



***Facultad
de
Ciencias***

SINGULARIDADES TROPICALES REALES (Real tropical singularities)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Celia Gómez Galdós

Director: Luis Felipe Tabera Alonso

Diciembre - 2020

Índice general

Resumen / Abstract	VII
Introducción	1
1. Geometría tropical compleja	3
1.1. El semianillo tropical	3
1.2. Tropicalización	8
2. Caracterización de puntos singulares tropicales complejos	11
2.1. Base tropical	11
2.2. Derivadas de Euler	15
2.3. El teorema de caracterización	22
3. Geometría tropical real	25
4. Geometría tropical real extendida	27
4.1. El semianillo tropical real	27
4.2. Definiciones	29
4.3. Tropicalización real extendida	32
5. Caracterización de puntos singulares tropicales reales	35
5.1. Base tropical real	35
5.2. Derivadas de Euler reales	38
5.3. El teorema de caracterización real	39
Referencias	42

Agradecimientos

En primer lugar gracias a mi director que ha tenido una inmensa paciencia y ha sido comprensivo con mis dificultades, tanto académicas como personales.

En segundo lugar gracias a la familia y amigos. Matemáticas siempre fue la asignatura por la que yo tenía cierta predilección gracias a mi madre que me enseñó a sumar, restar y multiplicar desde bien pequeña, con cuentas cada vez más difíciles pero con contagioso entusiasmo que me hacía pedir más y más. Es por ello que quiero hacer esa mención especial en ella. Y creo que es el momento preciso para recordar a una de mis profesoras de matemáticas en el instituto: Araceli (I.E.S. José del Campo, en Ampuero); de dónde por cierto podría dedicar amables palabras para todos mis profesores y compañeros. A ella le diría: *Tu disfrutabas dándome clase y yo lo hacía asistiendo a ellas.*

Por último gracias a la *Facultad de Ciencias* de la Universidad de Cantabria he sido miembro de la Primera Promoción del Doble Grado en Matemáticas y Física, dónde he encontrado grandes físicos y matemáticos, a partir de ahora colegas, pero de la que me llevo aún mayores amigos.

A todos, GRACIAS.

*Dedicado a
mi familia*

Resumen

La geometría tropical compleja dispone de una caracterización puramente tropical de *los puntos singulares tropicales de orden al menos k* de una hipersuperficie. En este trabajo se presenta este resultado de forma detallada. En el caso de la *geometría tropical real* existe una caracterización de *punto singular tropical*. Además, hasta ahora en el caso real no existe una definición de semianillo tropical real con la que trabajar. Se propone una reformulación de la estructura algebraica de semianillo tropical real y proporcionamos en este caso una caracterización de puntos singulares tropicales reales de orden al menos k de una hipersuperficie.

Palabras clave: *Geometría tropical, geometría tropical real, tropicalización, derivadas de Euler, singularidades.*

Abstract

A purely tropical characterization of *tropical singularities of order at least k* of an hypersurface is already known. In this report is showed this result in detail. In the *real tropical geometry* case, there exists a characterization of *tropical singular point*. However, up to now, in this case there is not a notion of real tropical semiring to work with. We propose a reformulation of the algebraic structure of real tropical semiring and provide a characterization of real tropical singular points of order at least k of an hypersurface.

Key words: *Tropical geometry, real tropical geometry, tropicalization, Euler derivatives, singularities.*

Introducción

La *geometría tropical* es una de las ramas más recientes de las matemáticas, con aplicaciones en otras ramas de la misma, por ejemplo en la resolución de problemas de optimización, como puede verse en [6].

Se puede estudiar los objetos de la *geometría tropical* desde distintos puntos de vista. Por ejemplo las curvas pueden considerarse objetos combinatorios, grafos que cumplen una condición de balance en cada uno de sus vértices. O bien se pueden estudiar como degeneraciones de amebas, mediante un proceso de paso al límite. Las amebas son subconjuntos del plano real con forma aparentemente similar a las llamadas amebas en biología. O bien se pueden estudiar como soluciones a polinomios con coeficientes en un semianillo idempotente [9]. Esta última es la aproximación que tomaremos en esta memoria. En adelante haremos referencia a los resultados de la geometría algebraica sobre un cuerpo algebraicamente cerrado con el apellido *clásico*.

Se han traducido exitosamente resultados clásicos a la geometría tropical, como pueden ser *el teorema de Bezout sobre intersecciones de curvas* o *el teorema fundamental del álgebra* [11]. Sin embargo, en muchas situaciones se deben adaptar los enunciados y conceptos clásicos. Enunciados de un teorema en geometría algebraica clásica pueden no ser equivalentes en geometría tropical, siendo idénticas, sin embargo, la motivación geométrica o las ideas subyacentes a las demostraciones. En esta línea se enmarcan los objetivos del trabajo. En nuestro caso proporcionamos una *caracterización puramente tropical de los puntos singulares tropicales de orden superior*.

En este trabajo estudiamos el concepto de solución singular de un polinomio, que hasta el momento en el caso tropical solamente se ha considerado ligado a una singularidad clásica. Todavía no existe una definición buena de punto singular de una variedad tropical. Se ha estudiado el caso de hipersuperficies en [3] y [12] y son estos los resultados que estudiamos y generalizamos.

Por ello presentamos previamente las bases de la *geometría tropical compleja* y de la *geometría tropical real extendida*, de hecho, esta última la formulamos en sí misma en el trabajo ya que no existía hasta ahora. Si bien es cierto de que algunas estructura similar existe, en la que se habla de *ghost element* [7] en referencia a los elementos que aquí llamaremos *elemento con signo cero*.

En líneas Generales. Hemos diferenciado el texto en dos mitades. En la primera trabajamos en lo que llamamos la *geometría tropical compleja*, que es la más usual en la literatura. En la segunda mitad adaptamos los resultados a lo que hemos llamado geometría tropical real extendida.

De forma Detallada. Dedicamos el *Capítulo 1* a una breve introducción y recopilación de definiciones, ilustradas con ejemplos, de los conceptos básicos en *geometría tropical compleja*, que necesitaremos más adelante, para el tratamiento algebraico.

En el *Capítulo 2* caracterizamos los puntos singulares de orden k de una hipersuperficie tropical compleja. Este resultado aparece en [1] pero ampliamos y detallamos las demostraciones. En las *Secciones 2.2 y 2.3*, también incorporamos algunos otros resultados de los que nos valemos para extender el *Teorema de Caracterización*. En [12] se define la noción de derivada de Euler, que es la noción correcta de derivada de un polinomio tropical. Sin embargo, para derivadas de orden superior, la derivada de Euler dada en [1] no se comporta del todo bien, las autoras dan una equivalencia a lo que nosotros hemos llamado *Derivada Euleriana*, que se comporta mejor que la derivada de Euler para el caso de singularidades de orden k y parece ser la definición correcta de derivada de orden superior.

En el *Capítulo 3* comenzamos con la parte de geometría tropical real. En [12] se introduce una noción de polinomio tropical real y cero de un polinomio tropical real, así como la definición de punto singular (de orden al menos 2). En este contexto cada elemento tiene asociado un signo adicional a^+ o a^- de manera que la suma y el producto de elementos *positivos* es *positivo*. Sin embargo, se encuentra al tener que resolver la suma $a^+ + a^-$, que no está definida, por lo que no se está trabajando en un semianillo y *polinomios* no son realmente polinomios.

Los *Capítulos 4* y *5* son los análogos en el caso real a los *Capítulos 1* y *2* del caso complejo, respectivamente.

En el *Capítulo 4* presentamos una aportación original, lo que hemos denominado *semianillo tropical real extendido*. Esta definición está inspirada en la geometría tropical con elementos *ghost* [7] y resuelve algunos de los problemas que presentamos en el *Capítulo 3*. Más concretamente resolvemos $a^+ + a^-$ añadiendo un signo: a^0 . Con esto conseguimos también dotar de una estructura de semianillo al conjunto de polinomios y definir la raíz de un polinomio de forma más sencilla: *p es raíz de f si el signo de f(p) es cero*.

Finalmente, en el *Capítulo 5* adaptamos el teorema de caracterización de puntos singulares tropicales de orden al menos k dado en el *Capítulo 3* a la geometría tropical real extendida que hemos definido en el capítulo anterior. Aunque el enunciado es el mismo, las herramientas que necesitamos para su demostración son diferentes.

En definitiva se trata de un texto completamente autocontenido. Además, contiene aportaciones propias, como son la definición *derivada Euleriana*, el *semianillo tropical real extendido* y el *Teorema de Caracterización de puntos singulares tropicales reales de orden al menos k*.

Capítulo 1

Geometría tropical compleja

En este capítulo damos las definiciones y resultados básicos de la geometría tropical.

1.1. El semianillo tropical

Definición 1.1. Un conjunto no vacío R dotado de dos operaciones internas, $(R, +, \cdot)$ se dice *semianillo* si $(R, +)$ y $(R, \cdot)$ son monoide conmutativo y monoide respectivamente. La multiplicación es distributiva respecto de la suma. Y el elemento neutro de la suma anula R .

- $(R, +)$ es un monoide conmutativo.
 - Propiedad distributiva: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
 - Elemento neutro: $a + 0_R = 0_R + a = a$.
 - Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$.
- $(R, \cdot)$ es un monoide.
 - Propiedad distributiva: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
 - Elemento identidad: $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$.
- Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a \end{aligned}$$

- 0_R anula R : $0_R \cdot a = a \cdot 0_R = 0_R$.

Además, si se verifica la condición de idempotencia: $a + a = a$ para todo elemento del anillo ($\forall a \in R$); se dice que es un *semianillo idempotente*.

Definición 1.2. El *semianillo tropical* (o *min-plus*) se define como el conjunto de los números reales ampliado con el infinito: $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; dotado de las dos operaciones de adición y multiplicación tales que $(\mathbb{T}, \oplus, \odot) = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \text{mín}, +)$ es semianillo.

$$x \oplus y = \text{mín}\{x, y\} \qquad x \odot y = x + y \qquad (1.1)$$

La **suma tropical**, $\oplus$, se define como el mínimo de los valores con los que se opera y el **producto tropical**, $\odot$, se toma como la suma convencional de los dos elementos involucrados. El elemento *neutro de la suma tropical* es $0_{\mathbb{T}} = +\infty$ y la *identidad del producto tropical* es $1_{\mathbb{T}} = 0$.

En las operaciones con el elemento infinito se toman las convenciones usuales.

$$x \oplus (+\infty) = (+\infty) \oplus x = x \qquad x \odot (+\infty) = (+\infty) \odot x = +\infty$$

Observación 1.3. En la literatura se emplea indistintamente el semianillo *max-plus*, $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \text{máx}, +)$, o el *min-plus* como semianillo tropical. Por lo que se suele especificar inicialmente con cual de las dos definiciones se está trabajando. Esto no supone ningún problema ya que ambos semianillos son isomorfos bajo la aplicación $x \mapsto -x$.

En este trabajo emplearemos el convenio *min-plus* tanto en los enunciados como en las demostraciones de los resultados. Aunque las figuras las realizaremos siguiendo el convenio *max-plus*, ya que presenta ciertas ventajas, especialmente en el caso real.

Definición 1.4. Se llama *monomio tropical* en las n variables $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ y coeficiente $\alpha_i \in \mathbb{R}$, dónde $i = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, a la expresión formal

$$\alpha_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} \odot \omega_1^{i_1} \odot \omega_2^{i_2} \odot \dots \odot \omega_n^{i_n}.$$

Usaremos una notación abreviada en términos de multiíndices

$$\alpha_i \odot \omega^i = \alpha_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} \odot \omega_1^{i_1} \odot \omega_2^{i_2} \odot \dots \odot \omega_n^{i_n}.$$

Se llama *polinomio tropical* a la suma formal finita de monomios tropicales

$$f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i; \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in A \quad (1.2)$$

dónde $A \subseteq \mathbb{N}^n$ es el *soporte de f* . Si $A = \emptyset$ entonces $f = +\infty$. El conjunto de los polinomios en las variables $\omega_1, \dots, \omega_n$ es $\mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$. Con la suma y producto habitual $\mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ es semianillo idempotente.

Ejemplo 1.5. Presentamos varios casos de polinomios tropicales distintos: los dos primeros en una variable y los tres siguientes en dos. En el primer ejemplo citamos el grado de un polinomio, en el sentido habitual, como el mayor de los grados de los monomios, y escribimos polinomios generales de cierto grado en una variable; en el segundo particularizamos en un polinomio de soporte dado; en el tercero, indicamos el soporte de un polinomio en dos variables; en el cuarto mostramos detalladamente como se realizan las operaciones tropicales entre polinomios; y en el último se damos un polinomio que será de interés en el estudio de puntos singulares al final del trabajo.

I Dado un polinomio tropical general en una única variable ω de grado n entonces

$$f_a = \bigoplus_{i=0}^n \alpha_i \odot \omega^i = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \odot \omega \oplus \dots \oplus \alpha_n \odot \omega^n \in \mathbb{T}[\omega];$$

dónde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para todo i ($0 \leq i \leq n$). O bien, si no aparecieran todos los monomios de grado 0 a n , consideramos f_b un polinomio tropical de soporte $A = \{i_1, \dots, i_d\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ con $i_j = n$ para algún subíndice j , $1 \leq j \leq d$, entonces

$$f_b = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i = \bigoplus_{j=1}^d \alpha_{i_j} \odot \omega^{i_j} = \alpha_{i_1} \odot \omega^{i_1} \oplus \dots \oplus \alpha_{i_d} \odot \omega^{i_d} \in \mathbb{T}[\omega].$$

Y si aplicamos la expresión de las operaciones en términos clásicos, es decir, según Ec. (1.1)

$$\begin{aligned} f_b &= \min_{i \in A} \{\alpha_i + i \cdot \omega\} = \min \{\alpha_{i_1} + i_1 \cdot \omega, \dots, \alpha_{i_r} + i_r \cdot \omega\} \quad , \text{ o bien,} \\ f_a &= \min_{i=0}^n \{\alpha_i + i \cdot \omega\} = \min \{\alpha_0, \alpha_1 + \omega, \dots, \alpha_n + n \cdot \omega\}. \end{aligned}$$

Se tendría así una función definida a trozos por el mínimo de r , a lo sumo n , funciones lineales de pendiente $i_j \in \{i_1, \dots, i_r\}$ y ordenada en el origen $\alpha_{i_j} \in \mathbb{R}$.

II Sea en particular un polinomio tropical en 1 variables (ω) con soporte $A = \{0, 1\}$, es decir, con respecto al caso general $d = 2$, $i_1 = 0$ e $i_2 = 1$. Podemos tomar por ejemplo

$$f = 0 \odot \omega \oplus 1 \in \mathbb{T}[\omega].$$

III Damos un polinomio tropical en 2 variables: ω_1, ω_2 . En este caso de soporte $A = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$.

$$f = 2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2 \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$$

IV Dado un polinomio tropical f su *potencia j -ésima tropical* será $f^j = f \odot \dots \odot^j f$.

Tomamos el polinomio del punto anterior, entonces

$$\begin{aligned} f^2 &= \\ &= f \odot f \\ &= (2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2) \odot (2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2) \\ &= 2 \odot (2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2) \oplus 0 \odot \omega_1 \odot (2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2) \oplus 1 \odot \omega_2 \odot (2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2) \\ &= 4 \oplus 2 \odot \omega_1 \oplus 3 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \oplus 1 \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 2 \odot \omega_2^2. \end{aligned}$$

v Será de interés el polinomio $f_R \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$.

$$f_R = 5 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 0 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \oplus 1 \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_2^2 \oplus 2 \odot \omega_1^3 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1 \odot \omega_2^2 \oplus 0 \odot \omega_2^3 \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$$

f_R es un polinomio tropical de grado 3 en 2 variables con soporte

$$A = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)\}.$$

Ejemplo 1.6. Sea $j \in \mathbb{N}$ un número natural entonces $f = (\omega_1 \oplus \omega_2)^j \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$ es un polinomio tropical en 2 variables que en su expresión tropical ha de entenderse como $f = (0 \odot \omega_1 \oplus 0 \odot \omega_2)^j$. Si hacemos uso de las operaciones convencionales que describen las operaciones tropicales, *Ec. (1.1)*, se encuentra que la curva que determina f es la misma que la que describe $\hat{f} = 0 \odot \omega_1^j \oplus 0 \odot \omega_2^j \equiv \omega_1^j \oplus \omega_2^j$.

Aunque existen otros pares de polinomios que presentan la misma relación, hemos dado este ejemplo ya que se encuentra en varios artículos, como por ejemplo [6] dónde es conocido como *Freshman's Dream*.

En adelante tomaremos de forma habitual la notación con *multiíndices*, como hemos considerado implícitamente en el *Ejemplo 1.5*. Suponemos $i = (i_1, \dots, i_n)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ y $p = (p_1, \dots, p_n)$, entonces

$$\omega^i = \omega_1^{i_1} \dots \omega_n^{i_n} \quad \text{e} \quad ip = i_1 p_1 + \dots + i_n p_n.$$

Además hablaremos de *polinomio tropical complejo* en referencia a un polinomio según *Ec.(1.2)* y del mismo modo usaremos indistintamente el término *raíz tropical compleja* para hacer referencia a lo definido a continuación como *raíz tropical*. En ocasiones también empleamos el término *cero tropical*.

Definición 1.7. Dados un polinomio $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ y un punto $p \in \mathbb{T}^n$ entonces la *evaluación* $f(p)$ es el mínimo con $i \in A$ de $\alpha_i + ip$.

Definición 1.8. Dado un polinomio tropical, $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$, se llama *raíz tropical de f* a un punto $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\exists j, k \in A$ dos índices distintos tales que en los monomios asociados se alcanza el mínimo en p , es decir, en $f(p)$ el mínimo se alcanza al menos dos veces.

Observación 1.9. Dado un monomio general según la *Definición 1.4* empleando las operaciones convencionales con las que se definen la suma y el producto tropical (*Ec. (1.1)*) tenemos que todo monomio tropical se corresponde con una función lineal.

$$\alpha_i \odot \omega_1^{i_1} \odot \omega_2^{i_2} \odot \dots \odot \omega_n^{i_n} = \alpha_i + i_1 \cdot \omega_1 + \dots + i_n \cdot \omega_n$$

Y por tanto un polinomio tropical según *Ec.(1.2)* en el que $|A| = r$ se corresponde con el mínimo de r funciones lineales, las que determinan cada uno de los monomios. Es por este motivo que en definitiva se reconocen las raíces de un polinomio f como los puntos dónde f no es diferenciable y dichos puntos son los que verifican la condición dada en la *Definición 1.8*, pudiéndose expresar dicha condición mediante las siguientes expresiones: dados i, j, k como multiíndices, es decir, $i = (i_1, \dots, i_n)$, $j = (j_1, \dots, j_n)$ y $k = (k_1, \dots, k_n)$ se tiene que $p \in \mathbb{R}^n$ es *raíz tropical de f* , siendo f polinomio tropical según la *Definición 1.4*, si verifica

$$\alpha_j + j_1 \cdot p_1 + \dots + j_n \cdot p_n = \alpha_k + k_1 \cdot p_1 + \dots + k_n \cdot p_n \leq \alpha_i + i_1 \cdot p_1 + \dots + i_n \cdot p_n \quad \forall i \in A \setminus \{j, k\}, \quad j \neq k.$$

A continuación damos la definición de *hipersuperficie* en geometría tropical.

Definición 1.10. Se define la *hipersuperficie tropical* de un polinomio tropical no nulo $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ como el conjunto de raíces tropicales de f , se denota por $\mathcal{T}(f)$ y puede describirse como

$$\mathcal{T}(f) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \exists j, k \in A, j \neq k \text{ tal que } f(p) = \alpha_j + j \cdot p = \alpha_k + k \cdot p\}.$$

Finalmente mostramos cuáles serían las hipersuperficies tropicales que determinan los polinomios dados en el *Ejemplo 1.5*. Además, aprovechamos para aplicar varias estrategias para su obtención.

Sistema de inecuaciones. Tal y como indicamos en la *Observación 1.9*, podemos escribir el polinomio tropical como una igualdad y un sistema de inecuaciones de cada caso posible. Siendo dichos casos dependientes del par de monomios que se consideren iguales.

Diagrama de Newton (1 variable). Dado un polinomio tropical en una variable: $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega]$; se llama *diagrama de Newton* al conjunto $N(f) = \{(i, \alpha_i) \mid i \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces, $p \in \mathbb{R}$ es una raíz tropical de f sí y solamente si $-p$ es pendiente de la envolvente convexa inferior de $N(f)$.

Polígono de Newton (2 variables). También llamado subdivisión regular de Newton. Permite dibujar cualquier curva tropical conocido su polígono de Newton asociado e igualmente conocida la curva es posible asociarle el polígono de Newton que le corresponde. En la literatura encontramos que ambos objetos, curva tropical y subdivisión regular, se duales. En la práctica, las aristas de la subdivisión son perpendiculares a los rayos que determinan la curva tropical [6]. El gráfico obtenido para un curva tropical como dual de la subdivisión regular se corresponde con la curva tropical sobre el álgebra *max-plus*.

Ejemplo 1.11. Hallamos las raíces de los polinomios tropicales dados en el *Ejemplo 1.5* y con ello determinamos las hipersuperficies tropicales de cada polinomio tropical.

I Dados

$$f_a = \bigoplus_{i=0}^n \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega] \quad \text{y} \quad f_b = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega]$$

entonces

$$N(f_a) = \{(0, \alpha_0), (1, \alpha_1), \dots, (n, \alpha_n)\} \quad \text{y} \quad N(f_b) = \{(i_1, \alpha_{i_1}), \dots, (i_r, \alpha_{i_r})\}.$$

Tomamos los siguientes casos particulares

$$f_a = 6 \oplus 4 \odot \omega \oplus 3 \odot \omega^2 \oplus 5 \odot \omega^3 \oplus 2 \odot \omega^4 \oplus 3 \odot \omega^5 \oplus 4 \odot \omega^6 \oplus 6 \odot \omega^7$$

$$N(f_a) = \{(0, 6), (1, 4), (2, 3), (3, 5), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (7, 6)\}$$

$$f_b = 6 \oplus 4 \odot \omega \oplus 3 \odot \omega^2 \oplus 2 \odot \omega^4 \oplus 4 \odot \omega^6 \oplus 6 \odot \omega^7$$

$$N(f_b) = \{(0, 6), (1, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 4), (7, 6)\}.$$

Para estos dos polinomios obtenemos $\mathcal{T}(f_a) = \mathcal{T}(f_b)$ a pesar de que tratarse de distintos polinomios, es decir, distintos diagramas de Newton: $N(f_a) \neq N(f_b)$. Sin embargo, ambos diagramas determinan la misma envolvente convexa inferior (*Figura 1.1* y *1.2*).

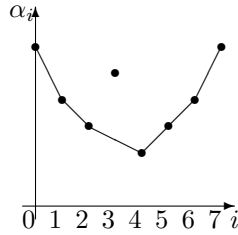


Figura 1.1: Diagrama de Newton del polinomio f_a .

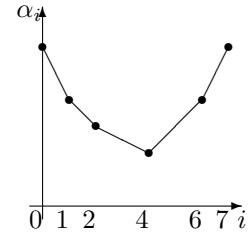


Figura 1.2: Diagrama de Newton del polinomio f_b .

Haciendo uso de la relación dada entre diagrama y raíces tropicales concluimos $\mathcal{T}(f_a) = \{2, 1, 1/2, -1, -2\}$.

$\bar{\omega}$	6	$\omega + 4$	$2\omega + 3$	$3\omega + 5$	$4\omega + 2$	$5\omega + 3$	$6\omega + 4$	$7\omega + 6$	$f_a(\bar{\omega})$
2	6	6	7	11	10	13	16	20	6
1	6	5	5	8	6	8	10	13	5
1/2	6	9/2	4	13/2	4	11/2	7	19/2	4
-1	6	3	1	2	-2	-2	-1	-1	-2
-2	6	2	-1	-1	-6	-7	-8	-8	-8

Cuadro 1.1: Evaluamos el polinomio f_a en las raíces, $\bar{\omega}$, obtenidas del diagrama. La tabla del polinomio f_b será esta misma sin las columnas $3 \cdot \omega + 5$ y $5 \cdot \omega + 3$.

