



*Facultad  
de  
Ciencias*

**SERIES DE FOURIER Y SUS  
APLICACIONES  
(FOURIER SERIES AND THEIR  
APPLICATIONS)**

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

**Autor: Irene Goñi Ibaceta**

**Director: Rafael Granero Belinchón**

**Co-Director: Carlos Alberto Meneses Agudo**

**Noviembre - 2021**

## Resumen

Las series de Fourier, además del enorme papel jugado en el desarrollo histórico del Análisis, tienen importantes aplicaciones fuera de las matemáticas en áreas como por ejemplo el tratamiento de señales. En este trabajo revisaremos algunas de sus propiedades matemáticas básicas, así como los algoritmos que permiten calcularlas de manera aproximada.

Además, mostraremos un ejemplo del funcionamiento de estos algoritmos y su utilidad. Finalmente estudiaremos algunas de sus aplicaciones, como el análisis en el dominio de frecuencia de vibraciones para el mantenimiento predictivo de máquinas industriales.

**Palabras clave:** series de Fourier, transformada de Fourier, transformada rápida de Fourier, mantenimiento predictivo, procesamiento de señales.

## Abstract

Fourier series, in addition to the enormous role played in the historical development of Analysis, have important applications beyond mathematics in areas such as signal processing. This work aims to review some of their basic mathematical properties, as well as the algorithms that allow us to calculate them in an approximate way.

In addition, we will show an example of how these algorithms work and their usefulness. Finally, we will study some of their applications, such as the analysis in the frequency domain of vibrations for the predictive maintenance of industrial machines.

**Key words:** Fourier series, Fourier transform, Fast Fourier Transform, predictive maintenance, signal processing.

## Agradecimientos

*En primer lugar, me gustaría agradecer a Rafa por su ayuda y colaboración, facilitándome la realización de este trabajo. A Carlos, por estar disponible para cualquier duda, por ínfima que fuese.*

*A mis padres, por su confianza y apoyo. A mi hermana, por haber sido mi gran referente y haberme apoyado en todo momento.*

*A Iker, por haberme acompañado durante todos estos años y haber soñado mis sueños.*

*A la familia que escogí, por sus ánimos y por celebrar mis logros como suyos. Especialmente a Dorina, por ser colchón en el que caer, hombro en el que llorar y fuerza para levantarme.*

*Gracias a todas las personas que me he cruzado a lo largo de estos años y que han hecho esta etapa inolvidable. Os habéis vuelto indispensables en mi vida.*

*Agradecer especialmente a la persona que más me ha ayudado durante estos años: Delfina. Gracias por tu paciencia y apoyo, por haberme animado a seguir y por tu consejo. Sin ti este día no hubiera llegado.*

*Y por último a Constanza porque... tenías razón.*

# Índice general

<b>1. Series de Fourier</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción histórica . . . . .	1
1.2. El espacio $L^2$ . . . . .	4
1.2.1. Una base para nuestro espacio $L^2$ . . . . .	8
1.3. Introducción a las series de Fourier . . . . .	12
1.4. Convergencia de las series de Fourier . . . . .	13
1.4.1. Teoremas que aseguran convergencia puntual o uniforme . . . . .	15
1.5. Series de Fourier trigonométricas en $[-l, l]$ . . . . .	17
1.6. Convolución . . . . .	18
<b>2. La transformada de Fourier</b>	<b>20</b>
2.1. La transformada de Fourier . . . . .	20
2.1.1. Resultados más relevantes . . . . .	21
2.2. Algoritmos para calcular la transformada de Fourier . . . . .	23
2.2.1. La Transformada Discreta de Fourier . . . . .	23
2.2.2. La Transformada Rápida de Fourier . . . . .	25
2.3. Convolución . . . . .	27
2.4. Ejemplo . . . . .	29
<b>3. Caso práctico</b>	<b>33</b>
3.1. Introducción . . . . .	33
3.2. Descripción del proyecto. . . . .	34
3.3. Primeros análisis . . . . .	35
3.4. Análisis en el dominio de frecuencia . . . . .	38
3.5. Conclusiones . . . . .	43
<b>A. Teoremas útiles</b>	<b>47</b>
<b>B. Resultados</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Series de Fourier

### 1.1. Introducción histórica

Las series de Fourier son series de la forma  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\phi_n(x)$ . La idea general de las series de Fourier es que toda función periódica de período  $T$  puede expresarse como una suma trigonométrica de senos y cosenos de ese mismo período  $T$ .

El desarrollo del análisis de Fourier tiene una larga historia e involucra a un gran número de personas y además la investigación de muchos fenómenos físicos. Asimismo, tiene enormes aplicaciones en diferentes campos como en procesamiento de señales, análisis de vibraciones, mecánica cuántica, econometría, teoría de números, etc.

La historia de las series de Fourier comenzó con D'Alembert (1747) y su tratado de las oscilaciones de las cuerdas de un violín. Este problema puede describirse de la siguiente forma: supongamos que tenemos una cuerda flexible y la tensamos, fijando sus extremos en los puntos  $(0,0)$  y  $(\pi,0)$  por conveniencia. Tiramos de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por  $y = f(x)$  y entonces, soltamos. ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de la cuerda están siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular al eje de abscisas, el movimiento vendrá dado por una función  $u(x,t)$  que representará el desplazamiento vertical de la cuerda en la coordenada  $x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) en el tiempo  $t$  ( $t \geq 0$ ). Por tanto, para cada valor fijo de  $t$ ,  $u(x,t)$  será la forma que tendrá la cuerda en nuestro instante  $t$ . El problema que planteamos es obtener  $u(x,t)$  a partir de  $f(x)$ .

Bajo ciertas hipótesis, D'Alembert demostró que la función debe satisfacer el siguiente problema de valores iniciales y de contorno para la ecuación de ondas, lo que supondría la

primera aparición de una EDP en la historia:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x^2} & 0 < x < \pi, t > 0, \text{ Ec. de Ondas} \quad (1.1) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0, \text{ Condiciones de contorno} \quad (1.2) \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi \quad (1.3) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 & 0 \leq x \leq \pi, \text{ Condición inicial} \quad (1.4) \end{array} \right.$$

La ecuación (1.1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida como **Ecuación de Ondas**. (1.2) muestra que la cuerda está fija en sus extremos. (1.3) representa la posición inicial de la cuerda y (1.4) significa que la velocidad inicial es cero.

D'Alembert también demostró que la solución a esta ecuación viene dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\bar{f}(x + t) + \bar{f}(x - t)] \quad (1.2)$$

donde  $\bar{f}$  es la extensión a  $\mathbb{R}$ , impar y  $2\pi$ -periódica de nuestra función  $f$ . Este resultado muestra que la posición alcanzada por nuestra cuerda está completamente condicionada por su posición inicial.

En 1748, Euler propuso que la solución a esta ecuación podía ser expresada de la siguiente forma:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin(nx) \quad (1.3)$$

Por tanto,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin(nx) \cos(nt) \quad (1.4)$$

Estas mismas ideas fueron luego expuestas por Bernoulli (1753) y Lagrange (1759). La fórmula del cálculo de los coeficientes apareció por primera vez en un artículo escrito por Euler en 1777.

$$f(n) = 2 \int_0^1 \bar{f}(x) \sin(nx) dx \quad (1.5)$$

La contribución de Fourier comenzó en 1807, con sus estudios del problema del flujo de calor. Hizo un intento de demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica. En una sesión de la Academia Francesa de las Ciencias, presentó la creación del *Análisis Armónico*.

Fourier había deducido una ecuación que describía la conducción del calor a través de los cuerpos sólidos, la **Ecuación del calor**:

Supongamos que queremos estudiar cómo el calor se difunde en un alambre homogéneo de longitud  $L$  a lo largo del tiempo  $t$ . Para ello, necesitamos conocer la temperatura inicial

en cada punto del alambre. Además, necesitamos saber lo que sucede en los extremos del alambre. Podemos comenzar suponiendo que esta temperatura es cero durante todo el proceso. Además, supongamos que el alambre es lo suficientemente fino para que el calor esté igualmente distribuido sobre cada sección transversal en cada instante de tiempo  $t$ . Por último, supongamos que no hay fuentes internas para el calor y que está aislado (no hay pérdida del calor). Sea  $u(x, t)$  la temperatura del alambre en el punto  $x$  en el instante  $t$ . Este problema lo podemos formular de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} & x \in (0, \pi), t > 0, \text{ Ec. del Calor} \quad (1.6) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \text{ Condiciones de contorno} \quad (1.7) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (0, \pi), \text{ Condición inicial} \quad (1.8) \end{array} \right.$$

Partiendo de las ideas de *Bernoulli* para la ecuación de ondas, Fourier buscó las soluciones más sencillas para la ecuación del calor: aquellas de la forma  $u(x, t) = F(x)G(t)$ . Si imponemos que se satisfacen tales funciones obtenemos los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$F''(x) + \lambda F(x) = 0, \quad x \in (0, L), \quad F(0) = F(L) = 0 \quad (1.7)$$

$$G'(t) + \lambda G(t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.8)$$

Queremos determinar los valores de  $\lambda$  que nos proporcionan soluciones no nulas. Puede encontrarse un proceso detallado de este procedimiento en [1]. La solución de (1.7) viene dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) \exp(-n^2 t) \quad (1.9)$$

La aportación que hizo Fourier fue imaginar que cualquier función arbitraria  $f(x)$  puede ser expresada de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1.10)$$

donde, en nuestro caso  $L = \pi$ . Esto le condujo además a mostrar que la expresión (1.6) puede expresarse en forma de serie trigonométrica:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 t}{L^2}\right) \quad (1.11)$$

Para ello, encontró además las fórmulas, las cuales nos permiten calcular los coeficientes de la serie asociada a la función.

Sin embargo, este trabajo no fue aceptado a la primera. El auditorio estaba formado por matemáticos como Lagrange, Laplace y Legendre, quienes criticaron la falta de rigor del

tratamiento de Fourier. Por ello, tuvo que rehacer su trabajo. Finalmente, su trabajo fue aceptado y expuesto años después en su obra de 1822, *Théorie analytique de la chaleur*. Es importante añadir que este estudio contribuyó a aclarar la idea de función que tenemos hoy en día. Este tratamiento posterior está asociado a Dirichlet, Riemann, Cantor y Lebesgue.

Finalmente, Carleson y Hunt respondieron a la pregunta de qué funciones pueden desarrollarse como serie de Fourier:

**Teorema 1.1** *Sea  $f$  una función periódica sobre  $L^p$  para algunos  $p \in (1, \infty)$ , con coeficientes de Fourier  $\hat{f}(n)$ . Entonces:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{inx} = f(x) \quad (1.12)$$

para casi todo  $x$ .

El Teorema de Carleson es un resultado fundamental en análisis matemático que establece, según la medida de Lebesgue, la convergencia en casi cualquier punto de las series de Fourier para funciones de cuadrado integrable (ver [4]).

## 1.2. El espacio $L^2$

Antes de presentar las series de Fourier, queremos encontrar una clase de funciones para las que tenga sentido. Estamos interesados en encontrar una equivalencia entre algún espacio de funciones y algún espacio de sucesiones y así obtener una equivalencia entre los coeficientes de Fourier, que expondremos más adelante y las funciones que ellos representan. Por ello, introducimos a continuación el espacio  $L^2$ , el cual veremos que es un espacio de Hilbert y encontraremos un sistema ortonormal completo formado por sucesiones de funciones.

**Definición 1.2** *Definimos  $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$  como el espacio de funciones medibles que satisfacen:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$$

*Definimos en  $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$  la siguiente relación de equivalencia:*

*$f \sim g$  si y sólo si el conjunto  $\{t \in [-\pi, \pi] : f(t) \neq g(t)\}$  tiene medida nula.*

**Definición 1.3** *Se define  $L^2([-\pi, \pi])$  como:*

$$L^2[-\pi, \pi] := \mathcal{L}^2[-\pi, \pi] / \sim$$

A este espacio vectorial lo dotamos del producto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.13)$$

y de la norma:

$$\|f\|_{L^2} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.14)$$

Veamos que el producto interno está bien definido:

1.

$$\langle f, f \rangle = \int |f(x)|^2 dx > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ en casi todo punto.}$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ en casi todo punto.}$$

$$\text{Si } f(x) = 0 \text{ c.t.p.} \Rightarrow \langle 0, 0 \rangle = 0.$$

2.

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int (\alpha f + \beta g) h dx = \int (\alpha f h + \beta g h) dx \\ &= \alpha \int f h dx + \beta \int g h dx \\ &= \langle \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g, h \in L^2.$$

3.

$$\overline{\langle f, g \rangle} = \int g(x) \overline{f(x)} dx = \langle g, f \rangle$$

Para ayudarnos a probar que la norma está bien definida nos ayudaremos del siguiente resultado:

**Proposición 1.4** *Las funciones en este espacio verifican:*

1. **Teorema de Pitágoras:** Sean  $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^2$  ortogonales dos a dos, entonces

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \dots + \|f_n\|^2.$$

2. **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2([-\pi, \pi])} \|g\|_{L^2([\pi, \pi])}.$$

3. **Desigualdad triangular:**

$$\|f + g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}.$$

*Demostración:* La demostración del Teorema de Pitágoras se obtiene de forma inmediata gracias a la definición de producto interno. Veamos la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

Si  $\langle f, g \rangle = 0$  el resultado es evidente. Supongamos que es distinto de cero. Sean

$$\alpha = \frac{\langle f, g \rangle}{|\langle f, g \rangle|} \quad \text{y} \quad z = \alpha g$$

Para todo  $a \in \mathbb{R}$  se cumple:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle f - az, f - az \rangle \\ &= \langle f, f - az \rangle - a \langle z, f - az \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - a \langle f, z \rangle - a \langle z, f \rangle + a^2 \langle z, z \rangle \\ &= \|f\|^2 - a(\langle f, z \rangle + \langle f, z \rangle) + a^2 \langle \alpha g, \alpha g \rangle \\ &= \|f\|^2 - 2a \operatorname{Re} \langle f, z \rangle + a^2 \alpha \bar{\alpha} \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 - 2a \operatorname{Re} \left\langle f, \frac{\langle f, g \rangle}{|\langle f, g \rangle|} y \right\rangle + a^2 |\alpha|^2 \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2a \operatorname{Re} \frac{\langle f, g \rangle}{|\langle f, g \rangle|} \langle f, g \rangle + a^2 \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2a |\langle f, g \rangle| + a^2 \|g\|^2 \end{aligned}$$

Consideramos la función  $h(a) = \|f\|^2 - 2a |\langle f, g \rangle| + a^2 \|g\|^2$ . Sabemos que esta función es no negativa. El mínimo de la función se alcanza en  $a_0 = \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|g\|^2}$ . Por tanto,  $h(a_0) \leq h(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ . Además,  $h(a_0) \geq 0$ . Es decir:

$$\|f\|^2 - 2 \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^2} + \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^2} = \|f\|^2 - \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^2} \geq 0$$

de donde despejando se obtiene la desigualdad buscada.

