



**Facultad
de
Ciencias**

IMÁGENES CONTINUAS DEL CONJUNTO DE CANTOR

(Continuous images of the Cantor set)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Francisco Matanza Sota

Director: Nuria Corral Pérez

Junio - 2021

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer su apoyo a la directora de este trabajo, Nuria. No sólo por enseñarme a razonar y trabajar con rigor, y por todas las correcciones que has hecho durante los últimos meses, sino también por tu paciencia, tu inestimable ayuda y por todos los consejos que me has dado para que este trabajo llegase a buen puerto.

Como no podía ser de otra manera, también quiero agradecer a mi familia y amigos su inagotable apoyo, especialmente a mis padres y mis hermanos, sin los cuales nunca habría llegado tan lejos.

Por último, no puedo dejar de mencionar a todas las personas que he conocido a lo largo de la carrera, a los profesores, que tanto me han enseñado, y que me han mostrado ramas de la física y las matemáticas que, de otra manera, posiblemente nunca habría descubierto, y especialmente, a mis compañeros, de los que he aprendido tantas cosas que espero nunca olvidar, y que han tenido que soportarme durante estos últimos cinco años.

Resumen

El objetivo de este trabajo es probar el Teorema de Hausdorff-Alexandroff, el cual afirma que todo espacio métrico compacto es la imagen continua del conjunto de Cantor. Para ello, se comenzará estudiando algunos resultados de topología general que parten de los conocimientos adquiridos durante el Grado.

Asimismo, para lograr dicho objetivo, se estudiarán las propiedades topológicas del Conjunto de Cantor y se probará un resultado conocido como el Teorema de Brouwer, que afirma que todo espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente discontinuo es homeomorfo al conjunto de Cantor, dando así una caracterización topológica del conjunto de Cantor.

Para finalizar el trabajo se estudiarán las condiciones topológicas que debe verificar un espacio para ser imagen continua del conjunto de Cantor y se construirá un ejemplo de un espacio que no puede ser la imagen continua del conjunto de Cantor.

Palabras clave: conjunto de Cantor, topología, espacio métrico, compacidad, Teorema de Hausdorff-Alexandroff

Abstract

The objective of this project is to prove the Hausdorff-Alexandroff Theorem, which states that every compact metric space is the continuous image of the Cantor set. To do this, we will begin by studying some results concerning general topology that are based on the knowledge acquired during the Degree.

Likewise, to achieve this goal, the topological properties of the Cantor Set will be studied and we will prove a result known as Brouwer's Theorem, which states that every metric, compact, perfect and totally discontinuous space is homeomorphic to the Cantor set, thus giving a topological characterization of the Cantor set.

To finish the project the topological conditions a space has to verify to be the continuous image of the Cantor set will be studied and an example of a set which cannot be the continuous image of the Cantor set will be constructed.

Key words: Cantor set, topology, metric space, compactness, Hausdorff-Alexandroff Theorem

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares de topología	3
1.1. Espacio producto	3
1.2. Espacios compactos y Hausdorff	7
1.3. Espacios métricos y espacios metrizables	9
1.4. Axiomas de separación y de numerabilidad	13
2. Propiedades topológicas del conjunto de Cantor	17
2.1. El conjunto de Cantor	17
2.2. Propiedades del conjunto de Cantor	21
3. El Teorema de Hausdorff-Alexandroff	31
3.1. Resultados previos	31
3.2. Sucesiones de límite inverso	34
3.3. El Teorema de Hausdorff-Alexandroff	38
4. Consecuencias del Teorema de Hausdorff-Alexandroff	45
Bibliografía	49
Apéndice A. Algunas ideas de teoría de la medida	51
A.1. Sobre σ -álgebras y espacios medibles	51
A.2. Sobre medidas y espacios de medida	52
A.3. Medidas sobre familias de conjuntos	55

Introducción

“Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.”
“Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.”

(D. Hilbert, 1926)

El eje central de esta memoria lo constituyen el conjunto de Cantor y el Teorema de Hausdorff-Alexandroff, estrechamente ligado con el conjunto de Cantor. Sorprendentemente, el primero en definir el conjunto que lleva su nombre no fue Cantor, ya que en 1875, el irlandés H.J.S. Smith publicó un artículo titulado *On the integration of discontinuous functions* [15], donde, en la página 147 del texto, se explica como construir lo que ahora conocemos como conjunto de Cantor generalizado. Posteriormente, en 1881, un joven V. Volterra también introducirá un conjunto similar.

No sería hasta 1883 cuando Cantor publicaría el artículo *Über unendliche, lineare Punktmanichfaltigkeiten V* [4], quinto artículo de una serie con el mismo nombre. En él, Cantor define el conjunto que lleva su nombre como ejemplo de un conjunto perfecto que es no denso. En reconocimiento de Smith y Volterra, al conjunto de Cantor se le conoce también como conjunto de Smith-Volterra-Cantor, aunque en la memoria nos referiremos a él simplemente como el conjunto de Cantor.

Junto a Cantor, tenemos a los matemáticos F. Hausdorff y P.S. Alexandroff, quienes estudiaron diversas áreas de las matemáticas, como la topología o la teoría de conjuntos, y que publicaron en 1927 de manera independiente la prueba del teorema que ahora lleva su nombre, el cual afirma que todo espacio compacto y métrico es la imagen continua del conjunto de Cantor. Este teorema tiene diversas aplicaciones, por ejemplo, se emplea en la demostración del teorema de Banach y Mazur [3], que dice que todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio del espacio de las funciones continuas con valores reales en $[0, 1]$; o el teorema de Hahn-Mazurkiewicz, que dice que un espacio Hausdorff es la imagen continua del intervalo unidad si y sólo si es un espacio de Peano, es decir, si es un espacio compacto, métrico, conexo y localmente conexo (teorema 31.5 de [17]).

Algunos de los conceptos introducidos y desarrollados por estos tres matemáticos se presentarán y utilizarán en la memoria. A los ya mencionados conjunto de Cantor y Teorema de Hausdorff-Alexandroff podemos añadir, por ejemplo, el concepto de espacio Hausdorff o de dimensión de Hausdorff, la cual introducimos al final del capítulo 2, o el argumento de diagonalización de Cantor y su teoría del cardinal de los conjuntos, que aparecerán en el capítulo 2.

La memoria está estructurada en los siguientes bloques:

- En el primer capítulo presentamos algunas nociones importantes relativas a la topología y

que serán utilizadas posteriormente. Así, en la primera sección, introduciremos el producto arbitrario de espacios topológicos, junto con algunas de sus propiedades más importantes. En la segunda sección, repasaremos algunos resultados referentes a los espacios compactos y los espacios Hausdorff. En una tercera sección, presentamos los conceptos de espacio métrico y metrizable, junto con algunas propiedades que se utilizarán varias veces durante la memoria. Por último, en la cuarta sección introducimos los conceptos que necesitaremos en lo referente a los axiomas de separación y de numerabilidad.

- En el segundo capítulo introducimos el conjunto ternario de Cantor. En la primera sección, nos centraremos en su construcción como subconjunto de la recta real, y de como definir un homeomorfismo entre este conjunto y $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$. En la siguiente sección, nos centraremos en el estudio de algunas de las propiedades topológicas del conjunto de Cantor. Las primeras, como que es cerrado o totalmente desconexo, se pueden obtener directamente de la definición, mientras que para otras, se utilizará la teoría desarrollada en el capítulo 1, partiendo de los conocimientos de topología adquiridos en el Grado. Al final de esta sección, se estudiarán el cardinal del conjunto de Cantor y su medida de Lebesgue, así como su dimensión topológica y la de Hausdorff.
- El tercer capítulo está centrado en el Teorema de Hausdorff-Alexandroff y en su demostración. En primer lugar, se presentan una serie de resultados que serán utilizados durante la prueba. En la siguiente sección, introducimos el concepto de sucesión de límite inverso, junto con algunas de sus propiedades. Por último, en la última sección se muestran tres resultados: el primero de ellos es un teorema del que se desprende el corolario posterior (conocido como Teorema de Brouwer), y que será vital para la demostración del tercer resultado, que es el ya mencionado Teorema de Hausdorff-Alexandroff.
- El cuarto capítulo se centra en las hipótesis del Teorema de Hausdorff-Alexandroff. En particular, nos preguntamos si podemos relajarlas, y damos un ejemplo de un espacio compacto y numerable que no puede ser la imagen continua del conjunto de Cantor.
- Por último, en los apéndices, presentamos algunos resultados básicos de la teoría de la medida que son utilizados durante la memoria. Además, se explicará como construir una medida a partir de funciones definidas sobre lo que se conoce como “anillo” de conjuntos.

Capítulo 1

Preliminares de topología

En este capítulo introducimos algunas definiciones y resultados previos que serán posteriormente utilizados a lo largo de la memoria.

1.1. Espacio producto

En esta sección describiremos algunos conceptos sobre el producto de espacios topológicos, ya que a lo largo de la memoria este tipo de espacios aparecerán de manera recurrente. Seguiremos principalmente la sección 8 del libro de S. Willard [17] y la 19 del libro de J.R. Munkres [14].

Comencemos considerando el caso de dos espacios topológicos no vacíos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) . Entonces al producto cartesiano $X \times Y$ se le puede asociar una topología cuya base está formada por los conjuntos de la forma $U \times V$, donde $U \in \tau_X$ y $V \in \tau_Y$. Además, dadas dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de τ_X y τ_Y , respectivamente, la familia

$$\{B \times C : \text{donde } B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}\}$$

también es una base para la topología producto definida en $X \times Y$. Esta topología tiene la propiedad de que al proyectar sobre uno de los dos espacios, las proyecciones $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$, dadas por $\pi_X(x, y) = x$ y $\pi_Y(x, y) = y$, son continuas, abiertas y sobreyectivas. Veamos el caso de π_X , sabiendo que para π_Y se procede de manera análoga. La función π_X es continua, ya que dado un abierto $U \subseteq X$, su antiimagen $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$, que es abierto por ser producto de dos abiertos; y es abierta, ya que dado un abierto de la base $B \times C$, con $B \in \tau_X$ y $C \in \tau_Y$, su imagen es $\pi_X(B \times C) = B$, abierto de τ_X . Por último, es sobreyectiva, ya que cada $x \in X$ es la imagen de $(x, y) \in X \times Y$ para algún $y \in Y$. Además, una aplicación $f : A \rightarrow X \times Y$ es continua si y sólo si $f_X = \pi_X \circ f$ y $f_Y = \pi_Y \circ f$ son continuas. Si f es continua, entonces f_X y f_Y son continuas por ser la composición de aplicaciones continuas. Si f_X y f_Y son continuas, dado un $U \times V$ abierto de la base en $X \times Y$, se tiene que

$$f^{-1}(U \times V) = \{a \in A : f_X(a) \in U \text{ y } f_Y(a) \in V\} = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$$

que es abierto por ser la intersección finita de dos abiertos de A .

Nos preguntamos ahora si podemos trasladar esta estructura para el producto de un número mayor de espacios topológicos, es decir, si podemos seguir definiendo del mismo modo una base de la topología para el producto, de forma que se tengan algunas propiedades, como que las proyecciones sean continuas, o que una aplicación sea continua si y sólo si su composición con las

proyecciones lo es. Para el caso del producto de un número finito de espacios topológicos no hay problemas, pero cuando aumentamos el número para el producto de un conjunto numerable, o arbitrario, de espacios topológicos, comienzan a aparecer problemas. Comencemos definiendo el producto cartesiano de un número arbitrario de conjuntos:

Definición 1.1 Sea X_α un conjunto para cada $\alpha \in A$. El producto cartesiano de los conjuntos X_α es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \left\{ x : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : x(\alpha) \in X_\alpha \text{ para todo } \alpha \in A \right\}$$

Esto es, el producto cartesiano de una familia de conjuntos es el conjunto formado por aplicaciones del conjunto de índices en la unión de los conjuntos, con la propiedad de que la imagen de α está en X_α . Normalmente, dada una función x del espacio producto, se denota como x_α a $x(\alpha)$, y se dice que es la α -ésima coordenada de x . Del mismo modo, es común referirse a la aplicación x como $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$. Si $X_\alpha = X$ para todo $\alpha \in A$, se suele denotar al producto cartesiano como X^A . Definimos a continuación la aplicación proyección, que será utilizada múltiples veces a lo largo de la memoria.

Definición 1.2 Dada una familia de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, y $\beta \in A$, se define la β -ésima proyección como la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha &\longrightarrow X_\beta \\ (x_\alpha)_{\alpha \in A} &\longmapsto x_\beta \end{aligned}$$

Es importante mencionar que es necesario considerar el axioma de elección¹ para poder asegurar que el producto cartesiano de una familia de espacios no vacíos es no vacío. Más aún, se puede demostrar que el axioma de elección es equivalente a asegurar que el producto cartesiano de conjuntos no vacíos es no vacío (ver problema 8F. de [17]), y entonces se tiene que la proyección β -ésima es sobreyectiva sobre el conjunto X_β .

De esta manera, dada una familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ de espacios topológicos, podemos definir sobre $\prod_{i \in I} X_i$ la topología por cajas y la topología producto.

Definición 1.3 Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, se denomina topología por cajas a la que tiene como base a la familia

$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i : U_i \text{ es un abierto de } X_i \text{ para cada } i \in I \right\}$$

Definición 1.4 Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Definimos la topología producto o de Tychonoff como la que tiene como subbase a

$$\bigcup_{i \in I} \{ \pi_i^{-1}(U_i) : U_i \text{ abierto de } X_i \}$$

donde $\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ viene dada por $\pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i$ para todo $i \in I$. De esta manera un elemento de una base para esta topología se puede escribir como la intersección finita de antiimágenes de abiertos de los X_i

$$\bigcap_{\alpha=1}^k \pi_{i_\alpha}^{-1}(U_{i_\alpha}), U_{i_\alpha} \text{ abierto de } X_{i_\alpha}$$

donde $\{i_1, \dots, i_k\}$ es un subconjunto finito de I .

¹Ver la definición en el punto 1.17 de [17].

Una primera propiedad que cumple la topología producto es que las proyecciones son continuas y abiertas.

Lema 1.5 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos, y sea $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ su espacio producto. Entonces la proyección β -ésima es continua y abierta.*

Demostración: Sea $\beta \in A$ fijo. Entonces la proyección π_β es continua, ya que dado $U_\beta \in X_\beta$ abierto, $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un abierto de la base de la topología producto. Sea $U \in \tau_{prod}$ un abierto no vacío de la base de la topología producto. Se tiene que $U = \bigcap_{i=1}^k \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ para un conjunto finito de índices $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Como consecuencia $\pi_\beta(U)$ es un abierto de X_β , ya que si $\beta = \alpha_i$ para algún i , entonces $\pi_\beta(U) = U_{\alpha_i}$, mientras que si $\beta \neq \alpha_i$ para todo i , entonces $\pi_\beta(U) = X_\beta$. $\square$

Sin embargo, las proyecciones no son cerradas necesariamente. Por ejemplo, consideremos la proyección $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$ el grafo Gr_f de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, esto es, el conjunto $Gr_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1\}$. Aunque Gr_f es cerrado en $\mathbb{R}^2$, se tiene que $\pi_1(Gr_f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que no es cerrado en $\mathbb{R}$.

Vemos rápidamente que ambas topologías son equivalentes para productos finitos, pero difieren para productos infinitos. Aunque la topología por cajas parece ser la natural en el producto, no es la más utilizada, ya que existen propiedades que se verifican para productos finitos, pero que no se verifican para productos infinitos. Por ejemplo, para un producto infinito con la topología por cajas no es cierto que una aplicación $f : A \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ es continua si y sólo si la composición con las proyecciones es continua. En efecto, si consideramos $X_i = \mathbb{R}$ e $I = \mathbb{N}$ (consideraremos a lo largo del texto que los números naturales son los enteros positivos), la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada de forma que $f_n = \pi_n \circ f$ es la identidad en $\mathbb{R}$ para todo n , no es continua, a pesar de que su composición con las proyecciones son continuas. En efecto, consideremos la familia de abiertos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\mathbb{R}, \tau_u)$, con $U_n = (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$. Entonces su producto $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es un abierto de la topología, al que llamamos U . Si f fuese continua, entonces $f^{-1}(U)$ sería un abierto de $\mathbb{R}$. Sin embargo, su antiimagen es $\{0\}$, que no es abierto, ya que $f^{-1}(U) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$. El problema que tiene la topología por cajas, y porqué la topología de Tychonoff no lo tiene, puede verse estudiando la expresión de la antiimagen de un abierto en cada una de las topologías. Sea $g : A \rightarrow X^I$, en el caso de la topología de cajas, si tomamos un abierto $U = \prod_{i \in I} U_i$, con U_i abiertos en X_i ,

$$g^{-1}(U) = \{a \in A : g_i(a) = \pi_i(g(a)) \in U_i \text{ para todo } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} g_i^{-1}(U_i)$$

mientras que para la topología producto, un abierto de la base es de la forma $U = \prod_{i \in I} U_i$, con $U_i = X_i$ si $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ y U_i un abierto de X_i si $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$; con lo que se tiene que

$$g^{-1}(U) = \{a \in A : g_i(a) = \pi_i(g(a)) \in U_i \text{ para todo } i \in \{i_1, \dots, i_k\}\} = \bigcap_{j=1}^k g_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$$

Para un producto infinito, la primera de las intersecciones puede no ser un abierto, mientras que la segunda es un abierto por ser intersección finita de abiertos.

Este hecho provoca que nos interese en cuando podemos garantizar que una función es continua. El siguiente lema da las condiciones necesarias y suficientes cuando se considera la topología producto.

Lema 1.6 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos, y sea $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ su espacio producto con la topología de Tychonoff. Una aplicación $f : X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in A$.*

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos que f es continua. Entonces, como π_α es continua para cada $\alpha \in A$ por el lema 1.5, se tiene que $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

$\Leftarrow$) Supongamos que $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ es continua para todo $\alpha \in A$. Queremos ver que la función $f : X \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es continua cuando se considera la topología producto. Sea $U \in \tau_{prod}$ un abierto no vacío de la base de topología producto. Entonces $U = \bigcap_{i=1}^k \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ para un conjunto finito de índices $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Consideremos $f^{-1}(U)$,

$$f^{-1}(U) = f^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^k \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \right) = \bigcap_{i=1}^k f^{-1}(\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})) = \bigcap_{i=1}^k (\pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_i})$$

como cada f_α es continua, $(\pi_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_i})$ es un abierto de X para cada $i = 1, \dots, k$, y por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto por ser intersección finita de abiertos. $\square$

Este lema no es cierto si sustituimos la topología producto por la topología por cajas, como hemos visto en el ejemplo anterior, lo que nos da argumento bastante sólido para considerar la primera por encima de la segunda como la topología por defecto del espacio producto. A lo largo de la memoria, cuando se presente el producto de espacios topológicos, salvo que se especifique lo contrario, se supondrá que el producto tiene la topología producto.

En lo que resta de esta sección presentamos propiedades interesantes de espacio producto. Algunas de estas propiedades son también ciertas cuando se considera la topología por cajas, aunque en las demostraciones se considere la topología producto.

El siguiente lema nos garantiza que cualquier topología que consideremos en el espacio producto de forma que las proyecciones son continuas contiene a la topología producto. En particular, la topología por cajas es más fina que la topología producto.

Lema 1.7 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos, y sea $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ su producto cartesiano con una topología τ_1 . Entonces, si las proyecciones π_α son continuas para todo $\alpha \in A$, la topología τ_1 es más fina que τ_{prod} .*

Demostración: Sea τ_1 la topología tal que π_α es continua para todo $\alpha \in A$. Veamos que $\tau_{prod} \subseteq \tau_1$. Consideremos $U = \bigcap_{i=1}^k \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ un abierto de la base de la topología producto. Hay que ver que $U \in \tau_1$. Por ser las proyecciones continuas con τ_1 , la antiimagen $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ es un abierto de τ_1 para todo $i = 1, \dots, k$. Por ser τ_1 topología, la intersección finita de abiertos es abierto, con lo que $U = \bigcap_{i=1}^k \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ es un abierto en τ_1 . $\square$

El siguiente resultado caracteriza la topología producto como la única que cumple que toda función f es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua para todo $\alpha \in A$.

Lema 1.8 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos, y sea $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ su producto cartesiano con una topología τ_1 . Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\tau_1 = \tau_{prod}$
2. $f : X \rightarrow (\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau_1)$ es continua si y sólo si $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in A$.

Demostración: 1. $\Rightarrow$ 2. Se tiene directamente aplicando el lema 1.6.

2. $\Rightarrow$ 1. Tomemos la identidad $i : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, con la misma topología τ_1 , que es continua. Aplicando 2. tenemos que π_α es continua para todo $\alpha \in A$, y por el lema 1.7, concluimos que $\tau_{prod} \subseteq \tau_1$. Ahora, consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} h: \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau_{prod} \right) &\longrightarrow \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau_1 \right) \\ x &\longmapsto h(x) = x \end{aligned}$$

La aplicación $h_\alpha = \pi_\alpha \circ h : \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau_{prod} \right) \rightarrow X_\alpha$ es continua por el lema 1.5, por lo que aplicando 2., la aplicación h es continua. Como es biyectiva, dado $U \in \tau_1$, se tiene que $h^{-1}(U) = U$ debe ser un abierto de τ_{prod} , con lo que $\tau_1 \subseteq \tau_{prod}$, y entonces ambas topologías son iguales. $\square$

Por último, veamos si el producto no finito de espacios discretos es discreto. Aunque parezca sorprendente, este no es el caso. Tomemos, por ejemplo, un espacio discreto de cardinal finito $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, $k > 1$, y consideremos el espacio producto $X^{\mathbb{N}}$. El espacio X es compacto, por lo que aplicando el Teorema de Tychonoff (ver el teorema 1.11), $X^{\mathbb{N}}$ es compacto. Vemos ahora que $X^{\mathbb{N}}$ no puede ser discreto, puesto que si consideramos el recubrimiento formado por todos sus puntos, que son abiertos si el espacio es discreto, éste no tiene ningún subrecubrimiento finito, lo que implicaría que $X^{\mathbb{N}}$ no es compacto.

1.2. Espacios compactos y Hausdorff

En esta sección se presentan algunas propiedades importantes de los espacios topológicos compactos² y de los espacios topológicos Hausdorff³, y que serán utilizadas durante la memoria. Seguiremos principalmente las secciones 13 y 17 del libro de S. Willard [17]. En primer lugar, se enuncia un lema de gran utilidad, pues muestra que el producto de espacios Hausdorff también es Hausdorff.

Lema 1.9 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces, X_α es Hausdorff para todo $\alpha \in A$ si y sólo si $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ también es Hausdorff.*

Demostración: $\Rightarrow$) Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios no vacíos y Hausdorff. Sean $x, y \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ dos puntos distintos del espacio producto. Tenemos que encontrar un par de abiertos disjuntos U, V de $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ tales que $x \in U$, $y \in V$.

Como $x \neq y$, entonces $x_\beta \neq y_\beta$ para algún $\beta \in A$. Además, como X_β es un espacio Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_β y V_β en X_β tales que $x_\beta \in U_\beta$ e $y_\beta \in V_\beta$. Consideremos ahora la proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta$, que es continua, luego $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ y $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ son dos abiertos de $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Tomamos ahora $U = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ y $V = \pi_\beta^{-1}(V_\beta)$. Se tiene que $x \in U$ e $y \in V$, ya que $\pi_\beta(x) = x_\beta \in U_\beta$ y $\pi_\beta(y) = y_\beta \in V_\beta$, respectivamente. Finalmente, son disjuntos, ya que si existiese un punto $z \in U \cap V$, se tendría que $\pi_\beta(z) = z_\beta$ estaría en U_β y en V_β , lo cual no es posible, ya que U_β y V_β son disjuntos.

²Un espacio topológico X es compacto si para todo recubrimiento por abiertos de X existe un subrecubrimiento finito de X .

³Un espacio topológico se dice Hausdorff si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existen dos abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ e $y \in V$.

$\Leftarrow$) Sea ahora $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ un espacio no vacío y Hausdorff, y sea $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Consideremos $U_\beta = \{y \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha : y_\alpha = x_\alpha \text{ si } \alpha \neq \beta\}$, que es homeomorfo a X_β por la proyección π_β , ya que es una biyección, es continua por el lema 1.5, y es abierta, ya que dado un abierto V de U_β de la forma $\prod_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} \{x_\alpha\} \times V_\beta$, con V_β abierto en X_β , se tiene que $\pi_\beta(V) = V_\beta$. Como U_β es Hausdorff por ser un subespacio de un espacio Hausdorff, X_β también lo es. $\square$

Aunque en este resultado se utilice la topología producto, también es cierto si se considera la topología por cajas. Basta tener en cuenta que las proyecciones también son continuas con la topología por cajas.

El siguiente lema asegura que, dada una familia de conjuntos no vacíos y cerrados $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $F_n \supseteq F_{n+1}$ en un espacio compacto X , entonces su intersección es no vacía. Es consecuencia de un resultado más general, que se puede ver en el teorema 26.9 de [14], y será utilizado en la demostración del lema 3.8.

