



*Facultad  
de  
Ciencias*

**SUPERFICIES DE CURVATURA  
CONSTANTE**  
(CONSTANT CURVATURE  
SURFACES)

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al  
**GRADO EN MATEMÁTICAS**

**Autor: Diego Calderón Barreda**

**Director: Fernando Etayo Gordejuela**



## Resumen

La noción de curvatura de una superficie es un curioso concepto el cual no posee una definición única. Dependiendo de qué aspectos se quieran trabajar relacionados con una superficie interesará usar una definición u otra; las más extendidas en la literatura son la de Gauss y la media. En esta memoria se estudiarán superficies de curvatura de Gauss y media constantes, mostrando clasificaciones y diferentes ejemplos de cada tipo. Esto servirá como un viaje por la historia de la búsqueda de este tipo de superficies. También se tratan conceptos de geometría intrínseca y extrínseca, introduciendo interesantes resultados como la curvatura de Casorati, las conjeturas de Hopf y Willmore y el teorema de inmersión de Nash.

**Palabras clave:** superficies de curvatura constante, curvatura de Gauss, curvatura media, curvatura de Casorati, conjetura de Hopf, conjetura de Willmore, teorema de inmersión de Nash.

## Abstract

The notion of a surface's curvature is an intriguing concept that doesn't have an unique definition. Depending on which aspects related to surfaces you are interested in you'll have to use one definition or another; the most frequent ones are the Gaussian and mean curvatures. In this work constant Gaussian and mean curvature surfaces will be studied, showing classifications and different examples of each type. This will work as a trip through the history of the search of these types of surfaces. Concepts of intrinsic and extrinsic geometry will also be tackled, introducing interesting notions like Casorati's curvature, Hopf and Willmore conjectures and Nash embedding theorem.

**Key words:** constant curvature surfaces, Gaussian curvature, mean curvature, Casorati curvature, Hopf conjecture, Willmore conjecture, Nash embedding theorem.



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Las nociones de superficie y de curvatura</b>                   | <b>9</b>  |
| 1.1. Curvas . . . . .   | 9         |
| 1.2. Superficies . . . . .  | 11        |
| 1.3. Formas fundamentales . . . . .                                   | 12        |
| 1.3.1. La primera forma fundamental . . . . .                         | 12        |
| 1.3.2. La segunda forma fundamental . . . . .                         | 13        |
| 1.3.3. Ecuaciones de Gauss y de Weingarten . . . . .                  | 13        |
| 1.4. Curvatura media y de Gauss . . . . .                             | 14        |
| 1.4.1. Curvatura normal y geodésica de una curva . . . . .            | 14        |
| 1.4.2. Curvatura media y de Gauss de una superficie . . . . .         | 16        |
| <b>2. Superficies de curvatura de Gauss constante</b>                 | <b>19</b> |
| 2.1. Superficies de revolución . . . . .                              | 19        |
| 2.2. Superficies de curvatura de Gauss positiva . . . . .             | 21        |
| 2.3. Superficies de curvatura de Gauss nula . . . . .                 | 24        |
| 2.4. Superficies de curvatura de Gauss negativa . . . . .             | 26        |
| <b>3. Superficies de curvatura media constante</b>                    | <b>29</b> |
| 3.1. Superficies minimales . . . . .                                  | 29        |
| 3.1.1. Regladas . . . . .   | 29        |
| 3.1.2. De revolución . . . . .  | 30        |
| 3.1.3. Otros casos . . . . .  | 30        |
| 3.2. Superficies CMC . . . . .  | 31        |
| 3.2.1. Superficies de revolución. Clasificación de Delaunay . . . . . | 31        |
| 3.2.2. Representación de Weierstrass . . . . .                        | 34        |
| 3.2.3. Conjetura de Hopf. Toros de Wente . . . . .                    | 36        |
| <b>4. Curvaturas intrínsecas y extrínsecas</b>                        | <b>39</b> |
| 4.1. Curvatura de Casorati . . . . .                                  | 39        |
| 4.2. Conjetura y energía de Willmore . . . . .                        | 42        |
| 4.3. Inmersiones isométricas: teorema de Nash . . . . .               | 43        |



# Introducción

El estudio en la geometría de las curvas y superficies tiene una larga historia. Los desarrollos de la curvatura de superficies fueron una ardua tarea para grandes matemáticos a lo largo de la historia debido a su nada trivial formulación.

Así como la curvatura de una curva en uno de sus puntos es fácilmente, a partir de la introducción del cálculo diferencial, introducible e imaginable, siendo ésta el inverso del radio de curvatura de la circunferencia que más se parece a la curva en el punto, el concepto para superficies no es tan claro ni natural.

Por un punto de una superficie pasan infinitas curvas contenidas en ella. Esto puede llevar a realizar una pregunta, ¿es la curvatura de la superficie la de una de estas curvas? Y si lo es, ¿de cuál de todas las curvas lo es y por qué?

La respuesta es ahora bien conocida: no existe un equivalente a la circunferencia oscultriz para superficies. Este hecho se conoce desde los tiempos de J.P. Meusnier (1754-1793) que demostró en 1776 la existencia de una esfera que es la que se aproxima más a la superficie en un punto para cada dirección del plano tangente que se tome. Hubo que esperar hasta que Gauss introdujera la ahora llamada curvatura de Gauss para conocer una noción de curvatura en cada punto de una superficie que fuera invariante por isometrías, a pesar de que Euler ya conocía las curvaturas normales en cualquier dirección en función de las principales y de que en la segunda mitad del siglo XVIII ya se trabajara con la curvatura media. La curvatura de Gauss y la curvatura media son las nociones de curvatura intrínseca y extrínseca más estudiadas, aunque no las únicas. Dichas curvaturas podrán llegar a ser contraintuitivas: por ejemplo hay superficies como un cilindro circular con curvatura de Gauss nula que aparentemente, para la persona media, sí que se curvan. Lo mismo ocurre con ejemplos como el catenoide de curvatura media nula que nuevamente parece que sí se curvan. Esto lleva a Casorati (1835-1890) a introducir su curvatura que es nula únicamente cuando la superficie es un plano.

El estudio de superficies de curvatura constante no es sencillo y su complejidad varía dependiendo de qué curvatura se considere. Al considerar superficies de curvatura de Gauss positiva es necesario tener en cuenta el teorema egregium de Gauss (1827) y el teorema de Minding (1839) que afirman que la curvatura de Gauss se conserva por isometrías y que superficies de curvatura de Gauss constante de mismo valor son localmente isométricas. Esto permite clasificar dichas superficies mediante el signo de su curvatura.

En la misma época Delaunay (1816-1872) introdujo su clasificación de superficies de revolución de curvatura media constante (1841), las superficies de Delaunay. Más adelante, en 1863, Weierstrass (1815-1897) introdujo una forma de describir superficies minimales a partir de funciones complejas.

En esta memoria se tratarán superficies de curvatura constante considerando principalmente la curvatura de Gauss y la media. La estructura de este trabajo es de cuatro capítulos.

El capítulo 1 sirve como introducción a toda la notación y conceptos de curvaturas y superficies necesarias para el tratamiento del tema. Se introducen diversos resultados con la visión del tema que se trata y que ayudarán en el tratamiento de superficies de curvatura constante. Principalmente se exponen resultados ya tratados durante el grado, salvo lo que se refiere a las esferas de Meusnier.

En el capítulo 2 ya se entra en materia y se tratan superficies de curvatura de Gauss constante. Lo primero se exponen algunos resultados sobre superficies de revolución ya que, como se verá, calcular las diferentes curvaturas de estas superficies es relativamente sencillo. Una vez se han tratado estas se procede a realizar el estudio de las superficies separándolas en tres casos dependiendo del signo que tome la curvatura. Así en cada sección se introducen primero las superficies de revolución con curvatura de tal signo y luego otras superficies más generales.

El capítulo 3 trata las superficies de curvatura media constante. En este se hace una separación entre que el valor de la curvatura media sea nula, i.e. superficies minimales, o no. Las superficies minimales han sido bastante estudiadas y se expondrán resultados generales para ellas. En el caso de superficies de curvatura media no nula se exponen nuevamente las superficies de revolución que fueron estudio de Delaunay. Se expone la representación de Weierstrass que se introduce como medio de definir superficies minimales a partir de funciones complejas, pero que luego da paso a la creación de representaciones similares para otras superficies de curvatura media constante no nula. Finalmente se presenta la conjetura de Hopf (1931) que ponía límite a las superficies compactas de curvatura media constante hasta que se probó falsa, mediante la descripción del toro de Wente en 1986, por parte de H.C. Wente (1936-2020).

Finalmente el capítulo 4 trata los conceptos de curvatura de una superficie en general. Se realiza un comentario sobre las relaciones entre curvaturas intrínsecas y extrínsecas. Se da paso a la curvatura de Casorati, que se introduce por dicho matemático como el concepto más natural de curvatura, y se expone aquí la manera de llegar a la formulación de dicha curvatura. Luego se trata la energía de Willmore que, informalmente, mide cuánto se separa una superficie de ser una esfera. El último tema tratado son las inmersiones isométricas cuya existencia viene afirmada por el teorema de Nash (1966).

# Capítulo 1

## Las nociones de superficie y de curvatura

Este trabajo, como el nombre indica, trata sobre superficies de curvatura constante. El concepto de curvatura de una superficie no es un concepto trivial y han sido necesarios siglos de desarrollo matemático, concretamente de la Geometría Diferencial, para su introducción. Por esta razón es necesario introducir una base teórica partiendo de resultados más elementales sobre curvas hasta construir conceptos relacionados con superficies.

Este capítulo trata definiciones básicas y resultados que pueden tomarse de una gran parte de los libros de geometría diferencial. En concreto se han usado como guías principales el manual *Geometría Diferencial* de M. Lipschutz [14] y el libro de R.S. Millman y G.D. Parker *Elements of Differential Geometry* [21] salvo indicación. Los resultados aquí presentes han sido, en su mayoría, tratados a lo largo del grado y por tanto sus demostraciones no se incluyen. Aquellos de los cuales sí se incluye la demostración son temas no tratados durante el grado.

### 1.1. Curvas

La primera tarea que se propone es introducir la definición de curva regular, para ello se parte de la idea de representaciones.