Veamos por último que se verifica la desigualdad triangular. Para  $f, g \in L^2$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} + \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2 |\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2 \|f\| \|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwarz.  $\square$

Por tanto, para la norma definida se cumple:

1. Si  $|f(x)|^2$  es no negativo en casi todo punto entonces la integral es no negativa.  
Si  $\|f(x)\| = 0$  entonces  $f(x) = 0$  en c.t.p y si  $f(x) = 0$  en c.t.p entonces  $\|f(x)\| = 0$  en c.t.p.

2.

$$\|\alpha f\| = \sqrt{\langle \alpha f, \alpha f \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle f, f \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle f, f \rangle} = |\alpha| \cdot \|f\|$$

3.

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| \\ &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| \leq (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Tenemos entonces que  $(L^2[-\pi, \pi], \|\cdot\|)$  es un espacio normado.

Es por esto que tiene sentido preguntarse si  $L^2$  es espacio de Hilbert. Veámoslo:

**Proposición 1.5** *Se tiene que  $L^2([-\pi, \pi])$  es un espacio de Hilbert.*

*Demostración:* Consideramos una sucesión de funciones de Cauchy en  $L^2([-\pi, \pi])$ . Suponemos que:

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$$

Consideramos ahora otra sucesión  $g$  definida de la siguiente forma:

$$g_1 = 0, \quad g_2 = |f_1|, \quad g_3 = |f_1| + |f_2 - f_1|, \quad \dots \quad g_n = |f_1| + |f_2 - f_1| + \dots + |f_n - f_{n-1}|$$

Esta sucesión es creciente y no negativa. Además:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_n|^2 d\mu \leq \left( \|f_1\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i - f_{i-1}\| \right)^2 \leq (\|f_1\| + 1)^2$$

Por tanto, por el teorema de Levi,  $g_n$  converge en casi todo punto a una función  $g \in L^2([-\pi, \pi])$ . Asimismo, tenemos:

$$|f_{n+k} - f_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} (f_i(x) - f_{i-1}(x)) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |f_i(x) - f_{i-1}(x)| = g_{n+k}(x) - g_n(x)$$

Por tanto, vemos que  $f_n$  es de Cauchy y converge puntualmente a una función  $f$ . Nos falta ver que  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  y que  $f_n$  converge en norma a  $f$ . Veámoslo:

$$|f_n(x)| = |f_1(x) + \sum_{i=2}^n (f_i(x) - f_{i-1}(x))| \leq g_n(x) \leq g(x) \text{ para casi todo } n$$

Luego  $|f(x)| \leq g(x)$  y por tanto  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ . También, tenemos que:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2g(x) \text{ c.t.p}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)|^2 = 0,$$

por el teorema de la convergencia dominada, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

□

### 1.2.1. Una base para nuestro espacio $L^2$

Antes de mostrar las posibles bases para  $L^2([-\pi, \pi])$  nos será de utilidad el siguiente resultado sobre la caracterización de las bases de Hilbert:

**Teorema 1.6** *Sea  $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$  un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert  $H$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de Hilbert.
2. Si existe un  $\mathbf{x} \in H$  tal que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathbf{x} = 0$ .
3. Para todo  $\mathbf{x} \in H$  se verifica que:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle \mathbf{x}_n. \quad (1.15)$$

4. Para todo  $\mathbf{x} \in H$  se cumple

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle|^2. \quad (\text{Identidad de Parseval}). \quad (1.16)$$

*Demostración:*

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supongamos que existe un  $\mathbf{x} \in H$  distintos de cero tal que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Tenemos que probar que  $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$  no es una base de Hilbert. Sea  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ . Este elemento es unitario y ortogonal a todo elemento del sistema  $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Por lo tanto, el sistema

$$\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\bar{\mathbf{x}}\}$$

es un sistema ortonormal que contiene estrictamente al sistema inicial con lo cual este sistema no es base de Hilbert.

- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Dado  $\mathbf{x} \in H$  fijo, consideramos la sucesión

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle \mathbf{x}_k.$$

Veamos que esta sucesión es de Cauchy: Para todo  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n < m$  tenemos que

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_m\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle|^2.$$

Por la desigualdad de Bessel, la serie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle|^2$$

es convergente y por tanto

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle|^2 = 0.$$

Sea  $\mathbf{y} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{y}_m$  y veamos que  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ . Por (ii) sólo debemos probar que

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x}_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observemos que

$$\langle \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_n \rangle = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_n \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle & \text{si } m \geq n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases} \quad (1.17)$$

Por tanto,

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x}_n \rangle = \langle \mathbf{x} - \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_n \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n - \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_n \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle = 0$$

donde la segunda igualdad se obtiene debido a la linealidad del producto interior y a la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

- (iii)  $\Rightarrow$  (iv) Sea

$$\mathbf{y}_n = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle \mathbf{x}_k.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_n\|^2 &= \left\langle \mathbf{x} - \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle \mathbf{x}_k, \mathbf{x} - \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle \mathbf{x}_k \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2 \sum_{k=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle \langle \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}_k} \rangle \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$

$$0 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_k \rangle|^2.$$

- (iv)  $\Rightarrow$  (i) Procedemos por reducción al absurdo: Supongamos que existe un sistema ortonormal  $S$  que contiene estrictamente  $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Sea  $\mathbf{z} \in S$ ,  $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Por la identidad de Parseval tenemos que:

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_k \rangle|^2 = 0$$

ya que  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{x}_k \rangle = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ . Por tanto  $\mathbf{z} = 0$  lo que contradice nuestra hipótesis ( $\mathbf{z} \in S$ ).

□

**Proposición 1.7** Consideremos en  $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$  los sistemas:

$$S_1 = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

y

$$S_2 = \{e^{inx}\}$$

Se tiene que  $S_1$  y  $S_2$  son sistemas ortogonales.

*Demostración:* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\langle 1, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

y

$$\langle 1, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$$

Si  $n \neq m$ , obtenemos<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \langle \cos mx, \cos nx \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{(m-n)} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Nótese que nos hemos ayudado de:

$$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \quad 2 \sin A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

y análogamente,

$$\langle \sin mx, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$$

y  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle \cos nx, \sin mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

Además,

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$\langle \cos nx, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2nx + \cos 0x) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 2nx}{2x} + x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

y,

$$\langle \sin nx, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx = \pi$$

Por lo tanto,

$$\hat{S}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

es un sistema ortonormal en  $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ .

Por otro lado,

$$\langle e^{inx}, e^{inx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

y, si  $n \neq m$ ,

$$\begin{aligned} \langle e^{inx}, e^{imx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(n-m)} dx = \frac{e^{ix(n-m)}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i\pi(n-m)} - e^{-i\pi(n-m)}}{i(n-m)} \\ &= 2 \sin((n-m)\pi) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\hat{S}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}$$

es un sistema ortonormal en  $L^2([-\pi, \pi])$ . □

**Teorema 1.8** *Los conjuntos  $\hat{S}_1$  y  $\hat{S}_2$  definidos anteriormente son bases ortonormales para  $L^2([-\pi, \pi])$ .*

---

<sup>2</sup>Notemos que hemos hecho uso de  $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

*Demostración:* Para la realización de esta demostración basta con tener en cuenta el Teorema 1.6 expuesto anteriormente. Sabemos que son equivalentes:

- $\{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base de Hilbert.
- Si existe un  $\mathbf{x} \in H$  tal que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_n \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\mathbf{x} = 0$ .

Supongamos que existe  $\mathbf{x} \in L^2([-\pi, \pi])$  tal que  $\langle \mathbf{x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \rangle = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces:

$$\langle \mathbf{x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{x} e^{int} dt = 0$$

Necesariamente  $\mathbf{x}$  debe ser 0.

De manera análoga, si:

$$\langle \mathbf{x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle = 0$$

y  $\mathbf{x}$  es distinto de  $\cos nx$  y de  $\sin nx \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}$  debe ser 0.

Por tanto, concluimos el resultado. □

### 1.3. Introducción a las series de Fourier

**Definición 1.9** Sea  $f$  una función integrable definida en  $[-\pi, \pi]$ . Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  definimos el  **$n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$**  como

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

y la **serie de Fourier asociada a  $f$**  como

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} \tag{1.18}$$

**Observación 1.10** Cuando la función  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  es real, es habitual usar su expansión en serie trigonométrica real.

Utilizando la fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  es fácil ver que (1.18) implica:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{1.19}$$

Consideramos:

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

y

$$b_n = i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$  y obtenemos el resultado.

## 1.4. Convergencia de las series de Fourier

**Definición 1.11** Dada una sucesión  $u_n(x)$  y una función  $u(s)$  definidas en un intervalo  $I$  tenemos:

1.  $u_n$  converge puntualmente a  $u$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \forall x \in I$ .
2.  $u_n$  converge uniformemente a  $u$  si:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C(I)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in I} |u_n(x) - u(x)| = 0$ .

**Definición 1.12** Definimos la suma parcial

$$S_N u(x) = \sum_{l=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z) e^{-izl} dz \right) e^{izl}.$$

**Lema 1.13** Se tiene que:

$$S_N u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(z) \mathcal{D}_N(x-z) dz,$$

donde

$$\mathcal{D}_N(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})z}{\sin\frac{z}{2}}$$

se denomina **Núcleo de Dirichlet**.

*Demostración:* Gracias a la definición 1.12 tenemos:

$$\begin{aligned} S_N u(x) &= \sum_{l=-N}^N \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z) e^{-izl} dz \right) e^{izl} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z) \sum_{l=-N}^N e^{il(x-z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z) \sum_{l=-N}^N (e^{i(x-z)})^l dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z) e^{i(x-z)N} \sum_{l=-N}^N e^{i(x-z)N} (e^{i(x-z)})^l dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z) e^{-i(x-z)N} \sum_{l=-N}^N (e^{i(x-z)})^{N+l} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi u(z) e^{i(x-z)N} \sum_{n=0}^{2N} (e^{i(x-z)})^n dz. \end{aligned}$$

Usando que:

$$\sum_{j=0}^k r^j = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{r^{-\frac{1}{2}} (1 - r^{k+1})}{r^{-\frac{1}{2}} (1 - r)} = \frac{r^{-\frac{1}{2}} - r^{k+\frac{1}{2}}}{r^{-\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}}},$$

podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_N(x - z) &= \frac{1}{2\pi} e^{i(x-z)N} \left( \frac{1 - e^{(2N+1)i(x-z)}}{1 - e^{i(x-z)}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-(N+1/2)i(x-z)} - e^{(N+1/2)i(x-z)}}{e^{i(x-z)/2} - e^{-i(x-z)/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})(x - z))}{\sin(\frac{x-z}{2})}. \end{aligned}$$

□

**Lema 1.14** *Se tiene que  $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_N(z) dz = 1$ . Como además  $\mathcal{D}_N(z)$  es par, se tiene que:*

$$\int_0^{\pi} \mathcal{D}_N(z) dz = \int_{-\pi}^0 \mathcal{D}_N(z) dz = \frac{1}{2}.$$

*Demostración:*

Tenemos que:

$$\sum_{n=-N}^N e^{inz} = 1 + \sum_{n=1}^N 2 \cos(nz)$$

Por tanto:

$$\mathcal{D}_N(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\pi} \cos(nz).$$

y podemos concluir el resultado. □

**Lema 1.15 Lema de Riemann-Lebesgue.** *Sea  $f \in C^1([-\pi, \pi])$  una función periódica. Entonces se tiene que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) z dz = 0.$$

*Demostración:* Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) z \right) dz \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \partial_z \left( \frac{-\cos((N + \frac{1}{2})z)}{(N + \frac{1}{2})} \right) dz \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \partial_z f(z) \frac{\cos((N + \frac{1}{2})z)}{(N + \frac{1}{2})} \\
 &\quad + \left( \frac{-f(z) \cos((N + \frac{1}{2})z)}{(N + \frac{1}{2})} \right) \Big|_{z=-\pi}^{z=\pi}
 \end{aligned}$$

Usando la periodicidad:

$$|I| \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} \partial_z f(z) \frac{\cos((N + \frac{1}{2})z)}{(N + \frac{1}{2})} dz \right| \leq \frac{2\pi}{(N + \frac{1}{2})} \|f\|_{C^1}$$

Ahora, tomando el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) z \right) dz = 0$$

□

### 1.4.1. Teoremas que aseguran convergencia puntual o uniforme

**Teorema 1.16** *Sea  $u(x) \in C^2((-\pi, \pi))$  una función periódica. Entonces la serie de Fourier converge uniformemente a  $u$ . Es decir*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - u\|_{C(I)} = 0.$$

*En particular, tenemos que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = u(x), \forall x \in [-\pi, \pi].$$

*Demostración:* Tenemos que ver que  $u(x) - S_N u(x)$  converge a cero. Para ello tenemos que ver que:

$$I_N = \int_{-\pi}^{\pi} (u(x) - u(x - z)) \mathcal{D}_N(z) dz = 0$$

Teniendo en cuenta que el núcleo de Dirichlet es una función par tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \partial_x u(x) z \mathcal{D}_N(z) dz = 0$$

Por lo tanto,

$$I_N = \int_{-\pi}^{\pi} (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz - \int_{-\pi}^{\pi} \partial_x u(x) z \mathcal{D}_N(z) dz,$$

de donde

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(x) - u(x-z)}{\sin \frac{z}{2}} \sin \left(N + \frac{1}{2}\right) z dz - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial_x u(x) z}{\sin \frac{z}{2}} \sin \left(N + \frac{1}{2}\right) z dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(x) - u(x-z) - \partial_x u(x) z}{\sin \frac{z}{2}} \sin \left(N + \frac{1}{2}\right) z dz \end{aligned}$$

Definimos

$$f^{(x)}(z) = \frac{u(x) - u(x-z) - \partial_x u(x) z}{\sin \frac{z}{2}}$$

Tenemos que  $f^{(x)}(z) \in C^1([-\pi, \pi])$  para cualquier  $x$ . Aplicando el Lema de Riemann-Lebesgue a la integral anterior obtenemos el resultado.  $\square$

**Teorema 1.17 Dirichlet.** *Sea  $u(x)$  una función continua a trozos cuya derivada  $u_x(x)$  también es continua a trozos. Entonces se verifica que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = \frac{u(x+) + u(x-)}{2}.$$

donde  $x+$  y  $x-$  denotan los límites laterales. Es decir, la serie de Fourier converge puntualmente a la medida de los límites laterales.