- II Sea $f = 0 \odot \omega \oplus 1 = \min\{\omega, 1\}$, se trata de un caso sencillo en el que mismamente representando ambas funciones lineales ($y_1 = \omega$, $y_2 = 1$) encontraremos el único punto de intersección $\omega = 1$ (*Figura 1.3*). Entonces $\mathcal{T}(f) = \{1\}$.
- III Sea $f = 2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2 = \min\{2, \omega_1, \omega_2 + 1\}$ si empleamos las *inecuaciones* para determinar las soluciones tropicales del polinomio. Las condiciones planteadas a la izquierda quedan resueltas a la

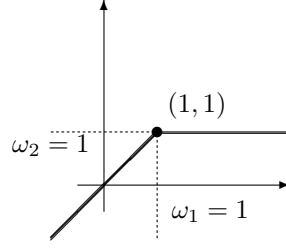


Figura 1.3: Representamos el grafo del polinomio tropical $f = 0 \odot \omega \oplus 1$.

derecha.

$$\begin{array}{llllll}
 \omega_1 & = & \omega_2 + 1 & = & 4 & \longrightarrow & (2, 1) \\
 \omega_1 & = & \omega_2 + 1 & \leq & 2 & \longrightarrow & (\omega_1, \omega_1 - 1) \quad \omega_2 \leq 1 \\
 \omega_1 & = & 2 & \leq & \omega_2 + 1 & \longrightarrow & (2, \omega_2) \quad \omega_2 \geq 1 \\
 \omega_2 + 1 & = & 2 & \leq & \omega_1 & \longrightarrow & (\omega_1, 1) \quad \omega_1 \geq 2
 \end{array}$$

IV Sea $g = 4 \oplus 2 \odot \omega_1 \oplus 3 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \oplus 1 \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 2 \odot \omega_2^2 = \min \{4, 2 + \omega_1, 3 + \omega_2, 2\omega_1, 1 + \omega_1 + \omega_2, 2 + 2\omega_2\}$. Suponemos todas las combinaciones en las que el mínimo se alcanza al menos dos veces. Según los resultados obtenidos dibujaremos el *polígono del Newton* asociado a la curva tropical. Para ilustrar como esbozar la curva fácilmente como el dual de este. Vemos así la relación entre la curva obtenida mediante *min-plus*, Figura 1.4, y la obtenida en *max-plus*, Figura 1.7.

$$\begin{array}{llllll}
 4 & = & \omega_2 + 3 & \leq & \omega_1 + 2, 2\omega_1, 1 + \omega_1 + \omega_2, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_2 = 1 & \omega_1 \geq 2 \\
 4 & = & \omega_1 + 2 & \leq & \omega_2 + 3, 2\omega_1, 1 + \omega_1 + \omega_2, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_1 = 2 & \omega_2 \geq 1 \\
 4 & = & 2\omega_2 + 2 & \leq & \omega_1 + 2, \omega_2 + 3, 2\omega_1, 1 + \omega_1 + \omega_2 & \rightarrow & \omega_2 = 1 & \omega_1 \geq 2 \\
 4 & = & \omega_1 + \omega_2 + 1 & \leq & \omega_1 + 2, \omega_2 + 3, 2\omega_1, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_2 = 3 - \omega_1 & \omega_1 = 2, \omega_2 = 1 \\
 4 & = & 2\omega_1 & \leq & \omega_1 + 2, \omega_2 + 3, 1 + \omega_1 + \omega_2, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_1 = 2 & \omega_2 \geq 1 \\
 \omega_2 + 3 & = & \omega_1 + 2 & \leq & 4, 2\omega_1, 1 + \omega_1 + \omega_2, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_2 = \omega_1 - 1 & \omega_1 = 2, \omega_2 = 1 \\
 \omega_2 + 3 & = & 2\omega_2 + 2 & \leq & 4, \omega_1 + 2, 2\omega_1, 1 + \omega_1 + \omega_2 & \rightarrow & \omega_2 = \omega_1 - 1 & \omega_1 = 2, \omega_2 = 1 \\
 \omega_2 + 3 & = & \omega_1 + \omega_2 + 1 & \leq & 4, \omega_1 + 2, 2\omega_1, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_1 = 2 & \omega_2 = 1 \\
 \omega_2 + 3 & = & 2\omega_1 & \leq & 4, \omega_1 + 2, 1 + \omega_1 + \omega_2, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_2 = \omega_1 - 1 & \omega_1 = 2, \omega_2 = 1 \\
 \omega_1 + 2 & = & 2\omega_2 + 2 & \leq & 4, \omega_2 + 3, 2\omega_1, 1 + \omega_1 + \omega_2 & \rightarrow & \omega_2 = \omega_1 - 1 & \omega_1 \leq 2, \omega_2 \leq 1 \\
 \omega_1 + 2 & = & \omega_1 + \omega_2 + 1 & \leq & 4, \omega_2 + 3, 2\omega_1, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_2 = 1 & \omega_1 = 2 \\
 \omega_1 + 2 & = & 2\omega_1 & \leq & 4, \omega_2 + 3, 2\omega_2 + 2, 1 + \omega_1 + \omega_2 & \rightarrow & \omega_1 = 2 & \omega_2 \geq 1 \\
 2\omega_2 + 2 & = & \omega_1 + \omega_2 + 1 & \leq & 4, \omega_1 + 2, \omega_2 + 3, 2\omega_1 & \rightarrow & \omega_2 = \omega_1 - 1 & \omega_1 \leq 2, \omega_2 \leq 1 \\
 2\omega_2 + 2 & = & 2\omega_1 & \leq & 4, \omega_1 + 2, \omega_2 + 3, 1 + \omega_1 + \omega_2 & \rightarrow & \omega_2 = \omega_1 - 1 & \omega_1 \leq 2, \omega_2 \leq 1 \\
 \omega_1 + \omega_2 + 1 & = & 2\omega_1 & \leq & 4, \omega_1 + 2, \omega_2 + 3, 2\omega_2 + 2 & \rightarrow & \omega_2 = \omega_1 - 1 & \omega_1 \leq 2, \omega_2 \leq 1
 \end{array}$$

Una vez considerados todos los casos hemos encontrado hasta 4 soluciones distintas: 3 semirrectas con punto común $(2, 1)$.

Rayo vertical	Rayo horizontal	Rayo oblicuo	Punto común
$\omega_1 = 2$	$\omega_2 = 1$	$\omega_2 = \omega_1 - 1$	$\omega_1 = 2$
$\omega_2 \geq 1$	$\omega_1 \geq 2$	$\omega_1 \leq 2, \omega_2 \leq 1$	$\omega_2 = 1$

Las soluciones obtenidas se corresponde con la curva tropical que se representa en la Figura 1.4.

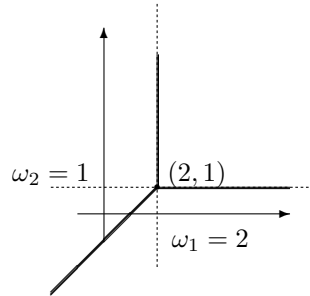


Figura 1.4: Curva tropical compleja g (obtenida con el mínimo).

Como último término por establecer para llevar a cabo la parte compleja del trabajo daremos la definición de punto singular tropical, sin embargo, para ello es preciso antes definir el concepto de *tropicalización* [Sección 1.2].

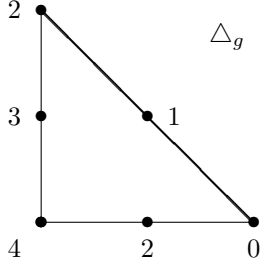


Figura 1.5: Polígono de Newton de g .

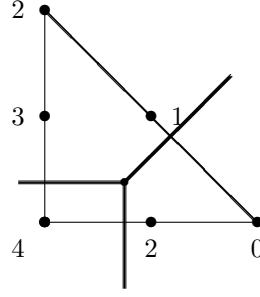


Figura 1.6: Curva tropical asociada a g sobre el polígono de Newton Δ_g .

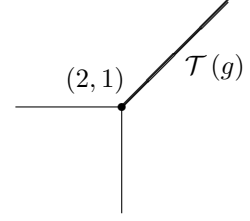


Figura 1.7: Curva tropical compleja asociada a g (con el máximo).

1.2. Tropicalización

En esta sección relacionamos los polinomios sobre el *cuerpo de series de Puiseux con coeficientes complejos*, $\mathbb{K} = \mathbb{C}\{\{t\}\}$, y los polinomios tropicales. Algunas de las propiedades de este cuerpo son las siguientes.

Cada elemento $\mathbf{a} \in \mathbb{K} \setminus \{0\} = \mathbb{C}\{\{t\}\} \setminus \{0\}$ es una serie de potencias formal en la variable t con exponentes racionales. Es posible escribir $\mathbf{a}$ una suma en t para índices enteros $i \in \mathbb{Z}$ desde uno dado, $l \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{a} = \sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{a}_i t^{i/N} \quad \mathbf{a}_l \neq 0 \quad (1.3)$$

dónde $\mathbf{a}_i \in \mathbb{C}$ son coeficientes complejos, $\mathbf{a}_l \neq 0$ y los exponentes, $i/N \in \mathbb{Q}$, son racionales con denominador común ($N \in \mathbb{N}$). Además, se llamará a $\mathbf{a}_l \in \mathbb{C}^*$ *coeficiente principal*, escribiéndose $Pc(\mathbf{a}) = \mathbf{a}_l$.

$\mathbb{K}$ es un cuerpo alebraicamente cerrado de característica 0.

Se puede dotar a $\mathbb{K}$ de una valoración, es decir, una aplicación $v : \mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ tal que dados $a, b \in \mathbb{K}^*$ se cumplen las relaciones $v(ab) = v(a) + v(b)$ y $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$, si $a+b \neq 0$. Generalmente, se suele ampliar la valoración a $\mathbb{K}$ definiendo $v(0) = +\infty$. Consideraremos aquí la aplicación que envía cada elemento $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^*$ al menor exponente de los términos de la serie (Ec. 1.3), es decir, $v(\mathbf{a}) = l/N$.

Es conocido de la teoría de valoraciones que $\mathbb{C}\{\{t\}\} = \{a \mid v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$, el anillo de valoración, es un anillo local de maximal $m = \{a \mid v(a) > 0\} \cup \{0\}$. Entonces el cociente $\mathbb{C}\{\{t\}\}/m \simeq \mathbb{C}$ es el cuerpo residual que, en este caso, es también de característica 0.

Definición 1.12. Sea $\mathbf{a} \in (\mathbb{K}^*)^n$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}\{\{t\}\}$, entonces definimos la aplicación *tropicalización* como aquella que asigna a cada $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ la valoración componente a componente. Se denota por $trop$.

$$\begin{aligned} trop : (\mathbb{K}^*)^n &\longrightarrow \mathbb{T}^n \\ \mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) &\longmapsto trop(\mathbf{a}) = (v(\mathbf{a}_1), \dots, v(\mathbf{a}_n)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Por lo general, también se asigna el nombre de *tropicalización* a la asociación de curvas, hipersuperficies o variedades tropicales desde curvas, hipersuperficies o variedades algebraicas, respectivamente, mediante procesos que degeneran su estructura.

Definición 1.13. Se llama *tropicalización* al proceso de asignar a una variedad algebraica un complejo poliédrico que conforma su variedad tropical asociada.

En geometría algebraica operamos generalmente con ecuaciones que determinan las variedades, por ejemplo mediante polinomios en n variables como F .

$$F = \sum_{i \in A} a_i x^i = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in A} a_{(i_1, \dots, i_n)} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

Entonces obtendremos la *tropicalización de F* , que denotamos $trop(F)$, empleando la aplicación de la Ec.(1.4) sobre los coeficientes de F y sustituyendo las operaciones suma y producto convencionales por las tropicales. Según esto $f = trop(F)$ vendrá dado como

$$\begin{aligned} f &= trop(F) \\ &= \bigoplus_{i \in A} trop(a_i) \odot \omega^i \\ &= \bigoplus_{(i_1, \dots, i_n) \in A} v(a_{(i_1, \dots, i_n)}) \odot \omega_1^{i_1} \odot \dots \odot \omega_n^{i_n}. \end{aligned}$$

Además, si empleásemos la definición de las operaciones tropicales de la *Ec.(1.1)*

$$f = \min_{(i_1, \dots, i_n) \in A} \{v(a_{(i_1, \dots, i_n)}) + i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n\}.$$

Ejemplo 1.14. Damos polinomios $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, recordando $\mathbb{K} = \mathbb{C}\{\{t\}\}$, tales que la *tropicalización* de los mismos se corresponda con los polinomios tropicales complejos dados en el *Ejemplo 1.5*.

I Dados

$$f_a = \bigoplus_{i=0}^n \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega] \quad \text{o} \quad f_b = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega]$$

entonces

$$F_a = \sum_{i=0}^n (a_i t^{\alpha_i}) x^i; \text{ donde } a_i \in \mathbb{C}^* \quad \text{y} \quad F_b = \sum_{i \in A} (a_i t^{\alpha_i}) x^i; \text{ donde } a_i \in \mathbb{C}^*$$

$$\text{verifican } \text{trop}(F_a) = f_a \text{ y } \text{trop}(F_b) = f_b.$$

II Si $f = 0 \odot \omega \oplus 1$ entonces

$$F_1 = 27x - 10t, \quad F_2 = x + t + 2t^2 + 3t^3, \text{ y} \quad F_3 = -10x + 2020t + t^7$$

$$\text{verifican } \text{trop}(F_1) = \text{trop}(F_2) = \text{trop}(F_3) = f.$$

III Damos $F \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ tal que $\text{trop}(F) = f = 2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2$:

$$F = t^2 + x_1 + tx_2.$$

IV Buscamos $G \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ tal que $\text{trop}(G) = g = 4 \oplus 2 \odot \omega_1 \oplus 3 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \oplus 1 \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 2 \odot \omega_2^2$, entonces recordando que $g = f^2$ podemos comprobar que

$$G = F^2 = t^4 + t^2 x_1 + 2t^3 x_2 + x_1^2 + 2tx_1 x_2 + t^2 x_2^2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$$

$$\text{verifica } \text{trop}(G) = \text{trop}(F^2) = f^2.$$

Sin embargo, existen otros polinomios, $H \neq G$, tales que su *tropicalización* también es g . Por ejemplo,

$$H = t^2 + (t^2 - 13t^3) x_1 + (2t^3 - 13t^4) x_2 + x_1^2 + (2t + 13t^2) x_1 x_2 + (t^2 + 13t^3) x_2^2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2].$$

V Para $\text{trop}(F_R) = f_R = 5 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 0 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \oplus 1 \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_2^2 \oplus 2 \odot \omega_1^3 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1 \odot \omega_2^2 \oplus 0 \odot \omega_2^3$ buscamos $F_R \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$.

Escribimos un polinomio general en 2 variables de grado 3

$$F = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{30}x_1^3 + a_{03}x_2^3,$$

dónde sabemos de los coeficientes del polinomio que, siendo series de Puiseux complejas, comienzan en un orden concreto del parámetro t tal que el coeficiente asociado a ese término es no nulo.

$$a_{00} = b_{00} \cdot t^5 + *_{00} \text{ donde } *_{00} \text{ son términos en serie de Puiseux complejos de orden superior: } a_{00} = \sum_{l=5}^{\infty} b_l t^l \text{ con } b_5 \neq 0 \text{ y } b_l \in \mathbb{C}.$$

Para los índices $(i, j) \in \{(1, 0), (0, 1), (2, 0), (0, 2), (2, 1), (1, 2)\}$ tenemos $a_{ij} = b_{ij} + *_{10}$ dónde $*_{10}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior: $a_{ij} = \sum_{l=0}^{\infty} b_l t^l$ con $b_0 \neq 0$ y $b_l \in \mathbb{C}$.

Para los índices $(i, j) \in \{(1, 1), (0, 3)\}$ tenemos $a_{ij} = b_{ij} + *_{ij}$ dónde $*_{ij}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior: $a_{ij} = \sum_{l=1}^{\infty} b_l t^l$ con $b_1 \neq 0$ y $b_l \in \mathbb{C}$.

$a_{30} = b_{30} \cdot t^2 + *_{30}$ dónde $*_{30}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior, es decir, $a_{30} = \sum_{l=2}^{\infty} b_l t^l$ con $b_2 \neq 0$ y $b_l \in \mathbb{C}$.

Finalmente, ya podemos proporcionar la definición del objeto de estudio del trabajo: *punto singular tropical de orden al menos k*. Necesitamos antes la definición bien conocida de *punto singular*.

Definición 1.15. Sea $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio que define la hipersuperficie $V(F) = \{F = 0\}$. Se dice que $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ es un *punto singular de orden al menos k* si F y todas las derivadas parciales de F hasta orden $k - 1$ se anulan en P .

Denotaremos $Sing_k(F)$ el conjunto de puntos singulares de orden al menos k del polinomio F .

Definición 1.16. Sea $A \subseteq \mathbb{N}^n$ el soporte de un polinomio tropical $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$. Dado $p \in \mathcal{T}(f)$ se dice que es un *punto singular tropical de orden al menos k* si existen $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ tales que $\text{trop}(F) = f$, $\text{trop}(P) = p$ y P es un punto singular de orden al menos k de la superficie algebraica $V(F)$.

Denotaremos $\text{Sing}_k^{\text{trop}}(f)$ al conjunto de puntos singulares tropicales de orden al menos k del polinomio f .

La Definición 1.16 la hemos obtenido como la extensión natural del caso de la definición de *punto singular tropical* dada en [3], dónde se trabajan singularidades simples. De hecho, es posible recuperar dicha definición desde la Definición 1.16 considerando el caso $k = 2$.

Ejemplo 1.17. Recogemos del Ejemplo 1.14 el caso del polinomio G , dónde vimos $F = t^2 + x_1 + tx_2$ tal que si $G = F^2$ entonces $\text{trop}(G) = f^2$. De modo que, por construcción, toda raíz de G ha de ser un punto singular de $\{G = 0\}$. Esto lo comprobamos aplicando las definiciones, es decir, veamos que toda raíz de G es un punto dónde las derivadas parciales se anulan.

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 2x_1 + 2tx_2 + 2t^2 = 2(x_1 + tx_2 + t^2) = 2G \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 2t^2x_2 + 2tx_1 + 2t^2 = 2t(tx_2 + x_1 + t^2) = 2tG$$

Sean por ejemplo dos raíces de G : $P = (-t^2 + t, -1)$ y $Q = (-2t^2, t)$ tales que $p = (1, 0) = \text{trop}(P)$ y $q = (2, 1) = \text{trop}(Q)$. Entonces aplicando la Definición 1.16 tendríamos que tanto p como q son puntos singulares tropicales de f^2 , simples en este caso. De hecho, se trata de un resultado esperado a partir de la representación de la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(g)$ que hemos realizado en el Ejemplo 1.14.

Capítulo 2

Caracterización de puntos singulares tropicales complejos

En *este capítulo* estudiamos si una hipersuperficie tropical es singular sin necesidad de calcular un polinomio clásico en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ singular cuya tropicalización sea la hipersuperficie dada.

Esto ya se ha estudiado en el caso de una singularidad simple [3], alcanzando una caracterización puramente tropical. Además, se ha extendido al caso de orden superior, en [1]. En la *Sección 2.2* daremos el resultado necesario para formalizar dicha afirmación (*Proposición 2.21*).

A continuación presentamos una serie de conceptos y resultados previos. Todos ellos orientados a reducir el problema de la demostración principal a la tropicalización de un espacio lineal.

2.1. Base tropical

En adelante se denotamos por I un ideal sobre el anillo de polinomios en n variables y coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces, como es habitual, $\mathcal{V}(I)$ denota el conjunto de ceros del ideal. Es decir,

$$\mathcal{V}(I) = \{P \in \mathbb{K}^n \mid F(P) = 0, F \in I\}.$$

Por otro lado, a partir de ahora también trabajamos con el conjunto dado por $\mathcal{T}(I)$, llamado *tropicalización de I* , que se considera cómo la tropicalización del conjunto de ceros del ideal I , es decir,

$$\mathcal{T}(I) = \{q \in \mathbb{T}^n \mid q = \text{trop}(P), P \in \mathcal{V}(I)\} = \text{trop}(\mathcal{V}(I)) \quad (2.1)$$

Definición 2.1. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Se llama *base tropical de I* a un conjunto generador finito de I $\{F_1, \dots, F_r\}$ tal que $\mathcal{T}(I) = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{T}(\text{trop}(F_i))$.

En el libro de referencia de la *Geometría Tropical, Introduction to tropical geometry* [10], se enuncia y demuestra el llamado *Teorema Fundamental de la Geometría Tropical*, en el *Teorema 2.2* escribimos la versión del mismo que se adecúa al contexto del trabajo.

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental de la Geometría Tropical). *Todo ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ admite una base tropical.*

De hecho, anteriormente Mikhail Kapranov enunció y probó este mismo resultado restringido a hipersuperficies, que se corresponde en definitiva como el caso base del *Teorema Fundamental de la Geometría Tropical*, que escribimos en el *Teorema 2.3* siguiendo nuevamente el contexto del trabajo.

Teorema 2.3 (Teorema de Kapranov). *Sea $I = (F) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ideal principal entonces $\{F\}$ es una base tropical.*

Y a continuación escribimos una versión más débil del *Teorema Fundamental de la Geometría Tropical*, dónde se incluye la hipótesis de que sea I lineal y homogéneo (*Proposición 2.9*). Ya que estas condiciones son suficientes para emplear el resultado posteriormente. De hecho, en la *Proposición 2.10* vemos como construir una base tropical de un ideal lineal homogéneo simplemente usando los llamados *circuitos*, que definimos a continuación.

Definición 2.4. Sea $F \in I$ no nulo y lineal homogéneo de soporte minimal entonces se dice que es un *circuito*.

Emplearemos varios lemas para detallar la demostración de la *Proposición 2.9*, que a su vez es la antesala de la *Proposición 2.10*. En particular, el *Lema 2.5*, se corresponde con el contenido más sencillo del *Teorema de Kapranov*.

Lema 2.5. Sea $\mathbb{K}$ dotado de la valoración v , que a su vez define la tropicalización trop . Sea $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio. Si $\bar{x} \in (\mathbb{K}^*)^n$ es una raíz de F , entonces $\bar{\omega} = \text{trop}(\bar{x})$ es raíz tropical de $f = \text{trop}(F)$.

Demostración. Escribimos $F = \sum_{i \in A} a_i \cdot x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio de soporte A tal que $\text{trop}(F) = f = \bigoplus_{i \in A} v(a_i) \odot \omega^i$ es su tropicalización donde podemos considerar $f = \min\{v(a_i) + i\omega\}$. Sea $\bar{x} \in (\mathbb{K}^*)^n$, realizamos la prueba por contrarecíproco. Supongamos que $\bar{\omega} = \text{trop}(\bar{x})$ no es raíz de f . En ese caso, el mínimo se alcanza una sola vez, es decir, existe un multiíndice j en el soporte de F tal que $v(a_j) + j\bar{\omega} < v(a_k) + k\bar{\omega} \quad \forall k \in A \setminus \{j\}$. Tenemos entonces que $v(F(\bar{x})) = v(\sum a_i \cdot \bar{x}^i) \geq \min\{v(a_i) + i\bar{\omega}\}$. Es conocido, que para una valoración v , si $v(\alpha) < v(\beta)$ entonces $v(\alpha + \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\} = v(\alpha)$. En nuestro caso tendremos $v(F(\bar{x})) = v(a_j \cdot \bar{x}^j) \neq \infty$. Entonces, $F(\bar{x}) \neq 0$ y $\bar{x}$ no es raíz de F . ■

Lema 2.6. Sean I un ideal lineal homogéneo tal que $e_j = (0, \dots, 1^j, \dots, 0) \in \mathcal{V}(I)$, $\pi_j : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^{n-1}$ la proyección que elimina la coordenada j -ésima y “por abuso de notación” llamamos π_j a la misma proyección de $\mathbb{T}^n$ en $\mathbb{T}^{n-1}$. Entonces $p \in \mathcal{T}(\mathcal{V}(I))$ si y sólo si $\pi_j(p) \in \mathcal{T}(\pi_j(V))$, donde $V = \mathcal{V}(I) \cap (\mathbb{K}^*)^n$.

Demostración. Sea $p \in \mathcal{T}(I)$ entonces existe un $x \in V$ tal que $\text{trop}(x) = p$. Claramente $\pi_j(p) = \text{trop}(\pi_j(x)) \in \mathcal{T}(\pi_j(V))$.

Si $\pi_j(p) \in \mathcal{T}(\pi_j(V))$ existirá $y \in \pi_j(V)$ con $\text{trop}(y) = \pi_j(p)$ y existe un $x \in V$ con $\pi_j(x) = y$. Entonces $\text{trop}(x)$ y p solo pueden diferir en la coordenada j . Como $e_j \in V$ para cierto $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumple $x + \lambda e_j \in V$ y $\text{trop}(x + \lambda e_j) = p$. ■

Lema 2.7. Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal lineal homogéneo y $V = \mathcal{V}(I) \cap (\mathbb{K}^*)^n$ entonces

$$V = \emptyset \iff \mathcal{V}(I) \subseteq \{x_j = 0\}.$$

Demostración. Si $V = \emptyset$ entonces

$$\mathcal{V}(I) \subseteq V \left(\prod_{1 \leq i \leq n} x_i \right) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} V(x_i) = \mathcal{V}(I) \cap \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} V(x_i) \right) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} (\mathcal{V}(I) \cap V(x_i)),$$

Por lo que con $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(I) \cap V(x_j)$ ya estaría.