Lema 1.10 *Sea X un espacio compacto y una familia de conjuntos cerrados $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $F_n \supseteq F_{n+1}$. Entonces se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Demostración: Sean X un espacio compacto y $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos no vacíos y cerrados en X . Supongamos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$, y consideremos la familia $\{X \setminus F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos de X . Observemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n) = X \setminus (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) = X$, de donde se sigue que los $X \setminus F_n$ forman un recubrimiento de X . Ahora, como X es un espacio compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{X \setminus F_{n_1}, \dots, X \setminus F_{n_k}\}$ de X . Entonces, $X = \bigcup_{i=1}^k (X \setminus F_{n_i}) = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^k F_{n_i}\right)$, luego $\bigcap_{i=1}^k F_{n_i} = \emptyset$. Pero la intersección anterior es uno de los F_n , concretamente F_m con $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, y concluimos entonces que $F_m = \emptyset$, lo que no es posible, ya que los F_n son no vacíos por hipótesis. Por tanto, la suposición $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ no puede ser cierta. $\square$

Enunciamos a continuación el Teorema de Tychonoff, que da una de las propiedades más importantes del producto de espacios compactos

Teorema 1.11 (de Tychonoff) *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos no vacíos, y sea $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ su producto cartesiano, con la topología producto. Entonces, cada X_α es compacto si y sólo si $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ también es compacto.*

La demostración de este teorema requiere de bastantes resultados previos, por lo que no la desarrollaremos, aunque una prueba del teorema puede verse en el teorema 17.8 de [17]. Como ya se ha comentado, este teorema, crucial en el campo de la topología, será utilizado en muchas demostraciones de la memoria.

Los siguientes lemas dan dos propiedades muy conocidas de los espacios compactos que serán de utilidad en el capítulo 3. Se corresponden con el teorema 3.1.3 y el corolario 3.1.5 del libro de R. Engelking, *General Topology* [8].

Lema 1.12 *Sea A un subconjunto compacto de X . Entonces, para toda familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de X tales que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, existe una subfamilia finita tal que $A \subseteq \bigcup_{i \in S} U_i$, con $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.*

Demostración: Sea A un subconjunto compacto de X , y $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos de X tales que su unión contiene a A . Entonces, podemos considerar la familia de abiertos $\{V_i\}_{i \in I}$

en A , donde $V_i = U_i \cap A$, que forman un recubrimiento de A ; y como A es compacto, existe un subrecubrimiento finito de A formado por $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_k}$, con $k \in \mathbb{N}$. Ahora, cada V_{i_j} tiene asociado un U_{i_j} , de forma que tenemos una subfamilia finita de la original, cuya unión contiene la unión de los V_{i_j} , que es recubrimiento de A , y por tanto contiene a A . $\square$

Lema 1.13 Sean X un espacio topológico compacto y U un abierto de X . Si existe una familia de cerrados $\{F_i\}_{i \in I}$ tales que su intersección $\bigcap_{i \in I} F_i$ está contenida en U , entonces hay una subfamilia finita $\{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_k}\}$ cuya intersección también está contenida en U .

Demostración: Sean U un abierto y $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados cuya intersección está contenida en U . Entonces la familia $\{X \setminus F_i\}_{i \in I}$ está formada por abiertos, y como $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq U$, se tiene que

$$X \setminus U \subseteq X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i)$$

Aplicando el lema 1.12 a $X \setminus U$, que es compacto por ser cerrado en X compacto, tenemos una subfamilia finita $\{X \setminus F_{i_1}, X \setminus F_{i_2}, \dots, X \setminus F_{i_k}\}$, cuya unión contiene a $X \setminus U$. De esta manera, como $X \setminus U \subseteq \bigcup_{j=1}^k (X \setminus F_{i_j})$, su complementario U cumple

$$U = X \setminus (X \setminus U) \supseteq X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k (X \setminus F_{i_j}) \right) = \bigcap_{j=1}^k F_{i_j}$$

como se quería probar. $\square$

1.3. Espacios métricos y espacios metrizables

En esta sección introduciremos las definiciones de espacio métrico y de espacio metrizable, además de algunas propiedades importantes de estos espacios. Seguiremos la sección 22 de [17].

Definición 1.14 Un espacio métrico es un par ordenado (X, ρ) , compuesto por un conjunto X y una función $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ a la que se llama métrica, que cumple para cualquier $x, y, z \in X$:

1. $\rho(x, y) \geq 0$
2. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
4. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Dado un $\varepsilon > 0$, $x \in X$, se define la bola abierta centrada en x con radio ε ,

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Cuando no haya confusión posible en cuanto a qué métrica se refiere, se denotará a la bola de centro x y radio ε simplemente como $B(x, \varepsilon)$. La colección de todas las bolas abiertas $\{B_\rho(x, \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0, x \in X}$ es base de una topología τ_ρ , denominada topología métrica inducida por ρ .

Definición 1.15 *Un espacio topológico X se dice metrizable si su topología viene de una métrica ρ , esto es, su topología τ coincide con la topología métrica τ_ρ .*

Un ejemplo de espacio topológico metrizable es $(\mathbb{R}, \tau_u)$ si consideramos en $\mathbb{R}$ la métrica usual d_u , $d_u(x, y) = |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Aunque las definiciones de espacio métrico y metrizable se parezcan, existen algunas diferencias entre ellos. En el caso de un espacio métrico, este es un par formado por un conjunto y una métrica, mientras que en el caso de un espacio metrizable, este es un par formado por un conjunto y una topología, que además cumple ciertas propiedades especiales. En primer lugar, podemos observar que todo espacio métrico (X, ρ) tiene asociado un espacio topológico, (X, τ_ρ) , que es por tanto un espacio metrizable. Por otro lado, un espacio topológico (X, τ) puede no tener asociada una métrica, es decir, su topología no viene de ninguna métrica, por ejemplo si el espacio topológico no es Hausdorff, como consecuencia del lema 1.16. Además, dado un espacio metrizable (X, τ) , tenemos que la métrica ρ asociada a él no tiene porqué ser única, por ejemplo, si ρ es una métrica cuya topología inducida coincide con τ , entonces $n\rho$, con $n > 0$, también es una métrica e induce una topología que también coincide con τ .

Lema 1.16 *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Entonces (X, τ_ρ) es Hausdorff.*

Demostración: Sea (X, ρ) un espacio métrico, y dos puntos distintos $x, y \in X$. Para que (X, τ_ρ) sea Hausdorff, debemos encontrar un par de abiertos disjuntos $U, V \in \tau_\rho$ tales que $x \in U$, $y \in V$. Como es espacio métrico y los puntos son distintos, $\epsilon = \rho(x, y) > 0$. Consideremos las bolas $B(x, \frac{\epsilon}{2})$ y $B(y, \frac{\epsilon}{2})$, son abiertos de τ_ρ que contienen respectivamente a x y a y . Además las bolas son disjuntas, ya que si existe $z \in B(x, \frac{\epsilon}{2}) \cap B(y, \frac{\epsilon}{2})$, $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) < \epsilon$, lo que es imposible. Con esto se tiene que el espacio es Hausdorff. $\square$

Por tanto, todo espacio métrico tiene asociado un espacio topológico Hausdorff, y si se tiene un espacio topológico metrizable, entonces también es Hausdorff. A continuación, se da un resultado que garantiza que dado un espacio métrico, siempre vamos a poder obtener una métrica acotada que induce la misma topología, para lo cual es necesaria la siguiente definición:

Definición 1.17 *Dos métricas ρ_1 y ρ_2 en X se dicen topológicamente equivalentes si inducen la misma topología τ en X .*

Lema 1.18 *Cualquier métrica ρ en un espacio métrico X es topológicamente equivalente a una métrica acotada.*

Demostración: Sea ρ una métrica en X . Considérese $\rho_a(x, y) = \min\{a, \rho(x, y)\}$, con $a \in \mathbb{R}^+$, para todo $x, y \in X$. Veamos que es una métrica:

1. $\rho_a(x, y) = \min\{a, \rho(x, y)\} \geq 0$ atendiendo a la propiedad 1. de ρ .
2. $x = y \iff \rho(x, y) = 0 \iff 0 = \min\{a, 0\} = \min\{a, \rho(x, y)\} = \rho_a(x, y)$
3. $\rho_a(x, y) = \min\{a, \rho(x, y)\} = \min\{a, \rho(y, x)\} = \rho_a(y, x)$
4. Sean $x, y, z \in X$. Si $\rho(x, z) \geq a$ o $\rho(y, z) \geq a$, entonces:

$$\rho_a(x, z) + \rho_a(y, z) \geq a \geq \min\{a, \rho(x, y)\} = \rho_a(x, y)$$

En caso contrario, $\rho(x, z) < a$ y $\rho(y, z) < a$, y se tiene que

$$\rho_a(x, z) + \rho_a(y, z) = \rho(x, z) + \rho(y, z) \geq \min\{a, \rho(x, z) + \rho(y, z)\} \geq \min\{a, \rho(x, y)\} = \rho_a(x, y)$$

Antes de estudiar si las dos métricas generan la misma topología, observemos cómo son las bolas abiertas dadas por la métrica ρ_a . Sea $\epsilon > 0$ y $x \in X$, entonces:

$$B_{\rho_a}(x, \epsilon) = \{y \in X : \min\{a, \rho(x, y)\} < \epsilon\} = \begin{cases} B_\rho(x, \epsilon) & \text{si } \epsilon \leq a \\ X & \text{si } \epsilon > a \end{cases}$$

En el caso $\epsilon \leq a$ se tiene que $\rho_a(x, y) < \epsilon \iff \rho(x, y) < \epsilon$, y la bola de la métrica ρ_a coincide con la de ρ . Por otro lado, si $\epsilon > a$, entonces $\min\{a, \rho(x, y)\} \leq a < \epsilon$ para todo $y \in X$, con lo que la bola en ese caso es el total.

De esto se sigue que todo elemento de la base de τ_{ρ_a} es un elemento de τ_ρ , y τ_ρ es más fina que τ_{ρ_a} . Por otro lado, queremos ver que τ_{ρ_a} es más fina que τ_ρ , para lo que basta ver que dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$, para todo $y \in B_\rho(x, \epsilon)$ existe un $r > 0$ tal que $y \in B_{\rho_a}(y, r) \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$. Sabemos que existe $r_1 > 0$ tal que $B_\rho(y, r_1) \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$, por ejemplo $r_1 = \epsilon - \rho(x, y)$. Tomamos $r = \min\{r_1, a\}$. Entonces

$$y \in B_{\rho_a}(y, r) = B_\rho(y, r) \subseteq B_\rho(y, r_1) \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$$

como se quería probar. Por tanto las métricas ρ y ρ_a son equivalentes. $\square$

Este último resultado aporta una idea nueva: cuando se tienen espacios métricos y se quieren estudiar algunas propiedades que tienen que ver con la topología, no importan las bolas “grandes” (entendiendo como grandes las de radio mayor que uno escogido arbitrariamente) de la topología, sino las “más pequeñas” (entendiendo estas como las de radio menor que uno escogido arbitrariamente), ya que dada una métrica ρ , podemos obtener una métrica equivalente $\rho_a = \min\{a, \rho(x, y)\}$, con $a \in \mathbb{R}^+$.

El siguiente resultado es bastante importante, puesto que asegura que cualquier producto numerable de espacios metrizable es metrizable, con lo que podemos asegurar que, dada una familia numerable de espacios métricos, el producto de estos espacios métricos también es un espacio métrico.

Lema 1.19 *Un espacio producto no vacío $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es metrizable si y sólo si cada X_n es metrizable.*

Demostración: $\Rightarrow$) Sea $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ un espacio no vacío y metrizable. Veamos que X_m es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, y es por tanto metrizable. Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $x_n \in X_n$, $A = \prod_{n=1}^{m-1} \{x_n\} \times X_m \times \prod_{n=m+1}^{\infty} \{x_n\}$, y $\pi_m : A \rightarrow X_m$ la restricción de la m -ésima proyección a A . La aplicación π_m es una biyección, es continua por ser una restricción del dominio de una proyección, y es abierta, ya que los abiertos no vacíos de A son de la forma

$$U = \tilde{U} \cap A = \prod_{n=1}^{m-1} \{x_n\} \times U_m \times \prod_{n=m+1}^{\infty} \{x_n\}$$

donde $\tilde{U} = \prod_{n=1}^{m-1} X_n \times U_m \times \prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$ es un abierto de $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, con U_m abierto de X_m , y $\pi_m(U) = U_m$, abierto en X_m .

$\Leftarrow$) Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de espacios no vacíos metrizables. En virtud del lema 1.18 podemos tomar las métricas ρ_n acotadas por 1. Dados $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$ en $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ se define $\rho : \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow [0, \infty)$ como

$$\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} \quad (1.1)$$

Veamos que ρ es una métrica:

1. $\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} \geq \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} \geq 0$.
2. $x = y$ si $x_n = y_n$ para todo $n \iff \rho_n(x_n, y_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto ocurre si y sólo si $\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} = 0$
3. $\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(y_n, x_n)}{2^n} = \rho(y, x)$
4. Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x_n, z_n) + \rho_n(y_n, z_n)}{2^n} = \rho(x, z) + \rho(y, z)$$

Falta demostrar que la topología inducida por ρ y la topología producto son equivalentes. En primer lugar, consideremos $x \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ y un elemento de la base de la topología producto U que contiene a x dado por

$$U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n, \text{ con } U_n = \begin{cases} B_{\rho_n}(x_n, \epsilon_n) & \text{si } n \in \{n_1, \dots, n_k\} \\ X_n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $N = \{n_1, \dots, n_k\}$ es un conjunto finito de índices. Tomemos $\epsilon = \min\{\frac{\epsilon_n}{2^n}\}_{n \in N}$, que es mayor que 0 por ser todos los $\epsilon_n > 0$ y N un conjunto finito. Veamos que $B_\rho(x, \epsilon)$ está contenida en U . Tomamos $y \in B_\rho(x, \epsilon)$, entonces

$$\epsilon > \rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} \geq \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. En particular, para $n_j \in N$, se tiene entonces que

$$\frac{\rho_{n_j}(x_{n_j}, y_{n_j})}{2^{n_j}} < \epsilon \leq \frac{\epsilon_{n_j}}{2^{n_j}} \Rightarrow \rho_{n_j}(x_{n_j}, y_{n_j}) < \epsilon_{n_j}$$

con lo que $y_{n_j} \in B(x_{n_j}, \epsilon_{n_j})$ para todo $n_j \in N$. Por tanto, $y \in U$ para todo $y \in B_\rho(x, \epsilon)$, y se tiene que $x \in B_\rho(x, \epsilon) \subseteq U$, con lo que τ_ρ es más fina que τ_{prod} .

Sea ahora $x \in X$ y $B_\rho(x, \epsilon)$ un entorno de x . Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$. Sea entonces U el elemento de la base de la topología producto dado por

$$U = \prod_{n=1}^m B_{\rho_n}\left(x_n, \frac{\epsilon}{m}\right) \times \prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$$

Consideremos $y \in U$, entonces

$$\rho(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n=1}^m \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} < \sum_{n=1}^m \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n} + \frac{\epsilon}{2} \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=1}^m \frac{\epsilon}{m} \frac{1}{2^n} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{m} \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{m} \frac{m}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

con lo que $y \in B_\rho(x, \epsilon)$, y $x \in U \subseteq B_\rho(x, \epsilon)$. Entonces τ_{prod} es más fina que τ_ρ , y en consecuencia son iguales. Así, la métrica ρ induce la misma topología que la topología producto. $\square$

De esta manera, si tenemos una familia a lo sumo numerable de espacios métricos $\{(X_n, \rho_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, cada uno de ellos tiene asociado un espacio topológico metrizable (X_n, τ_{ρ_n}) , y aplicando este teorema se tiene que el espacio producto $(\prod X_n, \tau)$ es también metrizable, por lo que tiene asociado al menos un espacio métrico $(\prod X_n, \rho)$. Este resultado no es cierto si consideramos el producto infinito no numerable de espacios metrizables. De hecho, se puede probar que el producto arbitrario es metrizable si y sólo si los espacios son metrizables, y todos salvo una familia a lo sumo numerable de ellos son conjuntos unipuntuales (ver teorema 22.3 de [17]).

Por último, damos la definición de diámetro de un conjunto en un espacio métrico, que viene a generalizar el concepto de diámetro de una circunferencia en $\mathbb{R}^2$ como la mayor distancia entre dos puntos del conjunto, y que será usado varias veces durante la memoria.

Definición 1.20 Sea (X, d) un espacio métrico. Se define el diámetro $\delta(A)$ de $A \subseteq X$ como

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

Como podemos observar en la definición, si el conjunto A no está acotado, su diámetro puede no estar acotado, por ejemplo, el diámetro de $\mathbb{R}$ con la métrica usual d_u es infinito, mientras que si se considera una métrica acotada $\rho_a = \min\{a, d_u(x, y)\}$, con $a \in \mathbb{R}$ como se definió en el lema 1.18, entonces el diámetro de $\mathbb{R}$ es a .

1.4. Axiomas de separación y de numerabilidad

En esta sección introduciremos las definiciones de una serie de propiedades que se conocen como axiomas de numerabilidad. Además, se introducen también las definiciones de algunos de los axiomas de separación que serán necesarios durante la memoria, especialmente en el capítulo 4. Seguiremos esencialmente los libros de S. Willard [17] y de J.R. Munkres [14]. Comencemos introduciendo lo que se conocen como axiomas de numerabilidad.

Definición 1.21 Un espacio X satisface el primer axioma de numerabilidad (en inglés, X es “first countable”) si todo punto $x \in X$ tiene una base de entornos abiertos numerable.

Observemos que todo espacio metrizable satisface el primer axioma de numerabilidad. Fijemos un punto $x \in X$. Entonces, dado un entorno U de x , se tiene que $x \in B(x, \epsilon) \subseteq U$ para algún ϵ . Ahora, como $\epsilon > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \epsilon)$. Por tanto, para todo entorno de x podemos encontrar una bola $B(x, \frac{1}{n})$ contenida en el entorno, y la familia $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ es entonces una base numerable de entornos del punto x .

Definición 1.22 Un espacio X satisface el segundo axioma de numerabilidad (en inglés, X es “second countable”) si su topología tiene una base numerable.

Observemos en primer lugar que todo espacio que satisfaga el segundo axioma de numerabilidad satisface el primero, pero el recíproco no es cierto: consideremos $(\mathbb{R}, \tau_{disc})$ el conjunto de los números reales con la topología discreta, que no admite ninguna base numerable.

Lema 1.23 *Si X es un espacio compacto y metrizable, entonces satisface el segundo axioma de numerabilidad.*

Demostración: Sea ρ una métrica en X . Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la familia de bolas abiertas $B(x, \frac{1}{n})$ con $x \in X$. Entonces, por ser X compacto, existe una subfamilia finita $\mathcal{B}_n = \{B(x_{i_n}, \frac{1}{n})\}_{i_n=1}^{k_n}$ que recubre X . Sea $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ familia numerable de abiertos, veamos que es base. Sea U un abierto de X y $x \in U$. Entonces, por definición de topología métrica, existe un $\epsilon > 0$ tal que $x \in B(x, \epsilon) \subseteq U$. Además, se puede fijar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$, y entonces como $\mathcal{B}_n$ es un recubrimiento de X , también recubren $B(x, \epsilon)$, con lo que existe una bola $B(x_{i_n}, \frac{1}{n})$ que contiene a x . Sea $z \in B(x_{i_n}, \frac{1}{n})$, entonces

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, x_{i_n}) + \rho(x, x_{i_n}) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \epsilon$$

Luego $x \in B(x_{i_n}, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \epsilon) \subseteq U$. Como $\mathcal{B}$ es una base numerable, X satisface el segundo axioma de numerabilidad. $\square$

En las siguientes definiciones se introducen los conceptos de espacio regular y de espacio normal.

Definición 1.24 *Un espacio X se dice regular si para todo cerrado E de X y todo punto $x \in X \setminus E$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $E \subseteq U$ y $x \in V$.*

Definición 1.25 *Un espacio topológico X se dice normal si para cualquier A, B cerrados disjuntos en X , existen abiertos disjuntos U y V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

Observemos que si el espacio es Hausdorff, entonces los puntos son cerrados, luego todo espacio Hausdorff y normal es regular. Antes de introducir el Teorema de metrización de Urysohn, definimos la noción de espacio separable.

Definición 1.26 *Un espacio X se dice que es separable si X tiene un subconjunto numerable E que es denso en X , esto es, tal que la clausura de E es X .*

Recordemos que un espacio X se dice que es T_1 si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existen dos abiertos U, V tales que $x \in U$ e $y \in V$, pero $y \notin U$ y $x \notin V$. Es inmediato, por tanto, que todo espacio T_2 o Hausdorff es también T_1 . El siguiente teorema se conoce como el Teorema de metrización de Urysohn, que caracteriza los espacios metrizables y separables. En la memoria, será de utilidad en el capítulo 4. Aunque lo presentamos sin demostración, esta puede verse en la página 166 de [17].

Teorema 1.27 (Teorema de metrización de Urysohn) *Si un espacio X es T_1 son equivalentes las siguientes afirmaciones*

1. *El espacio X es regular y satisface el segundo axioma de numerabilidad.*
2. *El espacio X es separable y metrizable.*

El siguiente corolario es consecuencia directa del teorema anterior. Su demostración se puede ver en la página 166 del libro de S. Willard [17].

Corolario 1.28 Sea X un espacio compacto y métrico, Y un espacio Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces $f(X)$ es un subespacio compacto y métrico de Y .

Lema 1.29 Si un espacio numerable X es compacto y Hausdorff, entonces satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Demostración: Como X es numerable, basta demostrar que satisface el primer axioma de numerabilidad, con lo que automáticamente cumplirá el segundo. Fijemos $x \in X$, para cada $y \in X$ tal que $x \neq y$ tenemos que existen U_y, V_y abiertos disjuntos de X tales que $x \in U_y$ e $y \in V_y$. Tenemos que la familia formada por intersecciones finitas de conjuntos U_y es numerable (ya que partes finitas de $\mathbb{N}$ tiene el mismo cardinal⁴), veamos que es una base numerable de entornos de x . Sea E un entorno de x , entonces contiene un abierto U . Ahora, tenemos que $\mathbb{R} \setminus V_y$ es cerrado para todo $y \in X$, y su intersección es el propio x . Aplicando el lema 1.13, tenemos que existe una subfamilia finita $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_k}\}$ tal que $\bigcap_{i=1}^k (\mathbb{R} \setminus V_{y_i}) \subseteq U$. Teniendo en cuenta que $\bigcap_{i=1}^k U_{y_i} \subseteq \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k V_{y_i} \right) = \bigcap_{i=1}^k (\mathbb{R} \setminus V_{y_i})$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^k U_{y_i}$ está contenido en U , y por tanto en E , como queríamos probar. □

⁴ A cada intersección $\bigcap_{i=1}^k U_{y_i}$ se le puede asociar el subconjunto finito $\{y_i\}_{i=1}^k$. Para ver que la familia $\mathcal{A}$ de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable, basta considerar que para cada natural n , el número de conjuntos cuyo máximo es n es 2^{n-1} , ya que, fijado n , se tiene que para cada $0 \leq m < n$, existen $\binom{n-1}{m}$ conjuntos con $m+1$ elementos que tengan como máximo a n , por lo que en total hay $\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} = 2^{n-1}$. Entonces $\mathcal{A}$ es la unión numerable de las familias $\mathcal{A}_n$ formadas por los conjuntos cuyo máximo es n , que son finitas, luego $\mathcal{A}$ es numerable.

Capítulo 2

Propiedades topológicas del conjunto de Cantor

2.1. El conjunto de Cantor

En esta sección presentamos el conjunto de Cantor, tanto como subconjunto de la recta real, como producto de numerable de copias del espacio discreto $\{0, 2\}$, así como algunas de sus propiedades. Seguiremos principalmente el libro de S. Willard [17] y el de J.R. Munkres [14].

Comencemos construyendo el conjunto Cantor a partir del intervalo unidad $\mathfrak{I} = [0, 1]$ de $\mathbb{R}$. Consideremos el conjunto $A_1 = \mathfrak{I} \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, es decir, el conjunto obtenido eliminando del intervalo unidad el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Una vez obtenido A_1 , obtenemos el resto de conjuntos A_n de la siguiente manera: a partir de A_{n-1} , el conjunto A_n se construye dividiendo cada intervalo cerrado de A_{n-1} en tres iguales, y eliminando el tercio central de cada intervalo. Esto puede escribirse como:

$$A_n = A_{n-1} \setminus \bigcup_{k=0}^{k_n} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right) \quad n \geq 2 \quad (2.1)$$

donde $k_n = 3^{n-1} - 1$.

De esta manera, podemos definir el conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ como

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (2.2)$$

Podemos también representar los conjuntos A_n como la unión de un número finito de intervalos cerrados disjuntos, todos ellos contenidos en $\mathfrak{I}$. Para ello, veamos como son los intervalos abiertos que hemos ido eliminando en la construcción de cada A_n . Fijemos n , y dividamos $\mathfrak{I}$ en 3^{n-1} partes de longitud $\frac{1}{3^{n-1}}$. Observamos que los abiertos eliminados que aparecen en la ecuación (2.1) se corresponden con el tercio central de cada una de las 3^{n-1} partes antes mencionadas, de forma que no todos están contenidos en A_{n-1} , puesto que hay algunos que están contenidos en otro intervalo abierto eliminado en un paso anterior. Así, por ejemplo, en el paso $n = 1$ se elimina el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, y en el paso $n = 2$ se eliminan los intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{4}{9}, \frac{5}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Vemos que $(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}) \subset (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, con lo que en realidad en la construcción de A_2 se eliminan $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ de A_1 .