*Demostración:* Sea  $x \in [-\pi, \pi]$  fijo. Gracias a los lemas anteriores tenemos que:

$$\frac{u(x+) + u(x-)}{2} = u(x+) \int_{-\pi}^0 \mathcal{D}_N(z) dz + u(x-) \int_0^{\pi} \mathcal{D}_N(z) dz,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{u(x+) + u(x-)}{2} - S_N u(x) \\ &= \int_{-\pi}^0 (u(x+) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz + \int_0^{\pi} (u(x-) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin \frac{z}{2}} \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2}\right) z}{2\pi} dz + \int_{-\pi}^0 \frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin \frac{z}{2}} \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2}\right) z}{2\pi} dz \end{aligned}$$

Observamos que:

$$\phi_N(z) = \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2}\right) z}{2\pi},$$

cumplen

$$\int_0^\pi \phi_n(z)\phi_l(z)dz = \frac{1}{8\pi}\delta_l^n,$$

donde  $\delta_l^n$  es la **Delta de Kronecker** que vale 1 si  $n = l$  y 0 si no. Por lo tanto, basta comprobar utilizando la Desigualdad de Bessel que

$$\frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin \frac{z}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin \frac{z}{2}}$$

están en  $L^2([0, \pi])$  y  $L^2([0, -\pi])$  respectivamente. Como  $u$  es derivable a trozos con derivada continua a trozos se tiene que las funciones anteriores son continuas a trozos por lo que pertenecen a los espacios mencionados. Así, concluimos que

$$\int_{-\pi}^0 \frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin \frac{z}{2}} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})z}{2\pi} dz \rightarrow 0,$$

y

$$\int_0^\pi \frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin \frac{z}{2}} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})z}{2\pi} dz \rightarrow 0$$

concluyendo así el resultado. □

## 1.5. Series de Fourier trigonométricas en $[-l, l]$

Utilizando la fórmula de Euler

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z),$$

se tiene que

$$u(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z)e^{-izl} dz \right) e^{izl} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z)e^{-izl} dz \right) [\cos xl + i\sin xl]$$

Emparejando los términos  $l$  y  $-l$  llegamos a:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} u(z) dz}{2\pi} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z) [e^{-i\frac{\pi}{2}zl} + e^{izl}] dz \right) \cos xl \\ &\quad + i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z) [e^{-izl} - e^{izl}] dz \right) \sin xl \\ &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} u(z) dz}{2\pi} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z) \cos zldz \right) \cos xl + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z) \sin zldz \right) \sin xl \\ &= b_0 + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cos xl + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin xl, \end{aligned}$$

donde

$$a_l = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z) \sin z l dz \right), \quad b_l = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u(z) \cos z l dz \right), \quad l \geq 1$$

y

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z) dz$$

Los resultados de convergencia se siguen de 1.4.

## 1.6. Convolución

**Definición 1.18 *Producto de convolución.*** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en todo  $\mathbb{R}$ . Se denomina producto de convolución de  $f$  y  $g$  a la función que para cada  $x \in \mathbb{R}$  se define como:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy$$

**Teorema 1.19 *Convolución de series de Fourier.*** Sean  $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ . Sea  $h(x) = f(x) * g(x)$ . Denotamos por  $\bar{f}(x), \bar{g}(x), \bar{h}(x)$  a las series de Fourier asociadas a  $f, g$  y  $h$  respectivamente. Se tiene que:

$$\bar{h}(x) = 2\pi \bar{f}(x)\bar{g}(x)$$

*Demostración:* Sean  $f(x)$  y  $g(x)$ . Su series de Fourier asociadas son:

$$\bar{f}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

$$\bar{g}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)e^{inx}$$

donde  $\hat{f}(n)$  es el  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx$$

De manera análoga definimos  $\hat{g}(n)$ .

Sea ahora  $h(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned}\bar{h}(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(n)e^{inx} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx} dx \right) e^{inx} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right) e^{-inx} dx \right) e^{inx} \\ &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\hat{g}(n)e^{inx} \\ &= 2\pi \bar{f}(x)\bar{g}(x)\end{aligned}$$

□

# Capítulo 2

## La transformada de Fourier

### 2.1. La transformada de Fourier

Notemos que durante las secciones anteriores hemos trabajado tomando como período  $L = \pi$ . De una forma más general, podemos escribir las funciones  $2L$ -periódicas en  $L^2[-L, L]$  de la siguiente forma:

$$u(x) = \frac{1}{2L} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L}zl} dz \right) e^{ixl\frac{\pi}{L}} \quad (2.1)$$

Nos interesa considerar períodos cada vez mayores. De hecho nos gustaría no imponer periodicidad a nuestra función  $u(x)$ , es decir, tomar  $L = \infty$ .

Si definimos:

$$\xi = \frac{\pi}{L}l,$$

tenemos que

$$d\xi = \frac{\pi}{L}.$$

Tenemos entonces que (2.1) puede escribirse como:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-L}^L u(z) e^{-i\xi z} dz \right) e^{i\xi x} d\xi.$$

Si  $L \rightarrow \infty$  entonces  $d\xi \rightarrow 0$  y obtenemos:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(z) e^{-i\xi z} dz e^{i\xi x} d\xi.$$

**Definición 2.1** Definimos la transformada de Fourier de la función  $u(x)$  como

$$\hat{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx \quad (2.2)$$

para los valores de  $\xi \in \mathbb{R}$  en los que la integral definida anteriormente exista.

**Definición 2.2** Definimos la transformada de Fourier inversa de la función de la función  $v(\xi)$  como

$$\check{v}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Si calculamos la transformada de Fourier inversa de la transformada de Fourier de nuestra función  $u(x)$  tenemos:

$$\check{\check{u}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} d\xi e^{-i\xi x} dx$$

Aplicando el teorema de Fubini:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(z) e^{-i\xi z} dz e^{i\xi x} d\xi = u(x).$$

Por tanto, concluimos que  $u(x) = \check{\check{u}}(x)$ .

Es importante notar que no siempre podremos definir la transformada de Fourier de una función pero es suficiente que nuestra función sea  $L^1$  para que ésta exista (si  $\int |f(x)| < \infty$  entonces  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-i\xi x} < \infty$ ). Además, se cumple que:

$$|f(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

### 2.1.1. Resultados más relevantes

**Proposición 2.3** *Propiedades de la transformada de Fourier.*

1. La transformada de Fourier de una función real y par es una función real y par.
2. La transformada de Fourier de una función real e impar es una función imaginaria pura e impar.
3.  $\widehat{\alpha f_1 + \beta f_2} = \alpha \hat{f}_1 + \beta \hat{f}_2$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .
4. **Lema de Riemann-Lebesgue:** Si  $f$  es  $L^1$ . Entonces:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

*Demostración:*

1. Debemos tener en cuenta que el seno es una función impar en  $\mathbb{R}$  y el coseno es una función par en  $\mathbb{R}$ . Además, el producto de dos funciones pares es una función par y el producto de una función impar por otra par tiene como resultado una función impar.

Así:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)) dx = \int_0^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx.$$

Resulta que esta función es una función par respecto de  $\xi$ .

2. Utilizamos el argumento del apartado anterior. Además, tenemos en cuenta que el producto de dos funciones impares es una función par. Por lo tanto:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)) dx = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(\xi x) dx.$$

Resulta que esta función es una función impar respecto de  $\xi$ .

3. Sean  $u$  y  $v$  dos funciones cuyas respectivas transformadas de Fourier son:

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx$$

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i\xi x} dx$$

Consideramos  $w(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$ . Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{w}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha u(x) + \beta v(x)) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha u(x) e^{-i\xi x} + \beta v(x) e^{-i\xi x}) dx \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \alpha \hat{u}(\xi) + \beta \hat{v}(\xi) \end{aligned}$$

4. Si nuestra función es de clase  $C^\infty$  y el conjunto de puntos donde no se anula es compacto entonces basta con integrar por partes:

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) e^{-i\xi x} dx \right| &= \left| -\frac{f(x) e^{-i\xi x}}{i\xi} + \int \frac{1}{i\xi} f'(x) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\xi|} \int |f'(x)| dx \rightarrow 0 \text{ si } |\xi| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Si  $f$  es una función integrable cualquiera podemos escoger una función  $g$  de clase  $C^\infty$  de tal forma que  $\|f - g\| < \epsilon$  para cualquier  $\epsilon > 0$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} \limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(z)| &\leq \limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} \left| \int (f(x) - g(x)) e^{-i\xi x} dx \right| + \limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} \left| \int g(x) e^{-i\xi x} dx \right| \\ &\leq \epsilon + 0 = \epsilon \end{aligned}$$

Como  $\epsilon$  es arbitrariamente pequeño, concluimos el resultado.

□

## 2.2. Algoritmos para calcular la transformada de Fourier

Hemos comentado en la introducción la importancia y la utilidad de las series de Fourier en una gran variedad de problemas. En esta sección vamos a hablar sobre los algoritmos para el cálculo de la Transformada de Fourier, explicaremos en más detalle el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), popularizado por *J.W.Cooley* y *Tukey* en 1965 y finalmente expondremos un ejemplo para poder observar su utilidad y funcionamiento.

Antes de comenzar a hablar sobre la Transformada Rápida de Fourier, será necesario mostrar algunos conceptos.

### 2.2.1. La Transformada Discreta de Fourier

**Definición 2.4** Sea  $x_n$  una función discreta de período  $N$ . Definimos la **Transformada Discreta de Fourier (DFT)** como:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.3)$$

donde  $i$  denota la unidad imaginaria y  $e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}$  es la  $N$ -ésima raíz de la unidad.

La importancia de esta definición se debe a que puede ser calculada de forma eficiente en la práctica utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier.

**Definición 2.5** Definimos la **Transformada inversa de Fourier Discreta (IDFT)** como:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \quad n = 0, \dots, N-1$$

**Observación 2.6** Notemos que, por lo general tenemos:

$$x_n = IDFT\{X_k\} = \frac{1}{N} (\overline{DFT\{\bar{X}_k\}})$$

donde  $\overline{DFT}$  y  $\bar{X}$  denotan el complejo conjugado.

En la siguiente proposición veremos las propiedades que se cumplen en la DFT. Para evitar confusión en la notación y hacer más sencilla la lectura denotamos por  $g, f_1, \dots, f_m, f$  a distintas funciones discretas de período  $N$ ,  $\hat{g}, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_m, \hat{f}$  a sus correspondientes transformadas discretas y  $\bar{f}$  al complejo conjugado de una función  $f$ .

**Proposición 2.7 Propiedades de la DFT.** Se tiene que:

1. **Linealidad:** Si  $g = c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$ . entonces su transformada de Fourier es  $\hat{g} = c_1 \hat{f}_1 + \dots + c_m \hat{f}_m$ .

2. **Reflexión:** Si  $g(n) = f(-n)$  entonces  $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ .
3. **Conjugación:** Si  $g(n) = \bar{f}(n)$  entonces  $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ .
4. **Traslación:** Si  $g(n) = f(n - n_0)$  entonces  $\hat{g}(\xi) = e^{-\frac{2i\pi kn_0}{N}} \hat{f}(\xi)$  para  $n_0 \in \mathbb{Z}$ .
5. **Modulación:** Si  $g(n) = e^{\frac{2i\pi k_0 n}{N}} f(n)$  entonces  $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - k_0)$  para  $k_0 \in \mathbb{Z}$ .
6. **Inversión:** Si  $g(n) = \hat{f}(n)$  entonces  $\hat{g}(\xi) = N f(-\xi)$ .

*Demostración:*

1. ■ Sea  $g = cf$ . Entonces:

$$\hat{g} = \sum_{n=0}^{N-1} c f e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = c \sum_{n=0}^{N-1} f e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = c \hat{f}$$

- Sea  $g = f_1 + f_2$ . Tenemos que:

$$\hat{g} = \sum_{n=0}^{N-1} g e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} (f_1 + f_2) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f_1 e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} f_2 e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$$

2. Sea  $g(n) = f(-n)$ . Tenemos:

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f(-n) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}}$$

Sea ahora  $u = -n$ .

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} f(u) e^{-\frac{2i\pi -kn}{N}} = \hat{f}(-\xi)$$

3. Sea  $g(n) = \bar{f}(n)$ . Entonces

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{f}(n) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{\frac{2i\pi kn}{N}}} = \overline{\hat{f}(-k)} = \hat{f}(\xi)$$

4. Para este apartado consideramos  $g(n) = f(n - n_0)$ . De esta forma, tenemos:

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n - n_0) e^{-\frac{2i\pi kn}{N}}$$

Si consideramos  $u = n - n_0$  tenemos que  $n = 0$  si y solo si  $u = -n_0$  y  $n = N - 1$  si y solo si  $u = N - 1 - n_0$ . Por tanto, el resultado de nuestra expresión es el siguiente:

$$\hat{g}(\xi) = e^{-\frac{2i\pi kn_0}{N}} \sum_{u=-n_0}^{N-n_0-1} f(u) e^{-\frac{2i\pi ku}{N}} = e^{-\frac{2i\pi kn_0}{N}} \hat{f}(\xi)$$

5. Sea  $g(n) = e^{-\frac{2i\pi k_0 n}{N}} f(n)$ . Tenemos:

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-\frac{2i\pi k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{\frac{2i\pi k_0 n}{N}} e^{-\frac{2i\pi k n}{N}} = \hat{f}(k - k_0)$$

6. Sea  $g(n) = \hat{f}(n)$ .

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) e^{-\frac{2i\pi k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{-\frac{2i\pi k n}{N}} = N f(-k)$$

□

### 2.2.2. La Transformada Rápida de Fourier

Consideramos la Transformada Discreta de Fourier definida en 2.3. Notemos que:

- Para  $k = 0$ ,  $X_0 = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^0$  precisa del cálculo de  $N - 1$  sumas complejas.
- Para  $k = 1$ ,  $X_1 = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i n}{N}}$ , lo que precisa de  $N - 1$  productos y  $N - 1$  sumas complejas.
- ⋮
- Para  $k = N - 1$ ,  $X_{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i (N-1)n}{N}}$ , lo que precisa de  $N - 1$  productos y  $N - 1$  sumas complejas.