**Definición 1.1.** 1. Se denomina **representación paramétrica regular** a una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $I$  un intervalo que cumple

1.  $f(t)$  es de clase  $C^1$  en  $I$ .
2.  $f'(t) \neq 0$  para todo  $t$  en  $I$

2. Se denomina **cambio admisible de parámetro** a una función  $t : I_1 \rightarrow I_2$  con  $I_1, I_2$  intervalos que cumple

1.  $t(\theta)$  es de clase  $C^1$  en  $I_1$ .
2.  $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$  para todo  $\theta$  en  $I_1$

3. Una **representación regular**  $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es **equivalente a otra representación**  $g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si existe un cambio admisible de parámetros  $t : I_1 \rightarrow I_2$  con  $I_1$  tal que  $t(I_1) = I_2$  y  $f(t(\theta)) = g(\theta)$ .

Es fácil ver que la relación de representaciones equivalentes es una relación de equivalencia. El hecho de que sea relación de equivalencia permite definir el concepto de curva regular como:

**Definición 1.2.** Se dice **curva regular** a una clase de equivalencia de las representaciones paramétricas regulares.

Una vez se tiene la noción de curva bien definida el siguiente paso es comenzar a introducir diferentes conceptos relacionados con la curva.

**Definición 1.3.** Se llama **parametrización natural** a una parametrización regular  $f = f(s)$  con  $\|f'(s)\| = 1$ .

El concepto de parametrización natural será de mucha utilidad a la hora de estudiar distintas propiedades de una curva puesto que hemos definido una curva como la clase de equivalencia de las representaciones paramétricas regulares. Veremos más adelante que a la hora de enunciar propiedades y ecuaciones para distintos conceptos es más sencillo hacerlo para curvas de parámetro natural. El teorema 1.4 es un resultado importante ya que dice que una curva regular cualquiera admite una parametrización natural.

**Teorema 1.4.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular y  $t_0 \in I$  entonces  $s : I \rightarrow \text{im}(s)$  definida por  $s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{df}{dx} \right\| dx$  es un cambio admisible de parámetro y se cumple  $\left\| \frac{df}{ds} \right\| = 1$ .

El resultado muestra el cambio de parámetro que está dado por una integral que no en todos los casos es fácilmente calculable. Con esto se expresarán conceptos partiendo de una parametrización natural pero se indicarán también sus ecuaciones para un parámetro cualquiera.

A continuación se define una serie de vectores y rectas relacionados con la curva y con los que estamos familiarizados.

**Definición 1.5.** 1. Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva con parámetro cualquiera se llama **vector tangente** a la curva en el punto  $t \in I$  a  $\vec{t}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ .

2. La recta que pasa por el punto  $f(t)$  y tiene como vector director el vector tangente se denomina **recta tangente**.

3. Si la curva  $f$  está parametrizada de modo natural se denomina **vector de curvatura** en el punto  $f(t)$  a  $\vec{k}(t) = f''(t)$  y su módulo se denomina **curvatura** y se denota  $k(t)$ . Se define el **vector normal** como el vector de curvatura unitario,  $\vec{n}(t) = \frac{\vec{k}(t)}{k(t)}$ . Si la curvatura es nula en un punto entonces no existe el vector normal en dicho punto.

4. La recta que pasa por el punto  $f(t)$  y tiene como vector director el vector normal se denomina **recta normal**.

5. Si  $f$  está parametrizada de modo natural entonces se denomina **vector binormal** en el punto  $f(t)$  a  $\vec{b}(t) = \vec{t}(t) \times \vec{n}(t)$ . Si la curvatura es nula en un punto no existe el vector binormal en dicho punto.

6. La recta que pasa por el punto  $f(t)$  y tiene como vector director el vector binormal se denomina **recta binormal**.

En la definición 1.5 se enumeran las expresiones para el caso de una curva parametrizada de modo natural salvo en el caso del vector tangente. Como se ha comentado anteriormente, debido a la dificultad que supone en determinados casos el cálculo explícito del cambio de parámetro a parámetro natural, es de interés conocer las expresiones para curvas parametrizadas de forma cualquiera.

**Teorema 1.6.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización regular cualquiera, se tiene que:

1. el vector binormal en el punto  $f(t)$  viene dado por  $\vec{b}(t) = \frac{f'(t) \times f''(t)}{\|f'(t) \times f''(t)\|}$ .

2. el vector normal en el punto  $f(t)$  viene dado por  $\vec{n} = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t)$ .

3. el vector de curvatura en el punto  $f(t)$  viene dado por  $\vec{k}(t) = k(t)\vec{n}$  donde  $k(t)$  es la curvatura en el punto y viene dada por  $k(t) = \frac{\|f'(t) \times f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$ .

Una vez se han introducido todos estos conceptos para cualquier parametrización de una curva interesa introducir la nomenclatura que se da a los planos que definen los diferentes pares de rectas.

**Definición 1.7.** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva de parámetro cualquiera, se define:

1. el **plano normal** en un punto al que definen las rectas normal y binormal en dicho punto.
2. el **plano osculador** en un punto al que definen las rectas normal y tangente en dicho punto.
3. el **plano rectificante** en un punto al que definen las rectas binormal y tangente en dicho punto.
4. se denomina **circunferencia osculatriz** en un punto  $f(t)$  a la circunferencia contenida en el plano osculador centro en  $c(t) = f(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\vec{n}(t)$  y radio de curvatura el inverso de la curvatura.

El conjunto de los tres planos se denomina **triedro de Frenet** y la base  $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  se denomina **referencia móvil de Frenet**.

La circunferencia osculatriz en un punto se puede ver como la circunferencia que más se asemeja a la curva en dicho punto y la curvatura de la curva es el inverso del radio de dicha circunferencia.

Se ve que la referencia móvil de Frenet es una base ortonormal positivamente orientada. Esta ayuda en el estudio del comportamiento de la curva en un entorno del punto, es decir, en el estudio de la geometría local. Se entenderá que los puntos tienen curvatura distinta de cero, con lo que admiten la referencia móvil de Frenet.

**Definición 1.8.** Si partimos de una curva de parámetro natural  $f$ , usando la referencia móvil de Frenet podemos escribir  $\vec{b}'(t) = -\tau(t)\vec{n}(t)$  donde la función  $\tau(t)$  se denomina **torsión** de la curva en el punto  $f(t)$ .

**Teorema 1.9.** Si  $f$  es una curva de parámetro cualquiera la torsión viene dada por  $\tau(t) = \frac{[f'(t), f''(t), f'''(t)]}{\|f'(t) \times f''(t)\|^2}$ .

Recapitulando, se ve que la curvatura de una curva es una forma de medir cuánto se aleja dicha curva de ser una recta, ya que  $k \equiv 0$  si, y sólo si, la curva es una recta.

Una curva se dice **plana** si está contenida en un plano, en caso contrario se dice **alabeada**. La torsión sirve para ver cuanto se aleja una curva de ser plana, ya que  $\tau \equiv 0$  si, y sólo si, la curva es plana.

Una curva está unívocamente determinada, salvo transformaciones en el espacio, por la curvatura y la torsión, esto se ve en el siguiente resultado.

**Teorema 1.10** (Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas [6, pg. 33]). Sean  $k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  y  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones diferenciables con  $I$  un intervalo abierto. Existe una curva regular parametrizada de modo natural,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , única salvo movimientos en el espacio tal que  $k(s)$  y  $\tau(s)$  son la curvatura y la torsión en el punto  $f(s)$  con  $s \in I$ .

## 1.2. Superficies

Una vez se han introducido los conceptos de curvas se puede dar el salto a las superficies. Una superficie simple se puede ver como una deformación diferenciable de un abierto del plano, lo que se expresa formalmente en la definición 1.11.

**Definición 1.11.** Se llama **superficie simple** a toda aplicación diferenciable  $C^\infty$  de un abierto  $S \subset \mathbb{R}^2$  que cumple

1.  $f_u \times f_v \neq \vec{0}$  en todo punto de  $U$ .
2.  $f : U \rightarrow f(U)$  es homeomorfismo, esto es biyectiva, continua y de inversa continua.

Cuando se tratan las superficies hay ciertos conceptos que interesa trasladar de las curvas a las superficies. Por ejemplo, para una superficie simple se puede definir el **vector normal** en un punto como  $\vec{N} = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}$ , la **recta normal** en el punto es aquella que tiene dicho vector como director y pasa por el punto y el **plano tangente** en dicho punto es el plano perpendicular al vector normal y que pasa por el punto.

La definición 1.11 no abarca todas las superficies, hay algunas superficies que no tienen tan buen comportamiento como las simples y por tanto es necesario introducir otro concepto más amplio que las abarque, estas son las superficies regulares.

**Definición 1.12.** Un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una **superficie regular** si, para cada  $p \in S$ , existe un entorno  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación  $x : U \rightarrow V \cap S$  de un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que se llama **superficie simple** a toda aplicación diferenciable  $C^\infty$  de un abierto  $S \subset \mathbb{R}^3$  que cumple:

1. Para todo  $p \in S$  existen  $U \subset \mathbb{R}^2$  abierto, una aplicación  $f$  y  $V = f(U)$  entorno abierto de  $p$  en  $S$ , tal que  $f : U \rightarrow V$  es una superficie simple denominada **parametrización local**.
2. Para cada par de superficies simples  $f : U \rightarrow V \subset S$  y  $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow \bar{V} \subset S$  con  $V \cap \bar{V} \neq \emptyset$  resulta que

$$(\bar{f}^{-1} \circ f) : f^{-1}(V \cap \bar{V}) \rightarrow \bar{f}^{-1}(V \cap \bar{V})$$

es un difeomorfismo de un abierto de  $\mathbb{R}^2$  en otro abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

Es de interés tratar los conceptos sobre superficies simples visto antes de la definición a superficies regulares. Una superficie regular es localmente una superficie simple, por tanto bastaría ver que ocurre con estos conceptos si se cambia la parametrización. Sea una superficie regular  $S$  entonces para un punto  $p \in S$  el vector normal depende de la parametrización puesto que si tenemos  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones locales entonces  $\bar{f}_u \times \bar{f}_v = \det(J_\varphi)(f_u \times f_v)$  donde  $\varphi : \bar{U} \rightarrow U$  es un difeomorfismo con  $\bar{f} = f \circ \varphi$  luego  $\vec{N} = \pm \vec{\bar{N}}$ . Sin embargo, es claro ver que la recta normal y plano tangente están unívocamente definidos independientemente de la parametrización.