Recíprocamente si $\mathcal{V}(I) \subseteq \{x_j = 0\}$ entonces todo $x \in \mathcal{V}(I)$ será de la forma $x = (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$, por ello $\mathcal{V}(I) \cap (\mathbb{K}^*)^n = \emptyset$. ■

Por último este lema se emplea durante el proceso inducción en el resultado principal.

Lema 2.8. Sea $X = (x_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz singular tal que su tropicalización tiene ceros fuera de la diagonal (recordamos que 0 es el neutro del producto tropical).

$$\text{trop}(X) = \begin{pmatrix} v(x_{11}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v(x_{nn}) \end{pmatrix}$$

Entonces, existe al menos un índice $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $v(x_{kk}) \geq 0$.

Demostración. Aplicamos el *Lema 2.5*. Por definición $\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} I(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)}$ (con las notaciones habituales: S_n es grupo diédrico de orden n , σ una permutación e $I(\sigma)$ el índice de la permutación). Razonamos por reducción al absurdo. Si $v(x_{ii}) < 0$ para todo i entonces $v(\prod_{i=1}^n x_{ii}) < v(\prod_{i=1}^n x_{i\sigma(i)})$ para todo $\sigma \neq Id$ y por tanto $v(\det(X)) = v(\prod_{i=1}^n x_{ii}) < 0$ por lo que $\det(X) \neq 0$. De lo que deducimos que existe al menos un índice tal que $v(x_{kk}) \geq 0$. ■

Las *Proposiciones 2.9* y *2.10* las formulamos en base al *Lema 2.2* de [2], en cuya demostración se mantiene una estructura clara dividida en dos partes, por lo que aquí decidimos formular dos enunciados distinguidos. En la *Proposición 2.9* consideramos sólo la igualdad para la intersección con formas lineales del ideal y en la *Proposición 2.10* tomamos la restricción a las formas lineales que son además circuitos.

Proposición 2.9. Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal lineal homogéneo. Entonces

$$\mathcal{T}(I) = \bigcap_{L \text{ forma lineal en } I} \mathcal{T}(\text{trop}(L)).$$

Demostración. Razonamos por doble contenido. En primer lugar, es trivial que

$$\mathcal{T}(I) \subseteq \bigcap_{L \text{ forma lineal en } I} \mathcal{T}(\text{trop}(L)).$$

Dado $p \in \mathcal{T}(I)$ entonces $\exists \bar{x} \in \mathcal{V}(I)$ tal que $p = \text{trop}(\bar{x})$ y para todo $F \in I$ se verifica $F(\bar{x}) = 0$, luego basta aplicar el *Lema 2.5* a las formas lineales de I .

Pasamos a probar el otro contenido,

$$\mathcal{T}(I) \supseteq \bigcap_{L \text{ forma lineal en } I} \mathcal{T}(\text{trop}(L)).$$

Realizamos la prueba por inducción sobre la codimensión del conjunto $V = \mathcal{V}(I) \cap (\mathbb{K}^*)^n$. En particular, si $V = \emptyset$ entonces, por el *Lema 2.7*, $\mathcal{V}(I) \subseteq \{x_i = 0\} \rightarrow x_i \in I$.

$$\text{trop}(x_i) = \omega_i, \mathcal{T}(\text{trop}(x_i)) = \mathcal{T}(\omega_i) = \emptyset, \bigcap_{L \in I} \mathcal{T}(\text{trop}(L)) = \emptyset$$

Ya que no se puede alcanzar el mínimo sobre dos monomios si solamente existe uno.

Suponemos en adelante $V \neq \emptyset$ y hacemos inducción sobre la codimensión de V : $\text{codim}(V) = n - \dim(V)$. En el caso base, $\text{codim}(V) = 1$, tenemos que V es hiperplano ($\dim(V) = n - 1$) y por tanto $\mathcal{V}(I)$ es hiperplano con lo cual el ideal es principal: $I = (L)$ donde $L = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ con $a_i \in \mathbb{K} = \mathbb{C}\{\{t\}\}$; y $V = V(L) \cap (\mathbb{K}^*)^n$. Sea un cero tropical $p \in \mathcal{T}(\text{trop}(L))$ tenemos que en $\text{trop}(L)(p)$ el mínimo se alcanza al menos dos veces. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que el mínimo se alcanza en los k primeros monomios, $k \geq 2$.

$$p = (\underbrace{p_1, \dots, p_k}_{\text{el mínimo se alcanza}}, \underbrace{p_{k+1}, \dots, p_n}_{\text{cotas estrictas}})$$

De hecho, $\text{trop}(L) = \bigoplus_{i=1}^n q_i \odot \omega_i$, habiéndose considerado $q_i = \text{trop}(a_i)$. Entonces $\text{trop}(L)(p)$ verifica:

$$q_1 + p_1 = q_2 + p_2 = \dots = q_k + p_k < q_j + p_j \quad \text{siendo } j \in \{k+1, \dots, n\}.$$

Vamos a construir un cero clásico $\bar{x} \in (\mathbb{C}\{\{t\}\})^n$ con $\text{trop}(\bar{x}) = p$, tomando $\{b_i\}_{i=2}^n \subset \mathbb{C}^*$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, b_2 t^{p_2}, \dots, b_k t^{p_k}, b_{k+1} t^{p_{k+1}}, \dots, b_n t^{p_n})$$

como $a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_k \bar{x}_k + a_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \dots + a_n \bar{x}_n = 0$

$$\bar{x}_1 = \frac{-a_2 \bar{x}_2 - \dots - a_k \bar{x}_k - a_{k+1} \bar{x}_{k+1} - \dots - a_n \bar{x}_n}{a_1}.$$

Es posible considerar sin pérdida de generalidad $a_j = d_j t^{q_j}$ con $\{d_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{C}^*$, de modo que, $a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_k \bar{x}_k = d_2 t^{q_2} b_2 t^{p_2} + \dots + d_k t^{q_k} b_k t^{p_k} = d_2 b_2 t^{p_2+q_2} + \dots + d_k b_k t^{p_k+q_k} = (d_2 b_2 + \dots + d_k b_k) t^{p_2+q_2}$, ya que en las k -ésimas primeras variables se verifica la igualdad entre monomios tropicales, con lo que se trata de un factor común. Siendo $b_j, d_j \in \mathbb{C}^*$ y bajo la condición $d_2 b_2 + \dots + d_k b_k \neq 0$, serán

$$v((d_2 b_2 + \dots + d_k b_k) t^{p_2+q_2}) = v(t^{p_2+q_2}) = p_2 + q_2 \quad \text{y} \quad v(a_1) = q_1.$$

Entonces aplicando las propiedades [en primer lugar $v(\alpha^{-1}) = -v(\alpha)$ y después si $v(\alpha) \neq v(\beta)$ entonces $v(\alpha + \beta) = \min\{v(\alpha), v(\beta)\}$]

$$\begin{aligned} v(\bar{x}_1) &= v(a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_k \bar{x}_k + a_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \dots + a_n \bar{x}_n) - v(a_1) \\ &= \min\{v(a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_k \bar{x}_k), v(a_{k+1} \bar{x}_{k+1} + \dots + a_n \bar{x}_n)\} - v(a_1) \\ &= v(a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_k \bar{x}_k) - v(a_1) \\ &= q_2 + p_2 - q_1 \end{aligned}$$

En el caso particular $k = 2$ obtenemos inmediatamente un cero clásico asociado, puesto que la condición $d_2 b_2 \neq 0$ se verificaría por construcción. En lo sucesivo es suficiente tomar coeficientes tales que $d_2 b_2 + \dots + d_k b_k \neq 0$. Hemos realizado así una prueba constructiva para un cero clásico, $\bar{x} \in (\mathbb{K}^*)^n$, dado un cero tropical, $p \in \mathbb{R}^n$, tal que $\text{trop}(\bar{x}) = p$.

En el caso general, como hipótesis de inducción $\cap_{L \in I} \mathcal{T}(\text{trop}(L)) \subseteq \mathcal{T}(I)$ siempre que $\text{codim}(V) \leq r$. Veamos que entonces se verifica este contenido para $\text{codim}(V) = r + 1$. Supongamos p cero tropical, $p \in \cap_{L \in I} \mathcal{T}(\text{trop}(L))$. Sin pérdida de generalidad $p = (0, \dots, 0)$. Esta es una simplificación muy común en

geometría tropical, ya que cualquier otro caso podemos obtenerlo mediante traslación de coordenadas, véase Lema 2.28.

Primeramente si $\exists j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $e_j \in \mathcal{V}(I)$ por el Lema 2.6 es equivalente $p \in \mathcal{T}(I)$ y $\pi_j(p) \in \mathcal{T}(\pi_j(V))$. Hacemos notar que $\text{codim}(V) = \text{codim}(\pi_j(V))$. Iterando este proceso reducimos el problema al caso $e_j \notin \mathcal{V}(I) \quad \forall j$ con $1 \leq j \leq n$. Entonces el contenido $\mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(I) \oplus \langle e_j \rangle$ es estricto, de este modo, $V_j^* = (\mathcal{V}(I) \oplus \langle e_j \rangle) \cap (\mathbb{K}^*)^n$ tiene una dimensión más que V : $\dim(V_j^*) = \dim(V) + 1$; y por tanto, menor codimensión que V : $\text{codim}(V_j^*) = \text{codim}(V) - 1$. Entonces, para cada V_j^* con $1 \leq j \leq n$, es posible aplicar la hipótesis de inducción para afirmar que $\mathcal{T}(V_j^*) = \cap \mathcal{T}(\text{trop}(L))$ donde la intersección es para todos los L tales que $V_j^* \subseteq \{L = 0\}$. Además $p \in \cap_{j=1}^n \mathcal{T}(V_j^*) = \cap_{j=1}^n \mathcal{T}(\mathcal{V}(I) \oplus \langle e_j \rangle)$.

Por hipótesis de inducción, para cada j $1 \leq j \leq n$, existe $\exists w_j = (u_{j1}, \dots, u_{jj-1}, w_{jj}, u_{jj+1}, \dots, u_{jn}) \in V_j^*$ tal que $\text{trop}(w_j) = (0, \dots, 0)$. Por construcción, existe $u_j \in V$ tal que $\text{trop}(u_{ji}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$. Se construye una matriz U cuyas filas las forman las n n -tuplas $u_j = (u_{j1}, \dots, u_{jj-1}, u_{jj}, u_{jj+1}, \dots, u_{jn})$ tal que $\text{trop}(u_j) = (0, \dots, 0)$ excepto j -ésima, es decir, $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1j-1} & u_{1j} & u_{1j+1} & \cdots & u_{1n} \\ & & & \vdots & & & \\ u_{n1} & \cdots & u_{nj-1} & u_{nj} & u_{nj+1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = (u_{ij})$$

Tal y como se ha construido:

$$\text{trop}(U) = \begin{pmatrix} v(u_1) \\ \vdots \\ v(u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(u_{11}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v(u_{nn}) \end{pmatrix}$$

Además, comprobado ya el caso base, es posible asumir $\text{codim}(V) > 1$ o equivalentemente $\dim(V) \leq n - 2$ y entonces la matriz construida tiene rango a lo sumo $n - 2$. Se puede asegurar por ello $\det(U) = 0$ y entonces $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $v(u_{kk}) \geq 0$ por el Lema 2.8. Se toma la matriz U_k como aquella obtenida de eliminar las k -ésimas fila y columna, entonces $U_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en la que aún se puede asegurar $\det(U_k) = 0$ y, a partir de $\text{trop}(U_k)$, que existe un índice distinto del anterior con elemento de valoración no negativa: $\exists l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ tal que $v(u_{ll}) \geq 0$. Sin pérdida de generalidad se toman $k = 1$ y $l = 2$. Se estudian los casos posibles:

Si $v(u_{11}) = 0$ entonces u_1 es tal que $v(u_{1i}) = 0 \quad \forall i$ con lo que se tiene $\text{trop}(u_1) = p \in \mathcal{T}(I)$

Si $v(u_{22}) = 0$ entonces u_2 es tal que $v(u_{2i}) = 0 \quad \forall i$ con lo que se tiene $\text{trop}(u_2) = p \in \mathcal{T}(I)$

Si $v(u_{11}) > 0$ y $v(u_{22}) > 0$ entonces se toma $\lambda \in \mathbb{K}^*$ y tal que $v(\lambda) = 0$, con el que establecer una combinación lineal $u_1 + \lambda \cdot u_2$ cuya valoración sea el cero tropical p

$$\begin{aligned} \text{trop}(u_1 + \lambda \cdot u_2) &= p \\ \text{trop}((u_{11} + \lambda \cdot u_{21}), (u_{12} + \lambda \cdot u_{22}), \dots, (u_{1n} + \lambda \cdot u_{2n})) &= (0, 0, \dots, 0) \\ (v(u_{11} + \lambda \cdot u_{21}), v(u_{12} + \lambda \cdot u_{22}), \dots, v(u_{1n} + \lambda \cdot u_{2n})) &= (0, 0, \dots, 0) \\ (\min\{v(u_{11}), v(u_{21})\}, \min\{v(u_{12}), v(u_{22})\}, \dots, \min\{v(u_{1n}), v(u_{2n})\}) &= (0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Esta construcción será posible siendo λ suficientemente genérico para que se mantengan $\min\{v(u_{1j}), v(u_{2j})\} = 0 \quad \forall j \in \{3, \dots, n\}$, basta $u_{1j} + \lambda \cdot u_{2j} \neq 0$. Además, $v(u_{11}) > 0$ y $v(u_{21}) = 0$ entonces se alcanza el mínimo $\min\{v(u_{11}), v(u_{21})\} = v(u_{21}) = 0$ y $v(u_{12}) = 0$ y $v(u_{22}) > 0$ entonces se alcanza el mínimo $\min\{v(u_{12}), v(u_{22})\} = v(u_{12}) = 0$.

En cualquiera de los casos, $p \in \mathcal{T}(I)$ y por lo tanto el proceso de inducción concluye y el contenido queda probado. ■

Proposición 2.10. Sea $I \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal lineal homogéneo. Entonces

$$\mathcal{T}(I) = \bigcap_{L \in I, L \text{ circuito}} \mathcal{T}(\text{trop}(L))$$

Demostración. Se realiza una prueba por doble contenido. Sean $\{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_r\}$ formas lineales que generan I . En este caso se mantiene el contenido claro, $\mathcal{T}(I) \subseteq \bigcap_{L \in I, L \text{ circuito}} \mathcal{T}(\text{trop}(L))$, y el otro se prueba por contrarrecíproco. Es decir, para probar

$$p \in \mathcal{T}(\text{trop}(\mathbf{l}_i)) \quad \forall i, 1 \leq i \leq r \quad \Rightarrow \quad p \in \mathcal{T}(I)$$

se prueba la sentencia

$$p \notin \mathcal{T}(I) \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, r\}, p \notin \mathcal{T}(\text{trop}(\mathbf{l}_j))$$

Es sabido ya, por el contenido más general probado en la *Proposición 2.9*, que si $p \notin \mathcal{T}(I)$ entonces $\exists \mathbf{l} \in I$ forma lineal tal que $p \notin \mathcal{T}(\text{trop}(\mathbf{l}))$. Basta comprobar que podemos considerar $\mathbf{l}$ de soporte minimal. Sea $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}$, si $\mathbf{l}_1$ es de soporte minimal ya estaría. En otro caso, existe una forma lineal $\hat{\mathbf{l}}_1 \in I$ con soporte minimal contenido en el de $\mathbf{l}_1$. Si $p \notin \mathcal{T}(\text{trop}(\hat{\mathbf{l}}_1))$ hemos terminado. En caso contrario habrá en $\mathbf{l}_1$ un sólo monomio dónde el mínimo se alcanza, al que llamamos x_{m_1} , y en $\hat{\mathbf{l}}_1$ hay al menos dos monomios en los que se alcanza el mínimo en p . Llamamos x_{m_2} a uno de los monomios en los que el mínimo se alcanza y es distinto de x_{m_1} . Existe un único λ tal que el polinomio $\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_1 + \lambda \hat{\mathbf{l}}_1$ elimina el monomio x_{m_2} . Entonces el soporte de $\mathbf{l}_2$ queda estrictamente contenido en el soporte de $\mathbf{l}_1$. Además $\mathbf{l}_2$ alcanza el mínimo en p solamente en el monomio x_{m_1} .

Mas concretamente, sean $\mathbf{l}_1 = \sum_{i \in A} a_i x_{m_i}$ y $\hat{\mathbf{l}}_1 = \sum_{i \in B} b_i x_{m_i}$ dónde $B \subset A$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad $a_{m_1} = b_{m_2} = 1$, de modo que $v(a_i) > 0$ para todo $i \neq m_1$ y $v(b_i) \geq 0$ para todo i . Entonces determinamos $\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_1 - a_{m_2} \hat{\mathbf{l}}_1$ dónde $\text{Supp}(\mathbf{l}_2) \subset A \setminus \{m_2\}$. Ya que $v(a_{m_1} - a_{m_2}) = 0$ al ser $v(a_{m_1}) = 0$ y $v(a_{m_2} b_{m_1}) > 0$, y además $v(a_i - a_{m_2} b_i) > 0$ siendo $i \neq m_1$.

Por último, iterando el proceso, si $\mathbf{l}_2$ no tuviera soporte minimal, obtendremos la forma lineal buscada. Y módulo multiplicación por constante hay una cantidad finita de circuitos. ■

2.2. Derivadas de Euler

En esta sección consideramos los polinomios F , g y g_m como: $F = \sum a_i x^i$ con $a_i \in \mathbb{K}$, al que se llamaremos *polinomio clásico*; $g = \sum c_i x^i$ con $c_i \in \mathbb{Z}$, al que se haremos referencia como *polinomio con coeficientes enteros*; y el monomio $g_m = c x^m$ con $c \in \mathbb{Z}$, aunque por lo general consideramos $c = 1$ sin pérdida de generalidad, por tratarse de los mismos resultados salvo multiplicación por el coeficiente. Siendo el primero, F , el polinomio a derivar respecto de las formas polinómica o monómica, g o g_m respectivamente, en términos de las *derivadas de Euler y eulerianas de F* que definimos a continuación.

Definición 2.11. Sea un polinomio clásico $F = \sum_{i \in A} a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ y $g = \sum c_i x^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio con coeficientes enteros. Se define la *derivada de Euler F respecto de g* como la combinación lineal entera

$$g_{\Theta}(F) = \sum c_i x^i \frac{\partial^{|i|} F}{\partial x^i}.$$

dónde $g_{\Theta} = \sum c_i x^i \frac{\partial^{|i|}}{\partial x^i}$, es decir, define un operador que se construye a partir de la suma de los operadores individuales dados por los monomios de g tales que $c_i x^i \rightarrow c_i x^i \frac{\partial^{|i|}}{\partial x^i}$.

La idea de esta derivada es aplicar un operador a F que actúa en términos de derivadas parciales.

Observación 2.12. Conviene destacar que si operamos las derivadas parciales de la *Definición 2.11* con g un polinomio afín el resultado se corresponde con la siguiente expresión equivalente

$$g_{\Theta}(F) = \sum a_i g(i) x^i.$$

Es suficiente que consideremos $g = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + c_0 \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$, de modo que $g_{\Theta} = c_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + c_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, y tendremos por tanto

$$g_{\Theta}(F) = c_1 x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + c_n x_n \frac{\partial F}{\partial x_n} + c_0 F.$$

Para cada índice $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_{i \in A} a_i x^i) = \sum_{i \in A} a_i i_j x^{i^*}$, dónde hemos considerado $i^* = (i_1, \dots, i_j - 1, \dots, i_n)$, de modo que cada sumando $c_j x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}$ se corresponde con $\sum_{i \in A} a_i (c_j i_j) x^i$ y acoplando todos los sumandos, con la particularidad del término constante que verifica $(c_0)_{\Theta}(F) = c_0 F$, obtenemos como resultado la expresión en cuestión: $g_{\Theta}(F) = \sum_{i \in A} a_i g(i) x^i$.

Ejemplo 2.13. A partir de los polinomios del *Ejemplo 1.14* realizamos algunas *derivadas de Euler* de los mismos.

I Tomamos $F_a = \sum_{i=0}^n (a_i t^{\alpha_i}) x^i \mathbb{K}[x]$ con $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ para todo índice $0 \leq i \leq n$. Haremos las derivadas respecto de los polinomios $g_{100} = z$, $g_{010} = z - 1$, $g_{001} = z - 2$, $g_{011} = z^2 - 3z + 2$, $g_{101} = z^2 - 2z$,

$$g_{110} = z^2 - z \text{ y } g_{111} = z^3 - 3z^2 + 2z.$$

$$\begin{aligned} g_{100\ominus}(F_a) &= x \frac{\partial F_a}{\partial x} & g_{011\ominus}(F_a) &= x^2 \frac{\partial^2 F_a}{\partial x^2} - 3x \frac{\partial F_a}{\partial x} + 2F_a \\ g_{010\ominus}(F_a) &= x \frac{\partial F_a}{\partial x} - F_a & g_{101\ominus}(F_a) &= x^2 \frac{\partial^2 F_a}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial F_a}{\partial x} \\ g_{001\ominus}(F_a) &= x \frac{\partial F_a}{\partial x} - 2F_a & g_{110\ominus}(F_a) &= x^2 \frac{\partial^2 F_a}{\partial x^2} - x \frac{\partial F_a}{\partial x} \\ g_{111\ominus}(F_a) &= x^3 \frac{\partial^3 F_a}{\partial x^3} - 3x^2 \frac{\partial^2 F_a}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial F_a}{\partial x} \end{aligned}$$

II Tomamos $F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{K}[x]$: $F_1 = 27x - 10t$, $F_2 = x + (t + t^2 + 3t^3)$ y $F_3 = -10x + 2020t + t^7$. Para los 3 calculamos las derivadas de Euler respecto de los 4 polinomios enteros $g_{10} = z$, $g_{01} = z - 1$, $g_{11} = z^2 - z$ y $g_{00} = z^2$.

$$\begin{aligned} g_{10\ominus}(F_1) &= x \frac{\partial F_1}{\partial x} = 27x & g_{01\ominus}(F_1) &= x \frac{\partial F_1}{\partial x} - F_1 = +10t \\ g_{11\ominus}(F_1) &= x^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - x \frac{\partial F_1}{\partial x} = -27x & g_{00\ominus}(F_1) &= x^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = 0 \\ g_{10\ominus}(F_2) &= x \frac{\partial F_2}{\partial x} = x & g_{01\ominus}(F_2) &= x \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 = -(t + t^2 + 3t^3) \\ g_{11\ominus}(F_2) &= x^2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - x \frac{\partial F_2}{\partial x} = -x & g_{00\ominus}(F_2) &= x^2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 0 \\ g_{10\ominus}(F_3) &= x \frac{\partial F_3}{\partial x} = -10x & g_{01\ominus}(F_3) &= x \frac{\partial F_3}{\partial x} - F_3 = -2020t - t^7 \\ g_{11\ominus}(F_3) &= x^2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - x \frac{\partial F_3}{\partial x} = 10x & g_{00\ominus}(F_3) &= x^2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}$$

III Tomamos $F = t^2 + x_1 + tx_2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$, polinomio en 2 variables, y calculamos derivadas de Euler respecto de $g \in \mathbb{Z}[z_1, z_2]$. Consideramos: $g_0 = z_1 + z_2$, $g_{x_1} = z_1 - 1$, $g_{x_2} = z_2 - 1$, $g_{0x_1} = z_2$, $g_{0x_2} = z_1$, $g_{x_1x_2} = z_1 + z_2 - 1$ y $g_{0x_1x_2} = z_1z_2$.

$$\begin{aligned} g_{0\ominus}(F) &= x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + tx_2 & g_{x_1x_2\ominus}(F) &= x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - F = -t^2 \\ g_{x_1\ominus}(F) &= x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - F = -tx_2 - t^2 & g_{0x_1\ominus}(F) &= x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = tx_2 \\ g_{x_2\ominus}(F) &= x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - F = -x_1 - t^2 & g_{0x_2\ominus}(F) &= x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_1 \\ g_{0x_1x_2\ominus}(F) &= x_1x_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{aligned}$$

IV Tomamos $G = t^4 + t^2x_1 + 2t^3x_2 + x_1^2 + 2tx_1x_2 + t^2x_2^2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ y $H = t^4 + (t^2 - 13t^3)x_1 + (2t^3 - 13t^4)x_2 + x_1^2 + (2t + 13t^2)x_1x_2 + (t^2 + 13t^3)x_2^2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Derivamos respecto de los polinomios enteros $g_1 = z_2$, $g_2 = -z_2 + 3$ y $g_3 = z_1^2 + 2$.

$$\begin{aligned} g_{1\ominus}(G) &= x_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} = 2t^3x_2 + x_1^2 + 2tx_1x_2 + 2t^2x_2^2 \\ g_{2\ominus}(G) &= -x_2 \frac{\partial G}{\partial x_2} + 3G = 3t^4 + 3t^2x_1 + 4t^3x_2 + 3x_1^2 + 4tx_1x_2 + t^2x_2^2 \\ g_{3\ominus}(G) &= x_1^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + 2G = t^4 + t^2x_1 + 2t^3x_2 + 3x_1^2 + 2tx_1x_2 + t^2x_2^2 \\ g_{1\ominus}(H) &= x_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} = (2t^3 - 13t^4)x_2 + (2t + 13t^2)x_1x_2 + 2(t^2 + 13t^3)x_2^2 \\ g_{2\ominus}(H) &= -x_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + 3H = 3t^4 + 3(t^2 - 13t^3)x_1 + 2(2t^3 - 13t^4)x_2 + 3x_1^2 + 2(2t + 13t^2)x_1x_2 + (t^2 + 13t^3)x_2^2 \\ g_{3\ominus}(H) &= x_1^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} + 2H = 2t^4 + 2(t^2 - 13t^3)x_1 + 2(2t^3 - 13t^4)x_2 + 4x_1^2 + 2(2t + 13t^2)x_1x_2 + 2(t^2 + 13t^3)x_2^2 \end{aligned}$$

Definimos también la *derivada de Euler de un polinomio tropical*, haciendo uso de la notación $f \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ para el polinomio tropical obtenido de la tropicalización de un polinomio clásico $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. La idea de definir "derivadas parciales tropicales" es la eliminación de puntos, líneas, etc.; de la curva tropical original, f , según el "grado" u "orden" de derivación que vendrá marcado por la forma de g (en concreto, por los monomios que posee).