Esto nos muestra que el cálculo directo de la Transformada Discreta de Fourier requiere de un total de  $N(N - 1) + (N - 1)^2$  operaciones.

La transformada rápida de Fourier (FFT) es un algoritmo eficiente que permite calcular la Transformada de Fourier Discreta y su inversa con un coste computacional de  $\Theta(N \log N)$ . Como hemos mencionado antes, este algoritmo fue popularizado por James William Cooley y John Wilder Tukey en 1965. La idea básica de este tipo de algoritmo de divide y vencerás reside en la descomposición de nuestra función discreta en funciones más simples y así sucesivamente hasta llegar a tener que realizar transformadas de 2 elementos donde en este caso  $k$  tomará valores 0 o 1. Una vez tengamos resueltas las transformadas más simples reagruparemos el resto iterativamente hasta llegar al tamaño de la función original. Una vez finalizado el proceso, reordenaremos los datos.

Como veremos en el capítulo siguiente, este tipo de método nos será muy útil para el análisis de señales periódicas, ya que aprovecharemos su periodicidad y simetría para reducir gran parte de los cálculos.

Consideramos:

$$w_n = \left( 1, e^{\frac{2\pi i n}{N}}, \dots, e^{\frac{2\pi i (N-1)n}{N}} \right)$$

Si no existe error de confusión lo denotaremos  $w$ . Denotamos por  $w[k] = e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$ . De esta forma, podemos reescribir la Transformada Discreta de Fourier de la siguiente forma:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n w[-k]$$

Vamos a mostrar un ejemplo para  $N = 4 = 2^2$  con el objetivo de entender el funcionamiento de este algoritmo.

Sea  $x_N$  una función discreta de período 4. Tenemos que:

$$X_k = \sum_{n=0}^3 x_n e^{-\frac{2\pi i k n}{4}} \quad k=0, \dots, 3$$

Mostrando el cálculo detalladamente tenemos:

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 e^{-\frac{2\pi i}{4} 0 \cdot 0} + x_1 e^{-\frac{2\pi i}{4} 1 \cdot 0} + x_2 e^{-\frac{2\pi i}{4} 2 \cdot 0} + x_3 e^{-\frac{2\pi i}{4} 3 \cdot 0} \\ X_1 &= x_0 e^{-\frac{2\pi i}{4} 0 \cdot 1} + x_1 e^{-\frac{2\pi i}{4} 1 \cdot 1} + x_2 e^{-\frac{2\pi i}{4} 2 \cdot 1} + x_3 e^{-\frac{2\pi i}{4} 3 \cdot 1} \\ X_2 &= x_0 e^{-\frac{2\pi i}{4} 0 \cdot 2} + x_1 e^{-\frac{2\pi i}{4} 1 \cdot 2} + x_2 e^{-\frac{2\pi i}{4} 2 \cdot 2} + x_3 e^{-\frac{2\pi i}{4} 3 \cdot 2} \\ X_3 &= x_0 e^{-\frac{2\pi i}{4} 0 \cdot 3} + x_1 e^{-\frac{2\pi i}{4} 1 \cdot 3} + x_2 e^{-\frac{2\pi i}{4} 2 \cdot 3} + x_3 e^{-\frac{2\pi i}{4} 3 \cdot 3} \end{aligned}$$

Representándolo de forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w[0] & w[0] & w[0] & w[0] \\ w[0] & w[1] & w[2] & w[3] \\ w[0] & w[2] & w[4] & w[6] \\ w[0] & w[3] & w[6] & w[9] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix}$$

Gracias a la periodicidad (4 en nuestro caso), podemos simplificar cálculos y, haciendo uso de  $6 = 2 \bmod 4$  y  $9 = 1 \bmod 4$ , obtenemos:

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w[1] & w[2] & w[3] \\ 1 & w[2] & 1 & w[2] \\ 1 & w[3] & w[2] & w[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix}$$

Si alternamos las filas 2 y 3, el resultado que obtenemos es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[2] \\ X[1] \\ X[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w[2] & 1 & w[2] \\ 1 & w[1] & w[2] & w[3] \\ 1 & w[3] & w[2] & w[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{pmatrix}$$

Observemos que las dos primeras filas están formadas por dos matrices  $2 \times 2$  iguales. Además, la tercera y la cuarta fila son la misma alternada (salvo por los términos de la primera columna). Esto hace posible la factorización de la matriz de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w[2] & 1 & w[2] \\ 1 & w[1] & w[2] & w[3] \\ 1 & w[3] & w[2] & w[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & w[2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w[1] \\ 0 & 0 & 1 & w[3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & w[2] & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w[2] \end{pmatrix}$$

De esta forma obtenemos que el número de operaciones que necesitamos realizar son cuatro multiplicaciones complejas y ocho sumas.

Si  $N = 2^p$ , el algoritmo de la FFT factoriza matrices  $N \times N$  en  $p$  matrices del mismo tamaño de tal forma que se minimiza el número de multiplicaciones y sumas. Por ello, en los casos prácticos lo más habitual es tener funciones cuyo período sea una potencia de 2.

Sólo nos faltaría reordenar  $X$ , pero esto es un problema menor. Si reemplazamos  $n$  por su equivalente binario tenemos:

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[2] \\ X[1] \\ X[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X[00] \\ X[10] \\ X[01] \\ X[11] \end{pmatrix}$$

Si realizamos una inversión de bit (si por ejemplo tenemos 01 lo cambiamos por 10) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} X[00] \\ X[10] \\ X[01] \\ X[11] \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X[00] \\ X[01] \\ X[10] \\ X[11] \end{pmatrix} = X$$

Para más información sobre la Transformada Rápida de Fourier, pueden consultarse [14]-[16].

## 2.3. Convolución

Como ya hemos mencionado, en el siguiente capítulo realizaremos el análisis de funciones periódicas y mostraremos la utilidad de la Transformada Rápida de Fourier para el diagnóstico de fallos en rodamientos.

Uno de los procesos más utilizados para realizar este diagnóstico es el filtrado de las señales para poder observar mejor sus características eliminando el ruido que puedan presentar. Este filtrado es posible gracias a la convolución de funciones.

Para expresar el producto de convolución de dos funciones discretas  $f$  y  $g$  de tamaño  $N_1$  y  $N_2$  respectivamente debemos considerar sus funciones extendidas:

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < N_1 \\ 0 & N_1 \leq x < N \end{cases}$$

$$g_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < N_2 \\ 0 & N_2 \leq x < N \end{cases}$$

donde  $N = N_1 + N_2 - 1$ . De esta forma, definimos la convolución de nuestras funciones  $f$  y  $g$  de la siguiente forma:

$$f(x) * g(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f_e(n)g_e(x - n) \text{ para } x = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.4)$$

En muchas ocasiones, como veremos en el siguiente ejemplo, el filtrado que realizamos a una función es lineal y puede expresarse mediante una convolución:

$$h(x) = f(t) * g(t)$$

donde  $h$  será el resultado del producto de convolución entre nuestra función  $f$  y un impulso  $g$ . La importancia de la convolución y su utilidad en la práctica puede verse en el siguiente resultado:

**Teorema 2.8 Teorema de convolución.** Sean  $f, g \in L^2$ . Consideramos  $h(x) = f(x) * g(x)$ . Se tiene que:

$$\hat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$$

*Demostración:* Sea  $h(x) = f(x) * g(x)$ . Tenemos que:

$$\hat{h}(\xi) = \widehat{f * g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy \right) dx$$

Consideramos el siguiente cambio de variable:  $\tau = x - y$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(\tau+y)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(\tau)dy \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\tau} e^{-i\xi y} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(\tau)dy \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\tau} g(\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \sqrt{2\pi} \hat{g}(\xi) \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

□

Veamos ahora que la transformada discreta del producto de convolución de dos funciones discretas es el producto punto a punto de sus respectivas transformadas discretas. Consideramos  $h(k) = f(k) * g(k)$  definido en (2.4). Denotaremos por  $H_k, F_k$  y  $G_k$  a las transformadas de  $h(k), f(k)$  y  $g(k)$  respectivamente. Calculemos su transformada discreta:

$$\begin{aligned}
 H_k &= \sum_{n=0}^{N-1} (f(k) * g(k)) e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_e(m) g_e(k-m) e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_e(m) g_e(k-m) e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} e^{-\frac{2\pi i n}{N} (m-m)} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m) e^{-\frac{2\pi i}{N} nm} \sum_{m=0}^{N-1} g_e(k-m) e^{-\frac{2\pi i}{n} n(k-m)} \\
 &= F_k G_k
 \end{aligned}$$

## 2.4. Ejemplo

En esta sección vamos a realizar un ejemplo para poder observar el funcionamiento de la transformada de Fourier y su utilidad. Para ello consideramos la siguiente función:

$$f(t) = \cos(t) + 2 \cos(3t)$$

Donde en este caso, hemos considerado  $N = 2^7$ . A esta función le añadimos un ruido blanco. Mostramos a continuación una imagen en la que podemos ver la función y el resultado de añadirle ruido:

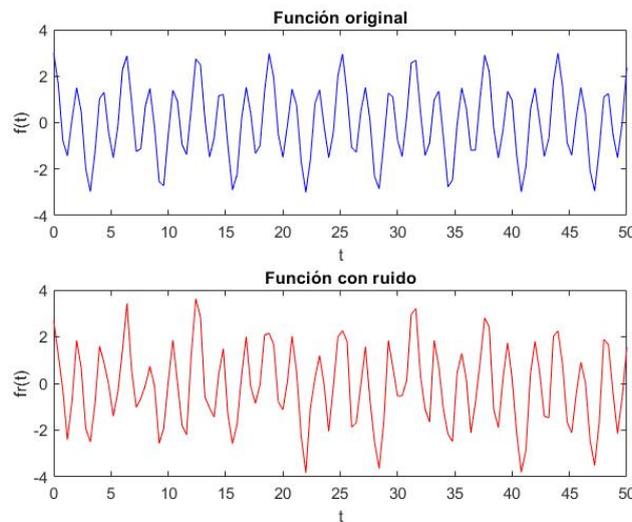


Figura 2.1: Comparación funciones en el dominio del tiempo.

Nos planteamos eliminar el ruido de esta función ayudándonos de las propiedades de la transformada de Fourier. Para ello, realizamos la FFT de la función. Mostramos a continuación una imagen del espectro de potencia de ambas funciones para poder observar la diferencia.

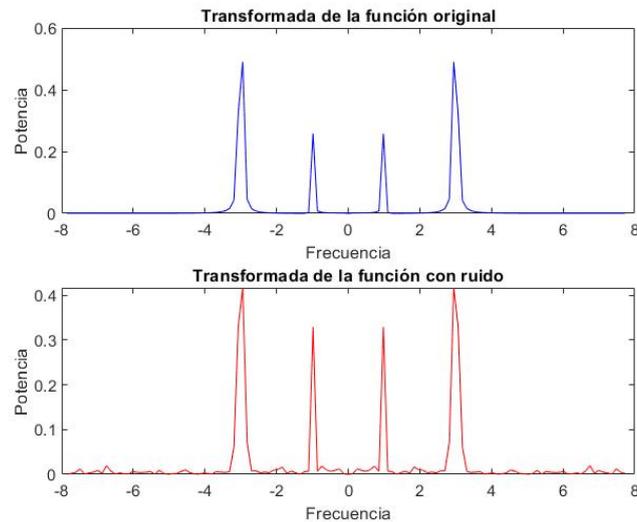


Figura 2.2: Espectro de potencia de las funciones.

Notemos que, como hemos definido antes, la transformada discreta de Fourier sólo está definida dentro del período. Fuera de este la función vale 0. Por ello sabemos que aquellas frecuencias que no sean 0 fuera del período de nuestra función pertenecen al ruido. En nuestro caso nos interesa eliminar las frecuencias mayores que 3. Para ello, hemos creado una función que, pasándole como parámetros la función que queremos filtrar, la frecuencia a partir de la que deseamos filtrar y el vector de frecuencias nos realizará este procedimiento, devolviéndonos la función filtrada.

Mostramos a continuación una imagen de la función una vez hemos aplicado este procedimiento junto con la función original y la función con ruido para poder observar las diferencias:

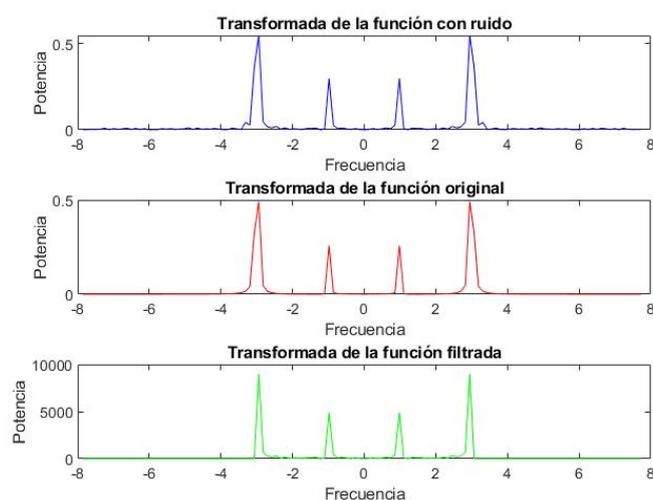


Figura 2.3: Transformada de la función con ruido, original y filtrada.

Para poder mostrar mejor qué realiza nuestra función mostramos la siguiente imagen, en la que mostramos las frecuencias comprendidas sólo entre 0 y 6.

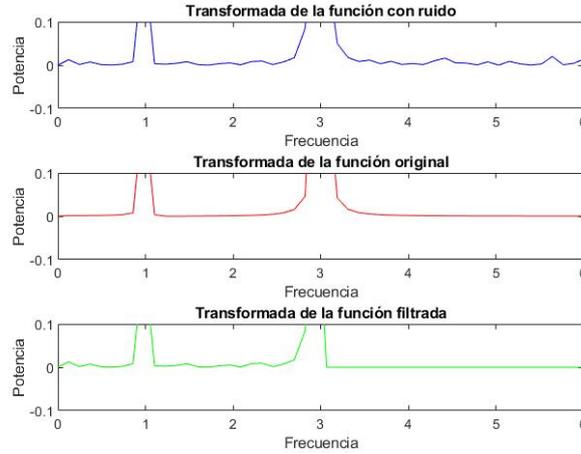


Figura 2.4: Imagen ampliada de las transformadas de las 3 funciones.

Es posible observar que el ruido que se ha introducido a la función y que afecta a las frecuencias comprendidas entre  $[-3, 3]$  no será posible de eliminar, por lo que la función que obtengamos finalmente deberá asemejarse a nuestra función original pero no serán iguales.