Es natural plantearse si existe un concepto similar a la circunferencia oscultriz para superficies, quizá la de una esfera que sea la que más se parezca a la superficie en un punto. Dicho concepto se tratará más adelante y se verá por qué no existe.

### 1.3. Formas fundamentales

Una vez ya están definidas las nociones de superficie, es necesario introducir una manera de poder dar ecuaciones a las curvaturas, que se recuerda es el tema que incumbe este trabajo. Gracias al teorema fundamental de la teoría de curvas una curva queda unívocamente determinada por su curvatura y torsión. Esto da sentido a introducir la primera y la segunda forma fundamental que determinan inequívocamente las superficies como se verá en el teorema fundamental de superficies, el teorema 1.20.

#### 1.3.1. La primera forma fundamental

La primera forma fundamental es la restricción del producto escalar al plano tangente a la superficie, formalmente se ve como

**Definición 1.13.** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie simple,  $p = f(u_0, v_0)$  un punto de la superficie y  $T_p$  el plano tangente a la superficie en el punto. Se llama **primera forma fundamental** de la superficie en  $p$  a la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} g : T_p \times T_p &\longrightarrow T_p \\ (X, Y) &\longmapsto X \cdot Y \end{aligned}$$

Si se denotan las coordenadas de los vectores  $X = (X^1, X^2)$  e  $Y = (Y^1, Y^2)$  en la base  $\{f_u, f_v\}$  tenemos

$$g(X, Y) = X \cdot Y = (X^1, X^2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} X^i Y^j$$

con  $g_{ij} = f_{u_i} \cdot f_{u_j}$  donde  $f_{u_1} = f_u(u_0, v_0)$  y  $f_{u_2} = f_v(u_0, v_0)$ .

**Observación 1.14.**  $g$  es simétrica y definida positiva.

*Demostración.* Trivialmente vemos que es simétrica puesto que lo es el producto escalar. Para ver que es definida positiva basta ver que el determinante es positivo. Usando el método de ortogonalización de Gramm-Schmidt obtenemos una base en la que  $g$  es la identidad y la matriz cambio de base es  $A$  y así  $g = A \cdot I \cdot A^t$

$$\det(g) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \det(A \cdot I \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(I) \cdot \det(A^t) = \det(A)^2 > 0$$

□

A una propiedad que se puede formular a partir de la primera forma fundamental y de sus derivadas se le dice **concepto intrínseco**.

### 1.3.2. La segunda forma fundamental

La segunda forma fundamental, por otro lado, mide como está inmersa la superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición 1.15.** Sean  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie simple,  $p = f(u_0, v_0)$  un punto de la superficie,  $T_p$  el plano tangente a la superficie en  $p$  y  $\vec{N}$  el vector normal a la superficie en  $p$ . Se llama segunda forma fundamental de la superficie en  $p$  a la aplicación bilineal

$$L : T_p \times T_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \mapsto L(X, Y) = (X^1, X^2) \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} X^i Y^j$$

donde los vectores  $X = (X^1, X^2)$  e  $Y = (Y^1, Y^2)$  están representados en la base  $\{f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0)\}$  de  $T_p$  y  $L_{ij} = f_{u_i u_j} \cdot \vec{N}$ .

La segunda forma fundamental  $L$  es bilineal simétrica puesto que  $f_{u_i u_j} = f_{u_j u_i}$  al ser  $f$   $C^\infty$  y con ello  $L_{ij} = f_{u_i u_j} \cdot \vec{N} = f_{u_j u_i} \cdot \vec{N} = L_{ji}$ .

Una vez se han introducido estos conceptos es de interés expresar los términos en función de la base  $\{f_u, f_v, \vec{N}\}$  y para ello se introducen las ecuaciones de Gauss y de Weingarten.

### 1.3.3. Ecuaciones de Gauss y de Weingarten

Las ecuaciones de Gauss expresan las derivadas segundas  $f_{uu}, f_{vv}, f_{uv} = f_{vu}$  respecto de la base  $\{f_u, f_v, \vec{N}\}$  mientras que las de Weingarten lo hacen sobre las derivadas  $\vec{N}_u, \vec{N}_v$

**Teorema 1.16.** Las ecuaciones de Gauss vienen dadas por  $f_{u_j u_i} = \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l f_{u_l} + L_{ij}$  donde  $\Gamma_{ij}^l$  son los símbolos de Christoffel que se expresan como

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g^{kl} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} \right)$$

Cuando se realiza el procedimiento hacia las ecuaciones de Weingarten se llega a una aplicación, la aplicación de Weingarten, que cobra importancia posteriormente.

**Definición 1.17.** Se denomina **aplicación de Weingarten** a la aplicación lineal  $\mathcal{L} : T_p \rightarrow T_p$  con  $\mathcal{L} = g^{-1}L$  y matriz  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{pmatrix}$  en la base  $\{f_u, f_v\}$ .

Partiendo de la aplicación de Weingarten se llega a las ecuaciones de Weingarten.

**Teorema 1.18.** Las **ecuaciones de Weingarten** vienen dadas por  $\vec{N}_{u_i} = \beta_i^1 f_u + \beta_i^2 f_v$  donde  $\beta_i^j = -L_i^j$  de la aplicación de Weingarten.

Como se ha comentado previamente, existe un resultado equivalente al teorema fundamental de curvas pero para superficies. Antes de introducir ese teorema es necesario incluir algunas expresiones y notación usada en el mismo.

**Definición 1.19.** Con las notaciones precedentes, se llama **tensor de curvatura de Riemann** a:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial u^k} + \sum_m \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l$$

Y se tiene que se verifican las siguientes relaciones:

$$R_{ijk}^l = L_{ik} L_j^l - L_{ij} L_k^l$$

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j} = \sum_l (\Gamma_{ik}^l L_{lj} - \Gamma_{ij}^l L_{lk})$$

Estas ecuaciones se denominan, respectivamente, segundas ecuaciones de Gauss y ecuaciones de Codazzi-Mainardi. Ahora ya se tienen las herramientas para introducir el teorema fundamental que se busca.

**Teorema 1.20** (Teorema Fundamental de Superficies [6, pg. 240]). Sea  $U \subset \mathbb{R}^2$  conexo y sean  $L_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables para  $i, j \in \{1, 2\}$  tales que:

1.  $L_{12} = L_{21}$ ,  $g_{12} = g_{21}$ ,  $g_{11} > 0$ ,  $g_{22} > 0$ ,  $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} > 0$  para todo punto en  $U$ .
2.  $L_{ij}$ ,  $g_{ij}$  satisfagan las ecuaciones segundas de Gauss y las ecuaciones de Codazzi-Mainardi.

Sea  $p \in U$ . Entonces existen un abierto  $V$  de  $p$ , con  $V \subset U$ , y una superficie simple  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  de modo que  $(g_{ij})$ ,  $(L_{ij})$  son su primera y segunda forma fundamentales. Más aún, si existiera otra superficie simple,  $h$ , en tales condiciones se puede pasar de  $f(V)$  a  $h(V)$  mediante una isometría de  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora ya se está en condiciones de empezar a tratar el concepto de curvatura de una superficie.

## 1.4. Curvatura media y de Gauss

Históricamente el concepto de curvatura de una superficie ha de esperar a que Gauss (1777-1855) introduzca la curvatura de Gauss en 1827. En esta sección se introducen los conceptos de curvatura normal y geodésica en una curva con el fin de poder describir la curvatura normal.

### 1.4.1. Curvatura normal y geodésica de una curva

Si se tiene una curva parametrizada de modo natural  $\gamma = \gamma(s)$  se puede escribir  $\gamma = f(h_1(s), h_2(s))$  con  $h : I \rightarrow U$  donde  $I$  es un intervalo y  $U \in \mathbb{R}^2$  un abierto. El vector tangente se puede escribir, aplicando la regla de la cadena, como

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial s} \\ \frac{\partial h_2}{\partial s} \end{pmatrix}$$

El vector de curvatura  $\vec{k}$  es perpendicular al tangente  $\vec{t}$  y el normal  $\vec{N}$  lo es a  $T_p$  y por tanto al vector tangente pues está contenido en él. Esto nos permite escribir el vector de curvatura como  $\vec{k} = k_n \vec{N} + k_g \vec{S}$  con  $\vec{S} = \vec{N} \times \vec{t}$  el **vector normal intrínseco**. Se tiene que  $\{\vec{N}, \vec{t}, \vec{S}\}$  forman una base denominada **referencia de Darboux**.

**Definición 1.21.** Las cantidades  $k_n$  y  $k_g$  se denominan **curvatura normal** y **curvatura geodésica** respectivamente.

La curvatura geodésica mide como se dobla la curva vista desde la superficie mientras que la curvatura normal está determinada por como se curva la superficie en sí. La curvatura normal nos dará una idea de como se curva la superficie.

Una curva se denomina **geodésica** si se cumple que  $k_g = 0$ , es decir, si su curvatura geodésica es nula en todos sus puntos.

**Proposición 1.22.** La curvatura normal puede expresarse como

$$k_n = \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} \frac{\partial h_i}{\partial s} \frac{\partial h_j}{\partial s} = L(\vec{t}, \vec{t})$$

En 1785 Meusnier publica la demostración de un importante resultado que muestra que a cada dirección del plano tangente a una superficie en un punto se le asocia una curvatura.

**Teorema 1.23** (Teorema de Meusnier [6, proposición 3.2]). *Si dos curvas en una superficie tienen vectores tangentes proporcionales en un punto, entonces tienen la misma curvatura normal en ese punto.*

Se ve ahora el concepto, paralelo al de circunferencia oscultriz, de esfera que más se parece a una superficie en un punto. Gracias a la expresión  $\vec{k} = k_n \vec{N} + k_g \vec{S}$  se tiene que  $k_n = k \cos \theta$  con  $\theta$  el ángulo que forma el vector de curvatura  $\vec{k}$ , equivalentemente el normal a la curva  $\vec{n}$ , con el vector normal a la superficie  $\vec{N}$  en el punto. Esto permite escribir el radio de curvatura en función del ángulo  $\theta$  que formen de la manera  $R = R_n \cos \theta$ . Gracias al teorema de Meusnier se sabe que el radio de la circunferencia oscultriz de las curvas con dirección tangente  $u$  sólo depende del ángulo, pues  $k_n$  es constante para ellas y por tanto lo es  $R_n$ .

