



***Facultad  
de  
Ciencias***

# **EL TEOREMA DE KREIN-MILMAN (The Krein-Milman Theorem)**

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

Autor: Juan Cornejo García

Director: Jesús Araujo Gómez

Noviembre - 2021



## Agradecimientos

En primer lugar, quiero darle las gracias a mi director Jesús Araujo por acogerme en la realización de este trabajo, por resolverme todas y cada una de mis dudas y por presentar su entera disposición a colaborar conmigo. Más allá de un matemático brillante y un gran profesor, tantas reuniones me han servido para conocer a una buena persona, con la que he compartido un gran ambiente de trabajo y a quien siempre recordaré. No quiero olvidarme de los demás profesores que me han dado clase y han hecho que me enamore del mundo de las matemáticas, especialmente a mi tutor académico Fernando Etayo, que ha sido mi consejero estos cuatro años y se ha implicado al máximo en mi desarrollo como alumno.

En segundo lugar, quiero agradecer a mi familia por apoyarme en todas las decisiones que he tomado, por darme todo lo que tenían para que disfrutara de esta etapa de mi vida y por confiar en mí, a pesar de que a veces no haya respondido como se merecían.

Estos años en Santander no hubieran sido lo mismo sin la gente que he conocido, con los que he convivido día a día y a quienes ya considero mi segunda familia. No quiero olvidarme de ninguno y quiero que vuestros nombres aparezcan aquí: Julen, Adán, Kylian, Diego, Laso, Alicia, Patri, Zuza, Viveiro, Unai, Mikel, Asier, Ceballos, Belda, Isa, Eli. Os quiero mucho a todos y sé que de una forma u otra siempre estaréis en mi vida. Nos queda un Bracho pendiente.

Por último quería darle las gracias a Lucía, que desde que apareció en mi vida ha sido de las personas más importantes de la misma, y a quien siempre consideraré mi mayor apoyo. Nunca pensé que llegaría a tener una relación tan grande con otra persona como la que tenemos ella y yo, y solo espero que sigamos haciendo todo lo posible por que no se separen nuestros caminos.



# Resumen

Es bien sabido que cualquier polígono convexo del plano es igual a la envoltura convexa de sus vértices. El Teorema de Krein-Milman, es una generalización de este hecho para conjuntos compactos y convexos en espacios localmente convexos.

Su demostración aparece por primera vez en el artículo “On extreme points of regular convex sets”, en la revista *Studia Mathematica*, en 1940. Los autores de la prueba, y a quienes debe el teorema su nombre, son el matemático soviético Mark G. Krein (Kiev 1907 - Odessa 1989); y su alumno de doctorado David P. Milman (Vinnytsia 1912 -1982 Tel Aviv), soviético nacionalizado israelí.

En este trabajo, proporcionaremos todas las herramientas necesarias para enunciar y demostrar el Teorema de Krein-Milman. Además, proporcionaremos dos aplicaciones del teorema: probar que ciertos espacios no pueden ser espacios duales y demostrar el Teorema de Stone-Weierstrass. Este último es uno de los teoremas fundamentales del análisis funcional, y una consecuencia directa es que cualquier función continua puede ser aproximada mediante polinomios.

Palabras clave: espacio localmente convexo, punto extremo, envoltura convexa

# Abstract

It is well known that every convex polygon in the plane is equal to the convex hull of its vertices. The Krein-Milman Theorem generalizes this fact to every arbitrary compact and convex set in a locally convex space.

The first proof of this theorem was published in the article “In extreme points of regular convex sets”, in the journal *Studia Mathematica*, 1940. The theorem owes its name to the Soviet mathematician Mark G. Krein (Kiev 1907 - Odessa 1989) and David P. Milman (Vinnytsia 1912 -1982 Tel Aviv), a Soviet and later Israeli mathematician who was Mark’s doctoral student.

In this project, we are going to give all the necessary statements in order to state and prove the Krein-Milman Theorem. Furthermore, we will provide two applications of the theorem: to prove that certain spaces cannot be a dual space and to prove the Stone-Weierstrass Theorem. The latter is one of the most fundamental theorems in functional analysis, and it is an easy way to prove that a continuous function can be approached by a sequence of polynomials.

Keywords: locally convex space, extreme point, convex hull.



# Índice

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 1. Espacios localmente convexos              | 1  |
| 2. Puntos extremos y conjuntos extremales    | 5  |
| 3. Teorema de Hahn-Banach: forma geométrica  | 19 |
| 4. El Teorema de Krein-Milman y aplicaciones | 31 |





Salvo que se indique expresamente lo contrario o se deduzca del texto, en todo lo que sigue consideraremos todos los espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$ , donde por  $\mathbb{K}$  se denota indistintamente  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

## 1. Espacios localmente convexos

**Definición 1.1** *Un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  se dice **espacio vectorial topológico** si existe una topología Hausdorff  $\tau$  en  $V$  tal que las siguientes aplicaciones son continuas con respecto a la topología  $\tau$ :*

i)

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (a, b) &\longrightarrow a + b, \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, b) &\longrightarrow \alpha \cdot b \end{aligned}$$

**Definición 1.2** *Un **espacio localmente convexo** es un espacio vectorial topológico  $E$  tal que todo punto  $x \in E$  tiene una base de entornos abiertos convexos.*

**Definición 1.3** *Sea  $V$  un espacio vectorial. Una **seminorma** es una aplicación  $p : V \longrightarrow [0, \infty)$  que satisface*

i)  $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{K}, x \in V$ ,

ii)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  para todo  $x, y \in V$ .

*Si la aplicación satisface también*

iii)  $p(x) = 0$  si y solo si  $x = 0$

*entonces se dice que  $p$  es una **norma**.*

**Observación 1.1** *Sea  $p$  una seminorma. Entonces  $p(0) = 0$ .*

*Basta tener en cuenta que  $0 \in \mathbb{K}$ , luego  $p(0) = p(0 \cdot 0) = |0|p(0) = 0$ .*

Recordemos que un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial en el que se define una norma.

Si queda clara la norma usada escribiremos  $X$  en lugar de  $(X, \|\cdot\|)$ .

**Observación 1.2** *Todo espacio normado es localmente convexo.*

Para verlo, basta tener en cuenta que cada punto del espacio normado admite una base de entornos consistente en bolas abiertas, y que cada una de estas bolas es un conjunto convexo.

Dada una familia de seminormas definidas en un espacio vectorial  $V$ , el objetivo es definir una topología Hausdorff sobre  $V$  determinada por dicha familia.

**Definición 1.4** Sea  $P$  una familia de seminormas definidas sobre un espacio vectorial  $V$ . Para cada  $x \in V$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ , definimos

$$U(x; \epsilon; p_1, p_2, \dots, p_n) := \{y \in V : p_k(y - x) < \epsilon; k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Además, para cada  $x \in V$  definimos

$$U_P(x) := \{U(x; \epsilon; p_1, p_2, \dots, p_n) : \epsilon > 0; n \in \mathbb{N}; p_1, p_2, \dots, p_n \in P\}.$$

En lo siguiente, denotaremos  $U_P = \bigcup_{x \in V} U_P(x)$ .

**Proposición 1.1** Sea  $P = \{p_\alpha : \alpha \in A\}$  una familia de seminormas definidas sobre un espacio vectorial  $V$ . Si  $p(x) = 0$  para todo  $p \in P$  implica  $x = 0$ , entonces  $U_P$  es base para una topología Hausdorff en  $V$ .

Demostración.

Ver que  $U_P$  es base para una topología en  $V$  es una comprobación directa. Veamos que la topología que define es Hausdorff.

Sean  $x, y \in V$ ,  $x \neq y$ , entonces sabemos que existe un  $p \in P$  tal que  $p(x - y) > 0$ . Por tanto, tomando  $\epsilon = p(x - y)/3$  podemos considerar  $U(x; \epsilon; p)$  y  $U(y; \epsilon; p)$ , que son abiertos disjuntos de la base y contienen a los puntos  $x$  e  $y$  respectivamente, luego la base define una topología Hausdorff en  $V$ .  $\square$

**Observación 1.3** Del mismo modo que en Observación 1.2 se ve que cada bola abierta es un conjunto convexo, se puede probar también que cada elemento de  $U_P$  (ver Definición 1.4) lo es. Se tiene incluso que una familia de seminormas  $P = \{p_\alpha : \alpha \in A\}$  sobre un espacio vectorial definen un espacio localmente convexo cuando  $p(x) = 0$  para todo  $p \in P$  implica  $x = 0$ .

Una vez visto cómo construir espacios localmente convexos, pasamos a dar una serie de ejemplos de los mismos.

**Ejemplo 1.1** El espacio  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  con la familia de seminormas  $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ , donde:

$$\begin{aligned} p_i : \quad \mathbb{K}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_n) &\longrightarrow |x_i| \end{aligned}$$

es un espacio localmente convexo.

Recordemos que un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  se dice de Banach si es completo. Es decir, un espacio vectorial normado es de Banach si toda sucesión de Cauchy en  $X$  es convergente.

**Ejemplo 1.2** Sea  $T$  un espacio topológico Hausdorff, denotamos  $C(T)$ ,  $C_0(T)$  y  $C_c(T)$ , a las funciones continuas de  $T$  en  $\mathbb{K}$ , tales que son acotadas, tienden a 0 en infinito, o tienen un soporte compacto, respectivamente.

Que una función  $f$  tienda a 0 en infinito quiere decir que, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $K \subset T$  compacto tal que  $|f(t)| < \epsilon$  para todo  $t \in T \setminus K$

Para cada función perteneciente a alguno de estos espacios, podemos definir

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in T} |f(t)|.$$

Entonces  $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$  y  $(C_0(T), \|\cdot\|_\infty)$  son espacios de Banach.  $(C_c(T), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio normado y es de Banach si  $T$  es compacto. En ese caso  $C(T) = C_0(T) = C_c(T)$ .

Si  $T$  no es compacto, podemos denotar  $C'(T)$  al conjunto de las funciones continuas de  $T$  en  $\mathbb{K}$ . En general, en ese caso,  $\|\cdot\|_\infty$  no define una norma en  $C'(T)$ , pero para cada conjunto  $K \subset T$  compacto podemos definir la siguiente seminorma

$$p_K(f) := \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

Entonces  $(C'(T), P)$  es un espacio localmente convexo, donde  $P = \{p_K : K \subset T, K \text{ compacto}\}$

**Ejemplo 1.3** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ , y sea  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Denotamos por  $C^n([a, b])$  al conjunto de las funciones  $n$  veces derivables del intervalo  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ . Definimos

$$\|f\|_n := \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_\infty,$$

donde  $f^{(k)}$  es la  $k$ -ésima derivada de  $f$  y  $\|\cdot\|_\infty$  es la norma definida en el ejemplo anterior. Entonces  $(C^n([a, b]), \|\cdot\|_n)$  es un espacio de Banach.

Podemos observar que  $C^\infty([a, b]) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n([a, b])$ , donde  $C^\infty([a, b])$  denota al conjunto de las funciones infinitamente diferenciables de  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ . Ahora, para cada  $f \in C^\infty([a, b])$  definimos

$$p_n(f) := \|f\|_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces  $(C^\infty([a, b]), P)$  es un espacio localmente convexo, donde  $P = \{p_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

Recordemos que una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice entera si es holomorfa en todo el plano complejo. Esto quiere decir que, para cada  $z \in \mathbb{C}$ , existe un entorno  $U$  del punto tal que  $f$  es diferenciable en dicho entorno.

**Ejemplo 1.4** Sea  $E(\mathbb{C})$  el conjunto de todas las funciones enteras. Para cada subconjunto  $K \subset \mathbb{C}$  compacto definimos

$$p_K = \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

Si  $P = \{p_K : K \subset \mathbb{C}, K \text{ compacto}\}$ . Entonces  $(E(\mathbb{C}), P)$  es un espacio localmente convexo.

A continuación, introduciremos los conceptos de topología débil y topología \*-débil en un espacio localmente convexo  $E$ . Dichos conceptos nos serán de utilidad para dar una aplicación al teorema de Krein-Milman. Antes, para mayor comodidad, presentamos la notación

$$\langle x, f \rangle$$

para referirnos a  $f(x)$ , donde  $x \in E$  y  $f \in E^*$ . También emplearemos  $\langle f, x \rangle$  para referirnos a  $f(x)$ . De esta forma, tenemos que

$$f(x) = \langle x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

**Definición 1.5** Sea  $E$  un espacio localmente convexo. Llamamos **topología débil** en  $E$  a la topología generada por la familia de seminormas  $\{p_f : f \in E^*\}$ , donde

$$p_f(x) = |\langle x, f \rangle|.$$

De forma similar, llamamos **topología \*-débil** en  $E^*$  a la topología generada por las seminormas  $\{p_x : x \in E\}$ , donde

$$p_x(f) = |\langle f, x \rangle|.$$

De esta forma, un conjunto  $U \subset E$  se dice débilmente abierto si para todo  $x_0 \in U$  existen funcionales  $f_1, f_2, \dots, f_n \in E^*$ , y un escalar  $\epsilon > 0$  tales que

$$\bigcap_{k=1}^n \{x \in E : |\langle x - x_0, f_k \rangle| < \epsilon\} \subseteq U.$$

Los conjuntos \*-débilmente abiertos se definen de forma paralela.

## 2. Puntos extremos y conjuntos extremales

**Definición 2.1** Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $C \subset V$  un conjunto convexo. Un punto  $x \in C$  se llama **punto extremo** de  $C$  si siempre que  $x = ax_1 + (1-a)x_2$ , con  $x_1, x_2 \in C$  y  $0 < a < 1$ , se tiene que  $x = x_1 = x_2$ .

En otras palabras, un punto  $x \in C$  se dice extremo si no existe ningún segmento de recta en  $C$  que contenga a  $x$  en su interior relativo; o equivalentemente, si  $x$  no puede escribirse como  $x = ax_1 + (1-a)x_2$ , con  $x_1, x_2 \in C$  y  $0 < a < 1$ .