El resultado de este procedimiento es posible gracias al producto de convolución de funciones y al resultado visto en la sección anterior sobre la transformada de Fourier del producto de convolución. En nuestro caso, hemos considerado  $h(t) = g(t) * f(t)$  donde  $f(t) = \cos t + 2 \cos 3t$ . Sea  $A$  el conjunto de puntos donde  $f$  está definida. Nuestra función  $g(t) = 1_A(t)$  (función indicatriz). Por último, realizamos la transformada inversa de nuestra función y mostramos el resultado. Como hemos mencionado antes, no obtendremos la función original pero sí que deberá parecerse más:

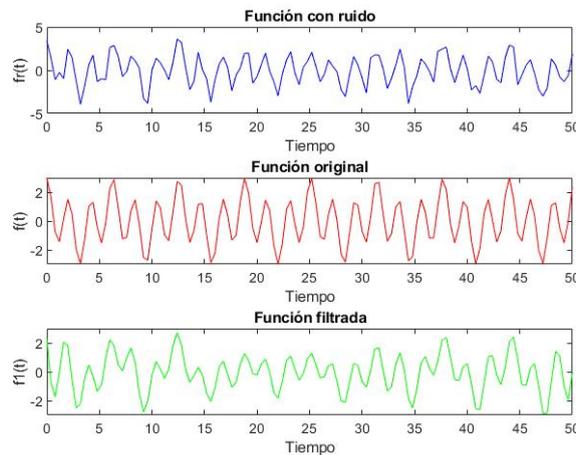


Figura 2.5: Función con ruido, original y filtrada.

El algoritmo para la eliminación del ruido es el siguiente:

---

**Algorithm 1** Eliminación de frecuencias no deseadas.

---

**Input:** Función,  $function$ ;

**Input:** Frecuencia a partir de la cual eliminar frecuencias,  $w_0$ ;

**Input:** Vector de frecuencias,  $w$ ;

**Output:** Función filtrada,  $f$ ;

**Output:** Transformada de la función filtrada,  $ft$ ;

1: Guardamos en una variable la longitud de la función,  $n$ ;

2: Realizamos la FFT de la función,  $F$ ;

3: **for** 1 :  $n$  **do**

4:     **if**  $w(i)$  es mayor que  $w_0$  **or**  $w(i)$  es menor que  $-w_0$  **then**

5:          $F = 0$

6:     **end if**

7: **end for**

8: Normalizamos  $F$ ,  $ft$ ;

9: Transformada inversa: Función filtrada en dominio de tiempo,  $f$ ;

10: **return**  $f, ft$ ;

---

# Capítulo 3

## Caso práctico

### 3.1. Introducción

En esta sección vamos a presentar un caso práctico sobre la utilidad de la transformada de Fourier: análisis espectral para la detección de fallos en rodamientos.

Este proyecto se inició en verano de 2020 durante la estancia en prácticas, donde se comenzó con la búsqueda, los primeros análisis y las primeras pruebas no concluyentes (ver [19]). En este capítulo mostraremos los resultados finales, algunos de los cuales pudieron ser obtenidos gracias a ciertos análisis ya realizados el verano.

Los rodamientos son componentes mecánicos cuya función radica principalmente en servir de apoyo o guía para piezas mecánicas que giran, oscilan o se deslizan. En la siguiente figura mostramos las componentes de un rodamiento:

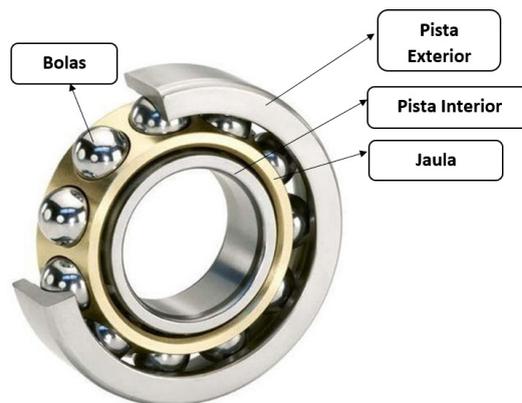


Figura 3.1: Partes de un rodamiento.

Su vida útil depende de diversos factores, entre los que destacamos: la carga, el nivel de trabajo, posibles desalineaciones, etc. Existen muchos factores que afectan a su vida útil por lo que intentar determinar su duración por métodos analíticos podría ser excesivamente costoso. Es por ello que nos planteamos técnicas basadas en el análisis en el espectro

de frecuencia para poder determinar su estado. Este tipo de técnicas para la detección de fallos recibe el nombre de Mantenimiento Predictivo.

La relevancia del análisis espectral reside en que, gracias a la periodicidad, dependiendo de en qué lugar se encuentre el fallo podremos visualizar los armónicos correspondientes a dicho fallo en el espectro de frecuencia, facilitándonos el diagnóstico. En este proyecto nos centraremos en clasificar dos posibles tipos de fallo: de pista exterior y de pista interior. Estos fallos estarán asociados a los siguientes armónicos:

1. BPF<sub>I</sub> (*Ball Pass Frequency Inner* o frecuencia de deterioro de pista interior). Número de bolas que pasan por un punto de la carrera interior en un giro completo.
2. BPF<sub>O</sub> (*Ball Pass Frequency Outer* o frecuencia de deterioro de pista exterior). Número de bolas que pasan por un punto de la carrera exterior en un giro completo.

Las ecuaciones correspondientes para el cálculo de estos armónicos son:

$$BPF_I = \frac{N_B}{2} \left( 1 + \frac{D_1}{D_2} \cos(\beta) \right) fr \quad BPF_O = \frac{N_B}{2} \left( 1 - \frac{D_1}{D_2} \cos(\beta) \right) fr$$

donde  $D_1$  y  $D_2$  son los radios correspondientes a la pista interior y exterior,  $N_B$  es el número de bolas y  $\beta$  el ángulo que forma con la superficie de contacto. La frecuencia angular,  $fr$ , variará dependiendo de cada caso.

## 3.2. Descripción del proyecto.

En este capítulo nos centraremos principalmente en la clasificación de 2 tipos de fallos de una base de datos de rodamientos que podemos encontrar en [17]. Cabe señalar que estos rodamientos están analizados a velocidad constante, a diferencia de los rodamientos analizados durante la estancia de prácticas. La variación de velocidad dificulta considerablemente el diagnóstico de los fallos en rodamientos con las técnicas que probaremos utilizando la teoría expuesta en este trabajo. Existen otras técnicas pero su ejecución puede ser costosa por lo que para este tipo de análisis se han realizado técnicas de Machine Learning, las cuales exceden al contenido de este trabajo.

En este proyecto, las mediciones se han realizado en dos posiciones distintas: FE (*Fan end*) y DE (*Fan end*). Nos centraremos en analizar las mediciones realizadas en DE. Mostramos a continuación una imagen de la posición en la que se realiza cada medición:

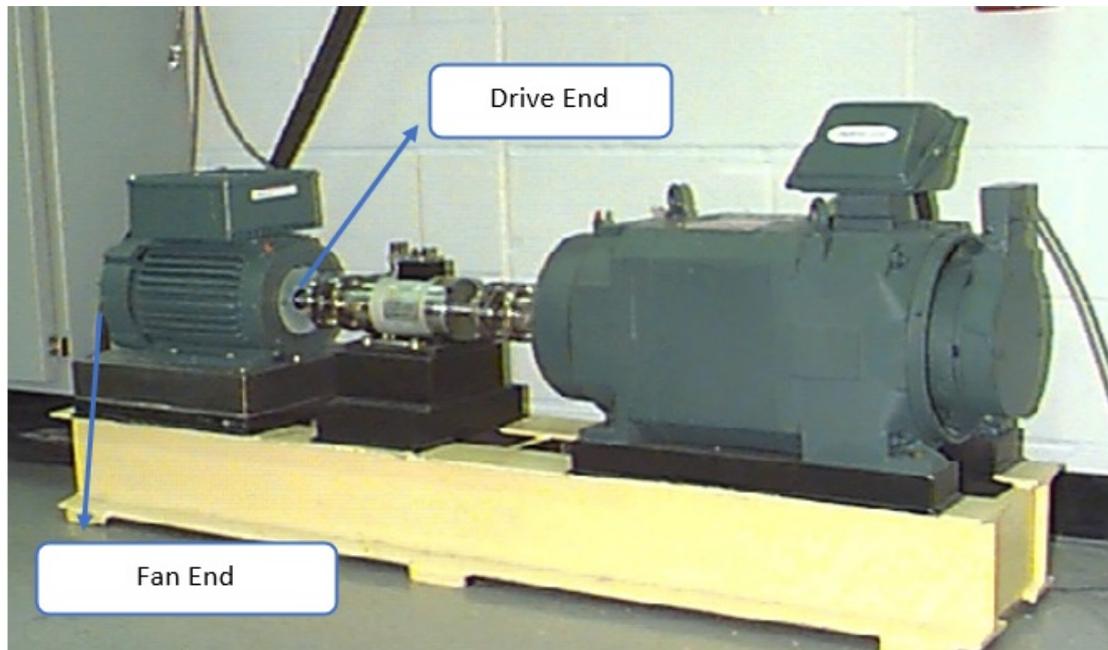


Figura 3.2: Lugares de medición.

Teniendo en cuenta estas posiciones, las características principales de los rodamientos son:

	Drive end
BPFI	$5.4152 * fr$
BPFO	$3.5848 * fr$
Frecuencia de Muestreo, $fs$	12000/24000

Cuadro 3.1: Características de los rodamientos.

### 3.3. Primeros análisis

En primer lugar, aprovechando que conocemos cada tipo de fallo, nos centramos en visualizar varios rodamientos para poder observar cómo son los datos que analizaremos a primera vista. Mostramos a continuación 3 datos: un rodamiento sano, un rodamiento con fallo de carrera interna y uno con fallo de carrera externa:

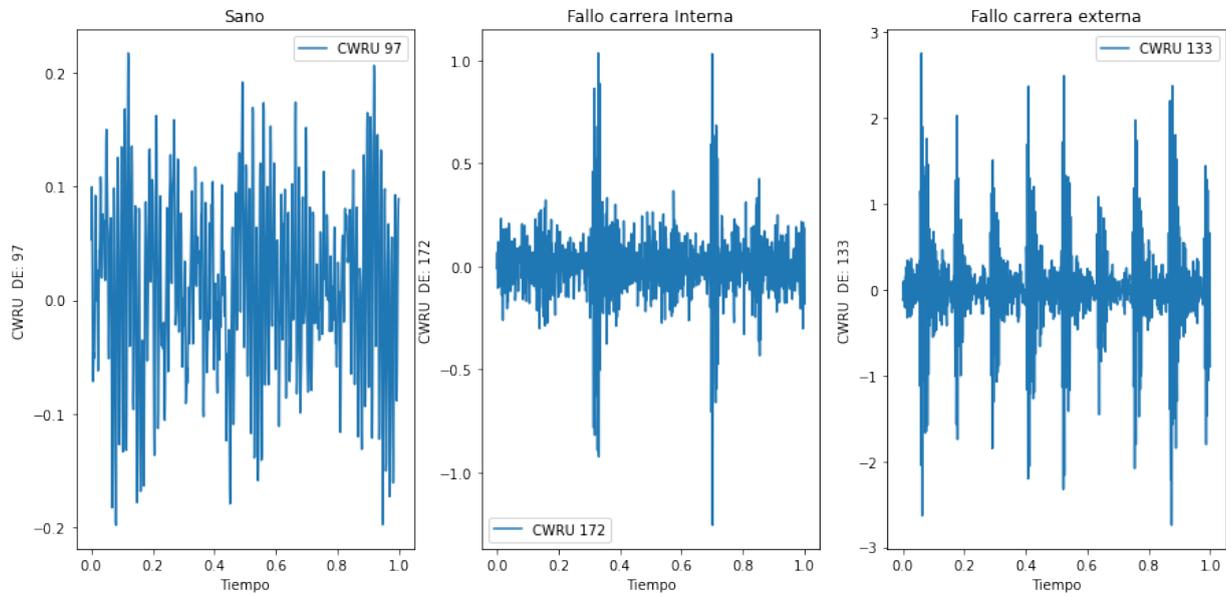


Figura 3.3: Representacion rodamiento sano, con fallo de carrera interna y con fallo de carrera externa.

Como podemos observar, las tres imágenes son distintas. Cabe destacar la diferencia de amplitud entre ellas. Sin embargo, a pesar de la diferencia entre estas tres imágenes, no somos capaces de determinar qué tipo de fallo presenta cada rodamiento.

Una vez realizada la visualización de los datos procedemos a extraer sus características principales. Los estadísticos que hemos utilizado son:

1. **Valores mínimos y máximos** de cada rodamiento.
2. **Media aritmética:**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

3. **Varianza:**

$$\sigma^2 = E[(X - E(X))^2]$$

donde E es el operador de la esperanza.

4. **Momentos centrados de órdenes 3 y 4:**

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k]$$

donde  $k$  tomará valores 3 y 4 en este caso.

5. **Asimetría de los datos (Skewness):** Se define el coeficiente de asimetría de Fisher como:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

donde  $\mu_3$  es el momento centrado de orden 3 y  $\sigma$  es la desviación estándar.

6. **Curtosis** (*Kurtosis*):

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

donde  $\mu_4$  es el momento centrado de orden 4 y  $\sigma$  es la desviación estándar. Una curtosis grande implica una mayor concentración de valores tanto muy cerca de la media como muy lejos de ella y una menor frecuencia de valores intermedios.