Sea  $S$  una superficie y se considera el plano tangente a ella en un punto  $p$ . Dada una dirección  $u$  del plano tangente se denomina sección normal en la dirección  $u$  a la curva formada al intersecar el plano normal con la superficie. Claramente tiene radio de curvatura  $R = R_n$  pues  $\theta = 0$ . Al intersecar la superficie con un plano que contenga la dirección  $u$  y forme un ángulo  $\theta$  con el vector normal a la superficie se obtendrá una curva con vector tangente en  $p$  en la dirección  $u$ .

Los centros las circunferencias oscultrices de todas las curvas de la superficie que tienen en el punto la misma recta tangente afín se encuentran en el plano ortogonal a la recta tangente y que contiene dicho punto. Concretamente gracias a la relación  $R = R_n \cos \theta$  se ve que se encuentran una circunferencia de radio  $\frac{R_n}{2}$ . Con esto se ve que que todas las circunferencias oscultrices de las curvas de la superficie con dirección tangente  $u$  en  $p$  tienen su circunferencia oscultriz en una esfera [29].

Sea una superficie y considerando la sección normal en  $p$  en la dirección  $u$ . Tomando la circunferencia oscultriz de dicha curva en  $p$ , de radio  $R_n$  y la esfera que posee dicha circunferencia como círculo máximo, entonces se define esta como la **esfera de Meusnier**  $M_u$  para la superficie en un punto y una dirección.

Se podría pensar que esto sirve para introducir la curvatura en superficies, pero es fácil ver que esto no es posible puesto que la esfera de Meusnier no es única, depende de la dirección de la curva en el punto que se tome. Basta ver el ejemplo del paraboloide hiperbólico  $z = x^2 - y^2$  en el origen. Si se toma la dirección del eje  $x$  obtendremos una esfera a un lado de la superficie y si se toma la dirección del eje  $y$  se tiene la esfera al otro lado.

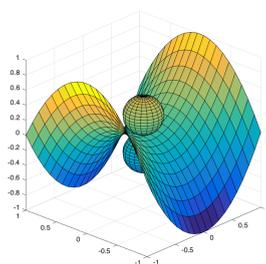


Figura 1.1: Representación gráfica del paraboloides hiperbólico y sus esferas de Meusnier en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$ .

En la siguiente sección se verá un caso especial de la esfera de Meusnier para puntos denominados *umbílicos*.

### 1.4.2. Curvatura media y de Gauss de una superficie

Retomando la aplicación de Weingarten,  $\mathcal{L}$ , y la segunda forma fundamental,  $L$ , se pueden introducir importantes conceptos sobre la curvatura de una superficie. Se introducen un par de resultados necesarios para poder introducir las definiciones de curvatura de una superficie que se buscan.

**Teorema 1.24.** *Se verifica la relación  $L(X, Y) = \mathcal{L}(X) \cdot Y = X \cdot \mathcal{L}(Y)$ .*

**Teorema 1.25.** *Sea  $\mathcal{L} : V \rightarrow V$  la aplicación de Weingarten con  $V \subset \mathbb{R}^2$  abierto y  $X, Y \in V$  se verifica*

1. *Existe una base ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  de  $V$  formada por los vectores propios de  $L$  con lo que en esa base se tiene  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$  con  $k_1, k_2$  los valores propios.*
2. *Los vectores unitarios para los que  $L(X, X)$  con  $X \in V$  toma valor máximo/mínimo son los vectores propios de  $L$ .*

Ahora se pueden introducir las definiciones mencionadas.

**Definición 1.26.** 1. *Se dice **curvatura de Gauss** a  $K = \det \mathcal{L}$ .*

2. *Se dicen **curvaturas principales** a  $k_1, k_2$  los valores propios de  $L$ .*

3. *Se dice **curvatura media** a  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ .*

4. *Las rectas vectoriales que general  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  del teorema 1.25 se denominan **direcciones principales**.*

Estos conceptos que se acaban de introducir son los conceptos clave para este trabajo. Gracias al teorema 1.25 todas las curvaturas en un punto están comprendidas entre  $k_1$  y  $k_2$ .

La curvatura de Gauss se puede escribir como  $K = \det(\mathcal{L}) = k_1 \cdot k_2 = \frac{\det L}{\det g}$  ya que en la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  se escribe  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$  y en la base  $\{f_u, f_v\}$  se tiene  $\mathcal{L} = g^{-1}L$ .

Si un punto cumple  $k_1 = k_2$  entonces se dice **umbílico**. Claramente por el hecho de que todas las curvaturas estén comprendidas entre las dos principales se tiene que en todas las direcciones la curvatura es constante. Recordando los resultados de las esferas de Meusnier, en este caso las esferas de Meusnier coinciden para todas las direcciones. Esto se debe a que para toda dirección

la esfera osculatriz tiene radio  $R_n = \frac{1}{k_n}$  y  $k_n = cte$  para toda dirección.

Para acabar este capítulo introductorio se muestran dos importantes resultados de la teoría de superficies, los teoremas de Minding y el egregium Gauss.

**Teorema 1.27** (Teorema de Minding [6, pg. 290]). *Dos superficies cualesquiera con la misma curvatura de Gauss constante son localmente isométricas.*

**Teorema 1.28** (Teorema egregium de Gauss [14, teorema 10.3]). *La curvatura de Gauss es un concepto intrínseco.*

Este resultado será decisivo para determinar las superficies de curvatura de Gauss constante.



## Capítulo 2

# Superficies de curvatura de Gauss constante

En este capítulo se tratarán superficies de curvatura de Gauss constante inmersas en  $\mathbb{R}^3$ . Al tratar superficies de curvatura de Gauss constante interesa separar los casos en tres categorías dependiendo del signo de la curvatura: positiva, nula o negativa. También interesa tratar por separado las superficies de revolución debido, como se verá en la sección correspondiente, a facilidades que presentan a la hora de medir sus curvaturas de Gauss. Para estas se sigue como referencia principal el Millman-Parker [21]. Por todo esto el capítulo se divide en cuatro secciones, una sección introductoria para las superficies de revolución y las correspondientes secciones para cada signo de la curvatura de Gauss. Las secciones de cada caso tienen a su vez distinciones para las superficies de revolución y otros casos.

### 2.1. Superficies de revolución

El interés de buscar las superficies de revolución de curvatura constante es debido al hecho de que los paralelos y meridianos son líneas de curvatura para cualquier superficie de revolución, que facilita la visualización de los resultados esperados. Se comienza recordando el concepto de superficie de revolución.

**Definición 2.1** (Superficie de revolución). *Una **superficie de revolución** es aquella que se forma al rotar una curva plana, la directriz, alrededor de una recta, el eje de rotación. La directriz y el eje de rotación han de ser coplanarios.*

Sea  $\alpha(s) = (r(s), z(s))$  una curva inyectiva de parámetro unidad definida para  $s \in (s_0, s_1)$  un intervalo con  $r(s) > 0$ , condición necesaria para garantizar la diferenciabilidad de la superficie, entonces tenemos que

$$M = \{(r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, z(s)) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, s \in (s_0, s_1)\}$$

es una superficie de revolución.

La condición parámetro natural quiere decir que  $\|\alpha'(s)\| = 1$  con lo que

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \|(r'(s), z'(s))\|^2 = r'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$$

Un cálculo directo permite ver su primera y segunda forma fundamental con respecto a  $s$  y  $\theta$ . Retomando las notaciones de las definiciones de la primera y segunda forma fundamental, respectivamente las definiciones 1.13 y 1.15, se escribe la ecuación de la superficie como  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $U = (s_0, s_1) \times [0, 2\pi)$  con  $f(s, \theta) = (r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, z(s))$ . Se simplifica la notación reescribiendo las componentes sin tener en cuenta las dependencias, se escribe  $r = r(s)$  y  $z = z(s)$  y lo mismo con sus derivadas. Por lo tanto si  $u_1 = s$  y  $u_2 = \theta$  entonces

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_s = (r' \cos \theta, r' \sin \theta, z') \\
f_2 &= f_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \\
f_{11} &= f_{ss} = (r'' \cos \theta, r'' \sin \theta, z'') \\
f_{12} &= f_{s\theta} = (-r' \sin \theta, r \cos \theta, 0) = f_{21} \\
f_{22} &= f_{\theta\theta} = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, 0) \\
\vec{N} &= \frac{f_s \times f_\theta}{\|f_s \times f_\theta\|} = \frac{(-rz' \cos \theta, -rz' \sin \theta, rr')}{\|(-rz' \cos \theta, -rz' \sin \theta, rr')\|} = \frac{(-rz' \cos \theta, -rz' \sin \theta, rr')}{((z'r)^2 + (r'r)^2)^{1/2}} = \\
&= \frac{(-rz' \cos \theta, -rz' \sin \theta, rr')}{r((r')^2 + (z')^2)^{1/2}} = \frac{(-z' \cos \theta, -z' \sin \theta, r')}{-}
\end{aligned}$$

En el cálculo del vector normal se ha utilizado el hecho de que  $\alpha(s)$  tiene parámetro natural. Recordando esto, la primera forma fundamental tiene componentes

$$\begin{cases}
g_{11} = f_s \cdot f_s = (r')^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (z')^2 = (r')^2 + (z')^2 = 1 \\
g_{12} = f_s \cdot f_\theta = -rr' \cos \theta \sin \theta + rr' \cos \theta \sin \theta = 0 = g_{21} \\
g_{22} = f_\theta \cdot f_\theta = r^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2
\end{cases}$$

Con lo que la matriz de la primera forma fundamental es:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Y su determinante será:

$$\det g = r^2$$

El cálculo para la segunda forma fundamental es

$$\begin{cases}
L_{11} = f_{11} \cdot \vec{N} = -z'r''(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r'z'' = -z'r'' + r'z'' \\
L_{12} = f_{12} \cdot \vec{N} = z'r' \cos \theta \sin \theta - z'r' \cos \theta \sin \theta = 0 = L_{21} \\
L_{22} = f_{22} \cdot \vec{N} = rz'(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = rz'
\end{cases}$$

Con lo que la matriz de la segunda forma fundamental es:

$$L = \begin{pmatrix} r'z'' - z'r'' & 0 \\ 0 & rz' \end{pmatrix}$$

Y su determinante será:

$$\det L = rr'z'z'' - rr''z'^2 = r(r'z'z'' - r''z'^2)$$

Derivando la expresión de  $\alpha$  parámetro natural,  $r'^2 + z'^2 = 1$ , se obtiene la relación  $r'r'' = -z'z''$ , con lo que usando la relación  $K = \frac{\det L}{\det g}$  obtenemos

$$K = \frac{\det L}{\det g} = \frac{r(r'(z'z'') - r''z'^2)}{r^2} = \frac{r'(-r'r'') - r''z'^2}{r} = -\frac{r''}{r}((r')^2 + (z')^2) = -\frac{r''}{r} \quad (2.1)$$

Así sabemos que la curvatura de Gauss de la superficie de revolución  $M$  es  $K = -\frac{r''}{r}$ . Despejando obtenemos  $r'' + Kr = 0$  y a continuación resolveremos los distintos casos de la ecuación dependiendo del signo de  $K$ .