Dado un conjunto convexo  $C$  denotamos por  $\text{ext}(C)$  al conjunto formado por sus puntos extremos.

Es fácil ver que  $\text{ext}(C)$  puede ser vacío. Por ejemplo, considerando en  $\mathbb{R}^2$  el conjunto convexo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ , entonces claramente  $\text{ext}(C) = \emptyset$ .

Esto se debe a que, al ser  $C$  un conjunto abierto, para cada punto  $x \in C$  podemos encontrar una bola abierta  $B(x, \epsilon) \subset C$ , luego existirá un segmento contenido en la bola que tenga a  $x$  en su interior. De este modo, vemos que  $x$  no puede ser un punto extremo.

De lo anterior deducimos que, en un espacio normado en general, ningún conjunto  $C$  convexo y abierto puede tener puntos extremos, es decir, razonando de la misma forma que antes, para cada  $x \in C$ , existe una bola abierta  $B(x, \epsilon) \subset C$ , luego podemos encontrar un segmento contenido en la bola que contenga a  $x$  en su interior relativo. Por lo tanto, ningún  $x \in C$  será un punto extremo. Además, por el mismo razonamiento, podemos deducir que si  $C$  es un conjunto convexo, dado un punto  $x \in \text{int}(C)$ , entonces  $x \notin \text{ext}(C)$ .

Veamos ahora que los puntos extremos del disco unidad conforman la circunferencia unidad

**Ejemplo 2.1** Sea el conjunto convexo  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ . Entonces  $\text{ext}(C) = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

Por lo visto anteriormente, sabemos que  $\text{ext}(C) \subset \mathbb{S}^1$ . Veamos que se tiene también la otra inclusión. Supongamos que  $x \in \mathbb{S}^1$  y  $x \notin \text{ext}(C)$ . Entonces existe un segmento  $S \subset C$  tal que  $x$  está en el interior relativo de  $S$ . Como  $S$  y  $\mathbb{S}^1$  son tangentes en  $x$ ,  $x$  está en el interior relativo de  $S$ , entonces  $S \cap C = \{x\}$ , luego la única posibilidad es que  $S = \{x\}$ , por lo que llegamos a un absurdo.

Por lo tanto, se tiene que  $\text{ext}(C) = \mathbb{S}^1$ .

Veamos ahora que los puntos extremos de un conjunto  $C$  se preservan por aplicaciones lineales inyectivas.

**Proposición 2.1** Sean  $X, Y$  espacios vectoriales y sea  $F : X \rightarrow Y$  una aplicación lineal inyectiva. Sea  $C \subset X$  un conjunto convexo y sea  $x \in \text{ext}(C)$ . Entonces  $F(x) \in \text{ext}(F(C))$ .

Demostración

Sea  $x \in \text{ext}(C)$ . Supongamos que existen  $y_1, y_2 \in F(C)$ , y  $0 < a < 1$  tal que  $F(x) = ay_1 + (1-a)y_2$ . Sean  $x_1, x_2 \in C$  tal que  $F(x_1) = y_1$  y  $F(x_2) = y_2$ . Entonces, al ser  $F$  una aplicación lineal, tenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= ay_1 + (1-a)y_2 \\ &= aF(x_1) + (1-a)F(x_2) \\ &= F(ax_1) + F((1-a)x_2) \\ &= F(ax_1 + (1-a)x_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $F$  es inyectiva, tenemos  $x = ax_1 + (1-a)x_2$ , y al ser  $x$  un punto extremo de  $C$ , se obtiene  $x = x_1 = x_2$ .

Por lo tanto,  $F(x) = F(x_1) = y_1 = F(x_2) = y_2$ , luego concluimos que  $F(x) \in \text{ext}(F(C))$ .  $\square$

Notamos que la condición de que  $F$  sea inyectiva es necesaria. Por ejemplo, tomando

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x \end{aligned}$$

y  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , sabemos que  $\text{ext}(C) = \mathbb{S}^1$ . Sin embargo, tenemos que  $(0, 1) \in \text{ext}(C)$ , pero  $F((0, 1)) = 0 \notin \text{ext}(F(C))$ , ya que al ser  $F(C) = [-1, 1]$ , se sigue que  $\text{ext}(F(C)) = \{-1, 1\}$ .

**Ejemplo 2.2** Sea el espacio de Banach  $(M(X), \|\cdot\|)$ , donde  $M(X)$  es el espacio formado por todas las medidas complejas, regulares y de Borel en el espacio localmente compacto y Hausdorff  $X$ ; y, para cada  $\mu \in M(X)$ ,

$$\|\mu\| = |\mu|(X) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(A_k)| : (A_k) \text{ es partición de } X \text{ por conjuntos de Borel} \right\}.$$

Entonces, si

$$B_{M(X)} = \{\mu \in M(X) : \|\mu\| \leq 1\},$$

se tiene que  $\text{ext}(B_{M(X)}) = \{\alpha\delta_x : x \in X, \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\}$ .

Pasamos ahora a introducir un resultado sobre puntos extremos cuando estamos trabajando en el espacio de funciones  $L_p(\mathbb{R})$ .

Recordemos que el espacio de funciones  $L_p(\mathbb{R})$ , donde  $1 \leq p < \infty$  es el conjunto formado por las clases de funciones medibles  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\|f\|_p < \infty$ , donde

$$\|f\|_p := \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

**Lema 2.1** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto con medida de Lebesgue positiva. Entonces existen subconjuntos disjuntos  $A_1, A_2$  de forma que  $A_1 \cup A_2 = A$  y cada uno de ellos tiene medida de Lebesgue positiva.

Demostración

Llamemos  $\lambda = m(A)$ , donde  $m$  denota a la medida de Lebesgue.

Podemos escribir  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ , donde  $I_l \cap I_m = \emptyset$  si  $l \neq m$  y  $m(I_n) = \frac{\lambda}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$

(por ejemplo, tomando cada  $I_n$  una traslación del intervalo  $[0, \frac{\lambda}{2})$ ). Entonces tenemos

que  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (I_n \cap A)$ , luego podemos escribir  $A$  como unión de conjuntos medibles

disjuntos dos a dos. Por lo tanto se tiene que  $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n \cap A) = \lambda$ . Ahora,

como  $m(I_n \cap A) \leq \frac{\lambda}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existen al menos dos conjuntos  $I_l, I_m$ , tales que  $m(I_k \cap A) > 0$ ,  $k = l, m$ .

Por lo tanto, tomando  $A_1 = I_m \cap A$  y  $A_2 = (\mathbb{R} \setminus I_m) \cap A$ , tenemos que  $A_1$  y  $A_2$  son subconjuntos disjuntos de  $A$  tales que  $A_1 \cup A_2 = A$  y  $m(A_k) > 0$ ,  $k = 1, 2$ , como queríamos probar.  $\square$

**Lema 2.2** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos números reales no negativos y sea  $0 < \lambda < 1$ . Entonces  $\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta$ , y se tiene la igualdad únicamente cuando  $\alpha = \beta$ .

Demostración

Si  $\alpha = 0$  o  $\beta = 0$ , entonces el resultado es trivial.

Consideremos ahora la función  $\varphi$ , definida para todo número real  $t$  no negativo de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda.$$

Derivando obtenemos

$$\varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1}).$$

Ahora, como  $\lambda - 1 < 0$ , tenemos que  $\varphi'(t) < 0$  si  $t < 1$  y  $\varphi'(t) > 0$  si  $t > 1$ , luego existe un mínimo global en  $t = 1$ . Por lo tanto tenemos que  $\varphi(t) \geq \varphi(1) = 0$ , para todo  $t \geq 0$ . Con ello, obtenemos

$$(1 - \lambda) + \lambda t \geq t^\lambda,$$

dándose la igualdad precisamente cuando  $t = 1$ . Tomando ahora  $t = \frac{\alpha}{\beta}$ , se sigue que

$$\frac{\alpha^\lambda}{\beta^\lambda} \leq (1 - \lambda) + \lambda \frac{\alpha}{\beta},$$

y multiplicando por  $\beta$  a ambos lados se sigue que

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta,$$

donde se da la igualdad cuando  $\alpha = \beta$ , como queríamos probar.  $\square$

A continuación, pasamos a introducir un resultado bien conocido para espacios de funciones como es la desigualdad de Hölder, de donde nos interesa principalmente el punto donde se obtiene la igualdad.

**Teorema 2.1** (*Desigualdad de Hölder*): Sean  $1 \leq p, q \leq \infty$  números reales tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y sean  $f \in L_p(\mathbb{R})$ ,  $g \in L_q(\mathbb{R})$ . Entonces  $fg \in L_1(\mathbb{R})$  y

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Además, se da la igualdad si y solo si existen constantes  $\alpha, \beta \neq 0$ , de modo que  $\alpha|f(t)|^p = \beta|g(t)|^q$  para casi todo punto  $t$ .

Demostración

Si  $\|f\|_p = 0$  o  $\|g\|_q = 0$ , entonces la desigualdad es trivial.

Supongamos  $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$ . Comencemos en primer lugar con el caso  $p = 1$ ,  $q = \infty$ . Sea  $C = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| dt \leq \int_{\mathbb{R}} C|f(t)| dt = C \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|g\|_{\infty} \|f\|_1.$$

Supongamos ahora que  $1 < p < \infty$ , luego se tiene también que  $1 < q < \infty$ . Supongamos que  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ . Entonces, aplicando Lema 2.2 para  $\alpha = |f(t)|^p$ ,  $\beta = |g(t)|^q$ ,  $\lambda = \frac{1}{p}$ ,  $1 - \lambda = \frac{1}{q}$ , obtenemos que

$$|f(t)||g(t)| = |f(t)g(t)| \leq \lambda|f(t)|^p + (1 - \lambda)|g(t)|^q,$$

e integrando a ambas partes y teniendo en cuenta que  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$  se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| dt \leq \lambda \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt + (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q dt = 1.$$

Además, por Lema 2.2 sabemos que se da la igualdad si y solo si  $|f(t)|^p = |g(t)|^q$  en casi todo punto  $t$ .

Para el caso general basta considerar las funciones  $\frac{f}{\|f\|_p}$  y  $\frac{g}{\|g\|_q}$ , que tienen norma 1, y aplicar el resultado anterior, de donde obtenemos

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \frac{|g(t)|}{\|g\|_q} dt \leq 1,$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$



En este caso, concluimos que la igualdad se da si y solo si

$$(\|g\|_q)^q |f(t)|^p = (\|f\|_p)^p |g(t)|^q$$

para casi todo punto  $t$ .

Tenemos además que  $f \in L_p(\mathbb{R})$  y  $g \in L_q(\mathbb{R})$ , luego

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty,$$

luego  $fg \in L_1(\mathbb{R})$ , concluyendo la demostración.  $\square$

**Lema 2.3** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  tales que  $|z + w| = |z| + |w|$ . Entonces  $w\bar{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Demostración

Si  $z = 0$  o  $w = 0$ , entonces trivialmente obtenemos  $w\bar{z} = 0$ .

En otro caso, como se tiene el punto de la igualdad en la desigualdad triangular para números complejos, necesariamente tenemos que  $w = az$ , con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .

Concluimos entonces que

$$w\bar{z} = az\bar{z} = a|z|^2 > 0,$$

por ser producto de reales positivos. Por tanto  $w\bar{z} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .  $\square$

Una vez tenemos todos los resultados necesarios, vamos a introducir una proposición para ver que los puntos extremos de las bolas unidad cerradas en los espacios de funciones  $L_p(\mathbb{R})$  son la circunferencia unidad si  $p \neq 1$  y el conjunto vacío si  $p = 1$ .

**Proposición 2.2** Para cada  $p$ , con  $1 \leq p < \infty$ , consideramos en  $L_p(\mathbb{R})$  el conjunto convexo  $B_1^p = \{f \in L_p(\mathbb{R}) : \|f\|_p \leq 1\}$ . Entonces  $\text{ext}(B_1^1) = \emptyset$  y  $\text{ext}(B_1^p) = \{f \in L_p(\mathbb{R}) : \|f\|_p = 1\}$ , con  $1 < p < \infty$ .

Demostración

Claramente los conjuntos  $B_1^p$ ,  $1 \leq p < \infty$  son convexos y cerrados, ya que se trata de las bolas unidad cerradas.

Veamos en primer lugar que, para todo  $1 \leq p < \infty$

$$\text{ext}(B_1^p) \subset \{f \in L_p(\mathbb{R}) : \|f\|_p = 1\}.$$

Por una parte, la función constantemente nula no puede ser un punto extremo: para ello, basta considerar una función cualquiera  $g \in B_1^p$  no nula, y así podemos escribir la función  $f \equiv 0$  como

$$0 = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}(-g).$$

Pasamos ahora a estudiar los puntos de la bola abierta distintos de la función nula. Sea  $f \in B_1^p$  tal que  $0 < \|f\|_p < 1$ . Entonces podemos escribir  $f$  como

$$f = \frac{1}{2}[(2 - \|f\|_p)f] + \frac{1}{2}(\|f\|_p f),$$

lo que muestra que  $f$  no es un punto extremo de  $B_1^p$ , ya que podemos expresar  $f$  como suma de dos funciones pertenecientes al conjunto  $B_1^p$  multiplicadas por escalares entre 0 y 1.

Estudiamos en segundo lugar el caso de los puntos de la circunferencia unidad.