7. **Media cuadrática** (*Root Mean Square, RMS*):

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

8. **Factor de forma** (*Shape Factor, SF*).

$$x_{SF} = \frac{x_{RMS}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|}$$

9. **Factor de impulso** (*Impulse Factor, IF*): compara la altura de un pico con el valor promedio de la señal.

$$x_{IF} = \frac{\|x\|_{\infty}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i|}$$

10. **Factor de cresta** (*Crest Factor, CF*): Esta magnitud nos da una idea del impacto que se está produciendo en forma de onda. Suponiendo que tengamos una onda sinusoidal perfecta de amplitud 1,  $RMS = \sin(\pi/4)$  y el factor de cresta será  $\sqrt{2}$ . Si una onda presenta un factor de cresta superior entonces hay algún grado de impacto.

$$x_{CF} = \frac{\|x\|_{\infty}}{x_{RMS}}$$

11. **Factor de margen** (*Margin Factor, MF*).

$$x_{MF} = \frac{\|x\|_{\infty}}{x_{RMS}^2}$$

Los resultados de estos análisis pueden encontrarse en el apéndice B. Destacamos los estadísticos de tres rodamientos, uno sano, uno con fallo de carrera interna y otro con fallo de carrera externa para mostrar las diferencias:

	Max	Min	Var	MO3	MO4	Skew	Kurt	IF	RMS	MF	SF	CF
Sano 97	3.11e-01	-2.87e-01	5.28e-03	3.96e-06	-7.45e-08	-3.54e-02	-2.36e-01	2.48e+01	3.64e+01	2.35e-04	2.90e+03	8.54e-03
Fallo Inner 172	2.13e+00	-2.02e+00	3.27e-02	6.28e-08	3.50e-10	3.34e-02	1.52e+01	7.06e+02	6.31e+01	5.35e-04	2.09e+04	3.37e-02
Fallo Outer 133	3.24e+00	-3.00e+00	3.37e-01	1.74e-07	1.74e-09	-2.11e-03	4.96e+00	7.15e+02	2.03e+02	7.84e-05	4.49e+04	1.59e-02

En la gran mayoría de los casos la amplitud de las señales en rodamientos que presentan algún tipo de fallo es mayor en comparación a un rodamiento sano. Otros valores destacables son la curtosis, el factor de impulso, el factor de forma y la media cuadrática. Estos estadísticos nos hacen sospechar la posibilidad de que haya un fallo en nuestro rodamiento. Sin embargo, no podemos diferenciar qué tipo de fallo. Por ello, y gracias a la periodicidad de las señales, nos planteamos realizar un análisis en el dominio de frecuencia.

### 3.4. Análisis en el dominio de frecuencia

Nos planteamos en un principio calcular la transformada rápida de Fourier de cada canal. Si el rodamiento no presenta ningún deterioro, sus frecuencias principales deberán estar concentradas alrededor del cero, como vimos en el ejemplo del capítulo anterior. Mostramos a continuación una imagen de la representación de tres rodamientos:

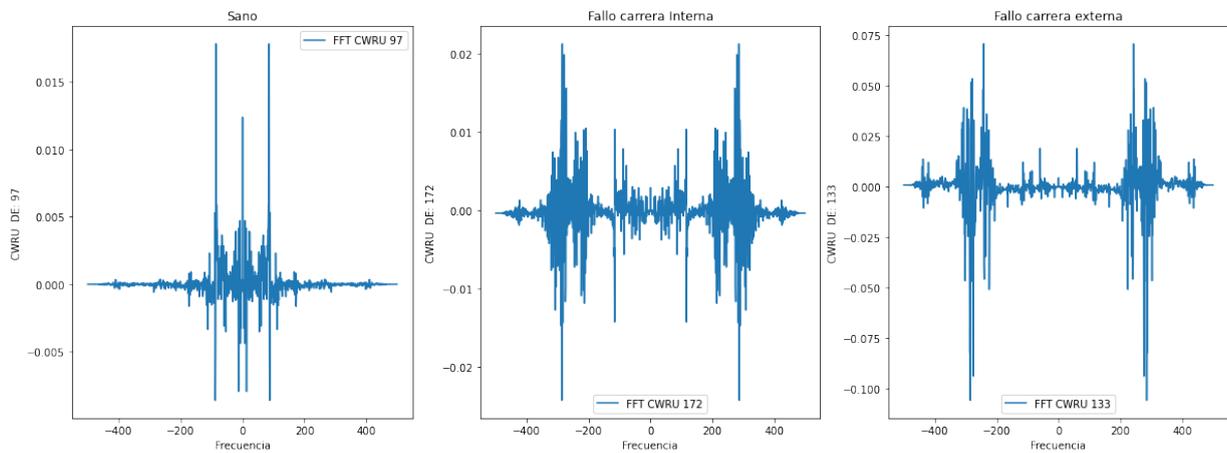


Figura 3.4: Espectro de frecuencia de un rodamiento sano, uno con fallo de carrera interna y otro con fallo de carrera externa.

Como esperábamos, en la primera gráfica tenemos un rodamiento sano y sus frecuencias principales se encuentran concentradas cerca del cero. Las frecuencias rotacionales,  $fr$ , son 1796, 1728, 1725rpm para el canal sano, con fallo de carrera interna y con fallo de carrera externa respectivamente. Teniendo en cuenta esto, mostramos a continuación una imagen de los tres rodamientos y de los armónicos correspondientes a estas frecuencias.

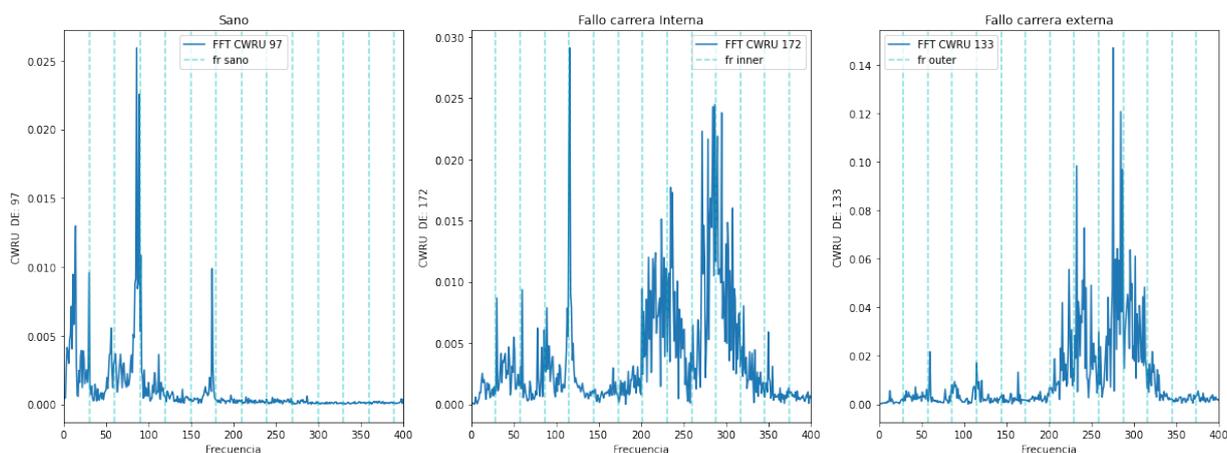


Figura 3.5: Armónicos correspondientes a frecuencia rotacional de rodamiento sano, con fallo de carrera interna y con fallo de carrera externa.

Notemos que hemos tenido en cuenta las propiedades de simetría y por ello sólo re-

presentamos la mitad positiva. Pueden observarse que ciertas frecuencias coinciden con los armónicos correspondientes a múltiplos de la frecuencia rotacional de cada rodamiento,  $fr$ . Además, en el caso del rodamiento sano, las frecuencias más altas están asociadas a estos armónicos.

Es posible observar que la medición de los rodamientos puede verse afectada por factores externos (ruido). Por ello nos planteamos el uso de una herramienta denominada envolvente espectral (*envelope spectrum*, ver [18]). Esta herramienta nos da información acerca de cómo se distribuye la energía en el espectro. Observemos en las imágenes anteriores que se producen ciertas tendencias en el espectro. La envolvente espectral es una curva que representa esta variación de la amplitud en el dominio de frecuencia.

El uso de esta herramienta se basa principalmente en realizar la transformada de Hilbert de nuestra función y después realizar la transformada rápida de Fourier a su envolvente.

**Definición 3.1 Transformada de Hilbert.** Se define la transformada de Hilbert  $\mathcal{H}$  de una función real,  $s(t)$ , como la convolución de la función  $s(t)$  y  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ . Dicho de otro modo:

$$\mathcal{H}\{s\}(t) = (h * s)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

De esta forma, si tenemos una señal analítica  $g(t)$ , podemos descomponerla del siguiente modo:

$$g(t) = f(t) + i\mathcal{H}\{f\}(t)$$

La transformada de Hilbert recibe este nombre en honor a David Hilbert, quien la introdujo en 1905 para resolver un caso específico del problema de Riemann-Hilbert.

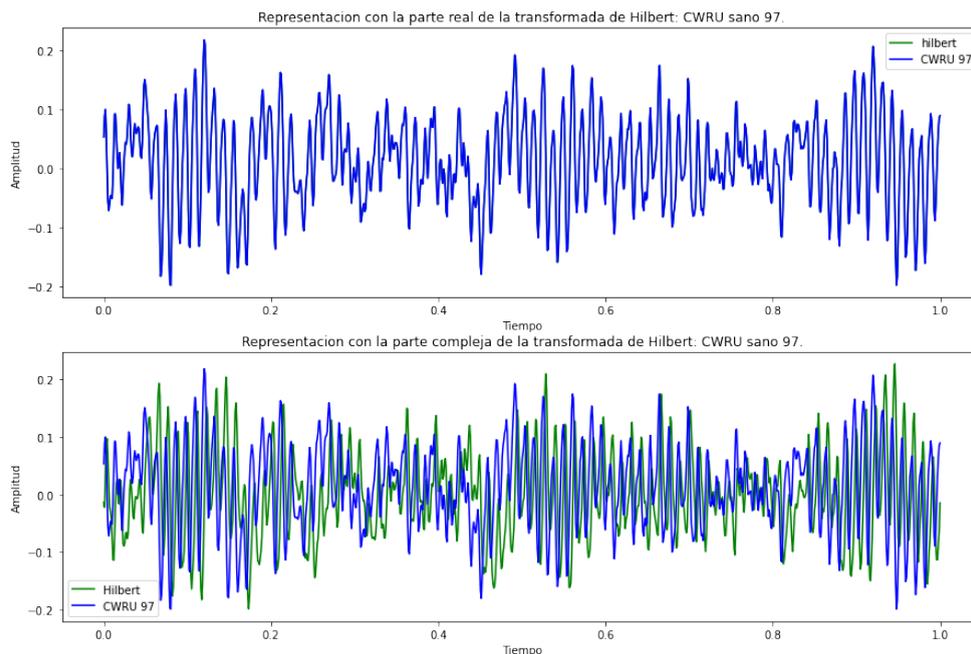


Figura 3.6: Representación de un canal sano y su transformada de Hilbert.

Notemos que la función resultante (la cual sigue estando en el dominio temporal) es una función compleja con las mismas componentes frecuenciales con un adelanto de fase de  $\pi/2$  radianes. La importancia de aplicar esta transformada reside en que la energía y fase en cada instante vienen de la frecuencia dominante en ese instante. Así, las frecuencias se localizan muy bien en el espectro realizando la Transformada de Fourier. Además, la parte real y la parte imaginaria de la transformada de Fourier estarán vinculadas por la transformada de Hilbert, lo que supondrá un avance para nuestro diagnóstico.

**Proposición 3.2 Propiedades.** Sean  $f$  y  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Se tiene que:

1.  $\mathcal{H}(\alpha f + g)(t) = \alpha \mathcal{H}\{f\}(t) + \mathcal{H}\{g\}(t)$
2.  $\mathcal{H}\{f * g\}(t) = (\mathcal{H}\{f\} * g)(t) = (f * \mathcal{H}\{g\})(t)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $\widehat{\mathcal{H}\{f\}}(t) = (-i \text{sign}(t)) \hat{f}(t)$  donde  $\text{sign}$  denota la función signo de  $t$ .

*Demostración:*

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\alpha f + g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha f(\tau) + g(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= \alpha \mathcal{H}\{f\}(t) + \mathcal{H}\{g\}(t) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{f * g\}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f * g)(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)g(\tau - x)}{t - \tau} dx d\tau \\ &= \mathcal{H}\{f\}(t) * g(t) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:  $f * g = g * f$ , concluimos el resultado.

3. Al ser la transformada de Hilbert un producto de convolución tenemos que

$$\widehat{\mathcal{H}\{f\}}(t) = \sqrt{2\pi} \hat{h}(t) \hat{f}(t)$$

donde  $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ . Como

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \text{sign}(\xi)$$

obtenemos el resultado.

□

Una vez tenemos calculada la transformada de Hilbert de nuestras señales analíticas calcularemos su envolvente:

$$e(t) = |f(t) + i\mathcal{H}\{f\}(t)| \quad (3.1)$$

Realizaremos la transformada de Fourier de la envolvente de nuestras señales y observaremos en el espectro de frecuencia si existen coincidencias con algún armónico BPF1 o BPF0. Los resultados para los tres rodamientos son los siguientes:

### 1. Rodamiento sano:

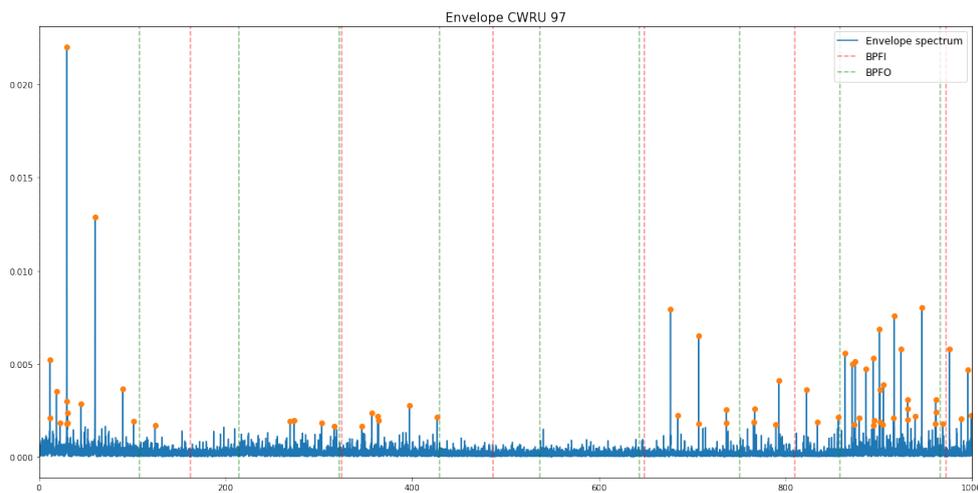


Figura 3.7: Envolvente espectral de un rodamiento sano.

Las frecuencias correspondientes a un fallo de carrera interna se encuentran en color naranja y las correspondientes a un fallo de carrera externa en verde. Es posible observar en esta imagen que no existen coincidencias con estos armónicos. Tal y como esperábamos, nos encontramos con un rodamiento sano.

