h.o.t)$. Por esto, para calcular p_7 basta con dejar fija la primera coordenada hasta llegar a $x = 0$, por lo que $p_7 = (0, t - 4\mathcal{K}t^3 + h.o.t)$, como queríamos demostrar. \square

Definición 2.2.4. Sea \mathcal{W} un 3-web, esto es, $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3$ con $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ y \mathcal{F}_3 gérmenes de foliaciones holomorfas. Diremos \mathcal{W} es **hexagonal** si la holonomía de \mathcal{W} en cualquier punto $p \in (\mathbb{C}^2, 0)$ es igual a la identidad.

Teorema 2.2.5. Sea $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{F}_3$ un 3-web en $(\mathbb{C}^2, 0)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El web \mathcal{W} es hexagonal.
2. La 2-forma $K(\mathcal{W})$ es idénticamente nula.
3. Existen 1-formas cerradas η_i que definen \mathcal{F}_i , $i = 1, 2, 3$, tales que $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$.
4. El web \mathcal{W} es equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy, d(x+y))$.

Demostración. Veamos que 1 implica 2. Sea $p \in (\mathbb{C}^2, 0)$, veamos que $K(\mathcal{W})(p) = 0$. Para ello, haciendo un cambio de coordenadas podemos considerar que p es nuestro origen de coordenadas y que, por el Lema 2.1.4, el web \mathcal{W} es equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy, df)$ con $f = x + y + xy(x-y)(\mathcal{K} + h.o.t)$, para un cierto $\mathcal{K} \in \mathbb{C}$. Nótese que este \mathcal{K} depende, en principio, del punto p escogido (por el cambio de coordenadas). Como nuestra hipótesis es que la holonomía de \mathcal{W} en p es la identidad, sabemos que \mathcal{K} es 0 por el Lema 2.2.3. Usando el Lema 2.2.2 tenemos que $K(\mathcal{W})$ es nula en nuestro origen de coordenadas, que en este caso es p . Como este procedimiento se puede hacer para todo $p \in (\mathbb{C}^2, 0)$, tenemos que $K(\mathcal{W}) \equiv 0$.

Supongamos que ahora la afirmación 2 es cierta y que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ con $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Sea η la 1-forma dada por el Lema 2.2.1. Como $K(\mathcal{W}) = 0$, entonces la 1-forma η es cerrada. Como η está definida en un conjunto simplemente conexo, η es exacta y sabemos que existe una función u tal que $\eta = du$. Definimos $\eta_i = \exp(-u)\omega_i$. Entonces $d\eta_i = -\eta \wedge \exp(-u)\omega_i + \exp(-u)d\omega_i = 0$, donde hemos usado que $d\omega_i = \eta \wedge \omega_i$. Además, $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = \exp(-u)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = 0$. Por tanto 2 implica 3.

Ahora asumimos que 3 es cierta. Igual que antes, sabemos que las 1-formas η_i son exactas, definimos $f_i(x)$ como las funciones tales que $\eta_i = df_i$ para $i = 1, 2, 3$, y

$$\phi(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

es un biholomorfismo, porque la condición de posición general de los espacios tangentes se traduce en que la aplicación tangente de ϕ tiene rango máximo y, por ello, podemos usar el teorema de la función implícita. Se cumple que $\phi^*\mathcal{W}(dx, dy, d(x+y)) = \mathcal{W}(df_1, df_2, df_3)$, por ser $\eta_1 + \eta_2 = -\eta_3$. Por tanto \mathcal{W} es equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy, d(x+y))$.

La demostración de que 4 implica 1 es obvia, basta ver la figura 2.3. □

Ejemplo 2.2.6. Con este ejemplo vamos a ver un 3-web que no es hexagonal, usando el teorema previo. Vamos a considerar el web $\mathcal{W}(dx, dy, d((x+y)e^{-x}))$, en la figura 2.4 se puede ver un dibujo. Calculemos su curvatura usando el lema 2.2.2. Usando el lenguaje de ese resultado, tenemos $f = (x+y)e^{-x}$ y es directo calcular $f_x = e^{-x} - (x+y)e^{-x}$, $f_y = e^{-x}$ y

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log\left(\frac{f_x}{f_y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(1-x-y) = \frac{-1}{(1-x-y)^2}$$

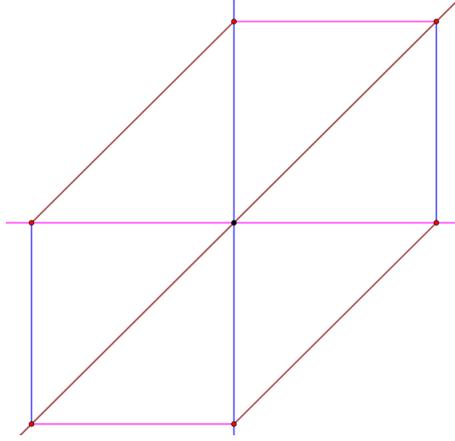


Figura 2.3: Holonomía de un 3-web hexagonal

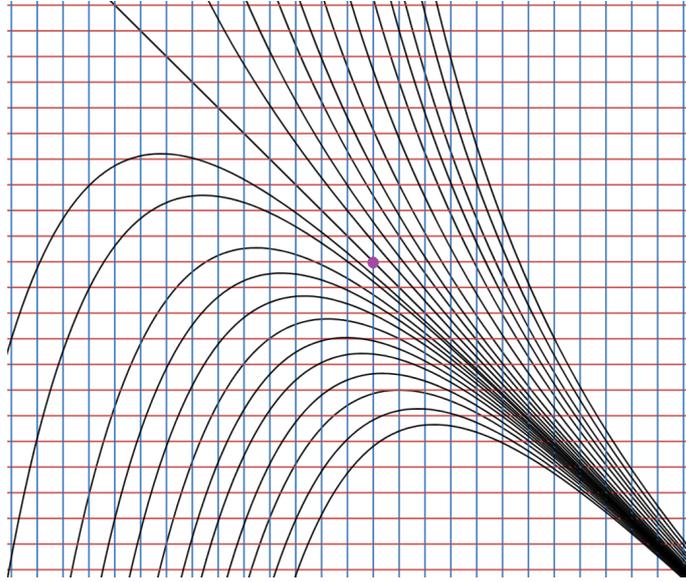


Figura 2.4: Web no hexagonal

Por lo tanto $K(\mathcal{W})(p) \neq 0$, para todo $p \in (\mathbb{C}^2, 0)$. Por el teorema 2.2.5 tenemos que \mathcal{W} no es hexagonal. Además, por ser $K(\mathcal{W})(p) \neq 0$ para todo $p \in (\mathbb{C}^2, 0)$, repitiendo un argumento como el de la demostración del teorema 2.2.5, tenemos que su holonomía también tiene que ser distinta de la identidad en cualquier punto. Calculemos su holonomía en 0 para comprobarlo. Por comodidad, vamos a calcular lo holonomía permutando los papeles de las foliaciones usando la permutación (13). Tomamos un punto p_1 en la hoja de \mathcal{F}_3 que pasa por 0, que es la recta $x + y = 0$, es decir, L_3 es el conjunto $\{x + y = 0\}$. Por otra parte, $L_1 = \{x = 0\}$ y $L_2 = \{y = 0\}$. Por construcción, $p_1 = (x, -x)$. Seguir la hoja correspondiente de \mathcal{F}_1 hasta llegar a L_2 consiste en igualar a 0 la segunda coordenada y dejar fija la primera, por lo que $p_2 = (x, 0)$. Siguiendo un razonamiento idéntico al de la demostración de 2.2.3 obtenemos:

$$\begin{aligned} p_3 &= (0, xe^{-x}), & p_4 &= (-xe^{-x}, xe^{-x}), & p_5 &= (-xe^{-x}, 0) \\ p_6 &= (0, -xe^{x(e^{-x}-1)}), & p_7 &= (xe^{x(e^{-x}-1)}, -xe^{x(e^{-x}-1)}) \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(x) = xe^{x(e^{-x}-1)}$ es la holonomía de \mathcal{W} en el 0.

Una generalización de esta discusión que hemos hecho sobre 3-webs planos puede generalizarse al caso de k -webs planos, con $k \geq 3$. Diremos que un k -web \mathcal{W} en $(\mathbb{C}^2, 0)$ es *hexagonal* si cualquier 3-subweb es hexagonal. Lógicamente, un subweb no es más que el web formado por un subconjunto de las foliaciones que definen \mathcal{W} .

Ejemplo 2.2.7. Un tipo de ejemplo sencillo de k -web plano hexagonal es el de webs dados por haces de rectas. Para ver que esto es así, es obvio que basta comprobarlo para el caso con $k = 3$. Sean p_1, p_2 y p_3 los puntos base de cada haz de rectas, podemos ver un dibujo de este web en la figura 2.5. Lo haremos usando el conocido Teorema de Desargues. Este teorema nos dice lo siguiente: sean ABC y DEF dos triángulos en el plano proyectivo. Los puntos $AB \cap DE$, $AC \cap DF$ y $BC \cap EF$ están alineados si y sólo si BE , AD y CF concurren en un punto. En nuestro caso queremos ver que la holonomía de este web es trivial, con la notación usada hasta ahora esto se traduce en ver que q_1, q_6 y p_2 están alineados. En la figura 2.6 estamos calculando la holonomía con centro en A , q_1 es E , q_3 es C , q_4 es B y q_6 es F . Mientras, D es la intersección de la hoja de \mathcal{F}_3 que pasa por x_1 con la hoja de \mathcal{F}_1 que pasa por q_6 .

Ahora sólo queda usar directamente el Teorema de Desargues. Las rectas BE , AD y CF se cortan en A , por lo que los puntos $AB \cap DE = E$, $AC \cap DF = F$ y $BC \cap EF = p_2$ están alineados.

Nota 2.2.8. En la figura 2.6 estamos considerando el web en un entorno de A lo bastante pequeño como para que no contenga a p_1, p_2, p_3 . Esto no es estrictamente necesario, ya que podría trabajarse con webs singulares, esto es, webs cuyas foliaciones tienen singularidades. Una singularidad en un web, sin entrar en muchos detalles, consiste en un punto por el que pasan varias hojas distintas de una misma foliación. Como en este trabajo no vamos a considerar estos casos, directamente los omitimos.

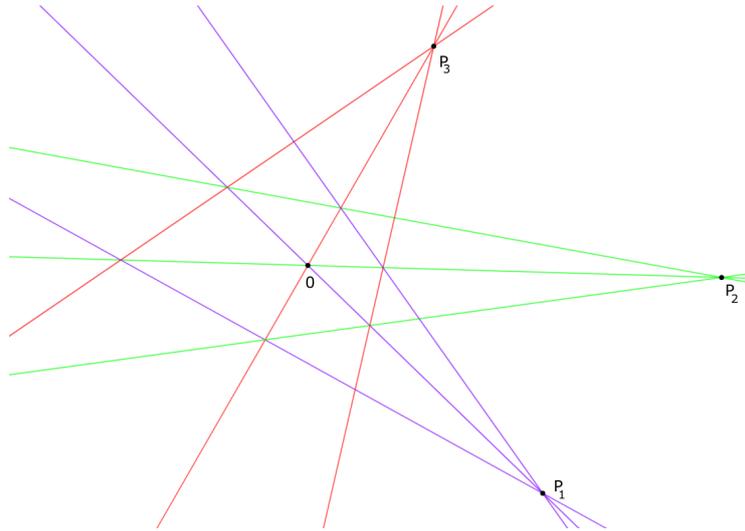


Figura 2.5: 3-web dado por haces de rectas.

Para poder dar el último resultado de webs vamos a necesitar un resultado clásico de geometría proyectiva: el teorema de Chasles, por lo que le enunciamos y demostramos. Usamos [4] como referencia para su enunciado y su demostración.