CASO 1: Supongamos que  $p = 1$  y  $\|f\|_1 = 1$ . Fijamos ahora un representante  $f$  de su clase de equivalencia. Sea  $A \subset \mathbb{R}$  el conjunto formado por los puntos donde  $f$  no se anula. Entonces, por Lema 2.1 sabemos que existen  $A_1, A_2$  subconjuntos disjuntos de  $A$  con medida positiva y tales que  $A = A_1 \cup A_2$ . A continuación, definimos

$$f_1 := \frac{f\chi_{A_1}}{\|f\chi_{A_1}\|_1} \text{ y } f_2 := \frac{f\chi_{A_2}}{\|f\chi_{A_2}\|_1},$$

donde  $\chi_{A_k}$  es la función característica de  $A_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Tenemos entonces que  $f \neq f_k$ ,  $\|f_k\|_1 = 1$ ,  $k = 1, 2$ , y

$$\|f\chi_{A_1}\|_1 f_1 + \|f\chi_{A_2}\|_1 f_2 = f\chi_{A_1} + f\chi_{A_2} = f\chi_A = f.$$

Además, como  $A = A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , obtenemos que

$$\|f\chi_{A_1}\|_1 + \|f\chi_{A_2}\|_1 = \int_{A_1} |f(t)|dt + \int_{A_2} |f(t)|dt = \int_A |f(t)|dt = 1,$$

por lo que  $\|f\chi_{A_1}\|_1$  y  $\|f\chi_{A_2}\|_1$  son escalares entre 0 y 1 que suman 1.

Por lo tanto tenemos que  $f$  no es un punto extremo de  $B_1^1$ . Concluimos que  $\text{ext}(B_1^1) = \emptyset$ .

CASO 2: A continuación, sea  $1 < p < \infty$ , y sea  $f \in L_p(\mathbb{R})$  con  $\|f\|_p = 1$ . Supongamos que existen  $f_1, f_2 \in B_1^p$ ,  $0 < a < 1$ , tales que  $f = af_1 + (1-a)f_2$ .

Como  $\|f\|_p = 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \|f\|_p = \|af_1 + (1-a)f_2\|_p \\ &\leq \|af_1\|_p + \|(1-a)f_2\|_p \\ &= a\|f_1\|_p + (1-a)\|f_2\|_p \\ &\leq a + 1 - a \\ &= 1, \end{aligned}$$

luego  $\|af_1 + (1-a)f_2\|_p = \|af_1\|_p + \|(1-a)f_2\|_p$  y además se sigue que  $\|f_k\|_p = 1$ ,  $k = 1, 2$ .

Notemos que, considerando las funciones  $g \in L_p(\mathbb{R})$  y  $h \in L_q(\mathbb{R})$ ,  $1 < p, q < \infty$ , tales que  $1/p + 1/q = 1$ , entonces, por Teorema 2.1 (desigualdad de Hölder) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)h(t)|dt = \|g\|_p \|h\|_q$$

si y solo si  $(\|h\|_q)^q |g(t)|^p = (\|g\|_p)^p |h(t)|^q$  para casi todo punto  $t$ .

Además, por la prueba de la desigualdad triangular en espacios de funciones  $L_p(\mathbb{R})$  (desigualdad de Minkowski), sabemos que si tenemos dos funciones  $g', h' \in L_p(\mathbb{R})$  tales que  $\|g' + h'\|_p = \|g'\|_p + \|h'\|_p$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |g' + h'|^{p-1} |g'| = \|g'\|_p + \|(|g' + h'|^{p-1})\|_q,$$

donde  $1/p + 1/q = 1$  (Véase [14, II.2.4 Corolario]). Comprobamos a continuación que  $(g' + h')^{p-1} \in L_q(\mathbb{R})$ . Como  $p = q(p-1)$ , en efecto

$$\left( \int_{\mathbb{R}} |g' + h'|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \int_{\mathbb{R}} |g' + h'|^p \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

ya que  $g' + h' \in L_p(\mathbb{R})$ . Por lo tanto  $\|(g' + h')^{p-1}\|_q = (\|g' + h'\|_p)^{p/q}$ .

En nuestro caso particular, previamente hemos visto que  $\|f\|_p = \|af_1 + (1-a)f_2\|_p = \|af_1\|_p + \|(1-a)f_2\|_p$ , luego si tomamos  $g'(t) = af_1(t)$  y  $h'(t) = (1-a)f_2(t)$  como en el párrafo anterior obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |af_1 + (1-a)f_2|^{p-1} |af_1| = \|af_1\|_p + \|(af_1 + (1-a)f_2)^{p-1}\|_q,$$

donde notamos que se obtiene la igualdad en Hölder. Por lo tanto tenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} (\|(af_1 + (1-a)f_2)^{p-1}\|_q)^q |af_1(t)|^p &= (\|af_1\|_p)^p |(af_1(t) + (1-a)f_2(t))^{p-1}|^q \\ (\|af_1 + (1-a)f_2\|_p)^{pq/q} |af_1(t)|^p &= (\|af_1\|_p)^p |(af_1(t) + (1-a)f_2(t))|^{pq-q} \\ (\|af_1 + (1-a)f_2\|_p)^p |af_1(t)|^p &= (\|af_1\|_p)^p |(af_1(t) + (1-a)f_2(t))|^p \end{aligned}$$

para casi todo punto  $t$ . Es decir, como  $\|f\|_p = 1 = \|f_1\|_p$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (\|f\|_p)^p |af_1(t)|^p &= (a\|f_1\|_p)^p |f(t)|^p \\ a^p |f_1(t)|^p &= a^p (\|f_1\|_p)^p |f(t)|^p \\ a^p |f_1(t)|^p &= a^p |f(t)|^p \end{aligned}$$

para casi todo punto  $t$ , luego  $|f_1(t)| = |f(t)|$  para casi todo punto  $t$ .

De forma similar, obtenemos que  $|f_2(t)| = |f(t)|$  para casi todo punto  $t$ .

Una vez comprobado que las funciones coinciden en módulo para casi todo punto, pasamos ahora a ver que en realidad se tiene  $f(t) = f_1(t) = f_2(t)$  para casi todo punto  $t$ . Como  $f = af_1 + (1-a)f_2$ , tenemos que para casi todo punto  $t$

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |af_1(t) + (1-a)f_2(t)| \\ &\leq |af_1(t)| + |(1-a)f_2(t)| \\ &= a|f_1(t)| + (1-a)|f_2(t)| \\ &= |f(t)|, \end{aligned}$$

por lo que  $|af_1(t) + (1-a)f_2(t)| = |af_1(t)| + |(1-a)f_2(t)|$  para casi todo punto  $t$ . Como  $af_1(t)$  y  $(1-a)f_2(t)$  son números complejos, entonces aplicando Lema 2.3 concluimos que  $f_1(t)\overline{f_2(t)} \geq 0$ . Teniendo en cuenta que  $|f_1(t)| = |f(t)| = |f_2(t)|$  para casi todo punto  $t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} |f_1(t) - f_2(t)|^2 &= |f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2 - f_1(t)\overline{f_2(t)} - \overline{f_1(t)}f_2(t) \\ &= |f(t)|^2 + |f(t)|^2 - 2\operatorname{Re}(f_1(t)\overline{f_2(t)}) = 2|f(t)|^2 - |f_1(t)\overline{f_2(t)}| \\ &= 2|f(t)|^2 - 2|f(t)|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que  $f_1(t) = f_2(t)$  para casi todo punto  $t$ , luego concluimos que  $f = f_1 = f_2$ .

Se obtiene entonces que  $f \in \operatorname{ext}(B_1^p)$  y que

$$\operatorname{ext}(B_1^p) = \{f \in L_p(\mathbb{R}) : \|f\|_p = 1\}.$$

□

Como hemos podido comprobar en esta proposición, los puntos extremos de la bola unidad en los espacios  $L_p(\mathbb{R})$  constituyen la esfera unidad, si  $1 < p < \infty$ , y el conjunto vacío cuando  $p = 1$ . Pasamos ahora a generalizar este resultado, para lo que necesitamos introducir el concepto de espacio estrictamente convexo.

**Definición 2.2** *Un espacio normado  $X$  se dice **estrictamente convexo** si para cada par de puntos  $x_1, x_2 \in S_X$ ,  $x_1 \neq x_2$ , y  $0 < a < 1$ , se tiene que  $\|ax_1 + (1-a)x_2\| < 1$ .*

Geométricamente, se dice que un espacio normado  $X$  es estrictamente convexo cuando su esfera unidad no contiene segmentos triviales. Es decir, si  $x_1, x_2 \in S_X$ , entonces el segmento abierto de extremos  $x_1$  y  $x_2$   $\{ax_1 + (1-a)x_2 : 0 < a < 1\}$  está contenido en  $\operatorname{int}(B_X)$ .

A continuación, pasamos a ver diferentes caracterizaciones de los espacios estrictamente convexos, que nos serán de utilidad para proporcionar diferentes ejemplos de los mismos.

**Teorema 2.2** *Sea  $X$  un espacio normado. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) *Dados  $x, y \in S_X$  tales que  $\|x + y\| = 2$ , entonces  $x = y$ .*
- ii) *Dados  $x, y \in X$ , con  $x \neq 0$ , tales que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , entonces existe un escalar  $t > 0$  tal que  $y = tx$ .*
- iii) *El espacio  $X$  es estrictamente convexo.*
- iv) *Dados  $x, y \in S_X$  con  $x \neq y$ , entonces  $\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1$ .*

### Demostración

$i) \Rightarrow ii)$  Notemos que el caso  $y = 0$  es trivial.

Sean entonces  $x, y \in X \setminus \{0\}$  tales que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . Entonces, como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, existe un funcional  $f \in X^*$ , con  $\|f\| = 1$  y tal que

$$f(x + y) = \|x + y\|.$$

Pero ahora, como

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| = \|x\| \text{ y } |f(y)| \leq \|f\|\|y\| = \|y\|,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= f(x + y) \\ &= |f(x + y)| \\ &\leq |f(x)| + |f(y)| \\ &\leq \|x\| + \|y\| \\ &= \|x + y\|, \end{aligned}$$

por lo que  $f(x) = \|x\|$  y  $f(y) = \|y\|$  y, como  $x, y \neq 0$ , obtenemos

$$f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 1 = f\left(\frac{y}{\|y\|}\right).$$

Por lo tanto, se tiene que  $\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \in S_X$ , y además

$$\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = 2,$$

luego, por  $i)$ , se tiene que  $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$ . Por tanto, tomando  $t = \frac{\|y\|}{\|x\|}$ , concluimos que  $y = \frac{\|y\|}{\|x\|}x = tx$ .

$ii) \Rightarrow iii)$  Por el contrario, suponemos que existen  $x, y \in S_X$  con  $x \neq y$ , y un escalar  $0 < a < 1$  tales que

$$\|ax + (1 - a)y\| = 1.$$

Se tiene entonces que  $ax \neq 0$  y

$$\begin{aligned}
 1 &= \|ax + (1-a)y\| \\
 &\leq \|ax\| + \|(1-a)y\| \\
 &= a\|x\| + (1-a)\|y\| \\
 &= a + 1 - a \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

luego  $\|ax + (1-a)y\| = \|ax\| + \|(1-a)y\|$ , y por hipótesis, existe un escalar  $t > 0$  tal que

$$ax = t(1-a)y.$$

Pero como  $\|x\| = 1 = \|y\|$ , obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \|ax\| &= \|t(1-a)y\| \\
 a\|x\| &= t(1-a)\|y\| \\
 a &= t(1-a),
 \end{aligned}$$

luego  $x = y$ , lo que nos lleva a una contradicción.

iii)  $\Rightarrow$  iv) Trivial tomando  $a = \frac{1}{2}$ .

iv)  $\Rightarrow$  i) Inmediato. □

**Proposición 2.3** *Un espacio normado  $X$  es estrictamente convexo si y solo si todos sus subespacios 2-dimensionales son estrictamente convexos.*

Demostración

Demostremos el resultado por doble implicación.

“ $\Rightarrow$ ” Supongamos que  $X$  es estrictamente convexo. Sea  $A \subset X$  un subespacio de dimensión dos. Sean  $x, y \in A$  tales que  $\|x\| = 1 = \|y\|$ . Como  $A$  es subespacio, se tiene que  $ax + (1-a)y \in A$  para todo  $0 < a < 1$ .

Finalmente, como  $X$  es estrictamente convexo y  $x, y \in S_X$ , obtenemos que  $\|ax + (1-a)y\| < 1$  para todo  $0 < a < 1$ , por lo que concluimos que  $A$  es estrictamente convexo.

“ $\Leftarrow$ ” Por el contrario, suponemos que  $X$  no es estrictamente convexo, por lo que bastará encontrar un subespacio de  $X$  de dimensión dos que no sea estrictamente convexo. Como  $X$  no es estrictamente convexo, existen dos elementos  $x, y \in S_X$ ,  $x \neq y$  tales que  $\frac{x+y}{2} \in S_X$ . Por reducción al absurdo, suponemos que  $x$  e  $y$  son linealmente dependientes, esto es, existe un escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  tal que  $x = \alpha y$ . Se tiene entonces

que  $\alpha$  es un escalar de valor absoluto 1, y como  $x \neq y$ , necesariamente  $\alpha \neq 1$ . Pero tenemos así que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\| &= \left\|\frac{\alpha y+y}{2}\right\| \\ &= \left|\frac{\alpha+1}{2}\right| \|y\| \\ &= \left|\frac{\alpha+1}{2}\right| \\ &= 1,\end{aligned}$$

lo que nos lleva a un absurdo, ya que  $\mathbb{K}$  es estrictamente convexo.

Se sigue entonces que  $x$  e  $y$  son linealmente independientes, luego  $\langle\{x, y\}\rangle$  es un subespacio 2-dimensional de  $X$  no estrictamente convexo, y así concluimos la prueba.  $\square$

**NOTA:** Observamos que la primera parte de la prueba se puede generalizar para cualquier dimensión, por lo que obtenemos que todos los subespacios de un espacio  $X$  estrictamente convexo son estrictamente convexos.

**Ejemplo 2.3**    ■  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  y  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  son estrictamente convexos.

- Veamos a continuación que todo espacio de Hilbert  $(X, \|\cdot\|)$  es estrictamente convexo.

*Esto se sigue directamente del hecho de que toda norma de un espacio de Hilbert satisface la ley del paralelogramo:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \text{ para todo } x, y \in X.$$

Sean entonces  $x, y \in S_X$  tales que  $\|x+y\| = 2$ . Obtenemos que

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x+y\|^2 \\ &= 2(1+1) - 4 \\ &= 0,\end{aligned}$$

luego  $x = y$ . Por lo tanto, por Teorema 2,2 (i), concluimos que  $(X, \|\cdot\|)$  es estrictamente convexo.