Definición 2.14. Sea un polinomio tropical $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ con soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ y sea $g = \sum c_i x^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio con coeficientes enteros. Se define la *derivada de Euler del polinomio tropical f respecto de g* como el polinomio tropical dado por

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \bigoplus_{i \in A, g(i) \neq 0} \alpha_i \odot \omega^i. \quad (2.2)$$

Ejemplo 2.15. Tomamos los polinomios del *Ejemplo 1.5* y realizamos algunas *derivadas de Euler* de los mismos.

I Dado $f_a = \bigoplus_{i=0}^n \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega]$ las derivadas respecto de polinomios afines eliminan a lo sumo un monomio, es decir, dado $g = c_1 z + c_0 \in \mathbb{Z}[z]$ entonces

$$\frac{\partial f_a}{\partial g} = \bigoplus_{i=0, i \neq -c_0/c_1}^n \alpha_i \odot \omega^i.$$

En general, dado $g \in \mathbb{Z}[z]$ un polinomio entero de grado $k \geq 1$ podríamos eliminar a lo sumo k monomios.

Dado $f_b = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega]$ si queremos eliminar los k monomios asociados a un subconjunto de índices del soporte $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq A$, dónde necesariamente $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq |A| \leq n+1$, podemos derivar respecto del polinomio entero de grado k $g_k = (z - i_1) \dots (z - i_k) \in \mathbb{Z}[z]$. Entonces

$$\frac{\partial f_b}{\partial g_k} = \bigoplus_{i \in A \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} \alpha_i \odot \omega^i.$$

Y en el caso límite en que $\{i_1, \dots, i_k\} = A$, es decir, $A \setminus \{i_1, \dots, i_r\} = \emptyset$ obtendremos $\frac{\partial f_b}{\partial g_{|A|}} = +\infty$.

II Sea $f = 0 \odot \omega \oplus 1 \in \mathbb{T}[\omega]$, se consideran $g_0 = 20z$, $g_1 = 15z - 15$ y $g_2 = 7z^2 - 7z$.

$$\frac{\partial f}{\partial g_0} = 0 \odot \omega \quad \frac{\partial f}{\partial g_1} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial g_2} = \infty$$

III Sea $f = 2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2 \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$ calculamos 7 derivadas de Euler con las que obtenemos todos los resultados posibles.

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial (z_1 - z_2)} = 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2 & \frac{\partial f}{\partial (z_1 - 1)} = 1 \odot \omega_2 \oplus 2 & \frac{\partial f}{\partial (z_2 - 1)} = 0 \odot \omega_1 \oplus 2 \\ \frac{\partial f}{\partial (z_1)} = 0 \odot \omega_1 & \frac{\partial f}{\partial (z_2)} = 1 \odot \omega_2 & \frac{\partial f}{\partial (z_1 + z_2 - 1)} = 2 \end{array}$$

En la primera fila tenemos aquellos casos en los que eliminamos un solo monomio y en la segunda aquellos en los que eliminamos pares de monomios. Finalmente podríamos eliminar los tres monomios, resultando según se ha convenido $+\infty$. Por ejemplo nos bastaría tomar $g = z_1 z_2$.

IV Sea $g = 4 \oplus 2 \odot \omega_1 \oplus 3 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \oplus 1 \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 2 \odot \omega_2^2 \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$, en este caso podremos obtener hasta 64 resultados diferentes al calcular la derivada de Euler tropical respecto de algún polinomio entero.

A continuación, relacionamos las derivadas de Euler de dos polinomios F y f , el primero clásico y el segundo la tropicalización de este, en el siguiente enunciado, que ya se recoge y demuestra en [3], limitado al caso particular de la derivación respecto de un polinomio afín.

Teorema 2.16. Sean $f = \bigoplus \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ polinomio tropical con soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ y $F = \sum a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio clásico con $\text{trop}(F) = f$. Dado $g = \sum (c_i x_i) + c_0$ un polinomio de grado 1 con coeficientes enteros, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \text{trop}(g_\Theta(F)).$$

Demostración. Bajo la premisa $f = \text{trop}(F)$, teniendo en cuenta $\text{trop}(F) = \bigoplus_{i \in A} v(a_i) \odot \omega^i$ podemos afirmar $v(a_i) = \alpha_i$ para $i \in A$. Por otro lado, si aplicamos la definición de derivada de Euler tropical y tomamos la particularidad de las derivadas de Euler clásicas siendo g polinomio entero afín,

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \bigoplus_{i \in A, g(i) \neq 0} \alpha_i \odot \omega^i \quad \text{y} \quad g_\Theta(F) = \sum a_i g(i) x^i.$$

Por tanto, $\text{trop}(g_\Theta(F)) = \bigoplus_{i \in A} v(a_i) \odot v(g(i)) \odot \omega^i = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot v(g(i)) \odot \omega^i$ dónde hay que estudiar $v(g(i))$.

$$v(g(i)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(i) \neq 0 \\ +\infty & \text{si } g(i) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{-neutro del producto tropical-} \\ \text{-neutro de la suma tropical-} \end{array}$$

De modo que tenemos $\text{trop}(g_\Theta(F)) = \bigoplus_{i \in A, g(i) \neq 0} \alpha_i \odot \omega^i = \frac{\partial f}{\partial g}$, cómo queríamos demostrar. ■

El objetivo que tenemos es encontrar una correspondencia similar para un polinomio entero de grado superior. Para ello introducimos el concepto de *derivada Euleriana*, que multiplica cada monomio por la evaluación del polinomio entero en el multiíndice correspondiente. Tomamos esta idea de la expresión obtenida para la derivada de Euler respecto de un polinomio afín.

Definición 2.17. Sea un polinomio clásico $F = \sum_{i \in A} a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ y $g = \sum c_i x^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio con coeficientes enteros. Se define la *derivada de Euleriana del polinomio clásico F respecto de g* al polinomio dado por

$$\frac{\partial F}{\partial g} = \sum a_i g(i) x^i.$$

Ejemplo 2.18. Tomamos los polinomios del *Ejemplo 1.14* y obtenemos algunas derivadas eulerianas de los mismos.

I Sobre $F = \sum_{i=0}^n (a_i t^{\alpha_i}) x^i$ se considera el caso $n = 2$: $F_n = a_0 + (a_1 t)x + (a_2 t^2)x^2$ y sobre este los polinomios $g_{100} = z$, $g_{010} = z - 1$, $g_{001} = z - 2$, $g_{110} = z^2 - z$, $g_{101} = z^2 - 2z$, $g_{011} = z^2 - 3z + 2$ y $g_{111} = z^3 - 3z^2 + 2z$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_n}{\partial g_{100}} &= (a_1 t)x + 2(a_2 t^2)x^2 & \frac{\partial F_n}{\partial g_{010}} &= -a_0 + (a_2 t^2)x^2 & \frac{\partial F_n}{\partial g_{001}} &= -2a_0 - (a_1 t)x \\ \frac{\partial F_n}{\partial g_{011}} &= 2a_0 & \frac{\partial F_n}{\partial g_{101}} &= -(a_1 t)x & \frac{\partial F_n}{\partial g_{110}} &= 2(a_2 t^2)x^2 \\ \frac{\partial F_n}{\partial g_{111}} &= 0 \end{aligned}$$

II Para los tres casos: $F_1 = 27x - 10t$, $F_2 = x + (t + t^2 + 3t^3)$ y $F_3 = -10x + 2020t + t^7$; se consideran las derivadas eulerianas respecto de los 3 polinomios enteros $g_{10} = z$, $g_{01} = z - 1$ y $g_{11} = z^2 - z$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial g_{10}} &= 27x & \frac{\partial F_2}{\partial g_{10}} &= x & \frac{\partial F_3}{\partial g_{10}} &= -10x \\ \frac{\partial F_1}{\partial g_{01}} &= +10t & \frac{\partial F_2}{\partial g_{01}} &= -(t + t^2 + 3t^3) & \frac{\partial F_3}{\partial g_{01}} &= -2020t - t^7 \\ \frac{\partial F_1}{\partial g_{11}} &= 0 & \frac{\partial F_2}{\partial g_{11}} &= 0 & \frac{\partial F_3}{\partial g_{11}} &= 0 \end{aligned}$$

III Suponiendo $G = x_1 + x_2 + t^2$, dónde ya se plantea un polinomio en 2 variables y por tanto se harán derivadas eulerianas respecto de $g \in \mathbb{Z}[z_1, z_2]$. Se consideran: $g_0 = z_1 + z_2$, $g_{x_1} = z_1 - 1$, $g_{x_2} = z_2 - 1$, $g_{0x_1} = z_2$, $g_{0x_2} = z_1$, $g_{x_1 x_2} = z_1 + z_2 - 1$ y $g_{0x_1 x_2} = z_1 z_2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial g_0} &= x_1 - x_2 + t^2 & \frac{\partial G}{\partial g_{x_1}} &= -x_2 - t^2 & \frac{\partial G}{\partial g_{x_2}} &= -x_1 - t^2 \\ \frac{\partial G}{\partial g_{0x_1}} &= x_2 & \frac{\partial G}{\partial g_{0x_2}} &= x_1 & \frac{\partial G}{\partial g_{x_1 x_2}} &= -t^2 \\ \frac{\partial G}{\partial g_{0x_1 x_2}} &= 0 \end{aligned}$$

Se cumplen algunas propiedades concretas en la operación entre *derivadas de Euler y Eulerianas*, como veremos en los siguientes lemas.

Lema 2.19. Sea $F = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ el polinomio clásico y $g = \sum_i c_i z^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio con coeficientes enteros tal que expresado como la suma de monomios sería $g = \sum_m g_m$ siendo $g_m = c_m x^m$. Entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial g} = \sum \frac{\partial F}{\partial g_m}.$$

Demostración. Sin más que operar obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial g} &= \sum_i a_i g(i) x^i = \sum_i a_i (\sum_m g_m)(i) x^i = \sum_i a_i (\sum_m c_m i^m) x^i = \sum_i (\sum_m a_i c_m i^m x^i) = \sum_m (\sum_i a_i c_m i^m x^i) \\ &\implies \frac{\partial F}{\partial g} = \sum_m a_i g_m(i) x^i = \sum_m \frac{\partial F}{\partial g_m} \end{aligned}$$

■

Lema 2.20. Sea F según las notaciones anteriores y siendo $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ se denota $m^* = (m_1, \dots, m_j - 1, \dots, m_n)$, de tal modo que $g_m = x^m$ y $g_{m^*} = x^{m^*}$. Entonces se verifica

$$x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial g_{m^*}} \right) = \frac{\partial F}{\partial g_m}.$$

Demostración. Desarrollamos el primer miembro: resolvemos la derivada de Euler de F respecto del monomio g_{m^*} , realizamos la derivada parcial clásica respecto de la variable x_j y multiplicamos por x_j .

$$x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial g_{m^*}} \right) = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum a_i g_{m^*}(i) x^i \right) = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum a_i i^{m^*} x^i \right) = x_j \left(\sum a_i i^{m^*} i_j x^{i^*} \right) = \sum a_i i^{m^*} i_j x^i = \sum (a_i i^m x^i)$$

$$\implies x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial g_{m^*}} \right) = \sum a_i g_m(i) x^i = \frac{\partial F}{\partial g_m}$$

La notación de los multiíndices indica las siguientes operaciones de los mismos

$$i^{m^*} = i_1^{m_1} \dots i_j^{m_j-1} \dots i_n^{m_n} \implies i_j i^{m^*} = i_j i_1^{m_1} \dots i_j^{m_j-1} \dots i_n^{m_n} = i_1^{m_1} \dots i_j^{m_j} \dots i_n^{m_n} = i^m.$$

Terminamos recuperando del polinomio resultante la expresión correspondiente a la derivada de Euler de F respecto de g_m . ■

A continuación presentamos una proposición que relaciona de forma equivalente las derivadas clásicas y derivadas de Euler que se anulan en un punto p .

A pesar de que habíamos tomado $\mathbb{K}$ como el cuerpo de Series de Puiseux complejas la siguiente proposición es válida sobre cualquier cuerpo de característica 0. Con g un polinomio escribimos $\deg(g)$ para denotar el grado de g .

Proposición 2.21. Sea $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ y $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica 0. Se denota $m = (m_1, \dots, m_n)$ y $|m| = \sum_{i=1}^n m_i$. Son equivalentes:

- i) P es un punto singular de F de orden al menos $k+1$.
- ii) $\forall m$ tal que $0 \leq |m| \leq k$ se tiene que $\left(x^m \frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} \right) (P) = 0$.
- iii) $\forall g_m \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$, monomio entero, tal que $\deg(g_m) \leq k$ entonces $\left(\frac{\partial F}{\partial g_m} \right) (P) = 0$.
- iv) $\forall g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$, polinomio entero, tal que $\deg(g) \leq k$ entonces $\left(\frac{\partial F}{\partial g} \right) (P) = 0$.

Demostración. Se realizan pruebas implicación por implicación.

$$i) \Leftrightarrow ii)$$

Puesto que estamos en característica 0 equivalentemente $\text{ord}_P(F) \geq k+1$ o $\left(\frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} \right) (P) = 0$ para todo m tal que $0 \leq |m| \leq k$. Además

$$\left(x^m \frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} \right) (P) = P^m \left(\frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} \right) (P) = P_1^{m_1} P_2^{m_2} \dots P_n^{m_n} \cdot \left(\frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} \right) (P)$$

Con lo cual: $(x^m \frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m})(P) = 0$ para todo m tal que $0 \leq |m| \leq k$ si y solamente si $\left(\frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} \right) (P) = 0$ para todo m tal que $0 \leq |m| \leq k$.

$$iii) \Leftrightarrow iv)$$

Sea g un polinomio de grado a lo sumo k con coeficientes enteros, es decir, $g = \sum c_j x^j$ con $c_j \in \mathbb{Z}$ y $\sum j_i \leq k$ para todo índice j . Entonces es posible reescribir $g = \sum_m g_m$ de modo que es una suma de monomios, g_m , de grado a lo sumo k . Aplicamos el Lema 2.19.

$$\frac{\partial F}{\partial g}(P) = \sum_m \frac{\partial F}{\partial g_m}(P)$$

Entonces si se anulan las derivadas en P respecto de los monomios, la suma anterior es una suma de ceros, por lo que el resultado es nulo. Por otro lado, por ser un monomio un caso particular de polinomio si se anula la derivada en P respecto de cualquier polinomio de grado a lo sumo k entonces se anula en P la derivada respecto de cualquier monomio de grado a lo sumo k .

$$ii) \iff iii)$$

Sean $F = \sum a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y $g_m = c_m z^m \in \mathbb{Z}[x]$. Las derivadas de F respecto de la variable x_j y del monomio entero g_m son, respectivamente

Derivada clásica: $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum a_i i_j x^{i^*}$ dónde $i^* = (i_1, \dots, i_j - 1, \dots, i_n)$.

Derivada euleriana: $\frac{\partial F}{\partial g} = \sum a_i g_m(i) x^i$.

Además tomamos sin pérdida de generalidad $c_m = 1$, ya que los resultados son análogos salvo multiplicación por constante. De modo que

$$x^m \frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} = \sum (\prod (\frac{i_j!}{(i_j - m_j)!}) x_j^{i_j}) a_i \quad \frac{\partial F}{\partial g_m} = \sum a_i i^m x^i$$

A partir de estas expresiones, si tomamos los coeficientes de los polinomios resultantes de aplicar cada regla de derivación, construimos los dos subespacios lineales de $\mathbb{K}^{|A|}$ siguientes:

L_k asociado al polinomio $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y a los resultantes de aplicar el operador $x^m \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^m}$ tal que $0 \leq |m| \leq k$.

H_k asociado al polinomio $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y a los resultantes de aplicar las derivadas eulerianas monomiales, respecto de g_m , en los casos de grado de g_m a lo sumo k .

Entonces, los espacios descritos vendrían dados por el vector de coeficientes de F y el vector de coeficiente de F multiplicados por el número combinatorio correspondiente, según orden de la derivada:

$$L_k = \langle (a_i), \left(a_i \prod_1^k \left(\frac{i_j!}{(i_j - m_j)!} \right) \right) \rangle \quad H_k = \langle (a_i), (a_i i^m) \rangle.$$

Tratamos probar que ambos subespacios son iguales, $L_k = H_k$. Realizamos prueba por inducción sobre k , siendo el caso base $k = 0$, dónde la igualdad es trivial. Suponemos en adelante la hipótesis de inducción (h.i.): $L_{k-1} = H_{k-1}$.

Es importante además tener en cuenta ambos espacios cumplen las relaciones de contenidos siguientes:

$$L_k \supseteq L_{k-1} \supseteq \dots \supseteq L_1 \supseteq L_0 \quad H_k \supseteq H_{k-1} \supseteq \dots \supseteq H_1 \supseteq H_0$$

Comprobamos por doble contenido la igualdad entre espacios k -ésimos: $L_k = H_k$. En lo sucesivo, siendo $m = (m_1, \dots, m_n)$ tal que $|m| = \sum m_j = k$, denotamos $m^* = (m_1, \dots, m_j - 1, \dots, m_n)$ y $m^{**} = (m_1, \dots, m_j - 2, \dots, m_n)$ tales que las componentes de estos multiíndices suman $k - 1$ y $k - 2$ respectivamente. En la adelante, supuesto $G \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio obtenido como resultado de derivar F diremos $G \in L_k$ o $G \in H_k$ cuando el vector de coeficientes de G sea un elemento de L_k o de H_k , respectivamente.

Comenzamos probando que $L_k \subseteq H_k$. Comprobamos que dado cualquier elemento de L_k este es elemento de H_k . Tomamos $x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}}$, que por construcción es elemento de L_{k-1} , y le aplicamos el operador $x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

$$x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[x^{m^*} \left(\frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \right) \right] = x_j \left[(m_j - 1) x^{m^{**}} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} + x^{m^*} \frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} \right] = (m_j - 1) x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} + x^m \frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m}$$

Encontramos una combinación lineal por la cuál podemos probar $x^m \frac{\partial^{|m|} F}{\partial x^m} \in H_k$ comprobando que

$$(m_j - 1) x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \in H_k \text{ y } x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \right) \right] \in H_k.$$

Siendo $x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \in L_{k-1}$ por construcción entonces, por h.i., $x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \in H_{k-1}$ y por linealidad de H_{k-1} : $(m_j - 1) x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \in H_{k-1}$. Además, podremos obtener algunos coeficientes b_l tales que $x^{m^*} \left(\frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \right) = \sum b_l \frac{\partial F}{\partial g_r}$, dónde $\frac{\partial F}{\partial g_r} \in H_{k-1}$, lo que implica $\deg g_r \leq k - 1$. Ahora aplicamos el operador $x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ en dos pasos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_l b_l \left(\frac{\partial F}{\partial g_r} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_l b_l \left(\sum_i (a_i g_r(i) x^i) \right) \right) \\ &= \sum_l b_l \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i (a_i g_r(i) x^i) \right) = \sum_l b_l \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i (a_i i^r x^i) \right) \\ x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x^{m^*} \frac{\partial^{|m^*|} F}{\partial x^{m^*}} \right) &= x_j \sum_l b_l \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i (a_i i^r x^i) \right) = x_j \sum_l b_l \left(\sum_i (a_i i^r i_j x^i) \right) \\ &= \sum_l b_l \left(x_j \left(\sum_i (a_i i^r i_j x^i) \right) \right) = \sum_l b_l \left(\sum_i (a_i i^r i_j x^i) \right) \\ &= \sum_l b_l \left(\sum_i (a_i g_{\hat{r}}(i) x^i) \right) = \sum_l b_l \left(\frac{\partial F}{\partial g_{\hat{r}}} \right) \end{aligned}$$

La notación empleada indica $i_j i^r = i_j i_1^{r_1} \dots i_j^{r_j} \dots i_n^{r_n} = i_1^{r_1} \dots i_j^{r_j+1} \dots i_n^{r_n} = i^{\hat{r}}$, de tal modo que el multiíndice $\hat{r}$ da un grado $(k-1)+1 = k$ al monomio $g_{\hat{r}} = z^{\hat{r}}$. De dónde deducimos que $x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x^{m^*} \frac{\partial |m^*| F}{\partial x^{m^*}} \right) \in H_k$, por ser una combinación lineal de elementos de H_k , y en consecuencia $x^m \frac{\partial |m| F}{\partial x^m} \in H_k$.

Comprobemos ahora $H_k \subseteq L_k$. Probaremos que todo elemento $\frac{\partial F}{\partial g_m}$ de H_k es elemento de L_k . Si aplicando el operador $x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial F}{\partial g_m} \in H_{k-1}$, entonces, por el *Lema 2.20*, es equivalente probar $x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial g_m} \right) \in L_k$ que $\frac{\partial F}{\partial g_m} \in L_k$.

Además, por construcción $\frac{\partial F}{\partial g_m} \in H_{k-1}$ y deducimos, por h.i., $\frac{\partial F}{\partial g_m} \in L_{k-1}$. Entonces, como elemento de L_{k-1} , podremos obtener algunos coeficientes d_l tales que $\frac{\partial F}{\partial g_m} = \sum_l d_l \left(x^r \frac{\partial |r| F}{\partial x^r} \right)$, con $r = (r_1, \dots, r_n)$ tal que $|r| \leq k-1$. Aplicamos a dicha expresión el operador $x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

$$\begin{aligned} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial g_m} \right) &= x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_l d_l \left(x^r \frac{\partial |r| F}{\partial x^r} \right) \right) = \sum_l d_l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x^r \frac{\partial |r| F}{\partial x^r} \right) \\ &= \sum_l d_l x_j \left[(r_j - 1) x^{r^*} \frac{\partial |r^*| F}{\partial x^{r^*}} + x^{r^*} \frac{\partial |r| F}{\partial x^r} \right] = \sum_l d_l \left[(r_j - 1) x^{r^*} \frac{\partial |r^*| F}{\partial x^{r^*}} + x^{r^*} \frac{\partial |r| F}{\partial x^r} \right] \end{aligned}$$

De dónde es inmediato que $x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial g_m} \right) \in L_k$.

Entonces los espacios construidos, L_k y H_k , son iguales como espacios vectoriales y en consecuencia el núcleo de ambos ha de ser el mismo como espacio vectorial. Por tanto, $\forall m = (m_1, \dots, m_n)$ tal que $0 \leq |m| \leq k$, $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ es tal que $P \in \ker(L_k)$, o idénticamente $(x^m \frac{\partial F}{\partial x^m})(P) = 0$, sí y solamente si $P \in \ker(H_k)$, es decir, $\left(\frac{\partial F}{\partial g_m} \right)(P) = 0$. ■

Finalmente, podemos afirmar a partir de este resultado que para cualquier punto singular $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ de $V(F)$ de orden $k+1$ se anula la derivada de Euler evaluada en P respecto de cualquier polinomio grado hasta k con coeficientes enteros. Y el recíproco también es cierto. Hemos relacionado así las dos reglas de derivación: la derivada de Euler y la derivada Euleriana; ya que obtenemos que en un punto singular es equivalente considerar una u otra definición, como indicamos en el siguiente enunciado.

Corolario 2.22. Sea $F = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio clásico con $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ punto singular de este de orden al menos $k+1$ y $g = \sum_i c_i z^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio con coeficientes enteros. Entonces,

$$g_{\Theta}(F)(P) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial F}{\partial g} \right)(P) = 0.$$

Demostración. Es consecuencia directa de la *Proposición 2.21*. ■

La *derivada Euleriana*, *Definición 2.17*, nos permite formular un resultado idéntico al *Teorema 2.16* pero sin necesidad de restringir la derivación a los polinomios enteros de grado 1. De hecho, esta ventaja es precisamente la motivación de su definición.