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} n = 1 : & & & & & & & U_1^1 \\ n = 2 : & & & & U_1^2 & & & U_1^1 & & & & U_2^2 & & & \\ n = 3 : & & U_1^3 & & U_1^2 & & U_2^3 & & U_1^1 & & U_3^3 & & U_2^2 & & U_4^3 \\ n = 4 : & U_1^4 & U_1^3 & U_2^4 & U_1^2 & U_3^4 & U_2^3 & U_4^4 & U_1^1 & U_5^4 & U_3^3 & U_6^4 & U_2^2 & U_7^4 & U_4^3 & U_8^4 \end{array}$$

Podemos entonces construir los primeros A_n , eliminando los intervalos abiertos, de forma que obtenemos una unión finita de intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathfrak{I} = [0, 1] \\ A_1 &= [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1] \\ A_2 &= [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1] \\ A_3 &= [0, \tfrac{1}{3^3}] \cup [\tfrac{2}{3^3}, \tfrac{3}{3^3}] \cup [\tfrac{6}{3^3}, \tfrac{7}{3^3}] \cup [\tfrac{8}{3^3}, \tfrac{9}{3^3}] \cup [\tfrac{18}{3^3}, \tfrac{19}{3^3}] \cup [\tfrac{20}{3^3}, \tfrac{21}{3^3}] \cup [\tfrac{24}{3^3}, \tfrac{25}{3^3}] \cup [\tfrac{26}{3^3}, 1] \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

Luego si escribimos

$$A_{n-1} = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} [v_j^{n-1}, w_j^{n-1}]$$

$$A_n = \left(\bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{v_j^{n-1}}{3}, \frac{w_j^{n-1}}{3} \right] \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{v_j^{n-1}}{3} + \frac{2}{3}, \frac{w_j^{n-1}}{3} + \frac{2}{3} \right] \right)$$

¹Esta propiedad que utilizamos para construir los A_n nos anuncia una propiedad que posee el conjunto de Cantor, la autosimilitud, que estudiaremos en la sección posterior.



Figura 2.2: Esquema de los cuatro primeros A_n con los que se construye el conjunto de Cantor.

Además, denotaremos

$$A_n^0 = \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, 2^n\} \\ j \text{ impar}}} [v_j^n, w_j^n] \quad (2.3)$$

$$A_n^2 = \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, 2^n\} \\ j \text{ par}}} [v_j^n, w_j^n] \quad (2.4)$$

y por lo tanto $A_n = A_n^0 \cup A_n^2$. Esta escritura nos será útil un poco más adelante.

Otra definición alternativa del conjunto de Cantor consiste en partir de la expresión de los elementos de $\mathfrak{J}$ en forma ternaria, esto es, dado un $x \in \mathfrak{J}$, a x se le puede asociar con la sucesión $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, donde los x_i cumplen que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_i}{3^i}$. Entonces el conjunto de Cantor es

$$\mathfrak{C} = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x_i}{3^i} : x_i \in \{0, 2\} \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.5)$$

Para todo elemento de $\mathfrak{J}$ esta expresión es única, salvo por el hecho de que, dado un número que termina en una sucesión infinita de 2, se puede reescribir la expresión de forma que termine en una sucesión de 0 (la única excepción en $\mathfrak{J}$ es el 1). En nuestro caso, vemos que esto no es un problema, ya que dada una sucesión infinita de ceros, el dígito anterior tiene que ser 2 (el caso en el que el número se escribe como una sucesión infinita solo de ceros se corresponde con el 0), y al reescribirlo para que termine en una sucesión de doses, el 2 se cambiaría por un 1. Del mismo modo, dada una sucesión infinita de doses, el dígito anterior (salvo para el 1, que se escribe como una sucesión infinita solo de doses) tendría que ser 0, y al reescribirlo como una sucesión de ceros, el cero se cambiaría por un 1.

Podemos rápidamente ver que los conjuntos descritos por las expresiones (2.2) y (2.5) son efectivamente iguales, ya que si consideramos los elementos de $\mathfrak{J}$ cuya forma ternaria tiene un 0 o un 2 en la primera cifra, obtenemos el conjunto A_1 . Del mismo modo, si aplicamos la restricción a las primeras dos cifras, obtendremos el conjunto A_2 ; y en general, si consideramos los elementos de $\mathfrak{J}$ cuyas primeras n cifras del desarrollo ternario son 0 o 2, obtenemos A_n . De esta manera, el conjunto dado por el desarrollo ternario está en A_n para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto se encuentra en la intersección. Asimismo, dado un elemento de la intersección, este se encuentra en todos los A_n , en particular de A_1 , por lo que la primera cifra de su desarrollo ternario debe ser 0 o 2, ya que si solo pudiera escribirse con un 1 en la primera cifra, se encontraría en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. De esta manera, si

existiera un elemento en la intersección con un 1 en la cifra n de su expansión ternaria, tendríamos dos casos: si después del 1 hay una sucesión infinita de ceros o doses, hemos visto que el desarrollo puede reescribirse para cambiar el 1 por un 0 o un 2; si no ocurre esto, entonces podemos asegurar que dicho punto no se encuentra en A_n , y por tanto, no podría encontrarse en la intersección.

Con un poco más de rigor, podemos ver que existe una biyección entre $\mathfrak{C}$ y $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, es decir, el espacio obtenido con el producto infinito numerable del espacio discreto $\{0, 2\}$.

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} D_n, \text{ con } D_n = \{0, 2\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Se puede definir la aplicación h donde a cada elemento $c \in \mathfrak{C}$, con $c = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n}{3^n}$ le asocia un elemento $\gamma_c \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, definido por

$$\begin{aligned} \gamma_c: \mathbb{N} &\longrightarrow \{0, 2\} \\ n &\longmapsto \gamma_c(n) = c_n \end{aligned}$$

Luego si escribimos los elementos de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ como en la definición 1.1, $\gamma_c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos

$$\begin{aligned} h: \mathfrak{C} &\longrightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \\ c &\longmapsto h(c) = (c_1, c_2, \dots) \end{aligned} \tag{2.6}$$

La función h es inyectiva, ya que dados dos elementos $c, d \in \mathfrak{C}$ distintos, estos difieren en uno de los coeficientes del desarrollo ternario, es decir, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $c_m \neq d_m$, y así sus imágenes $h(c) = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $h(d) = (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son distintas.

Por otro lado, dado un elemento $\gamma \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, el elemento $c \in \mathfrak{C}$ cuyo coeficiente n -ésimo del desarrollo ternario es $\gamma(n)$ cumple que $h(c) = (c_1, c_2, \dots) = (\gamma(1), \gamma(2), \dots)$. Con esto, h es biyectiva.

De hecho, podemos demostrar que h es un homeomorfismo, para lo que vamos a definir las topologías de $\mathfrak{C}$ y de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$. El conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ tiene la topología heredada de la usual de $\mathbb{R}$, esto es, la que tiene como base los intervalos abiertos (a, b) , con $a < b$ en $\mathbb{R}$. Por otra parte, el espacio $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ tiene la topología producto o de Tychonoff, donde $\{0, 2\}$ tiene la topología discreta, esto es, tiene sólo cuatro abiertos: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{2\}$ y el total $\{0, 2\}$.

Probamos ahora que h es continua, para lo que basta ver que $\pi_n \circ h$ es continua para $n \in \mathbb{N}$, aplicando el lema 1.6. Para ello, fijemos $n \in \mathbb{N}$, y sea $h_n = \pi_n \circ h$. Se tiene que dado $c = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{c_m}{3^m}$, $h_n(c) = c_n$; y entonces, para cada cerrado U de $\{0, 2\}$, se tiene que:

1. Si $U = \emptyset$, $h_n^{-1}(U) = h_n^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, abierto en $\mathfrak{C}$.
2. Si $U = \{0, 2\}$, $h_n^{-1}(U) = h_n^{-1}(\{0, 2\}) = \mathfrak{C}$, abierto en $\mathfrak{C}$.
3. Si $U = \{0\}$, $h_n^{-1}(U) = h_n^{-1}(\{0\}) = \{(c_1, c_2, \dots) \in \mathfrak{C} : c_n = 0\} = A_n^0 \cap \mathfrak{C}$.
4. Si $U = \{2\}$, $h_n^{-1}(U) = h_n^{-1}(\{2\}) = \{(c_1, c_2, \dots) \in \mathfrak{C} : c_n = 2\} = A_n^2 \cap \mathfrak{C}$.

donde los conjuntos A_n^0 y A_n^2 son los cerrados dados por las expresiones (2.3) y (2.4).

Por último, para probar que h^{-1} es continua, vemos que h es cerrada, por ser una aplicación de un espacio compacto en un espacio Hausdorff, con lo que queda demostrado que h es homeomorfismo. Observemos que $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ es Hausdorff por el lema 1.16, mientras que en la siguiente sección veremos que $\mathfrak{C}$ es compacto con la topología inducida por la usual en $\mathbb{R}$.

2.2. Propiedades del conjunto de Cantor

Para estudiar las primeras propiedades del conjunto de Cantor consideramos en $\mathfrak{C}$ la topología inducida por la usual τ_u de $\mathbb{R}$. Una vez hallamos probado que $\mathfrak{C}$ es compacto con esa topología, podremos asegurar que la aplicación h definida en (2.6) es un homeomorfismo entre $\mathfrak{C}$ y $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$.

- **$\mathfrak{C}$ es cerrado:** basta considerar que cada A_n es el complementario de un número finito de intervalos abiertos en $\mathfrak{I}$, por lo que es cerrado en $\mathfrak{I}$. Como $\mathfrak{C}$ es la intersección de los conjuntos A_n , que son cerrados, entonces $\mathfrak{C}$ es cerrado en $\mathfrak{I}$, y como $\mathfrak{I}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, el conjunto de Cantor es cerrado en $\mathbb{R}$.
- **$\mathfrak{C}$ es compacto:** como $\mathfrak{I}$ es compacto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y $\mathfrak{C}$ es un cerrado de $\mathfrak{I}$, entonces $\mathfrak{C}$ es compacto.

Con esta última propiedad ya podemos concluir que la aplicación h definida por (2.6) es un homeomorfismo entre $\mathfrak{C}$ y $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$. A partir de ahora, nos referiremos como $\mathfrak{C}$ indistintamente a cualquiera de los dos espacios topológicos, según convenga para las propiedades que estemos estudiando. Así, un elemento $c \in \mathfrak{C}$ se expresará con su desarrollo ternario $c = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n}{3^n}$, o como elemento del espacio producto, $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, según sea conveniente.

- **$\mathfrak{C}$ es metrizable:** como ya sabemos, $\mathfrak{C}$ tiene la topología heredada por la topología usual τ_u de $\mathbb{R}$.
- **$\mathfrak{C}$ es Hausdorff:** esto es consecuencia inmediata del hecho de que el conjunto de Cantor es metrizable, junto con el lema 1.16.
- **$\mathfrak{C}$ es totalmente desconexo:**

Definición 2.1 *Un espacio topológico X es totalmente desconexo si y sólo si los únicos conjuntos conexos no vacíos son los conjuntos unipuntuales.*

Supongamos que tuviésemos en $\mathfrak{C}$ una componente B conexa con más de un punto. Dados un par de puntos $a, b \in B$, con $a < b$, siempre existe un punto $x \notin \mathfrak{C}$ tal que $a < x < b$, basta considerar el desarrollo ternario de a y b , encontrar la primera cifra en la que se diferencian, y sustituir esta y todas las cifras siguientes por 1, obteniendo un número que claramente está entre a y b . Entonces podemos considerar los conjuntos $B_a = B \cap [0, x)$ y $B_b = B \cap (x, 1]$, que son abiertos no vacíos disjuntos en B cuya unión es B , con lo que B es no conexo.

- **$\mathfrak{C}$ es perfecto:**

Definición 2.2 *Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice perfecto si y sólo si A es cerrado y sin puntos aislados, esto es, cada punto de A es punto de acumulación de A .*

Definición 2.3 *Un punto de acumulación de un subconjunto A de un espacio topológico X es un punto $x \in X$ tal que todo entorno de x contiene algún punto de A que no es x .*

Sea un punto $c \in \mathfrak{C}$, con $c = (c_1, c_2, c_3, \dots)$. Consideremos ahora un entorno U de c , este contiene a un intervalo de la forma $(c - \frac{1}{3^n}, c + \frac{1}{3^n})$ para algún valor $n \in \mathbb{N}$. Es inmediato comprobar que cualquier número cuyo desarrollo ternario coincida en sus n primeras cifras con el de c se encuentra dentro de U . Por tanto, basta considerar el punto c^* , cuyo desarrollo ternario es igual que el de c , salvo por las dos cifras siguientes a la n -ésima, que vienen dadas como:

$$c_{n+i}^* = \begin{cases} 2 & \text{si } c_{n+i} = 0 \\ 0 & \text{si } c_{n+i} = 2 \end{cases} \quad i = 1, 2$$

Este nuevo punto está claramente en $\mathfrak{C}$, es distinto de c , y se encuentra dentro de U , con lo que $\mathfrak{C}$ es perfecto.

■ **$\mathfrak{C}$ es denso en ninguna parte (nowhere dense):**

Definición 2.4 *Un conjunto $A \subset X$, con X espacio topológico, es denso en ninguna parte si el interior de la clausura de A es el vacío.*

Como $\mathfrak{C}$ es cerrado, la clausura de $\mathfrak{C}$ es él mismo. Supongamos que el interior de $\mathfrak{C}$ es no vacío, y que existe $c \in \mathring{\mathfrak{C}}$. Si $c \neq 0, 1$, podemos encontrar un intervalo de la forma (a, b) , con $0 \leq a < c < b \leq 1$, tal que $c \in (a, b) \subseteq \mathfrak{C}$. Sin embargo, dicho intervalo no puede ser disjunto con los intervalos abiertos que se eliminaron de $\mathfrak{I}$ para generar $\mathfrak{C}$. Para verlo, basta considerar que el intervalo (a, b) es un entorno del punto c y todo punto de $\mathfrak{C}$ es de acumulación, podemos encontrar otro punto c^* de $\mathfrak{C}$ dentro del intervalo. Ahora bien, entre c y c^* podemos encontrar un punto x que no se encuentra en $\mathfrak{C}$, tal y como se hizo antes, cambiando todas las cifras de su desarrollo ternario posteriores a la primera en la que difieran c y c^* por unos. De esta manera, el intervalo que teníamos tiene intersección no vacía con el complementario de $\mathfrak{C}$, y por tanto no puede estar en su interior. Del mismo modo, si $c = 0$, podemos encontrar un intervalo abierto en $\mathfrak{I}$ de la forma $[0, b) \subseteq \mathfrak{C}$, con $0 < b \leq 1$, y por ser $\mathfrak{C}$ perfecto, existe un $c^* \in [0, b)$ distinto de c , y razonando del mismo modo de antes, podemos encontrar un punto x entre $c = 0$ y c^* que no esté en $\mathfrak{C}$, con lo que $[0, b) \not\subseteq \mathfrak{C}$. Finalmente, si $c = 1$, entonces podemos encontrar un intervalo de la forma $(a, 1]$, con $0 \leq a < 1$, contenido en $\mathfrak{C}$, y proceder de forma análoga a los dos casos anteriores.

■ **$\mathfrak{C}$ es normal:**

Recordemos que un espacio normal (ver definición 1.25) es aquel en el que para todo par de cerrados disjuntos se pueden encontrar un par de abiertos disjuntos que contengan a cada uno.

El conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ es un espacio normal porque todo espacio compacto y Hausdorff es normal, como se demuestra a continuación:

Lema 2.5 *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Entonces X es normal.*

Demostración: Sean A y B dos cerrados disjuntos de X . Fijamos $a \in A$. Para cada punto $b \in B$, como X es Hausdorff, se puede encontrar un par de abiertos U_{ab}, V_{ab} disjuntos tales que $a \in U_{ab}$ y $b \in V_{ab}$. De esta manera, se tiene una familia de entornos abiertos $\{U_{ab}\}_{b \in B}$ de a , y un recubrimiento por abiertos $\{V_{ab}\}_{b \in B}$ de B .

Ahora bien, como X es compacto, y B es un cerrado de X , entonces B es compacto. Se puede entonces tomar un subrecubrimiento finito de abiertos $\{V_{ab_i}\}_{i=1}^k$ de B ; y de forma

que cada V_{ab_i} tiene asociado un U_{ab_i} . Así, tenemos una familia finita de abiertos $\{U_{ab_i}\}_{i=1}^k$ que contienen a a .

Se definen ahora los conjuntos U_a y V_a de la siguiente manera:

$$U_a = \bigcap_{i=1}^k U_{ab_i} \quad V_a = \bigcup_{i=1}^k V_{ab_i}$$

Dado que U_a es la intersección finita de abiertos que contienen a a , U_a es un entorno abierto de a , y además es disjunto con V_a , ya que U_a está contenido en todos los U_{ab_i} , que eran disjuntos con sus correspondientes V_{ab_i} .

Esto se puede hacer para cada punto $a \in A$, de forma que se tiene un recubrimiento por abiertos $\{U_a\}_{a \in A}$ de A , y una familia de abiertos $\{V_a\}_{a \in A}$ que contienen a B . Dado que A también es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{U_{a_j}\}_{j=1}^l$, que tiene asociado una familia de abiertos $\{V_{a_j}\}_{j=1}^l$ que contienen a B .

Por último, se consideran ahora los siguientes conjuntos:

$$U = \bigcup_{j=1}^l U_{a_j} \quad V = \bigcap_{j=1}^l V_{a_j}$$

Al igual que antes, se ve claramente que V es un abierto que contiene a B , ya que el conjunto $\{1, 2, \dots, l\}$ es finito y todos los $V_{a_j}^j$ contienen a B . Es además disjunto con U , ya que V está contenido en todos los $V_{a_j}^j$, que son disjuntos con los correspondientes $U_{a_j}^j$. De esta manera se tienen dos abiertos disjuntos que U y V que contienen respectivamente a los cerrados A y B . $\square$

■ $\mathfrak{C}$ es homogéneo:

Definición 2.6 *Un espacio topológico X se dice homogéneo cuando, para cada $x, y \in X$ existe un homeomorfismo ϕ de X en X tal que $\phi(x) = y$.*

Para encontrar el homeomorfismo que buscamos, vamos a considerar que $\mathfrak{C}$ es producto numerable de copias del espacio discreto $\{0, 2\}$, esto es, $\mathfrak{C} = \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$. Así, un elemento $c \in \mathfrak{C}$ se puede representar como $c = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$.

Sean $x, y \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $f: \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ una aplicación tal que para $z \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, $z = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f(z)$ es un elemento $u \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, $u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se define como:

$$u_n = (x_n + y_n + z_n) \text{ mód } 4$$

Vemos en primer lugar $f(x) = y$, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = (2x_n + y_n) \text{ mód } 4 = \begin{cases} (y_n + 4) \text{ mód } 4 & \text{si } x_n = 2 \\ (y_n) \text{ mód } 4 & \text{si } x_n = 0 \end{cases} = y_n$$

Análogamente, se tiene que $f(y) = x$, por lo que si comprobamos que f es un homeomorfismo habremos terminado. Sean $a, b \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ tales que $f(a) = f(b)$, entonces tenemos que $(x_n + y_n + a_n) \bmod 4 = (x_n + y_n + b_n) \bmod 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como x_n e y_n están fijos, $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que f es inyectiva. Del mismo modo, si tenemos un elemento $c \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, podemos encontrar un elemento $d \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ tal que $f(d) = c$,

$$d_n = \begin{cases} c_n & \text{si } (x_n + y_n) \bmod 4 = 0 \\ (c_n + 2) \bmod 4 & \text{si } (x_n + y_n) \bmod 4 = 2 \end{cases}$$

Así, f es una biyección. Para ver que f es continua, basta ver que $\pi_n \circ f$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\pi_n : \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 2\}$ es la proyección de la n -ésima coordenada, es decir, dado $z \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, $\pi_n(z) = z_n$. Se tienen entonces dos casos:

- Si $x_n = y_n$, entonces

$$(\pi_n \circ f)^{-1}(\{0\}) = \{z \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} : z_n = 0\} = \pi_n^{-1}(\{0\})$$

$$(\pi_n \circ f)^{-1}(\{2\}) = \{z \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} : z_n = 2\} = \pi_n^{-1}(\{2\})$$

- Si $x_n \neq y_n$, entonces

$$(\pi_n \circ f)^{-1}(\{0\}) = \{z \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} : z_n = 2\} = \pi_n^{-1}(\{2\})$$

$$(\pi_n \circ f)^{-1}(\{2\}) = \{z \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} : z_n = 0\} = \pi_n^{-1}(\{0\})$$

en ambos casos, se tiene que tanto $(\pi_n \circ f)^{-1}(\{0\})$ como $(\pi_n \circ f)^{-1}(\{2\})$ son elementos de la base de la topología producto de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, por lo que son abiertos. Para ver que f^{-1} es continua, veamos que $(f \circ f)(z) = z$, con lo que f es su propia inversa. Sea $z \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, y $n \in \mathbb{N}$. Distinguimos dos casos:

- Si $x_n = y_n$, entonces la coordenada n -ésima de $f(z)$ es z_n , con lo que la coordenada n -ésima de $f(f(z))$ también es z_n .
- Si $x_n \neq y_n$, entonces la coordenada n -ésima de $f(z)$ es $(z_n + 2) \bmod 4$, esto es, es 0 si $z_n=2$, y es 2 si $z_n=0$. Así, la coordenada n -ésima de $f(f(z))$ es 2 si z_n es 2, y es 0 si z_n es 0.

Queda probado por tanto que f es un homeomorfismo, y por tanto $\mathfrak{C}$ es homogéneo.

Las siguientes propiedades dan cuenta del “tamaño” del conjunto de Cantor. Por un lado, veremos que $\mathfrak{C}$ es un conjunto muy grande si lo que se tiene en cuenta es el número de elementos que contiene, pues tiene cardinal infinito, y no sólo eso, sino que su cardinal es el mismo que el de $\mathbb{R}$, por lo que en este sentido tiene el tamaño más grande que puede tener un subconjunto de los reales.

Por otro lado, veremos que el conjunto de Cantor es pequeño si lo que lo que medimos es su longitud. Para ello, veremos que la medida de Lebesgue de $\mathfrak{C}$ es 0, por lo que en ese sentido el conjunto de Cantor es muy pequeño, pues tendrá la misma medida que un solo punto de $\mathbb{R}$, o que el conjunto $\emptyset$.

- **El cardinal de $\mathfrak{C}$ es el del continuo:** Comencemos probando que $\mathfrak{C}$ no es numerable, para lo que consideraremos que $\mathfrak{C}$ son las sucesiones infinitas numerables de 0 y 2, y utilizaremos el argumento diagonal de Cantor. Supongamos que $\mathfrak{C}$ es numerable, entonces existe una

biyección $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{C}$, de forma que $f(n) = a^n = (a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n, \dots)$. Sea ahora $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ con

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{si } a_n^n = 0 \\ 0 & \text{si } a_n^n = 2 \end{cases}$$

Se observa que $b \notin \text{Im} f$, ya que si existiese un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) = a^m = b$, tendrían que coincidir coordenada a coordenada, en particular $a_m^m = b_m$, lo cual es imposible por la definición de b . Esto implica que f no puede ser sobreyectiva, y por tanto $\mathfrak{C}$ no es numerable.

Por otro lado, podemos ver que $\mathfrak{C}$ tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$. Para ello, veamos que existe una biyección entre $\mathfrak{C}$ y $[0, 1]$. Sea g la aplicación

$$\begin{aligned} g: \quad \mathfrak{C} &\longrightarrow [0, 1] \\ c = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n}{3^n} &\longmapsto g(c) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n/2}{2^n} \end{aligned}$$

Dado $c \in \mathfrak{C}$, se tiene que $g(c) \in [0, 1]$ siempre. Dados dos puntos $c, c^* \in \mathfrak{C}$ distintos, sus imágenes $g(c)$ y $g(c^*)$ son distintas, y dado un $x \in [0, 1]$, x se puede escribir como una suma infinita de $\frac{x_i}{2^i}$, donde $x_i = 0, 1$, y entonces $c_x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{2x_i}{3^i}$ está en $\mathfrak{C}$ y tiene como imagen al x . Luego g es una biyección entre $\mathfrak{C}$ y $[0, 1]$. Ahora, sea h la aplicación dada por la composición de h_1 y h_2 , donde h_1 es una biyección entre $(0, 1)$ y la esfera de radio unidad menos un punto $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$ en $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} h_1: \quad (0, 1) &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\} \\ x &\longmapsto h_1(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \end{aligned}$$

y h_2 es la proyección estereográfica de $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$ en $\mathbb{R}$ con foco el punto $(1, 0)$. La aplicación $h = h_2 \circ h_1$ es entonces una biyección, con lo que $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal, y se tiene que $\#(0, 1) \leq \#[0, 1] \leq \#\mathbb{R}$. Concluimos que el cardinal de $[0, 1]$, y por tanto el de $\mathfrak{C}$, es el del continuo.