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  y  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  no son estrictamente convexos.

Para el primero basta tomar  $x = e_1$ ,  $y = e_2$ , por lo que se tiene que  $\|x\|_1 = 1 = \|y\|_1$  y  $\|x+y\|_1 = 2$ , pero  $x \neq y$ .

De forma similar, para el segundo caso tomamos  $x = e_1 + e_2$ ,  $y = e_1 - e_2$  y llegamos a la misma conclusión.

Vamos ahora a ver otra caracterización de los espacios estrictamente convexos, en la que intervienen los puntos extremos, para lo cual debemos introducir previamente el siguiente lema.

**Lema 2.4** Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $C \subset E$  un conjunto convexo. Si  $x \in C$ ,  $y \in \text{int}(C)$ , y  $0 < a < 1$ , entonces  $ax + (1 - a)y \in \text{int}(C)$ .

Demostración

Al ser  $\text{int}(C)$  un conjunto abierto, también lo será  $aw + (1 - a)\text{int}(C)$ , con  $w \in C$ . Por lo tanto  $aC + (1 - a)\text{int}(C) = \bigcup_{w \in C} (aw + (1 - a)\text{int}(C))$  es un conjunto abierto, ya que es unión de abiertos.

Ahora, como  $x \in C$  e  $y \in \text{int}(C)$ , se tiene que  $ax + (1 - a)y \in aC + (1 - a)\text{int}(C) \subset C$ . Así comprobamos que existe un conjunto abierto que contiene al punto  $ax + (1 - a)y$  y está contenido en  $C$ , por lo que  $ax + (1 - a)y$  es un punto interior de  $C$ .

**Proposición 2.4** Sea  $X$  un espacio normado. Entonces  $X$  es estrictamente convexo si y solo si todo punto de su esfera unidad es punto extremo de su bola unidad cerrada.

Demostración

" $\implies$ " Sabemos que los puntos interiores de un conjunto no pueden ser puntos extremos, por lo que  $\text{ext}(B_X) \subset S_X$ . Veamos ahora que se tiene la igualdad.

Sea  $x \in S_X$ ,  $x = ax_1 + (1 - a)x_2$ , con  $x_1, x_2 \in B_X$  y  $0 < a < 1$ . Entonces, por Lema 2.4, sabemos que  $x_1, x_2 \in S_X$ , porque de lo contrario al menos uno de ellos estaría en el interior de  $B_X$ , luego también lo estaría  $x$ . Pero como  $X$  es estrictamente convexo, su esfera unidad no contiene segmentos no triviales, luego  $x_1 = x_2 = x$ . Con ello, tenemos que  $x \in \text{ext}(B_X)$ .

Por lo tanto, concluimos que  $\text{ext}(B_X) = S_X$ .

" $\impliedby$ " Sean  $x_1, x_2 \in S_X$ ,  $x_1 \neq x_2$ , y  $0 < a < 1$ . Supongamos que, por el contrario,  $\|ax_1 + (1 - a)x_2\| = 1$ . Entonces  $x = ax_1 + (1 - a)x_2 \in S_X$  lo que nos lleva a una contradicción, ya que  $x \in \text{ext}(B_X)$ . Por lo tanto se tiene que  $\|ax_1 + (1 - a)x_2\| < 1$ , luego  $X$  es un espacio estrictamente convexo, como queríamos probar.  $\square$

Esta última proposición justifica el hecho de que los puntos extremos de la bola unidad en los espacios de funciones  $L_p(\mathbb{R})$ , con  $1 < p < \infty$ , constituyan la esfera unidad, ya que son estrictamente convexos. Sin embargo, esto es bastante difícil de probar, salvo para el caso  $p = 2$ , donde se tiene por ser espacio de Hilbert.

Para el caso  $p = 1$ , vemos fácilmente que  $(L_1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$  no es estrictamente convexo: considerando las funciones  $f = \chi_{[0,1]}$  y  $g = \chi_{(1,2]}$ , se puede comprobar que  $\|f\|_1 = 1 = \|g\|_1$  y  $\|f + g\|_1 = 2$ , pero  $f \neq g$ .

Recordamos que el espacio de sucesiones  $\ell_p$ , con  $1 \leq p < \infty$ , es el conjunto formado por todas las sucesiones de escalares  $x = (a_1, a_2, \dots)$  tales que  $\|x\|_p < \infty$ , donde

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

**Ejemplo 2.4** Sea  $1 < p < \infty$ . Consideramos en el espacio normado  $\ell_p$ , la bola unidad  $B_X = \{x \in \ell_p : \|x\|_p \leq 1\}$ . Se tiene entonces que  $\text{ext}(B_X) = S_X = \{x \in \ell_p(\mathbb{R}) : \|x\|_p = 1\}$ .



Al igual que en los espacios de funciones  $L_p(\mathbb{R})$ , para el caso  $p = 2$ , se tiene que  $(\ell_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$  es espacio de Hilbert, luego es estrictamente convexo, y aplicando la Proposición 2.4, concluimos que los puntos extremos de la bola unidad conforman la esfera unidad.

El caso general es mucho más complicado, y una prueba de ello la dio James A. Clarkson en 1936, que demostró que los espacios  $\ell_p(\mathbb{R})$  y  $L_p(\mathbb{R})$  eran estrictamente convexos cuando  $1 < p < \infty$  (Véase [11]).

**Definición 2.3** Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $C \subset E$  un conjunto convexo cerrado. Un subconjunto  $S \subset C$  se llama **conjunto extremal** de  $C$  si es convexo cerrado, no vacío y para cada  $x, y \in C$ , y  $0 < a < 1$  tal que  $ax + (1 - a)y \in S$ , se tiene  $x, y \in S$ .

En otras palabras, si un conjunto  $C$  es convexo y cerrado, un conjunto  $S \subset C$  se dice extremal de  $C$  si no existe un segmento abierto que interseque a  $S$  cuyos extremos pertenezcan a  $C \setminus S$ .

**Ejemplo 2.5** En  $\mathbb{R}^2$ , consideramos el conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

Entonces, los conjuntos unipuntuales formados por cada uno de los vértices, los conjuntos formados por cada arista y el propio  $C$ , son conjuntos extremales de  $C$ .

**Proposición 2.5** Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $C \subset E$  un conjunto convexo cerrado. Entonces:

- i) Si  $x \in C$ , entonces  $\{x\}$  es un conjunto extremal de  $C$  si y solo si  $x \in \text{ext}(C)$ .
- ii) Si  $S$  es un conjunto extremal de  $C$  y  $R$  es un conjunto extremal de  $S$ , entonces  $R$  es un conjunto extremal de  $C$ .
- iii) Sea  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$  un funcional de  $E$ . Supongamos que  $b := \sup_{x \in C} f(x)$  es un número real. Entonces,  $E_f = \{x \in C : f(x) = b\}$  es o bien el conjunto vacío o un conjunto extremal de  $C$ .

Demostración.

i) Demostramos por doble implicación.

" $\implies$ " Como  $\{x\}$  es un conjunto extremal, si  $x = ax_1 + (1 - a)x_2$ , con  $x_1, x_2 \in C$  y  $0 < a < 1$ , entonces  $x_1, x_2 \in \{x\}$ , luego  $x_1 = x_2 = x$ , lo que implica que  $x$  es un punto extremo de  $C$ .

" $\impliedby$ " Como  $\{x\}$  es un conjunto unipuntual, entonces es cerrado, convexo y no vacío. Sean  $x_1, x_2 \in C$  y  $0 < a < 1$  tales que  $x = ax_1 + (1 - a)x_2$ . Entonces, como  $x$  es un punto extremo, se tiene que  $x_1 = x_2 = x$ . Por tanto,  $x_1, x_2 \in \{x\}$ , luego  $\{x\}$  es un conjunto extremal de  $C$ .

- ii) Como  $R$  es un conjunto extremal de  $S$ , entonces sabemos que es cerrado, convexo y no vacío. Sean  $x, y \in C$  y  $0 < a < 1$  tales que  $ax + (1 - a)y \in R$ . Entonces, como  $R \subset S$ ,  $ax + (1 - a)y \in S$ , y como  $S$  es un conjunto extremal de  $C$ , se tiene que  $x, y \in S$ . Pero a su vez, como  $R$  es un conjunto extremal de  $S$ , necesariamente  $x, y \in R$ , como queríamos demostrar. Por tanto,  $R$  es un conjunto extremal de  $C$ .
- iii)  $E_f$  es un conjunto cerrado, porque es la contraimagen de un cerrado por una aplicación continua. Además, por linealidad, obtenemos que  $E_f$  es un conjunto convexo. Supongamos que  $E_f \neq \emptyset$ . Sean  $x, y \in C$  y  $0 < a < 1$  tales que  $ax + (1 - a)y \in E_f$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 b &= f[ax + (1 - a)y] \\
 &= af(x) + (1 - a)f(y) \\
 &\leq ab + (1 - a)b \\
 &= b.
 \end{aligned}$$

De aquí deducimos que  $b = f(x) = f(y)$ , luego  $x, y \in E_f$ .

Por tanto, se tiene que  $E_f = \emptyset$  o  $E_f$  es un conjunto extremal de  $C$ .

En particular, se tiene que si  $K$  es un conjunto convexo y cerrado no vacío, entonces  $K$  es un conjunto extremal de sí mismo.

### 3. Teorema de Hahn-Banach: forma geométrica

Dedicamos esta sección a la entrega de varios resultados necesarios para la prueba del Teorema de Krein-Milman. El capítulo gira en torno a la forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach, pero nuestro interés principal es probar que el espacio dual de uno localmente convexo separa puntos.

Esto quiere decir que, para cada par de puntos distintos, existe un funcional que toma valores distintos en dichos puntos, o sea, para cada  $x, y \in E$ , existe un funcional  $f \in E^*$  tal que  $f(x) \neq f(y)$ .

Los resultados que usaremos en la prueba del Teorema de Krein-Milman son los siguientes:

**Teorema 3.1** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo. Entonces  $E^*$  separa puntos.*

**Corolario 3.1** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo sobre  $\mathbb{R}$  y sea  $C \subset E$  un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, si  $x_0 \notin C$ , existe un hiperplano cerrado  $L$  que separa estrictamente (véase Definición 3.5)  $C$  y  $\{x_0\}$ .*

En lo que sigue, todos los espacios vectoriales que consideraremos serán no triviales.

Primeramente, introducimos los conceptos de variedad lineal e hiperplano.

Recordamos que si  $V$  es un espacio vectorial, un subespacio  $W_0 \subset V$  se dice maximal si es propio y para todo subespacio vectorial  $W$  tal que  $W_0 \subset W$ , se tiene que  $W = W_0$  o  $W = V$ .

**Definición 3.1** *Sea  $V$  un espacio vectorial. Un conjunto  $L \subset V$  se denomina **variedad lineal** si existen un subespacio vectorial  $W \subset V$  y un punto  $x_0 \in V$  tal que  $L = x_0 + W = \{x_0 + w : w \in W\}$ .*

*Una variedad lineal  $L$  se denomina **hiperplano** si  $W$  es un subespacio vectorial maximal.*

Veamos otra caracterización de los hiperplanos, que nos será de utilidad para la prueba de distintos resultados. Previamente, debemos proporcionar un lema.

Recordamos que si  $V$  es un espacio vectorial y  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  es una aplicación lineal, entonces el conjunto

$$\ker f = \{x \in V : f(x) = 0\}$$

se denomina **núcleo** de la aplicación  $f$ .

**Lema 3.1** *Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  una aplicación lineal tal que  $f \neq 0$ . Entonces,  $\ker f$  es un subespacio vectorial maximal de  $V$ .*

*Demostración*

Por completitud, veamos en primer lugar que  $\ker f$  es subespacio vectorial. Sean  $x, y \in \ker f$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Entonces

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0,$$

luego  $\alpha x + \beta y \in \ker f$ . Por lo tanto,  $\ker f$  es subespacio vectorial de  $V$ .

Para ver que  $\ker f$  es maximal, basta comprobar que si  $x_0 \in V \setminus \ker f$ , entonces  $\{x_0\} \cup \ker f$  genera todo  $V$ .

Sea  $x \in V$ . Entonces, como  $f(x_0) \neq 0$  vemos que

$$x - \left[ \frac{f(x)}{f(x_0)} \right] x_0 \in V,$$

y comprobamos que

$$f\left(x - \left[ \frac{f(x)}{f(x_0)} \right] x_0\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) = 0,$$

luego

$$x - \left[ \frac{f(x)}{f(x_0)} \right] x_0 \in \ker f.$$

Por lo tanto, concluimos que  $x \in \ker f + \left[ \frac{f(x)}{f(x_0)} \right] x_0$ .

Se tiene por consiguiente que  $\{x_0\} \cup \ker f$  genera todo  $V$ , como queríamos probar.  $\square$

**Proposición 3.1** *Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $L \subset V$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i)  $L$  es un hiperplano.

ii) Existe una aplicación lineal  $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ ,  $f \neq 0$ , y un escalar  $a \in \mathbb{K}$  tal que  $L = \{x \in V : f(x) = a\}$ .

### Demostración

i)  $\implies$  ii) Supongamos que  $L = x_0 + W$  es un hiperplano, donde  $x_0 \in V$  y  $W$  es un subespacio vectorial maximal.

Sea  $x_1 \in V \setminus W$ . Entonces, como  $W$  es maximal, se tiene que  $\{x_1\} \cup W$  genera todo  $V$ , luego la expresión

$$f(\lambda x_1 + y) = \lambda,$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, y \in W$$

define una aplicación lineal en  $V$  cuyo núcleo es  $W$  y es distinta de la aplicación nula. Por lo tanto, tomando  $a = f(x_0)$ , se obtiene que  $L = \{x \in V : f(x) = a\}$ , como queríamos probar.

ii)  $\implies$  i) Por otro lado, sean  $L = \{x \in V : f(x) = a\}$ , donde  $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$  es una aplicación lineal,  $f \neq 0$ , y  $a \in \mathbb{K}$ . Veamos que  $L$  es un hiperplano.