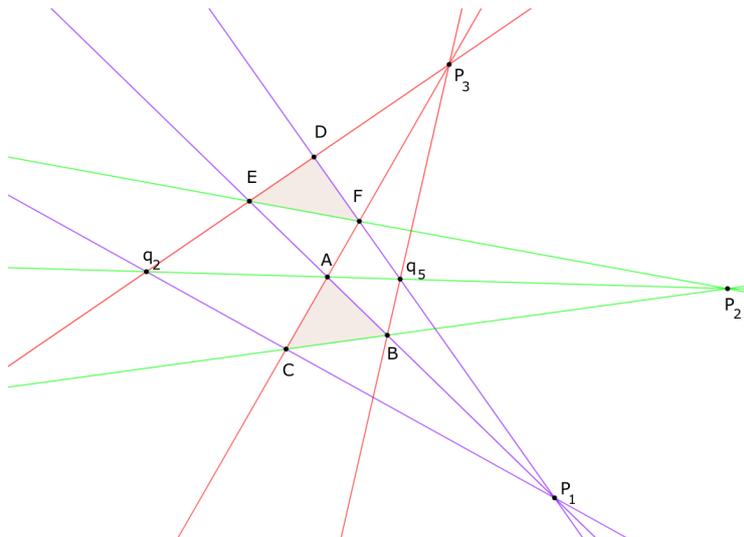


Figura 2.6: Holonomía de un 3-web dado por haces de rectas.

Teorema 2.2.9 (Chasles). Sean $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}^2$ dos cúbicas que se cortan en 9 puntos distintos. Si $X \subset \mathbb{P}^2$ es una cúbica que contiene a 8 puntos de esos 9, entonces debe contenerlos a todos.

Demostración. Diremos que un conjunto de puntos Γ impone l condiciones en los polinomios de grado d si el subespacio vectorial de polinomios de grado d que se anulan en Γ tiene codimensión l . En nuestro caso, $\Gamma = \{p_1, \dots, p_9\} = X_1 \cap X_2$ y $d = 3$. Lo que vamos a ver es que cualquier subconjunto $\Gamma' \subset \Gamma$ con $|\Gamma'| = 8$ impone la misma cantidad de condiciones que Γ . Esto implica que si una curva de grado 3 pasa por 8 puntos cualesquiera de Γ entonces debe pasar por todos. Lo primero de lo que debemos darnos cuenta es de que Γ impone, a lo sumo, 8 condiciones. Esto es así porque el espacio de polinomios en 3 variables de grado 3 tiene dimensión 10 y tenemos dos polinomios linealmente independientes, los que definen X_1 y X_2 respectivamente, X_1 y X_2 que se anulan en Γ . Si ahora vemos que cualquier subconjunto $\Gamma' \subset \Gamma$ con $|\Gamma'| = 8$ impone 8 condiciones, hemos terminado.

Para ver esto vamos a probar un resultado un poco más general. Sea $\Omega = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{P}^2$ un conjunto de $n \leq 2d + 2$ puntos distintos. Los puntos de Ω imponen menos de n condiciones en las curvas de grado d sólo si $d + 2$ de esos puntos son colineales o si $n = 2d + 2$ y Ω está contenido en una cónica. Es cierto el recíproco de este resultado, pero como no nos interesa no lo probaremos. Con este resultado tenemos lo que queremos, tomamos $\Omega = \Gamma'$, $n = 8$ y $d = 3$. Si Γ' está contenido en una cónica C , entonces X_1 y X_2 deben contener a una componente de C , en cuyo caso no se cumple que la intersección $X_1 \cap X_2$ sea finita. De la misma manera, si existiera una recta L que contenga a 4 o más puntos de Γ' entonces $L \subset X_1 \cap X_2$, contradicción.

Ahora veamos que este resultado es cierto, por inducción en d y, en segundo lugar, en n . Por la inducción en n supondremos que cualquier subconjunto propio de Ω (un subconjunto es propio si es no vacío y distinto del total) con k elementos impone k condiciones en el conjunto de curvas de grado d . Por tanto, demostrar que Ω no impone n condiciones se resume en demostrar que cualquier curva de grado d que contenga a todos los puntos de Ω salvo 1 debe contener a todo Ω .

Si $d = 1$ entonces un conjunto Ω con $n \leq 4$ no impone n condiciones sólo si $n = 3$ y los puntos de Ω están alineados o si $n = 4$ (nótese que dados 5 puntos cualesquiera siempre hay una cónica que pasa por ellos). Supongamos que el resultado es cierto para d y veamos que entonces también es cierto para $d + 1$.

Si $n \leq d + 1$, queremos probar que Ω impone n condiciones. Para ello basta ver que para cualquier punto $p \in \Omega$ existe una curva de grado d que contiene a $\Omega - \{p\}$. Tomamos una recta que pase por cada punto $q \in \Omega - \{p\}$, que no contenga a p , y una curva de grado $d - n - 1$ que no pase por p . La unión de esas rectas y esa curva nos da una curva de grado d que no contiene a p y sí contiene a $\Omega - \{p\}$.

Ahora supongamos que $n > d + 1$. Supongamos que existe una recta L que contiene a exactamente $d + 1$ puntos de Ω . Sea Ω' el conjunto de los puntos que no están en L , nótese que el cardinal de Ω' debe ser $n - d - 1 \leq d + 1$. Afirmamos que Ω' no impone $n - d - 1$ condiciones independientes en curvas de grado $d - 1$, ya que si lo hiciera entonces podríamos encontrar una curva X de grado $d - 1$ que contenga a todos los puntos de Ω' menos 1 y entonces la unión $L \cup X$ es una curva de grado d que contiene a todos los puntos de Ω menos 1. Es decir, si Ω' impone $n - d - 1$ condiciones entonces Ω impone n condiciones. Como estamos estudiando el caso contrario, en el que Ω no impone n condiciones, entonces por inducción tenemos que Ω' debe estar formado por $d + 1$ puntos alineados en una recta M . Por tanto, o L contiene a $d + 2$ puntos de Ω o $n = 2d + 2$ y Ω está contenido en la cónica $L \cup M$.

Ahora supongamos que una recta L contiene a $l \geq 3$ puntos de Ω . Repitiendo el argumento del párrafo anterior, el resto de $n - l$ puntos de Ω no impone $n - l$ condiciones para las curvas de grado $d - 1$ y por ello deben haber $d + 1$ puntos alineados en Ω . Por tanto estamos en las condiciones del párrafo anterior.

Ahora nos queda el caso en el que en Ω no hay 3 puntos alineados. Elegimos 3 puntos p_1, p_2, p_3 de Ω , sea Ω' su complementario. Si, para cualquier $i \in \{1, 2, 3\}$, el conjunto $\Omega' \cup \{p_i\}$ impone $n - 2$ condiciones en las curvas de grado $d - 1$, hemos terminado: encontramos una curva X de grado $d - 1$ que contenga Ω' pero no p_i y la unión de X con la recta que pasas por p_j y p_k , $j \neq i \neq k$ con $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, nos da una curva de grado d que contiene a todos los puntos de Ω salvo 1. Por tanto, $\Omega' \cup \{p_i\}$ no impone $n - 2$ condiciones en curvas de grado $d - 1$. Como no puede tener $d + 1$ puntos alineados, tenemos por inducción que $n = 2d + 2$ y que el conjunto $\Omega' \cup \{p_i\}$ está en una cónica C_i . Si estamos en el caso $d = 2$ hemos terminado, ya que 6 puntos no imponen 6 condiciones si y sólo si están en una cónica (porque una cónica viene determinada por 5 puntos). Por otra parte, si $d \geq 3$, entonces Ω' contiene al menos 5 puntos, no alineados, y por ello debe haber a lo sumo 1 cónica que contenga a Ω . Por tanto las cónicas C_i deben ser iguales a una única cónica C que contiene a todo Ω . \square

Proposición 2.2.10. *Si $C \subset \mathbb{P}^2$ es una cúbica reducida y $l \subset \mathbb{P}^2$ es una recta que interseca a C transversalmente entonces el 3-web $\mathcal{W}_C(l(0))$ es hexagonal.*

Demostración. Vamos a usar la notación introducida en el ejemplo 2.1.2. Para evitar confusiones, denotaremos por q_1, \dots, q_7 a los puntos que aparecen al calcular la holonomía de $\mathcal{W}_C(l(0))$. Denotamos la restricción de C a un entorno lo bastante pequeño de $l(0)$ como $C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde cada C_i es un germen de curva algebraica. Recordemos que sabemos que los puntos de las hojas de cada foliación \mathcal{F}_i que pasan por $l \in (\mathbb{P}^2, 0)$ se corresponden, por dualidad, con rectas que pasan por $C_i \cap l$. Por esto, elegir un punto $q_1 \in L_1$ es lo mismo

que elegir una recta a través de p_1 . Si esta recta está lo bastante cerca de l , entonces corta a C_3 en un único punto que también viene dado por q_1 . De esta manera indentificamos cada punto en L_1 con un punto en C_3 . De la misma manera, identificamos L_2 con C_1 y L_3 con C_1 . Es recomendable mirar la figura 2.7 para seguir el siguiente argumento. Seguir la hoja de \mathcal{F}_3 que pasa por $q_1 \in C_3$ hasta llegar a L_2 se corresponde con considerar la recta q_1p_2 y hacer su intersección con C_1 . El punto $q_2 = q_1p_2 \cap C_1 \in C_1$ se corresponde con un punto en L_2 , por construcción $h_{12}(q_1) = q_2$. Siguiendo esta misma idea, obtenemos:

$$\begin{aligned} q_3 &= q_2p_3 \cap C_2 \in L_3 \\ q_4 &= q_3p_1 \cap C_3 \in L_1 \\ q_5 &= q_4p_2 \cap C_1 \in L_2 \\ q_6 &= q_5p_3 \cap C_2 \in L_3 \\ q_7 &= q_6p_1 \cap C_3 \in L_1 \end{aligned}$$

Nótese que, por definición, las rectas q_1q_2 y $q_1p_2(l)$ son las mismas, ya que ambas contienen a q_1, q_2, p_2 . De la misma manera, la recta q_3q_4 contiene también a p_1 y q_5q_6 contiene a p_3 . Por tanto la cúbica reducida $X_1 = q_1q_2 \cup q_3q_4 \cup q_5q_6$ corta a $X_2 = C$ en exactamente 9 puntos distintos, $p_1, p_2, p_3, q_1, \dots, q_6$. De la misma forma, la cúbica $X = q_2q_3 \cup q_4q_5 \cup q_6q_7$ corta a $X_2 = C$ en 9 puntos, $p_1, p_2, p_3, q_2, \dots, q_7$. Por tanto $X_1 \cap X_2 \cap X$ contiene al menos a 8 puntos. Por el teorema de Chasles 2.2.9 tenemos que debe contener a 9 puntos y, por ello, q_1 debe ser igual a q_7 . Con esto la holonomía de $\mathcal{W}_C(l)$ es la identidad y, por ello, $\mathcal{W}_C(l(0))$ es un web hexagonal.

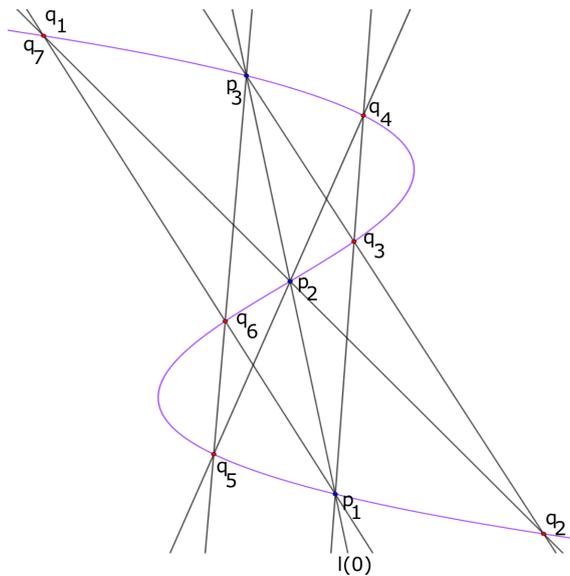


Figura 2.7: Cálculo de la holonomía de un web algebraico de una cúbica

□

Capítulo 3

Relaciones Abelianas

En el capítulo anterior hemos obtenido dos invariantes para los 3-webs planos y 3 caracterizaciones distintas del web $\mathcal{W}(dx, dy, d(x+y))$: ser hexagonal, tener curvatura 0 en todos los puntos y que existan tres 1-formas η_1, η_2, η_3 tales que $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$, $d\eta_i = 0$ y estas 1-formas nos definen el mismo web que el que estamos comparando con el web $\mathcal{W}(dx, dy, d(x+y))$. De estos tres invariantes, nos gustaría generalizar alguno de ellos para poder estudiar webs más generales. Si estamos trabajando en dimensión superior, las hojas de nuestras foliaciones tienen dimensión mayor que 1, por lo que la holonomía queda excluida. Al aumentar la dimensión, puede que no todas las 2-formas sean descomponibles, por lo que no es directo generalizar la construcción que hemos hecho en el lema 2.2.1. Por tanto, lo que vamos a estudiar para k -webs en $(\mathbb{C}^n, 0)$ será la tercera de las opciones, las relaciones abelianas.