## 2.2. Superficies de curvatura de Gauss positiva

### Superficies de revolución

Tratando el caso de las superficies de revolución, se busca encontrar tales superficies con curvatura de Gauss  $K = a^2$  con  $a > 0$ , ya que el caso  $a < 0$  es trivialmente transformable al otro. Se sabe que en una superficie de revolución las líneas de curvatura son los paralelos y meridianos, denotemos con  $k_1$  la curvatura principal asociada al paralelo y con  $k_2$  la asociada al meridiano. La curvatura de Gauss es el producto de las principales  $K = k_1 k_2$  así que si esta es constante entonces al aumentar una de ellas disminuye la otra.

Supongamos dos puntos  $p$  y  $q$  en un mismo meridiano de la superficie tal que  $k_1(p) < k_1(q)$ . Como  $K$  es constante, entonces  $k_2(p) > k_2(q)$ . Por lo tanto si la curvatura asociada al paralelo disminuye, el meridiano se va pareciendo más a una recta ( $k = 0$ ). Al hacer la superficie de revolución se espera encontrar una figura que puede asemejarse a una pelota de fútbol americano donde los picos han sido cortados para conservar la diferenciabilidad de la superficie.

Si retomamos la ecuación 2.1, con  $K = a^2$ , se transforma en  $r'' + a^2 r = 0$  que es bien sabido que, al integrar, posee una solución de la forma  $r(s) = a_1 \cos(as) + a_2 \sin(as)$ , o equivalentemente,  $r(s) = A \cos(as + b)$ . Escogiendo adecuadamente el punto inicial del parámetro es posible obtener  $b = 0$  simplificando así la expresión.

Para que la expresión  $r(s) = A \cos(as)$  tenga sentido los parámetros  $A$  y  $s$  han de tener ciertas restricciones. En concreto vemos que  $A > 0$  y  $|s| < \frac{\pi}{2a}$ .

Como  $\alpha$  es parámetro natural tenemos  $z' = \pm \sqrt{1 - (r')^2}$ . Por lo tanto, si integramos  $z'$  obtenemos ya las expresiones necesarias para caracterizar la superficie.

**Proposición 2.2** ([21, proposición 11.1]). *Si  $M$  es una superficie de revolución generada por la curva  $\alpha(s) = (r(s), z(s))$  con parámetro natural y con curvatura de Gauss  $K = a^2$  se tiene*

$$\begin{cases} r(s) = A \cos(as) \\ z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - a^2 A^2 \sin^2(at)} dt + C \end{cases} \quad (2.2)$$

con  $A > 0$  y  $C \in \mathbb{R}$  constante.

Atendiendo a la raíz que aparece en la expresión de  $z(s)$  vemos que si  $A > \frac{1}{a}$  entonces  $z(s)$  está definido para  $|s| < \frac{1}{a} \sin^{-1}\left(\frac{1}{aA}\right)$ .

La integral de  $z(s)$  es no elemental para cualquier valor de  $A$  salvo el caso  $A = \frac{1}{a}$ . En este caso se tiene  $z(s) = \pm \int_0^s \cos(at) dt + C = \pm \frac{1}{a} \sin(as) + C$ . Por lo tanto este caso corresponde al de una esfera de radio  $\frac{1}{a}$ .

Se ha visto que hay una familia de superficies de revolución de curvatura constante  $K = a^2$ . Esta familia está parametrizada por el parámetro  $A$  y observamos que la geometría extrínseca varía con él ya que diferentes valores de  $A$  proporcionan superficies distintas geoméricamente. Esto se ve reflejado en el siguiente resultado que es en realidad un caso particular del teorema de Minding, teorema 1.27. Se demostrará la proposición ya que la demostración del caso general, el teorema de Minding, no se ha realizado al ser esta es muy laboriosa.

**Proposición 2.3.** *Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos superficies de revolución con parámetros arco dados por  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Si  $M_1$  y  $M_2$  tienen curvatura de Gauss  $K = a^2$  con  $a > 0$ , entonces son localmente isométricas.*

*Demostración.* Se pretende ver que hay un cambio de coordenadas entre las primeras matrices fundamentales de ambas superficies que, gracias a las expresiones de la proposición 2.2 se tiene que

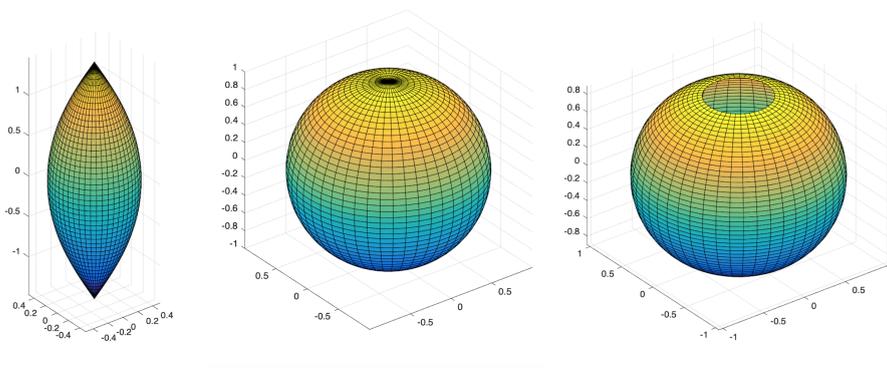


Figura 2.1: Superficies de revolución curvatura de Gauss constante  $K = 1$ . Las figuras atienden a las ecuaciones 2.2 con diferentes valores de  $A$ .

son de la forma respecto de  $s$  y  $\theta$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \cos^2(as) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^2 \cos^2(as) \end{pmatrix}$$

Y si se toman otras coordenadas  $s$  y  $\phi = aA\theta$  entonces la primera forma fundamental queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{aA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^2 \cos^2(as) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{aA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} \cos^2(as) \end{pmatrix}$$

Así se tiene que localmente poseen la misma matriz fundamental, con lo que son localmente isométricas.  $\square$

Con todo esto hemos visto que las superficies de revolución de curvatura de Gauss  $K = a^2$  son localmente isométricas a la esfera de radio  $\frac{1}{a}$ . Sus propiedades globales son distintas lo cual se ve a simple vista ya que para una esfera (caso  $A = \frac{1}{a}$ ) un lazo cualquiera que pase por un punto se puede reducir a él y, sin embargo, para un lazo cualquiera en el caso  $A > \frac{1}{a}$  esto no tiene por que ser cierto.

## Otras superficies

A la hora de tratar otras superficies de curvatura de Gauss constante positiva que no sean de revolución es interesante introducir el teorema de Liebmann (1899).

**Teorema 2.4** (Teorema de Liebmann (1899) [34, teorema 4.51]). *Sea  $M$  una superficie en  $\mathbb{R}^3$  compacta y de clase  $C^4$  con curvatura de Gauss constante  $K$ , entonces  $K > 0$  y la superficie es una esfera de radio  $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$ .*

La demostración de este resultado se puede encontrar en la referencia.

Como la esfera es rígida no se puede deformar mediante una isometría sin que esta deje de ser una esfera. Sin embargo, si se toma algún subconjunto de esta que sea superficie en sí, su curvatura lógicamente será constante igual a la de la esfera. Esta superficie si que se puede transformar mediante una isometría y gracias al teorema egregio de Gauss, dicha superficie resultante tendrá curvatura de Gauss constante igual que la esfera [5]. Se ve así que hay una gran cantidad de posibilidades de conseguir superficies de Gauss de curvatura constante positiva.

Un ejemplo famoso de superficie de curvatura de Gauss constante positiva es la superficie de Sievert, parametrizada por

$$(u, v) \mapsto \left( r \cos \varphi \sin \varphi, \frac{1}{\sqrt{C}} \log\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right) + a(C+1) \cos v \right)$$

con

$$\varphi = -\frac{u}{\sqrt{C+1}} + \tan^{-1}(\tan u \sqrt{C+1})$$

$$a = \frac{2}{C+1 - C \sin^2 v \cos^2 u}$$

$$r = \frac{a \sqrt{(C+1)(1+C \sin^2 u)} \sin v}{\sqrt{C}}$$

Esta se representa en la figura 2.2 y tiene curvatura de Gauss  $K = 1$ .

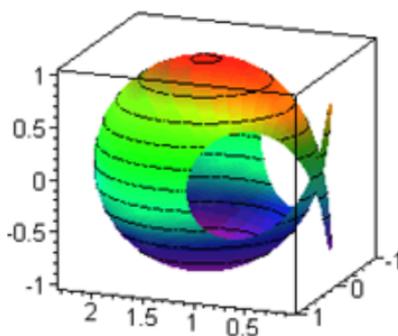


Figura 2.2: Superficie de Sievert. Imagen obtenida de [8].

Cuando se comienza a tratar formalmente la geometría, Euclides propone cinco postulados a partir de la cual se define. Estos postulados son

1. Dos puntos distintos determinan una recta.
2. Un segmento de recta puede extenderse a una recta.
3. Un radio puede extenderse desde un centro hasta cualquier punto de la circunferencia.
4. Los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Sólo existe una recta paralela a otra dada que pase por un punto dado.

Actualmente se conoce la geometría que cumple estos postulados como **geometría euclídea**. Si el quinto postulado se sustituye por

5. No existe ninguna recta paralela a una dada que pase por un punto dado.

la geometría que se genera partiendo de estos postulados se denomina **geometría esférica**. El primero de los postulados ha de poseer una excepción en este caso puesto que si se consideran los puntos de una esfera a ambos lados de un diámetro por esos dos puntos pasan infinitas rectas, i.e. círculos máximos de la esfera. Al desarrollar esta geometría se obtienen resultados que pueden resultar contraintuitivos como el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera suman más de dos ángulos rectos [27].