Como  $f$  es una aplicación lineal y no nula, existe un elemento  $x_1 \in V$  tal que  $f(x_1) = 1$ . Sean  $x_0 = ax_1$  y  $W = \ker f$ . Por Lema 3.1, sabemos que  $\ker f$  es un subespacio vectorial maximal, por lo que basta comprobar que  $L = x_0 + W$ .

En primer lugar, si  $x = x_0 + y$ ,  $y \in \ker f$ , entonces

$$f(x) = f(x_0) + f(y) = f(ax_1) = af(x_1) = a,$$

por lo que  $x \in L$ . Esto prueba que  $x_0 + \ker f \subset L$ .

Por otro lado, si  $x \in L$ , entonces

$$f(-x_0 + x) = -f(ax_1) + f(x) = -a + a = 0,$$

por lo que  $-x_0 + x \in \ker f$ , luego  $x \in x_0 + \ker f$  para todo  $x \in L$ .

Se concluye por tanto que  $L = x_0 + \ker f$ .  $\square$

En particular, observamos que el hiperplano  $L$  contiene al punto 0 si y solo si  $a = 0$ .

Los conceptos de hiperplano y variedad lineal se pueden considerar particularmente en espacios localmente convexos, donde se tienen las propiedades topológicas que exponemos a continuación.

**Proposición 3.2** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo. Se tiene:*

- i) Si  $L \subset E$  es una variedad lineal, entonces  $cl(L)$  es una variedad lineal.*
- ii) Si  $L \subset E$  es un hiperplano, entonces o bien  $L$  es un conjunto cerrado o bien  $cl(L) = E$ .*

En el resto del capítulo, salvo mención expresa, todos los espacios vectoriales se considerarán sobre  $\mathbb{R}$ .

Es necesario definir los siguientes conceptos, que se manejarán en los resultados posteriores:

**Definición 3.2** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $f \in E^*$  un funcional. Entonces, para cada  $a \in \mathbb{R}$ , los conjuntos  $\{x \in E : f(x) > a\}$ ,  $\{x \in E : f(x) \geq a\}$ ,  $\{x \in E : f(x) < a\}$  y  $\{x \in E : f(x) \leq a\}$  se denominan **semiespacios** determinados por el hiperplano  $L = \{x \in E : f(x) = a\}$ .*

*Se dice que un conjunto  $A \subset E$  cae en un lado del hiperplano  $L$  si  $A$  está contenido en alguno de los semiespacios determinados por el hiperplano  $L$ , y se dice que  $A$  cae estrictamente en un lado del hiperplano  $L$  si además de caer en un lado del hiperplano  $L$  se tiene que  $A \cap L = \emptyset$ .*

Veamos una condición necesaria y suficiente para que un conjunto convexo caiga estrictamente en un lado de un hiperplano.

**Teorema 3.2** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $L \subset E$  un hiperplano. Si  $C \subset E$  es un conjunto convexo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i)  $C$  cae estrictamente en un lado del hiperplano  $L$ .*
- ii)  $C \cap L = \emptyset$ .*

Demostración

La implicación de *i*) a *ii*) viene establecida por definición. Probemos la otra parte.

Por Proposición 3.1 sabemos que existen una aplicación lineal  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \neq 0$ , y un escalar  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $L = \{x \in E : f(x) = a\}$ .

Si  $C$  no cae estrictamente en un lado de  $L$ , entonces, como  $C \cap L = \emptyset$ , existen  $x_1, x_2 \in C$  tales que

$$f(x_1) < a < f(x_2).$$

Al ser  $C$  convexo, se tiene que  $bx_1 + (1 - b)x_2 \in C$ , para todo  $b \in [0, 1]$ . Por lo tanto,  $f[bx_1 + (1 - b)x_2] = bf(x_1) + (1 - b)f(x_2)$  es una función continua que toma los valores  $f(x_0)$  en  $b = 0$  y  $f(x_1)$  en  $b = 1$ .

Con ello, debe existir un escalar  $0 < b_0 < 1$  tal que  $f[b_0x_1 + (1 - b_0)x_2] = a$ . Se tiene por tanto que  $b_0x_1 + (1 - b_0)x_2 \in C \cap L$ , lo que contradice el enunciado.

Concluimos por tanto que *ii*) implica *i*). □

Proporcionamos a continuación un resultado de tipo topológico sobre conjuntos que caen en un lado de un hiperplano, y que nos será de utilidad posteriormente. Previamente, introducimos el siguiente lema.

**Lema 3.2** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo. Si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i)  $f$  es un funcional.*

*ii)  $\ker f$  es cerrado.*

Demostración

Véase [13, Proposición 1.31] para una demostración en el caso particular de espacios normados.

**Proposición 3.3** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $L \subset E$  un hiperplano. Si  $A \subset E$  es un subconjunto que cae en un lado de  $L$  y  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ , entonces*

*i)  $L$  es cerrado.*

*ii)  $\text{int}(A)$  cae estrictamente en un lado del hiperplano  $L$ .*

*iii)  $\text{cl}(A)$  cae en un lado del hiperplano  $L$ .*

Demostración

Empecemos probando *i*).

Por Proposición 3.1, sabemos que existen una aplicación lineal  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \neq 0$ , y un escalar  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $L = \{x \in E : f(x) = a\}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que  $A \subset \{x \in E : f(x) \leq a\}$ .

Ahora, supongamos que  $L$  no es cerrado. Entonces, el hiperplano  $L_1 = \{x \in E : f(x) =$

$a + 1\}$  tampoco sería cerrado, luego usando la Proposición 3.2(ii), se tiene que  $L_1$  es denso en  $E$ .

Pero entonces, como  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ , se sigue que  $\text{int}(A) \cap L_1 \neq \emptyset$ , lo que contradice que  $\text{int}(A) \subset \{x \in E : f(x) \leq a\}$ .

Se tiene por lo tanto que  $L$  es cerrado.

Ahora, usando la prueba de Proposición 3.1, sabemos que  $L$  es de la forma  $x_0 + \ker f$ , para cierto  $x_0 \in E$ . Por lo tanto, se tiene que  $\ker f = -x_0 + L$ , luego  $\ker f$  es cerrado, y por Lema 3.2, se tiene que  $f$  es un funcional, y, en particular, es continuo.

Se tiene por consiguiente que  $\{x \in E : f(x) < a\}$  es un conjunto abierto, luego  $\text{int}(A) \subset \{x \in E : f(x) < a\}$ , por lo que  $\text{int}(A)$  cae estrictamente en un lado del hiperplano  $L$ , y con ello se prueba ii).

Para probar iii), basta tener en cuenta que  $\{x \in E : f(x) \leq a\}$  es cerrado, ya que  $f$  es continua, luego  $\text{cl}(A) \subset \{x \in E : f(x) \leq a\}$ , por lo que  $\text{cl}(A)$  cae en un lado del hiperplano  $L$ .  $\square$

Ahora abordaremos la versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, cuya finalidad es encontrar condiciones suficientes para separar dos subconjuntos mediante un hiperplano. En primer lugar, debemos introducir una serie de nuevos conceptos.

**Definición 3.3** Sea  $V$  un espacio vectorial. Entonces, un conjunto  $A \subset V$  se dice **absorbente** si para cada  $x \in V$  existe un escalar  $\rho \in \mathbb{R}^+$  tal que  $x \in \rho A$ .

Equivalentemente, un conjunto  $A$  es absorbente si  $V = \mathbb{R}_{>0}A$ .

**Ejemplo 3.1** Sea  $X$  un espacio normado. Entonces todo conjunto abierto  $U \subset X$  tal que  $0 \in U$  es absorbente.

Esto se sigue de que al ser  $U$  abierto, existe una bola  $B(0, \epsilon) \subset U$ , y por tanto, para todo  $x \in X \setminus \{0\}$  se tiene que  $\frac{x\epsilon}{2\|x\|} \in B(0, \epsilon)$ .

Más en general, podemos ver que si  $E$  es un espacio localmente convexo, entonces todo conjunto abierto  $U \subset E$  tal que  $0 \in U$  es absorbente.

En primer lugar, al ser  $0$  punto interior de  $U$ , existe un entorno básico  $U(0; \epsilon; p_1, p_2, \dots, p_n) \subset U$ . Por lo tanto, para todo  $x \in E \setminus \{0\}$ , se tiene que, si  $p_i(x) = 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces, de forma obvia, vemos que  $x \in U(0; \epsilon; p_1, p_2, \dots, p_n)$ . En otro caso,

$$\frac{x\epsilon}{2 \max\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\}} \in U(0; \epsilon; p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Por lo visto en la prueba, no es necesario exigir que el conjunto sea abierto: observamos que todo conjunto  $A \subset V$  tal que  $0 \in \text{int}(A)$  es un conjunto absorbente.

Por otra parte, todo conjunto absorbente contiene necesariamente al  $0$ .

**Definición 3.4** Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $C \subset V$  un conjunto convexo absorbente. Entonces, para cada  $x \in V$ , denotamos

$$r_C(x) := \inf\{\rho > 0 : x \in \rho C\}.$$

En general,  $r_C$  no tiene por qué ser una seminorma. Sin embargo, sí que satisface las siguientes propiedades:

- a)  $r_C(x) \geq 0$  para todo  $x \in V$ ,
- b)  $r_C(0) = 0$ ,
- c)  $r_C(x + y) \leq r_C(x) + r_C(y)$  para cualesquiera  $x, y \in V$ ,

y, por otra parte

- d)  $r_C(ax) = ar_C(x)$  para todo  $x \in V$ ,  $a \geq 0$ .

Proporcionaremos ahora la versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach. En su demostración, usaremos el siguiente lema:

**Lema 3.3** Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $C$  un conjunto convexo absorbente. Entonces, si  $L \subset V$  es un hiperplano tal que  $C \cap L = \emptyset$ , existe una aplicación lineal  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- i)  $L = \{x \in V : f(x) = 1\}$ .
- ii)  $-r_C(-x) \leq f(x) \leq r_C(x)$  para todo  $x \in V$ .

*Demostración*

Al ser  $L$  un hiperplano, entonces, por Proposición 3.1, sabemos que existen una aplicación lineal  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \neq 0$ , y un escalar  $a \in \mathbb{R}$  tales que  $L = \{x \in V : g(x) = a\}$ . Al ser  $C$  absorbente, se tiene que  $0 \in C$ . Por tanto, como  $L \cap C = \emptyset$ , se obtiene que  $a \neq 0$ . Por consiguiente, tomando  $f = g/a$ , vemos que  $f$  es una aplicación lineal tal que

$$L = \{x \in V : f(x) = 1\},$$

lo que prueba i).

Veamos que  $f$  cumple ii).

Como  $C \cap L = \emptyset$ , por Teorema 3.2, tenemos que  $C$  cae estrictamente en un lado de  $L$ . Además, como  $0 \in C$ , por linealidad se tiene que  $f(0) = 0$ , luego concluimos que

$$C \subset \{x \in V : f(x) < 1\}.$$

Sea ahora  $x \in V$  y sea  $\rho > 0$  tal que  $x \in \rho C$ . Entonces,  $x/\rho \in C$ , luego, por lo anterior,  $f(x/\rho) < 1$  y  $f(x) < \rho$ . Tenemos que esto vale para cualquier  $\rho$  tal que  $x \in \rho C$ , por lo que concluimos que

$$f(x) \leq \inf\{\rho > 0 : x \in \rho C\} = r_C(x).$$



Consecuentemente, para cada  $x \in V$  se tiene que  $f(-x) \leq r_C(-x)$ , luego

$$-r_C(-x) \leq -f(-x) = f(x).$$

Concluimos que

$$-r_C(-x) \leq f(x) \leq r_C(x) \text{ para todo } x \in V,$$

lo que prueba ii). □

**Teorema 3.3** (*Hahn-Banach, versión geométrica*) Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $C \subset V$  un conjunto convexo absorbente. Si  $L_0$  es una variedad lineal tal que  $L_0 \cap C = \emptyset$ , entonces existe un hiperplano  $L = \{x \in V : f(x) = 1\}$ , donde  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lineal que cumple:

$$i) \ L_0 \subset L.$$

$$ii) \ f(x) \leq r_C(x) \text{ para todo } x \in V.$$

$$iii) \ C \subset \{x \in V : f(x) \leq 1\}.$$

Demostración

Como  $L_0$  es una variedad lineal, existen un punto  $x_0 \in V$ , y un subespacio  $W_0 \subset V$  tales que  $L_0 = x_0 + W_0$ . Además, como  $C \cap L_0 = \emptyset$ , se tiene que  $0 \notin L_0$ , por lo que  $x_0 \notin W_0$ .

Consideramos ahora el subespacio vectorial  $W \subset V$  generado por  $\{x_0\} \cup W_0$ . Notamos que  $L_0 \subset W$ , y además  $W_0$  es un subespacio maximal de  $W$ , por lo que  $L_0$  es un hiperplano en  $W$ .

Vemos ahora que, como  $C$  es un conjunto absorbente, se tiene que  $W \cap C$  también lo será en  $W$ . Vamos a probar que  $r_{W \cap C}$ , considerada en el espacio vectorial  $W$ , es precisamente  $r_C$  restringida a  $W$ .

Sea  $x \in W$ . Entonces, como  $W$  es espacio vectorial,

$$\begin{aligned} r_{W \cap C}(x) &= \inf\{\rho > 0 : x \in \rho(W \cap C)\} \\ &= \inf\{\rho > 0 : x \in W \cap \rho C\} \\ &= \inf\{\rho > 0 : x \in \rho C\} \\ &= r_C(x), \end{aligned}$$

como queríamos ver.

Ahora, notamos que  $(W \cap C) \cap L_0 = \emptyset$ , ya que  $C \cap L_0 = \emptyset$ .

En consecuencia, usando Lema 3.3, sabemos que existe una aplicación lineal  $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $L_0 = \{x \in W : g(x) = 1\}$ . Además, se tiene que  $g(x) \leq r_C(x)$  para todo  $x \in W$ .