Sea $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_k)$ un web cuasi-diferenciable en $(\mathbb{C}^n, 0)$. Una **relación abeliana** de \mathcal{W} es una k -tupla (η_1, \dots, η_k) de 1-formas tales que:

1. Para todo i , la 1-forma η_i es cerrada, es decir, $d\eta_i = 0$.
2. Para todo i , la 1-forma η_i define a la foliación \mathcal{F}_i , es decir, $\omega_i \wedge \eta_i = 0$.
3. La suma de las 1-formas η_i es igual a 0, es decir, $\sum_{i=1}^k \eta_i = 0$.

Nótese que como η_i es cerrada en un abierto simplemente conexo, entonces existe una primitiva de η_i que, además, es una integral primera de \mathcal{F}_i . En particular, si damos \mathcal{F}_i por una submersión $u_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ entonces $f_i = g_i(u_i(z))$, donde $df_i = \eta_i$, para alguna función holomorfa $g_i : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ (por la proposición 1.2.9). Esto implica que una relación abeliana es una solución de una ecuación funcional. Con esto, la condición 3 se traduce en que $\sum_{i=1}^k g_i \circ u_i = 0$. Una relación abeliana (η_1, \dots, η_k) se dice que es no trivial si al menos una de las η_i no es 0. Si todas las 1-formas η_i son no nulas, entonces la relación se dice que es **completa**. Es claro que el conjunto de relaciones abelianas de un web tiene estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial, formalmente:

$$\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \{(\eta_1, \dots, \eta_k) \in (\Omega^1(\mathbb{C}^n, 0))^k : d\eta_i = 0, \omega_i \wedge \eta_i = 0, \sum_{i=1}^k \eta_i = 0\}$$

Nótese también que un difeomorfismo φ que establezca una equivalencia entre \mathcal{W} y \mathcal{W}' establece un isomorfismo entre sus espacios de relaciones abelianas correspondientes. El **rango** de un web \mathcal{W} , denotado por $\text{rank}(\mathcal{W})$, es la dimensión de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ como \mathbb{C} -espacio

vectorial. Con esta noción y con el teorema 3.2.6, que nos dice que un 3-web plano tiene rango a lo sumo 1, se puede reescribir el teorema 2.2.5 de la siguiente manera.

Teorema 3.0.1. *Sea \mathcal{W} un 3-web plano. Son equivalentes las siguientes condiciones*

1. $\text{rank}(\mathcal{W}) = 1$
2. \mathcal{W} es equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy, d(x+y))$.

Ejemplo 3.0.2. Consideramos el web $\mathcal{W}(dx, dy, d(xy))$ en (\mathbb{C}^n, p) , donde $p \in \mathbb{C}^n$ es distinto de 0. La 3-upla $(d \log(x), d \log(y), -d \log(xy))$ es una relación abeliana de \mathcal{W} . Es obvio que cada una de esas 1-formas es cerrada, por ser $d \circ d = 0$. Además, como la derivada exterior es lineal con la suma, $d \log(x) + d \log(y) - d \log(xy) = d(\log(x) + \log(y) - \log(xy)) = d(0) = 0$. Nos falta ver que estas 1-formas definen las mismas foliaciones que las que forman \mathcal{W} . Haremos un caso, el resto son análogos.

$$\begin{aligned} d(xy) &= ydx + xdy \\ d(\log(xy)) &= \frac{y}{xy}dx + \frac{x}{xy}dy \\ &= \frac{1}{xy}d(xy) \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{xy}$ está en $\mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, p)$, por ser $p \neq 0$, tenemos que $d(xy) \wedge d(\log(xy)) = 0$, como queríamos ver. Además, por el teorema 3.2.6 sabemos que el rango de \mathcal{W} es a lo sumo 1. Por ello $\{(d \log(x), d \log(y), -d \log(xy))\}$ es una base de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$. Aplicando el teorema 3.0.1 tenemos que este web \mathcal{W} debe ser igual a $\mathcal{W}(dx, dy, d(x+y))$. En la figura 3.1 se puede ver un dibujo del web \mathcal{W} , siendo las curvas rojas las correspondientes a la foliación dada por la submersión xy

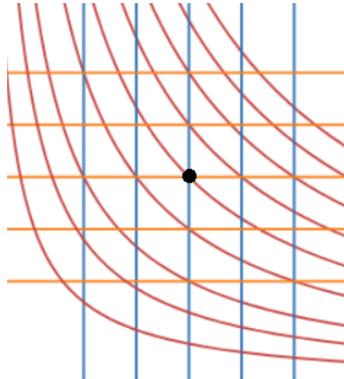


Figura 3.1: Web de rango 1

El objetivo de este capítulo es demostrar el teorema 3.2.6. En la primera sección estudiaremos un método para calcular estas relaciones abelianas, que es una versión simplificada del método de Abel para resolución de ecuaciones funcionales. El método de Abel viene descrito con todo detalle en [8]. En la segunda sección veremos como “descomponer” $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ como suma directa de subespacios tales que cada uno de ellos sea más “manejable”.

3.1. De ecuaciones funcionales a ecuaciones diferenciales

Nos vamos a limitar al caso de webs en el plano. Partimos de una ecuación de la forma $\sum_{i=1}^k g_i \circ u_i = 0$. Es claro que el \mathbb{C} -espacio vectorial

$$\{(g_1, \dots, g_k) \in (\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, 0))^k : \sum_{i=1}^k g_i \circ u_i = 0\}$$

es naturalmente isomorfo a $\mathcal{A}(\mathcal{W})$, con $\mathcal{W} = \mathcal{W}(u_1, \dots, u_k)$. Por esto, en esta sección estudiamos ese espacio en vez de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$. Para $1 \leq i \leq k$, sea $u_i(x, y) = a_i x + b_i y$ donde $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ y cumplan que $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$ siempre que $i \neq j$. Esta última condición es la que nos dice que los espacios tangentes de las foliaciones de \mathcal{W} serán distintos dos a dos, es decir, que \mathcal{W} es cuasi-diferenciable. Denotamos por $X_i = b_i \partial_x - a_i \partial_y$ a los campos vectoriales hamiltonianos de u_i , es directo comprobar que $[X_i, X_j] = 0$ (será necesario más adelante).

Habiendo construido ese web \mathcal{W} , ahora vamos a añadirle una foliación más, dada por una submersión cualquiera. Sea $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un gérmen de una submersión holomorfa tal que $X_i(u) \neq 0$ para todo i , consideramos el $(k + 1)$ -web $\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W}(u_1, \dots, u_k, u)$. Determinar el rango de $\tilde{\mathcal{W}}$ es equivalente a calcular la dimensión del espacio de funciones $g, g_1, \dots, g_k : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ que cumplan $g \circ u(x, y) = \sum_{i=1}^k g_i \circ u_i(x, y)$. Si derivamos esta ecuación por X_1 , obtenemos

$$g'(u(x, y))X_1(u(x, y)) = \sum_{i=2}^k g'_i(u_i(x, y))X_1(u_i(x, y))$$

Nótese que u_1 ya no aparece en la ecuación, por ser $X_1(u_1(x, y)) = 0$. Ahora derivamos por X_2 . Usamos que $X_2(X_1(u_2(x, y))) = X_1(X_2(u_2(x, y))) = 0$, por ser $[X_1, X_2] = 0$.

$$\begin{aligned} &g''(u(x, y))X_2(u(x, y))X_1(u(x, y)) + g'(u(x, y))X_2(X_1(u(x, y))) = \\ &= \sum_{i=3}^k [g''_i(u_i(x, y))X_2(u_1(x, y))X_1(u_i(x, y)) + g'_i(u_i(x, y))X_2(X_1(u_i(x, y)))] \end{aligned}$$

Repetimos este procedimiento k veces hasta llegar a que

$$\left(\prod_{i=1}^k X_i(u(x, y)) \right) g^{(k)}(u(x, y)) + \dots + X_k(X_{k-1}(\dots X_1(u(x, y))))g'(u(x, y)) = 0$$

donde estamos usando en cada paso que $[X_i, X_j] = 0$. Si dividimos entre $\left(\prod_{i=1}^k X_i(u) \right)$ se convierte en

$$g^{(k)}(u(x, y)) = \sum_{i=1}^{k-1} h_i(x, y)g^{(i)}(u(x, y))$$

donde cada $h_i(x, y)$ es una función meromorfa. Sea $X = u_y \partial_x - u_x \partial_y$ el campo vectorial hamiltoniano de u . Si $X(h_i) \neq 0$ para algún i , entonces derivamos por X nuestra ecuación. Con esto conseguimos reducir su orden, ya que

$$X(g^{(k)}(u(x, y))) = g^{(k+1)}(u(x, y))X(u(x, y)) = 0$$

por ser $X(u) = 0$. Si $X(h_i) = 0$ entonces $h_i = h_i(u)$, ya que por ser u una foliación estamos en condiciones de usar un argumento como el de la proposición 1.2.9. En cualquier caso, se llega a una ecuación diferencial lineal de la forma

$$g^{(l)}(u(x, y)) = \sum_{i=1}^{l-1} h_i(u(x, y))g^{(i)}(u(x, y)) \tag{3.1}$$

con $l \leq k$. Y con esta ecuación llegamos a que $\text{rank}(\mathcal{W}) \leq \text{rank}(\mathcal{W}(u_1, \dots, u_k)) + k - 1$. Esto es así porque cualquier relación abeliana de $\mathcal{W}(u_1, \dots, u_k)$ se corresponde con una relación abeliana de $\mathcal{W}(u_1, \dots, u_k, u)$ tomando $g = 0$ y el espacio de soluciones de (3.1)

tiene dimensión menor o igual que k , que tras descartar las soluciones constantes se queda en dimensión $k-1$. Nótese que si $[X_i, X_j] \neq 0$ para algunos i, j , entonces toda esta discusión deja de ser cierta. Por esto, si los polinomios u_i dejan de ser lineales y homogéneos entonces este resultado puede no ser cierto.

Ejemplo 3.1.1. Usando la notación previa, vamos a calcular $\text{rank}(\mathcal{W})$, donde $\mathcal{W} = \mathcal{W}(u_1, \dots, u_k)$ y u_1, \dots, u_k son submersiones dadas por polinomios lineales homogéneos. La respuesta es que $\text{rank}(\mathcal{W}) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$, lo probaremos por inducción. Si $k = 2$ es obvio que no hay ninguna relación abeliana, por ser el web \mathcal{W} equivalente a $\mathcal{W}(dx, dy)$. Supongamos que es cierto hasta k y veamos lo que sucede al añadir u_{k+1} . Buscando soluciones de $g \circ u_{k+1}(x, y) = \sum_{i=1}^k g_i \circ u_i(x, y)$, siguiendo la estrategia desarrollada previamente de ir derivando por el campo hamiltoniano de cada u_i , se llega a $g^{(k)}(u_{k+1}(x, y)) = 0$. Esto es así por ser $X_i(u_j) = \text{cte} \neq 0$, para todo i, j ; y como estamos suponiendo que $k > 2$ entonces las funciones h_i se anulan. Por esto g debe ser un polinomio de grado menor o igual que $k-1$. Exigiendo que $g(0) = 0$, nos queda un espacio vectorial de dimensión $k-1$ donde elegir g . Por esto,

$$\text{rank}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}_{k+1}) \leq \frac{(k-1)(k-2)}{2} + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$$

donde \mathcal{F}_{k+1} es la foliación asociada a u_{k+1} . Para ver la igualdad, vemos que para todo $j \leq k-1$ existen $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ tales que $u_{k+1}^j = \sum_{i=1}^k \lambda_{ij} u_i^j(x, y)$, donde u_i^j no es más que elevar u_i a la potencia j -ésima. Como cada u_i es de la forma $a_i x + b_i y$ entonces

$$u_i^j(x, y) = \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} a_i^l x^l b_i^{j-l} y^{j-l}$$

Con esto se ve que encontrar los coeficientes λ_{ij} es equivalente a resolver un sistema lineal con $j+1$ ecuaciones y k incógnitas. Como todos los términos de una misma ecuación van multiplicados por el mismo coeficiente binomial, omitimos estos coeficientes. Si escribimos este sistema en forma matricial obtenemos

$$\begin{pmatrix} a_{k+1}^j \\ a_j^k b_j \\ \vdots \\ a_j b_j^k \\ b_{k+1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^j & \cdots & a_k^j \\ a_1^{j-1} b_1 & \cdots & a_k^{j-1} b_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_1^{j-1} & \cdots & a_k b_k^{j-1} \\ b_1^j & \cdots & b_k^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{kj} \end{pmatrix}$$

Como lo que estamos comprobando es que este sistema tiene solución, podemos considerar sin pérdida de generalidad que $a_i \neq 0 \neq b_i$ para todo i . Si existe un i_0 tal que $a_{i_0} = 0$ entonces en esa columna hay ceros en todas las filas excepto la última, por lo que podemos “eliminarla” (de la misma manera que se hace en la eliminación Gaussiana). Sucede lo mismo si existe un i_0 tal que $b_{i_0} = 0$. Hacemos el cambio de variable $\tilde{\lambda}_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{a_i^j}$, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} a_{k+1}^j \\ a_j^k b_j \\ \vdots \\ a_j b_j^k \\ b_{k+1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \frac{b_k}{a_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{b_1}{a_1})^{j-1} & \cdots & (\frac{b_k}{a_k})^{j-1} \\ (\frac{b_1}{a_1})^j & \cdots & (\frac{b_k}{a_k})^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_{1j} \\ \vdots \\ \tilde{\lambda}_{kj} \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es una matriz de Vandermonde y, como $\frac{b_i}{a_i} \neq \frac{b_l}{a_l}$ para $i \neq l$, tiene rango máximo. Por esto, tenemos al menos $k - 1$ soluciones para g que son linealmente independientes, con lo que se alcanza la igualdad.