Esto es fácil de ver usando la fórmula de Gauss-Bonnet. Sea un entorno coordenado geodésico del triángulo, entonces la suma de los ángulos es igual a  $2\pi$  menos la curvatura total, es decir,  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 2\pi - \int K dA$ . Como estamos tratando superficies con  $K$  constante positiva entonces el resultado es inmediato.

Las superficies de curvatura de Gauss constante positiva siguen la geometría esférica.

### 2.3. Superficies de curvatura de Gauss nula

Al escuchar superficie de curvatura nula la primera imagen que se le puede venir a la mente a cualquier persona, por pocos conocimientos que tenga sobre teoría de superficies, es un plano. El plano es el ejemplo por excelencia de superficie de curvatura nula y es fácil comprobar formalmente que su curvatura es nula. La ecuación del plano  $xy$  es  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $f(x, y) = (x, y, 0)$  unas sencillas cuentas llevan a que su segunda forma fundamental es  $L = 0$  la matriz nula para todo punto, por tanto sus curvaturas principales serán nulas y con ello la curvatura de Gauss será nula por ser el producto de las principales.

Una forma de ver el plano es tratarlo como una superficie de revolución: bastar tomar como directriz el eje  $x$  y como eje de rotación el eje  $z$ . Otra manera de verlo es como una serie de rectas paralelas con un mismo vector director  $(1, 0, 0)$  y que cada una pasa por un punto del eje  $y$ . Se exponen gráficamente en la figura 2.3 las ideas de estos procedimientos.

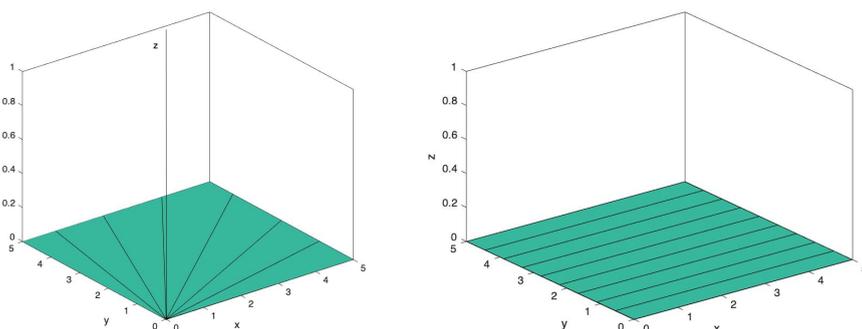


Figura 2.3: Dos formas de ver el plano: como una superficie de revolución de generatriz (izda) y como una serie de rectas paralelas (dcha).

Se puede pensar a primera instancia que las superficies de curvatura van a tener algo que ver con el plano, por lo que interesa estudiar estos dos tipos de superficies. Se tratarán primero la superficies de revolución y luego se introducirá una definición para ese tipo de superficies formadas por rectas.

#### Superficies de revolución

Si tratamos las superficies de revolución en este caso  $K = 0$  y mediante la ecuación 2.1 obtenemos la expresión  $r'' = 0$ . En este caso la superficie  $M$  va a poder ser de una de tres formas:

1. trozo de un cilindro circular.
2. trozo del plano.
3. trozo de un cono circular.

Para ver esto basta integrar la expresión  $r'' = 0$  de la que se obtiene  $r = as + b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ . La expresión de  $z'$  es debido al parámetro natural  $z' = \pm\sqrt{1 - (r')^2}$ , pero ahora  $r'(s) = a$  y por tanto  $z(s) = \pm\sqrt{1 - a^2}s + d$  y así  $\alpha(s)$  es una línea recta con expresión

$$\alpha(s) = (as + b, cs + d) \text{ con } a^2 + c^2 = 1$$

Atendiendo a los casos dependiendo de los valores de  $a$  y  $c$  llegaremos a los diferentes casos indicados previamente.

- Si  $a = 0$  entonces  $\alpha(s) = (b, cs + d)$  con  $c^2 = 1$  y así  $M$  es un trozo de cilindro.

- Si  $c = 0$  entonces  $\alpha(s) = (as + b, d)$  con  $a^2 = 1$  y así  $M$  es un trozo del plano.
- Si  $ac \neq 0$  entonces  $\alpha(s)$  deja de ser paralelo a alguno de los ejes  $r$  o  $z$  y así  $M$  es parte de un cono.

Nuevamente vemos que estas superficies son localmente isométricas. Es posible hacer un cambio de coordenadas aunque este tiene bastante complejidad comparado con el realizado en el caso de superficie de curvatura constante positiva, sobretodo cuando se trata con el cono.

Se puede seguir un razonamiento gráfico para poder visualizar la idea: si  $M$  es un trozo de cilindro circular o de un cono entonces se puede hacer un corte a lo largo de un meridiano y estirar la figura en el plano. Así vemos que en un entorno de  $M$  la primera forma fundamental es la matriz identidad y por tanto  $M$  es localmente intrínsecamente igual al plano. Claramente un trozo de plano es localmente intrínsecamente igual al plano.

## Otras superficies

Una vez tratadas las superficies de revolución, hemos de tratar otras superficies con curvatura de Gauss nula. Como la curvatura de Gauss es el producto de las curvaturas principales y el hecho de que sea nula significa que al menos una de ellas es nula para todo punto en la superficie. Esto nos puede llevar a pensar que para cada punto de una superficie que cumple que la curvatura de Gauss es nula esta contiene al menos una recta que pasa por el punto, recordando así lo definido en la introducción de la sección sobre el plano.

Si tratamos superficies completas existe un resultado, el teorema 2.6 que las clasifica. Las superficies completas se entienden como las superficies que no tienen borde. Una definición más técnica viene dada por

**Definición 2.5.** Una superficie regular  $S$  se dice **completa** si para cada punto  $p \in S$ , cualquier geodésica parametrizada  $\gamma : (0, \epsilon) \rightarrow S$  de  $S$  que comience en  $p = \gamma(0)$  puede prolongarse a una geodésica parametrizada  $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$  definida en todo  $\mathbb{R}$ . Equivalentemente,  $S$  es completa si la aplicación  $\exp_p : T_p(S) \rightarrow S$  está definida para cada  $v \in T_p(S)$  y para cada  $p \in S$ .

**Teorema 2.6** ([16, Teorema I]). Una superficie completa de curvatura de Gauss idénticamente nula en un espacio euclídeo de dimensión 3 es un cilindro.

*Idea de la demostración.* Se presentan aquí los pasos fundamentales de la demostración. Esta constituyó parte esencial de un famoso artículo de William Massey (1920-2017) en 1962 [16]. Sea  $S$  una superficie completa de curvatura de Gauss idénticamente nula y denotando por  $U = \{x \in S \mid x \text{ no es umbílico}\}$ . Como  $S$  es completa de curvatura de Gauss nula entonces se tiene que el plano es un recubrimiento universal de esta y por tanto las geodésicas del plano, i.e. líneas rectas, se transforman en geodésicas de la superficie.

Se tiene que la curvatura de Gauss es nula, como  $U$  es el conjunto de puntos no planos entonces se tiene que para cada punto una de las curvaturas principales es nula. Entonces como por cada punto pasan dos líneas de curvatura perpendiculares entre sí y el valor propio asociado a una de ellas es nula, por cada punto puede pasar una única línea de curvatura. Las líneas de curvatura son segmentos de geodésicas por el lema 1 de [16] (*Cualquier curva asintótica en  $U$  es un segmento de una geodésica.*). Luego las líneas de curvatura son las imágenes de rectas paralelas del plano.

Interesa tomar un sistema de referencia adecuado que ayude a simplificar los cálculos y poder calcular la curvatura media. Si se toma un sistema rectangular  $(u, v)$  tal que las rectas paralelas que tienen como imagen las líneas de curvatura tienen como coordenadas  $u = cte$  y recordando que todos los puntos tienen una de las curvaturas principales nulas, entonces se tiene que la primera y la segunda forma fundamental de la superficie son

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así la aplicación de Weingarten tiene como matriz

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por tanto la curvatura media es  $H = \frac{L_{11}}{2}$ . Además se sabe por el lema 2 de [16] (*En cualquier línea asintótica de  $U$  la curvatura media  $H$  satisface la ecuación  $\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H}\right) = 0$ .) que toda línea de curvatura tiene curvatura media dada por*

$$H = \frac{1}{as + b}$$

con  $a$  y  $b$  constantes y  $s$  el parámetro de arco de la curva. La curvatura media es finita en todo punto de  $S$  luego se tiene que dar  $a = 0$  y así la curvatura media,  $H = \frac{1}{b} = \frac{L_{11}}{2}$ , es constante. Por lo tanto se tiene que  $L_{11} = cte$  y por el teorema fundamental de superficies, teorema 1.20, se tiene que existe una única superficie con estas formas fundamentales. Estas formas fundamentales se reconoce que generan un cilindro.  $\square$

Con cilindro se refiere a una superficie generada por un conjunto de rectas paralelas al eje  $z$  y que siguen una curva simple en el plano  $xy$ . Como la superficie es completa, entonces la curva ha de ser cerrada o de longitud infinita.

En este caso es interesante introducir el concepto de superficie desarrollable. Primero, es necesario comentar que una superficie se dice **reglada** si es una superficie que posee una representación de la forma  $f(s, t) = \alpha(s) + t\beta(s)$  donde  $\alpha$  tiene parámetro natural y  $\|\beta\| = 1$ .

**Definición 2.7** (Superficie desarrollable). *Una **superficie** se dice **desarrollable** si es una superficie reglada que cumple que el plano tangente en un punto  $f(s, t)$  es independiente de  $t$ , es decir, el plano tangente coincide para cada línea.*

Una superficie desarrollable puede verse como una superficie reglada se transforman en fragmentos del plano al aplicarles deformaciones que no alteren la distancia entre puntos.

Si tomamos la curva dada por la recta  $f(s, t)$  con  $t$  fijo como el plano tangente coincide para todos los puntos se tiene  $\frac{d\vec{N}(f(s, t))}{dt} = 0$  y por el teorema de Olinde Rodrigues tenemos que  $-k(f(s, t))\frac{df(s, t)}{dt} = 0$  y así vemos que las líneas de curvatura son las rectas y la curvatura de Gauss es nula por ser el producto de las curvaturas principales.