■ **La medida de Lebesgue de $\mathfrak{C}$ es 0:**

Comencemos viendo rápidamente que $\mathfrak{C}$ es medible. En nuestro caso el espacio de medida (ver la definición A.4) es $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$, donde $\mathcal{L}$ es la σ -álgebra de Lebesgue y μ es la medida de Lebesgue, por lo que $\mathfrak{C}$ es medible si $\mathfrak{C} \in \mathcal{L}$. En $\mathcal{L}$ se encuentran todos los intervalos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}$ (ya que la σ -álgebra de Lebesgue contiene a la de Borel, $\mathcal{B}$, que es la menor que contiene a los intervalos abiertos), con lo que la unión B de los intervalos eliminados durante la construcción de $\mathfrak{C}$ está en $\mathcal{L}$ y su complementario también, aplicando las propiedades 3. y 2. de la definición A.1, respectivamente. Como $\mathfrak{C}$ es el complementario de B en $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{C} = (\mathbb{R} \setminus B) \cap \mathfrak{I}$, y ambos están en $\mathcal{L}$, $\mathfrak{C}$ está en $\mathcal{L}$, aplicando la proposición A.2.

Recordemos que la medida de Lebesgue μ de un intervalo abierto $(a, b) \in \mathbb{R}$ es su longitud, esto es, $\mu((a, b)) = a - b$. Del mismo modo, para un intervalo cerrado $[a, b] \in \mathbb{R}$, se tiene que $\mu([a, b]) = a - b$. Además, la medida de Lebesgue cumple que la medida de la unión finita o numerable de una familia de conjuntos disjuntos dos a dos $\{A_i\}_{i \in I}$ es la suma de las medidas de los intervalos

$$\mu \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$$

con I finito o numerable (propiedad 1. de la definición A.3 para el caso numerable, o punto ii. de la proposición A.5 para el caso finito).

Así, podemos utilizar la definición del conjunto de Cantor dada por (2.2), ya que el intervalo unidad $\mathcal{I}$ es la unión del conjunto de Cantor y los intervalos abiertos que se eliminan. En el primer paso, se elimina un intervalo de longitud $\frac{1}{3}$, en el segundo, a cada uno de los cerrados que forman A_1 se le quita un intervalo de longitud $\frac{1}{9}$, y así sucesivamente, de forma que en el paso n , se elimina de cada uno de los 2^{n-1} intervalos cerrados de A_{n-1} un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{3^n}$. De esta forma, la medida del complementario de $\mathcal{C}$ en el intervalos unidad es:

$$\mu(\mathcal{I} \setminus \mathcal{C}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

donde se ha aplicado el punto iv. de la proposición A.5 a la sucesión formada por los complementarios de los A_n . Así, dado que $\mu(\mathcal{I}) = 1$, y ya que $\mu(\mathcal{C}) = \mu(\mathcal{I}) - \mu(\mathcal{I} \setminus \mathcal{C})$, concluimos que la medida de Lebesgue de $\mathcal{C}$ es 0.

■ **$\mathcal{C}$ es autosimilar:**

Definición 2.7 Se dice que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es autosimilar si es la unión disjunta de copias de si mismo, esto es, si existen funciones $s_1, s_2, \dots, s_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$, y para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $d_u(s_i(x) - s_i(y)) = c_i d_u(x - y)$, con c_i una constante y d_u la métrica de $\mathbb{R}$, y que cumplan que $X = \bigcup_{i=1}^k s_i(X)$.

Considérense las funciones f y g dadas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+2}{3} \end{array}$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $d_u(x, y) = |x - y|$ la métrica usual en $\mathbb{R}$. Se tiene que $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$ y que $|g(x) - g(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$. Además, si $c \in \mathcal{C}$, tanto $f(c)$ como $g(c)$ están en $\mathcal{C}$. Aplicando las definiciones de f y g , se tiene que si $c = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n}{3^n}$, entonces $f(c) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n}{3^{n+1}} \in \mathcal{C}$ y $g(c) = \frac{2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n}{3^{n+1}} \in \mathcal{C}$. Podemos ver cómo f y g transforman los elementos de $\mathcal{C}$ expresándolos como sucesiones infinitas, componiéndolas con el homeomorfismo h de $\mathcal{C}$ en $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ y su inverso, obteniendo $f^* = h \circ f \circ h^{-1}$ y $g^* = h \circ g \circ h^{-1}$. Sea $c = (c_1, c_2, \dots) \in \mathcal{C}$, entonces se tiene que $f^*(c) = (0, c_1, c_2, \dots)$ y $g^*(c) = (2, c_1, c_2, \dots)$, esto es, todo lo que hacen las funciones f^* y g^* es mover las coordenadas de los elementos un puesto y en el primero escribir 0 o 2, respectivamente. Para ver que $f(\mathcal{C}) \cup g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, consideremos un elemento $c = (c_1, c_2, c_3, \dots) \in \mathcal{C}$, y vemos que es la imagen de $c^* = (c_2, c_3, \dots)$ por f^* o por g^* . Si $c_1 = 0$, entonces $f^*(c^*) = (0, c_2, c_3, \dots) = c$, mientras que si $c_1 = 2$, $g^*(c^*) = (2, c_2, c_3, \dots) = c$. Tenemos por tanto que todo elemento de $\mathcal{C}$ es imagen de algún elemento de $\mathcal{C}$ por f o por g , y que las imágenes de f y g restringidas a $\mathcal{C}$ son disjuntas y están contenidas en $\mathcal{C}$, luego $\mathcal{C}$ es autosimilar.

A continuación, antes de estudiar la dimensión de Hausdorff de $\mathcal{C}$, vamos a estudiar su dimensión topológica. En este punto seguiremos el capítulo 3 del libro de G.A. Edgar [6], el capítulo 19 del libro de K. Kuratowski [12] y la sección 29 del libro de S. Willard [17].

■ **$\mathcal{C}$ tiene dimensión topológica 0:**

Definición 2.8 Se dice que un espacio topológico X es 0-dimensional si cada punto $x \in X$ tiene una base de entornos formada por abiertos y cerrados, o equivalentemente, si para cada $x \in X$ y para cada cerrado $F \subset X$ que no contiene a x , existe un conjunto abierto y cerrado disjunto con F que contiene a x .

Un primer ejemplo de espacio 0-dimensional es, cuando X es metrizable, el subespacio $D = \{x_1, \dots, x_k\}$ de X formado por un conjunto finito de puntos. Si ρ es una medida en X , entonces tomando $\epsilon = \min\{\rho(x_i, x_j) : i \neq j\}$ el mínimo de las distancias entre los puntos, las bolas $B(x_i, \epsilon)$ son conjuntos abiertos y cerrados en D . Por tanto, D es 0-dimensional.

Veamos ahora que $\mathfrak{C}$ es un conjunto 0-dimensional. Sea $c \in \mathfrak{C}$ y un cerrado $F \subset \mathfrak{C}$ tal que $c \notin F$. Entonces el conjunto F es la intersección de $\mathfrak{C}$ con un cerrado $\hat{F}$ de $\mathbb{R}$, y se tiene que $\hat{V} = \mathbb{R} \setminus \hat{F}$ es un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a c , y por tanto existe un intervalo abierto $\hat{W} = (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $c \in (a, b) \subseteq \hat{V}$. Ahora, es inmediato que $\hat{W}_l = (a, b) \cap (-\infty, c)$ y $\hat{W}_r = (a, b) \cap (c, \infty)$ son dos abiertos de $\mathbb{R}$, y existen $a^* \in \hat{W}_l$ y $b^* \in \hat{W}_r$ tales que $a^*, b^* \notin \mathfrak{C}$, ya que en caso contrario $\hat{W}_l$ o $\hat{W}_r$ estarían completamente contenidos en $\mathfrak{C}$, que es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$, lo que es imposible. Entonces $\hat{W}^* = (a^*, b^*)$ es abierto en $\mathbb{R}$, y $W^* = \hat{W}^* \cap \mathfrak{C}$ es un abierto de $\mathfrak{C}$, pero además es cerrado en $\mathfrak{C}$, ya que $W^* = [a^*, b^*] \cap \mathfrak{C}$, y $[a^*, b^*]$ es cerrado en $\mathbb{R}$. Por tanto, W^* es abierto y cerrado en $\mathfrak{C}$, contiene a c , y es disjunto con F , ya que $W^* \subseteq \hat{V}$ y $F \subseteq \hat{F} = \mathbb{R} \setminus \hat{V}$. Por tanto, $\mathfrak{C}$ es 0-dimensional.

A continuación, definimos el concepto de espacio 1-dimensional:

Definición 2.9 *Un espacio topológico X es 1-dimensional si no es 0-dimensional y cada punto $x \in X$ tiene una base de entornos abiertos con frontera 0-dimensional.*

Como ejemplo de espacio 1-dimensional tenemos la recta real $\mathbb{R}$ con la topología usual. Una base de abiertos para esa topología es la dada por las bolas abiertas $B(x, \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Las bolas tienen como frontera el conjunto $\{x - \epsilon, x + \epsilon\}$, que como hemos visto antes, es 0-dimensional. Si probamos que $\mathbb{R}$ no es 0-dimensional, habremos acabado. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío abierto y cerrado. Como $\mathbb{R}$ es conexo, esto implica que $E = \mathbb{R}$, luego no se puede separar ningún punto $x \in \mathbb{R}$ de un cerrado no vacío con un conjunto abierto y cerrado.

Las definiciones de espacios de dimensión 0 y 1 son casos particulares de la que se conoce como dimensión inductiva débil, *small inductive dimension*, que se define de manera inductiva, partiendo de que la dimensión inductiva de un conjunto es -1 si y sólo si es el conjunto vacío:

Definición 2.10 *Un espacio topológico no vacío X tiene dimensión inductiva en el punto p menor o igual que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y se representa $\text{ind}_p X \leq n$ si existe una base de entornos de p con fronteras de dimensión a lo sumo $n - 1$.*

Se dice que un espacio topológico X tiene dimensión inductiva $\leq n$ si su dimensión en todos sus puntos es $\leq n$, y se representa $\text{ind} X \leq n$.

Se dice que un espacio topológico X tiene dimensión inductiva n , $\text{ind} X = n$, si se cumple que $\text{ind} X \leq n$, pero no se cumple $\text{ind} X \leq m$ para $-1 \leq m < n$.

Si no existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para el que se cumplan las condiciones anteriores, se dice que $\text{ind} X_p = \infty$ y $\text{ind} X = \infty$ respectivamente.

Existen otras definiciones de dimensión topológica, como la dimensión inductiva fuerte, *large inductive dimension*, o la dimensión de recubrimientos (ver [7]). Sin embargo, todas

ellas coinciden para espacios con propiedades suficientemente buenas, por ejemplo para los espacios métricos separables (ver teorema 1.7.7 de [7]), en particular, para el conjunto de Cantor.

Por último introducimos el concepto de dimensión de Hausdorff, para lo que es necesario introducir las siguientes definiciones. Para simplificar la notación, en este último punto se denotará como $|A|$ al diámetro de A , que se define como el supremo de las distancias entre dos puntos de A , considerando la distancia con la métrica usual d_u de $\mathbb{R}$ (la definición general para un espacio métrico cualquiera está en la definición 1.20.)

- $\mathfrak{C}$ tiene dimensión de Hausdorff $\frac{\log 2}{\log 3}$:

Definición 2.11 Sean un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia a lo sumo numerable de conjuntos de diámetro menor o igual que $\delta > 0$, tales que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, entonces se dice que la familia $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un δ -recubrimiento de A .

Definición 2.12 Dados $A \subseteq \mathbb{R}$, $\delta > 0$ y $s \geq 0$, se define $H_\delta^s(A)$ de la siguiente manera:

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |D_n|^s : \{D_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } A \right\}$$

Entonces, se dice que la medida de Hausdorff s -dimensional $H^s(A)$ de A es

$$H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(A)$$

Podemos observar que efectivamente H^s es una medida², y que para un δ fijo, se tienen en cuenta todos los recubrimientos de diámetro menor o igual que δ , y que conforme disminuye δ , el número de recubrimientos con estas características disminuye, lo que supone que el ínfimo aumenta conforme disminuye δ . Por otro lado, para diámetros pequeños, $\delta < 1$, se tiene inmediatamente que conforme se aumenta s , disminuye $H_\delta^s(A)$, ya que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |D_n|^{s'} = \sum_{n \in \mathbb{N}} |D_n|^{s'-s} |D_n|^s \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^{s'-s} |D_n|^s = \delta^{s'-s} \sum_{n \in \mathbb{N}} |D_n|^s, \text{ con } s \leq s'$$

y tomando el ínfimo, $H_\delta^{s'}(A) \leq H_\delta^s(A)$ si $s \leq s'$. Haciendo tender δ a 0, tenemos que $H^s(A) \geq H^{s'}(A)$ si $s \leq s'$. De hecho, si $0 \leq H^s(A) < \infty$, entonces $H^{s'}(A) = 0$ para $s < s'$, ya que $\delta^{s'-s} \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Luego en caso de tomar $H^{s_0}(A)$ un valor real distinto de 0, para s mayores tiene que ser 0, mientras que para los s menores no puede ser un número real, porque entonces para s_0 tendría que ser también 0.

Definición 2.13 Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, se define la dimensión de Hausdorff, y se representa $\dim_H(A)$, como el ínfimo de los $s \geq 0$ tales que $H^s(A) = 0$.

$$\dim_H(A) = \inf\{s \geq 0 : H^s(A) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(A) = \infty\}$$

²La demostración de que es una medida se puede ver en la página 12 de [10], ya que aunque la definición de medida que se utiliza es diferente a la definición A.3, ambas definiciones son equivalentes, como se explica en el apéndice.

A continuación presentamos un lema que será de vital importancia para calcular la dimensión de Hausdorff de $\mathfrak{C}$. Recordemos que una medida μ se dice finita si no toma el valor $+\infty$, y se dice concentrada en $M \in \mathcal{M}$ si $\mu(X \setminus M) = 0$.

Lema 2.14 *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y μ una medida finita concentrada en F , distinta de la medida idénticamente nula, y supongamos que para cierto $s \geq 0$ existen $c > 0$ y $\delta > 0$, de forma que $\mu(U) \leq c|U|^s$, para todo U tal que $|U| \leq \delta$. Entonces $H^s(A) \geq \mu(A)/c$ y $s \leq \dim_H(A)$.*

Demostración: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y μ una medida finita concentrada en F distinta de la idénticamente nula. Fijemos $s_0 \geq 0$, y supongamos que existen $c > 0$ y $\delta > 0$ con la condición del enunciado. Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un δ -recubrimiento de A . Entonces

$$0 < \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (U_i \cap A)\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(U_i \cap A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(U_i) \leq c \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^{s_0}$$

y por lo tanto

$$\frac{\mu(A)}{c} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^{s_0} \implies \frac{\mu(A)}{c} \leq H^{s_0}(A)$$

Como $H^s(A)$ aumenta conforme disminuye la s , y para el valor s_0 inicial $H^{s_0}(A) \geq \frac{\mu(A)}{c} > 0$, el ínfimo de los s para los que $H^s(A) = 0$ es mayor que el s_0 escogido, y por tanto $s_0 \leq \dim_H(A)$. $\square$

Tenemos ya todas las herramientas necesarias para poder calcular la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor. En primer lugar, consideremos el recubrimiento $\{E_i^k\}_{i=1}^{2^k}$ para $k > 1$, donde cada E_i^k es uno de los 2^k intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^k}$ en los que se divide A_k . Entonces, si $s \geq 0$ y $\delta = \frac{1}{3^k}$, se tiene que

$$H_\delta^s(\mathfrak{C}) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |D_n|^s : \text{con } |D_n| \leq \delta = \frac{1}{3^k} \right\} \leq \sum_{i=1}^{2^k} |E_i^k|^s = 2^k \left(\frac{1}{3^k} \right)^s = \left(\frac{2}{3^s} \right)^k$$

y por tanto

$$H^s(\mathfrak{C}) = \lim_{\delta=\frac{1}{3^k} \rightarrow 0} H_\delta^s(\mathfrak{C}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^s} \right)^k$$

Ahora bien, vemos que si $s \sim 0$, el límite tiende a infinito, mientras que para valores de $s > 1$, el límite tiende a 0. Para que el límite tienda a un número estrictamente positivo, tiene que suceder que $\frac{2}{3^s} = 1$, pues valores más pequeños de la fracción hacen tender el límite a 0, y valores más altos a infinito. Pero

$$\frac{2}{3^s} = 1 \iff \log 2 - s \log 3 = 0 \iff s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

De esta manera, tenemos tres casos

1. Si $s > \frac{\log 2}{\log 3}$, entonces $H^s(\mathfrak{C}) \leq 0$
2. Si $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, entonces $H^s(\mathfrak{C}) \leq 1$
3. Si $s < \frac{\log 2}{\log 3}$, entonces $H^s(\mathfrak{C}) \leq \infty$

A partir del primer caso, se obtiene que $H^s(\mathfrak{C}) = 0$ para todo $s > \frac{\log 2}{\log 3}$, luego vemos que $\dim_H(\mathfrak{C}) = \inf\{s : H^s(\mathfrak{C}) = 0\} \leq \frac{\log 2}{\log 3}$, mientras que los otros dos casos no aportan más información, razón por la cual necesitamos usar el lema 2.14.

Construyamos rápidamente una medida μ concentrada en $\mathfrak{C}$ tal que $\mu(\mathbb{R}) = 1$ (la construcción con detalle se muestra en el la sección A.3 de los apéndices). Para cada $n \in \mathbb{N}$, “dividimos” μ entre los 2^n intervalos cerrados E_i^n que forman A_n , de forma que $\mu(E_i^n) = 2^{-n}$ para todo $1 \leq i \leq 2^n$. Si continuamos haciendo esto cuando n tiende a infinito, tenemos que $\mu(A_n) = 1$ para todo n , con lo que $\mu(\mathfrak{C}) = 1$ por la propiedad v de la proposición A.5; por otro lado, para cada n , la medida $\mu(\mathbb{R} \setminus A_n) = 0$, por lo que para un conjunto disjunto con $\mathfrak{C}$, su medida es 0, puesto que se encuentra en la unión de los complementarios de todos los A_n , cuya medida sigue siendo 0. Observemos que la medida de un punto $\{c\} \in \mathfrak{C}$ es nula, ya que si fuese un $a > 0$, existiría un k lo suficientemente grande para el que $2^{-k} < a$, de forma que $c \in E_i^k$ para algún $1 \leq i \leq 2^k$, y se tendría que $a = \mu(\{c\}) \leq \mu(E_i^k) = 2^{-k}$, en contradicción con lo anterior.

Sean $\frac{1}{3^2} > \delta > 0$ y $U \subseteq \mathbb{R}$ no vacío (esto es, existe un $x \in U$) tal que $|U| < 1$. Supongamos que $|U| = 0$, entonces $U = \{x\}$, y se tiene que, si $x \in \mathfrak{C}$, su medida es nula, como se acaba de comprobar, y si $x \notin \mathfrak{C}$, su medida también es nula, puesto que no interseca con $\mathfrak{C}$. Por tanto, los U tales que $|U| = 0$ cumplen las condiciones del lema 2.14 para cualquier c y s . Consideremos por tanto que $|U| \neq 0$, entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{m+1}} \leq |U| < \frac{1}{3^m}$, por lo que deducimos que a lo sumo puede estar intersecado con un solo E_i^m y no puede intersecar ningún E_j^k con $k \geq m$ que no esté contenido en E_i^m (ya que como su diámetro es menor que $\frac{1}{3^m}$, si interseca a E_i^m , está completamente contenido en la unión de E_i^m y los dos abiertos que se encuentran a sus lados, con lo que podemos dividir el conjunto U en la parte que interseca a E_i^m y su complementario, y este último tiene medida 0 por estar en el complementario de A_m , con lo que la medida de U será la medida de $U \cap E_i^m$). Así, la medida de U a lo sumo es 2^{-m} . Entonces

$$\mu(U) \leq 2^{-m} = (3^{\frac{\log 2}{\log 3}})^{-m} = (3^{-m})^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq (3|U|)^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 2|U|^{\frac{\log 2}{\log 3}}$$

De esta manera, dado $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, existen $c = 2$ y $\delta = \frac{1}{9}$ tales que todo conjunto U con $|U| \leq \frac{1}{9}$ cumple que $\mu(U) \leq c|U|^s$, y aplicando el lema 2.14, se tiene que $H^s(\mathfrak{C}) \leq \frac{\mu(\mathfrak{C})}{c} = \frac{1}{2}$, y lo que es más importante, $\frac{\log 2}{\log 3} = s \geq \dim_H(\mathfrak{C})$.

Por tanto, juntando esta cota inferior con la superior que habíamos obtenido antes, tenemos que $\dim_H(\mathfrak{C}) = \frac{\log 2}{\log 3}$, como se quería probar.

Aunque la definición de fractal no está completamente establecida (pág. xx de [9]), podemos considerar que los conjuntos autosimilares y cuya dimensión de Hausdorff sea estrictamente mayor que su dimensión topológica son fractales (esta propiedad es la que Mandelbrot originalmente tomó para definir un fractal). Así, como el conjunto de Cantor es autosimilar, tiene dimensión topológica 0 y dimensión de Hausdorff $\frac{\log 2}{\log 3}$, tenemos que $\mathfrak{C}$ es un fractal.

Capítulo 3

El Teorema de Hausdorff-Alexandroff

El objetivo de este capítulo es demostrar el teorema 3.15, conocido como Teorema de Hausdorff-Alexandroff, que dice que todo espacio compacto y métrico es la imagen continua de $\mathbb{C}$. Para ello, desarrollaremos una serie de resultados que, junto con otros resultados del capítulo 1 y algunas de las propiedades de $\mathbb{C}$ vistas en el capítulo 2, serán posteriormente utilizados durante la demostración del teorema.

3.1. Resultados previos

En esta sección introducimos una serie de lemas que aplicaremos a lo largo del capítulo. La mayoría de ellos se basan en las definiciones y resultados que introdujimos en el capítulo 1, especialmente la sección 1.2. Seguiremos principalmente la sección 29 del libro de Willard [17], junto con el libro de J.R. Munkres [14] y el libro de R. Engelking de topología general [8].

Recordemos que un espacio se dice totalmente desconexo si los únicos conjuntos conexos son los unipuntuales.

Lema 3.1 *Un espacio X compacto y Hausdorff es totalmente desconexo si y sólo si para todo par de elementos distintos $x, y \in X$ hay un conjunto abierto y cerrado en X que contiene a x y no a y .*

Demostración: $\Leftarrow$) Supongamos que existe una componente conexa U de X que no sea unipuntual. Entonces, se pueden encontrar dos puntos distintos $x, y \in U$. Por hipótesis, existe un conjunto V que es abierto y cerrado, tal que $x \in V$ e $y \notin V$.

Ahora bien, dado que V es cerrado, su complementario $X \setminus V$ es un abierto que contiene a y . Por tanto, U se puede separar como:

$$U = (U \cap V) \cup (U \cap (X \setminus V))$$

donde $U \cap (X \setminus V)$ y $U \cap V$ son abiertos disjuntos no vacíos en U . Por tanto, U no es conexo, y las únicas componentes conexas de X son las unipuntuales.

$\Rightarrow$) Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos, veamos que se puede encontrar un conjunto abierto y cerrado que contenga a x pero no a y . Consideremos la familia formada por los V_i abiertos y cerrados que contienen a x ,

$$\{V_i\}_{i \in I} = \{V_i \subseteq X : x \in V_i, V_i, X \setminus V_i \text{ son abiertos}\}$$

cuya intersección,

$$V = \bigcap_{i \in I} V_i$$

se conoce como la quasicomponente de x , y es claramente un conjunto cerrado, aunque no tiene por qué ser abierto. Si probamos que $y \notin V$, entonces existe al menos un V_i que no contenga a y . Para ello, podemos ver que V es conexo, y atendiendo a la hipótesis de que X es totalmente desconexo, V tendrá que ser unipuntual, y contener únicamente a x . Supongamos, por tanto, que $V = Q_1 \cup Q_2$, con Q_1, Q_2 abiertos en V disjuntos y $x \in Q_1$. Como V es cerrado, Q_1, Q_2 son cerrados en X , y por ser X un espacio Hausdorff y compacto, es normal, con lo que se pueden encontrar dos abiertos disjuntos U_1, U_2 en X tales que $Q_1 \subseteq U_1$ y $Q_2 \subseteq U_2$, y se tiene que $V = Q_1 \cup Q_2 \subseteq U_1 \cup U_2$.

Como $U_1 \cup U_2$ es abierto, y $\{V_i\}_{i \in I}$ es una familia de cerrados cuya intersección está en el abierto, podemos aplicar el lema 1.13, obteniendo una subfamilia finita $\{V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_k}\}$ cuya intersección también está contenida en $U_1 \cup U_2$.

$$V = Q_1 \cup Q_2 \subseteq \mathcal{V} = \bigcap_{n=1}^k V_{i_n} \subseteq U_1 \cup U_2$$

Vemos que $\mathcal{V}$ es abierto y cerrado, por ser intersección finita de abiertos y cerrados, y por lo tanto, $U_1 \cap \mathcal{V}$ es abierto; para ver que es cerrado, consideremos su adherencia:

$$\overline{U_1 \cap \mathcal{V}} \subseteq \overline{U_1} \cap \mathcal{V} = \overline{U_1} \cap \mathcal{V} \cap (U_1 \cup U_2) = (\overline{U_1} \cap \mathcal{V} \cap U_1) \cup (\overline{U_1} \cap \mathcal{V} \cap U_2)$$

donde en la primera igualdad se ha utilizado que $U_1 \cup U_2$ contiene a $\mathcal{V}$. Observamos que $\overline{U_1} \cap \mathcal{V} \cap U_1 = U_1 \cap \mathcal{V}$, mientras que $\overline{U_1} \cap \mathcal{V} \cap U_2 = \emptyset$, ya que de existir un $z \in \overline{U_1} \cap U_2$, como U_2 es abierto, se tendría que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, lo cual no es posible, dado que U_1 y U_2 son disjuntos.