Ahora, aplicando la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach (real), obtenemos que existe una aplicación lineal  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in W$  y

$f(x) \leq r_C(x)$  para todo  $x \in V$ , lo que prueba *ii*).

Sea  $L = \{x \in V : f(x) = 1\}$ . Entonces,  $L$  es un hiperplano en  $V$ , y además  $L_0 \subset L$ , ya que  $g(x) = 1 = f(x)$  para todo  $x \in L_0$ . Así, queda probado *i*).

Para demostrar *iii*), basta con darse cuenta de que si  $x \in C$ , entonces  $r_C(x) \leq 1$ , luego  $f(x) \leq 1$ .

Por lo tanto, obtenemos que  $C \subset \{x \in V : f(x) \leq 1\}$ , y así finaliza la demostración.  $\square$

En consecuencia a este teorema, vemos que si  $C$  es un conjunto convexo absorbente y  $L_0$  es una variedad lineal tal que  $C \cap L_0 = \emptyset$ , entonces existe un hiperplano  $L$  que contiene a  $L_0$  y tal que  $C$  cae en uno de sus lados. Esto se pone de manifiesto en el siguiente corolario:

**Corolario 3.2** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $C \subset E$  un conjunto convexo absorbente y tal que  $\text{int}(C) \neq \emptyset$ . Entonces, si  $L_0$  es una variedad lineal y  $C \cap L_0 = \emptyset$ , existe un hiperplano cerrado  $L = \{x \in E : f(x) = 1\}$ , donde  $f \in E^*$ , tal que:*

*i)  $L_0 \subset L$ .*

*ii)  $\text{int}(C) \subset \{x \in E : f(x) < 1\}$ .*

*iii)  $\text{cl}(C) \subset \{x \in E : f(x) \leq 1\}$ .*

#### Demostración

Como  $C \cap L_0 = \emptyset$ , y  $C$  es convexo y absorbente, por Teorema 3.3, tenemos que existe un hiperplano  $L = \{x \in E : f(x) = 1\}$ , donde  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lineal. Además,  $L_0 \subset L$ .

Ahora, como  $C \subset \{x \in E : f(x) \leq 1\}$ , entonces  $C$  cae en un lado de  $L$ , luego usando Proposición 3.3, se tiene que  $L$  es cerrado, y además

$$\text{int}(C) \subset \{x \in E : f(x) < 1\}$$

y

$$\text{cl}(C) \subset \{x \in E : f(x) \leq 1\}$$

Únicamente falta comprobar que  $f \in E^*$ . Basta ver que es continua.

Veamos que si  $x_0 \in L$ , entonces  $-x_0 + L = \ker f$ , y por tanto, al ser  $L = \{x \in E : f(x) = 1\}$  cerrado, también lo será  $\ker f$ .

Sea  $x \in L$ , entonces

$$f(-x_0 + x) = -f(x_0) + f(x) = 0,$$

luego  $-x_0 + x \in \ker f$ . Por tanto,  $-x_0 + L \subset \ker f$ .

Por otro lado, sea  $x \in \ker f$ , entonces  $x = -x_0 + (x + x_0)$  y

$$f(x + x_0) = 1,$$

luego  $x + x_0 \in L$ . Por lo tanto,  $-x_0 + L = \ker f$ , luego  $\ker f$  es cerrado.

Por consiguiente, usando Lema 3.2, tenemos que  $f$  es continua.  $\square$

Para el siguiente Teorema, hacemos un paréntesis puntual en nuestra premisa y asumimos que el cuerpo  $\mathbb{K}$  es indistintamente  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 3.4** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo. Entonces  $E^*$  separa puntos.*

*Demostración*

Tenemos que probar que, para cada par de puntos  $x, y \in E$ , existe un funcional  $f \in E^*$  tal que  $f(x) \neq f(y)$ . Por linealidad, basta ver que si  $x_0 \in E$ ,  $x_0 \neq 0$ , entonces existe un funcional  $f \in E^*$  tal que  $f(x_0) \neq 0$ .

Como  $E$  es localmente convexo, existe un entorno  $C \subset E$  de 0 abierto y convexo, y tal que  $x_0 \notin C$ . Como  $C$  es abierto,  $0 \in \text{int}(C)$ , luego usando Ejemplo 3.1, tenemos que  $C$  es absorbente.

Ahora, como  $\text{int}(C) = C \neq \emptyset$ , tomando  $L_0 = \{x_0\}$ , tenemos que  $C \cap L_0 = \emptyset$ , luego por Corolario 3.2, existe un hiperplano cerrado  $L = \{x \in E : g(x) = 1\} = x_0 + \ker g$ , donde  $g \in E^*$ .

Además, usando de nuevo Corolario 3.2, tenemos que  $C = \text{int}(C) \subset \{x \in E : g(x) < 1\}$ , y por tanto  $L \cap C = \emptyset$ .

Por ende, si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , tomando

$$f(x) := g(x) - ig(ix) \text{ para todo } x \in E,$$

entonces  $f \in E^*$  y

$$f(x_0) = g(x_0) - ig(ix_0) = 2 \neq 0.$$

Para el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , basta tomar  $f = g$ .  $\square$

Como anteriormente, volvemos a asumir  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Veremos en siguiente lugar varios resultados que proporcionan la existencia de un hiperplano que separa distintos conjuntos, y que emplearemos en la demostración del Teorema de Krein-Milman. En primer lugar, introduciremos el concepto de separar conjuntos, y entregaremos varios resultados que usaremos posteriormente.

**Definición 3.5** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sean  $A_1, A_2 \subset E$ . Un hiperplano  $L \subset E$  se dice que **separa**  $A_1$  y  $A_2$ , si  $A_1$  y  $A_2$  caen en diferentes lados de  $L$ . Además se dice que  $L$  **separa estrictamente**  $A_1$  y  $A_2$ , si  $A_1$  y  $A_2$  caen estrictamente en diferentes lados de  $L$ .*

**Lema 3.4** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $C \subset E$  un subconjunto convexo y abierto no vacío. Si  $L_0 \subset E$  es una variedad lineal tal que  $L_0 \cap C = \emptyset$ , entonces existe un hiperplano cerrado  $L \subset E$  tal que  $L_0 \subset L$  y  $L \cap C = \emptyset$ .*

Demostración

Sin pérdida de generalidad, por traslación podemos asumir que  $0 \in C$ . Por tanto, como  $C$  es abierto y  $0 \in C$ , por Ejemplo 3.1, tenemos que  $C$  es absorbente.

En consecuencia, como  $\text{int}(C) = C \neq \emptyset$ , y  $L_0 \cap C = \emptyset$ , por Corolario 3.2, se tiene que existe un hiperplano cerrado  $L = \{x \in E : f(x) = 1\}$ , para cierto funcional  $f \in E^*$ , y de modo que  $L_0 \subset L$ .

Además, se sigue directamente que  $\text{int}(C) \subset \{x \in E : f(x) < 1\}$ , luego  $L \cap C = \emptyset$ .  $\square$

**Lema 3.5** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $C \subset E$  un conjunto convexo y abierto no vacío. Si  $W \subset E$  es un subespacio vectorial tal que  $W \cap C = \emptyset$ , entonces existe un funcional  $f \in E^*$  tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in W$  y  $f(x) > 0$  para todo  $x \in C$ .*

Demostración

Sabemos que  $W$  es una variedad lineal que contiene a 0, luego por Lema 3.4, tenemos que existe un hiperplano cerrado  $L$  tal que  $W \subset L$  y  $L \cap C = \emptyset$ .

Por Proposición 3.1, se tiene que existe una aplicación lineal  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , y un escalar  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$L = \{x \in E : f(x) = a\}.$$

Además, como  $0 \in W \subset L$ , obtenemos que  $a = 0$ . Por lo tanto, observamos que  $\ker f = L$  es un conjunto cerrado, luego por Lema 3.2, se tiene que  $f \in E^*$ .

Como  $C \cap L = \emptyset$ , por Teorema 3.2,  $C$  ha de caer estrictamente en un lado de  $L$ . Si  $C \subset \{x \in E : f(x) > 0\}$ , entonces el resultado queda probado.

En el caso contrario, basta considerar el funcional  $-f$ .  $\square$

**Teorema 3.5** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sean  $C_1, C_2 \subset E$  dos conjuntos disjuntos convexos no vacíos, y tales que  $C_1$  es abierto. Entonces, existe un hiperplano cerrado  $L$  que separa  $C_1$  y  $C_2$ .*

Demostración

En primer lugar, definimos el conjunto

$$C := \{c_1 - c_2 : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$

Tenemos que, como  $C = \bigcup_{c_2 \in C_2} C_1 + (-c_2)$ , y  $C_1$  es abierto, entonces también lo es  $C$ .

Además, como  $C = C_1 + (-C_2)$ , se tiene que  $C$  también es convexo.

Por otro lado, como  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ , se sigue que  $0 \notin C$ , luego  $C \cap \{0\} = \emptyset$ .

Así, usando Lema 3.5 y tomando  $W = \{0\}$ , sabemos que existe una aplicación lineal  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(c) > 0$  para todo  $c \in C$ .

Por tanto, se tiene que  $f(c_1) > f(c_2)$  para cualesquiera  $c_1 \in C_1, c_2 \in C_2$ , luego tomando  $a = \inf f(c_1)$ ,  $c_1 \in C_1$ , obtenemos que

$$f(c_2) \leq a \leq f(c_1) \text{ para cualesquiera } c_1 \in C_1, c_2 \in C_2.$$

Se tiene en consecuencia que,  $L = \{x \in E : f(x) = a\}$  es un hiperplano que separa  $C_1$  y  $C_2$ , y además, como  $\text{int}(C_1) = C_1 \neq \emptyset$ , usando Proposición 3.3(i), obtenemos que  $L$  es cerrado  $\square$

**Corolario 3.3** *Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $C \subset E$  un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, si  $x_0 \notin C$ , existe un hiperplano cerrado  $L$  que separa estrictamente  $C$  y  $\{x_0\}$ .*

Demostración

Como  $x_0 \notin C$  y  $C$  es cerrado, entonces existe un entorno básico  $U = U(x_0; \epsilon; p_1, p_2, \dots, p_n)$  tal que  $C \cap U = \emptyset$ .

Ahora, como  $U$  y  $C$  son convexos disjuntos no vacíos, y además se tiene que  $U$  es abierto, entonces por Teorema 3.5, existe un hiperplano cerrado  $L$  que separa  $U$  y  $C$ .

Por Proposición 3.1, sabemos que existe una aplicación lineal  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , y un escalar  $a \in \mathbb{R}$  tales que  $L = \{x \in E : f(x) = a\}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $C \subset \{x \in E : f(x) \leq a\}$  y  $U \subset \{x \in E : f(x) \geq a\}$ . Como  $U$  es abierto, se tiene que  $\text{int}(U) = U \neq \emptyset$ , luego por Proposición 3.3(ii), tenemos que  $U \subset \{x \in E : f(x) > a\}$ .

Como  $x_0 \in U$ , se tiene que  $f(x_0) > a$ , luego tomando  $b = \frac{a + f(x_0)}{2}$ , se tiene que  $M = \{x \in E : f(x) = b\}$  es un hiperplano cerrado que separa estrictamente  $C$  y  $\{x_0\}$ .  $\square$

Para finalizar el capítulo, entregaremos un resultado que se empleará en la demostración del Teorema de Stone-Weierstrass. Dicho resultado es un corolario del siguiente teorema:

**Teorema 3.6** *Sea  $X$  un espacio normado y sea  $W \subset X$  un subespacio vectorial. Entonces*

$$cl(W) = \bigcap \{\ker f : f \in X^* \text{ y } W \subseteq \ker f\}.$$

Demostración

Sea  $N := \bigcap \{\ker f : f \in X^* \text{ y } W \subseteq \ker f\}$ . Si  $f \in X^*$  y  $W \subseteq \ker f$ , entonces se tiene  $cl(W) \subseteq \ker f$ , ya que por Lema 3.2 sabemos que  $\ker f$  es cerrado. Por lo tanto  $cl(W) \subseteq N$ . Veamos ahora la otra inclusión.

Sea  $x_0 \notin cl(W)$ . Entonces existe una bola  $B(x_0, \epsilon)$  tal que  $B(x_0, \epsilon) \cap W = \emptyset$ . Como dicha bola es un conjunto convexo, aplicando Lema 3.5, tenemos que existe un funcional  $f \in X^*$  tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in W$  y  $f(x_0) > 0$ . Se sigue por lo tanto que  $x_0 \notin N$ , luego  $cl(W) = N$ .  $\square$

**Corolario 3.4** *Sea  $X$  un espacio normado y sea  $W \subset X$  un subespacio vectorial. Entonces  $W$  es denso en  $X$  si y solo si  $W^\perp = (0)$ .*

Demostración

”  $\implies$  ” Por Teorema 3.6, sabemos que

$$X = cl(W) = \bigcap \{\ker f : f \in X^* \text{ y } W \subseteq \ker f\}.$$

Si  $f \in X^*$  y  $W \subseteq \ker f$ , entonces  $X = cl(W) \subseteq \ker f$ , luego  $\ker f = X$ . La única posibilidad entonces es que  $f \equiv 0$ , luego  $W^\perp = (0)$ .

”  $\Leftarrow$  ” Supongamos por el contrario que  $cl(W) \neq X$ . Entonces, existe una bola  $B(x_0, \epsilon)$  tal que  $B(x_0, \epsilon) \cap W = \emptyset$ . Por Lema 3.5, sabemos que existe un funcional  $f \in X^*$  tal que  $f(x) = 0$  para todo  $x \in W$  y  $f(x) > 0$  para todo  $x \in B(x_0, \epsilon)$ . Se tiene por lo tanto que  $f \in W^\perp$ , luego  $W^\perp \neq (0)$ .  $\square$

## 4. El Teorema de Krein-Milman y aplicaciones

Pasamos ahora a introducir y demostrar el teorema de Krein-Milman. Su prueba es una aplicación del lema de Zorn y el teorema de Hahn-Banach. Previamente, debemos definir el concepto de clausura convexa de un conjunto.