Lema 3.1.2. *Sean u_1, \dots, u_k funciones lineales y homogéneas, X_i los campos vectoriales hamiltonianos correspondientes a cada u_i . Supongamos que $X_i(u_j) \neq 0$ si $i \neq j$. Si $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ una submersión y g es una solución de la ecuación (3.1) entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Existen funciones holomorfas g_1, \dots, g_k tales que $g(u(x, y)) = \sum_{i=1}^k g_i(u_i(x, y))$.
2. Se verifica la identidad $X_1(X_2(\dots X_k(g(u(x, y)))))) = 0$.

Demostración. Es fácil ver que 1 implica 2. Tan sólo hay que darse cuenta de que al derivar por X_i entonces “desaparece” el sumando $g_i(u_i(x, y))$ de $g(u(x, y)) = \sum_{i=1}^k g_i(u_i(x, y))$, por ser $X_i(u_i) = 0$.

Probemos que 2 implica 1 por inducción. Para $k = 1$ tenemos que $X_1(g(x, y)) = 0$, por lo que $g(x, y) = g_1(u_1(x, y))$. Supongamos que es cierto hasta $k - 1$, es decir, que si $X_1(X_2(\dots X_{k-1}(f))) = 0$ entonces existen funciones f_1, \dots, f_{k-1} tales que $f(x, y) = \sum_{i=1}^{k-1} f_i(u_i(x, y))$, para cualquier f . Sabemos que $X_1(X_2(\dots X_k(g(u)))) = 0$, por lo que $X_1(X_2(\dots X_{k-1}(X_k(g(u(x, y)))))) = 0$ y por ello existen funciones h_1, \dots, h_{k-1} tales que

$$X_k(g(u(x, y))) = \sum_{i=1}^{k-1} h_i(u_i(x, y))$$

Sea H_i una primitiva de h_i , entonces $X_k(H_i(u_i(x, y))) = h_i(u_i(x, y))X_k(u_i(x, y))$. Como $X_k(u_i(x, y))$ es una constante no nula para $i < k$, podemos despejar $h_i(u_i(x, y))$ y sustituir en la ecuación previa para obtener

$$X_k \left(g(u(x, y)) - \sum_{i=1}^{k-1} (X_k(u_i)(x, y))^{-1} H_i(u_i(x, y)) \right) = 0$$

Por esto, debe existir una función holomorfa h_k tal que

$$g(u(x, y)) - \sum_{i=1}^{k-1} X_k(u_i(x, y))^{-1} H_i(u_i(x, y)) = h_k(u_k(x, y))$$

con lo que tenemos lo que queríamos. □

Proposición 3.1.3. *Sea $\mathcal{W} = \mathcal{W}(u_1, \dots, u_k)$, donde cada $u_i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ son submersiones dadas por polinomios lineales homogéneos. Sea $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ una submersión cualquiera y sea \mathcal{F} la foliación asociada a u . Si el $(k+1)$ -web $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}$ es cuasi-diferenciable, entonces*

$$\text{rank}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}) \leq \frac{k(k-1)}{2}$$

Además, se alcanza la igualdad si y sólo si $l = k$ en la ecuación (3.1).

Demostración. Para ver la desigualdad, por la discusión posterior a la ecuación (3.1) sabemos que $\text{rank}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}) \leq \text{rank}(\mathcal{W}) + k - 1$ y en el ejemplo 3.1.1 vimos que $\text{rank}(\mathcal{W}) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$, con lo que

$$\text{rank}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}) \leq \frac{(k-1)(k-2)}{2} + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$$

Ahora veamos lo que sucede si suponemos que se alcanza la igualdad. Empecemos repasando cómo hemos obtenido (3.1). Hemos visto que $X_1 X_2 \dots X_k(g(u)) = 0$ y por otra parte hemos desarrollado

$$X_1 X_2 \dots X_k(g(u(x, y))) = \sum_{i=1}^k f_i(x, y) g^{(i)}(u(x, y))$$

de esta expresión hemos despejado $g^{(k)}$, para lo que hay que dividir entre f_k , hemos nombrado $h_i = f_i/f_k$ y hemos derivado por el campo vectorial hamiltoniano de $u(x, y)$ hasta que hemos obtenido una ecuación que dependa sólo de $u(x, y)$. Por esto, el lema 3.1.2 nos dice que cualquier solución de $g(u) = \sum_{i=1}^k g_i(u_i)$ también es una solución de (3.1). Si $\text{rank}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}) = \frac{k(k-1)}{2}$, como por el ejemplo 3.1.1 sabemos que $\text{rank}(\mathcal{W}) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$, entonces es necesario que (3.1) tenga $k-1$ soluciones no constantes independientes en 0, por lo que $k = l$.

Si $k = l$, entonces hay $k-1$ soluciones no constantes linealmente independientes en 0 para $X_1 \dots X_k(g(u(x, y))) = 0$. El lema 3.1.2 nos dice que cada solución de $X_1 \dots X_k(g(u(x, y))) = 0$ se corresponde con una relación abeliana, por lo que $\text{rank}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}) = \text{rank}(\mathcal{W}) + k - 1$. Como $\text{rank}(\mathcal{W}) = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ por el ejemplo 3.1.1, entonces $\text{rank}(\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{F}) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$. \square

Ejemplo 3.1.4. Con este ejemplo vamos a poner en práctica la proposición previa. Sea $u : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ una submersión con $u(x, y) = a(x) + b(y)$. Sea $\mathcal{W} = \mathcal{W}(dx, dy, d(x-y), d(x+y), du)$ un 5-web diferenciable, es decir, necesitamos que $a_x(0) \neq 0$, $b_y(0) \neq 0$, $a_x(0) + b_y(0) \neq 0$ y $a_x(0) - b_y(0) \neq 0$. Estas condiciones pueden resumirse en $a_x b_y (a_x^2 - b_y^2)(0) \neq 0$. Sean X_1, \dots, X_4 los campos vectoriales hamiltonianos correspondientes a $x, y, x+y, x-y$, respectivamente. Si repetimos la construcción que hicimos para obtener la ecuación (3.1), tenemos que calcular

$$X_1 X_2 X_3 X_4(g(u)) = g''''(u) a_x b_y (a_x^2 - b_y^2) + 3g'''(u) a_x b_y (a_{xx} - b_{yy}) + g''(u) (b_y a_{xxx} - a_x b_{yyy})$$

Seguindo la construcción para obtener la ecuación (3.1), igualamos a 0 y despejamos $g''''(u)$

$$g''''(u) = 3g'''(u) \frac{a_{xx} - b_{yy}}{a_x^2 - b_y^2} + g''(u) \frac{b_y a_{xxx} - a_x b_{yyy}}{a_x b_y (a_x^2 - b_y^2)}$$

Sea X el campo hamiltoniano de u , la proposición previa nos dice que el web \mathcal{W} tiene rango máximo igual a 6, si y sólo si, $X\left(\frac{a_{xx} - b_{yy}}{a_x^2 - b_y^2}\right) = 0$ y $X\left(\frac{b_y a_{xxx} - a_x b_{yyy}}{a_x b_y (a_x^2 - b_y^2)}\right) = 0$. Esto nos da un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, cuya resolución no está al alcance de este trabajo y se puede encontrar en [9]. Algunas soluciones sencillas de este sistema son $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, $e^x + e^y$ y $\log(\text{sen}(x)\text{sen}(y))$.

Ahora vamos a cambiar un poco nuestro enfoque, vamos a ver lo que sucede cuando podemos definir un cierto tipo de automorfismos de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$. Antes de eso, damos una proposición que nos ayudará a definir estas aplicaciones.

Proposición 3.1.5. Sean \mathcal{F} un germen de una foliación holomorfa, dada por una 1-forma ω , y X un campo vectorial. Si $\omega(X) \neq 0$ y $\mathcal{L}_X \omega \wedge \omega = 0$ entonces la 1-forma $\alpha = \frac{\omega}{i_X \omega}$ es cerrada y cumple que $\mathcal{L}_X \alpha = 0$.

Demostración. Recordemos que, en este caso, $i_X(\omega) = \omega(X)$. Primero comprobemos que $d\alpha = 0$.

$$d\alpha = \frac{\omega(X)d\omega - d\omega(X) \wedge \omega}{\omega(X)^2} = \frac{\omega(X)d\omega + \omega \wedge d\omega(X)}{\omega(X)^2}$$

Por la teorema A.2.8 sabemos que $\mathcal{L}_X\omega = i_X(d\omega) + d\omega(X)$, usando que $\mathcal{L}_X\omega \wedge \omega = 0$ y haciendo el producto exterior por ω en la igualdad dada por el teorema A.2.8 tenemos que $\omega \wedge d\omega(X) = i_X(d\omega) \wedge \omega$. Denotando $\omega = \omega^1 dx + \omega^2 dy$, $X = X^1 \partial_x + X^2 \partial_y$ y usando la definición de $i_X(d\omega)$ se ve que

$$i_X(d\omega) = i_X((\omega_x^2 - \omega_y^1)dx \wedge dy) = (\omega_x^2 - \omega_y^1)(-X^2 dx + X^1 dy)$$

Sustituyendo en la expresión previa tenemos que

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{i_X(d\omega) \wedge \omega + \omega(X)d\omega}{\omega(X)^2} \\ &= \frac{(\omega_x^2 - \omega_y^1)(-X^2 dx + X^1 dy) \wedge (\omega^1 dx + \omega^2 dy) + \omega(X)(\omega_x^2 - \omega_y^1)dx \wedge dy}{\omega(X)^2} \\ &= \frac{[(\omega_x^2 - \omega_y^1)(-\omega^2 X^2 - \omega^1 X^1) + (\omega^1 X^1 + \omega^2 X^2)(\omega_x^2 - \omega_y^1)]dx \wedge dy}{\omega(X)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comprobar que $\mathcal{L}_X\alpha = 0$ es más rápido. Usando, otra vez, el teorema A.2.8 y que $d\alpha = 0$:

$$\mathcal{L}_X\alpha = i_X(d\alpha) + d(i_X(\alpha)) = d\left(\frac{\omega(X)}{\omega(X)}\right) = d(1) = 0$$

□

Definición 3.1.6. Sea \mathcal{F} un germen de foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ inducida por una 1-forma ω . Un germen de un campo vectorial X es un **automorfismo infinitesimal** de \mathcal{F} si $\mathcal{L}_X\omega \wedge \omega = 0$. Si $\omega(X) \neq 0$, entonces definimos la 1-forma $\alpha = \frac{\omega}{i_X\omega}$. Por la proposición 3.1.5 sabemos que α es cerrada y que $\mathcal{L}_X\alpha = 0$. Definimos $u(z)$ como la función tal que $du = \alpha$ y $u(0) = 0$, esta es la **integral primera canónica** de \mathcal{F} respecto a X .