Teorema 2.23. Sean $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ con soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ y $F = \sum a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, polinomios tropical y clásico, respectivamente, tales que $\text{trop}(F) = f$. Dado $g = \sum c_i z^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio con coeficientes enteros, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \text{trop} \left(\frac{\partial F}{\partial g} \right).$$

Demostración. Siendo $f = \text{trop}(F)$ deducimos $v(a_i) = \alpha_i$ para $i \in A$. Por otro lado, aplicamos las definiciones de derivada de Euler tropical y de derivada Euleriana, respectivamente,

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \bigoplus_{i \in A, g(i) \neq 0} \alpha_i \odot \omega^i \text{ y } \text{trop} \left(\frac{\partial F}{\partial g} \right) = \bigoplus_{i \in A} v(a_i) \odot v(g(i)) \odot \omega^i.$$

Estudiamos la valoración de $g(i)$ y vemos que el resultado es inmediato.

$$v(g(i)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(i) \neq 0 & \text{-neutro del producto tropical-} \\ +\infty & \text{si } g(i) = 0 & \text{-neutro de la suma tropical-} \end{cases}$$

Ejemplo 2.24. comparamos la tropicalización de derivadas eulerianas y las derivadas de Euler tropicales comprobando que se verifica el enunciado del *Teorema 2.23*

En el *Ejemplo 2.18* hemos realizado las derivadas eulerianas de polinomios cuya tropicalización calculamos en el *Ejemplo 1.14*. Además hicimos las derivadas de Euler tropicales en el *Ejemplo 2.15*.

- I Sea $F_b = \sum_{i \in A} (a_i t^{\alpha_i}) x^i$ tal que $\text{trop}(F_b) = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i = f_b$, con soporte $A = \{i_1, \dots, i_s\}$. Entonces sea $g_r = (z - i_1) \dots (z - i_r)$ dónde $B = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq A$ es un subconjunto de índices del soporte del polinomio f_b , por el mismo argumento empleado en la prueba del *Teorema 2.23*

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F_b}{\partial g_r}\right) = \text{trop}\left(\sum_{i \in A \setminus B} (a_i t^{\alpha_i}) x^i\right) = \bigoplus_{i \in A, g_r(i) \neq 0} \alpha_i \odot \omega^i = \frac{\partial f_b}{\partial g_r}$$

- II Sean $F_1 = 27x - 10t$, $F_2 = x + (t + 2t^2 + 3t^3)$ y $F_3 = -10x + 2020t + t^7$, entonces $\text{trop}(F_1) = \text{trop}(F_2) = \text{trop}(F_3) = f$ con $f = 0 \odot \omega \oplus 1$. Realizamos las derivadas respecto de los polinomios enteros $g_{10} = z$, $g_{01} = z - 1$ y $g_{11} = z^2 - z$.

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F_1}{\partial g_{10}}\right) = \text{trop}(27x) = 0 \odot \omega = \frac{\partial f}{\partial g_{10}}, \quad \text{trop}\left(\frac{\partial F_1}{\partial g_{01}}\right) = \text{trop}(+10t) = 1 = \frac{\partial f}{\partial g_{01}}$$

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F_2}{\partial g_{10}}\right) = \text{trop}(x) = 0 \odot \omega = \frac{\partial f}{\partial g_{10}}, \quad \text{trop}\left(\frac{\partial F_2}{\partial g_{01}}\right) = \text{trop}(-(t + t^2 + 3t^3)) = 1 = \frac{\partial f}{\partial g_{01}}$$

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F_3}{\partial g_{10}}\right) = \text{trop}(-10x) = 0 \odot \omega = \frac{\partial f}{\partial g_{10}}, \quad \text{trop}\left(\frac{\partial F_3}{\partial g_{01}}\right) = \text{trop}(-2020t - t^7) = 1 = \frac{\partial f}{\partial g_{01}}$$

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F_1}{\partial g_{11}}\right) = \text{trop}\left(\frac{\partial F_2}{\partial g_{11}}\right) = \text{trop}\left(\frac{\partial F_3}{\partial g_{11}}\right) = \text{trop}(0) = +\infty = \frac{\partial f}{\partial g_{11}}$$

- III Sea $F = x_1 + tx_2 + t^2$ tal que $\text{trop}(F) = f = 2 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2$, entonces se realizamos las derivadas eulerianas relativas a los polinomios enteros $g_0 = z_1 + z_2$, $g_{x_1} = z_1 - 1$, $g_{x_2} = z_2 - 1$, $g_{0x_1} = z_2$, $g_{0x_2} = z_1$, $g_{x_1x_2} = z_1 + z_2 - 1$ y $g_{0x_1x_2} = z_1z_2$.

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g_0}\right) = 0 \odot \omega_1 \oplus 1 \odot \omega_2 \oplus 2 = \frac{\partial f}{\partial g_0}, \quad \text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g_{0x_1}}\right) = 1 \odot \omega_2 = \frac{\partial f}{\partial g_{0x_1}}$$

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g_{x_1}}\right) = 1 \odot \omega_2 \oplus 2 = \frac{\partial f}{\partial g_{x_1}}, \quad \text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g_{0x_2}}\right) = 0 \odot \omega_1 = \frac{\partial f}{\partial g_{0x_2}}$$

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g_{x_2}}\right) = 0 \odot \omega_1 \oplus 2 = \frac{\partial f}{\partial g_{x_2}}, \quad \text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g_{x_1x_2}}\right) = 2 = \frac{\partial f}{\partial g_{x_1x_2}}$$

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g_{0x_1x_2}}\right) = +\infty = \frac{\partial f}{\partial g_{0x_1x_2}}$$

2.3. El teorema de caracterización

Proposición 2.25. Sea $A \subseteq \mathbb{N}^n$ un conjunto finito con d elementos y $\mathbb{K}^d$ el espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ de soporte contenido en A . Se considera el espacio lineal

$$L_k^1 = \left\{ F \in \mathbb{K}^d \mid (1, \dots, {}^n 1) \text{ es singular de orden al menos } k \text{ de } F \right\}.$$

Entonces

$$\text{trop}(L_k^1) = \left\{ f \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n] \mid \text{Soporte}(f) = A, 0 \in \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) \forall g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \text{ tal que } \deg(g) < k \right\}.$$

Demostración. Comenzamos tomando un polinomio general $F = \sum_{i \in A} y_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_i (i \in A)]$ y un polinomio tropical general $f = \bigoplus_{i \in A} v_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n, v_i (i \in A)]$ en $n + d$ variables. Si imponemos $F \in L_k^1$ entonces $\bar{1} = (1, \dots, 1)$ es un punto singular de F de orden al menos k . Por lo tanto, por la *Proposición 2.21*, $\frac{\partial F}{\partial g}(\bar{1}) = 0$ para todo polinomio entero $g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ con $\deg(g) < k$. Es decir, equivalentemente se anulan todas las derivadas Eulerianas respecto de aquellos polinomios con coeficientes enteros de grado a lo sumo $k - 1$. Destacamos que dichas ecuaciones son lineales en las variables y_i y toda ecuación lineal de L_k^1

es de la forma $\frac{\partial F}{\partial g}(\bar{1})$. Consideramos, por tanto, la tropicalización de las derivadas de Eulerianas evaluadas en $\bar{1}$. Y el resultado $\frac{\partial f}{\partial g} = \text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)$, del Teorema 2.23.

$$\text{trop}\left(\frac{\partial F}{\partial g}(x = \bar{1})\right) = \text{trop}\left(\sum_{i \in A} g(i) y_i \bar{1}^i\right) = \bigoplus_{i \in A, g(i) \neq 0} v_i \odot 0 = \frac{\partial f}{\partial g}(\bar{0})$$

Por la Proposición 2.9

$$\text{trop}(L_k^1) = \bigcap \mathcal{T}\left(\frac{\partial F}{\partial g}(x = \bar{1})\right) = \bigcap \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial g}(\omega = \bar{0})\right).$$

■

Observación 2.26. Por la Proposición 2.10 basta tomar los casos $g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ tales que $\{g = 0\} \cap A$ distinto de A sea maximal, lo que se corresponde con los circuitos.

El resultado anterior podrá trasladarse a cualquier otro punto $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ en lugar del $\bar{1} = (1, \dots, {}^n 1)$.

Lema 2.27. Sean $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinomio en n variables con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$, $\bar{1} = (1, \dots, {}^n 1)$ y $P = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}^*)^n$. Entonces se verifica

$$P \in \text{Sing}_k(F(x_1, \dots, x_n)) \iff \bar{1} \in \text{Sing}_k(F(x_1 P_1, \dots, x_n P_n))$$

Demostración. Suponiendo $F = \sum_{i \in A} a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que P es un punto singular de orden k de F . Sea $G = F(x_1 P_1, \dots, x_n P_n) = \sum_{i \in A} a_i P^i x^i$. Entonces $\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right) = \sum_{i \in A} a_i g(i) x^i$ y $\left(\frac{\partial F_1}{\partial g}\right) = \sum_{i \in A} a_i g(i) P^i x^i$ y evaluando

$$\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)(P) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial g}\right)(\bar{1}).$$

Entonces de la Proposición 2.21 se sigue la equivalencia. ■

Lema 2.28. Sean $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ un polinomio tropical de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ y un punto p tal que $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^*$ entonces

$$(0, \dots, 0) \in \mathcal{T}\left(\frac{\partial f(x_1 P_1, \dots, x_n P_n)}{\partial g}\right) \iff (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{T}\left(\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial g}\right)$$

Demostración. Si consideramos $f_1 = f(\omega_1 \odot p_1, \dots, \omega_n \odot p_n)$ entonces son equivalentes $0 \in \mathcal{T}(f_1)$ y $p \in \mathcal{T}(f)$. Ya que f_1 y f poseen los mismos monomios y el mínimo se alcanza en $\bar{0}$ para f_1 al menos dos veces sí y solamente si se alcanza al menos dos veces en p para f .

Vemos que $\frac{\partial f}{\partial g}(\omega_1 \odot p_1, \dots, \omega_n \odot p_n) = \frac{\partial f_1}{\partial g}$ es evidente ya que en ambos casos se eliminan justamente los monomios que indica g . ■

Estos resultados los podemos resumir en el siguiente enunciado.

Proposición 2.29. Sea $A \subseteq \mathbb{N}^n$ un conjunto finito con d elementos, $\mathbb{K}^d$ el espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ de soporte contenido en A y $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ en punto con coordenadas no nulas. Se considera

$$L_k^P = \{F \in \mathbb{K}^d \mid P = (P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}^*)^n \text{ es singular de orden al menos } k \text{ de } F\}.$$

Entonces

$$\text{trop}(L_k^P) = \left\{f \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n] \mid \text{Soporte}(f) = A, \text{trop}(P) \in \mathcal{T}\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) \forall g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \text{ tal que } \deg(g) < k\right\}.$$

Demostración. En este caso la demostración se sigue de la Proposición 2.25 y los Lemas 2.27 y 2.28, sin más que tomar $F(x_1 P_1, \dots, x_n P_n)$. ■

Teorema 2.30. Sea $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio con soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$, $|A| = d$, y $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ su tropicalización, $p = \text{trop}(P)$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- i) $P = (P_1, \dots, P_n) \in \text{Sing}_k(F(x_1, \dots, x_n))$
- ii) $\bar{1} = (1, \dots, {}^n 1) \in \text{Sing}_k(F(x_1 P_1, \dots, x_n P_n))$

$$iii) \bar{0} = (0, \dots, {}^n 0) \in \bigcap_{\deg(g) < k} \mathcal{T} \left(\frac{\partial f(x_1 \odot p_1, \dots, x_n \odot p_n)}{\partial g} \right)$$

$$iv) trop(P) \in \bigcap_{\deg(g) < k} \mathcal{T} \left(\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial g} \right)$$

Demostración. La equivalencia entre *i)* y *ii)* la probamos en el *Lema 2.27* y en el *Lema 2.28* se comprobamos *iii) ⇔ iv)*. Las equivalencias entre *ii)* y *iii)* las podemos deducir de la *Proposición 2.25*. ■

Como consecuencia llegamos una caracterización puramente tropical, el *Teorema 2.31*, el *Teorema de Caracterización de puntos singulares tropicales de orden al menos k*.

Teorema 2.31. Sea $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ un polinomio tropical de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ el conjunto de puntos singulares tropicales puede computarse como

$$Sing_k^{trop}(f) = \bigcap_{\deg(g) < k} \mathcal{T} \left(\frac{\partial f}{\partial g} \right)$$

dónde $g = \sum_i c_i z^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ sea un polinomio entero de grado a lo sumo $k - 1$.

Demostración. Basta tener en cuenta que dado un elemento $p \in Sing_k^{trop}(f)$ entonces existe $P \in Sing_k(F)$ tal que $trop(P) = p$ y emplear la equivalencia entre los puntos *i)* y *iv)* del *Teorema 2.30*. ■

Capítulo 3

Geometría tropical real

El conjunto sobre el que operar se denota por $\mathbb{TR}$, se llama *grupo tropical real* y se define como sigue,

$$\mathbb{TR} = \{-1, 1\} \times \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Entonces, dados $(i, a), (j, b) \in \mathbb{TR}$ se define solamente el **producto tropical real**, aquí lo denotaremos $\odot_r$,

$$(i, a) \odot_r (j, b) = (i \cdot j, a + b) \quad (3.2)$$

según se indica en *Ec. (3.2)*, que dota al espacio tropical real de la estructura de grupo conmutativo.

Definición 3.1. Sea $x = (i, a) \in \mathbb{TR}$. Se llama *signo de x* a i , que se denota también como $+$ o $-$, para $i = 1$ o $i = -1$, respectivamente, y se llama *módulo de x* a a , que también se denota como $|x|$.

En general, sea $x = ((i_1, a_1), \dots, (i_n, a_n)) \in \mathbb{TR}^n$. Se llama *signo de x* a $(i_1, \dots, i_n)$ y se llama *módulo de x* a $(a_1, \dots, a_n)$, que también se denota como $|x|$

Proposición 3.2. $(\mathbb{TR}, \odot_r)$ es un grupo abeliano.

Demostración. Basta considerar $(\mathbb{TR}, \odot_r)$ como el producto de los grupos abelianos $(\{1, -1\}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$. ■

Observación 3.3. En el artículo de referencia en este trabajo sobre la *geometría tropical real*, [12], se desiste de definir una operación aditiva ya que no se encuentra cómo resolver para $a \in \mathbb{R}$ la suma $(1, a) \oplus_r (-1, a)$ de tal modo que se trate de una operación que dote al conjunto de estructuras concretas. En particular, $\mathbb{TR}$ no es semianillo. De hecho, a pesar de seguir empleando el término *tropical*, en $\mathbb{TR}$ no interviene el conjunto tropical, $\mathbb{T}$, sino que basta tomar precisamente el conjunto de los reales con el producto cartesiano del conjunto $\{-1, 1\}$. Esto se debe a que la ampliación de los números reales con el elemento $+\infty$ la realizamos en el caso complejo para dotar al conjunto de elemento neutro para la suma, sin embargo ahora que no se define operación aditiva no existe un término que verifique la condición para ser el neutro aditivo.

Sobre los resultados presentados en [12], según lo expuesto hasta ahora, podemos escribir la definición de *monomio tropical real* que en el artículo se emplea implícitamente. También queremos señalar que a partir de estos surge el llamado *polinomio tropical con signo*.

Definición 3.4. El *monomio tropical real* para n variables, $\omega_1, \dots, \omega_n$, se construye como el producto tropical del coeficiente, $x = (i, a) \in \mathbb{TR}$, y parte literal formada por las n variables con multiplicidades $i_1, \dots, i_n$, respectivamente. Es decir,

$$(i, a) \odot_r \omega_1^{\odot_r i_1} \odot_r \dots \odot_r \omega_n^{\odot_r i_n}$$

Aunque de forma más habitual se escribirá $(i, a) \odot_r \omega_1^{i_1} \dots \omega_n^{i_n}$, y es más, el coeficiente se dará mediante notación abreviada, es decir, $x = (i, a) = |x|^i = a^\pm$ y $a^\pm \odot_r \omega_1^{i_1} \dots \omega_n^{i_n}$.

Entonces obtenemos lo que se llaman *polinomios tropicales con signo de soporte* $A \subseteq \mathbb{N}^n$

$$f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_r \omega^i \in \mathbb{TR}[\omega_1, \dots, \omega_n]. \quad (3.3)$$

Para todo polinomio f según *Ec. 3.3* podemos obtener el llamado *polinomio tropical complejo asociado*, que denotaremos $|f|$, que obtenemos como el polinomio tropical complejo de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ cuyos coeficientes son los módulos de los coeficientes de f : *Ec. 3.4*.

$$|f| = \bigoplus_{i \in A} |\alpha_i| \odot \omega^i \in \mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n] \quad (3.4)$$

Observación 3.5. Conviene hacer notar que las raíces de los polinomios son elementos del conjunto $\mathbb{TR}$ de modo que son pares de valores. Se precisa tanto de resolver valor numérico, al igual que el caso complejo, como de asociarle a este un signo adecuado. Entonces, las *raíces tropicales reales* las definiremos en función de las raíces de polinomios tropicales complejos asociados al polinomio original y una condición añadida sobre el signo.

Definición 3.6. Dado un polinomio tropical con signo, $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_r \omega^i \in \mathbb{TR}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$, entonces dado polinomio tropical complejo asociado, tal que $|f| = \bigoplus_{i \in A} |\alpha_i| \odot \omega^i$. Se llama *raíz tropical real del polinomio tropical con signos* f a un punto $p \in \mathbb{TR}^n$ tal que $|p| \in \mathbb{R}^n$ es raíz tropical compleja de $|f|$ y entre los monomios en los que se alcanza el mínimo hay al menos un par en los que el signo es distinto. Es decir, $\exists j, k \in A$ dos índices distintos tales que en los monomios de $|f|$ asociados se alcanza el mínimo al menos 2 veces en $|p|$ y además,

$$s(\alpha_j) \prod_{i=1}^n s(p_i)^{j_i} = \pm 1 \quad s(\alpha_k) \prod_{i=1}^n s(p_i)^{k_i} = \mp 1$$

Observación 3.7. Dados f un polinomio tropical con signos y $|f|$ su polinomio tropical complejo asociado, según la *Definición 3.6* es inmediato que dada una raíz tropical real de f el módulo de la misma es raíz tropical compleja del polinomio tropical complejo asociado, $|f|$. De hecho, haciendo abuso de notación, diremos *toda raíz tropical real es raíz tropical compleja*.

Por otro lado, toda raíz tropical compleja de $|f|$ hace *candidatos* a raíz tropical real de f a todos los elementos con módulo la raíz de $|f|$. Por lo general, este será el criterio que usemos para resolver raíces tropicales reales: pasamos al polinomio tropical complejo asociado y evaluamos las combinaciones de signos válidas.

Salvada la dificultad de considerar un polinomio con coeficientes en $\mathbb{TR}$ y la definición de sus raíces, es sencillo dar la definición de *hipersuperficie tropical real* como el conjunto de las raíces tropicales reales.

Definición 3.8. Se define *hipersuperficie tropical real* de un polinomio tropical con signos no nulo $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_r \omega^i \in \mathbb{TR}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ como el conjunto de raíces tropicales reales de f . Se denota $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(f)$ y puede describirse como

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}}(f) = \left\{ p \in \mathbb{TR}^n : \exists j, k \in A, j \neq k, i \in A \text{ tal que } \begin{array}{l} |\alpha_j| + j|p| = |\alpha_k| + k|p| \leq |\alpha_i| + i|p| \\ s(\alpha_j) \prod_{l=1}^n s(p_l)^{j_l} \neq s(\alpha_k) \prod_{l=1}^n s(p_l)^{k_l} \end{array} \right\}.$$

Observación 3.9. Una vez resueltos los monomios en los que el mínimo se alcanza, empleando el polinomio tropical complejo asociado, bajo la imposición de tener en cuenta los signos, será preciso estudiar 2^n cuadrantes para evaluar los signos y hallar los lugares de los cambios de signo.

Capítulo 4

Geometría tropical real extendida

En este capítulo damos las definiciones y resultados básicos de la geometría tropical real extendida, según hemos llamado a la modificación realizada de la geometría tropical real.

4.1. El semianillo tropical real

Definición 4.1. El *semianillo tropical real* lo definimos como el conjunto $\mathbb{RT}$ dotado de dos operaciones de adición y multiplicación: $(\mathbb{RT}, \oplus_R, \odot_R)$. $\mathbb{RT}$ lo obtenemos como el producto cartesiano del conjunto $\{-1, 0, 1\}$ y los números reales ampliado con el elemento $(0, +\infty)$.

$$\mathbb{RT} = (\{-1, 0, 1\} \times \mathbb{R}) \cup \{(0, +\infty)\} \quad (4.1)$$

$\oplus_R$ es la **suma tropical real extendida** o *suma tropical real* que definimos tomando el elemento cuyo segundo término sea menor, excepto en los casos: $(1, a) \oplus_R (-1, a)$, $(1, a) \oplus_R (0, a)$ y $(0, a) \oplus_R (-1, a)$; dónde se resuelve $(0, a)$. $\odot_R$ es el **producto tropical real extendido** o *producto tropical real* que definimos como el par de producto de las primeras componentes y la suma de las segundas.

$$(i, a) \oplus_R (j, b) = \begin{cases} (i, a) & \text{si } (i, a) = (j, b) \\ (0, a) & \text{si } a = b, i \neq j \\ (i, a) & \text{si } b > a \\ (j, b) & \text{si } a > b \end{cases} \quad (i, a) \odot_R (j, b) = (i \cdot j, a + b) \quad (4.2)$$

En las operaciones con el elemento $(0, +\infty)$ resolvemos las operaciones convencionales con el elemento $+\infty$ según los convenios habituales, de modo que:

$$(i, a) \oplus_R (0, +\infty) = (i, a) \text{ y } (i, a) \odot_R (0, +\infty) = (0, +\infty).$$

Llamamos al conjunto $\mathbb{RT}$ *semianillo tropical real* ya que dotado de las operaciones tropicales reales extendidas verifica los axiomas requeridos por la *Definición 1.1*. De hecho, al igual que en el caso complejo, la suma que hemos definido verifica la condición de idempotencia.

Proposición 4.2. $(\mathbb{RT}, \oplus_R, \odot_R)$ es un semianillo idempotente.

Demostración. Veamos que $\mathbb{RT}$ es un conjunto no vacío dotado de dos operaciones internas que verifican las propiedades requeridas en un semianillo. En primer lugar, por ejemplo $(0, +\infty) \in \mathbb{RT}$, que veremos que en el neutro de la suma tropical real, de modo que es claro que el conjunto es no vacío. En segundo lugar, describimos las operaciones cómo aplicaciones definidas según *Ec.(4.2)*.

$$\oplus_R : \mathbb{RT} \times \mathbb{RT} \longrightarrow \mathbb{RT} \quad \odot_R : \mathbb{RT} \times \mathbb{RT} \longrightarrow \mathbb{RT}$$

Dados $x = (i, a), y = (j, b) \in \mathbb{RT}$ consideramos $i, j \in \{1, 0, -1\}$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,

- Respecto a la primera componente en la suma hay hasta 3 resultados posibles o bien i o bien j o bien 0 , y en cualquiera de los casos este resultado es $1, 0$ o -1 .

- De nuevo en la suma pero respecto de la segunda componente el resultado está contenido en $\{a, b\}$ ambos números reales por hipótesis.
- En el producto el valor de la primera componente del resultado viene dado por $i \cdot j$ dónde se tienen como resultados posibles ± 1 o 0 .
- Respecto a la segunda componente resultado del producto tropical real: $a + b \in \mathbb{R}$.

Hacemos mención finalmente al caso excepcional, operando con $(0, +\infty)$. El resultado de la suma $x \oplus_R (0, +\infty)$ será justamente x y el resultado del producto $x \odot_R (0, +\infty)$ es el propio $(0, +\infty)$, en ambos casos elementos de $\mathbb{RT}$. En definitiva $\oplus_R$ y $\odot_R$ son dos operaciones binarias internas, ya que los resultados posibles de ambas son elementos del conjunto $\mathbb{RT} = (\{-1, 0, 1\} \times \mathbb{R}) \cup \{(0, +\infty)\}$.

Comprobamos las propiedades requeridas en la definición de semianillo. Sean $(i, a), (j, b), (k, c) \in \mathbb{RT}$ elementos del semianillo tropical real.

$(\mathbb{RT}, \oplus_R)$ es monoide conmutativo.

Propiedad asociativa. Recorremos todos los casos posibles para evaluar los resultados de las sumas, que se recogen en la siguiente tabla.