### 2. Rodamiento con fallo de carrera interna:

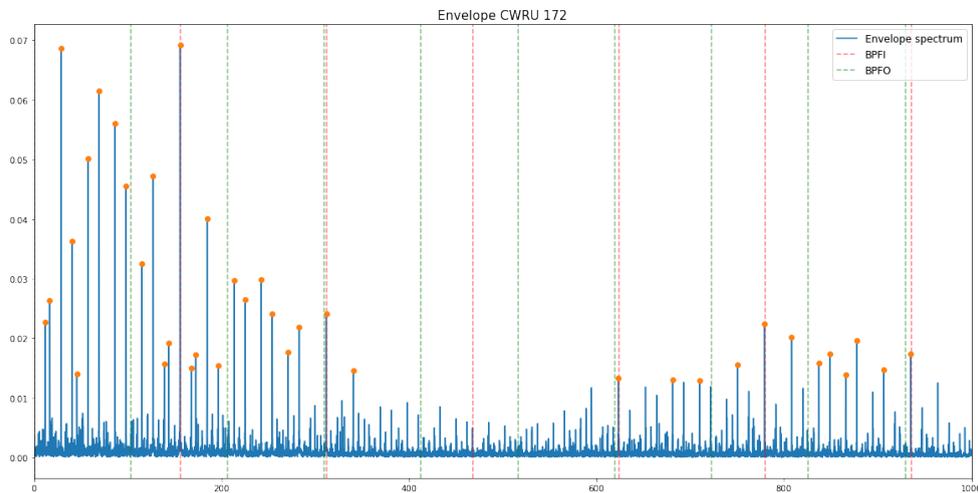


Figura 3.8: Envoltura espectral de un rodamiento con fallo de carrera interna.

A diferencia de la imagen anterior, es posible observar entre las frecuencias más altas varias coincidentes con los armónicos  $BPF1, 2BPF1, \dots$ . Sin embargo, puede observarse en dos puntos concretos que existe una ligera coincidencia con armónicos  $BPF0$ . Esto puede ser debido a errores computacionales, a presencia de ruido o a la posibilidad de que un rodamiento presente ambos fallos. Analizaremos finalmente el número de frecuencias coincidentes con dichos armónicos para poder concluir la presencia de cada tipo de fallo.

### 3. Rodamiento con fallo de carrera externa:

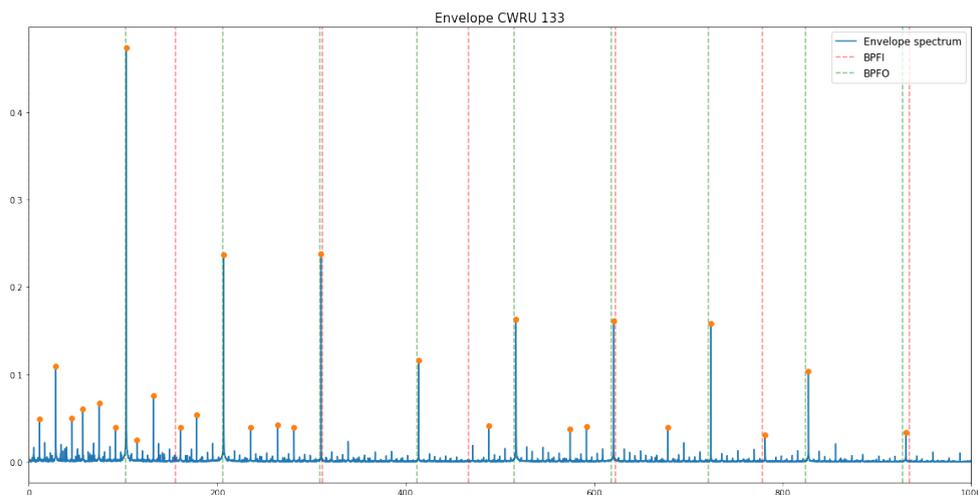


Figura 3.9: Envoltura espectral de un rodamiento sano con fallo de carrera externa.

Como podemos observar, existen claras coincidencias con armónicos correspondientes a fallos de carrera externa,  $BPF0$ . En este caso, como en el apartado anterior, también existen varias frecuencias coincidentes con armónicos correspondientes a un fallo de carrera interna.

Para poder clasificar los rodamientos, tenemos en cuenta los impulsos más altos y sus coincidencias con los respectivos armónicos. Teniendo en cuenta esto, obtuvimos la siguiente clasificación:

	Clasificación
CWRU 97: Sano	Sano
CWRU 172: Inner	Fallo Inner Race
CWRU 133: Outer	Fallo Outer Race

Cuadro 3.2: Clasificación de los rodamientos.

Los resultados del resto de los rodamientos analizados pueden encontrarse en B.

El algoritmo que hemos utilizado para la envolvente espectral es el siguiente:

---

**Algorithm 2** Envolvente espectral.

---

**Input:** Señal,  $signal$ ;

**Input:** Frecuencia de muestreo,  $F_s$ ;

**Input:** Armónicos Inner,  $BPFI$ ;

**Input:** Armónicos Outer,  $BPFO$ ;

**Input:** Título,  $title$ ;

**Input:** Nivel de impresión,  $imp$ ;

**Output:** Vector de frecuencias,  $fSpec$ ;

**Output:** Picos,  $xSpec$ ;

**Output:** Frecuencias a las que se encuentran los picos,  $fSpecG$ ;

**Output:** Vector con armónicos Inner,  $BPFI\_coords$ ;

**Output:** Vector con armónicos Outer,  $BPFO\_coords$ ;

- 1: Restamos la media y realizamos la transformada de Hilbert,  $analytic\_signal$ ;
  - 2: Nos quedamos con el valor absoluto y normalizamos,  $amplitude\_envelope$ ;
  - 3: Calculamos el vector de frecuencias,  $fSpec$ ;
  - 4: Calculamos la transformada de Fourier y nos quedamos con el valor absoluto,  $xSpec$ ;
  - 5: Nos quedamos con la mitad del espectro,  $xSpec$ ;
  - 6: Calculamos el vector con armónicos Inner,  $BPFI\_coords$ ;
  - 7: Calculamos el vector con armónicos Outer,  $BPFO\_coords$ ;
  - 8: Encontramos las frecuencias a las que se encuentran los picos,  $fSpecG$ ;
  - 9: **if** El nivel de impresión es 1: queremos ver resultados **then**
  - 10:     Gráfica con la mitad positiva, mostrando los armónicos correspondientes;
  - 11: **end if**
  - 12: **return**  $fSpec, xSpec, fSpecG, BPFI\_coords, BPFO\_coords$ ;
- 

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo hemos mostrado la utilidad del análisis de Fourier en un caso práctico: el diagnóstico de fallos en rodamientos. Hemos realizado un primer análisis de distintos

rodamientos para observar qué posibles diferencias podríamos encontrarlos y cómo sería mejor abordarlas. Hemos visualizado nuestros datos y realizado una comparativa con los estadísticos de cada rodamiento en busca de diferencias. Hemos podido observar que existían claras diferencias entre rodamientos sanos y rodamientos con fallo pero no éramos capaces de clasificar cada fallo. Es por esto que hemos decidido profundizar el análisis utilizando distintas herramientas en el dominio espectral. Destacamos el uso de una herramienta denominada envolvente espectral, la cual hace uso de la Transformada de Hilbert y de la Transformada de Fourier, que nos ha permitido mostrar los armónicos más relevantes de cada rodamiento y su posterior clasificación, obteniendo muy buenos resultados. Esto nos permite concluir la utilidad y eficacia de esta herramienta para este tipo de análisis. Esta herramienta tiene múltiples aplicaciones como el análisis de señales de comunicación satelital para eliminar posibles perturbaciones y así obtener la información deseada, análisis sísmico, etc. Sin embargo, tal y como introducimos al comienzo de este capítulo, es posible que para velocidad variable nos compense realizar técnicas más avanzadas de Machine Learning, las cuales tendrán un coste menor.

# Bibliografía

- [1] L.A. Fernández. Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales. *Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria* (2020).
- [2] J.A. Facenda, F.J. Freniche. Integración de Funciones de Varias Variables. *Ediciones Pirámide* (2002).
- [3] D. Chamorro. Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volumen I. *Escuela Politécnica Nacional* (2010).
- [4] L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math*, Vol. 116, 1 (1996), 135- 137.
- [5] R. Granero-Belinchón. Ampliación de Análisis. *Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria* (2020).
- [6] R. Granero-Belinchón. Métodos Matemáticos II: EDP. *Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria* (2020).
- [7] G. B. Folland. Fourier Analysis and its Applications. *The Wadsworth & Books/Cole Mathematics Series* (1992).
- [8] A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. *Pirámide* (2002).
- [9] A. Cañada. Fourier y sus coeficientes. *Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada* (2006).
- [10] G. P. Curbera. Completitud de  $L^2$ . *Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla* ().
- [11] J. Duoandikoetxea. Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier. *UNAN-Managua* (2003).
- [12] F. Periago. Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales. *Dpto. Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena* (2004).
- [13] L. Manuel, M. González. Matemática Aplicada II. *Dpto. Física, Universidad Nacional de Rosario, Argentina* (2011).
- [14] M.J. Splisbury, A. Euceda. Transformada Rápida de Fourier. *Universidad Nacional Autónoma de Honduras* (2016).

- [15] E. Brea. Transformada Rápida de Fourier: tres enfoques. *Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela* (2014).
- [16] J.W. Cooley, J.W. Tukey. An algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *IBM Watson Research Center, Bell Telephone Laboratories, Princeton University* (1965).
- [17] Case Western Reserve University Bearing Data Center Website. <https://csegroups.case.edu/bearingdatacenter/home>. Fecha de consulta: 20 de abril de 2021.
- [18] MATLAB. Función *envspectrum*. Envoltente espectral para mantenimiento predictivo de rodamientos. <https://www.mathworks.com/help/signal/ref/envspectrum.html>. Fecha de consulta: 20 de abril de 2021.
- [19] GitHub. Repositorio con funciones utilizadas durante la estancia en prácticas en verano. <https://github.com/irenegz/signalprocessing/tree/master>. Fecha de consulta: 21 de abril de 2021.
- [20] Rolling element bearing diagnostics using the Case Western Reserve University data: A benchmark study. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 64-65, páginas 100-131, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.04.021>
- [21] D. Neupane and J. Seok, *Bearing Fault Detection and Diagnosis Using Case Western Reserve University Dataset With Deep Learning Approaches: A Review*. *IEEE Access*, vol. 8, pp. 93155-93178, 2020, <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2990528>.
- [22] Boudiaf, A., Moussaoui, A., Dahane, A. et al. *A Comparative Study of Various Methods of Bearing Faults Diagnosis Using the Case Western Reserve University Data*. *J Fail. Anal. and Preven.* 16, 271–284 (2016). <https://doi.org/10.1007/s11668-016-0080-7>
- [23] A. P. Aguilera Aguilera. La transformada de Hilbert en  $L^2(\mathbb{R})$ . *Universidad de Venezuela* (2012).

# Apéndice A

## Teoremas útiles

**Teorema A.1 Teorema de Fubini para  $f$  integrable.** Sea  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. Entonces, para casi todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  la sección  $f_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable, por lo que la función

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^k} f(x, \mathbf{y}) dx \in \mathbb{R}$$

está definida en casi todo  $\mathbb{R}^n$ . Además, esta función es integrable en  $\mathbb{R}^n$  y se verifica la igualdad

$$\int \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n} f(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^k} f(x, \mathbf{y}) dx \right) d\mathbf{y}$$

**Teorema A.2 Teorema de la convergencia monótona.** Sea  $f_n(x)$  una sucesión no-decreciente de funciones absolutamente integrables. Sea  $f(x)$  su límite puntual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x$$

Entonces  $f$  es medible y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

**Teorema A.3 Teorema de la convergencia monótona de Beppo Levi.** Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio medible y sean  $f$  una función  $\mathcal{A}$ -medible y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de funciones  $\mathcal{A}$ -medibles, ambas definidas sobre  $X$  a valores en  $\mathbb{R}_+$ , tales que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  c.t.p. Entonces

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

**Teorema A.4 Teorema de la convergencia dominada.** Sea  $f_n$  una sucesión de funciones que converge puntualmente a  $f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x$$

Las demostraciones de los teoremas A.1, A.2 y A.4 pueden encontrarse en [2]. La demostración del teorema A.3 puede encontrarse en [3].

# Apéndice B

## Resultados

Hemos analizado los siguientes rodamientos:

Tipo de fallo	Nombre de archivo
Sano	97
Sano	98
Sano	99
Sano	100

Cuadro B.1: Rodamientos sanos analizados.

Tipo de fallo	Nombre de archivo
Inner	105
Inner	106
Inner	107
Inner	108
Inner	169
Inner	170
Inner	171
Inner	172

Cuadro B.2: Rodamientos con fallo de carrera interna analizados.

Tipo de fallo	Nombre de archivo
Outer	130
Outer	131
Outer	132
Outer	133
Outer	144
Outer	145
Outer	146
Outer	147

Cuadro B.3: Rodamientos con fallo de carrera externa analizados.