Además, se cumple que

$$\mathcal{L}_X(u) = X(u) = u_x X^1 + u_y X^2 = \alpha^1 X^1 + \alpha^2 X^2 = \alpha(X) = 1$$

donde hemos usado la proposición A.2.4.

Sea X un automorfismo infinitesimal de $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_k)$, es decir, X es un automorfismo infinitesimal para todas las foliaciones de \mathcal{W} . La derivada de Lie \mathcal{L}_X induce una aplicación lineal, que denotaremos igual que la propia derivada de Lie,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X : \mathcal{A}(\mathcal{W}) &\rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{W}) \\ (\eta_1, \dots, \eta_k) &\mapsto (\mathcal{L}_X\eta_1, \dots, \mathcal{L}_X\eta_k) \end{aligned}$$

Veamos que esto es correcto. Las formas $\mathcal{L}_X(\eta)$ siguen siendo cerradas por el corolario A.2.9. Se sigue cumpliendo que $\mathcal{L}_X(\eta_1) + \dots + \mathcal{L}_X(\eta_k) = \mathcal{L}_X(\eta_1 + \dots + \eta_k) = \mathcal{L}_X(0) = 0$. Veamos que $\omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta) = 0$ si $\omega \wedge \eta = 0$, para que $\mathcal{L}_X(\eta)$ defina la misma foliación que ω . Por la proposición A.2.7, se tiene que $\omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta) = \mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) - \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta$ y ambos términos son 0. Como $\omega \wedge \eta = 0$ entonces $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = 0$. Como \mathcal{L}_X es un automorfismo infinitesimal, $\mathcal{L}_X(\omega) \wedge \omega = 0$ y como $\omega \wedge \eta = 0$ entonces $\mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta = 0$.

Sea $\mathcal{A}_i(\mathcal{W})$ el subespacio vectorial de $\Omega^1(\mathbb{C}^2, 0)$ generado por las componentes i -ésimas de cada $(\eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathcal{A}(\mathcal{W})$. Si u_i es la integral primera canónica de \mathcal{F}_i respecto a X , entonces para cada $\eta_i \in \mathcal{A}_i(\mathcal{W})$ existe un germen $f_i \in \mathbb{C}\{t\}$ tal que $\eta_i = f_i(u_i)du_i$ (estamos en las condiciones de hacer un argumento como el de la proposición 1.2.9). Supongamos que $\mathcal{A}_i(\mathcal{W})$ es no nulo, sea $\{\eta_i^\nu = f_\nu(u_i)du_i : \nu \in \{1, \dots, n_i\}\}$ una base de $\mathcal{A}_i(\mathcal{W})$, donde n_i es su dimensión como subespacio vectorial. Como la restricción de \mathcal{L}_X a $\mathcal{A}_i(\mathcal{W})$ es una aplicación lineal, existen constantes $c_{\nu\mu} \in \mathbb{C}$ tales que

$$\mathcal{L}_X(\eta_i^\nu) = \sum_{\mu=1}^{n_i} c_{\nu\mu} \eta_i^\mu$$

para cada $\nu \in \{1, \dots, n_i\}$. Para cada $\nu \in \{1, \dots, n_i\}$ también es cierto que, por la proposición A.2.4

$$\mathcal{L}_X(\eta_i^\nu) = \mathcal{L}_X(f_\nu(u_i)du_i) = X(f_\nu(u_i))du_i + f_\nu(u_i)\mathcal{L}_X(du_i) = f'_\nu(u_i)du_i$$

porque $\mathcal{L}_X(du_i) = 0$ por ser u_i una primera integral canónica de \mathcal{F}_i respecto a X y por ser $X(u_i) = 1$. Tenemos que la expresión previa de $\mathcal{L}_X(\eta_i^\nu)$ en términos de una base de $\mathcal{A}_i(\mathcal{W})$ se convierte en

$$f'_\nu = \sum_{\mu=1}^{n_i} c_{\nu\mu} f_\mu$$

para cada $\nu \in \{1, \dots, n_i\}$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_\tau \in \mathbb{C}$ los valores propios de \mathcal{L}_X . Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_\tau$ la dimensión de los subespacios propios asociados a cada λ_i . El siguiente resultado no es más que la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias pero escrita en el lenguaje que estamos desarrollando. Es conocido que la solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya matriz de coeficientes es A , viene dada por e^{At} . Detalles al respecto pueden encontrarse en [1].

Proposición 3.1.7. *Sea \mathcal{W} un k -web que admita un automorfismo infinitesimal. Sus relaciones abelianas son de la forma*

$$P_1(u_1)e^{\lambda_1 u_1} du_1 + \dots + P_k(u_k)e^{\lambda_k u_k} du_k = 0$$

donde P_1, \dots, P_k son polinomios de grado menor o igual a σ_i .

3.2. Cota al rango de un web

Como el nombre de esta sección indica, ahora nuestro objetivo es dar una cota óptima para el rango de un web. Sea $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_k = \mathcal{W}(\omega_1 \cdots \omega_k)$ un germen de un k -web en \mathbb{C}^n . Para cada $j \in \mathbb{N}$ con $j > 0$, sea $\mathcal{L}^j(\mathcal{W})$ el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por $\{\omega_i^j(0) : i \in \{1, \dots, k\}\}$. Evaluar una 1-forma en un punto nos da, identificando $T_0\mathbb{C}^n$ con \mathbb{C}^n , una función lineal $\omega_i(0) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, así que por $\omega_i^j(0)$ nos referimos a la composición de $\omega_i(0)$ con la función “elevar a la potencia j -ésima”. Definimos $l^j(\mathcal{W}) = \dim \mathcal{L}^j(\mathcal{W})$. Otra manera de definir $l^j(\mathcal{W})$ es la siguiente, que aunque son definiciones muy “cercanas” nos resultarán ambas útiles. Sean $u_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ submersiones que definen \mathcal{W} . Si h_i es la componente lineal de u_i entonces

$$l^j(\mathcal{W}) = \dim \left(\mathbb{C}h_1^j + \dots + \mathbb{C}h_k^j \right)$$

donde $\mathbb{C}h_1^j + \dots + \mathbb{C}h_k^j$ representa el espacio vectorial generado por combinaciones \mathbb{C} -lineales de h_1^j, \dots, h_k^j . Veamos que ambas definiciones son equivalentes. Como u_i y ω_i nos

definen la misma foliación, entonces debe existir un λ_i tal que $du_i(0) = \lambda_i \omega_i(0)$, por ser $\omega \wedge du = 0$. Como $h_i = du_i(0)$, entonces resulta obvio que el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por $\{\omega_i^j(0) : i \in \{1, \dots, k\}\}$ es isomorfo a $(\mathbb{C}h_1^j + \dots + \mathbb{C}h_k^j)$. Por esto usaremos ambas nociones de forma indistinta.

Ahora damos una primera cota para l^j , no demasiado fina. Sabemos que l^j está acotado por k , porque la primera definición nos dice que $\mathcal{L}^j(\mathcal{W})$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial generado por k elementos. Además, l^j está acotado por la dimensión del espacio de polinomios homogéneos de grado j en n variables, por la segunda definición, por lo que

$$l^j(\mathcal{W}) \leq \min \left\{ k, \binom{n+j-1}{n-1} \right\}$$

Se puede obtener una cota más fina, y lo haremos más adelante. De momento vamos a ver el siguiente lema técnico.

Lema 3.2.1. *Sean $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{C}_1[x_1, \dots, x_n]$ polinomios homogéneos lineales y sea $\mathcal{P} = \{[h_1], \dots, [h_k]\}$ su correspondiente conjunto de puntos en $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}\mathbb{C}_1[x_1, \dots, x_n]$. Si $V(j)$ es el conjunto de hipersuperficies en \mathbb{P}^{n-1} de grado j que pasan por \mathcal{P} entonces*

$$\dim(\mathbb{C}h_1^j + \dots + \mathbb{C}h_k^j) = \binom{n+j-1}{n-1} - \dim V(j)$$

Demostración. Sea $n_j = \binom{n+j-1}{n-1} - 1$. Consideramos el embedding $\nu_j : \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n_j}$ definido como $\nu_j([h]) = [h^j]$, considerando a los elementos de \mathbb{P}^{n-1} como elementos de $\mathbb{P}\mathbb{C}_1[x_1, \dots, x_n]$. Por como hemos construido \mathcal{P} y ν_j , tenemos que la dimensión de $\mathbb{C}h_1^j + \dots + \mathbb{C}h_k^j$ es igual a la dimensión del subespacio generado por la imagen de \mathcal{P} a través de ν_j . Por otra parte, la codimensión de $\mathbb{C}h_1^j + \dots + \mathbb{C}h_k^j$ es igual a la dimensión del espacio de hiperplanos que lo contiene. Este argumento puede parecer enrevesado, pero tiene una interpretación que lo hace más sencillo. Si construimos una matriz A cuyas columnas son las coordenadas de los puntos en \mathcal{P} , entonces es claro que la dimensión del subespacio generado por \mathcal{P} es igual al rango de A , que es la dimensión de su imagen como aplicación lineal. Por otra parte, el núcleo de la aplicación lineal correspondiente con la matriz traspuesta A^t se corresponde con los hiperplanos que contienen a \mathcal{P} . Es por esto que la codimensión del subespacio generado por \mathcal{P} es igual a la dimensión de los hiperplanos que contienen a \mathcal{P} . Pero el pullback de ν_j de estos hiperplanos son exactamente los elementos de $V(j)$. Con esto tenemos la afirmación del lema. \square

Proposición 3.2.2. *Si \mathcal{W} es un germen de un k -web diferenciable en $(\mathbb{C}^n, 0)$, entonces*

$$l^j(\mathcal{W}) \geq \min\{k, j(n-1) + 1\}$$

Demostración. Manteniendo la notación previa, sean h_i las componentes lineales de submersiones definiendo \mathcal{W} y sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ el conjunto de k puntos en posición general determinado por las formas lineales h_1, \dots, h_k . Por el lema 3.2.1, para probar el enunciado basta probar que \mathcal{P} impone $m = \min\{k, j(n-1) + 1\}$ condiciones independientes en el espacio de hipersuperficies de grado j que contiene a \mathcal{P} . Para esto basta probar que para un subconjunto $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ de cardinal m podemos construir, para cada $q \in \mathcal{Q}$, una hipersuperficie de grado j que pasa por todos los puntos de \mathcal{Q} excepto por q . El conjunto $\mathcal{Q} \setminus \{q\}$ se puede escribir como la unión disjunta de j subconjuntos de cardinal a lo sumo $n-1$. Para cada uno de estos subconjuntos existe un hiperplano que lo contiene y que no pasa

por q (aquí es donde usamos que los puntos de \mathcal{P} están en posición general, por ser \mathcal{W} diferenciable). Consideramos la hipersuperficie de grado j producida por la unión de estos hiperplanos y obtenemos lo que queríamos. \square

Corolario 3.2.3. *Si \mathcal{W} es un gérmen de un k -web en $(\mathbb{C}^2, 0)$, entonces*

$$l^j(\mathcal{W}) = \min\{k, j + 1\}$$

Demostración. Basta ver que el espacio de polinomios homogéneos de grado j en dos variables tiene dimensión $j + 1$ y usar la proposición 3.2.2. \square

En general, para k -webs cuasi-diferenciables en $(\mathbb{C}^n, 0)$, tenemos que $l^j(\mathcal{W}) \geq \min\{k, j + 1\}$. Para estudiar mejor la dimensión de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ se define la siguiente filtración decreciente de $\mathcal{A}(\mathcal{W})$, a la cual denotaremos por $F\mathcal{A}(\mathcal{W})$. El primer término es $F^0\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \mathcal{A}(\mathcal{W})$. Para $j \geq 1$ definimos

$$F^j\mathcal{A}(\mathcal{W}) = \ker \left\{ \mathcal{A}(\mathcal{W}) \rightarrow \left(\frac{\Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)}{\mathfrak{m}^j\Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)} \right)^k \right\}$$

donde \mathfrak{m}^j es el ideal maximal de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, 0)$.