De esta manera, se tiene que $\overline{U_1 \cap \mathcal{V}} = U_1 \cap \mathcal{V}$, con lo que es cerrado y abierto, y contiene a x (ya que x está en U_1 , porque contiene a Q_1 , y en $\mathcal{V}$), por lo que pertenece a la familia $\{V_i\}_{i \in I}$, y por tanto $V \subseteq U_1 \cap \mathcal{V}$. Dado que Q_2 está contenido tanto en V como en U_2 , y este último es disjunto con U_1 , se tiene a la fuerza que Q_2 es el conjunto vacío, y V es conexo. Por tanto, $y \notin V$, por lo que existe un $i \in I$ tal que $y \notin V_i$, y V_i es un abierto y cerrado que contiene a x , como se quería demostrar. $\square$

El enunciado de este resultado recuerda a la definición de espacio 0-dimensional. De hecho, de la definición 2.8 y de este lema se desprende que un espacio X compacto y Hausdorff es 0-dimensional si y sólo si es totalmente desconexo (la implicación 0-dimensional implica totalmente desconexo es inmediata con lo visto, mientras que el recíproco se tiene del hecho de que un cerrado F en X es compacto, luego si $\{V_y\}_{y \in F}$ es una familia de abiertos y cerrados que no contienen a x para cada $y \in F$, por el lema 1.12 existe una subfamilia finita cuya unión contiene a F , y su complementario es un abierto y cerrado disjunto con F que contiene a x). El siguiente lema asegura la existencia de un recubrimiento formado por abiertos y cerrados de diámetro arbitrariamente pequeño. Recordemos que definimos diámetro de un conjunto como el supremo de las distancias entre dos puntos del conjuntos (definición 1.20).

Lema 3.2 *Sea X un espacio métrico, compacto, y totalmente desconexo. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ es posible encontrar un recubrimiento finito de X formado por conjuntos abiertos y cerrados de diámetro estrictamente menor que ϵ .*

Demostración: Sea X en las condiciones del enunciado. Fijemos $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Sea $\mathcal{V} = \{V_i : x \in V_i, V_i \text{ y } X \setminus V_i \text{ son abiertos de } X\}$. Sabemos que la intersección de todos los V_i es la cuasicomponente de x , y como X es un espacio Hausdorff (por ser espacio métrico), compacto y totalmente desconexo, la cuasicomponente es conexa e igual a x (ver la demostración del lema 3.1). Sea ahora la bola abierta $B(x, \frac{\epsilon}{2})$ centrada en x y de radio $\frac{\epsilon}{2}$. Como $x \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$ y X es compacto, podemos asegurar en virtud del lema 1.13 que existe una familia finita $\{V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_k}\}$ de elementos de $\mathcal{V}$, tal que su intersección está contenida en $B(x, \frac{\epsilon}{2})$. Se tiene así un conjunto abierto y cerrado F_x

$$F_x = \bigcap_{j=1}^k V_{i_j}$$

cuyo diámetro es menor que ϵ , ya que dados dos puntos dentro de F_x , y por ende, de la bola, estos tienen una distancia con x menor que $\frac{\epsilon}{2}$, con lo que la distancia entre ellos debe ser menor o igual que ϵ .

Así, podemos construir la familia de F_x para cada $x \in X$, que forma un recubrimiento por abiertos y cerrados de X con diámetro estrictamente menor que ϵ , y por ser X compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{F_{x_1}, F_{x_2}, \dots, F_{x_j}\}$ de X . $\square$

De este resultado obtenemos el siguiente corolario, que asegura que podemos encontrar una familia de recubrimientos $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que los diámetros tiendan a 0 y de forma que cada recubrimiento refine al anterior. Antes de ver el resultado, definamos que entendemos por refinar.

Definición 3.3 Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ dos recubrimientos de X . Se dice que $\mathcal{U}$ refina a $\mathcal{V}$, y se escribe $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, si y sólo si cada $U \in \mathcal{U}$ está contenido en algún $V \in \mathcal{V}$.

Corolario 3.4 Sea X un espacio métrico, compacto y totalmente desconexo. Entonces para cada $n=0,1,2,\dots$ existe un recubrimiento finito $\mathcal{U}_n$ de X formado por abiertos y cerrados disjuntos de diámetro estrictamente menor que $\frac{1}{2^n}$ tal que $\mathcal{U}_{n+1} < \mathcal{U}_n$ para cada $n \geq 0$.

Demostración: Como X es espacio métrico, compacto y totalmente desconexo, por el lema 3.2 existe un recubrimiento finito $\mathcal{U}$, cuyos conjuntos son abiertos y cerrados, y tienen diámetro menor que 1, esto es, $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$. Definimos ahora los siguientes conjuntos:

$$U'_1 = U_1, \quad U'_2 = U_2 \setminus U_1, \quad \dots, \quad U'_k = U_k \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_{k-1})$$

Así, $\mathcal{U}_0 = \{U'_1, \dots, U'_k\}$ es un recubrimiento por abiertos y cerrados finito, y los conjuntos son disjuntos y de diámetro menor que 1.

Supongamos que hemos definidos los recubrimientos $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$, con $\mathcal{U}_{n-1} = \{V_1, \dots, V_l\}$, aplicando de nuevo el lema 3.2 podemos construir un recubrimiento finito $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ de X por abiertos y cerrados de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$. Considerando ahora cada elemento de $\mathcal{F}$, tomamos su intersección con cada uno de los elementos de $\mathcal{U}_{n-1}$, obteniendo una familia $\mathcal{F}_i = \{F_i \cap V_j : 1 \leq j \leq l\}$. Observamos que los elementos de $\mathcal{F}_i$ son conjuntos abiertos y cerrados, y tienen diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$. Definimos ahora la familia

$$\mathcal{W} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i = \{W_{i,j} : W_{i,j} = F_i \cap V_j\}$$

que es un recubrimiento de X formado por un número finito de conjuntos abiertos y cerrados, todos ellos de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$. Para ver que es un recubrimiento de X , basta ver que

$$\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^l W_{i,j} = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^l (F_i \cap V_j) = \bigcup_{i=1}^m \left(F_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^l V_j \right) \right) = \bigcup_{i=1}^m F_i = X$$

Vemos además que $\mathcal{W}$ refina a $\mathcal{U}_{n-1}$, ya que cada elemento de $\mathcal{W}$ está contenido en un elemento de $\mathcal{U}_{n-1}$.

Por último, de forma análoga a la construcción de $\mathcal{U}_0$, tenemos que $\mathcal{U}_n$ es la familia

$$\mathcal{U}_n = \left\{ W_{1,1}, W_{1,2} \setminus W_{1,1}, \dots, W_{m,l} \setminus \left(\bigcup_{\substack{0 < i < m \\ 0 < j < l}} W_{i,j} \right) \right\}$$

Vemos que los elementos de $\mathcal{U}_n$ siguen siendo abiertos y cerrados, y de radio menor que $\frac{1}{2^n}$; y además cada uno está contenido en un elemento de $\mathcal{U}_{n-1}$, por lo que $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n-1}$. $\square$

El último resultado de esta sección será clave para la demostración del teorema 3.13, que precede al Teorema de Hausdorff-Alexandroff. El lema nos permite asegurar que si tenemos un U abierto y un número entero positivo, podemos encontrar una familia de abiertos disjuntos cuya unión sea U , y que el cardinal de la familia sea ese número entero.

Lema 3.5 *Sea X un espacio topológico compacto, totalmente desconexo, perfecto y Hausdorff. Entonces, si U es un abierto no vacío de X y $n \in \mathbb{N}$, existe una familia de abiertos no vacíos disjuntos dos a dos $\{U_i\}_{i \in I}$ tal que $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$, con $I = \{1, 2, \dots, n\}$.*

Demostración: El caso $n = 1$ se tiene tomando $U_1 = U$. Probemos que este lema se cumple para $n = 2$: Si U es un abierto no vacío en X , no puede contener un solo punto, ya que al ser X perfecto, todo punto es punto de acumulación. Sean $p, q \in U$ dos puntos distintos. Aplicando el lema 3.1 se puede encontrar un conjunto abierto y cerrado $V \subset X$ tal que $p \in V$ y $q \notin V$. Por último, se tiene que $U = (U \cap V) \cup (U \cap (X \setminus V))$, donde tanto $U \cap V$ como $U \cap (X \setminus V)$ son abiertos por ser intersección finita de abiertos.

Supongamos ahora que el lema es cierto para $n = k - 1$. Si ahora se quiere probar el caso $n = k$, basta dividir U en $k - 1$ abiertos disjuntos, tomar uno de esos abiertos, y aplicar el lema para el caso $n = 2$, dividiendo dicho abierto en dos abiertos no vacíos disjuntos entre sí y disjuntos con los otros $k - 2$ abiertos restantes. De esta manera se tiene U como unión de k abiertos no vacíos disjuntos dos a dos. $\square$

3.2. Sucesiones de límite inverso

En esta sección introducimos el concepto de sucesión de límite inverso y algunas de sus propiedades. Seguiremos la sección 29 del libro de S. Willard [17].

Definición 3.6 Sean $X_0, X_1, \dots$ espacios topológicos y f_n una aplicación continua de X_n en X_{n-1} , para todo $n = 1, 2, \dots$. La sucesión

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} X_2 \leftarrow \dots$$

se denomina sucesión de límite inverso, y se denota como $\langle X_n, f_n \rangle$. El espacio límite inverso de la sucesión es el siguiente subconjunto de $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$:

$$X_{\infty} = \{(x_0, x_1, \dots) : f_n(x_n) = x_{n-1} \text{ para cada } n\}$$

donde en X_{∞} consideramos la topología de subespacio inducida por la de $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$.

A continuación presentamos algunos ejemplos. En primer lugar, si tenemos una familia de espacios topológicos $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$ para todo n , y consideramos las aplicaciones $i_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ dadas por las inclusiones, tenemos que X_{∞} es homeomorfo a $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$. Un caso particular del anterior es en el que $X_n = X$ para todo n , de forma que $X_{\infty} = X$.

Observemos que, si tomamos $X_n = (n, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \emptyset$, luego X_{∞} puede ser vacío. Por eso, en el lema 3.8 se dan condiciones bajo las cuales podemos asegurar que X_{∞} es no vacío.

Definición 3.7 Sean $\langle X_n, f_n \rangle$ e $\langle Y_n, g_n \rangle$ sucesiones de límite inverso. Una aplicación $\Phi = (\phi_n)_n$ de $\langle X_n, f_n \rangle$ en $\langle Y_n, g_n \rangle$ es una sucesión de aplicaciones $\phi_n : X_n \rightarrow Y_n$ tal que para todo $n \geq 1$ se tiene que $\phi_{n-1} \circ f_n = g_n \circ \phi_n$. Se dice que Φ es continua, si cada ϕ_n lo es, y sobreyectiva, si cada ϕ_n lo es. La aplicación Φ induce una aplicación inducida $\phi : X_{\infty} \rightarrow Y_{\infty}$ definida por

$$\phi((x_0, x_1, \dots)) = (\phi_0(x_0), \phi_1(x_1), \dots)$$

Vemos que $\phi((x_0, x_1, \dots)) \in Y_{\infty}$, puesto que si $(x_0, x_1, \dots) \in X_{\infty}$, y $\phi_n(x_n) \in Y_n$ es la n -ésima coordenada, tenemos que $g_n(\phi_n(x_n)) = \phi_{n-1}(f_n(x_n)) = \phi_{n-1}(x_{n-1}) \in Y_{n-1}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_0 & \xleftarrow{f_1} & X_1 & \xleftarrow{f_2} & X_2 & \xleftarrow{f_3} & \dots & \xleftarrow{f_{n-1}} & X_{n-1} & \xleftarrow{f_n} & X_n & \xleftarrow{f_{n+1}} & \dots \\ \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & & & \downarrow \phi_{n-1} & & \downarrow \phi_n & & \\ Y_0 & \xleftarrow{g_1} & Y_1 & \xleftarrow{g_2} & Y_2 & \xleftarrow{g_3} & \dots & \xleftarrow{g_{n-1}} & Y_{n-1} & \xleftarrow{g_n} & Y_n & \xleftarrow{g_{n+1}} & \dots \end{array}$$

Figura 3.1: Esquema las sucesiones.

Lema 3.8 Si $\langle X_n, f_n \rangle$ es una sucesión de límite inverso de espacios no vacíos, compactos y Hausdorff, entonces X_{∞} es también no vacío, compacto y Hausdorff.

Demostración: Como todos los espacios X_n son no vacíos, compactos y Hausdorff, entonces el espacio producto $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es también no vacío, compacto y Hausdorff. Como el espacio producto es Hausdorff, X_{∞} , que es subconjunto de $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$, también es Hausdorff.

Sea $Y_n = \{(x_0, x_1, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n : f_n(x_n) = x_{n-1}\}$. Entonces $X_{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n$. Veamos que Y_n es cerrado en $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$. Si $z = (z_0, z_1, \dots) \notin Y_n$, entonces $f_n(z_n) \neq z_{n-1}$, y existen un par de abiertos disjuntos U, V de X_{n-1} tales que $f_n(z_n) \in U$ y $z_{n-1} \in V$. Como $f_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ es una aplicación continua, existe un entorno W de z_n en X_n tal que $f_n(W) \subseteq U$, y entonces si tomamos

$$\prod_{k=0}^{\infty} U_k, \text{ con } U_k = \begin{cases} W & \text{si } k = n-1 \\ V & \text{si } k = n \\ X_k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tenemos que $\prod_{k=0}^{\infty} U_k$ es un entorno de $(z_0, z_1, \dots)$ disjunto de Y_n , con lo que Y_n es cerrado. Como X_{∞} es la intersección de los Y_n cerrados en $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$, que es compacto, entonces X_{∞} también es compacto.

Por último, para ver que X_{∞} es no vacío, consideremos los cerrados $Z_j = \bigcap_{i=1}^j Y_i$, de forma que $Z_{j+1} \subseteq Z_j$ para todo $j \geq 1$, y $X_{\infty} = \bigcap_{j=1}^{\infty} Z_j$. Así, como el espacio producto $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es compacto, si se tiene que cada Z_j es no vacío, entonces en virtud del lema 1.10, la intersección de todos los Z_j , que es X_{∞} , es no vacía. En primer lugar, observamos que $Z_1 = Y_1$ es distinto del vacío, puesto que $Y_1 = f_1(X_1) \times \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Por otro lado, para $j \geq 2$, si consideramos un elemento $(x_i)_{i=0}^{\infty} \in \prod_{i=0}^{\infty} X_i$, podemos encontrar otro elemento $(y_i)_{i=0}^{\infty}$ definido por

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \geq j \\ f_j(x_j) & \text{si } i = j - 1 \\ f_{j-1}(f_j(x_j)) & \text{si } i = j - 2 \\ \vdots & \\ (f_2 \circ \dots \circ f_j)(x_j) & \text{si } i = 1 \\ (f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_j)(x_j) & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

de forma que $(y_i)_{i=0}^{\infty} \in \bigcap_{l=1}^j Y_l = Z_j$, luego Z_j también es distinto del vacío. Por tanto X_{∞} es un espacio no vacío, compacto y Hausdorff, como se quería probar. $\square$

El siguiente lema da condiciones bajo las cuales podemos asegurar que la aplicación ϕ entre dos sucesiones de límite inverso es continua o sobreyectiva.

Lema 3.9 Sean $\langle X_n, f_n \rangle$ e $\langle Y_n, g_n \rangle$ dos sucesiones de límite inverso, y Φ una aplicación entre ellas. Entonces:

- a) Si Φ es continua, también lo es la aplicación inducida ϕ .
- b) Si Φ es continua y sobreyectiva, y todos los espacios X_n e Y_n son compactos y Hausdorff, entonces ϕ también es continua y sobreyectiva.

Demostración: a) Supongamos que Φ es continua. Sean $\pi_n : \prod_{k=0}^{\infty} X_k \rightarrow X_n$ y $\pi'_n : \prod_{k=0}^{\infty} Y_k \rightarrow Y_n$ las proyecciones n -ésimas. La aplicación ϕ es continua si $\pi'_n \circ \phi$ es continua para todo $n \geq 0$. Como

$$\pi'_n \circ \phi(x_0, x_1, \dots) = \pi'_n(\phi_0(x_0), \dots, \phi_n(x_n), \dots) = \phi_n(x_n)$$

que es continua, entonces ϕ también lo es.

b) La continuidad de ϕ se tiene por el apartado anterior. Sea $(y_0, y_1, \dots) \in Y_{\infty}$, y para cada n , sea $A_n = \phi_n^{-1}(y_n)$. Entonces A_n es no vacío, ya que Φ es sobreyectiva, y Hausdorff, por ser subconjunto de X_n , que es Hausdorff. Por último, como Y_n es Hausdorff, y_n es cerrado, y como ϕ_n es continua, A_n es un cerrado en X_n , que es compacto, luego A_n es compacto. Sea $h_n = f_n|_{A_n}$, la sucesión

$$A_0 \xleftarrow{h_1} A_1 \xleftarrow{h_2} A_2 \leftarrow \dots$$

es una sucesión de límite inverso, ya que las h_n son continuas, y tenemos que $h_n(A_n) \subseteq A_{n-1}$. Veamos que se cumple esta última contención. Dado $x_n \in A_n$, se tiene que $h_n(x_n) \in A_{n-1}$ si y sólo si $\phi_{n-1}(h_n(x_n)) = y_{n-1}$. Como

$$\phi_{n-1}(h_n(x_n)) = \phi_{n-1}(f_n(x_n)) = g_n(\phi_n(x_n)) = g_n(y_n) = y_{n-1}$$

se tiene que $h_n(A_n) \subseteq A_{n-1}$.

Así, aplicando el lema 3.8, tenemos que A_∞ es no vacío, compacto y Hausdorff. Por último, dado un $(x_0, x_1, \dots) \in A_\infty$, se tiene que $\phi((x_0, x_1, \dots)) = (\phi_0(x_0), \phi_1(x_1), \dots) = (y_0, y_1, \dots)$, con lo que ϕ es sobreyectiva. $\square$

Antes de continuar, introducimos el concepto de partición, y de sucesión derivada de una partición.

Definición 3.10 Una partición de un conjunto X es una colección de subconjuntos disjuntos de X que recubren X , es decir, cuya unión es el propio X .

Definición 3.11 Si $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots$ es una sucesión de particiones de un espacio X tales que $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$ para todo $n \geq 0$, entonces la sucesión derivada de $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots$ es la sucesión de límite inverso $\langle Y_n, f_n \rangle$,

$$Y_0 \xleftarrow{f_1} Y_1 \xleftarrow{f_2} Y_2 \leftarrow \dots$$

donde Y_n es el espacio discreto que tiene como elementos los conjuntos de la partición $\mathcal{U}_n$, y f_n lleva cada elemento de $\mathcal{U}_n$ en el único elemento de $\mathcal{U}_{n-1}$ que lo contiene.

A lo largo de lo que resta de memoria, supondremos que todos los conjuntos de una partición son no vacíos. El siguiente teorema permite utilizar sucesiones de particiones para construir una sucesión de límite inverso cuyo espacio límite inverso sea homeomorfo al original. Su utilidad se hará evidente en la siguiente sección.

Lema 3.12 Sea X un espacio métrico, compacto y totalmente desconexo, y sea $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^\infty$ una sucesión de recubrimientos finitos por abiertos y cerrados disjuntos, de forma que para el n -ésimo recubrimiento sus elementos tienen diámetro estrictamente menor que $\frac{1}{2^n}$, y tales que $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$ para todo n . Entonces, si $\langle Y_n, f_n \rangle$ es la sucesión derivada de la sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^\infty$, el espacio X es homeomorfo al espacio límite inverso Y_∞ .

Demostración: En primer lugar, tenemos garantizada la existencia de una sucesión de recubrimientos con las propiedades del enunciado por el corolario 3.4. Los espacios Y_n son no vacíos y compactos, ya que tienen un número finito pero no nulo de elementos; y son espacios Hausdorff, puesto que los Y_n tienen la topología discreta. Así, Y_∞ también es un espacio no vacío, compacto y Hausdorff, aplicando el lema 3.8. Para cada n , definimos

$$\begin{aligned} \phi_n: X &\longrightarrow Y_n \\ x &\longmapsto \phi_n(x) = U \end{aligned}$$

donde $U \in Y_n$ es el único conjunto del recubrimiento $\mathcal{U}_n$ tal que $x \in U$.

Entonces (ϕ_n) es una aplicación de $\langle X, i \rangle$, donde i es la identidad, en $\langle Y_n, f_n \rangle$, ya que dado $x \in X$,

$$\phi_{n-1} \circ i(x) = \phi_{n-1}(x) = U$$

con $U \in Y_{n-1}$ tal que $x \in U$; y por otra parte, si consideramos el único elemento $V \in Y_n$ tal que $x \in V$, se tiene que

$$f_n \circ \phi_n(x) = f_n(V) = U_V$$

donde U_V es el único abierto de Y_{n-1} tal que $V \subseteq U_V$. Como los elementos de Y_{n-1} son conjuntos disjuntos y $x \in U \cap U_V$, se tiene que $U_V = U$, con lo que $\phi_{n-1} \circ i(x) = f_n \circ \phi_n(x)$, como se quería probar.

Además, para cada n , se tiene que:

- ϕ_n es continua. Para verlo, como Y_n tiene la topología discreta, basta ver que dado $U \in Y_n$, se tiene que $\phi_n^{-1}(U)$ es un conjunto abierto de X . Como $\phi_n^{-1}(U) = U$, esto se cumple.
- ϕ_n es sobreyectiva. Dado $U \in Y_n$, como U es un elemento no vacío de una partición $\mathcal{U}_n$ de X , entonces existe $x \in X$ tal que $x \in U$, luego $\phi_n(x) = U$.

De esta manera, la función inducida $\phi : X \rightarrow Y_\infty$ es continua y sobreyectiva por el lema 3.9. Por otra parte, como es continua, X es compacto, e Y_∞ es Hausdorff, entonces la aplicación ϕ es cerrada, y solo queda comprobar que es inyectiva.

Si tomamos $x, y \in X$, con $x \neq y$, entonces $\rho(x, y) = \epsilon > 0$, con ρ la métrica de X . Entonces $\frac{\epsilon}{2} > \frac{1}{2^n}$ para n suficientemente grande, y como los elementos de $\mathcal{U}_n$ tienen diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$, x e y no pueden estar en el mismo conjunto de $\mathcal{U}_n$, con lo que $\phi_n(x) \neq \phi_n(y)$, y entonces $\phi(x) \neq \phi(y)$. □

3.3. El Teorema de Hausdorff-Alexandroff

Una vez hemos llegado a esta sección, ya estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Hausdorff-Alexandroff. Para ello, primero probaremos el teorema 3.13, que como corolario inmediato tiene el conocido como Teorema de Brouwer. Seguiremos el capítulo 30 de [17] y el libro de Hocking y Young [11].

Teorema 3.13 *Dos espacios métricos, compactos, perfectos y totalmente desconexos son homeomorfos.*

Demostración: Sean X, Y dos espacios métricos, compactos, perfectos y totalmente desconexos. Sean $(\mathcal{U}_n)_{n \geq 1}$ y $(\mathcal{V}_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones de recubrimientos finitos de X e Y , respectivamente, tales que los recubrimientos están formados por abiertos y cerrados disjuntos, los conjuntos del n -ésimo recubrimiento tienen diámetro estrictamente menor que $\frac{1}{2^n}$, y $\mathcal{U}_{n+1} < \mathcal{U}_n$ y $\mathcal{V}_{n+1} < \mathcal{V}_n$ para todo $n \geq 1$. La existencia de los recubrimientos está garantizada por el corolario 3.4, y lo que es más, se puede garantizar también que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{V}_1$ tienen el mismo número de elementos, en virtud del lema 3.5.

Ahora, si escribimos $\mathcal{U}_1 = \{U_{1,1}, \dots, U_{1,n}\}$ y $\mathcal{V}_1 = \{V_{1,1}, \dots, V_{1,n}\}$, entonces cada $U_{1,i}$ es la unión finita de elementos de $\mathcal{U}_2$, y cada $V_{1,i}$ es la unión de elementos de $\mathcal{V}_2$. Aplicando el lema 3.5 a cada $U_{1,i}$ y a cada $V_{1,i}$, podemos suponer que ambas uniones tienen el mismo número de elementos, de forma que $U_{2,j} \subseteq U_{1,k}$ si y sólo si $V_{2,j} \subseteq V_{1,k}$. Continuamos de esta manera para cada n , de forma que $\mathcal{U}_n$ y $\mathcal{V}_n$ tengan el mismo número de elementos, y $U_{n,j} \subseteq U_{n-1,k}$ si y sólo si $V_{n,j} \subseteq V_{n-1,k}$.

Sean $\langle X_n, f_n \rangle$ e $\langle Y_n, g_n \rangle$ las sucesiones derivadas de $(\mathcal{U}_n)$ e $(\mathcal{V}_n)$ respectivamente. Se definen, para cada n ,

$$\begin{aligned} \phi_n: X_n &\longrightarrow Y_n \\ U_{n,j} &\longmapsto V_{n,j} \end{aligned}$$

Observamos que ϕ_n es un homeomorfismo entre X_n e Y_n por ser una aplicación biyectiva entre dos espacios con la topología discreta.