Para que una superficie tenga curvatura de Gauss constantemente nula una condición necesaria y suficiente es que sea desarrollable. La demostración de este hecho no es trivial y se puede encontrar en la sección 2.8 del manual de Struik [29]. Las superficies de curvatura de Gauss constante nula siguen la geometría euclídea.

## 2.4. Superficies de curvatura de Gauss negativa

### Superficies de revolución

Pensemos ahora en las superficies de revolución en el caso  $K = -a^2$  con  $a > 0$ . Nuevamente recordamos que la curvatura de Gauss es el producto de las principales, es decir, de las de los paralelos  $k_1$  y meridianos  $k_2$ . Un paralelo será siempre una circunferencia y por tanto su curvatura será positiva  $k_1 > 0$  y con ello la del meridiano será negativa  $k_2 < 0$ .

Si se replica el razonamiento que se usó para el caso de curvatura positiva y se imaginan dos puntos  $p$  y  $q$  de un mismo meridiano de la superficie. Si tenemos por ejemplo  $k_1(p) > k_1(q)$  entonces para que se mantenga constante ha de ser  $k_2(p) > k_2(q)$  debido a que  $k_2 < 0$ . Así los meridianos se van asemejando más a rectas a medida que disminuye la curvatura de los paralelos. Todo esto

nos permite pensar que la figura resultante va a tener forma que puede asemejarse a un hiperboloide.

Retomando la ecuación 2.1 se obtienen las cuentas formales. Se tiene  $K = -a^2$ , luego  $r'' - a^2r = 0$  y una solución general se sabe que es combinación de coseno hiperbólico y seno hiperbólico, es decir,  $r(s) = c_1 \cosh(as) + c_2 \sinh(as)$  o, equivalentemente

$$r(s) = \begin{cases} B \cosh(as + b) & \text{si } c_1 > c_2 \\ A \exp(as) & \text{si } c_1 = c_2 = A \\ C \sinh(as + c) & \text{si } c_1 < c_2 \end{cases} \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

Obteniendo así las ecuaciones de la superficie de revolución [21] siguientes

$$\begin{cases} r(s) = A \exp(as) \\ z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - a^2 A^2 \exp^2(at)} dt + D \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} r(s) = B \cosh(as) \\ z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - a^2 B^2 \sinh^2(at)} dt + D \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} r(s) = C \sinh(as) \\ z(s) = \pm \int_0^s \sqrt{1 - a^2 C^2 \cosh^2(at)} dt + D \end{cases} \quad (2.5)$$

Para que  $z$  esté bien definida en las ecuación 2.3 se ha de dar  $s < \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{aA}\right)$ . Haciendo el cambio  $aA \exp(at) = \sin \phi$  se puede resolver la integral. La superficie de revolución obtenida es una pseudoesfera de radio  $\frac{1}{a}$  similar a la expuesta en la figura 2.4 (izda).

Nuevamente para que  $z$  esté bien definida en las ecuación 2.4 entonces  $|s| < \frac{1}{a} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{aB}\right)$ . La superficie resultante se ve en la figura 2.4 (centro).

Finalmente para que  $z$  esté bien definida en las ecuación 2.5 se tiene que dar  $0 < aC < 1$  y así  $0 < s < \frac{1}{a} \cosh^{-1}\left(\frac{1}{aC}\right)$ . Un ejemplo de superficie de esta forma se da en la figura 2.4 (dcha).

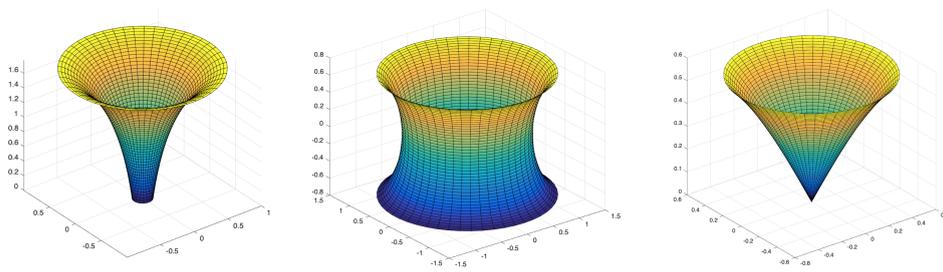


Figura 2.4: Superficies de revolución de curvatura de Gauss constante  $K = -1$ . Las figuras atienden, de izquierda a derecha, a las ecuaciones 2.3-2.5.

Análogamente al caso de curvatura de Gauss constante positiva, en el caso de la negativa las superficies obtenidas son localmente isométricas.

### Otras superficies

Se ha visto que todas las superficies de revolución obtenidas tienen bordes o puntos donde poseen singularidades a partir de las cuales no se pueden extender de forma continua [5].

Son ejemplos de superficie de curvatura constante negativa la superficie de Dini y la de Kuen. La superficie de Dini, parametrizada por

$$(u, v) \mapsto (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a(\cos v + \ln(\tan(v/2))) + bu)$$

tiene curvatura de Gauss  $K = \frac{-1}{a^2+b^2}$  [8]. Se representa en la figura 2.5 (izda) con los parámetros  $a = 1$  y  $b = 1$  luego su curvatura de Gauss  $K = \frac{-1}{2}$ .

La superficie de Kuen viene parametrizada por

$$(u, v) \mapsto \left( \frac{2a(\cos u + u \sin u) \sin v}{u^2 \sin^2 v + 1}, \frac{2a(\sin u - u \cos u) \sin v}{u^2 \sin^2 v + 1}, a \left( \frac{2 \cos v}{u^2 \sin^2 v + 1} + \log\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right) \right) \right)$$

tiene curvatura de Gauss de valor  $K = \frac{-1}{a^2}$  y se representa en la figura 2.5 (dcha) con el parámetro  $a = 1$  y así  $K = -1$ .

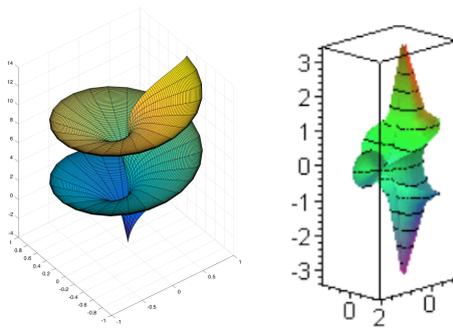


Figura 2.5: Superficie de Dini (izda) y de Kuen (dcha). La imagen de la superficie de Kuen se ha obtenido de [8].

No se ha encontrado una descripción explícita de la totalidad de las superficies de curvatura de Gauss constante negativa, pero si que se ha podido probar que todas poseen alguna singularidad. Este resultado lo demostró Hilbert (1862-1943) en el año 1901 y se enuncia de la siguiente manera

**Teorema 2.8** (Teorema de Hilbert [6, pg. 442]). *Una superficie geométrica completa  $S$  con curvatura constante y negativa, no se puede aplicar en  $\mathbb{R}^3$  mediante una inmersión isométrica.*

Recordando los tipos de geometrías mencionadas, existe otro caso de geometría no euclidiana que cumple los cuatro primeros postulados y un quinto postulado de la forma

5. Se pueden trazar infinitas rectas paralelas a una dada y que pasen por un punto dado.

Este tipo de geometría se denomina **geometría hiperbólica** y fue desarrollada por matemáticos en el siglo XIX. Se demuestran resultados y propiedades que cumplen estos postulados y nuevamente se vuelve a encontrar algún resultado contraintuitivo, pero no por ello menos cierto, como el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman menos de dos ángulos rectos [27]. Mediante la fórmula de Gauss-Bonnet, como se vió en la sección de curvatura de Gauss positiva, es inmediato que en este caso como la curvatura de Gauss es constante negativa se tiene este resultado.

Las superficies de curvatura de Gauss constante negativa siguen la geometría hiperbólica. El primer ejemplo de superficie de curvatura constante negativa lo encontró Beltrami (1835-1900) en 1868. Beltrami demostró que la pseudoesfera con la métrica usual inducida de  $\mathbb{R}^3$  tiene curvatura de Gauss constante negativa.

## Capítulo 3

# Superficies de curvatura media constante

En este caso también interesa tratar las superficies dependiendo del valor que tome su curvatura, en particular dividiremos en dos secciones: las de curvatura media constante nula y las de curvatura media constante no nula.

Un experimento curioso es formar en el final de un tubo un borde deseado y sumergirlo en una solución de agua jabonosa. Al introducir una cantidad de aire determinada en el tubo la superficie que forma la película de jabón será, si no se tienen en cuenta los efectos físicos que perturben el sistema como por ejemplo la gravedad, una superficie de curvatura media constante. La curvatura será constante pero su valor dependerá de la cantidad de aire introducida [5].

### 3.1. Superficies minimales

El caso de las superficies minimales no se va a tratar con mucho detalle puesto que este es el más conocido. Se puede encontrar extensa bibliografía sobre este tema, por ejemplo el trabajo de Meeks III, Pérez y Tinaglia (2016) [20]. Se dice superficie minimal a aquella que posee curvatura media constantemente nula. Claramente como  $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ , si esta es nula se ha de cumplir que  $k_1 = -k_2$ . Esto obliga a que la curvatura de Gauss  $K = k_1k_2$  de esa superficie sea necesariamente no positiva, en concreto  $K = -(k_1)^2$ .

Que una superficie cerrada sea minimal quiere decir que ocupa el área mínima delimitada por un espacio cerrado. Volviendo al experimento de la película de jabón si en el tubo no se introduce ninguna cantidad de aire, esto es si la presión a ambos lados de la película de jabón es igual, entonces la superficie tendrá curvatura media constante nula.

Un ejemplo claro de superficie minimal que puede pasarse por la mente es el plano, que como se ha visto tiene curvaturas principales ambas nulas y por lo tanto su curvatura media es constante nula. Para el estudio de superficies minimales se distinguirán varios casos: regladas, de revolución y el resto de superficies. Esto se hace debido al carácter especial que tienen los dos primeros casos.

#### 3.1.1. Regladas

Las únicas superficies de revolución regladas que se pueden obtener son el plano y el helicoide [6]. El plano ya se trató como superficie reglada al tratar las superficies de curvatura de Gauss positiva. Por otro lado, el helicoide es la superficie que se forma al trazar todas las rectas normales a una hélice circular y se representa en la figura 3.1.

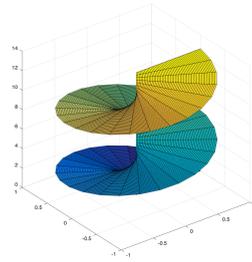


Figura 3.1: Representación gráfica del helicoido.