Lema 3.2.4. *Si \mathcal{W} es un gérmen de un k -web cuasi-diferenciable en $(\mathbb{C}^n, 0)$ entonces*

$$\dim \frac{F^j\mathcal{A}(\mathcal{W})}{F^{j+1}\mathcal{A}(\mathcal{W})} \leq \max\{0, k - l^{j+1}(\mathcal{W})\}$$

Demostración. Usaremos la misma notación que llevamos usando toda la sección. Sean h_1, \dots, h_k las componentes lineales de las submersiones definiendo \mathcal{W} . Consideramos la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^k &\rightarrow \mathbb{C}_{j+1}[x_1, \dots, x_n] \\ (c_1, \dots, c_k) &\mapsto \sum c_i (h_i)^{j+1} \end{aligned}$$

Es obvio que la imagen de φ es exactamente igual a $\mathcal{L}^{j+1}(\mathcal{W})$. En particular

$$\dim \mathbb{C}^k = l^{j+1}(\mathcal{W}) + \dim \ker \varphi$$

Por lo que $\dim \ker \varphi = k - l^{j+1}(\mathcal{W}) = \max\{0, k - l^{j+1}(\mathcal{W})\}$. Sea (η_1, \dots, η_k) una relación abeliana en $F^j\mathcal{A}(\mathcal{W})$, existen números complejos μ_1, \dots, μ_k tales que

$$(\eta_1, \dots, \eta_k) = (\mu_1 (h_1)^j dh_1, \dots, \mu_k (h_k)^j dh_k) \quad \text{mód } F^{j+1}\mathcal{A}(\mathcal{W})$$

Para ver que esto es cierto, vamos a interpretar lo que estamos haciendo. Estamos considerando un elemento en $F^j\mathcal{A}(\mathcal{W})$, es decir, estamos considerando una relación abeliana en la (η_1, \dots, η_k) los primeros $j - 1$ coeficientes de la serie de Taylor de η_i son nulos, para $i \in \{1, \dots, k\}$. Al hacer el módulo respecto a $F^{j+1}\mathcal{A}(\mathcal{W})$ lo que estamos haciendo, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, es “truncar” la serie de Taylor de η_i , quedándonos con los primeros j términos. Como estábamos considerando relaciones abelianas tales que los primeros $j - 1$ coeficientes de la serie de Taylor de η_i son nulos y estamos truncando para quedarnos con los j primeros, tenemos que sólo nos queda el término j -ésimo. Por la proposición 1.2.9 sabemos que existe un λ tal que $\eta_i = \lambda_i (h_i) dh_i$, por lo tanto cada coeficiente μ_i no es más que el coeficiente j -ésimo de la serie de Taylor de λ_i .

Volviendo al argumento principal, consideramos la aplicación lineal que lleva $(\eta_1, \dots, \eta_k) \in F^j\mathcal{A}(\mathcal{W})$ a la k -tupla de números complejos $(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{C}^k$. Esta aplicación está bien

definida porque si $\mu_i(h_i)^j dh_i = \mu'_i(h_i)^j dh_i \pmod{F^{j+1}\mathcal{A}(\mathcal{W})}$ entonces $\mu_i = \mu'_i$, por ser $(h_i)^j dh_i \notin \mathfrak{m}^{j+1}\Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$. Como $\sum \eta_i = 0$, tenemos que esta aplicación induce una inyección de $F^j\mathcal{A}(\mathcal{W})/F^{j+1}\mathcal{A}(\mathcal{W})$ en el núcleo de φ . Con esto tenemos la afirmación del enunciado. \square

Corolario 3.2.5. *Si \mathcal{W} es un gérmen de un k -web cuasi-diferenciable, entonces para $j \geq k - 2$ se cumple que*

$$F^j\mathcal{A}(\mathcal{W}) = 0$$

Demostración. Para $j \geq k - 2$, por el trabajo previo tenemos que $l^{j+1}(\mathcal{W}) \geq \min\{k, j + 2\} = k$ y $l^{j+1}(\mathcal{W}) \leq \min\{k, \binom{n+j}{n-1}\} = k$, con lo que $l^{j+1}(\mathcal{W}) = k$. Por tanto el lema 3.2.4 nos dice que

$$F^j\mathcal{A}(\mathcal{W}) = F^{j+1}\mathcal{A}(\mathcal{W})$$

Por lo tanto, si $(\eta_1, \dots, \eta_k) \in F^j\mathcal{A}(\mathcal{W})$ con $j \geq k - 2$, entonces $(\eta_1, \dots, \eta_k) \in F^l\mathcal{A}(\mathcal{W})$ para todo $l \geq j$. Esto implica que $(\eta_1, \dots, \eta_k) = (0, \dots, 0)$. \square

Teorema 3.2.6. *Si \mathcal{W} es un gérmen de un k -web cuasi-diferenciable en $(\mathbb{C}^n, 0)$, entonces*

$$\text{rank}(\mathcal{W}) \leq \sum_{j=0}^{k-3} \max\{0, k - l^{j+1}(\mathcal{W})\}$$

Además, si \mathcal{W} es diferenciable entonces

$$\text{rank}(\mathcal{W}) \leq \pi(n, k) = \sum_{j=0}^{k-3} \max\{0, k - (j+1)(n-1) - 1\}$$

Demostración. Por el corolario 3.2.5 tenemos que $\mathcal{A}(\mathcal{W})$ es isomorfo a

$$\bigoplus_{j=0}^{k-3} \frac{F^j\mathcal{A}(\mathcal{W})}{F^{j+1}\mathcal{A}(\mathcal{W})}$$

Si \mathcal{W} es cuasi-diferenciable entonces basta aplicar el lema 3.2.4 y si \mathcal{W} es diferenciable tan sólo hay que añadir la proposición 3.2.2. \square

Apéndice A

Derivada de Lie

Los contenidos de este apéndice se han sacado de [6].

La idea detrás de la derivada de Lie es traducir la derivada direccional en \mathbb{R}^n al lenguaje de variedades diferenciables, de la misma manera que los campos vectoriales hacen las veces de derivada. Lo que hará este operador, antes de generalizarle a campos tensoriales, es tomar un campo vectorial Y y calcular su “derivada” en “la dirección” de otro campo X .

A.1. Sobre flujos asociados a campos vectoriales

Debemos empezar estableciendo notación sobre flujos en una variedad. Sea M una variedad diferenciable y sea X un campo vectorial en M . Recordemos que una aplicación $\gamma : J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ se dice **curva integral** de X si $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in J$. Esta última igualdad quiere decir que $\gamma'(t)$ es igual a $X_{\gamma(t)}$ como elementos de $T_{\gamma(t)}M$. Supongamos que para cada $p \in M$, X tiene una única curva integral que comienza en p , definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto último no es realmente necesario, podría ser sólo un intervalo y no cambiaría nada, pero por comodidad suponemos que es todo \mathbb{R} , más adelante veremos cómo eliminar esta hipótesis. Denotamos esa curva integral por $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \rightarrow M$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\theta_t : M \rightarrow M$ como la aplicación que manda cada punto p al punto obtenido “siguiendo” la curva integral que pasa por p durante un tiempo t . Más formalmente, $\theta_t(p) = \theta^{(p)}(t)$. Antes de seguir, veamos un lema sobre curvas integrales.

Lema A.1.1. *Sean M una variedad diferenciable, X un campo vectorial en M y $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Si $\gamma : J \rightarrow M$ es una curva integral de X , entonces, para cualquier $b \in \mathbb{R}$, $\tilde{\gamma} : \tilde{J} \rightarrow M$ es una curva integral, donde $\tilde{\gamma} = \gamma(t + b)$ y $\tilde{J} = \{t \in \mathbb{R} : t + b \in J\}$.*

Demostración. Para cada $t_0 \in \tilde{J}$, queremos ver que $\tilde{\gamma}'(t_0) = X_{\tilde{\gamma}(t_0)}$. Es directo, tan sólo hay que escribir las definiciones correspondientes y hacer un cambio de variable lineal:

$$\tilde{\gamma}'(t_0) = \gamma'(t_0 + b) = X_{\gamma(t_0 + b)} = X_{\tilde{\gamma}(t_0)}$$

□

Este lema nos dice que $\theta^{(p)}(t + s)$, con $s \in \mathbb{R}$ un valor fijado a priori, es una curva integral de X que empieza en $q = \theta^{(p)}(s)$, como estamos asumiendo que las curvas integrales son únicas entonces $\text{Im}(\theta^{(q)}(t + s)) = \text{Im}(\theta^{(p)}(t + s))$. Con esta notación y con estas ideas en mente,

definimos la noción de **flujo global** en M como una función continua (o diferenciable, si queremos que sea un flujo diferenciable) $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que cumpla

$$\theta(0, p) = p, \quad \theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$$

Usaremos la notación $\theta_t(p) = \theta(t, p) = \theta^{(p)}(t)$. Además, para que θ sea un flujo debe cumplirse que $\theta_t : M \rightarrow M$ sea un homeomorfismo (o un difeomorfismo, si queremos que sea un flujo diferenciable). Con la discusión previa hemos llegado a que si tenemos un campo vectorial (con las hipótesis adicionales pertinentes) podemos construir un flujo global a partir de sus curvas integrales. También se puede hacer la construcción en dirección contraria. Sea θ un flujo global diferenciable, definimos el vector tangente $V_p = \theta^{(p)'}(0)$. A este vector tangente se le llama **generador infinitesimal** de θ . Veamos que esto nos da un campo vectorial en M .

Proposición A.1.2. *Sea $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo global diferenciable. El generador infinitesimal de θ , denotado por X , es un campo vectorial en M , y cada curva $\theta^{(p)}$ es una curva integral de X .*

Demostración. Lo que queremos ver para que X sea un campo vectorial en M es que si $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ entonces las funciones X_i están en $\mathfrak{F}(U)$, para una cierta carta (U, φ) con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Si tenemos que $X(f)$ es diferenciable para cualquier función $f \in \mathfrak{F}(U)$, entonces en particular tenemos que $X(x^i) = X_i$ es diferenciable. Por tanto, sea $f \in \mathfrak{F}(U)$. Nótese que

$$X(f)(p) = X_p(f) = \theta^{(p)'}(0)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^{(p)}(t)) = \frac{\partial f(\theta(t, p))}{\partial t}(0, p)$$

Como $f(\theta(t, p))$ es diferenciable por ser composición de funciones diferenciables, entonces su parcial respecto a t también es diferenciable. Por tanto $Xf(p)$ es diferenciable, como queríamos ver.

Nos queda ver que las curvas $\theta^{(p)}$ son curvas integrales de X . Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y sea $q = \theta^{(p)}(t_0) = \theta_{t_0}(p)$, queremos ver que $\theta^{(p)'}(t_0) = X_q$. Sabemos que

$$\theta(q)(t) = \theta_t(q) = \theta_t(\theta_{t_0}(p)) = \theta_{t+t_0}(p) = \theta^{(p)}(t + t_0) \quad (\text{A.1})$$

Con el lema A.1.1 hemos terminado. A parte, comprobamos que sea f una función diferenciable definida en un entorno de q , tenemos que

$$X_q f = \theta^{(q)'}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\theta^{(q)}(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f(\theta^{(p)}(t + t_0)) = \theta^{(p)'}(t_0) f \quad (\text{A.2})$$

□

Hasta aquí hemos trabajado con campos vectoriales con curvas integrales definidas en todo \mathbb{R} . Ahora vamos a ver qué se puede hacer cuando no se tiene esa hipótesis. Un **dominio de flujo** para M es un conjunto abierto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ tal que, para cada $p \in M$, se cumple que $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$ es un intervalo abierto que contiene a 0. Un **flujo local** en M es una aplicación $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ diferenciable que satisface las siguientes condiciones:

$$\theta(0, p) = p, \forall p \in M$$

y para todo $s \in \mathcal{D}^{(p)}$ y $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s, p))}$ tales que $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos el conjunto $M_t = \{p \in M : (t, p) \in \mathcal{D}\}$. Igual que antes, para cada θ definimos su **generador infinitesimal** como $X_p = \theta^{(p)'}(0)$, donde estamos usando la notación $\theta^{(p)}(t) = \theta(t, p) = \theta_t(p)$ también para flujos locales.