Como los espacios X_n e Y_n son espacios no vacíos, discretos y finitos, entonces son espacios no vacíos, compactos y Hausdorff, luego aplicando el lema 3.9, se tiene que $\phi : X_\infty \rightarrow Y_\infty$ es continua y sobreyectiva. Por otro lado, sean $(U_1, U_2, \dots)$ y $(U_1^*, U_2^*, \dots)$ dos elementos distintos de X_∞ . Esto implica que existe un $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $U_m \neq U_m^*$, y por ser ϕ_m inyectiva, $\phi_m(U_m) \neq \phi_m(U_m^*)$, con lo que $\phi((U_1, U_2, \dots)) \neq \phi((U_1^*, U_2^*, \dots))$, y entonces ϕ es inyectiva. Además, aplicando el lema 3.8 tenemos que X_∞ e Y_∞ son no vacíos, compactos y Hausdorff, por lo que ϕ es cerrada, por ser una aplicación continua de un espacio compacto en un espacio Hausdorff. Por tanto, ϕ es un homeomorfismo entre X_∞ e Y_∞ . Pero como $X_\infty \cong X$ e $Y_\infty \cong Y$ por el lema 3.12, entonces se tiene que $X \cong Y$, como se quería probar. $\square$

Del anterior teorema tenemos como consecuencia inmediata el siguiente corolario.

Corolario 3.14 (Teorema de Brouwer) *Todo espacio no vacío metrizable, compacto, perfecto y totalmente desconexo es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración: Como hemos visto en la sección 2.2, el conjunto de Cantor es un espacio no vacío metrizable, compacto, perfecto y totalmente desconexo. Entonces, aplicando el teorema anterior, $\mathfrak{C}$ es homeomorfo a cualquier otro espacio no vacío metrizable, compacto, perfecto y totalmente desconexo. $\square$

Este corolario tiene como consecuencia que que todos los espacios no vacíos, compactos, métricos, perfectos y totalmente desconexos son iguales, salvo homeomorfismo, al conjunto de Cantor. De hecho, aunque nosotros hayamos reservado el nombre de conjunto de Cantor al subconjunto de la recta real que dado por la ecuación (2.2) o a $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, en general, a los espacios no vacíos, compactos, métricos, perfectos y totalmente desconexos se les suele llamar conjuntos de Cantor. Con el anterior corolario, tenemos ya todas las herramientas necesarias para probar el Teorema de Hausdorff-Alexandroff, según el cual todo espacio compacto y métrico es la imagen por una aplicación continua del conjunto de Cantor.

Teorema 3.15 (de Hausdorff-Alexandroff) *Todo espacio métrico compacto X es la imagen continua del conjunto de Cantor.*

Demostración: Sea X un espacio compacto y métrico. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos un recubrimiento finito $\mathcal{U}_n$ de X por cerrados $U_{n,i}$ de diámetro estrictamente menor que $\frac{1}{2^n}$, donde cada $U_{n,i}$ es la clausura de un abierto no vacío de X ; de forma que $\mathcal{U}_{n+1} < \mathcal{U}_n$ para cada n , esto es, $\mathcal{U}_{n+1}$ refina a $\mathcal{U}_n$.

Veamos que podemos encontrar una familia de recubrimientos con estas características. Sea $n = 1$, y ρ una métrica en X . Consideremos el recubrimiento por abiertos $\{W_{1,x}\}_{x \in X}$, donde $W_{1,x} = B_\rho(x, 2^{-3})$. Por ser X compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{W_{1,x_{i_1}}\}_{i_1=1}^{k_1}$. Renombremos a los abiertos como $V_{1,i_1} = W_{1,x_{i_1}}$, y denotemos por U_{1,i_1} a la clausura de V_{1,i_1} para cada i_1 . Entonces la familia $\mathcal{U}_2 = \{U_{1,i_1}\}_{i_1=1}^{k_1}$ es un recubrimiento finito de X formado por la clausura de abiertos no vacíos. Veamos que el diámetro de U_{1,i_1} es menor o igual que 2^{-2} . Sea $y \in U_{1,i_1} \setminus V_{1,i_1}$, supongamos que $\rho(x_{i_1}, y) = 2^{-3} + \epsilon$, con $\epsilon > 0$. Entonces $B_\rho(y, \frac{\epsilon}{2})$ tiene intersección no vacía con V_{1,i_1} por ser y un punto de la clausura, y existe un $z \in B_\rho(y, \frac{\epsilon}{2}) \cap V_{1,i_1}$. Pero $2^{-3} + \epsilon = \rho(x_{i_1}, y) \leq \rho(x_{i_1}, z) + \rho(z, y) < 2^{-3} + \frac{\epsilon}{2}$, de donde se deduce que $\epsilon < 0$. Luego $\rho(x_{i_1}, y) \leq 2^{-3}$ para todo $y \in U_{1,i_1}$, y por tanto, dados $y_1, y_2 \in U_{1,i_1}$, se tiene que $\rho(y_1, y_2) \leq \rho(y_1, x_{i_1}) + \rho(x_{i_1}, y_2) \leq 2^{-2}$. Así, el diámetro de U_{1,i_1} es estrictamente menor que

$\frac{1}{2}$, como queríamos comprobar.

Para $n = 2$, consideremos los conjuntos abiertos $W_{2,x}$ de la forma $W_{2,x} = B_\rho(x, 2^{-4})$, para $x \in X$, y la familia de abiertos $W_{2,x,i_1} = V_{2,x} \cap W_{1,x_{i_1}}$. Esta familia es un recubrimiento de X , por lo que existe un subrecubrimiento finito $\{W_{2,x_j,i_{1j}}\}_{j=1}^r$. Consideremos los conjuntos $W_{2,x_j,i_{1j}}$ distintos del vacío, y los renombramos V_{2,i_2} , obteniendo una familia finita $\{V_{2,i_2}\}_{i_2=1}^{k_2}$ de abiertos no vacíos que recubren X . Por último, consideramos la familia $\mathcal{U}_2 = \{U_{2,i_2}\}_{i_2=1}^{k_2}$ formada por las clausuras de los V_{2,i_2} . Entonces $\mathcal{U}_2$ es un recubrimiento finito de X formado por la clausura de abiertos no vacíos. Además, utilizando el mismo argumento que antes, la adherencia $\overline{W}_{2,x_j}$ de $W_{2,x_j} = B_\rho(x_j, 2^{-4})$ tiene diámetro estrictamente menor que 2^{-2} , y como cada $V_{2,i_2} \subseteq W_{2,x_j}$ para algún j , tenemos que $U_{2,i_2} \subseteq \overline{W}_{2,x_j}$, y entonces U_{2,i_2} tiene diámetro estrictamente menor que 2^{-2} . Por otra parte, para cada U_{2,i_2} , existe un i_1 y un x_j tales que $V_{2,i_2} = W_{2,x_j,i_1} \subseteq V_{1,i_1}$, con lo que la adherencia U_{2,i_2} está contenida en la adherencia de V_{1,i_1} , que es U_{1,i_1} . Por tanto, concluimos que $\mathcal{U}_2$ es un recubrimiento finito de X formado por la clausura de abiertos no vacíos cuyo diámetro es estrictamente menor que $\frac{1}{4}$, y de forma que $\mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_1$. Procediendo de este modo para cada n , podemos obtener una familia de recubrimientos con las características del enunciado. Escribimos cada $\mathcal{U}_n = \{U_{n,1}, U_{n,2}, \dots, U_{n,k_n}\}$.

Antes de comenzar la prueba del teorema, vamos a dar unas líneas generales de cómo está estructurada la prueba. En primer lugar, vamos a construir una sucesión de límite inverso $\langle V_n, f_n \rangle$ a partir de la familia de recubrimientos $\{\mathcal{U}_n\}$, de forma que exista una aplicación continua $\phi_n : V_n \rightarrow X$. Así, podremos definir una aplicación continua ϕ entre V_∞ y X . En la segunda parte de la demostración, se construirá una aplicación f continua entre $\mathfrak{C}$ y V_∞ , para lo que resultará esencial el corolario 3.14, de forma que la composición $\phi \circ f$ sea una aplicación continua entre $\mathfrak{C}$ y X , como queremos demostrar.

Nos fijamos ahora en $\mathcal{U}_1$. Para cada $U_{1,i} \in \mathcal{U}_1$ podemos definir el conjunto $V_{1,i} = \{(u, i) : u \in U_{1,i}\} = U_{1,i} \times \{i\}$, esto es, los elementos del espacio producto $X \times \mathbb{N}$ tales que su imagen por la primera proyección $\pi_1 : X \times \mathbb{N} \rightarrow X$ es un elemento de $U_{1,i}$, y su proyección por la segunda proyección $\pi_2 : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es i . Observemos que la restricción de la primera proyección ϕ_1 nos da un homeomorfismo de $V_{1,i}$ en $U_{1,i}$. Además, vemos que si $j \neq l$, entonces $V_{1,j} \cap V_{1,l} = \emptyset$, puesto que de lo contrario tendríamos un elemento (u, i) con $i = j$ e $i = l$. Vemos entonces que lo que hemos conseguido así es que los $V_{1,i}$ sean disjuntos, ya que los $U_{1,i}$ en principio no tenían porqué ser disjuntos. Definimos ahora

$$V_1 := \bigcup_{i=1}^{k_1} V_{1,i} = \bigcup_{i=1}^{k_1} (U_{1,i} \times \{i\}) \subseteq X \times \{1, 2, \dots, k_1\}$$

esto es, V_1 es la unión disjunta de los $V_{1,i}$. Por último, definimos una aplicación $\phi_1 : V_1 \rightarrow X$ tal que $\phi_1((u, i)) = u$, que es continua, por ser la restricción de la proyección π_1 a V_1 , y es sobreyectiva, ya que cada elemento de X está al menos en un $U_{1,i}$.

Fijémonos ahora en $\mathcal{U}_2$. Como $\mathcal{U}_2 < \mathcal{U}_1$, cada $U_{2,i}$ está contenido en un $U_{1,j}$. Podemos por tanto definir $V_{2,i_1,i_2} = \{(u, i_1, i_2) : u \in U_{2,i_2} \subseteq U_{1,i_1}\} = U_{2,i_2} \times \{i_1\} \times \{i_2\}$, de forma que V_{2,i_1,i_2} es un cerrado de $X \times \mathbb{N}^2$ homeomorfo a U_{2,i_2} . Además, comprobamos que los V_{2,i_1,i_2} son disjuntos, ya que dados dos distintos, un elemento de su intersección tendría que tener todas las coordenadas

iguales, en particular, la segunda y la tercera, y serían por tanto iguales. Definimos el espacio

$$V_2 := \bigcup_{j=1}^{k_2} \left(\bigcup_{U_{1,i} \supseteq U_{2,j}} V_{2,i,j} \right) \subseteq X \times \{1, 2, \dots, k_1\} \times \{1, 2, \dots, k_2\}$$

esto es, V_2 es la unión disjunta de los V_{2,i_1,i_2} . Vemos que en V_2 hay para cada U_{2,i_2} tantos V_{2,i_1,i_2} como conjuntos U_{1,i_1} contenían a U_{2,i_2} . Por otro lado, definimos la aplicación $\phi_2 : V_2 \rightarrow X$ tal que $\phi_2((u, i_1, i_2)) = u$, que es continua, por ser la restricción de la proyección π_1 a V_2 , y es sobreyectiva, ya que cada elemento de X está al menos en un $U_{2,i}$. Por último, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} f_2 : V_2 &\rightarrow V_1 \\ (u, i_1, i_2) &\mapsto (u, i_1) \end{aligned}$$

Como f_2 es continua en cada V_{2,i_1,i_2} , que son cerrados y disjuntos en V_2 , también es continua en V_2 por el lema de pegado.

Repitiendo este proceso para cada $\mathcal{U}_n$, se consigue un par de sucesiones de límite inverso $\langle V_n, f_n \rangle$ y $\langle X, i \rangle$, donde i es la identidad en X , y una aplicación $\Phi = (\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entre ellas. Es importante notar que en cada V_n los conjuntos $V_{n,i_1,\dots,i_n}$ son cerrados disjuntos de V_n . Como hay un número finito U_{m,i_m} en $\mathcal{U}_m$ y hay un número finito de $\mathcal{U}_m$ con $m \leq n$, hay un número finito de $V_{n,i_1,\dots,i_n}$. Por tanto, cada $V_{n,i_1,\dots,i_n}$ es el complementario en V_n de la unión finita de cerrados, por lo que es abierto en V_n . Observamos además que, para cada $n \geq 2$ y $v = (u, i_1, i_2, \dots, i_n) \in V_n$, se tiene que $i \circ \phi_n(v) = i(u) = u$ y $\phi_{n-1} \circ f_n(v) = \phi_{n-1}((u, i_1, i_2, \dots, i_{n-1})) = u$, con lo que se cumple la condición necesaria para que Φ sea aplicación entre $\langle V_n, f_n \rangle$ y $\langle X, i \rangle$.

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & \xleftarrow{f_2} & V_2 & \xleftarrow{f_3} & V_3 & \xleftarrow{f_4} & \dots \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \\ X & \xleftarrow{i} & X & \xleftarrow{i} & X & \xleftarrow{i} & \dots \end{array}$$

Figura 3.2: Esquema las sucesiones.

Veamos que propiedades tienen los V_n . En primer lugar son compactos, ya que son la unión finita de los $V_{n,i_1,i_2,\dots,i_n}$, que son compactos por ser el producto finito de compactos (nótese que U_{n,i_n} es compacto por ser un cerrado en X compacto). Además, los V_n son espacios métricos, y por tanto Hausdorff, por estar contenidos en el producto finito de espacios métricos $X \times \prod_{i=1}^n \{1, 2, \dots, k_i\}$. Por último, son no vacíos, ya que cada punto u de X está contenido en algún $U_{n,i_n} \in \mathcal{U}_n$, y como $\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n-1} < \dots < \mathcal{U}_1$, existen $i_1, \dots, i_{n-1}$ tales que $u \in U_{n,i_n} \subseteq U_{n-1,i_{n-1}} \subseteq \dots \subseteq U_{1,i_1}$, con lo que $(u, i_1, \dots, i_n) \in V_{n,i_1,\dots,i_n} \subseteq V_n$.

Por otro lado, las aplicaciones ϕ_n son continuas y sobreyectivas. Son continuas por ser la restricción de la proyección $\pi_1 : X \times \mathbb{N}^n \rightarrow X$ en V_n ; y son sobreyectivas, ya que cada $u \in X$ se encuentra en un U_{n,i_n} por ser $\mathcal{U}_n$ recubrimiento de X .

La aplicación Φ induce una aplicación ϕ entre V_∞ y X , que es continua y sobreyectiva por el lema 3.9 al ser los X y V_n compactos y Hausdorff, y las aplicaciones ϕ_n continuas y sobreyectivas.

Por otra parte, en virtud del lema 1.18 podemos considerar que la métrica ρ de X es acotada, y en $\mathbb{N}$ la dada por la usual ρ_u de $\mathbb{R}$. Entonces podemos tomar una métrica en cada V_n definida

como en la ecuación (1.1) en la segunda parte de la demostración del lema 1.19, esto es, para $x = (u, i_1, \dots, i_n)$ y $x^* = (u^*, i_1^*, \dots, i_n^*)$ en V_n , la métrica ρ_n sería

$$\rho_n(x, y) = \rho(u, u^*) + \sum_{j=1}^n \frac{\rho_u(i_j, i_j^*)}{2^j}$$

que también es acotada, ya que $\sum_{j=1}^n \frac{\rho_u(i_j, i_j^*)}{2^j} \leq \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{2^j}$, que es un valor finito para cada n . Así, podemos definir en $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$ una métrica R tal que dados $(x_1, x_2, \dots)$ e $(y_1, y_2, \dots)$ en $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$

$$R((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho_n(x, y_n)}{2^n}$$

y podemos considerar que la métrica ρ_∞ en V_∞ es la heredada de la métrica R de $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Vemos que, dados $(x_1, x_2, \dots)$ e $(y_1, y_2, \dots)$ en V_∞ , con $\phi_n(x_n) = u_x$ y $\phi_n(y_n) = u_y$, se tiene que $\rho_n(x_n, y_n) \geq \rho(u_x, u_y)$.

Por último, veamos que propiedades tiene V_∞ . En primer lugar, el espacio V_∞ es no vacío y compacto por el lema 3.8, ya que cada V_n es no vacío, compacto y Hausdorff; y es espacio métrico, ya que acabamos de definir una métrica ρ_∞ en él. Veamos que V_∞ es totalmente desconexo. Sean $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$ elementos distintos de V_∞ , con lo que $x_n \neq y_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, con $x_n = (u_x, i_1, i_2, \dots, i_n)$ e $y_n = (u_y, j_1, j_2, \dots, j_n)$. Caben dos opciones:

- Si $u_x \neq u_y$, entonces $\rho(u_x, u_y) > 0$, con lo que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(u_x, u_y) > \frac{1}{2^m}$, con lo que si $x_m \in V_{m, i_1, \dots, i_m}$ entonces $y_m \notin V_{m, i_1, \dots, i_m}$.
- Si $u_x = u_y$ entonces necesariamente se tiene que $i_m \neq j_m$ para algún $m \in \{1, \dots, n\}$, de forma que si $x_m \in V_{m, i_1, \dots, i_m}$ entonces $y_m \notin V_{m, i_1, \dots, i_m}$.

En cualquiera de los dos casos, podemos encontrar un $V_{m, i_1, \dots, i_m}$ que contenga a x_m pero no a y_m . Fijémonos en ese $V_{m, i_1, \dots, i_m}$, que como ya se ha probado, es abierto y cerrado en V_m . Consideremos el conjunto $W_{m, i_1, \dots, i_m} \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$

$$W_{m, i_1, \dots, i_m} = \left(\prod_{j=1}^{m-1} V_j \right) \times V_{m, i_1, \dots, i_m} \times \left(\prod_{j=m+1}^{\infty} V_j \right)$$

Entonces $W_{m, i_1, \dots, i_m}$ es un abierto de $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$, con lo que $V_\infty \cap W_{m, i_1, \dots, i_m}$ es un abierto de V_∞ . Además, como ya se ha comentado, para cada $n \in \mathbb{N}$, y en particular para m , existen un número finito de $V_{m, i_1, \dots, i_m}$ disjuntos, por lo que el número de $W_{m, i_1, \dots, i_m}$ es también finito, su unión es todo $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$ y son disjuntos entre sí. De esta manera, cada $W_{m, i_1, \dots, i_m}$ es el complementario de la unión finita del resto, que son abiertos, por lo que es un cerrado en $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Así, $V_\infty \cap W_{m, i_1, \dots, i_m}$ es abierto y cerrado de V_∞ . Por otra parte, tenemos que $(x_1, x_2, \dots)$ está contenido en $W_{m, i_1, \dots, i_m}$, mientras que $(y_1, y_2, \dots) \notin W_{m, i_1, \dots, i_m}$. Concluimos, por tanto, que podemos separar dos puntos cualesquiera de V_∞ con un abierto y cerrado, por lo que aplicando el lema 3.1, tenemos que V_∞ es totalmente desconexo.

Sin embargo, V_∞ no es en general perfecto, por lo que no podemos aplicar el corolario 3.14 directamente. Sin embargo, $V_\infty \times \mathfrak{C}$ sí que es un espacio métrico perfecto, totalmente desconexo y compacto. Es un espacio métrico compacto por ser producto de dos espacios métricos y compactos. Es perfecto ya que dado $(x, c) \in V_\infty \times \mathfrak{C}$ y un entorno abierto $U = U_{V_\infty} \times U_{\mathfrak{C}}$ de (x, c) ,

con U_{V_∞} abierto de V_∞ con $x \in U_{V_\infty}$ y $U_{\mathfrak{C}}$ abierto de $\mathfrak{C}$ con $c \in U_{\mathfrak{C}}$, sabemos que dentro de $U_{\mathfrak{C}}$ existe un $c' \in \mathfrak{C}$ distinto de c , de forma que el punto $(x, c') \in V_\infty \times \mathfrak{C}$ es distinto de (x, c) , pero se encuentra en U . Por último, es totalmente desconexo, ya que si no lo fuera, existiría un $A \subseteq V_\infty \times \mathfrak{C}$ conexo con al menos dos puntos distintos $(x, c), (y, c')$. Si $x \neq y$, entonces por la proyección $\pi_1 : V_\infty \times \mathfrak{C} \rightarrow V_\infty$ tenemos que $\pi_1(A)$ es un conexo con dos puntos x, y distintos, lo que es imposible, ya que V_∞ es totalmente desconexo. Luego debe ser que $x = y$ y $c \neq c'$, pero entonces por la proyección $\pi_2 : V_\infty \times \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ tenemos que $\pi_2(A)$ es un conexo con dos puntos c, c' distintos, lo que es imposible, ya que $\mathfrak{C}$ es totalmente desconexo, con lo que se tiene que o los puntos son iguales o el subespacio A no es conexo.

Así, en virtud del corolario 3.14, existe un homeomorfismo h de $\mathfrak{C}$ en $V_\infty \times \mathfrak{C}$, de forma que

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{h} (V_\infty \times \mathfrak{C}) \xrightarrow{\pi} V_\infty \xrightarrow{\phi} X$$

donde $\pi : V_\infty \times \mathfrak{C} \rightarrow V_\infty$ viene dado por $\pi(x, c) = x$, que es continua y sobreyectiva. De modo que la composición $\phi \circ \pi \circ h$ es una aplicación continua y sobreyectiva de $\mathfrak{C}$ en X , con lo que X es la imagen de $\mathfrak{C}$ por una aplicación continua, como se quería probar. $\square$

Capítulo 4

Consecuencias del Teorema de Hausdorff-Alexandroff

En este capítulo estudiaremos las hipótesis del Teorema de Hausdorff-Alexandroff (teorema 3.15), preguntándonos si es posible relajar alguna de las condiciones de su enunciado. Seguiremos principalmente el artículo de Dreher y Samuel, *Continuous Images of Cantor's Ternary Set* [5].

En primer lugar, el cardinal de un espacio que sea la imagen de $\mathfrak{C}$ no puede ser mayor que el cardinal del continuo. Por otro lado, la imagen por una aplicación continua de un espacio compacto es también un espacio compacto. Nos preguntamos, por tanto, si podemos relajar la condición de que el espacio imagen sea métrico. Si tenemos un espacio topológico Hausdorff Y , y una aplicación continua $f : \mathfrak{C} \rightarrow Y$, se tiene que $f(\mathfrak{C})$ no sólo es compacto, sino que además es un espacio metrizable (ver corolario 1.28). Por otro lado, un espacio compacto y Hausdorff es metrizable si y sólo si cumple el segundo axioma de numerabilidad, ya que todo espacio Hausdorff y compacto es normal por el lema 2.5, y todo espacio Hausdorff y normal es regular, luego aplicando el teorema 1.27 se tiene que si satisface el segundo axioma de numerabilidad es metrizable, mientras que si es compacto y metrizable, por el lema 1.23 satisface el segundo axioma de numerabilidad. Tenemos por tanto que las siguientes tres afirmaciones son equivalentes si el espacio imagen Y es compacto y Hausdorff.

- i) Y es metrizable.
- ii) Y satisface el segundo axioma de numerabilidad.
- iii) Y es la imagen continua de $\mathfrak{C}$.

Existen espacios compactos y Hausdorff con el cardinal del continuo que no satisfacen el segundo axioma de numerabilidad (y por tanto no son metrizablees, luego no pueden ser la imagen continua de $\mathfrak{C}$). Un ejemplo es el espacio que se conoce como “la compactificación de Alexandroff” (*Alexandroff one-point compactification*, ver la definición 19.2 de [17]) del espacio discreto $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Este espacio se puede escribir como el conjunto $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y una base de abiertos dados por los conjuntos $\{x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (que por si solos generan la topología discreta en $\mathbb{R}$) y los conjuntos de la forma $V = \{\infty\} \cup (\mathbb{R} \setminus I)$, donde I es un conjunto compacto, lo que en este caso implica que es finito. Este espacio tiene el cardinal del continuo y es Hausdorff, ya que dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ se pueden separar con los abiertos $\{x\}$ e $\{y\}$, mientras que un punto $x \in \mathbb{R}$ se puede separar de ∞ con los abiertos $U = \{x\}$ y $V = \{\infty\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{x\})$. El espacio X es además compacto, ya que cualquier recubrimiento tiene un abierto de la forma $\{\infty\} \cup (\mathbb{R} \setminus I)$, con lo que para

recubrir I solo hace falta un número finito de abiertos. Por último, no satisface el segundo axioma de numerabilidad, ya que cualquier base de la topología debe contener a $\{x\}$ para todo $x \in X$.

Luego, podemos estudiar que ocurre si nos restringimos a un espacio infinito numerable. En tal caso, como Y es un espacio compacto, Hausdorff y numerable, por el lema 1.29 satisface el segundo axioma de numerabilidad, y aplicando lo explicado anteriormente, es la imagen continua del conjunto de Cantor. Podemos preguntarnos ahora si el resultado sigue siendo cierto si eliminamos la condición de que Y sea Hausdorff, esto es, que todo espacio infinito numerable que sea compacto es también la imagen continua del conjunto de Cantor. En lo que resta de esta sección veremos que la respuesta a esta pregunta es negativa, para lo que construiremos un contraejemplo.