CASOS A DISTINGUIR	$(i, a) \oplus_R ((j, b) \oplus_R (k, c))$	$((i, a) \oplus_R (j, b)) \oplus_R (k, c)$
$(i, a) = (j, b) = (k, c)$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (i, a)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (i, a)$
$(i, a) = (j, b) \neq (k, c)$	$(i, a) \oplus_R (0, b) = (0, a)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (0, a)$
$a < c$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (j, b)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (i, a)$
$c < a$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (k, c)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (k, c)$
$(i, a) \neq (j, b) = (k, c)$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (0, b)$	$(0, b) \oplus_R (k, c) = (0, b)$
$a < b$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (i, a)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (i, a)$
$b < a$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (j, b)$	$(j, b) \oplus_R (k, c) = (j, b)$
$(i, a) = (k, c) \neq (j, b)$	$(i, a) \oplus_R (0, b) = (0, b)$	$(0, a) \oplus_R (k, c) = (0, a)$
$a < b$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (i, a)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (i, a)$
$b < a$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (j, b)$	$(j, b) \oplus_R (k, c) = (j, b)$
$a < b < c$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (i, a)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (i, a)$
$a < c < b$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (i, a)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (i, a)$
$b < c < a$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (j, b)$	$(j, b) \oplus_R (k, c) = (j, b)$
$b < a < c$	$(i, a) \oplus_R (j, b) = (j, b)$	$(j, b) \oplus_R (k, c) = (j, b)$
$c < a < b$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (k, c)$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (k, c)$
$c < b < a$	$(i, a) \oplus_R (k, c) = (k, c)$	$(j, b) \oplus_R (k, c) = (k, c)$

Elemento neutro. Tomamos $0_{\mathbb{RT}} = (0, +\infty)$ y comprobamos $0_{\mathbb{RT}} \oplus_R (i, a) = (i, a) \oplus_R 0_{\mathbb{RT}} = (i, a)$.

$$0_{\mathbb{RT}} \oplus_R (i, a) = (0, +\infty) \oplus_R (i, a) = \begin{cases} (0, +\infty) & \text{si } 0_{\mathbb{RT}} = (i, a) \\ (0, a) & \text{si } i \neq 0, a = +\infty \text{ -caso que no puede darse-} \\ (i, a) & \text{si } a < +\infty \end{cases}$$

$$(i, a) \oplus_R 0_{\mathbb{RT}} = (i, a) \oplus_R (0, +\infty) = \begin{cases} (0, +\infty) & \text{si } 0_{\mathbb{RT}} = (i, a) \\ (0, a) & \text{si } i \neq 0, a = +\infty \text{ -caso que no puede darse-} \\ (i, a) & \text{si } a < +\infty \end{cases}$$

Propiedad conmutativa: $(i, a) \oplus_R (j, b) = (j, b) \oplus_R (i, a)$. Es un resultado obvio por construcción.

$(\mathbb{RT}, \odot_R)$ es un monoide.

Propiedad asociativa.

$$(i, a) \odot_R ((j, b) \odot_R (k, c)) = (i, a) \odot_R (j \cdot k, b + c) = (i \cdot (i \cdot j), a + (b + c))$$

$$((i, a) \odot_R (j, b)) \odot_R (k, c) = (i \cdot j, a + b) \odot_R (k, c) = ((i \cdot j) \cdot k, (a + b) + c)$$

Comprobamos así $(i, a) \odot_R ((j, b) \odot_R (k, c)) = ((i, a) \odot_R (j, b)) \odot_R (k, c)$.

Elemento neutro o identidad. Dicho elemento es $1_{\mathbb{RT}} = (1, 0)$, por ser 1 el elemento neutro del producto y 0 el elemento neutro de la suma en $\mathbb{R}$.

$$(i, a) \odot_R 1_{\mathbb{RT}} = (i, a) \odot_R (1, 0) = (i \cdot 1, a + 0) = (i, a)$$

$$1_{\mathbb{RT}} \odot_R (i, a) = (1, 0) \odot_R (i, a) = (1 \cdot i, 0 + a) = (i, a)$$

El producto $\odot_R$ es distributivo respecto de la suma $\oplus_R$.

$$(i, a) \odot_R ((j, b) \oplus_R (k, c)) = \begin{cases} (i, a) \odot_R (j, b) & \text{si } (j, b) = (k, c) \\ (i, a) \odot_R (0, b) & \text{si } i \neq j, b = c \\ (i, a) \odot_R (j, b) & \text{si } b < c \\ (i, a) \odot_R (k, c) & \text{si } c < b \end{cases} = \begin{cases} (i \cdot j, a + b) & \text{si } (j, b) = (k, c) \\ (0, a + b) & \text{si } i \neq j, b = c \\ (i \cdot j, a + b) & \text{si } b < c \\ (i \cdot k, a + c) & \text{si } c < b \end{cases}$$

$$(i, a) \odot_R (j, b) \oplus_R (i, a) \odot_R (k, c) = (i \cdot j, a + b) \oplus_R (i \cdot k, a + c) = \begin{cases} (i \cdot j, a + b) & \text{si } (i \cdot j, a + b) = (i \cdot k, a + c) \\ (0, a + b) & \text{si } i \cdot j \neq i \cdot k, a + b = a + c \\ (i \cdot j, a + b) & \text{si } a + b < a + c \\ (i \cdot k, a + c) & \text{si } a + c < a + b \end{cases}$$

Hemos comprobado entonces $(i, a) \odot_R ((j, b) \oplus_R (k, c)) = (i, a) \odot_R (j, b) \oplus_R (i, a) \odot_R (k, c)$.

$0_{\mathbb{RT}}$ anula $\mathbb{RT}$, tanto por la derecha como por la izquierda.

$$0_{\mathbb{RT}} \odot_R (i, a) = (0, +\infty) \odot_R (i, a) = (0 \cdot i, +\infty + a) = (0, +\infty) = 0_{\mathbb{RT}}$$

$$(i, a) \odot_R 0_{\mathbb{RT}} = (i, a) \cdot_R (0, +\infty) = (i \cdot 0, a + \infty) = (0, \infty) = 0_{\mathbb{RT}}$$

Probamos así $0_{\mathbb{RT}} \odot_R (i, a) = (i, a) \odot_R 0_{\mathbb{RT}} = 0_{\mathbb{RT}}$.

Finalmente comprobamos que la condición de *idempotencia* se verifica con la operación aditiva: $(i, a) \oplus_R (i, a) = (i, a)$; esto es inmediato tratándose de hecho de uno de los casos particulares que contempla la definición de la suma tropical real extendida, $\oplus_R$. ■

En definitiva tenemos *el semianillo tropical real con elemento neutro del producto o identidad*, $1_{\mathbb{RT}}$, el $(1, 0)$ y *elemento neutro de la suma*, $0_{\mathbb{RT}}$, el $(0, +\infty)$.

Observación 4.3. El conjunto $(\mathbb{RT}, \oplus_R, \odot_R)$ no posee estructura de *cuerpo*, y ni siquiera es *anillo*. En general no existen elementos opuestos y en algunos casos tampoco podemos determinar elementos inversos.

Dado $(i, a) \in \mathbb{RT}$ buscamos el opuesto correspondiente, es decir, $(i_o, a_o) \in \mathbb{RT}$ tal que

$$(i, a) \oplus_R (i_o, a_o) = (i_o, a_o) \oplus_R (i, a) = 0_{\mathbb{RT}} = (0, +\infty).$$

Lo cual no puede resolverse excepto con el elemento $0_{\mathbb{RT}}$ que es su propio opuesto.

Mientras que si buscamos un elemento inverso se requiere $(i_{-1}, a_{-1}) \in \mathbb{RT}$ tal que

$$(i, a) \odot_R (i_{-1}, a_{-1}) = (i_{-1}, a_{-1}) \odot_R (i, a) = 1_{\mathbb{RT}} = (1, 0).$$

En este caso sí que podemos hallar elementos inversos.

$$(i, a) \odot_R (i_{-1}, a_{-1}) = (i \cdot i_{-1}, a + a_{-1}) = (1, 0) \implies (i_{-1}, a_{-1}) = \begin{cases} (1, -a) & \text{si } i = 1 \\ (-1, -a) & \text{si } i = -1 \\ \nexists & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

Igualmente con el caso $(i_{-1}, a_{-1}) \odot_R (i, a) = (1, 0)$ por conmutatividad. En ambos casos hemos obtenido que los elementos de la forma $(0, a)$ no poseen inverso. Y por ello $(\mathbb{TR}, \odot_r)$ no es grupo.

En adelante convenimos escribir los elementos del semianillo $\mathbb{RT}$ en lo que llamaremos *notación abreviada*. El elemento neutro de la suma tropical real en notación abreviada será: $0_{\mathbb{RT}} = +\infty^0$; y el elemento neutro del producto tropical real será $1_{\mathbb{RT}} = 0^+$. Mientras que en general, el resto de elementos en notación abreviada siguen el siguiente convenio:

$$a^+ = (1, a) \quad a^- = (-1, a) \quad a^0 = (0, a)$$

4.2. Definiciones

Definición 4.4. Sean $\omega_1, \dots, \omega_n$ variables y $\alpha_i \in \mathbb{RT} \setminus \{(0, +\infty)\}$ un elemento no nulo del semianillo tropical real. Se llama *monomio tropical real en n variables de coeficiente α_i* , siendo cada variable ω_j con multiplicidad tropical real i_j , a la expresión formal

$$\alpha_{(i_1, \dots, i_n)} \odot_R \omega_1^{i_1} \odot_R \dots \odot_R \omega_n^{i_n}.$$

De hecho, mediante la notación con multiíndices la expresión se corresponde con

$$\alpha_i \odot_R \omega^i = \alpha_{(i_1, \dots, i_n)} \odot_R \omega_1^{i_1} \odot_R \dots \odot_R \omega_n^{i_n}.$$

Se llama un *polinomio tropical real* a la suma formal finita de monomios tropicales reales

$$f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{RT} \setminus \{(0, +\infty)\} \quad \forall i \in A \quad (4.3)$$

dónde A es el soporte de f . Si $A = \emptyset$ entonces $f = (0, +\infty)$. El conjunto de polinomios tropicales reales en las variables $\omega_1, \dots, \omega_n$ es $\mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$. Con la suma y el producto habitual $\mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ es semianillo idempotente.

En la *Definición 4.4* hemos empleado la notación inicial de los elementos del semianillo tropical real, sin embargo, en la práctica escribiremos los polinomios con los coeficientes dados en notación abreviada, como vemos en el siguiente ejemplo. Además en *Ec. 4.3* la suma tropical es real extendida, a pesar de que ya no se haya hecho uso del subíndice R . Estos criterios los mantendremos durante todo el trabajo.

Ejemplo 4.5. Teniendo en cuenta que en los polinomios considerados en el *Ejemplo 1.5* los coeficientes están restringidos a series de Puiseux reales podemos considerar a continuación polinomios tropicales reales cuyos polinomios tropicales complejos asociados son los de dicho ejemplo.

- I Tomamos un polinomio tropical real general en una única variable ω de grado n y con coeficientes sin signo 0, entonces

$$\begin{aligned} f_a &= \bigoplus_{i=0}^n \alpha_i \odot_R \omega^i = \bigoplus_{i=0}^n |\alpha_i|^{\pm} \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega] \quad \text{y} \\ f_b &= \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i = \bigoplus_{i \in A} |\alpha_i|^{\pm} \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega] \end{aligned}$$

son un polinomio tropical real con soporte $\{0, 1, \dots, n\}$ y $A = \{i_1, \dots, i_r, n\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$, respectivamente.

- II Tomamos el polinomio complejo $|f| = 0 \odot \omega \oplus 1 \in \mathbb{T}[\omega]$ de tal modo que podemos obtener hasta 9 polinomios tropicales reales asociados: $f_{s_1 s_0} \in \mathbb{RT}[\omega]$. Notación con la que indicamos: el signo del coeficiente que acompaña a ω_1 es s_1 y el signo del término independiente es s_0 , es decir, $s_0, s_1 \in \{-1, 0, 1\}$.

$$\begin{aligned} f_{++} &= 0^+ \odot_R \omega \oplus_R 1^+ & f_{+-} &= 0^+ \odot_R \omega \oplus_R 1^- & f_{+0} &= 0^+ \odot_R \omega \oplus_R 1^0 \\ f_{--} &= 0^- \odot_R \omega \oplus_R 1^- & f_{-+} &= 0^- \odot_R \omega \oplus_R 1^+ & f_{-0} &= 0^- \odot_R \omega \oplus_R 1^0 \\ f_{00} &= 0^0 \odot_R \omega \oplus_R 1^0 & f_{0+} &= 0^0 \odot_R \omega \oplus_R 1^+ & f_{0-} &= 0^0 \odot_R \omega \oplus_R 1^- \end{aligned}$$

- III Escribimos a partir del polinomio tropical complejo $|f| = 2 \oplus_R 0 \odot_R \omega_1 \oplus_R 1 \odot_R \omega_2 \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$ todos los polinomios tropicales reales asociados sin signos 0 en los coeficientes. Es decir, en estos ejemplos para cada polinomio f_{s_1, s_2, s_0} s_1 representa el signo del coeficiente que acompaña a ω_1 , s_2 es el signo del coeficiente que acompaña a ω_2 y s_0 es el signo del término independiente. Además $s_0, s_1, s_2 \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} f_{+++} &= 2^+ \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2 & f_{---} &= 2^- \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2 \\ f_{++-} &= 2^+ \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2 & f_{--+} &= 2^- \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2 \\ f_{+-+} &= 2^+ \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2 & f_{-+-} &= 2^- \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2 \\ f_{-++} &= 2^- \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2 & f_{+--} &= 2^+ \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2 \end{aligned}$$

- IV De forma natural, la potencia j -ésima tropical real es el producto tropical real de un polinomio tropical real j veces. Con un polinomio del caso anterior sería $f_{s_1, s_2, s_0}^j = f_{s_1, s_2, s_0} \odot_R \dots \odot_R^j f_{s_1, s_2, s_0}$. Calculamos un par de cuadrados de polinomios para plasmar como resultan las operaciones tropicales entre los coeficientes correspondientes.

$$\begin{aligned} f_{++-}^2 &= f_{++-} \odot_R f_{++-} \\ &= (2^+ \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2) \odot_R (2^+ \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2) \\ &= 2^- \odot_R (2^+ \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2) \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \odot_R (2^+ \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2) \oplus_R \dots \\ &\quad \dots 1^+ \odot_R \omega_2 \odot_R (2^+ \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_2) \\ &= 4^+ \oplus_R 2^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 3^- \odot_R \omega_2 \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1^2 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_1 \odot_R \omega_2 \oplus_R 2^+ \odot_R \omega_2^2 \\ f_{+-+}^2 &= f_{+-+} \odot_R f_{+-+} \\ &= (2^+ \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2) \odot_R (2^+ \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2) \\ &= 2^+ \odot_R (2^+ \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2) \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \odot_R (2^+ \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2) \oplus_R \dots \\ &\quad \dots 1^- \odot_R \omega_2 \odot_R (2^+ \oplus_R 0^- \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2) \\ &= 4^+ \oplus_R 2^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 3^- \odot_R \omega_2 \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1^2 \oplus_R 1^- \odot_R \omega_1 \odot_R \omega_2 \oplus_R 2^+ \odot_R \omega_2^2 \end{aligned}$$

- V En el polinomio de grado 3 en 2 variables $f_R \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ ya escribimos los operadores tropicales sin el subíndice R y así continuaremos a partir de este punto.

$$f_R = 5^+ \oplus 0^+ \odot \omega_1 \oplus 0^- \odot \omega_2 \oplus 0^- \odot \omega_1^2 \oplus 1^- \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 0^+ \odot \omega_2^2 \oplus 0^+ \odot \omega_1^2 \odot \omega_2 \oplus 0^- \odot \omega_1 \odot \omega_2^2 \oplus 2^- \odot \omega_1^3 \oplus 1^- \odot \omega_2^3.$$

Definición 4.6. Dados un polinomio $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ y un punto $p = (p_1, \dots, p_n) = ((s_1, m_1), \dots, (s_n, m_n)) \in \mathbb{RT}^n$. De dónde tomamos el signo de p : $s_p = (s_1, \dots, s_n)$; y el módulo de p : $m_p = (m_1, \dots, m_n)$. Entonces la evaluación $f(p)$ es el resultado de la suma tropical real extendida de los términos $(s_p^i, i m_p) = (s_1^{i_1} \dots s_n^{i_n}, i_1 \cdot m_1 + \dots + i_n \cdot m_n)$, para $i \in A$.

En la práctica basta hacer uso de las operaciones tropicales reales (Ec. (4.2)) para dados f polinomio tropical real y $p \in \mathbb{RT}$ resolver $f(p)$, ya que llegaremos a una expresión en operaciones convencionales. En particular, si $\alpha = (s_\alpha, m_\alpha) \in \mathbb{RT}$ y $r \in \mathbb{N}$ entonces

$$\alpha^r = (s_\alpha, m_\alpha) \odot_R \dots \odot_R (s_\alpha, m_\alpha) = (s_\alpha \cdot \dots \cdot s_\alpha, m_\alpha + \dots + m_\alpha) = ((s_\alpha)^r, r \cdot m_\alpha)$$

Definición 4.7. Dado $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ un polinomio tropical real de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ se llama *raíz tropical real de f* a un punto $p \in \mathbb{RT}$ si $f(p)$, es decir, el resultado de evaluar p en f , tiene signo 0.

En definitiva la Definición 3.6 y la Definición 4.7 son equivalentes en el caso en el que tanto el polinomio tropical real como la solución del mismo no posean signos 0. Es decir, dada una raíz tropical real de un polinomio con signos, los considerados hasta ahora en la geometría tropical real, entonces es raíz tropical real de un polinomio considerado en la geometría tropical real extendida y viceversa.

Definición 4.8. Se define *hipersuperficie tropical real extendida* de un polinomio tropical real no nulo $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ como el conjunto de raíces tropicales reales de f , se denota por $\bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f)$ y quedará descrito

$$\bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f) = \{p \in \mathbb{RT}^n : f(p) = m^0\}.$$

Ejemplo 4.9. Hallamos las raíces tropicales reales, y con ello las hipersuperficies tropicales reales, de los polinomios del Ejemplo 4.5.

- I Consideramos f_a y f_b polinomios tropicales reales en una única variables de grado b y con soporte $\{0, 1, \dots, n\}$ y $A = \{i_1, \dots, i_r, n\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$, respectivamente. Si $\mathcal{T}(|f_a|) = \{\bar{\omega}_a\}$ y $\mathcal{T}(|f_b|) = \{\bar{\omega}_b\}$ entonces $\bar{\omega}_a^+ = (1, \bar{\omega}_a)$ y $\bar{\omega}_a^- = (-1, \bar{\omega}_a)$ son candidatos a raíces tropicales reales de f_a y, del mismo modo, $\bar{\omega}_b^+ = (1, \bar{\omega}_b)$ y $\bar{\omega}_b^- = (-1, \bar{\omega}_b)$ son de candidatos a raíz para f_b . Ya que se conoce que en dichos elementos el mínimo se alcanzaría al menos 2 veces empleando los módulo. Para determinar si lo son o no evaluamos cada uno en el polinomio tropical real correspondiente y nos fijamos en el signo resultante. Por definición descartaremos aquellos puntos para los que obtenemos signo no 0. En este sentido queremos destacar que puede ocurrir tanto que ambos candidatos sean raíz tropical como que solamente lo sea uno de ellos como que no sea válido ninguno de los dos. En el siguiente punto tenemos un caso concreto en el que ocurre esto.
- II Consideramos para el cálculo de raíces tropicales reales los polinomios sin signos 0. Tomamos los polinomios f_{++}, f_{+-}, f_{-+} y f_{--} . Entonces valoramos como soluciones posibles $\bar{\omega}_+ = 1^+$ y $\bar{\omega}_- = 1^-$, para los que resolvemos $f_{++}(1^-) = f_{--}(1^-) = 1^0$ y $f_{+-}(1^+) = f_{-+}(1^+) = 1^0$, mientras que $f_{++}(1^+) = 1^+$, $f_{--}(1^+) = 1^-$, $f_{+-}(1^-) = 1^-$ y $f_{-+}(1^-) = 1^+$.
De lo que concluimos $\bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f_{++}) = \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f_{--}) = \{1^-\}$ $\bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f_{+-}) = \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f_{-+}) = \{1^+\}$.
- III Usaremos el *pachtworkeing* para determinar las distintas curvas de cada uno de los polinomios $f_{s_1 s_2 s_0}$ dónde $s_1, s_2, s_0 \in \{+, -\}$. Esta técnica se base en replicar en 4 cuadrantes la curva tropical compleja asociada al polinomio tropical real, con la orientación correcta. Teniendo en cuenta que hacemos referencia a los cuadrantes en el sentido habitual, cada una de las divisiones del plano que realiza un eje cartesiano. Entonces, en cada uno se evalúa el signo del monomio asociado a esa región del espacio. Y finalmente sólo conservamos como parte de la curva tropical real aquellas líneas que se encuentran entre signos distintos.

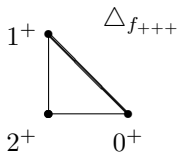


Figura 4.1: Polígono de Newton de f_{+++}

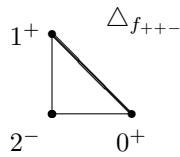


Figura 4.2: Polígono de Newton de f_{++-}

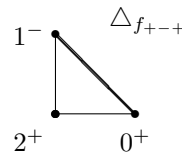


Figura 4.3: Polígono de Newton de f_{-+-}

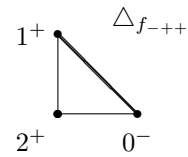


Figura 4.4: Polígono de Newton de f_{--+}

En las Figuras 4.1 a 4.8 damos la subdivisión regular del polinomio con todas las configuraciones de signos no 0 posibles. Y en las Figuras 4.9 a 4.12 mostramos las curvas correspondientes.

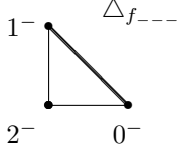


Figura 4.5: Polígono de Newton de f_{----}

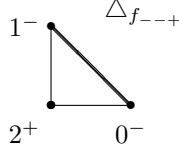


Figura 4.6: Polígono de Newton de f_{---+}

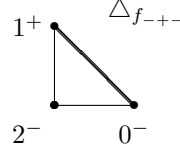


Figura 4.7: Polígono de Newton de f_{+--}

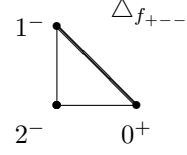


Figura 4.8: Polígono de Newton de f_{+--}

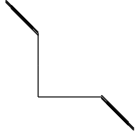


Figura 4.9: Curva f_{+++} y f_{----}

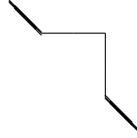


Figura 4.10: Curva f_{++-} y f_{--+}

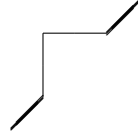


Figura 4.11: Curva f_{+-+} y f_{-+-}

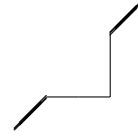


Figura 4.12: Curva f_{-++} y f_{+--}

iv El polinomio $f_R = 5^+ \oplus 0^+ \odot \omega_1 \oplus 0^- \odot \omega_2 \oplus 0^- \odot \omega_1^2 \oplus 1^- \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 0^+ \odot \omega_2^2 \oplus 0^+ \odot \omega_1^2 \odot \omega_2 \oplus 0^- \odot \omega_1 \odot \omega_2^2 \oplus 2^- \odot \omega_1^3 \oplus 1^- \odot \omega_2^3 \in \mathbb{RT}[\omega_1, \omega_2]$ lo estudiaremos más en detalle al final de la memoria, dónde dibujamos $\bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f_R)$.

4.3. Tropicalización real extendida

Comenzamos esta sección recordando la *Definición 1.13* en la *Sección 1.2*, dónde dimos la definición general del proceso de *tropicalización* como aquél que asigna a una variedad algebraica una variedad tropical. A continuación presentamos el proceso propuesto en el caso real, dónde definiremos la variedad algebraica sobre el *cuerpo de series de Puiseux con coeficientes reales*.

En adelante denotamos como $\mathbb{K}$ al *cuerpo de Series de Puiseux con coeficientes reales*, $\mathbb{K} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}((t^{1/n}))$. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{K}$ entonces lo podremos escribir en términos de *series de Puiseux reales*, es decir, series de potencias formales con coeficientes reales de parámetro t cuyos exponentes son números racionales y que daremos escritos en común denominador, $N \in \mathbb{N}$, que es acotado.

$$\mathbf{a} = \sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{a}_i t^{i/N}, \quad \mathbf{a}_l \neq 0$$

Consideramos implícitamente $l \in \mathbb{Z}$ el exponente más bajo de la suma, el primero no nulo. Excepto en el caso de definir la serie $0_{\mathbb{K}}$ dónde $0_{\mathbb{K}} = \mathbf{0} = \sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{0}_i t^{i/N}$, es decir, todos los coeficientes de la serie son cero. Llamamos al coeficiente asociado al índice $l \in \mathbb{Z}$ *coeficiente principal* y lo escribimos por $Pc(\mathbf{a}) = \mathbf{a}_l$.