Proposición A.1.3. *Si $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ es un flujo local diferenciable entonces su generador infinitesimal X es un campo vectorial y cada curva $\theta^{(p)}$ es una curva integral de X .*

Demostración. Esta demostración es prácticamente idéntica a la de A.1.2, tan sólo hay que hacer algunas observaciones adicionales. Para ver que X es un campo vectorial, basta darse cuenta de que para cualquier $p_0 \in M$, la aplicación $\theta(t, p)$ está bien definida y es diferenciable en todo (t, p) suficientemente cercano a $(0, p_0)$, por ser \mathcal{D} abierto. Para ver que $\theta^{(p)}$ es una curva integral de X , tenemos que comprobar que las igualdades (A.1) y (A.2) desarrolladas en la prueba de A.1.2 siguen teniendo sentido. Sea $t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$. Como $\mathcal{D}^{(p)}$ y $\mathcal{D}^{(\theta_{t_0}(p))}$ son conjuntos abiertos que contienen al 0, existe un $\epsilon > 0$ tal que $t + t_0 \in \mathcal{D}^{(p)}$ y $t \in \mathcal{D}^{(\theta_{t_0}(p))}$ siempre que $|t| < \epsilon$. Con esto, $\theta_t(\theta_{t_0}(p)) = \theta_{t+t_0}(p)$ por la definición de flujo local. Habiendo hecho este apunte, el resto de la prueba es exactamente análoga. \square

Diremos que una curva integral es maximal si su dominio no puede extenderse a un intervalo más grande. Diremos que un flujo es maximal si ese flujo no admite una extensión a un dominio mayor. Para probar el resultado principal de esta sección, que nos dice que a cada campo vectorial podemos asociarle un único flujo local maximal, necesitaremos el siguiente resultado sobre soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema A.1.4. *Supongamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y X es un campo vectorial en U . Escribimos $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Consideramos el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y_i'(t) = X^i(y_1(t), \dots, y_n(t)), & \text{para } i = 1, \dots, n \\ y_i(t_0) = c_i, & \text{para } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

donde $y_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones, t_0 es un número real cualquiera y $c = (c_1, \dots, c_n) \in U$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.

1. Para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto J_0 que contiene a t_0 y un abierto $U_0 \subseteq U$ que contiene a x_0 tales que para cada $c \in U_0$ existe una aplicación $y : J_0 \rightarrow U$ de clase C^1 que resuelve nuestro problema.
2. Dos soluciones diferenciables del mismo problema deben coincidir en la intersección de sus dominios.
3. Sean J_0 y U_0 como en 1 y $\theta : J_0 \times U_0 \rightarrow U$ la aplicación definida como $\theta(t, x) = y(t)$, donde $y : J_0 \rightarrow U$ es la única solución de nuestro problema con $y(t_0) = x$. Entonces θ es diferenciable.

Gracias al resultado anterior, si tenemos un campo de vectores definido sobre una variedad tenemos el siguiente resultado.

Teorema A.1.5. *Sea X un campo vectorial en M . Entonces existen un único flujo local maximal $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ cuyo generador infinitesimal es X . Ese flujo tiene las siguientes propiedades:*

1. Para cada $p \in M$, la curva $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ es la única curva integral maximal de X que empieza en p .
2. Si $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, entonces $\mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$ es el intervalo $\mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$.

3. Para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto M_t es abierto en M y $\theta_t : M_t \rightarrow M_{-t}$ es un difeomorfismo, cuya inversa es θ_{-t} .

Demostración. Primero de todo, nótese que, para todo $p \in M$, deben existir un $\epsilon > 0$ y una única curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que γ es una curva integral de X . Esto se debe a que tenemos un sistema de EDO autónomo $\gamma'(t) = X_p$ y una condición inicial, $\gamma(0) = p$, y por el teorema A.1.4 en estas condiciones tenemos siempre una solución para un ϵ lo bastante pequeño. Ahora veamos que si tenemos dos curvas integrales γ, τ de X definidas en un mismo intervalo J y tales que $\gamma(t_0) = \tau(t_0)$ para algún $t_0 \in J$ entonces $\gamma = \tau$ en todo J . Sea \mathcal{S} el conjunto de valores $t \in J$ tales que $\gamma(t) = \tau(t)$. Claramente $\mathcal{S} \neq \emptyset$, por ser $t_0 \in \mathcal{S}$. Además \mathcal{S} debe ser cerrado en J , por continuidad de γ y τ . Veamos que \mathcal{S} debe ser también abierto y, como J es conexo, $J = \mathcal{S}$. Para ello, veamos que si $t_1 \in \mathcal{S}$ entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $(t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon) \subset \mathcal{S}$. Denotemos $p = \gamma(t_1) = \tau(t_1)$. Por el teorema A.1.4, tenemos que $\gamma(t) = \tau(t)$ para todo $t \in (t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$. Por tanto $J = \mathcal{S}$. Con esto hemos demostrado que si tenemos dos curvas integrales que coinciden en un punto, entonces deben coincidir en la intersección de sus dominios.

Para cada $p \in M$, sea $\mathcal{D}^{(p)}$ la unión de los intervalos $J \subseteq \mathbb{R}$ que contienen al 0 y en los que existe una curva integral $\gamma : J \rightarrow M$ que empiece en p . Definimos $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \rightarrow M$ como $\theta^{(p)}(t) = \gamma(t)$, donde γ es cualquier curva integral que empiece en p y definida en un intervalo abierto que contenga al 0 y a t . Esta función está bien definida, ya que todas las curvas integrales “candidatas” coinciden en t y, por el argumento previo, deben coincidir todas. Con esto tenemos que $\theta^{(p)}$ es la única curva integral maximal que empieza en p .

Ahora definimos $\mathcal{D} = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$, y definamos $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ como $\theta(t, p) = \theta^{(p)}(t)$. Por construcción, θ satisface la afirmación 1 del teorema. Ahora vamos a demostrar que $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$ y la afirmación 2 del teorema. Fijemos un $p \in M$ y $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, y escribamos $q = \theta(s, p) = \theta^{(p)}(s)$. La curva $\gamma : \mathcal{D}^{(p)} - s \rightarrow M$ definida como $\gamma(t) = \theta^{(p)}(t+s)$ empieza en q y el lema A.1.1 nos dice que γ es una curva integral de X . Por la unicidad dada en el teorema A.1.4, γ debe coincidir con $\theta^{(q)}$ en su dominio común, lo que equivale a lo que queríamos demostrar. Es inmediato que $\theta_0 = Id_M$, por definición. Por la maximalidad de $\theta^{(q)}$, el dominio de γ no es mayor que el de $\mathcal{D}^{(q)}$, lo que significa que $\mathcal{D}^{(p)} - s \subseteq \mathcal{D}^{(q)}$. Como $0 \in \mathcal{D}^{(p)}$, entonces $-s \in \mathcal{D}^{(q)}$ y, por ser $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$, tenemos $\theta^{(q)}(-s) = p$. Por el mismo argumento aplicado a $(-s, q)$, tenemos que $\mathcal{D}^{(q)} + s \subseteq \mathcal{D}^{(p)}$. Con esto tenemos la segunda afirmación del enunciado.

Ahora demostramos que \mathcal{D} es abierto en $\mathbb{R} \times M$ y que $\theta : \mathcal{D} \rightarrow M$ es diferenciable. Sea $W \subseteq \mathcal{D}$ el subconjunto dado por los puntos $(t, p) \in \mathcal{D}$ tales que θ está definida y es diferenciable en un entorno de (t, p) de la forma $J \times U$, donde J es un intervalo que contiene al 0 y a t y U es un entorno de p en M . Entonces W es abierto en $\mathbb{R} \times M$ y $\theta|_W$ es diferenciable, nos queda ver que $W = \mathcal{D}$. Supongamos que no es el caso. Entonces existe un punto $(\tau, p_0) \in \mathcal{D} \setminus W$. Por simplicidad, supongamos que $\tau > 0$, el caso contrario es análogo. Sea $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R} : (t, p_0) \notin W\}$. Por el teorema A.1.4, aplicado en un entorno de p_0 , θ está definida y es diferenciable en algún entorno de $(0, p_0)$, entonces $t_0 > 0$. Como $t_0 \leq \tau$ y $\mathcal{D}^{(p_0)}$ es un intervalo abierto que contiene al 0 y τ , entonces $t_0 \in \mathcal{D}^{(p_0)}$. Sea $q_0 = \theta^{(p_0)}(t_0)$. Por el teorema A.1.4, tenemos que existe un $\epsilon > 0$ y un entorno U_0 de q_0 tal que $(-\epsilon, \epsilon) \times U_0 \subseteq W$. Ahora vamos a usar esto y la composición $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$ para extender θ para que sea diferenciable en un entorno de (t_0, p_0) , lo que contradice nuestra elección de t_0 . Sea $t_1 < t_0$ tal que $t_1 + \epsilon > t_0$ y $\theta^{(p_0)}(t_1) \in U_0$. Como $t_1 < t_0$, tenemos que $(t_1, p_0) \in W$, por lo que hay un entorno de la forma $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times U_1 \subseteq W$. Por

definición de W , esto implica que θ está definida y es diferenciable en $(-\xi, t_1 + \delta) \times U_1$, con $\xi > 0$. Como $\theta(t_1, p_0) \in U_0$, podemos elegir U_1 lo bastante pequeño como para que $\theta(\{t_1\} \times U_1) \subseteq U_0$. Definimos $\tilde{\theta} : [0, t_1 + \epsilon] \times U_1 \rightarrow M$ como

$$\tilde{\theta}(t, p) = \begin{cases} \theta_t(p), & \text{si } p \in U_1, 0 \leq t < t_1 \\ \theta_{t-t_1} \circ \theta_{t_1}(p), & \text{si } p \in U_1, t_1 - \epsilon < t < t_1 + \epsilon \end{cases}$$

Por la prueba de que $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$ tenemos que esta definición es correcta, ya que ambas funciones coinciden en sus dominios comunes. La elección de U_1, t_1, ϵ nos asegura que esta función es diferenciable. Por el lema A.1.1 tenemos que cada aplicación $t \mapsto \tilde{\theta}(t, p)$ es una curva integral de X , por lo que $\tilde{\theta}$ es una extensión diferenciable de θ a un entorno de (t_0, p_0) . Con esto tenemos que $W = \mathcal{D}$.

Ahora demostramos la afirmación 3. El conjunto M_t es abierto como consecuencia de que \mathcal{D} es abierto. De la afirmación 2 tenemos que $\mathcal{D}^{(\theta_t(p))} = \mathcal{D}^{(p)} - t$, por lo que $-t \in \mathcal{D}^{(\theta_t(p))}$ y entonces $\theta_t(p) \in M_{-t}$. Con esto tenemos que $\theta_t(M_t) \subseteq M_{-t}$. La regla de composición ya demostrada nos dice que $\theta_{-t} \circ \theta_t = Id_{M_t}$. Con un razonamiento idéntico, intercambiando los papeles de t y $-t$, tenemos que $\theta_t \circ \theta_{-t}$ es la identidad en M_{-t} , lo que completa la prueba. \square

A.2. Derivada de Lie, generalización y propiedades

A partir de ahora, gracias al teorema A.1.5, dado un campo vectorial X podemos hablar con propiedad del **flujo generado por X** o, simplemente, el **flujo** de X . Es con esta noción con la que definimos la **derivada de Lie** de un campo vectorial Y respecto de otro campo vectorial X . Sea θ el flujo de X . La derivada de Lie de Y respecto a X denota por $\mathcal{L}_X Y$ y se define, para cada $p \in M$, como

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\theta_{-t})_{*, \theta_t(p)})(Y_{\theta_t(p)})$$

donde $(\theta_{-t})_{*, \theta_t(p)}$ es la aplicación tangente de θ_{-t} en $\theta_t(p)$.