Para nuestro ejemplo, construiremos un espacio (Y, τ_Y) compacto pero no Hausdorff, y lo que buscaremos será que tenga alguna propiedad especial, de forma que si fuese la imagen de $\mathfrak{C}$, entonces tuviese que ser Hausdorff. Comencemos definiendo el conjunto Y como la unión del producto de los números naturales por si mismos (los puntos de $\mathbb{R}^2$ con ambas coordenadas naturales) con otros dos puntos arbitrarios x, y , es decir,

$$Y = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{x, y\}$$

Ahora, consideremos en Y la familia $\mathcal{A}$ de conjuntos A tales que $A \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{y\}$ verificando que $y \in A$ y el cardinal de $A \cap \{(m, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es finito para todo $m \in \mathbb{N}$, esto es, A tiene un número finito de puntos en cada fila; y la familia $\mathcal{C}$ de conjuntos $C \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{x\}$ tales que contienen a x y cumplen que existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que $C \cap \{(m, n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ si $m > M$, esto es, C tiene elementos en un número finito de filas. Definimos la familia $\mathcal{B}$ como la formada por los conjuntos de la forma:

$$\mathcal{B} = \{\{(m, n)\} : (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \cup \{V = Y \setminus A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{W = Y \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$$

Observemos que para los conjuntos $V = Y \setminus A$ con $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $x \in V$, y V tiene un número infinito de elementos en cada fila; mientras que para los conjuntos $W = Y \setminus C$ con $C \in \mathcal{C}$, se tiene que $y \in W$, y W contiene un número infinito de filas completas.

Veamos que la familia $\mathcal{B}$ es base de una topología en Y que denotamos τ_Y . Sean $V = Y \setminus A_0$ y $W = Y \setminus C_0$ dos elementos de la base con $A_0 \in \mathcal{A}$ y $C_0 \in \mathcal{C}$. Entonces $Y = V \cup W \cup (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(m, n)\})$. Ahora, sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $p \in B_1 \cap B_2$, tenemos los siguientes casos:

- (a) Si $p = (m_0, n_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces vemos que el elemento $B = \{(m_0, n_0)\} \in \mathcal{B}$ cumple que $p \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.
- (b) Si $p = x$, entonces necesariamente $B_1 = Y \setminus A_1$ y $B_2 = Y \setminus A_2$, con $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Entonces $B_1 \cap B_2 = (Y \setminus A_1) \cap (Y \setminus A_2) = Y \setminus (A_1 \cup A_2)$, y como $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$, ya que la unión sigue teniendo a un número finito de elementos en cada fila de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $p \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.
- (c) Si $p = y$, entonces necesariamente $B_1 = Y \setminus C_1$ y $B_2 = Y \setminus C_2$, con $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$. Entonces $B_1 \cap B_2 = (Y \setminus C_1) \cap (Y \setminus C_2) = Y \setminus (C_1 \cup C_2)$, y como $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$, ya que la unión sigue teniendo elementos en un número finito de filas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $p \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$.

Veamos que (Y, τ_Y) es compacto. Para ello, basta tener en cuenta que dado un recubrimiento por abiertos $\mathcal{W}$ de Y , este contiene al menos un elemento U_V y otro U_W tales que $V \subseteq U_V$ y $W \subseteq U_W$, para algún par de elementos de la base $V = Y \setminus A$ y $W = Y \setminus C$, con

$A \in \mathcal{A}$ y $C \in \mathcal{C}$. Los elementos de Y que no se encuentran en U_V y U_W se encuentran en $Y \setminus (U_V \cup U_W) \subseteq Y \setminus (V \cup W) = Y \setminus ((Y \setminus A) \cup (Y \setminus C)) = A \cap C$, que por las propiedades de A tiene un número finito de elementos por fila, y por C solo tiene elementos en un número finito de filas, luego $A \cap C$ es un número finito de puntos de la forma (m, n) . Así, es necesario un número finito de abiertos $U_1, \dots, U_k$ del recubrimiento para recubrir $A \cap C$, y el subrecubrimiento $\{U_1, \dots, U_k, U_V, U_W\}$ es finito, con lo que el espacio es compacto.

Veamos ahora que (Y, τ_Y) no es Hausdorff, para lo que vamos a ver que no podemos separar los puntos x e y . Supongamos que existiesen abiertos disjuntos U_x y U_y tales que $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Entonces existen un par de abiertos de la base V y W disjuntos, tales que $x \in V$ e $y \in W$. Pero V contiene un número infinito de elementos (m, n) en cada fila de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mientras que W contiene un número infinito de filas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por tanto, no es posible que sean disjuntos, e Y no puede ser Hausdorff.

Como hemos comentado anteriormente, queremos añadirle una propiedad adicional a nuestro espacio para que lleguemos a una contradicción con la afirmación de que sea la imagen continua del conjunto de Cantor. En este caso, esta propiedad es la siguiente: **todo subconjunto compacto de Y es cerrado respecto de τ_Y** . Comprobémoslo probando el contrarecíproco:

Sea $E \subset Y$ no cerrado. Al no ser cerrado, no puede contener a x e y al mismo tiempo. Si esto ocurriera, se tendría que $Y \setminus E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, con lo que, considerando la familia $\mathcal{W}_E = \{\{(m, n)\} : (m, n) \in Y \setminus E\}$, se tiene que $B = \bigcup_{(m, n) \in \mathcal{W}_E} \{(m, n)\} = Y \setminus E$ es un abierto de τ_Y , y concluimos que $E = Y \setminus B$ es un cerrado.

Como E no es cerrado, entonces debe existir un punto en su clausura $\bar{E}$ que no pertenece a E . Este punto no puede ser de la forma (m, n) , ya que el propio $\{(m, n)\}$ es un abierto que contiene al punto y sería disjunto con E . Por tanto, ese punto es x o es y . Veamos que ocurre en cada caso:

- Si $x \in \bar{E} \setminus E$, entonces todo abierto que contiene a x tiene intersección no vacía con E , en particular, los conjuntos $V = Y \setminus A$ con $A \in \mathcal{A}$. De esto se sigue que existe una fila de E que tiene un número infinito de puntos, pues de lo contrario cada fila E_m de E sería finita, y se tendría que $(E \cup \{y\}) \in \mathcal{A}$. Entonces, $V = Y \setminus (E \cup \{y\})$ sería un entorno abierto de la base que tendría intersección vacía con E . Denotemos como F_{m_0} a una de las filas que tienen un número infinito de elementos de E . Entonces tenemos que el recubrimiento por abiertos de E

$$\{Y \setminus (F_{m_0} \cup \{x\})\} \cup \{\{(m_0, n)\} : (m_0, n) \in E \cap F_{m_0}\}$$

no tiene ningún subrecubrimiento finito. Efectivamente, como en $Y \setminus (F_{m_0} \cup \{x\})$ no se encuentra ningún punto de F_{m_0} , es necesario un número infinito de elementos $\{(m_0, n)\}$ para poder recubrir completamente $F_{m_0} \cap E$. Por tanto, E no es compacto.

- Si $y \in \bar{E} \setminus E$, entonces todo abierto que contiene a y tiene intersección no vacía con E , en particular, los conjuntos $W = Y \setminus C$ con $C \in \mathcal{C}$. De esto se sigue que E tiene al menos un punto en un número infinito de filas, pues de lo contrario $Y \setminus (E \cup \{x\})$ sería un abierto de la base que contendría a y pero no interseca a E . Sea $e_m = (m, n)$ un punto de E de la fila m de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y sea $G = \{e_m : m \in \mathbb{N}\}$. Entonces el recubrimiento por abiertos de E

$$\{Y \setminus (G \cup \{y\})\} \cup \{\{e_m\} : e_m \in G\}$$

no admite ningún subrecubrimiento finito, ya que $Y \setminus (G \cup \{y\})$ no contiene ningún punto de G , y se necesitan infinitos $\{e_m\}$ para recubrir G . Así, E no es compacto.

De modo que en cualquiera de los dos casos, E no es compacto, como queríamos demostrar.

Veamos ahora que este conjunto no puede ser la imagen continua del conjunto de Cantor, y que por tanto existe un espacio compacto numerable que no es la imagen continua de $\mathfrak{C}$.

Corolario 4.1 *No todo espacio topológico compacto y numerable es la imagen continua del conjunto de Cantor.*

Demostración: Consideremos (Y, τ_Y) definido anteriormente. Como hemos visto, es compacto, y es numerable por se la unión de dos puntos y el producto cartesiano de dos espacios numerables. Supongamos que existe una aplicación continua y sobreyectiva $f : \mathfrak{C} \rightarrow Y$, y veamos que esto implica que Y es Hausdorff. Sean dos puntos $u, v \in Y$ con $u \neq v$. Como los puntos son compactos, por las propiedades de Y , son cerrados en (Y, τ_Y) , y sus antiimágenes $f^{-1}(u)$ y $f^{-1}(v)$ son cerrados no vacíos en $\mathfrak{C}$ por ser f continua y sobreyectiva. Ahora, como $\mathfrak{C}$ es normal, existen abiertos disjuntos U_u y U_v en $\mathfrak{C}$ tales que $f^{-1}(u) \subseteq U_u$ y $f^{-1}(v) \subseteq U_v$. Los complementarios $F_u = \mathfrak{C} \setminus U_u$ y $F_v = \mathfrak{C} \setminus U_v$ son cerrados en $\mathfrak{C}$, luego son compactos, y por lo tanto sus imágenes por f son dos compactos $f(F_u)$ y $f(F_v)$ de Y , y aplicando las propiedades de Y , son cerrados en Y . Así, $D_u = Y \setminus f(F_u)$ y $D_v = Y \setminus f(F_v)$ son dos entornos abiertos de u y v respectivamente, y son disjuntos, ya que

$$\begin{aligned} D_u \cap D_v &= (Y \setminus f(F_u)) \cap (Y \setminus f(F_v)) = Y \setminus (f(F_u) \cup f(F_v)) = \\ &= Y \setminus f(F_u \cup F_v) = Y \setminus f(\mathfrak{C} \setminus (U_u \cap U_v)) = Y \setminus f(\mathfrak{C} \setminus (\emptyset)) = \emptyset \end{aligned}$$

Luego llegamos a que (Y, τ_Y) es Hausdorff, lo que no es posible, puesto que hemos probado antes que Y no era Hausdorff con la topología τ_Y . Por tanto, (Y, τ_Y) no puede ser la imagen de $\mathfrak{C}$ por una aplicación continua. $\square$

Bibliografía

- [1] J. Araujo Gómez. *Apuntes para la asignatura "Measure Theory"*. Universidad de Cantabria. Facultad de Ciencias. Grado en Matemáticas. Curso 2020-2021.
- [2] G. de Barra. *Measure theory and integration*. Ellis Horwood, 1981.
- [3] Y. Benyamini. "Applications of the Universal Surjectivity of the Cantor Set". En: *The American Mathematical Monthly* 105.9 (1998), págs. 832-839. URL: <http://www.jstor.org/stable/2589212>.
- [4] G. Cantor. "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten V". En: *Mathematische Annalen* 21 (1883), págs. 545-591.
- [5] F. Dreher y T. Samuel. "Continuous Images of Cantor's Ternary Set". En: *The American Mathematical Monthly* 121.7 (2014), págs. 640-643. URL: <http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.121.07.640>.
- [6] G.A. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. New York, Springer-Verlag, 1990.
- [7] R. Engelking. *Dimension Theory*. North-Holland Pub. Co., 1978.
- [8] R. Engelking. *General Topology*. Heldermann, 1989.
- [9] K. Falconer. *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, Inc, 1990.
- [10] E. García Fernández. "Teoría de la dimensión topológica (Topological Dimension Theory)". Etayo Gordejuela, F. (dir.) Trabajo de Fin de Grado para acceder al Grado en Matemáticas. Universidad de Cantabria, jun. de 2018.
- [11] G.J. Hocking y G.S. Young. *Topology*. Adison-Wesley, 1961.
- [12] K. Kuratowski. *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología*. Barcelona : Vicens-Vives, 1966.
- [13] M. Macho Stadler. "Curiosidades sobre el conjunto de Cantor". En: *Un paseo por la Geometría* 1999/2000 (2001), págs. 97-116.
- [14] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall, 2000.
- [15] H.J.S. Smith. "On the integration of discontinuous functions". En: *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-6 (1874), págs. 140-153. URL: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s1-6.1.140>.
- [16] R. W. Vallin. *The Elements of Cantor Sets- with applications*. John Wiley & Sons, Inc, 2013.
- [17] S. Willard. *General Topology*. Dover Publications, 2004.

Apéndice A

Algunas ideas de teoría de la medida

En este apéndice introducimos algunas ideas básicas sobre σ -álgebras y medidas. Nos basamos principalmente en el libro de G. de Barra, *Measure Theory and integration* [2] y en los apuntes de J. Araujo para la asignatura *Measure Theory* [1].

A.1. Sobre σ -álgebras y espacios medibles

Comenzamos definiendo el concepto de σ -álgebra.

Definición A.1 Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X se dice que es una σ -álgebra si cumple las siguientes propiedades:

1. $X \in \mathcal{M}$.
2. Si $M \in \mathcal{M}$, entonces $X \setminus M \in \mathcal{M}$.
3. Si $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable tal que $M_n \in \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathcal{M}$.

Al par $(X, \mathcal{M})$ se le llama espacio medible, y a los elementos de $\mathcal{M}$ conjuntos medibles.

Como consecuencia de esta definición, se tienen inmediatamente las siguientes propiedades:

Proposición A.2 Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, entonces:

- i. $\emptyset \in \mathcal{M}$.
- ii. Si $N = \{1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$, y $\{M_n\}_{n \in N}$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{M}$, entonces $\bigcup_{n=1}^k M_n \in \mathcal{M}$.
- iii. Si $N \subseteq \mathbb{N}$, y $\{M_n\}_{n \in N}$ es una familia, finita o numerable, de elementos de $\mathcal{M}$, entonces $\bigcap_{n \in N} M_n \in \mathcal{M}$.

Demostración:

- i. Es consecuencia directa de aplicar la propiedad 2. al conjunto $X \in \mathcal{M}$.

- ii. Dados $N = \{1, \dots, k\} \subset \mathbb{N}$ y $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{M}$, la familia $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{M_m \in \mathcal{M} : M_m = \emptyset \text{ para } m \in \mathbb{N} \setminus N\}$ es una familia numerable de elementos de $\mathcal{M}$, por lo que aplicando la propiedad 3. de la definición se tiene que

$$\mathcal{M} \ni \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \left(\bigcup_{n=1}^k M_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} M_n \right) = \left(\bigcup_{n=1}^k M_n \right) \cup \emptyset = \bigcup_{n=1}^k M_n$$

- iii. Si $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de elementos de $\mathcal{M}$, aplicando la propiedad 2. de la definición se tiene que $\{(X \setminus M_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también una familia numerable de elementos de $\mathcal{M}$. Aplicando la propiedad 3. de la definición,

$$\mathcal{M} \ni \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus M_n) = X \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n \right)$$

y usando de nuevo la propiedad 2. de la definición se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathcal{M}$. Si se tiene una familia finita $\{M_n\}_{n \in N}$ de elementos de $\mathcal{M}$, basta considerar la familia numerable $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{M_m \in \mathcal{M} : M_m = X \text{ para } m \in \mathbb{N} \setminus N\}$, y del mismo modo que antes

$$\mathcal{M} \ni \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = \left(\bigcap_{n \in N} M_n \right) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus N} M_n \right) = \bigcap_{n \in N} M_n$$

□

Aunque las σ -álgebras comparten varias propiedades con las topologías, presentan algunas diferencias, como el hecho de que la intersección numerable de abiertos no tiene por qué ser un abierto, mientras que como hemos visto, esto sí ocurre con σ -álgebras, o el hecho de que la unión arbitraria de elementos de una σ -álgebra no tiene por qué ser elemento de la σ -álgebra, lo que sí ocurre con elementos de una topología.

Algunos ejemplos de σ -álgebras para un espacio X son $\{\emptyset, X\}$, conocida como σ -álgebra trivial, o $\mathcal{P}(X)$, llamada σ -álgebra discreta. En $\mathbb{R}$, un ejemplo muy importante de σ -álgebra es la de Borel. La σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}$ es la menor σ -álgebra generada por los abiertos con la topología usual (la menor σ -álgebra que contiene a una familia se define como la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a esa familia). Sin embargo, $\mathcal{B}$ no es completa respecto de la medida de Lebesgue m , ya que existen conjuntos con medida de Lebesgue cero, pero que contienen subconjuntos no medibles (ver sección 2.5 de [2]). De esta manera, se define la σ -álgebra de Lebesgue $\mathcal{L}$ como la que completa $\mathcal{B}$.

A.2. Sobre medidas y espacios de medida

Comenzamos definiendo el concepto de medida

Definición A.3 Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Una función $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ es una medida si satisface las siguientes condiciones

1. Es σ -aditiva, esto es, dada una familia $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ numerable de elementos disjuntos dos a dos de $\mathcal{M}$,

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(M_n)$$

2. No es la función constante igual a $+\infty$.

Diremos que la medida es finita si μ no toma el valor $+\infty$ para ningún $M \in \mathcal{M}$. Por otro lado, diremos que μ está concentrada en $M \in \mathcal{M}$ si $\mu(X \setminus M) = 0$.

Existe otra definición de medida en la que la condición 2. se sustituye por que $\mu(\emptyset) = 0$. Vemos que ambas definiciones son equivalentes, puesto que si $\mu(\emptyset) = 0$, la función no es constantemente igual a $+\infty$, mientras que nuestra definición implica que $\mu(\emptyset) = 0$, como veremos en la proposición A.5.

Definición A.4 Un espacio de medida es una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ formado por un conjunto X , una σ -álgebra $\mathcal{M}$ sobre X y una medida μ en $(X, \mathcal{M})$. Se dice que un subconjunto $A \subseteq X$ es medible si se encuentra en $\mathcal{M}$, en cuyo caso sabemos que existe $\mu(A)$.

Como consecuencia de la definición de medida y de espacio de medida, se tienen las siguientes propiedades:

Proposición A.5 Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, entonces:

i. $\mu(\emptyset) = 0$

ii. Si $\{M_n\}_{n=1}^k$ es una familia finita de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^k M_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(M_n)$$

iii. Sean $A, B \in \mathcal{M}$, si $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

iv. Si $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de elementos de $\mathcal{M}$ tal que $M_n \subseteq M_{n+1}$ para todo n , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n)$$

v. Si $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de elementos de $\mathcal{M}$ tal que $M_n \supseteq M_{n+1}$ para todo n , y $\mu(M_1) < +\infty$ entonces

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n)$$

Demostración:

i. Como μ no es constantemente $+\infty$, existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(M) < +\infty$. Consideremos la familia $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $M_1 = M$, y $M_n = \emptyset$ para todo $n \geq 2$. Entonces los conjuntos de la familia son disjuntos dos a dos y por tanto podemos aplicar la propiedad 1. de la definición de medida, obteniendo

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(M_n) = \mu(M) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(\emptyset)$$

pero la unión de los elementos de la familia es M , con lo que la medida de la unión es $\mu(M)$, y entonces la suma infinita de $\mu(\emptyset)$ es 0, con lo que $\mu(\emptyset) = 0$.

- ii. Si $\{M_n\}_{n=1}^k$ es una familia finita de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces la familia $\{M_n\}_{n=1}^k \cup \{M_m : M_m = \emptyset \text{ para } m > k\}$ es una familia numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, y aplicando la propiedad 1. de las medidas

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^k M_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n) = \sum_{n=1}^k \mu(M) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^k \mu(M)$$

- iii. Sean $A, B \in \mathcal{M}$, con $A \subseteq B$. Entonces $(X \setminus A) \in \mathcal{M}$ y $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \in \mathcal{M}$ aplicando las propiedades de $\mathcal{M}$. Como A y $B \setminus A$ son disjuntos dos a dos, utilizando el punto ii.

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

como $\mu(B \setminus A) \geq 0$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

- iv. Sea $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de elementos de $\mathcal{M}$ tal que $M_n \subseteq M_{n+1}$ para todo n , entonces podemos tomar la familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{M}$ tales que $A_1 = M_1$, $A_2 = M_2 \setminus M_1$, y en general $A_n = M_n \setminus M_{n-1}$. Los elementos de la familia son disjuntos dos a dos, por lo que

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$$

Además, se tiene que $\bigcup_{j=1}^n A_j = M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n)$ aplicando el punto ii. y como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, se llega a que $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n)$.

- v. Sea $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de elementos de $\mathcal{M}$ tal que $M_n \supseteq M_{n+1}$ para todo n , entonces podemos tomar la familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{M}$ tales que $A_1 = \emptyset$, $A_2 = M_1 \setminus M_2$, y en general $A_n = M_1 \setminus M_n$. Como $M_{n+1} \subseteq M_n$, entonces $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces una familia de conjuntos que cumplen las condiciones del punto iv. por lo que

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_1 \setminus M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(M_1) - \mu(M_n))$$

donde en la última igualdad se ha aplicado el punto ii. a M_n y $M_1 \setminus M_n$. El término de la derecha es entonces $\mu(M_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n)$. Por otro lado, se tiene que $A_n = (X \setminus M_n) \cap M_1$, con lo que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((X \setminus M_n) \cap M_1) = M_1 \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus M_n)\right) = M_1 \cap \left(X \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right)\right)$$

El término de la derecha es igual a $M_1 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right)$, y aplicando la propiedad ii. a $M_1 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right)$ y a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$, se tiene que

$$\mu(M_1) - \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \mu\left(M_1 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu(M_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n)$$

Finalmente, como $\mu(M_1)$ es finito, obtenemos

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(M_n)$$

□

A.3. Medidas sobre familias de conjuntos

En esta sección construiremos funciones sobre familias de conjuntos que no tienen porqué ser σ -álgebras, para después poder extender la definición de esa medida sobre una σ -álgebra que contenga a la familia. El interés que tiene esta construcción es que nos permite definir una medida controlando qué conjuntos tienen medida no nula, en particular, podremos construir una medida finita cuyo soporte esté contenido en el conjunto de Cantor. Para esta sección seguiremos principalmente la sección 5.2 del libro de G. de Barra, *Measure theory and integration* [2], y las páginas 13-15 del libro de K. Falconer, *Fractal geometry* [9].

Comencemos definiendo el concepto de anillo de conjuntos, que no debe confundirse con el de anillo que aparece en álgebra.

Definición A.6 Una familia de conjuntos $\mathcal{R}$ se dice que es un anillo si para todo par de conjuntos $E, F \in \mathcal{R}$ se tiene que $E \cup F \in \mathcal{R}$ y $E \setminus F \in \mathcal{R}$.

Denotaremos como $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ la familia de todos los conjuntos de $\mathcal{R}$ junto con sus uniones numerables, y $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ la familia de todos los subconjuntos de los elementos de $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.

Como podemos ver, toda σ -álgebra es un anillo, pero el recíproco no es cierto, ni tan siquiera para $\mathcal{S}(\mathcal{R})$. La estructura de anillo nos permite definir una función $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ con las mismas propiedades que tiene una medida¹. Como $\emptyset \in \mathcal{R}$, se tiene que las propiedades *i.*, *ii.* y *iii.* de la proposición A.5 también se cumplen. A continuación vamos a ver cómo podemos extender esta medida μ al conjunto $\mathcal{H}(\mathcal{R})$, para lo que necesitamos un lema auxiliar.

Lema A.7 Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos de $\mathcal{R}$, entonces existe otra familia $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de $\mathcal{R}$ tales que $F_n \subseteq E_n$ para cada n y, para cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $\bigcup_{n=1}^N E_n = \bigcup_{n=1}^N F_n$, de forma que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Demostración: Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos de $\mathcal{R}$, definimos $F_1 = E_1$, y para cada $n \geq 2$, $F_n = E_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i \right)$. Es claro por construcción que los F_n son disjuntos y que $F_n \subseteq E_n$ para cada n . Para comprobar la otra propiedad, utilizamos inducción: el caso $N = 1$ es directo, luego supongamos que el resultado es cierto para $N = k - 1$, y comprobemos que se cumple para $N = k$.

$$\bigcup_{n=1}^k F_n = F_k \cup \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} F_n \right) = \left(E_k \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} F_n \right) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} F_n \right) = E_k \cup \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} F_n \right) = \bigcup_{n=1}^k E_n$$

□

Ya estamos en condiciones de demostrar el siguiente lema, que nos permite extender una medida sobre un anillo $\mathcal{R}$ a su anillo $\mathcal{H}(\mathcal{R})$. La importancia de este lema radica en el hecho de que si hacemos una buena elección del anillo inicial, entonces puede ser que el anillo $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ sea una σ -álgebra, con lo que la medida extendida sea una medida sobre una σ -álgebra.

¹Donde la propiedad de que la medida de la unión numerable de elementos disjuntos de $\mathcal{R}$ es la suma de las medidas de los elementos solo tiene sentido cuando dicha unión está en $\mathcal{R}$. En particular, si $\mathcal{S}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, entonces la propiedad se cumple para cualquier unión finita o numerable.

Lema A.8 Sea $\mathcal{R}$ un anillo, y sea μ una medida sobre $\mathcal{R}$. Entonces podemos definir la siguiente función $\mu^* : \mathcal{H}(\mathcal{R}) \rightarrow [0, \infty]$

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) : E_n \in \mathcal{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ y } E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right\} \quad (\text{A.1})$$

Entonces

i) $\mu^*(E) = \mu(E)$ si $E \in \mathcal{R}$.

ii) La función μ^* cumple las propiedades de medida sobre $\mathcal{H}(\mathcal{R})$.