**Definición 4.1** Sea  $E$  un espacio vectorial topológico y  $F \subset E$ , se llama **envoltura convexa** de  $F$  a

$$co(F) := \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k : a_k \geq 0, \sum_{k=1}^n a_k = 1, x_k \in F, n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Se define también **envoltura convexa cerrada** a la clausura topológica de  $co(F)$ . Se denota por  $\overline{co}(F)$ .

Se puede comprobar que la envoltura convexa y la envoltura convexa cerrada de un conjunto  $F$  coinciden respectivamente con el menor convexo y el menor convexo cerrado que contienen al conjunto  $F$ . Esto quiere decir que

$$co(F) = \bigcap \{C \subset E : C \supset F, C \text{ convexo}\}$$

y

$$\overline{co}(F) = \bigcap \{C \subset E : C \supset F, C \text{ convexo y cerrado}\}.$$

El Teorema de Krein-Milman requiere que el conjunto sobre el que se aplica sea compacto. En su demostración, se emplea una caracterización de tipo topológico sobre los conjuntos compactos, que demostraremos a continuación como lema. Previamente, debemos definir el concepto de la propiedad de la intersección finita.

**Definición 4.2** Sea una familia de conjuntos  $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ . Se dice que  $\mathcal{F}$  tiene la **propiedad de la intersección finita** si para cada subfamilia no vacía  $J \subset I$  finita, la intersección de sus elementos es no vacía, esto es

$$\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset.$$

**Lema 4.1** Un espacio topológico  $X$  es compacto si y solo si toda familia de cerrados en  $X$  con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración

”  $\implies$  ” Sea  $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$  una familia de cerrados en  $X$ . Supongamos que  $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ .

Se tiene entonces que, como

$$X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = X,$$

$\{X \setminus F_i\}_{i \in I}$  es un recubrimiento abierto de  $X$ , que como es compacto, admite un subrecubrimiento finito. Esto es, podemos escribir

$$X = \bigcup_{r=1}^n (X \setminus F_{i_r}).$$

Pero entonces se tiene que  $\bigcap_{r=1}^n F_{i_r} = \emptyset$ , con lo que  $\mathcal{F}$  no tiene la propiedad de la intersección finita.

Concluimos entonces que

$$\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset.$$

"  $\Leftarrow$  " Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  un recubrimiento abierto de  $X$ . Entonces

$$\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \emptyset.$$

Se tiene entonces que  $\{X \setminus U_i\}_{i \in I}$  es una familia de cerrados que no tiene la propiedad de la intersección finita, por lo que existe un subconjunto  $J = \{i_1, \dots, i_n\} \subset I$  finito tal que

$$\bigcap_{r=1}^n (X \setminus U_{i_r}) = \emptyset.$$

Se concluye entonces que

$$X = \bigcup_{r=1}^n U_{i_r},$$

por lo que  $\{U_i\}_{i \in I}$  admite un subrecubrimiento finito, luego  $X$  es compacto.  $\square$

Una vez tenemos todos los conceptos y resultados necesarios, procedemos a continuación a enunciar y demostrar el Teorema de Krein-Milman. Su versión original es de 1940, aunque es menos general que la que presentaremos (Véase [6]).

**Teorema 4.1** (*Krein-Milman, versión original*) Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $K \subset X^*$  un conjunto acotado y regularmente convexo. Entonces  $\text{ext}(K) \neq \emptyset$  y  $K = \overline{\text{co}}[\text{ext}(K)]$ .

En este caso, un conjunto  $K \subset E^*$  se dice regularmente convexo si para cada  $f_0 \notin K$ , existe un punto  $x_0 \in E$  tal que

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0).$$



El teorema que nosotros enunciaremos, aunque más general, es más sencillo de manejar, ya que evitaremos el tener que trabajar en el espacio dual. Su versión es la siguiente:

**Teorema 4.2** (*Krein-Milman*) Sea  $E$  un espacio localmente convexo y sea  $K \subset E$  un conjunto compacto y convexo no vacío. Entonces  $\text{ext}(K) \neq \emptyset$  y  $K = \overline{\text{co}}[\text{ext}(K)]$ .

Demostración

Veamos en primer lugar que  $\text{ext}(K) \neq \emptyset$ .

Denotamos por  $\mathcal{T}$  a la familia formada por todos los conjuntos extremales de  $K$ . Como todo conjunto es extremal de sí mismo, se tiene que  $K \in \mathcal{T}$ , por lo que  $\mathcal{T} \neq \emptyset$ .

Introducimos en  $\mathcal{T}$  un orden, de forma que  $S_1 \leq S_2$  si  $S_2 \subseteq S_1$ , donde  $S_1, S_2 \in \mathcal{T}$ .

Veamos ahora que si  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una cadena en  $\mathcal{T}$ , entonces  $S_0 = \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$  es una cota superior de  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

Al ser  $S_0$  intersección de convexos cerrados, se tiene que también es un convexo cerrado. Además, como  $K$  es compacto y  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tiene la propiedad de la intersección finita, por Lema 4.1 se tiene que  $S_0 \neq \emptyset$ .

Veremos ahora que  $S_0$  es, de hecho, otro conjunto extremal de  $K$ .

Para ello, sean  $x, y \in K$  y  $0 < a < 1$  tales que  $ax + (1 - a)y \in S_0$ ; entonces  $ax + (1 - a)y \in S_\alpha$  para todo  $\alpha \in A$ . Como todos los  $S_\alpha$  son conjuntos extremales de  $K$ , entonces  $x, y \in S_\alpha$  para todo  $\alpha \in A$ , por lo que  $x, y \in S_0$ . Por lo tanto se tiene que  $S_0$  es un conjunto extremal de  $K$ .

Además, como  $S_0 \subset S_\alpha$  para todo  $\alpha \in A$ , entonces  $S_0$  es cota superior de  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

Entonces, como  $\mathcal{T}$  es un conjunto parcialmente ordenado y toda cadena en  $\mathcal{T}$  tiene una cota superior, por el lema de Zorn sabemos que debe existir al menos un elemento maximal  $S$  en  $\mathcal{T}$ . Veamos ahora que dicho elemento es un conjunto unipuntual, lo que implica que el conjunto formado por los puntos extremos de  $K$  es no vacío.

Supongamos que existen  $x, y \in S$ ,  $x \neq y$ . Entonces, por Teorema 3.4 sabemos que existe un elemento  $f \in E^*$  tal que  $f(x) < f(y)$  (considerando  $E$  como espacio localmente convexo sobre  $\mathbb{R}$ ).

Como  $S$  es un subconjunto cerrado de un compacto  $K$ , entonces  $S$  es compacto. Por lo tanto, al ser  $f$  continua en  $S$ ,  $f$  debe alcanzar un máximo en  $S$ , luego si denotamos  $b := \sup_{z \in S} f(z)$ , entonces el conjunto

$$S_f := \{z \in S : f(z) = b\}.$$

no puede ser vacío. Con ello, por Proposición 2.5(ii) y (iii), se tiene que  $S_f$  es un conjunto extremal de  $S$ , luego también lo es de  $K$ , con lo que  $S_f \in \mathcal{T}$ . Además, como  $f(x) < f(y) \leq b$ , tenemos que  $x \notin S_f$  luego  $S_f \neq S$ . Por lo tanto, como  $S_f \subset S$ , se obtiene que  $S_f > S$ , lo que es un absurdo porque  $S$  es un elemento maximal.

Consecuentemente, hemos probado que  $S$  es un conjunto unipuntual, luego por Proposición 2.5(i), sabemos que dicho punto ha de ser un punto extremo de  $K$ .

Por lo tanto,  $\text{ext}(K) \neq \emptyset$ .

Veamos a continuación que  $K = \overline{\text{co}}(\text{ext}(K))$ .

Tenemos que, al ser  $K$  un conjunto cerrado y convexo,  $\overline{\text{co}}(\text{ext}(K)) \subset K$ . Probemos la otra inclusión.

Supongamos que existe un punto  $x \in K \setminus \overline{\text{co}}(\text{ext}(K))$ . Entonces, aplicando Corolario 3.3, sabemos que existe un hiperplano que separa estrictamente  $x$  y  $\overline{\text{co}}(\text{ext}(K))$ .

Por lo tanto, existe un elemento  $f \in E^*$  tal que

$$f(y) < f(x) \text{ para todo } y \in \overline{\text{co}}(\text{ext}(K)).$$

Actuando esencialmente como antes, al ser  $K$  compacto,  $f$  debe alcanzar un máximo en  $K$ , luego si denotamos  $b := \sup_{y \in K} f(y)$ , entonces  $b < f(x)$  y el conjunto

$$S_f = \{y \in K : f(y) = b\}$$

ha de ser no vacío. Además, por Proposición 2.5(iii), tenemos que  $S_f$  es un conjunto extremal de  $K$ .

También sabemos que como  $S_f$  es un subconjunto cerrado y no vacío de un conjunto compacto  $K$ , entonces  $S_f$  es compacto. Por lo tanto, usando la primera parte de la prueba, tenemos que  $\text{ext}(S_f) \neq \emptyset$ .

Sea ahora un elemento  $z \in \text{ext}(S_f)$ . Entonces, volviendo a utilizar Proposición 2.5(i) y (ii), obtenemos que  $\{z\}$  es un conjunto extremal de  $S_f$ , luego lo es también de  $K$ . Por lo tanto,  $z \in \text{ext}(K) \subset \overline{\text{co}}(\text{ext}(K))$ . Sin embargo, como  $z \in S_f$ , tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= b \\ &\geq f(x) \\ &> \sup_{y \in \overline{\text{co}}(\text{ext}(K))} f(y) \\ &\geq f(z), \end{aligned}$$

lo que nos lleva a un absurdo.

Concluimos, por lo tanto que  $K = \overline{\text{co}}(\text{ext}(K))$ . □

A continuación proporcionaremos una aplicación del Teorema de Krein-Milman, la cual nos dice que ciertos espacios no pueden ser espacios duales de ningún espacio de Banach.

Previamente, presentamos el Teorema de Alaoglu, con el que trabajaremos a continuación y del cual omitiremos su demostración

**Teorema 4.3** (Alaoglu) *Sea  $X$  un espacio normado. Entonces, la bola unidad cerrada de  $X^*$ , esto es*

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\},$$

*es compacta con respecto a la topología \*-débil.*

Por el teorema de Alaoglu sabemos que, si  $X$  es un espacio de Banach, entonces la bola  $B_{X^*}$  es compacta con la topología \*-débil. Ahora, por el teorema de Krein-Milman, sabemos que al ser  $B_{X^*}$  compacta, convexa y no vacía, entonces  $\text{ext}(B_{X^*}) \neq \emptyset$ .

Por lo tanto, una forma de demostrar que un espacio  $X$  no es el dual de un espacio normado, es ver que la bola unidad cerrada  $B_X$  no tiene puntos extremos.

**Ejemplo 4.1**  $c_0$  no es el dual de un espacio de Banach.

Veamos que la bola  $B_{c_0} = \{(\lambda_n) \in c_0 : |\lambda_i| \leq 1, i \in \mathbb{N}\}$  no tiene puntos extremos.

Sea  $x = (\lambda_n) \in B_{c_0}$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ , sabemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|\lambda_n| < \frac{1}{2}$  para todo  $n > N$ .

Definimos ahora  $x_1 = (\mu_n)$  y  $x_2 = (\tau_n)$  de forma que  $\mu_n = \lambda_n = \tau_n$  si  $n \leq N$ . Para  $n > N$ , definimos

$$\mu_n = \lambda_n + \frac{1}{2^n}$$

y

$$\tau_n = \lambda_n - \frac{1}{2^n}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ , vemos que  $x_1, x_2 \in c_0$ . Además, tenemos que  $|\mu_n| = |\lambda_n| \leq 1$  para todo  $n \leq N$  y

$$|\mu_n| = \left| \lambda_n + \frac{1}{2^n} \right| < 1 \text{ para todo } n > N.$$

Por lo tanto,  $\|x_1\| \leq 1$ , luego  $x_1 \in B_{c_0}$ .

De manera análoga, vemos que  $x_2 \in B_{c_0}$ .

Finalmente, comprobamos que  $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ , luego  $x \notin \text{ext}(B_{c_0})$ .

Concluimos que  $\text{ext}(B_{c_0}) = \emptyset$ , y por tanto  $c_0$  no puede ser el espacio dual de un espacio de Banach.

**Ejemplo 4.2** El espacio de funciones  $L_1(\mathbb{R})$  no es el dual de un espacio de Banach.

En Proposición 2.2, hemos probado que  $\text{ext}(B_{L_1(\mathbb{R})}) = \emptyset$ . Por tanto, por el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior vemos que  $L_1(\mathbb{R})$  no puede el ser espacio dual de un espacio de Banach.,

Para finalizar el capítulo, emplearemos el Teorema de Krein-Milman para probar uno de los teoremas más importantes en la rama de Análisis Funcional: el Teorema de Stone-Weierstrass. Este teorema proporciona condiciones suficientes para que una subálgebra de  $C(X)$ , donde  $X$  es un espacio topológico compacto y Hausdorff, sea densa en  $C(X)$ .

Recordamos que  $C(X)$  es el conjunto de todas las funciones continuas de  $X$  en  $\mathbb{K}$ .

Sabemos que  $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach. Por el Teorema de Representación de Riesz, tenemos que su espacio dual  $(C(X)^*, \|\cdot\|)$  es isométricamente isomorfo a  $(M(X), \|\cdot\|)$ , donde  $M(X)$  es el espacio formado por todas las medidas complejas, regulares y de Borel en  $X$ , y para cada  $\mu \in M(X)$ ,

$$\|\mu\| = |\mu|(X) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(A_k)| : (A_k) \text{ es partición de } X \text{ por conjuntos de Borel} \right\}.$$

Además, sabemos también que el isomorfismo  $\mu \mapsto x^*$  viene dado por:

$$x^*(f) = \int_X f(t) d\mu(t),$$

donde  $f \in C(X)$ ,  $x^* \in C(X)^*$ ,  $\mu \in M(X)$ . y

$$d\mu(t) = \frac{d\mu}{d|\mu|} d|\mu|,$$

donde  $\frac{d\mu}{d|\mu|}$  denota la derivada de Radon-Nikodym.