Lema A.2.1. *Sean M una variedad diferenciable y X, Y campos vectoriales en M . Entonces $(\mathcal{L}_X Y)_p$ existe para todo $p \in M$ y $\mathcal{L}_X Y$ es un campo vectorial en M .*

Demostración. Sea θ el flujo de X . Para un $p \in M$ cualquiera, consideramos (U, φ) una carta que contengan a p . Sea J_0 un intervalo abierto que contenga a 0 y a un subconjunto abierto $U_0 \subseteq U$ que contenga a p tal que θ mande $J_0 \times U_0$ a U . Para $(t, q) \in J_0 \times U_0$, escribimos las coordenadas locales de θ como $(\theta^1(t, q), \dots, \theta^n(t, q))$. Entonces para cualquier $(t, q) \in J_0 \times U_0$, la matriz de $(\theta_{-t})_{*, \theta_t(q)}$ es $((\frac{\partial \theta^i}{\partial x^j})(-t, \theta(t, q)))_{i,j}$, donde i son filas y j columnas. Por tanto,

$$(\theta_{-t})_{*, \theta_t(q)}(Y_{\theta_t(q)}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j}(-t, \theta(t, q)) Y^j(\theta(t, q)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$$

donde Y^j es la componente j -ésima de Y . Como θ^i y Y^j son funciones diferenciables, el coeficiente de cada $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$ es diferenciable en (t, q) . Por tanto, $(\mathcal{L}_X Y)_q$, que se obtiene de derivar esta expresión respecto de t y tomar $t = 0$, existe para cada $q \in U_0$ y es diferenciable. \square

Teorema A.2.2. Sean M una variedad diferenciable y X, Y campos vectoriales en M . Se cumple que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Demostración. Sean X, Y como en el enunciado y consideramos $\mathcal{R}(X) \subset M$ el conjunto de puntos p tales que $X_p \neq 0$. Claramente $\mathcal{R}(X)$ debe ser abierto en M por la continuidad de X y su clausura es el soporte de X . Ahora veremos que $(\mathcal{L}_X Y)_p = [X, Y]_p$ para todo $p \in M$, consideraremos tres casos.

Caso 1.- Sea $p \in \mathcal{R}(X)$. En este caso, podemos escoger coordenadas locales $\varphi(q) = (u^1(q), \dots, u^n(q))$ en un entorno U de p tales que $X = \frac{\partial}{\partial u^1}$. En estas coordenadas, el flujo de X es $\theta_t(q) = (u^1 + t, u^2, \dots, u^n)$. Para cada t , la matriz $(\theta_{-t})_{*, \theta_t(q)}$, en estas coordenadas, es la identidad. Por tanto, para cualquier $q \in U$,

$$(\theta_{-t})_{*, \theta_t(q)}(Y_{\theta_t(q)}) = (\theta_{-t})_{*, \theta_t(q)}(Y^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n)) \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\theta_t(q)} = \sum_{j=1}^n Y^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n) \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_q$$

Con esto, usando la definición de derivada de Lie, tenemos

$$(\mathcal{L}_X Y)_q = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d(Y^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n))}{dt} \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_q \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y^j}{\partial u^1}(u^1, \dots, u^n) \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_q$$

Por otra parte, la expresión en estas coordenadas de $[X, Y]$ es

$$[X, Y] = \left(\sum_{i,j=1}^n X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y^j}{\partial u^1}(u^1, \dots, u^n) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

Y con esto es claro que tenemos la igualdad que buscábamos.

Caso 2.- Sea $p \in \text{supp}(X)$. Como $\text{supp}(X)$ es la clausura de $\mathcal{R}(X)$, tenemos que la igualdad buscada se cumple por continuidad de ambos operadores.

Caso 3.- Sea $p \in M \setminus \text{supp}(X)$. En este caso $X \equiv 0$ en un entorno de p . Por esto, el flujo θ_t es la identidad para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto nos dice que $d(\theta_{-t})_{\theta_t(p)}(Y_{\theta_t(p)}) = Y_p$ por lo que $(\mathcal{L}_X Y)_p = 0$. Por otra parte, para ver que $[X, Y]_p = 0$ no hace falta más que usar la definición de corchete de Lie. \square

El siguiente corolario viene dado por las propiedades del corchete de Lie.

Corolario A.2.3. Sea M una variedad diferencial y sean X, Y, Z campos vectoriales en M . Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_X Y$
2. $\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$
3. $\mathcal{L}_{[X, Y]} Z = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y Z - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X Z$
4. Si $g \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $\mathcal{L}_X (gY) = (Xg)Y + g\mathcal{L}_X Y$

Antes de ver cómo se generaliza esta definición a campos tensoriales, debemos mencionar una noción relacionada con estos últimos: su 'pullback'. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación

diferenciable. Sea $p \in M$ un punto y sea A un k -tensor covariante en N , definimos el pullback de A a través de F como el tensor $(F^*A)_p = F_p^*(A_{F(p)})$, donde

$$F_p^*(A_{F(p)})(X_1, \dots, X_k) = A_{F(p)}(F_{*,p}(X_1), \dots, F_{*,p}(X_k))$$

para cualesquiera $X_1, \dots, X_k \in T_pM$. Por definición es obvio que el pullback conmuta con el producto tensorial, es decir, que $F^*(A \otimes B) = F^*A \otimes F^*B$. Ahora, sea X un campo vectorial en M , sea θ su flujo. Sea A un tensor covariante en M , definimos la **derivada de A respecto a X** , denotada como $\mathcal{L}_X A$, como

$$(\mathcal{L}_X A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\theta_t^* A)_p$$

Ver que esta derivada de Lie de A respecto a X existe siempre y es un campo tensorial (diferenciable) en M es análogo a la demostración del lema A.2.1.

Proposición A.2.4. *Sea M una variedad diferenciable y sea X un campo vectorial en M . Dados $f \in \mathfrak{F}(M)$, un 0-tensor en M , y A, B tensores covariantes en M , se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$
2. $\mathcal{L}_X(fA) = (\mathcal{L}_X f)A + f\mathcal{L}_X A$
3. $\mathcal{L}_X(A \otimes B) = (\mathcal{L}_X A) \otimes B + A \otimes \mathcal{L}_X B$
4. Sean X_1, \dots, X_k campos vectoriales en M y A un k -campo tensorial,

$$\mathcal{L}_X(A(X_1, \dots, X_k)) = (\mathcal{L}_X A)(X_1, \dots, X_k) + A(\mathcal{L}_X X_1, \dots, X_k) + \dots + A(X_1, \dots, \mathcal{L}_X X_k)$$

Demostración. Sea θ el flujo de X . Para cualquier función $f \in \mathfrak{F}(M)$ por definición tenemos que

$$\theta_t^* f(p) = f(\theta_t(p)) = f \circ \theta^{(p)}(t)$$

Por tanto la definición de $\mathcal{L}_X(f)$ se reduce a la derivada respecto de t de $f \circ \theta^{(p)}(t)$. Como $\theta^{(p)}$ es una curva integral de X ,

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \theta^{(p)})(t) = df_p(\theta^{(p)'}(0)) = df_p(X_p) = X(f(p)).$$

Con lo que tenemos la primera afirmación. La demostración de las otras tres afirmaciones se puede hacer de forma similar a la demostración del teorema A.2.2. Sea $p \in \text{supp}(X)$, sean (u^i) coordenadas locales en un entorno U de p tales que $X = \frac{\partial}{\partial u^1}$. Con esto tenemos que la actuación de \mathcal{L}_X no es más que la derivada parcial respecto de u^1 en los coeficientes del campo tensorial sobre el que se aplica, por lo que estas propiedades no son más que la regla de Liebnitz. Por continuidad, estas relaciones también son ciertas en la clausura del soporte de X . Fuera de ese conjunto se cumplen por ser θ trivial. \square

Corolario A.2.5. *Sean X un campo vectorial y A un k -campo tensorial covariante. Entonces para cualesquiera campos vectoriales X_1, \dots, X_k se cumple*

$$(\mathcal{L}_X A)(X_1, \dots, X_k) = X(A(X_1, \dots, X_k)) - A([X, X_1], X_2, \dots, X_k) - \dots - A(X_1, \dots, X_{k-1}, [X, X_k])$$

Demostración. Tan sólo hay que despejar $(\mathcal{L}_X A)(X_1, \dots, X_k)$ en la afirmación 4 de la proposición A.2.4 y sustituir $\mathcal{L}_X(A(X_1, \dots, X_k))$ por $X(A(X_1, \dots, X_k))$, usando la afirmación 1 de la proposición A.2.4, y $\mathcal{L}_X X_i$ por $[X, X_i]$ por el teorema A.2.2. \square

Corolario A.2.6. Sea $f \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$.

Demostración. Usando el corolario A.2.5 tenemos que, para cualquier campo vectorial Y ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X df)(Y) &= X(df(Y)) - df([X, Y]) = X(Y(f)) - [X, Y]f \\ &= X(Y(f)) - (X(Y(f)) - Y(X(f))) = Y(X(f)) \\ &= d(X(f))(Y) = d(\mathcal{L}_X f)(Y) \end{aligned}$$

□

Proposición A.2.7. Sean M una variedad diferenciable, X un campo vectorial en M y $\omega, \eta \in \Omega^1(M)$. Entonces

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X \eta)$$

Demostración. Por la definición de \mathcal{L}_X resulta obvio que conmuta con la suma y el producto por constantes en \mathbb{R} . A esto le añadimos la afirmación 3 de A.2.4 y la igualdad del enunciado es directa a partir de la definición del producto exterior. □

Teorema A.2.8. Sean M una variedad diferenciable, X un campo vectorial en M y ω una k -forma en M . Se cumple que

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X(\omega))$$

donde recordemos que $i_X(\omega) \in \Omega^{k-1}(M)$ se define como

$$i_X(\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$$

para cualesquiera campos vectoriales X_1, \dots, X_k en M .

Demostración. Procederemos por inducción. Para el caso con $k = 0$ tenemos

$$i_X(df) + d(i_X(f)) = i_X(df) = df(X) = X(f) = \mathcal{L}_X(f)$$

que es lo que queríamos. Ahora sea $k \geq 1$ y supongamos que la afirmación es cierta para $(k-1)$ -formas. Sea $\omega = \sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ donde I es un conjunto de multi-índices. Escribiendo $u = x^{i_1}$ y $\beta = \omega_I dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ tenemos que cada sumando de ω se puede escribir como $du \wedge \beta$, donde u es una función diferenciable y β es un $(k-1)$ -forma. En el corolario A.2.6 vimos que $\mathcal{L}_X(du) = d(\mathcal{L}_X u) = d(X(u))$. Por esto,

$$\mathcal{L}_X(du \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X du) \wedge \beta + du \wedge (\mathcal{L}_X \beta) = d(X(u)) \wedge \beta + du \wedge (i_X(d\beta) + d(i_X(\beta)))$$

Por otra parte, usando que $i_X(du) = du(X) = X(u)$ y las propiedades básicas de los productos exterior e interior, tenemos que

$$\begin{aligned} i_X(d(du \wedge \beta)) + d(i_X(du \wedge \beta)) &= i_X(-du \wedge \beta) + d((X(u))\beta - du \wedge (i_X(\beta))) \\ &= -(X(u))d\beta + du \wedge (i_X(d\beta)) + d(X(u)) \wedge \beta + \\ &\quad + (Xu)d\beta + du \wedge d(i_X(\beta)) \end{aligned}$$

Cancelando los términos $(X(u))d\beta$ entre sí tenemos la igualdad con la expresión desarrollada previamente. Como tanto \mathcal{L}_X como d y i_X conmutan con la suma, tenemos la afirmación del enunciado. □

Corolario A.2.9. Sean X un campo vectorial y ω una forma diferencial,

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = d\mathcal{L}_X(\omega)$$

Demostración. Tan sólo hay que usar el teorema A.2.8 y el hecho de que $d \circ d = 0$.

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = i_X(d(d\omega)) + d(i_X(d\omega)) = d(i_X(d\omega))$$

$$d\mathcal{L}_X(\omega) = d(i_X(d\omega)) + d(d(i_X(\omega))) = d(i_X(d\omega))$$

□

Bibliografía

- [1] Vladimir I. Arnol'd. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [2] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Geometric theory of foliations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] Felipe Cano. *El teorema de Frobenius con singularidades*. Proceedings “Approaching Mathematics through Algebra” (2008), 45-69.
- [4] David Eisenbud, Mark Green, and Joe Harris. Cayley-bacharach theorems and conjectures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 33(3):295–324, 1996.
- [5] Joseph Grifone and Eliane Salem. *Web theory and related topics*. World scientific, 2001.
- [6] John M Lee. Smooth manifolds. In *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.
- [7] Frank Loray. Pseudo-groupe d’une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux. pages 33–35, 2021. hal-00016434v2.
- [8] Luc Pirio. *Equations fonctionnelles abéliennes et théorie des tissus*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2004.
- [9] Luc Pirio and Jean-Marie Trépreau. Tissus plans exceptionnels et fonctions thêta. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 55, pages 2209–2237, 2005.
- [10] Bruno Scardua and Carlos Arnaldo Morales Rojas. *Geometry, Dynamics and Topology of Foliations: A First Course*. World Scientific, 2017.
- [11] Gerhard Thomsen. *Un teorema topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterma-asintotiche*. Coop. tipografica Azzoguidi, 1927.