Nombramos en lo sucesivo *polinomio clásico* a cualquier polinomio en n variables con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$ de soporte A . En general escribiremos $F = \sum_{i \in A} a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

En la *Definición 1.12* dimos la aplicación *trop*, de dónde conviene destacar el uso de la valoración empleada para definirla. En este caso la aplicación, que denotamos $trop_R$, se considera en dos pasos. En primer lugar, empleamos para cada elemento la valoración, v , y en segundo lugar tenemos en cuenta el signo del elemento, siempre y cuando sea posible.

Definición 4.10. Sean el cuerpo $\mathbb{K} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}((t^{1/n}))$ y $\mathbf{a} = \sum_{i=l}^{\infty} \mathbf{a}_i t^{i/N}$ un elemento suyo.

Definimos la *valoración de $\mathbf{a}$* como el exponente de t del coeficiente principal, es decir, $v(\mathbf{a}) = l/N$. Con la particularidad $v(0_{\mathbb{K}}) = +\infty$.

$$\begin{aligned} v : \quad & \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \mathbf{a} = \sum_{i=l, \mathbf{a}_i \neq 0}^{\infty} \mathbf{a}_i t^{i/N} \longmapsto v(\mathbf{a}) = l/N \end{aligned} \quad (4.4)$$

Definimos la *función signo* 0, que denotamos s_0 . Con la particularidad $s_0(0_{\mathbb{K}}) = 0$.

$$s_0 : \mathbb{K}^* \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$$

$$\mathbf{a} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{a} >_{\mathbb{K}} 0 \\ 0 & \text{si no se sabe } \mathbf{a} >_{\mathbb{K}} 0 \text{ ni } \mathbf{a} <_{\mathbb{K}} 0 \\ -1 & \text{si } \mathbf{a} <_{\mathbb{K}} 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

En las condiciones dadas en la aplicación s_0 , *Ec. 4.5*, hay que tener en cuenta que la relación de orden en $\mathbb{K}$ indica que $\mathbf{a} >_{\mathbb{K}} 0$ si y sólo si $Pc(\mathbf{a}) > 0$, con $>$ el orden habitual en $\mathbb{R}$. Por lo que queda definida de forma única la aplicación, ya que se trata de un anillo dónde el orden es único [8]. Y de este modo basta conocer el signo del coeficiente principal para determinar el signo del elemento $\mathbf{a}$. En base a esto definiremos el proceso de *tropicalización* en sí de forma práctica.

Definición 4.11. Sea $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces mediante el uso componente a componente de la valoración y de la aplicación signo 0 obtenemos la aplicación *tropicalización real extendida*, que denotamos $trop_R$.

$$trop_R : (\mathbb{K}^*)^n \longrightarrow \mathbb{RT}^n$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \longmapsto ((s_0(\mathbf{a}_1), v(\mathbf{a}_1)), \dots, (s_0(\mathbf{a}_n), v(\mathbf{a}_n))) \quad (4.6)$$

Observación 4.12. La aplicación para la *tropicalización* que presentamos es idéntica al caso real [12], que precisamente hemos usado de referencia (sobre $\mathbb{TR}$). Lo hemos modificado en cuanto a la aplicación signo habitual para incluir el caso del signo 0, de ahí el reconocimiento de esta como función signo 0. Y de hecho, dicha extensión es uno de los motivos del nombre de *geometría tropical real extendida*.

Cuando no haya confusión haremos abuso de notación refiriéndonos a la *tropicalización real extendida* solamente como *tropicalización real* o incluso *tropicalización*.

Definición 4.13. Siguiendo las notaciones anteriores. Dado $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^*$ diremos que s_0 que indica el *signo* de $\mathbf{a} \in \mathbb{K}$: $s_0(\mathbf{a})$; y llamaremos *módulo de $\mathbf{a}$* , denotado $|\mathbf{a}|$, al resultado de la valoración: $v(\mathbf{a})$.

Para elementos $\mathbf{a} \in (\mathbb{K}^*)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ llamamos *signo de $\mathbf{a}$* a la n -tupla $s_0(\mathbf{a}) = (s_0(\mathbf{a}_1), \dots, s_0(\mathbf{a}_n)) \in \{-1, 0, 1\}^n$ y llamamos *módulo de $\mathbf{a}$* a la n -tupla $|\mathbf{a}| = (|\mathbf{a}_1|, \dots, |\mathbf{a}_n|) \in \mathbb{R}^n$.

Según la definición anterior dado $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^*$ tal que $trop_R(\mathbf{a}) = p \in \mathbb{RT}$ entonces $p = (s, m) \in \mathbb{RT}$ indica $s \in \{-1, 0, 1\}$ es el signo de $\mathbf{a}$ y $m \in \mathbb{R}$ es el módulo de $\mathbf{a}$. Y en notación abreviada tendríamos $p^+ = (1, p)$ en caso de ser $v(\mathbf{a}) = p$ y $s_0(\mathbf{a}) = 1$; $p^- = (-1, p)$ en caso de ser $v(\mathbf{a}) = p$ y $s_0(\mathbf{a}) = -1$; y $p^0 = (0, p)$ en caso de ser $v(\mathbf{a}) = p$ y $s_0(\mathbf{a}) = 0$. Por otro lado,

$$trop_R^{-1}(p^+) = a_p \cdot t^p + *_p \text{ siendo } v(a_p) = 0 \text{ y } *_p \text{ términos en serie de Puiseux de valoración estrictamente menor que } p \text{ y además } a_p > 0.$$

$$trop_R^{-1}(p^-) = a_p \cdot t^p + *_p \text{ siendo } v(a_p) = 0 \text{ y } *_p \text{ términos en serie de Puiseux de valoración estrictamente menor que } p \text{ y además } a_p < 0.$$

$$trop_R^{-1}(p^0) = a_p \cdot t^p + *_p \text{ siendo } v(a_p) = 0 \text{ y } *_p \text{ términos en serie de Puiseux de valoración estrictamente menor que } p, \text{ sin conocer información sobre el signo.}$$

Y en particular, $trop_R^{-1}(+\infty^0) = \mathbf{0} = 0_{\mathbb{K}}$ y $trop_R^{-1}(0^+) = r \in \mathbb{R}^*$, es decir, los elementos neutro de la suma y del producto los obtenemos como imagen por la tropicalización real extendida del cero y del resto de reales, respectivamente.

Además, en la práctica dado un polinomio clásico que define una variedad algebraica tomamos como *proceso de tropicalización real* la tropicalización real de los coeficientes de polinomios y la sustitución de las operaciones convencionales por las operaciones tropicales, las reales extendidas en este caso (*Ec. 4.2*). Según esto $f = trop_R(F)$ vendrá dado como

$$f = trop_R(F)$$

$$= \bigoplus_{i \in A} trop_R(a_i) \odot_R \omega^i$$

$$= \bigoplus_{i \in A} (s_0(a_i), v(a_i)) \odot_R \omega_1^{i_1} \odot_R \dots \odot_R \omega_n^{i_n}.$$

Observación 4.14. Teniendo en cuenta la construcción realizada para la aplicación s_0 podemos establecer una conexión con la geometría tropical compleja en cuanto a que un polinomio tropical real cuyos coeficientes tienen signo 0 será en realidad un polinomio tropical complejo.

Ejemplo 4.15. Partimos de los polinomios clásicos del *Ejemplo 1.14* a los que aplicamos el proceso de *tropicalización* propuesto, según $trop_R$.

I Sea $F = \sum_{i=0}^n (a_i t^{\alpha_i}) x^i$ con $a_i \in \mathbb{R}^*$, entonces

$$trop_R(F) = \bigoplus_{i=0}^n (s_i, \alpha_i) \odot_R \omega^i \quad \text{dónde } s_i = \begin{cases} -1 & \text{si } a_i < 0 \\ 0 & \text{si no se sabe } a_i < 0 \text{ o } a_i > 0 \\ 1 & \text{si } a_i > 0 \end{cases}$$

II En este caso escribimos ya con la notación abreviada.

$$\begin{aligned} F_1 &= 27x - 10t \implies trop_R(F_1) = 0^+ \odot_R \omega \oplus_R 1^- \\ F_2 &= x + t + 2t^2 + 3t^3 \implies trop_R(F_2) = 0^+ \odot_R \omega \oplus_R 1^+ \\ F_3 &= -10x + 2020t + t^7 \implies trop_R(F_3) = 0^- \odot_R \omega \oplus_R 1^+ \end{aligned}$$

III Dado $F = x_1 + tx_2 + t^2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ entonces $g = trop_R(F) = 2^+ \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_2 \in \mathbb{RT}[\omega_1, \omega_2]$.

IV En el caso $G = F^2 = x^2 + 2txy + t^2y^2 + 2t^3y + t^2x + t^4 \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ obtenemos $g = trop_R(G)$.

$$g = 4^+ \oplus_R 2^+ \odot_R \omega_1 \oplus_R 3^+ \odot_R \omega_2 \oplus_R 0^+ \odot_R \omega_1^2 \oplus_R 1^+ \odot_R \omega_1 \odot_R \omega_2 \oplus_R 2^+ \odot_R \omega_2^2 \in \mathbb{RT}[\omega_1, \omega_2]$$

Disponemos ya de la base necesaria para formular la definición de *punto singular tropical real*, ya que tomamos de referencia la *Definición 1.16* y modificamos tanto las condiciones generales como la particularidad del proceso de tropicalización a aplicar.

Definición 4.16. Sea $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ un polinomio tropical real de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$. Dado $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{RT}^n$ sin signos 0 tal que $p \in \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f)$ se dice que es un *punto singular tropical real de orden al menos k* si existen $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ tales que $trop_R(F) = f$, $trop_R(P) = p$ y P es un punto singular de de orden al menos k de $\{F = 0\}$.

Se dice que $\bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f)$ es una *hipersuperficie singular tropical real de orden al menos k* si existe $p \in \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(f)$ punto singular tropical real de orden al menos k .

Denotaremos $Sing_k^{trop_R}(f)$ al conjunto de puntos singulares tropicales reales de orden al menos k del polinomio f .

En esta ocasión hemos escrito ya la definición general del punto singular, siendo el caso $k = 2$ el correspondiente a la singularidad simple.

Capítulo 5

Caracterización de puntos singulares tropicales reales

En este capítulo, como se indicó en el anterior, denotamos como $\mathbb{K}$ el cuerpo de series de Pusieux con coeficientes reales. Además, en adelante la notación empleada para las operaciones tropicales es la misma que en el caso complejo pero hará referencia a las operaciones tropicales reales. En adelante indicamos $\oplus_R$ y $\odot_R$ empleando simplemente $\oplus$ y $\odot$, respectivamente.

5.1. Base tropical real

En primer lugar damos la definición de base tropical en el caso real.

Definición 5.1. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Se llama *base tropical real de I* a un conjunto generador finito de polinomios $\{F_1, \dots, F_n\}$ tales que $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(I) = \bigcap_{i=1}^r \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(\text{trop}_R(F_i))$

En segundo lugar damos *el conjunto de términos principales de un conjunto B* dado, que denotamos $PC(B)$. Lo construimos en base a cada $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \in B \subseteq (\mathbb{K}^*)^n$. Nos basta tomar los términos independientes componente a componente considerando el elemento común de mínima valoración de todas las componentes, es decir,

$$PC(B) = \left\{ (Pc(\mathbf{b}_1 t^{-k}), \dots, Pc(\mathbf{b}_n t^{-k})) \mid \mathbf{b} \in B, \mathbf{b}_j = \sum_{i=l_j}^{\infty} \mathbf{b}_{j,i} t^i, k = \min_{i=1}^n \{l_j\} \right\}.$$

Ilustrado con un ejemplo sencillo ($n = 3$) $PC(33 - 5t, -t^2, -10 + t^4) = (33, 0, -10)$, pero además, $PC(33t - 5t^2, -t^3, -10t + t^5) = (33, 0, -10)$.

Si en la *Proposición 2.10* indicábamos la posibilidad de construir una base mediante polinomios lineales de soporte minimal a continuación se presenta la misma posibilidad en geometría tropical real. La *Proposición 5.9* asegura la existencia de una base mediante polinomios afines de soporte minimal en el caso lineal homogéneo.

Para la demostración precisamos del concepto de *polinomio residual* y el *teorema de la alternativa* (*Teorema 5.5*, [5]), que aplicamos para demostrar una versión tropical del mismo: *Corolario 5.6* [12]. La demostración del corolario precisa del *Teorema 5.3* y este, a su vez, requiere de la aplicación de la *versión del Lema de Nakayama* dada en el *Lema 5.2* [4].

Lema 5.2 (Lema de Nakayama). *Sea (R, I) un anillo local de cuerpo residual k . Sea M un R -módulo finitamente generado. Entonces, M/IM es un k -espacio vectorial y si $[x_1], \dots, [x_n]$ generan M/IM como k -espacio vectorial entonces $x_1, \dots, x_n$ generan M como R -módulo.*

Teorema 5.3. *Sea $R = \mathbb{R}[[t]]$ el anillo de series de potencias formales con coeficientes en el cuerpo de los números reales y $K = \text{Frac}(R) = \mathbb{R}((t))$ su cuerpo de fracciones. Sean E un sistema de ecuaciones lineales homogéneas y $V \subseteq K^n$ sus soluciones. Tomamos $E_0 = PC(\langle E \rangle)$ y $V_0 = PC(V)$. Entonces $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ son exactamente las soluciones del sistema E_0 .*

Demostración. Tomamos V_1 como $V \cap (\mathbb{R}[[t]])^n$. $\mathbb{R}[[t]]$ es dominio de ideales principales y V_1 es un submódulo de $(\mathbb{R}[[t]])^n$ por tanto V_1 es $\mathbb{R}[[t]]$ -módulo libre. Por otra parte, $\mathbb{R}[[t]]$ es un anillo local de maximal un ideal principal definido por el parámetro t , es decir, $(\mathbb{R}[[t]], m)$ con $m = (t)$ es anillo local y $\mathbb{R}$ es el cuerpo residual. Si construimos el espacio cociente $V_0 = V_1/m$, basta comprobar se cumplen las condiciones del

Lema de Nakayama. Entonces V_0 es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y dados $[v_1], \dots, [v_s]$ generadores de este entonces, tomando representantes de dichas clases, $v_1, \dots, v_s$ generan V_1 como $\mathbb{R}[[t]]$ -módulo y V como K -espacio vectorial. Además, dichos generadores forman una base de V_1 y V , procedemos por reducción al absurdo para comprobarlo. Si dicho conjunto de generadores no es base de V entonces son K -linealmente dependientes, es decir,

$$\bar{0} = \sum_{i=1}^s a_i v_i \quad a_i \in K,$$

y multiplicando por un factor t^j apropiado entonces

$$\bar{0} = \sum_{i=1}^s b_i v_i \text{ con } b_i = t^j a_i \in \mathbb{R}[[t]] \quad \exists i \text{ tal que } b_i \in (\mathbb{R}[[t]])^*.$$

Luego tomando clases, siendo la valoración de tal b_i nula, serían $[v_1], \dots, [v_s]$ linealmente dependientes, llegando así a un absurdo. Por ello dada $\{[v_1], \dots, [v_s]\}$ base de V_0 entonces $\{v_1, \dots, v_s\}$ es K -base de V y por tanto $\dim(V_0) = \dim(V) = s$.

Realizando el mismo razonamiento con el espacio lineal de ecuaciones homogéneas E , si $\{[w_1], \dots, [w_r]\}$ es una base de E_0 , entonces $\{w_1, \dots, w_r\}$ es base de E . En particular $\dim(E_0) = \dim(E) = n - s$. Además, es claro que si $f \in E_0$, $f(V_0) = 0$, como $\dim(V_0) = s$, debe ser $V(E_0) = V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. ■

Observación 5.4. Destacamos del *Teorema 5.3* el uso de $PC(\langle E \rangle)$ en lugar de simplemente $PC(E)$ ya que es necesario tener en cuenta todas las combinaciones lineales de ecuaciones de E .

Teorema 5.5 (Teorema de la alternativa). *Sea $M \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$ una matriz de rango r . Entonces uno y solamente uno de los siguientes problemas tiene solución*

- i) Existe $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^n$, con $p_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$, tal que $MP = (0, \dots, {}^r 0)^t$.
- ii) Existe $v = (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^r$ tal que $vM = b \neq (0, \dots, {}^n 0)^t$ y todos los coeficientes de b son no negativos.

Demostración. ■

Corolario 5.6. *Sea $M \in \mathcal{M}_{r \times n}(\mathbb{R})$ una matriz de rango r . Entonces uno y solamente uno de los siguientes problemas tiene solución*

- i) Existe $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $MP = (0, \dots, {}^r 0)^t$ y $\text{trop}_R(P) = (0^+, \dots, {}^n 0^+)$.
- ii) Existe $v = (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^r$ tal que $vM = b \neq (0, \dots, {}^n 0)^t$ y todos los coeficientes de b son no negativos.

Demostración. Las dos posibilidades no pueden ocurrir a la vez. Si V es el núcleo de M , el punto i) indica $(0^+, \dots, {}^n 0^+) \in \text{trop}_R(V)$ y el punto ii) indica que en $\text{trop}_R(V)$ todos los elementos tienen que tener al menos un término negativo. Ya existe un polinomio lineal $H \in \mathcal{I}(V)$ tal que la forma residual respecto de $(0, \dots, {}^n 0)$ tiene coeficientes de signo positivo.

Podemos considerar que V posee una base con coeficientes en $\mathbb{R}((t))$.

Si ii) no tiene solución toda forma lineal $H \in \mathcal{I}(V)$ es tal que el polinomio residual en $(0, \dots, {}^n 0)$ tiene coeficientes negativos. Luego en estas condiciones el *Teorema 5.5* determina que el conjunto de formas residuales en $(0, \dots, {}^n 0)$ tiene solución con componentes estrictamente positivas: $P_0 \in \mathbb{R}^n$. Y por el *Teorema 5.3* existe $\hat{P} \in V$ tal que $Pc(P) = P$ y $\text{trop}_R(P) = (0, \dots, {}^n)$. Con lo que se verifica i).

Si i) no tiene solución entonces $Pc(V) \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset$, donde $\mathbb{R}_+$ indica el conjunto de los números reales estrictamente positivos. Empleando el *Teorema 5.3* y el *Corolario 5.6* sobre el cuerpo de los números reales, podemos afirmar que existe una forma lineal $H \in \mathcal{I}(V)$ tal que todos los polinomios residuales en $(0, \dots, {}^n 0)$ tienen coeficientes positivos. ■

Definición 5.7. Sea $F = \sum_{i \in A} a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio clásico de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ y sea $p \in \mathbb{RT}^n$. Entonces, tomando la tropicalización real extendida, $f = \text{trop}_R(F)$ es un polinomio tropical real. Se considera A_p como el conjunto de índices en cuyos monomios asociados f alcanza el mínimo en p . Se llama *polinomio residual de F en p* al polinomio

$$F_p = \sum_{j \in A_p} Pc(a_j)x^j \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n].$$

A continuación, detallaremos la demostración realizada en el artículo [12] de la *Proposición 5.9* (*Theorem 3.14*). Se trata de una prueba constructiva, de hecho se describe implícitamente el algoritmo a seguir para elaborar una base tropical real.

Observación 5.8. Sea $\mathcal{V}(I)$ con $I = \mathcal{I}(V)$ el ideal del espacio afín $V \subseteq (\mathbb{K}^*)^n$, entonces $\mathcal{V}(I) = V$.

Proposición 5.9. Sea $I = \mathcal{I}(V)$ el ideal del espacio afín $V \subseteq (\mathbb{K}^*)^n$. Entonces, los polinomios afines en I con soporte minimal forman una base tropical real de I .

Demostración. Para cada soporte minimal solo hay un polinomio lineal en I (salvo multiplicidad por constante) y dichos polinomios lineales generan $I = (F_1, \dots, F_r)$. Es decir, hay un conjunto finito de generadores de I . Por otro lado, podemos considerar sin pérdida de generalidad I homogéneo. De modo que nos centramos en probar

$$\text{trop}_R(V) = \bigcap_{i=1}^r \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(\text{trop}_R(F_i)).$$

En contenido $\text{trop}_R(V) \subseteq \bigcap_{i=1}^r \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(\text{trop}_R(F_i))$ es trivial y el contenido opuesto lo probamos por contrarrecíproco. Dado $p \in \mathbb{RT}^n$ veamos

$$p \notin \text{trop}_R(V) \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, r\} \text{ tal que } p \notin \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(\text{trop}_R(F_j)).$$

Tomaremos en adelante $p = (0^+, \dots, 0^+)$, ya que es posible trasladar a este punto cualquier otro mediante un cambio de coordenadas. Además, estando en condiciones de emplear el *Corolario 5.6*, tiene que ocurrir $ii)$, $\exists F \in \mathcal{I}(V)$ función lineal tal que $p \notin \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(F)$. En caso de no ser F de soporte minimal existirá $G \in \mathcal{I}(V)$, forma lineal, con soporte minimal contenido en el soporte de F . Si $p \in \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(\text{trop}_R(G))$ construimos H a partir de F y G tal que $p \notin \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(\text{trop}_R(H))$.

Desarrollamos la construcción del polinomio afín H a partir de F y G . Sean $F = \sum_{i \in A_F} a_i x_i$ y $G = \sum_{i \in A_G} b_i x_i$, es decir, polinomios lineales de soporte A_F y A_G , respectivamente. Entonces,

F es tal que $p \notin \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(\text{trop}_R(F))$ y además $\exists k \in \mathbb{Q}$ tal que $t^k F$ es polinomio con coeficientes de valoración estrictamente positiva y al menos uno de valoración exactamente 0: $v(t^k a_i) \geq 0$ y $\exists i \in A_F$ tal que $v(a_i t^k) = 0$.

G es tal que $A_G \subseteq A_F$ y además $\exists l \in \mathbb{Q}$ tal que $t^l G$ es polinomio con coeficientes de valoración estrictamente positiva y al menos uno de valoración exactamente 0: $v(t^l b_i) \geq 0$ y $\exists i \in A_G$ tal que $v(b_i t^l) = 0$.

En primer lugar modificamos el polinomio G mediante una combinación lineal: $G \rightarrow \lambda F + \mu G$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$).

$$\text{trop}_R(\lambda F + \mu G) = \bigoplus_{i \in A_F \cup A_G} v(a_i t^k \lambda + b_i t^l \mu) \odot \omega_i$$

Denotamos $A_{F,p} \subseteq A_F$ y $A_{G,p} \subseteq A_G$ subconjuntos de los soportes A_F y A_G , respectivamente, con los índices de los monomios en los que el mínimo se alcanza en p . Encontramos la transformación apropiada con el objetivo de asumir que F_p y $(\lambda F + \mu G)_p$ son linealmente independientes. Si $\exists m \in A_{G,p}$ tal que $m \notin A_{F,p}$ entonces, podemos usar G para eliminar el monomio en x_m de F .

$$\begin{aligned} G &= \lambda t^k F + \mu t^l G \\ &= \sum_{i \in A_F, j \in A_G} (\lambda t^k a_i x_i + \mu t^l b_j x_j) \\ &= \sum_{i \in A_F \setminus \{m\}, j \in A_G \setminus \{m\}} (\lambda t^k a_i x_i + \mu t^l b_j x_j) + (\lambda t^k a_m + \mu t^l b_m) x_m \end{aligned}$$

Nos basta tomar λ y μ tales que $\lambda t^k a_m + \mu t^l b_m = 0$. De este modo, tras operar para todo índice en $A_{G,p}$ y no en $A_{F,p}$, hemos sustituido el polinomio G de partida por otro tal que $A_{G,p} \subseteq A_{F,p}$. Denotamos $\bar{a}_i = Pc(a_i)$ y $\bar{b}_i = Pc(b_i)$ coeficiente principal de los monomios de la variable x_i en F y G , respectivamente. Entonces dado $i \in A_{F,p}$ tal que $|\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_i}|$ máximo, si $\bar{b}_i > 0$ cambiamos el signo del polinomio G . Concluimos que la combinación H ,

$$H = F \left(\frac{-\bar{b}_i}{\bar{a}_i} \right) + G,$$

es un polinomio afín de soporte contenido estrictamente en el de F , $A_H \subsetneq A_F$, y $p \notin \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}(\text{trop}_R(H))$. Ya que H_p , polinomio residual de H en p , es por construcción de coeficientes positivos, por lo que no habrá cambio de signo entre los monomios aunque el mínimo se alcance en p .

En caso de no ser H de soporte minimal iteramos el proceso hasta obtener un polinomio de soporte minimal. ■

5.2. Derivadas de Euler reales

A continuación presentamos resultados análogos al caso complejo con las pertinentes adaptaciones, ya que ahora los polinomios clásicos quedan escritos sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{R}((t^{1/n}))$ en lugar de $\mathbb{K} = \mathbb{C}\{\{t\}\}$ y los polinomios tropicales son reales, en $\mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$, en vez de complejos, en $\mathbb{T}[\omega_1, \dots, \omega_n]$.