Teniendo en cuenta este isomorfismo, observamos que, para cada conjunto  $W \subset C(X)$ , se tiene que el anulador

$$W^\perp = \{\mu \in M(X) : \int_X f(t) d\mu(t) = 0, f \in W\},$$

es un subespacio de  $M(X)$ . Veamos que es cerrado con la topología \*-débil. Observamos que

$$W^\perp = \bigcap_{f \in W} \{\mu \in M(X) : \langle \mu, f \rangle = 0\},$$

luego basta ver que, para cada  $f \in W$ , el conjunto  $A_f = \{\mu \in M(X) : \langle \mu, f \rangle = 0\}$  es \*-débilmente cerrado. Equivalentemente, veamos que  $A_f^c = \{\mu \in M(X) : \langle \mu, f \rangle \neq 0\}$  es abierto con la topología \*-débil.

Vamos a probar que, para cada  $\mu \in A_f^c$ , se tiene que

$$U = U\left(\mu; \frac{|\langle \mu, f \rangle|}{2}; f\right) \subset A_f^c.$$

Sea  $\lambda \in U$ , tenemos que

$$|\langle \mu - \lambda, f \rangle| < \frac{|\langle \mu, f \rangle|}{2},$$

luego

$$|\langle \mu, f \rangle - \langle \lambda, f \rangle| < \frac{|\langle \mu, f \rangle|}{2},$$

por lo que  $\langle \lambda, f \rangle \neq 0$ , lo que implica que  $\lambda \in A_f^c$ . Por lo tanto, tenemos que  $A_f^c$  es abierto, luego  $A_f$  es cerrado.

Por lo tanto, el conjunto

$$W^\perp = \bigcap_{f \in W} A_f$$

es cerrado con la topología \*-débil.

Por otro lado, por el Teorema de Alaoglu, sabemos que

$$B_{C(X)^*} = \{\mu \in M(X) : \|\mu\| \leq 1\}$$

es compacto con la topología \*-débil. Por lo tanto, concluimos que  $K = W^\perp \cap B_{C(X)^*}$  es compacto y convexo con la topología \*-débil, luego podemos aplicar sobre él el Teorema de Krein-Milman.

**Lema 4.2** *Sea  $X$  un espacio topológico compacto y Hausdorff, y sea  $W \subset C(X)$  y  $K = W^\perp \cap B_{C(X)^*}$ . Si  $\sigma \in \text{ext}(K)$  y  $\sigma \neq 0$ , entonces  $\|\sigma\| = 1$ .*

Demostración

Ya sabemos que  $K$  es un conjunto compacto en  $M(X)$  con la topología \*-débil. Además es convexo por ser intersección de convexos, y se puede comprobar fácilmente que  $0 \in K$ . Por tanto, aplicando el Teorema de Krein-Milman, tenemos que  $\text{ext}(K) \neq \emptyset$ .

Supongamos que  $\sigma \in \text{ext}(K)$ ,  $\sigma \neq 0$ . Si  $\|\sigma\| < 1$ , se tiene que  $\sigma/\|\sigma\| \in K$ , y

$$\sigma = \|\sigma\| \left( \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \right) + (1 - \|\sigma\|)0,$$

lo que nos lleva a un absurdo, ya que  $\sigma \in \text{ext}(K)$ .

Concluimos por tanto que  $\|\sigma\| = 1$ . □

**Definición 4.3** *Sea  $X$  un espacio topológico compacto y Hausdorff y sea  $U \subset X$  un conjunto abierto. Se dice que una medida  $\mu \in M(X)$  **se anula en  $U$**  si*

$$|\mu|(U) = 0,$$

donde

$$|\mu|(U) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(A_k)| : (A_k) \text{ es partición de } U \text{ por conjuntos de Borel} \right\}$$

Además, se llama **soporte** de  $\mu$  al complementario del mayor conjunto abierto en el que  $\mu$  se anula.

**Definición 4.4** *Sea  $X$  un espacio topológico compacto y Hausdorff y sea  $W \subset C(X)$ . El conjunto  $W$  se dice que **separa puntos** si, para cada  $s, t \in X$ ,  $s \neq t$ , existe una función  $f \in W$  tal que  $f(s) \neq f(t)$ . Además,  $W$  se dice **cerrado por conjugación** si, para cada función  $f \in W$ , se tiene que  $\bar{f} \in W$ , donde  $\bar{f}(t) = \overline{f(t)}$  para todo  $t \in X$ .*

A continuación, nos disponemos a demostrar el Teorema de Stone-Weierstrass. Debemos recordar antes que si  $X$  es un espacio topológico compacto y Hausdorff,  $\mu \in M(X)$  y  $h \in C(X)$ ; entonces  $h\mu$  denota a la medida que en un conjunto  $A$  de Borel toma el valor  $\int_A h d\mu$ .

Además, se puede comprobar que  $\|h\mu\| = \int_X |h| d|\mu|$ .

**Teorema 4.4 (Stone-Weierstrass)** Sea  $X$  un espacio topológico compacto y Hausdorff, y sea  $W \subset C(X)$  una subálgebra (es decir, un subespacio vectorial que es además un subanillo con respecto a la suma y el producto de funciones) cerrada tal que

i)  $1 \in W$ ,

ii)  $W$  separa puntos,

iii)  $W$  es cerrada por conjugación.

Entonces  $W = C(X)$ .

Demostración

Por Corolario 3.4, sabemos que  $W^\perp = (0)$  si y solo si  $W$  es denso en  $C(X)$ , luego por ser  $W$  cerrado, en tal caso se tendría que  $W = C(X)$ . Supongamos por el contrario que  $W^\perp \neq (0)$ .

Por lo visto anteriormente, sabemos que el conjunto  $K = W^\perp \cap B_{C(X)^*}$  es convexo y compacto con la topología \*-débil, luego aplicando el Teorema de Krein-Milman y Lema 4.2, sabemos que existe una medida  $\mu \in M(X)$  tal que  $\mu \in \text{ext}(K)$  y  $\|\mu\| = 1$ .

Considerando ahora el conjunto  $S$ , que denota al soporte de  $\mu$ , esto es,

$$S = X \setminus \bigcup \{U \subset X : U \text{ es abierto y } |\mu|(U) = 0\},$$

tenemos que  $|\mu|(X \setminus S) = 0$ , luego

$$\int_X f d\mu = \int_S f d\mu$$

para todo  $f \in C(X)$ . Como  $W^\perp \neq (0)$  y  $\|\mu\| = 1$ , tenemos que  $S \neq \emptyset$ . Veamos a continuación que  $S$  consiste de un único punto. Para ello, tomamos  $x_0 \in S$  y probaremos que  $S = \{x_0\}$ .

Sea  $x \in X$ ,  $x \neq x_0$ . Por ii) sabemos que existe  $f_1 \in W$  tal que  $f_1(x_0) \neq f_1(x)$ . Llamando  $a = f_1(x)$ , por i) tenemos que la función constante  $a \in W$ . Por tanto,  $f_2 = f_1 - a \in W$ . Sea ahora  $f_3 = |f_2|^2$ ; por iii) tenemos que  $f_3 \in W$ , ya que  $f_3 = f_2 \overline{f_2}$ . Además,  $f_3(x) = 0$ ,  $f_3(x_0) > 0$  y  $f_3 \geq 0$  en  $X$ . Finalmente, definimos

$$f := \frac{f_3}{\|f_3\| + 1}.$$

Claramente  $f \in W$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x_0) > 0$  y  $0 \leq f < 1$  en  $X$ .

Como  $W$  es una subálgebra, tenemos que  $gf \in W$  y  $g(1 - f) \in W$  para todo  $g \in W$ . Además, como  $\mu \in W^\perp$ , se tiene que

$$0 = \int_X gf d\mu = \int_X g(1 - f) d\mu$$

para todo  $g \in W$ , luego  $f\mu \in W^\perp$  y  $(1 - f)\mu \in W^\perp$ .

Como vimos anteriormente, tomamos  $b = \|f\mu\| = \int_X f d|\mu|$ . Además, como  $f(x_0) > 0$ , sabemos que existen un entorno abierto  $V \subset X$  de  $x_0$  y un  $\epsilon > 0$  tales que  $f(y) > \epsilon$  para todo  $y \in V$ . Por tanto, como  $V \cap S = \emptyset$ , se tiene que

$$b = \int_X f d|\mu| \geq \int_V f d|\mu| \geq \epsilon |\mu|(V) > 0.$$

Además, como  $0 \leq f < 1$ ,

$$b = \int_X f d|\mu| < |\mu|(X) = \|\mu\| = 1,$$

luego  $0 < b < 1$ . Se puede comprobar también que

$$\begin{aligned} 1 - b &= 1 - \int_X f d|\mu| \\ &= |\mu|(X) - \int_X f d|\mu| \\ &= \int_X d|\mu| - \int_X f d|\mu| \\ &= \int_X (1 - f) d|\mu| \\ &= \|(1 - f)\mu\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que  $b = \|f\mu\|$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \mu &= f\mu + (1 - f)\mu \\ &= b \left[ \frac{f\mu}{\|f\mu\|} \right] + (1 - b) \left[ \frac{(1 - f)\mu}{\|(1 - f)\mu\|} \right], \end{aligned}$$

pero como  $\mu$  es punto extremo de  $K = W^\perp \cap B_{C(X)^*}$ , entonces  $\mu = \frac{f\mu}{\|f\mu\|} = b^{-1}f\mu$ .

De la igualdad anterior deducimos que  $b^{-1}f = 1$  en casi todo punto, por lo que  $f \equiv b$  en  $S$  (así, en particular  $f(x_0) = b$ ).

Si tomamos ahora el punto  $x \neq x_0$  fijado anteriormente vemos que  $f(x) = 0$ , luego  $x \notin S$ . Por lo tanto  $S = \{x_0\}$ . Además, por Ejemplo 2.2, tenemos que  $\mu = \alpha \delta_{x_0}$ , donde  $|\alpha| = 1$ . Pero  $1 \in W$  y  $\mu \in W^\perp$ , luego

$$0 = \int_X 1 d\mu = \int_{x_0} 1 d\mu = \alpha,$$

lo que nos lleva a una contradicción.

Concluimos por tanto que  $W^\perp = (0)$  y  $W = C(X)$ . □

## Glosario

- Sea  $E$  un espacio vectorial. Un funcional es una aplicación  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$  lineal y continua.
- Sea un conjunto  $X$  y un subconjunto  $A \subset X$ . Entonces la función  $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ , definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

se llama función característica (o indicadora) de  $A$ .

- Sea  $X$  un espacio normado, denotamos por

$$B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

y

$$S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Llamamos bola unidad y esfera unidad, respectivamente a  $B_X$  y  $S_X$ .

- Sea  $(X, \mathcal{M})$  un espacio medible. Para cada  $x \in X$ , denotamos por  $\delta_x$  a la medida definida por:

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

para todo  $E \in \mathcal{M}$ .

- **Lema de Zorn:** Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior contiene al menos un elemento maximal.
- **Teorema de Hahn-Banach (real)** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y sea  $p$  una seminorma en  $V$ . Si  $W \subset V$  es un subespacio vectorial y  $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lineal y tal que  $f(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in W$ , entonces existe una aplicación lineal  $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que:
  - i)  $F(x) = f(x)$  para todo  $x \in W$ .
  - ii)  $F(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in V$ .
- Si  $X$  es un espacio normado, como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, para todo  $x_0 \in X \setminus \{0\}$ , existe un funcional  $f \in X^*$  tal que  $\|f\| = 1$  y  $f(x_0) = \|x_0\|$ .
- Sea  $X$  un espacio de Banach. Si  $A \subset X$ , el conjunto:

$$A^\perp := \{f \in X^* : f(a) = 0 \text{ para todo } a \in A\}$$



se denomina anulador.

- **Teorema de Representación de Riesz:** Sea  $X$  un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

*i)*  $x^* \in C_0(X)^*$ .

*ii)* Existe una única medida  $\mu \in M(X)$  tal que

$$x^*(f) = \int_X f(t) d\mu(t), \quad f \in C_0(X).$$

Además, la correspondencia entre  $x^*$  y  $\mu$  define un isomorfismo entre  $C_0(X)^*$  y  $M(X)$ .

## Referencias

- [1] R. Larsen, *Functional Analysis: An Introduction*. Dekker, New York, 1973
- [2] H.L. Royden, *Real Analysis*, 2nd. Macmillan, New York, 1968
- [3] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer, Berlin, 1998
- [4] S. K. Berberian, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*. Springer, New York, 1974
- [5] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd. Springer, New York, 1990
- [6] M. Krein; D. Milman, *On extreme points of regular convex sets*. Studia Mathematica, **9** (1940) 133–138
- [7] J. R. Jacinto, *Teorema de Krein-Milman*. Universidad Nacional de La Plata, 2010
- [8] T. E. Gilsdorf, *Espacios localmente convexos y algunos resultados de George Mackey (1916 - 2006)*. Universidad de Dakota del Norte, 2008
- [9] Varios autores, *Los conjuntos Convexos y sus Propiedades*, Capítulo 1. Universidad de Murcia. Disponible en <https://webs.um.es/mhcifre/apuntes/cap1.pdf>
- [10] E. A. Briceño, *Espacios de Banach Estrictamente Convexos*. Universidad de los Andes, 2005
- [11] J. A. Clarkson, *Uniformly Convex Spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, (1936), 396-414
- [12] F. D. Montalvo, *Apuntes de Topología, Tema 12: Espacios Compactos*. Universidad de Extremadura
- [13] M. González, *Análisis Funcional*. Universidad de Cantabria, 2020-2021
- [14] A. Vera; P. Alegría, *Un curso de análisis funcional. Teoría y problemas*. AVL, Murcia, 1997
- [15] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd. McGraw-Hill, New York, 1987