Demostración:

i) Sea $E \in \mathcal{R}$. Se tiene entonces que $\mu^*(E) \leq \mu(E)$. Para probar la otra desigualdad, sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de elementos de $\mathcal{R}$ tales que $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Aplicando el lema A.7 a la familia $\{E \cap E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene otra familia $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de $\mathcal{R}$, con $F_n \subseteq E \cap E_n$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E \cap E_n) = E$. Como F_n y E_n pertenecen a $\mathcal{R}$, entonces $E_n \setminus F_n \in \mathcal{R}$ y $\mu(E_n) \geq \mu(F_n)$, ya que μ cumple las propiedades de medida. Así,

$$\mu(E) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(F_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$$

por lo que $\mu(E) \leq \mu^*(E)$.

ii) Se tiene que μ no es una función constante igual a $+\infty$ ya que μ no lo era, y entonces existe un $E \in \mathcal{R}$ tal que $\mu^*(E) = \mu(E) < +\infty$. Para la otra propiedad, sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos disjuntos dos a dos de $\mathcal{H}(\mathcal{R})$. Si no se cumpliera, se tendría que $\mu^*(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \delta + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i)$, donde $\delta > 0$. Sea $\varepsilon > 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una familia $\{F_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{R}$ tales que $A_i \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_{ij}$ y de forma que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(F_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Los conjuntos F_{ij} forman un recubrimiento numerable de $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, por lo que

$$\mu^* \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(F_{ij}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = \varepsilon + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i)$$

Como el ε es arbitrario, podemos escogerlo de forma que $\delta > \varepsilon$, lo que sería imposible; por tanto, δ debe ser 0.

□

Veamos ahora cómo podemos aplicar el lema anterior para construir una medida μ cuyo soporte sea el conjunto de Cantor. Recordemos que denotamos como A_n al cerrado obtenido en la construcción de $\mathfrak{C}$ en el paso n , y por $\mathfrak{I}$ al intervalo unidad. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos la familia $\mathcal{E}_n = \{E_i^n\}_{i=1}^{2^n} \cup \{U_i^n\}_{i=1}^{2^{n-1}}$, donde E_i^n es uno de los intervalos cerrados disjuntos que forman A_n , y U_j^n es uno de los intervalos abiertos eliminados de A_{n-1} para construir A_n . Sea ahora

$$\mathcal{E} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n \right) \cup \{\mathbb{R} \setminus \mathfrak{I}, \emptyset\}$$

y definimos $\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{j=1}^k F_j : F_j \in \mathcal{E} \right\}$, la familia formada por las uniones finitas de elementos de $\mathcal{E}$.

Antes de continuar, observemos lo siguiente: dado un elemento $F = \bigcup_{j=1}^k F_j$ de $\mathcal{R}$, este puede descomponerse en la unión de a lo sumo tres conjuntos: uno de ellos es $\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}$ (en caso de que esté en la unión), otro es la unión de los elementos de la forma U_i^n para algunos n , y el último es la unión de elementos de la forma E_i^n para algunos n . Denotemos éste último como E_F , y veamos que se puede escribir como la unión disjunta de elementos de la forma E_l^n para algún n . Para ello, consideremos la familia de los $\mathcal{F} = \{E_t^{n_t}\}$ tales que $E_t^{n_t} = F_j$ para algún j . Entonces, si tomamos de $\mathcal{F}$ los conjuntos tales que ninguno de los que hemos tomado anteriormente los contiene, y los renombramos como $E_{i_l}^{n_l}$, comenzando por los de menor n , obtenemos que

$$E_F = \bigcup_{l=1}^s E_{i_l}^{n_l}$$

donde los $E_{i_l}^{n_l}$ son disjuntos. Esta definición de E_F depende de como sean los elementos de la unión. Así, si $F = [0, \frac{1}{3}]$, este se puede escribir como $[0, \frac{1}{9}] \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, de forma que $E_F = F$ en el primer caso, y $E_F = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ en el segundo. Podemos definir, no obstante, un E_F que contenga a todos los otros, y que no esté contenido en ningún otro conjunto que sea unión de conjuntos E_i^n contenidos en F distinto del propio E_F . Para ello, consideremos los siguientes conjuntos de índices:

$$\begin{aligned} I_1^F &= \{i \in \{1, 2\} : E_i^1 \subseteq F\} \\ I_2^F &= \{i \in \{1, 2, 3, 4\} : E_i^2 \subseteq F \text{ y } E_i^2 \cap E_j^1 \text{ para todo } j \in I_1^F\} \\ &\vdots \\ I_n^F &= \{i \in \{1, \dots, 2^n\} : E_i^n \subseteq F \text{ y } E_i^n \cap E_j^l \text{ para todo } j \in I_l^F \text{ con } 1 \leq l \leq n-1\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como F es la unión finita de elementos de $\mathcal{E}$, observamos que existe un $n_F \in \mathbb{N}$ tal que $I_n^F = \emptyset$ para todo $n \geq n_F$. Así, podemos considerar

$$E^F = \bigcup_{j=1}^{n_F} \bigcup_{i \in I_j^F} E_i^j \quad (\text{A.2})$$

Vemos que $E^F \in \mathcal{R}$ por ser la unión finita de elementos de $\mathcal{E}$, y para cada F se puede construir un único E^F . Además, tenemos que todo intervalo cerrado $E_i^n \subseteq F$ está contenido en E^F , puesto que de lo contrario el índice i estaría incluido en I_n^F , lo que implica que $E_i^n \subseteq E_F$.

Por otro lado, para cada E_F tenemos que $F \setminus E_F \in \mathcal{R}$ (también $F \setminus E^F \in \mathcal{R}$), y no contiene ningún elemento de la forma E_i^n , puesto que en ese caso estaría contenido en la unión de conjuntos U_i^n y $\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}$, si éste está contenido en F , lo que no es posible. Del mismo modo, si consideramos los conjuntos F_j que son de la forma U_i^n , tenemos que estos son disjuntos si son distintos. Podemos así considerar el conjunto

$$U_F = \bigcup_{k=1}^r U_{i_k}^{n_k}$$

tal que $U_{i_k}^{n_k} \cap E_F = \emptyset$ para todo k , y los $U_{i_k}^{n_k}$ son todos distintos. Al igual que antes, U_F no es único para cada F , puesto que depende de E_F . Podemos considerar $U^F = F \setminus E^F$, y tenemos que

U^F está contenido en U_F para cualquier otro U_F que consideremos.

De esta manera, $F = E_F \cup U_F \cup (\mathbb{R} \setminus \mathfrak{J})$, si $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{J} = F_j$ para algún j , o $F = E_F \cup U_F$, en caso contrario. Notemos que los conjuntos U_F , E_F y $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{J}$ son disjuntos, y están formados por la unión de conjuntos disjuntos entre sí.

Veamos que $\mathcal{R}$ es un anillo. Sean G y H dos elementos de $\mathcal{R}$, esto es, son unión finita de elementos de $\mathcal{E}$, entonces su unión sigue siendo la unión finita de elementos de $\mathcal{E}$, con lo que $G \cup H \in \mathcal{R}$. Observemos que de lo anterior deducimos que la unión finita de elementos de $\mathcal{R}$ es también un elemento de $\mathcal{R}$.

Falta comprobar que $G \setminus H$ es un elemento de $\mathcal{R}$. Observemos que dados dos conjuntos $U_{i_j}^{n_j}$ y $U_{i_t}^{n_t}$, su intersección es distinta del vacío si y sólo si son el mismo conjunto, con lo que $U_{i_j}^{n_j} \setminus U_{i_t}^{n_t} = \emptyset$ si y sólo si son iguales. Por otra parte, si tomamos dos conjuntos $E_{i_j}^{n_j}$ y $E_{i_t}^{n_t}$, su intersección es no vacía si uno está contenido en el otro, con lo que $E_{i_j}^{n_j} \setminus E_{i_t}^{n_t} = \emptyset$ si $E_{i_j}^{n_j} \subseteq E_{i_t}^{n_t}$, y en otro caso, $E_{i_j}^{n_j} \setminus E_{i_t}^{n_t}$ es la unión de todos los abiertos $U_i^{n_t}$ y de todos los cerrados $E_i^{n_t}$ con $i \neq i_t$ contenidos en $E_{i_j}^{n_j}$. Por último dados un conjunto de la forma $E_{i_j}^{n_j}$ y otro de la forma $U_{i_t}^{n_t}$, su intersección es distinta del vacío si y sólo si el $U_{i_t}^{n_t} \subseteq E_{i_j}^{n_j}$, con lo que:

- $U_{i_j}^{n_j} \setminus E_{i_t}^{n_t} = \emptyset$ si $U_{i_j}^{n_j} \subseteq E_{i_t}^{n_t}$, y en otro caso son disjuntos y el complementario es el propio $U_{i_j}^{n_j}$.
- $E_{i_j}^{n_j} \setminus U_{i_t}^{n_t}$ es la unión de todos los abiertos $U_i^{n_t}$ con $i \neq i_t$ y de todos los cerrados $E_i^{n_t}$ contenidos en $E_{i_j}^{n_j}$.

En cualquiera de los cuatro casos, se tiene que el complementario es un elemento de $\mathcal{R}$. Ahora, consideremos conjuntos $E_G = \bigcup_{l=1}^s E_{i_l}^{n_l}$, $U_G = \bigcup_{t=1}^r U_{i_t}^{n_t}$ y $E_H = \bigcup_{l=1}^{\tilde{s}} \tilde{E}_{i_l}^{n_l}$, $U_H = \bigcup_{t=1}^{\tilde{r}} \tilde{U}_{i_t}^{n_t}$ asociados a G y a H como hemos descrito antes. Se tiene que

$$(E_G \cup U_G) \setminus (E_H \cup U_H) = ((E_G \setminus E_H) \cap (E_G \setminus U_H)) \cup ((U_G \setminus E_H) \cap (U_G \setminus U_H))$$

Observamos que

- $E_G \setminus E_H = \bigcup_{l=1}^s (E_{i_l}^{n_l} \setminus E_H)$. Fijemos un $E_{i_l}^{n_l}$, y consideremos que los $\tilde{E}_{i_l}^{n_l}$ están ordenados de forma que los de menor n_l tienen un l menor. Si alguno de los $\tilde{E}_{i_l}^{n_l} \supseteq E_{i_l}^{n_l}$, entonces $E_{i_l}^{n_l} \setminus E_H = \emptyset$. Si esto no ocurre, entonces $E_{i_l}^{n_l} \setminus \tilde{E}_{i_1}^{n_1}$ es la unión de intervalos abiertos y cerrados de $\mathcal{E}_{n_1}$, y el resto de $\tilde{E}_{i_l}^{n_l}$ estarán por tanto en esa unión o en el complementario de $E_{i_l}^{n_l}$, y podemos continuar eliminándolos hasta llegar a $\tilde{s}$. Una vez hemos eliminado los $\tilde{E}_{i_l}^{n_l}$, tenemos que $E_{i_l}^{n_l} \setminus E_H$ es la unión finita de intervalos abiertos y cerrados de $\bigcup_{l=1}^{\tilde{s}} \mathcal{E}_{n_l}$ contenidos en $E_{i_l}^{n_l}$ pero que no están contenidos en ningún $\tilde{E}_{i_l}^{n_l}$. Por tanto, $E_G \setminus E_H$ es la unión finita de abiertos y cerrados de $\mathcal{E}$, por lo que está en $\mathcal{R}$.
- $E_G \setminus U_H = \bigcup_{l=1}^s (E_{i_l}^{n_l} \setminus U_H)$, y procediendo de manera análoga al punto anterior, obtenemos que cada $E_{i_l}^{n_l} \setminus U_H$ es la unión finita de intervalos abiertos y cerrados de $\bigcup_{t=1}^{\tilde{r}} \mathcal{E}_{n_t}$ contenidos en $E_{i_l}^{n_l}$ pero que no están contenidos en ningún $\tilde{U}_{i_t}^{n_t}$. Así, $E_G \setminus U_H$ es la unión finita de abiertos y cerrados de $\mathcal{E}$, por lo que está en $\mathcal{R}$.
- $U_G \setminus E_H$ es la unión de los intervalos abiertos que forman U_G que no están contenidos en ninguno de los intervalos cerrados que componen E_H .

- $U_G \setminus U_H$ es la unión de los intervalos abiertos que forman U_G que no son intervalos abiertos de U_H .

Falta ver como son las intersecciones. Comencemos por $(U_G \setminus E_H) \cap (U_G \setminus U_H)$. Como ambos son uniones finitas de intervalos abiertos, y la intersección de intervalos abiertos es distinta del vacío si y sólo si son el mismo conjunto, tenemos que $(U_G \setminus E_H) \cap (U_G \setminus U_H)$ es el vacío, si no tienen ningún conjunto en común, o una unión finita de intervalos abiertos, por lo que está en $\mathcal{R}$. Consideremos ahora $(E_G \setminus E_H) \cap (E_G \setminus U_H)$. Supongamos que $E_G \setminus E_H = \bigcup_{i=1}^{\alpha} F_i$ y $E_G \setminus U_H = \bigcup_{j=1}^{\beta} F_j$, con $F_i, F_j \in \mathcal{E}$. Entonces, $(E_G \setminus E_H) \cap (E_G \setminus U_H) = \bigcup_{i=1}^{\alpha} \bigcup_{j=1}^{\beta} (F_i \cap F_j)$, luego si $F_i \cap F_j \in \mathcal{R}$ para todo i y j , habremos terminado.

- Si $F_i = E_i^{n_i}$ y $F_j = E_j^{n_j}$ y son el mismo conjunto, su intersección está en $\mathcal{R}$. Supongamos que son distintos y que $n_i \neq n_j$, ya que en ese caso los intervalos cerrados son disjuntos por estar en el mismo $\mathcal{E}_n$. Si su intersección es no vacía, entonces uno debe estar contenido en el otro, y por lo tanto su intersección es el que pertenezca al $\mathcal{E}_n$ de mayor n .
- Si $F_i = E_i^{n_i}$ y $F_j = U_j^{n_j}$ y $n_i = n_j$, entonces son disjuntos. Si $n_i \neq n_j$, para que su intersección sea distinta del vacío, tiene que darse necesariamente que $U_j^{n_j} \subseteq E_i^{n_i}$, con lo que su intersección es F_j . El caso en el que F_i es un abierto y F_j es un cerrado es análogo a este.
- Si $F_i = U_i^{n_i}$ y $F_j = U_j^{n_j}$, entonces su intersección es el vacío salvo que sean el mismo conjunto.

Como en todos los casos $F_i \cap F_j \in \mathcal{R}$, tenemos que $(E_G \setminus E_H) \cap (E_G \setminus U_H) \in \mathcal{R}$ por ser la unión finita de elementos de $\mathcal{R}$. Por último, si G no contiene a $\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}$, o si tanto G como H lo contienen, entonces $G \setminus H = (E_G \cup U_G) \setminus (E_H \cup U_H) \in \mathcal{R}$, mientras que si G contiene a $\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}$ pero H no, tenemos que $G \setminus H = ((E_G \cup U_G) \setminus (E_H \cup U_H)) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}) \in \mathcal{R}$. Concluimos por tanto que $\mathcal{R}$ es un anillo.

Construyamos ahora una métrica μ sobre nuestro anillo $\mathcal{R}$. Definimos $\mu(E_i^n) = \frac{1}{2^n}$ para los intervalos cerrados E_i^n que forman cada A_n , de forma que tenemos que $\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} E_i^n\right) = 1$. Del mismo modo, dado un E_i^n , tenemos que contiene 2^{m-n} intervalos cerrados E_{ij}^m , con $m \geq n$, de forma que $\sum_{j=1}^{2^{m-n}} \mu(E_{ij}^m) = \frac{2^{m-n}}{2^m} = \frac{1}{2^n} = \mu(E_i^n)$; así, la medida de un intervalo cerrado E_i^n es igual a la suma de las medidas de intervalos cerrados $E_{ij}^{n_j}$ disjuntos contenidos en él, de forma que en $E_i^n \setminus \bigcup_{j=1}^k E_{ij}^{n_j}$ no queden intervalos cerrados². Definimos la medida de los intervalos abiertos U_i^n como $\mu(U_i^n) = 0$ para todo U_i^n , y tomamos $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathcal{J}) = 0$ y $\mu(\emptyset) = 0$. Sea ahora $F = \bigcup_{j=1}^k F_j$ un elemento de $\mathcal{R}$, entonces definimos su medida $\mu(F) = \mu(E_F) = \sum_{l=1}^s \mu(E_{i_l}^{n_l})$, donde los $E_{i_l}^{n_l}$ son disjuntos entre sí. Observemos que esto implica en particular que la medida de una unión finita de intervalos cerrados disjuntos entre sí es la suma de las medidas de los intervalos.

Como ya hemos comentado anteriormente, no existe un único E_F para cada F , por lo que podemos preguntarnos si la medida de F tal y como la hemos definido depende del E_F escogido. Consideremos un $E_F = \bigcup_{l=1}^s E_{i_l}^{n_l}$ cualquiera y E^F , que es único. Supongamos que $\mu(E_F) \neq \mu(E^F)$. Esto implica que hay un intervalo cerrado E_i^j de la definición de E^F dada por la ecuación (A.2) tal que la suma de las medidas de los $E_{i_l}^{n_l}$ de E_F contenidos en él es menor que su medida, por

²Estos intervalos cerrados $E_{ij}^{n_j}$ no tienen porqué ser del mismo nivel, siempre y cuando cumplan la condición de que no queden intervalos cerrados contenidos en el complementario.

un $\epsilon > 0$. Entonces existe un $n > \max\{n_l\}_{l=1}^s$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, lo que implica que existe un $E_p^n \subseteq E_i^j \setminus E_F$. Pero esto no es posible, ya que entonces tendríamos un intervalo cerrado completamente contenido en $F \setminus E_F$. Por tanto, $\mu(E^F) = \mu(E_F)$, con lo que queda probado que, aunque podamos considerar distintos E_F , su medida es siempre la misma, y $\mu(F)$ está bien definido.

Veamos que la función $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ cumple las propiedades de una medida. En primer lugar, se tiene que no es la función constante igual a $+\infty$. Antes de probar la segunda propiedad para el caso general, supongamos que tenemos la unión numerable de intervalos abiertos U_i^n . Se tiene que sus medidas son todas 0, y que la medida de su unión es también 0, puesto que no contiene ningún intervalo cerrado. Luego la unión numerable de intervalos abiertos U_i^n cumple la segunda propiedad.

Ahora, dado $\hat{F} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_m$ la unión disjunta de elementos $F_m \in \mathcal{R}$, si $\hat{F} \in \mathcal{R}$, entonces existe un $E^{\hat{F}}$, que es unión disjunta de intervalos cerrados, está contenido en F , y tal que $F \setminus E^{\hat{F}}$ tiene intersección vacía con cualquier intervalo cerrado de $\mathcal{E}$. Supongamos que $E^{\hat{F}} = \bigcup_{l=1}^s E_{i_l}^{n_l}$. Entonces

$$\mu(\hat{F}) = \mu(E^{\hat{F}}) = \sum_{l=1}^s \mu(E_{i_l}^{n_l}) \quad (\text{A.3})$$

Por otra parte, para cada F_m podemos encontrar un E_{F_m} , de forma que, como todo intervalo cerrado contenido en $\hat{F}$ está contenido en $E^{\hat{F}}$, tenemos que $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{F_m} \subseteq E^{\hat{F}}$. Consideremos ahora $H_{ml} = E_{F_m} \cap E_{i_l}^{n_l}$ para cada m y l , que son disjuntos por ser los F_m y los $E_{i_l}^{n_l}$ disjuntos, tenemos que

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_{ml} \subseteq E_{i_l}^{n_l} \text{ para cada } l, \text{ y } \bigcup_{l=1}^s H_{ml} = E_{F_m} \text{ para cada } m$$

Además, todo punto de $\mathcal{C} \cap E_{i_l}^{n_l}$ se encuentra³ en la unión de los H_{ml} , con lo que cualquier intervalo cerrado contenido en $E_{i_l}^{n_l}$ tiene intersección no vacía con $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_{ml}$. Por otra parte, tenemos que cada H_{ml} es la unión finita de intervalos cerrados disjuntos E_i^n , con lo que, fijado l , podemos escribir $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_{ml}$ como la unión numerable de intervalos cerrados, $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} E_{i_\alpha}^{n_\alpha}$. Veamos que, para cada l , se tiene que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) = \mu(E_{i_l}^{n_l})$$

En primer lugar, tenemos que $\mu(E_{i_l}^{n_l}) = 2^{-n_l}$. Por otra parte, $\mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) = 2^{-n_\alpha}$. Recordemos que para cada n_β y n_γ , con $n_\gamma \leq n_\beta$ hay $2^{n_\beta - n_\gamma}$ intervalos cerrados $E_i^{n_\beta}$ en $E_i^{n_\gamma}$.

Supongamos que $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) < \mu(E_{i_l}^{n_l})$. Deducimos entonces que existe un $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) = \mu(E_{i_l}^{n_l})$, y una familia $\{E_{i_\beta}^{n_\beta}\}_{\beta \in N}$, con $N \subseteq \mathbb{N}$ no vacío, tal que $E_{i_\beta}^{n_\beta}$ está contenido en $E_{i_l}^{n_l}$ pero no está contenido en la unión de los H_{ml} para todo $\beta \in N$, y $\sum_{\beta \in N} \mu(E_{i_\beta}^{n_\beta}) < \epsilon$. Pero esto no es posible, ya que implica que existe algún intervalo cerrado contenido en $E_{i_l}^{n_l} \setminus (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_{ml})$, esto es, en $E_{i_l}^{n_l} \setminus (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{F_m})$, y por tanto, en $\hat{F} \setminus (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{F_m})$. Por tanto, $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) \geq \mu(E_{i_l}^{n_l})$.

³Estos puntos son relevantes porque son, en cierto sentido, los que tienen la medida del intervalo. Esto se debe a que todo punto del intervalo cerrado E_i^n que no esté en $\mathcal{C}$ está en algún abierto U_i^n , cuya medida es nula. Así, como los puntos que se encuentran en uno de esos intervalos abiertos no pertenecen a $\mathcal{C}$, y el complementario de $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_{ml}$ en $E_{i_l}^{n_l}$ es una unión de intervalos abiertos, todos los puntos de $\mathcal{C}$ en $E_{i_l}^{n_l}$ están en $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_{ml}$.

Por otro lado, tenemos que $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha})$ no puede ser mayor que $\mu(E_{i_l}^{n_l})$. Supongamos $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) = \mu(E_{i_l}^{n_l}) + \epsilon$, con $\epsilon > 0$. Esto implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_ε tal que

$$\left| \sum_{\alpha=1}^n \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) - \mu(E_{i_l}^{n_l}) - \epsilon \right| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. En particular, para $\varepsilon = \epsilon$ existe un n_ϵ tal que

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{n_\epsilon} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) - \mu(E_{i_l}^{n_l}) - \epsilon \right| < \epsilon$$

Como hemos visto antes, la suma finita de las medidas de intervalos cerrados contenidos en otro más grande es menor que la medida de éste último, con lo que

$$-\sum_{\alpha=1}^{n_\epsilon} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) + \mu(E_{i_l}^{n_l}) + \epsilon < \epsilon \Rightarrow \mu(E_{i_l}^{n_l}) < \sum_{\alpha=1}^{n_\epsilon} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha})$$

lo que no es posible. Así, concluimos que $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) = \mu(E_{i_l}^{n_l})$.

Ahora, partiendo de la ecuación (A.3), tenemos que

$$\mu(\hat{F}) = \sum_{l=1}^s \mu(E_{i_l}^{n_l}) = \sum_{l=1}^s \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \mu(E_{i_\alpha}^{n_\alpha}) \stackrel{(*)}{=} \sum_{l=1}^s \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(H_{ml}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{l=1}^s \mu(H_{ml})$$

donde en la igualdad (*) hemos tenido en cuenta que cada H_{ml} es la unión finita de $E_{i_\alpha}^{n_\alpha}$. De esta manera,

$$\mu(\hat{F}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{l=1}^s \mu(H_{ml}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{l=1}^s H_{ml}\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(E_{F_m}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(F_m)$$

ya que $\bigcup_{l=1}^s H_{ml} = E_{F_m}$ para cada m , y tenemos que $\mu(\bigcup_{l=1}^s H_{ml}) = \sum_{l=1}^s \mu(H_{ml})$. Así, μ cumple las propiedades de medida sobre el anillo $\mathcal{R}$.

Como μ cumple las propiedades de una medida, podemos utilizar el lema A.8 para extender la medida a una medida μ^* en el anillo $\mathcal{H}(\mathcal{R})$. Observemos que $\mathcal{H}(\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, ya que $\mathbb{R} \in \mathcal{R}$. De esto se sigue que $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ es una σ -álgebra, y entonces μ^* es una función que cumple las propiedades de una medida sobre una σ -álgebra, por lo que es $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu^*)$ es un espacio de medida. Podemos ver que esta medida μ^* es una medida concentrada en $\mathfrak{C}$, puesto que $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{C}$ es la unión infinita de los $\mathbb{R} \setminus A_n$, que tienen medida 0.