Tanto la *derivada de Euler de F* como la *derivada Euleriana de F* las dimos en la *Definición 2.11* y *2.17*, respectivamente. Ya que se escribieron para $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, con $\mathbb{K}$ cuerpo, y podemos recuperarlas de ahí. En cambio, es preciso redefinir la *derivada de Euler de f*, siendo f un polinomio tropical real.

Definición 5.10. Sea $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ un polinomio tropical real de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$. Sea $g = \sum c_i z^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio con coeficientes enteros. Se define la *derivada de Euler del polinomio tropical real f respecto de g* como el polinomio tropical con signos dado por

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \bigoplus_{i \in A, g(i) \neq 0} (s_0(g(i)), 0) \odot \alpha_i \odot \omega^i. \quad (5.1)$$

Ejemplo 5.11. Tomamos los polinomios del *Ejemplo 4.5* y realizamos algunas *derivadas de Euler* de los mismos.

I Dado $f_a = \bigoplus_{i=0}^n |\alpha_i|^{\pm} \odot \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega]$ las derivadas respecto de polinomios de grado eliminan a lo sumo un monomio y al resto pueden cambiarlo de signo, es decir, dado $g = c_1 z + c_0 \in \mathbb{Z}[z]$ entonces

$$\frac{\partial f_a}{\partial g} = \bigoplus_{i=0, i \neq -c_0/c_1}^n 0^{s_0(g(i))} \odot |\alpha_i|^{\pm} \odot \omega^i.$$

Dado $f_b = \bigoplus_{i \in A} |\alpha_i|^{\pm} \odot \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega]$. Sean $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq A$ con $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq |A| \leq n+1$ un subconjunto de índices, podemos derivar respecto del polinomio entero de grado k $g_k = (z - i_1) \dots (z - i_k) \in \mathbb{Z}[z]$. Entonces

$$\frac{\partial f_b}{\partial g_k} = \bigoplus_{i \in A \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} 0^{s_0(g(i))} \odot |\alpha_i|^{\pm} \odot \omega^i.$$

Y en el caso límite en que $\{i_1, \dots, i_k\} = A$, es decir, $A \setminus \{i_1, \dots, i_r\} = \emptyset$ obtendremos $\frac{\partial f_b}{\partial g_{|A|}} = (0, +\infty)$.

II Sean los polinomios tropicales reales $f_{s_1 s_0} = 0^{s_1} \odot \omega \oplus 1^{s_0}$, dónde $s_1, s_0 \in \{-1, 0, 1\}$, tomamos los polinomios enteros $g_0 = 20z$, $g_1 = 15z - 15$ y $g_2 = 7z^2 - 7z$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{++}}{\partial g_0} &= \frac{\partial f_{+-}}{\partial g_0} = \frac{\partial f_{+0}}{\partial g_0} = 0^+ \odot \omega & \frac{\partial f_{++}}{\partial g_1} &= \frac{\partial f_{+-}}{\partial g_1} = \frac{\partial f_{+0}}{\partial g_1} = 1^- \\ \frac{\partial f_{-+}}{\partial g_0} &= \frac{\partial f_{--}}{\partial g_0} = \frac{\partial f_{-0}}{\partial g_0} = 0^- \odot \omega & \frac{\partial f_{-+}}{\partial g_1} &= \frac{\partial f_{--}}{\partial g_1} = \frac{\partial f_{-0}}{\partial g_1} = 1^+ \\ \frac{\partial f_{0+}}{\partial g_0} &= \frac{\partial f_{0-}}{\partial g_0} = \frac{\partial f_{00}}{\partial g_0} = 0^0 \odot \omega & \frac{\partial f_{+0}}{\partial g_0} &= \frac{\partial f_{-0}}{\partial g_0} \frac{\partial f_{00}}{\partial g_0} = 1^0 \end{aligned}$$

III Sean los polinomios tropicales reales $f = 2^{s_0} \oplus 0^{s_1} \odot \omega_1 \oplus 1^{s_2} \odot \omega_2 \in \mathbb{RT}[\omega_1, \omega_2]$ con $s_0, s_1, s_2 \in \{-1, 1\}$ calculamos las derivadas de Euler respecto de los polinomios $g_1 = z_1$, $g_{20} = z_2 - 1$, $g_{11} = z_1 - z_2$ y $g_{111} = z_1 + z_2 - 1$.

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial f_{+++}}{\partial g_1} = 0^+ \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{+++}}{\partial g_{20}} = 2^- \oplus 0^- \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{+++}}{\partial g_{11}} = 0^+ \odot \omega_1 \oplus 1^- \odot \omega_2 & \frac{\partial f_{+++}}{\partial g_{111}} = 2^- \\ \frac{\partial f_{++-}}{\partial g_1} = 0^+ \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{++-}}{\partial g_{20}} = 2^- \oplus 0^- \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{++-}}{\partial g_{11}} = 0^+ \odot \omega_1 \oplus 1^+ \odot \omega_2 & \frac{\partial f_{++-}}{\partial g_{111}} = 2^- \\ \frac{\partial f_{+-+}}{\partial g_1} = 0^- \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{+-+}}{\partial g_{20}} = 2^- \oplus 0^+ \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{+-+}}{\partial g_{11}} = 0^- \odot \omega_1 \oplus 1^- \odot \omega_2 & \frac{\partial f_{+-+}}{\partial g_{111}} = 2^- \\ \frac{\partial f_{-++}}{\partial g_1} = 0^+ \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{-++}}{\partial g_{20}} = 2^+ \oplus 0^- \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{-++}}{\partial g_{11}} = 0^+ \odot \omega_1 \oplus 1^- \odot \omega_2 & \frac{\partial f_{-++}}{\partial g_{111}} = 2^+ \\ \frac{\partial f_{-+-}}{\partial g_1} = 0^- \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{-+-}}{\partial g_{20}} = 2^+ \oplus 0^+ \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{-+-}}{\partial g_{11}} = 0^- \odot \omega_1 \oplus 1^- \odot \omega_2 & \frac{\partial f_{-+-}}{\partial g_{111}} = 2^+ \\ \frac{\partial f_{+--}}{\partial g_1} = 0^+ \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{+--}}{\partial g_{20}} = 2^+ \oplus 0^- \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{+--}}{\partial g_{11}} = 0^+ \odot \omega_1 \oplus 1^+ \odot \omega_2 & \frac{\partial f_{+--}}{\partial g_{111}} = 2^+ \\ \frac{\partial f_{+- -}}{\partial g_1} = 0^- \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{+- -}}{\partial g_{20}} = 2^- \oplus 0^+ \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{+- -}}{\partial g_{11}} = 0^- \odot \omega_1 \oplus 1^+ \odot \omega_2 & \frac{\partial f_{+- -}}{\partial g_{111}} = 2^- \\ \frac{\partial f_{- - -}}{\partial g_1} = 0^- \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{- - -}}{\partial g_{20}} = 2^+ \oplus 0^+ \odot \omega_1 & \frac{\partial f_{- - -}}{\partial g_{11}} = 0^- \odot \omega_1 \oplus 1^+ \odot \omega_2 & \frac{\partial f_{- - -}}{\partial g_{111}} = 2^+ \end{array}$$

Finalmente de cualquiera de estos polinomios podríamos eliminar los tres monomios, por ejemplo derivando respecto de $g = z_1 z_2$.

IV Sea $g = 4 \oplus 2 \odot \omega_1 \oplus 3 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \oplus 1 \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 2 \odot \omega_2^2 \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$, en este caso podremos obtener hasta 64 resultados diferentes al calcular la derivada de Euler tropical respecto de algún polinomio entero.

Siguiendo con la analogía con el caso complejo es posible formular la siguiente correspondencia.

Teorema 5.12. Sean $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ con soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$ un polinomios tropical real y $F = \sum a_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio clásico tales que $f = \text{trop}_R(F)$. Dado $g = \sum c_i z^i \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio con coeficientes enteros, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \text{trop}_R \left(\frac{\partial F}{\partial g} \right).$$

Demostración. Por ser $f = \text{trop}_R(F)$ tenemos $\text{trop}_R(a_i) = \alpha_i$ para $i \in A$. Por otro lado, aplicando la definiciones de derivada de Euler tropical real y de derivada Euleriana clásica, respectivamente,

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \bigoplus_{i \in A, g(i) \neq 0} (s_0(g(i)), 0) \odot \alpha_i \odot \omega^i \quad \text{y} \quad \text{trop}_R \left(\frac{\partial F}{\partial g} \right) = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot \text{trop}_R(g(i)) \odot \omega^i.$$

Nos basta estudiar la tropicalización de $g(i)$ para dar con la igualdad entre ambas expresiones.

$$\text{trop}_R(g(i)) = \begin{cases} (s_0(g(i)), 0) & \text{si } g(i) \neq 0 \\ (0, +\infty) & \text{si } g(i) = 0 \end{cases} \quad \text{-neutro de la suma tropical real-}$$

Entonces el resultado es inmediato. ■

5.3. El teorema de caracterización real

Comenzamos estudiando la tropicalización del conjunto de polinomios con una singularidad de orden al menos k en un punto dado.

Proposición 5.13. Sea $A \subseteq \mathbb{N}^n$ un conjunto finito con d elementos y $\mathbb{K}^d$ el espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ con soporte contenido en A . Se considera

$$L_k^1 = \left\{ F \in (\mathbb{K}^*)^d \mid F \text{ tiene en } \bar{1} = (1, \dots, {}^n 1) \text{ una singularidad de orden al menos } k \right\}$$

el espacio lineal de polinomios con singularidad en P de orden al menos k . Se toma $\mathcal{G} = \{g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \mid \deg(g) < k\}$. Entonces,

$$\text{trop}(L_k^1) = \left\{ f \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n] \mid \text{Soporte}(f) = A, \bar{0} = (0, \dots, {}^n 0) \in \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial g} \right) \forall g \in \mathcal{G} \right\}.$$

Demostración. Sea $F = \sum_{i \in A} y_i x^i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_i (i \in A)]$ es un polinomio general en n variables con d coeficientes indeterminados en el cuerpo $\mathbb{K}$. Si además $F \in L_k^1$ entonces, por la *Proposición 2.21*, equivalentemente $\frac{\partial F}{\partial g}(\bar{1}) = 0$ para todo polinomio entero $g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ con $\deg(g) < k$. Con $\frac{\partial F}{\partial g}$ la derivada Euleriana nótese que $\frac{\partial F}{\partial g}(\bar{1})$ es una ecuación lineal en las variables y_i y además, toda ecuación lineal de L_k^1 es de la forma $\frac{\partial F}{\partial g}(\bar{1})$. Si tomamos la tropicalización de las derivadas Eulerianas de los polinomios F evaluados en $\bar{1}$ y empleamos el *Teorema 5.12*, entonces

$$\text{trop}_R \left(\frac{\partial F}{\partial g} \right) (P) = \text{trop}_R \left(\sum_{i \in A} g(i) y_i \bar{1}^i \right) = \bigoplus_{i \in A, g(i) \neq 0} (g(i), 0) \odot v_i \odot 0 = \frac{\partial f}{\partial g}(\bar{0}).$$

Dónde hemos considerado f un polinomio tropical real general en $n + d$ variables: $f = \bigoplus_{i \in A} v_i \odot \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n, v_i (i \in A)]$.

Y finalmente, por la *Proposición 5.9*

$$\text{trop}_R(L_k^1) = \bigcap_{g \in \mathcal{G}} \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial F}{\partial g} (x = \bar{1}) \right) = \bigcap_{g \in \mathcal{G}} \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial g} (\omega = \bar{0}) \right).$$

■

Proposición 5.14. Sea $A \subseteq \mathbb{N}^n$ un conjunto finito con d elementos y $\mathbb{K}^d$ el espacio de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ con soporte contenido en A . Si $P \in (\mathbb{K}^*)^n$ es un punto con coordenadas no nulas, se considera

$$L_k^P = \{F \in (\mathbb{K}^*)^d \mid F \text{ tiene en } P = (P_1, \dots, P_n) \text{ una singularidad de orden al menos } k\}$$

el espacio lineal de polinomios con singularidad en P de orden al menos k . Se toma $\mathcal{G} = \{g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] \mid \deg(g) < k\}$. Entonces,

$$\text{trop}(L_k^P) = \left\{ f \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n] \mid \text{Soporte}(f) = A, \text{trop}(P) = p = (p_1, \dots, p_n) \in \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) \forall g \in \mathcal{G} \right\}.$$

Demostración. Con la Proposición 5.13 y las equivalencias siguientes ya queda probado.

$$P \in \text{Sing}_k(F) \Leftrightarrow \bar{1} \in \text{Sing}_k(F(P_1x_1, \dots, P_nx_n))$$

$$(0^+, \dots, 0^+) \in \bigcap_{g \in \mathcal{G}} \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) \Leftrightarrow (p_1, \dots, p_n) \in \bigcap_{g \in \mathcal{G}} \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial f(x_1 \odot p_1, \dots, x_n \odot p_n)}{\partial g}\right)$$

■

Teorema 5.15. Sean $P \in (\mathbb{K}^*)^n$, $p \in \mathbb{RT}^n$, $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y $f \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ con F polinomio clásico y f polinomio tropical real tales que $\text{trop}_R(F) = f$ y $\text{trop}_R(P) = p$. Entonces son equivalentes

- I $P \in \text{Sing}_k(F)$
- II $\bar{1} \in \text{sing}_k(F(P_1x_1, \dots, P_nx_n))$
- III $(0^+, \dots, 0^+) \in \bigcap_{\deg(g) < k} \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)$
- IV $p \in \bigcap_{\deg(g) < k} \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial f}{\partial g}(p_1 \odot x_1, \dots, p_n \odot x_n)\right)$

Teorema 5.16. Sea $f = \bigoplus_{i \in A} \alpha_i \odot_R \omega^i \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ un polinomio tropical real de soporte $A \subseteq \mathbb{N}^n$. Entonces, para $g \in \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio en n variables con coeficientes enteros y de grado a lo sumo k se verifica

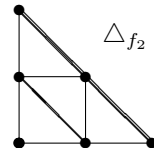
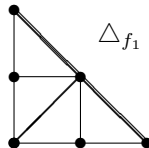
$$\text{Sing}_k^{\text{trop}_R}(f) = \bigcap_{\deg(g) < k} \bar{\mathcal{T}}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right).$$

Es decir, el conjunto de singularidades tropicales reales de orden al menos k coincide con la intersección de las hipersuperficies de todas las derivadas de Euler de grado a lo sumo $k - 1$.

Demostración. Basta tener en cuenta que dado un elemento $p \in \text{Sing}_k^{\text{trop}_R}(f)$, entonces existen $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio clásico de soporte A tal que $\text{trop}_R(F) = f$ y $P \in \text{Sing}_k(F)$ tal que $\text{trop}_R(P) = p$. Entonces aplicamos la equivalencia entre los puntos *i)* y *iv)* del Teorema 5.15. ■

Veamos algunos ejemplos de aplicación del Teorema 5.16.

Ejemplo 5.17 (Subdivisión regular que es triangulación). Suponemos dos polinomios tropicales reales, f_1 y f_2 , de grado 2 y tales que su subdivisión regular, Δ_{f_1} y Δ_{f_2} , se corresponde con la que se indica en las siguientes figuras.



Entonces podemos afirmar que f_1 y f_2 no poseen puntos singulares tropicales reales, sea cual sea la configuración de signos correspondiente. Ya que de hecho, como consecuencia del Teorema 2.31, no poseen puntos singulares tropicales complejos. Si tomamos cualesquiera 2 derivadas de Euler respecto de un polinomio de grado 1 distintas, bien de f_1 o bien de f_2 , el mínimo dejaría de alzarse en el dos monomios. Ya que dicha derivada eliminaría un punto de la subdivisión y con él las aristas adyacentes.

De hecho, es posible afirmar un resultado general. Dado f un polinomio tropical real de grado n cuya subdivisión regular es una triangulación f no posee puntos singulares tropicales reales.

Ejemplo 5.18 (Singularidad tropical real simple). Si encontramos un polinomio cuyo polígono de Newton es el de la *Figura 5.1*, entonces podremos encontrar en la curva un punto singular tropical real simple siempre y cuando existan grupos de monomios con una configuración de signos apropiada.

Por ejemplo, $f = 0^- \oplus 0^+ \odot \omega_1 \oplus 0^+ \odot \omega_2 \oplus 0^- \odot \omega_1^2 \oplus 1^- \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 1^- \odot \omega_2^2 \in \mathbb{RT}[\omega_1, \omega_2]$ tal que su polinomio tropical complejo asociado, $|f| = 0 \oplus 0 \odot \omega_1 \oplus 0 \odot \omega_2 \oplus 0 \odot \omega_1^2 \oplus 1 \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 1 \odot \omega_2^2 \in \mathbb{T}[\omega_1, \omega_2]$, se corresponde con la subdivisión de Newton de la *Figura 5.2* y su dual, es decir, la curva tropical la de la *Figura 5.3*. Entonces en la *Figura 5.4* tenemos la subdivisión de Newton de f y en *Figura 5.5* la curva tropical real. En esta última hemos empleado el *patchworking* para esbozarla.

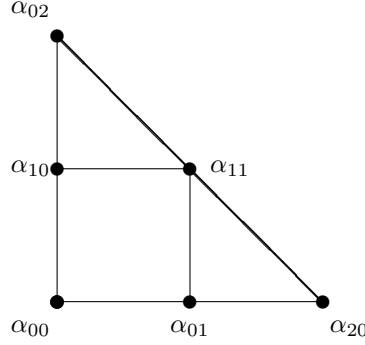


Figura 5.1: Subdivisión regular de un polinomio tropical real general de grado 2.

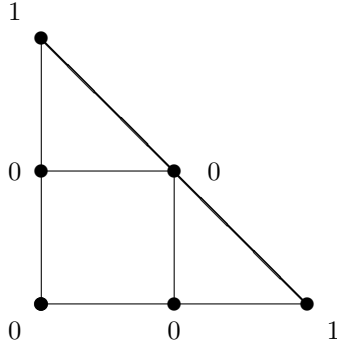


Figura 5.2: Damos la subdivisión regular la curva tropical del polinomio tropical complejo asociado: $|f|$.

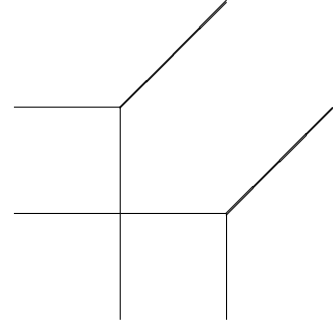


Figura 5.3: Dibujamos el polinomio tropical complejo $|f|$. Dual al polígono de Newton de la *Figura 5.2*.

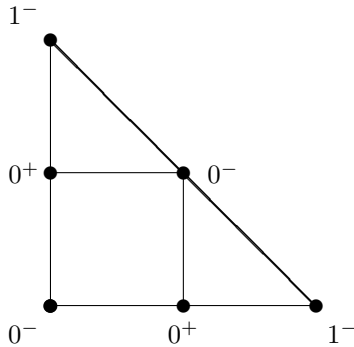


Figura 5.4: Se proporciona la subdivisión regular la curva tropical real asociada al polinomio f .

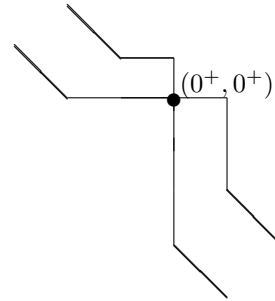


Figura 5.5: Dibujamos el polinomio tropical real f . Dual al polígono de Newton de la *Figura 5.4*.

Ejemplo 5.19. Consideramos un polinomio $f_R \in \mathbb{RT}[\omega_1, \dots, \omega_n]$ con polígono de Newton Δ_{f_R} representado en la *Figura 5.6*, que se corresponde con la expresión

$$f_R = 5^+ \oplus 0^+ \odot \omega_1 \oplus 0^- \odot \omega_2 \oplus 0^- \odot \omega_1^2 \oplus 1^- \odot \omega_1 \odot \omega_2 \oplus 0^+ \odot \omega_2^2 \oplus 0^+ \odot \omega_1^2 \odot \omega_2 \oplus 0^- \odot \omega_1 \odot \omega_2^2 \oplus 2^- \odot \omega_1^3 \oplus 1^- \odot \omega_2^3$$

Además, de la misma subdivisión se deducen los posibles polinomios clásicos, $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, de los que se ha obtenido f mediante el correspondiente proceso de tropicalización.

$$F = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}y + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{30}x_1^3 + a_{03}x_2^3.$$

$$\begin{aligned} a_{00} &= \sum_{l=5}^{\infty} b_l t^l & b_5 &> 0 \\ a_{ij} &= \sum_{l=0}^{\infty} b_l t^l & b_0 &> 0 & (i, j) \in \{(1, 0), (0, 2), (2, 1)\} \\ a_{ij} &= \sum_{l=0}^{\infty} b_l t^l & b_0 &< 0 & (i, j) \in \{(2, 0), (0, 1), (1, 2)\} \\ a_{ij} &= \sum_{l=1}^{\infty} b_l t^l & b_1 &< 0 & (i, j) \in \{(1, 1), (0, 3)\} \\ a_{30} &= \sum_{l=2}^{\infty} b_l t^l & b_2 &< 0 \end{aligned}$$

Es decir, sabemos de los coeficientes del polinomio que, siendo series de Puiseux reales, comienzan en un orden concreto del parámetro t tal que el coeficiente asociado a ese término es un número real no nulo y tiene un signo determinado.

$a_{00} = b_{00} \cdot t^5 + *_{00}$ dónde $*_{00}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{00} es positivo.

$a_{10} = b_{10} + *_{10}$ dónde $*_{10}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{10} es positivo.

$a_{01} = b_{01} + *_{01}$ dónde $*_{01}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{01} es negativo.

$a_{20} = b_{20} + *_{20}$ dónde $*_{20}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{20} es negativo.

$a_{11} = b_{11} \cdot t + *_{11}$ dónde $*_{11}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{11} es negativo.

$a_{02} = b_{02} + *_{02}$ dónde $*_{02}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{02} es positivo.

$a_{21} = b_{21} + *_{21}$ dónde $*_{21}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{21} es positivo.

$a_{12} = b_{12} + *_{12}$ dónde $*_{12}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{12} es negativo.

$a_{30} = b_{30} \cdot t^2 + *_{30}$ dónde $*_{30}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{30} es negativo.

$a_{03} = b_{03} \cdot t + *_{03}$ dónde $*_{03}$ son términos en serie de Puiseux de orden superior y b_{03} es negativo.

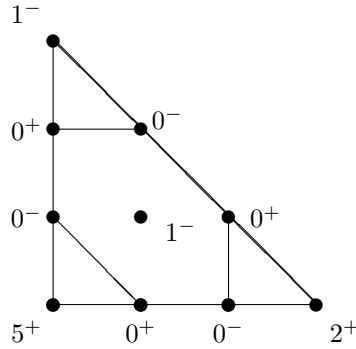


Figura 5.6: Polígono de Newton del polinomio tropical real f_R del *Ejemplo 5.19*.

Si aplicamos el *Teorema de Caracterización de puntos singulares tropicales reales de orden al menos k* podemos afirmar que el punto $(0^+, 0^+)$ posee multiplicidad. De hecho es una singularidad doble.

Tanto si realizamos derivadas monomiales, con las que se “elimina” un punto del polígono de Newton, como si realizamos derivadas de f_R respecto de cualquier polinomio de grado 2, con las que se “eliminan” hasta 2 puntos, en la subdivisión resultante aún se alcanza el mínimo en $(0, 0)$ y la configuración de signos es correcta (en el artículo [12] se encuentran las distribuciones requeridas).

Bibliografía

- [1] Alicia Dickenstein, Sandra Di Rocco, and Ragni Piene. Higher order duality and toric embeddings. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 64(1):375–400, 2014.
- [2] Alicia Dickenstein, María Isabel Herrero, and Luis Felipe Tabera. Arithmetics and combinatorics of tropical Severi varieties of univariate polynomials. *Israel J. Math.*, 221(2):741–777, 2017.
- [3] Alicia Dickenstein and Luis Tabera. Singular tropical hypersurfaces. *Discrete & Computational Geometry*, 47:430–453, 2012. 10.1007/s00454-011-9364-6.
- [4] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [5] David Gale. *The theory of linear economic models*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1960.
- [6] Andreas Gathmann. Tropical algebraic geometry. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, 108(1):3–32, 2006.
- [7] Zur Izhakian and Louis Rowen. Supertropical algebra. *Adv. Math.*, 225(4):2222–2286, 2010.
- [8] Nathan Jacobson. *Basic algebra. II*. W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1989.
- [9] Eric Katz. What is ... tropical geometry? *Notices Amer. Math. Soc.*, 64(4):380–382, 2017.
- [10] Diane Maclagan and Bernd Sturmfels. *Introduction to tropical geometry*, volume 161 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [11] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels, and Thorsten Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*, volume 377 of *Contemp. Math.*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [12] Luis Felipe Tabera. On real tropical bases and real tropical discriminants. *Collect. Math.*, 66(1):77–92, 2015.