Estas mediciones se han realizado en DE y su frecuencia de muestreo es 12000Hz.  
 Los estadísticos de cada canal pueden encontrarse en las siguientes tablas:

	Max	Min	Var	MO3	MO4	Skew	Kurt	IF	RMS	MF	SF	CF
Normal Baseline 97 DE	3.11e-01	-2.87e-01	5.28e-03	3.96e-06	-7.43e-08	-3.54e-02	-2.36e-01	2.48e+01	3.64e+01	2.35e-04	2.90e+03	8.54e-03
Normal Baseline 98 DE	3.18e-01	-3.46e-01	4.24e-03	3.96e-06	-7.45e-08	-1.73e-01	-6.94e-02	2.75e+01	4.62e+01	1.62e-04	3.67e+03	7.49e-03
Normal Baseline 99 DE	3.59e-01	-3.27e-01	3.99e-03	3.68e-06	-6.76e-08	-1.67e-01	-7.49e-02	2.93e+01	4.48e+01	1.79e-04	3.65e+03	8.02e-03
Normal Baseline 100 DE	2.84e-01	-3.06e-01	4.19e-03	3.87e-06	-7.19e-08	-1.28e-01	-4.28e-02	2.46e+01	4.59e+01	1.45e-04	3.69e+03	6.67e-03

	Max	Min	Var	MO3	MO4	Skew	Kurt	IF	RMS	MF	SF	CF
Inner 12K 105 DE	1.74e+00	-1.38e+00	8.48e-02	4.84e-06	-9.12e-08	1.64e-01	2.40e+00	1.29e+02	1.02e+02	1.69e-04	7.55e+03	1.71e-02
Inner 12K 106 DE	1.58e+00	-1.40e+00	8.58e-02	3.70e-07	-3.16e-09	1.30e-01	2.54e+00	2.73e+02	1.02e+02	1.51e-04	1.76e+04	1.55e-02
Inner 12K 107 DE	1.64e+00	-1.43e+00	8.97e-02	1.74e-07	-1.15e-09	9.04e-02	2.56e+00	3.60e+02	1.05e+02	1.50e-04	2.30e+04	1.57e-02
Inner 12K 108 DE	1.67e+00	-1.54e+00	9.83e-02	1.73e-07	7.60e-10	-1.32e-02	2.29e+00	3.54e+02	1.10e+02	1.38e-04	2.33e+04	1.52e-02
Inner 12K 169 DE	1.93e+00	-2.01e+00	3.80e-02	8.14e-05	-4.20e-06	-5.88e-02	1.90e+01	5.84e+01	6.91e+01	4.22e-04	2.01e+03	2.91e-02
Inner 12K 170 DE	2.03e+00	-2.00e+00	2.74e-02	9.16e-08	-4.80e-10	3.00e-03	1.91e+01	5.64e+02	5.78e+01	6.08e-04	1.61e+04	3.51e-02
Inner 12K 171 DE	1.85e+00	-1.88e+00	2.66e-02	1.04e-07	4.38e-12	2.35e-02	1.87e+01	5.11e+02	5.69e+01	5.80e-04	1.55e+04	3.30e-02
Inner 12K 172 DE	2.13e+00	-2.02e+00	3.27e-02	5.20e-08	9.52e-10	3.34e-02	1.52e+01	7.06e+02	6.31e+01	5.35e-04	2.09e+04	3.37e-02

	Max	Min	Var	MO3	MO4	Skew	Kurt	IF	RMS	MF	SF	CF
Outer 12K 130 DE	3.63e+00	-3.41e+00	4.48e-01	2.45e-05	-8.46e-07	5.69e-02	4.65e+00	1.57e+02	2.34e+02	6.64e-05	1.01e+04	1.55e-02
Outer 12K 131 DE	3.11e+00	-3.01e+00	3.50e-01	1.21e-07	3.35e-11	3.34e-02	4.59e+00	7.66e+02	2.07e+02	7.25e-05	5.10e+04	1.50e-02
Outer 12K 132 DE	3.10e+00	-3.08e+00	3.25e-01	1.20e-07	3.87e-10	1.95e-02	4.85e+00	7.93e+02	1.99e+02	7.86e-05	5.08e+04	1.56e-02
Outer 12K 133 DE	3.24e+00	-3.00e+00	3.37e-01	1.16e-07	1.16e-08	-2.11e-03	4.96e+00	7.15e+02	2.03e+02	7.84e-05	4.49e+04	1.59e-02
Outer 12K 144 DE	3.35e+00	-3.26e+00	5.92e-01	4.15e-06	2.63e-06	6.58e-02	1.24e+00	4.66e+02	2.69e+02	4.63e-05	3.74e+04	1.24e-02
Outer 12K 145 DE	3.55e+00	-3.31e+00	7.19e-01	4.00e-07	-3.51e-09	7.34e-02	1.05e+00	5.99e+02	2.96e+02	4.06e-05	4.98e+04	1.20e-02
Outer 12K 146 DE	3.64e+00	-3.35e+00	7.30e-01	2.33e-05	3.57e-05	7.32e-02	9.41e-01	6.37e+02	2.98e+02	4.10e-05	5.22e+04	1.22e-02
Outer 12K 147 DE	3.62e+00	-3.32e+00	6.36e-01	2.44e-05	3.54e-05	8.34e-02	1.09e+00	5.42e+02	2.79e+02	4.65e-05	4.18e+04	1.30e-02

Cuadro B.4: Estadísticos de los rodamientos analizados.

Utilizando la envolvente espectral, los resultados obtenidos son:

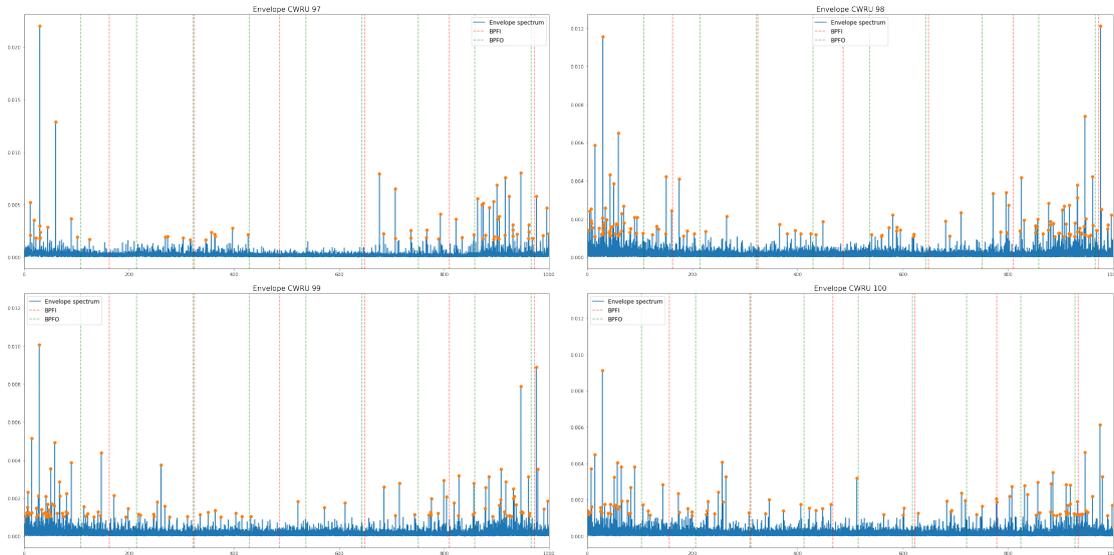


Figura B.1: Envolvente espectral de rodamientos sanos.

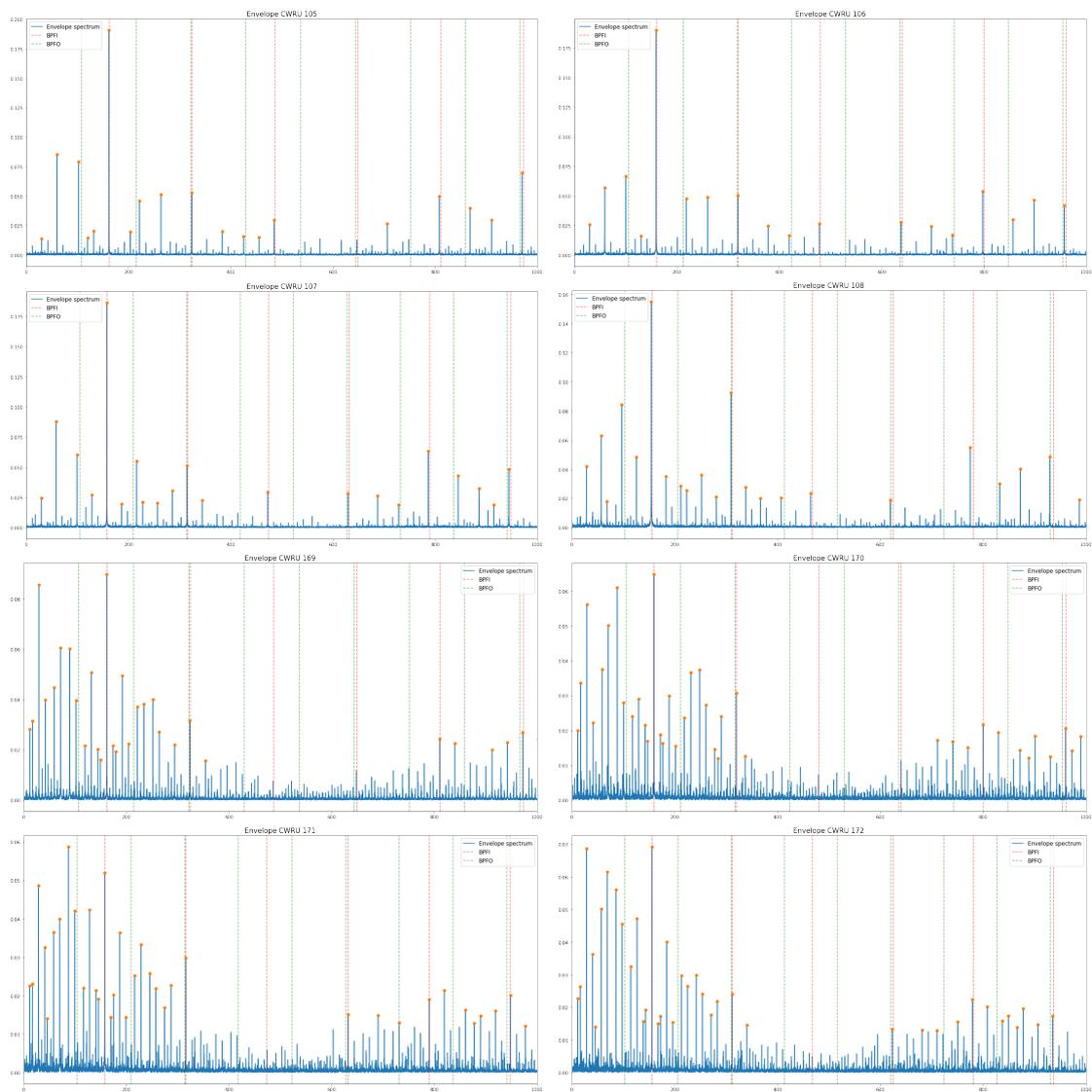


Figura B.2: Envoltura espectral de rodamientos con fallo de carrera interna.

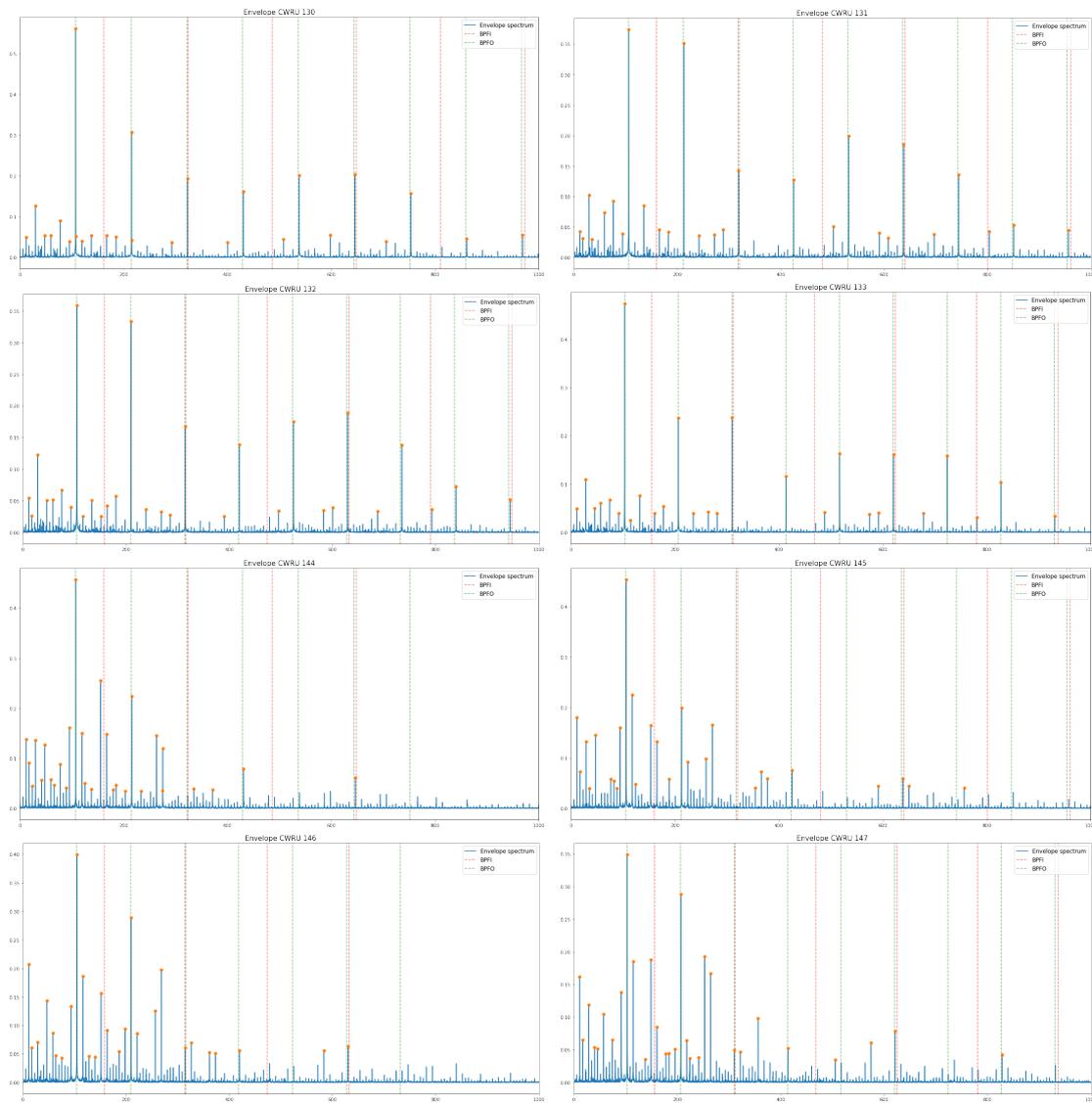


Figura B.3: Envoltente espectral de rodamientos con fallo de carrera externa.

Por último, mostramos la clasificación obtenida para estos rodamientos:

		Clasificación	
CWRU 97: Sano		Sano	
CWRU 98: Sano		Sano	
CWRU 99: Sano		Sano	
CWRU 100: Sano		Sano	
Clasificación		Clasificación	
CWRU 105: Inner	Fallo Inner Race	CWRU 130: Outer	Fallo Outer Race
CWRU 106: Inner	Fallo Inner Race	CWRU 131: Outer	Fallo Outer Race
CWRU 107: Inner	Fallo Inner Race	CWRU 132: Outer	Fallo Outer Race
CWRU 108: Inner	Fallo Inner Race	CWRU 133: Outer	Fallo Outer Race
CWRU 169: Inner	Fallo Inner Race	CWRU 144: Outer	Fallo Outer Race
CWRU 170: Inner	Fallo Inner Race	CWRU 145: Outer	Fallo Outer Race
CWRU 171: Inner	Fallo Inner Race	CWRU 146: Outer	Fallo Outer Race
CWRU 172: Inner	Fallo Inner Race	CWRU 147: Outer	Fallo Outer Race

Cuadro B.5: Clasificación de los rodamientos analizados.