### 3.1.2. De revolución

Como se ha visto en el estudio del capítulo anterior, resulta interesante tratar las superficies de revolución debido a que se conocen las curvas principales, paralelos y meridianos, en todo punto. Si se denota por  $k_1$  la curvatura principal asociada al paralelo y  $k_2$  la asociada al meridiano, como el paralelo es una circunferencia entonces  $k_1 > 0$  y por tanto debido a que la curvatura de Gauss es negativa, ha de ser  $k_2 < 0$ .

Si se sigue un razonamiento con  $k_1 = -k_2$  vemos que a menor  $k_1$ , i.e. mayor radio de curvatura, menor  $k_2$  y por tanto el meridiano se va acercando más a una recta. Se puede esperar así que la superficie resultante sea algo similar a una  $c$  rotada respecto de un eje. En efecto, la única superficie minimal de revolución, aparte del plano, es la catenoide [6]. La catenoide es la superficie que se obtiene al tomar una catenaria como directriz en una superficie de revolución, se representa en la figura 3.2.

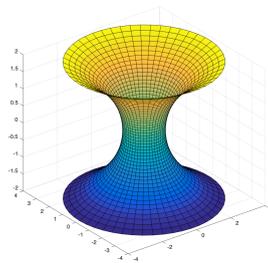


Figura 3.2: Representación gráfica del catenoide.

La catenoide fue la primera superficie minimal no trivial en un espacio euclídeo, aparte del plano, que fue descubierta.

### 3.1.3. Otros casos

Tanto el helicoido como la catenoide fueron descubiertos por Meusnier en 1776 y no fue hasta 1835 que se descubrieron más superficies minimales [6]. Ese año Scherk (1798-1885) introdujo nuevos ejemplos de superficies minimales destacando la superficie de Scherk que se parametrizada mediante

$$(u, v) \mapsto \left( u, v, \log \left( \frac{\cos x}{\cos y} \right) \right)$$

En 1984 Enneper (1830-1885) introdujo la denominada superficie de Enneper que también posee curvatura minimal nula. Esta se parametriza como

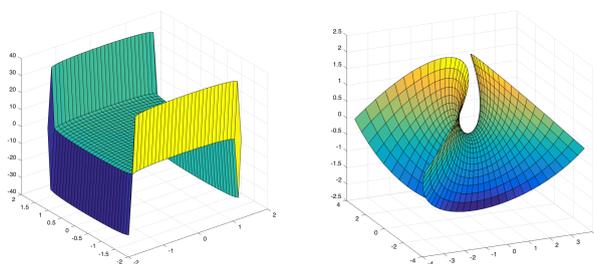


Figura 3.3: Representaciones gráficas de las superficies de Scherk (izda) y Enneper (dcha).

$$(u, v) \mapsto \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2\right)$$

Ambas figuras se representan en la figura 3.3.

## 3.2. Superficies CMC

Se denominan superficies CMC a las superficies de curvatura media constante por sus siglas en inglés. En esta sección se tratarán superficies de curvatura media constante no nula.

### 3.2.1. Superficies de revolución. Clasificación de Delaunay

Para el estudio de superficies de curvatura media constante no nula es interesante rescatar la separación en el tratamiento de superficies de revolución. Este tema puede encontrarse en bibliografía como [18] y [19].

Si se recuerdan las superficies de revolución está claro algunos casos que van a proporcionar curvatura media constante. Por ejemplo, como ya hemos visto un plano posee  $H = 0$  y es de revolución. Una esfera de radio 1 posee  $H = 1$  constante y también es una superficie de revolución. Recordando los cilindros vemos que un cilindro circular recto poseerá curvatura media constante dependiente del radio de su sección, para el caso en el que la sección sea la circunferencia unidad el cilindro poseerá  $H = \frac{1}{2}$ . Quitando estos casos triviales sólo existen otras tres superficies de revolución de curvatura media constante; las *superficies de Delaunay*. Estas son el catenoide, el unduloide y el nodoide.

Este tipo de superficies de revolución de curvatura media constante fueron objeto de estudio de C. Delaunay en 1841, quien llegó a la formulación de un problema dada por una ecuación ordinal no lineal que tiene como solución dichas superficies. Dicha ecuación surge de rotar las ruletas de las cónicas, las directrices, a lo largo de una línea recta, el eje de rotación.

Una *ruleta* es una curva plana definida por la trayectoria que sigue un punto vinculado a una curva generatriz que rueda tangencialmente sobre otra curva, la curva directriz, sin deslizamiento. Las directrices de las superficies de revolución de Delaunay son las ruletas que forman los focos de las cónicas. Distinguiamos así tres casos en las diferentes cónicas: la parábola, la elipse y la hipérbola. Las expresiones implícita y paramétricas de estas curvas vienen dadas respectivamente por

$$x - \frac{y^2}{4b} = 0, \quad \alpha(t) = (b \sinh^2 t, 2b \sinh t) \quad (3.1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4b} = 1, \quad \beta(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (3.2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4b} = 1, \quad \gamma(t) = (\pm a \cosh t, b \sinh t) \quad (3.3)$$

Se estudian las ruletas que proporcionan estas curvas tomando como punto de referencia los focos. Imagine una situación similar a la de la figura 3.4. Se tiene un foco  $F = (F_1, F_2)$  de la cónica de ecuación  $f$ , un punto  $P = (X, Y)$  de la cónica y el punto  $Q$  que es el punto de intersección de la recta tangente a la cónica con la recta perpendicular a esta y que pasa por el foco. A continuación se presentan las ecuaciones de las rectas mencionadas.

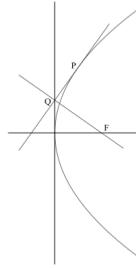


Figura 3.4: Esquema usado para obtener las coordenadas de las ruletas. Imagen obtenida de [19].

$$(r_t) : \frac{(x - X)}{f_y} - \frac{(y - Y)}{f_x} = 0$$

$$(r_\perp) : \frac{x - F_1}{f_x} - \frac{y - F_2}{f_y} = 0$$

Así es sencillo calcular la distancia que hay entre los puntos

$$d(Q, F) = d(r_t, F) = \frac{|(F_1 - x)f_x + (F_2 - y)f_y|}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$$

$$d(Q, P) = d(r_\perp, P) = \frac{|(F_2 - y)f_x + (x - F_1)f_y|}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$$

Si se trata el caso de la parábola, ec. 3.1, el foco se sitúa en  $F = (b, 0)$ . Se quiere calcular la posición, i.e. las coordenadas  $(x_p, y_p)$ , que tendrá el foco al rotar la parábola sobre el eje  $y$ . Es claro ver que la coordenada  $x_p$  se calcula mediante la resta de la longitud de arco desde el eje  $x$  hasta el punto  $P$  con la distancia entre  $P$  y  $Q$ . Así se tiene

$$s = \int_0^t |\alpha'(u)| du = \int_0^t 2b(\sinh^2 u \cosh^2 u + \cosh^2 u)^{1/2} du = \int_0^t 2b \cosh^2 u du =$$

$$= \int_0^t 2b \left( \frac{1}{2} \cosh(2u) + \frac{1}{2} \right) du = b(\sinh t \cosh t + t)$$

$$d(Q, P) = \frac{|(-y) \cdot 1 + (x - b) \cdot \frac{-2y}{4b}|}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{4b^2}}} = \frac{|-y(2b + x)|}{\sqrt{4b^2 + y^2}} = \frac{2b \sinh t \cdot (b + b \sinh^2 t)}{\sqrt{4b^2 + 4b^2 \sinh^2 t}} =$$

$$= b \sinh t \cosh t$$

$$x_p = s - d(Q, P) = bt$$

La coordenada  $y_p$  viene dada por la distancia entre  $F$  y  $Q$ , así se tiene

$$\begin{aligned} y_p = d(Q, F) &= \frac{b - x - y \frac{-2y}{4b}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{4b^2}}} = \frac{2b^2 - 2bx + y^2}{\sqrt{4b^2 + y^2}} = \frac{2b^2 - 2b\frac{y^2}{4b} + y^2}{\sqrt{4b^2 + y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4b^2 + y^2} = b \cosh t \end{aligned}$$

Así las coordenadas de la curva que describe el foco  $F$  al rotar la parábola vienen dadas por

$$P(t) = (x_p, y_p) = (bt, b \cosh t)$$

las cuales son las ecuaciones de una catenaria. Al formar una superficie de revolución con esta curva se obtiene una catenoide que poseerá curvatura media constante  $H = 0$ , como se ha visto en la sección anterior.

En el caso de la elipse y la hipérbola, al poseer estas dos focos, se obtendrán dos curvas. Para la elipse, si se considera  $b < a$  y  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , los focos se encuentran en  $F^1 = (c, 0)$  y  $F^2 = (-c, 0)$ . Las soluciones obtenidas se denotan  $(x_e^i, y_e^i)$   $i = 1, 2$  y vienen dadas por

$$\begin{aligned} E_1(t) = (x_e^1, y_e^1) &= \left( \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 z} dz - \frac{c \sin t(a - c \cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t}}, \frac{b(a - c \cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t}} \right) \\ E_2(t) = (x_e^2, y_e^2) &= \left( \int_0^t \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 z} dz - \frac{c \sin t(a + c \cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t}}, \frac{b(a + c \cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t}} \right) \end{aligned}$$

La ruleta del foco de una elipse se denomina undularia. No es necesario considerar las ruletas que generan ambos focos debido a que si se considera la elipse mediante  $t \in [-\pi, \pi]$  entonces la curva generada por la primera expresión  $E^1(t)$  es la misma que si se considera la generada por los dos focos en los intervalos  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$  [19]. Sin embargo se toman las dos superficies para hacer un paralelismo con el caso de la hipérbola.

Las superficies de revolución que se generan al rotar las undularias son las unduloides, figura 3.5, que poseen expresión  $U_1(t, \theta) = (y_e^1 \cos \theta, y_e^1 \sin \theta, x_e^1)$  (izda) y  $U_2(t, \theta) = (y_e^2 \cos \theta, y_e^2 \sin \theta, x_e^2)$  (dcha). El unduloide posee curvatura media  $H = \frac{1}{2a}$ .



Figura 3.5: Representaciones gráficas de los unduloides. En la izquierda se representa  $U_1(t, \theta)$  y en la derecha  $U_2(t, \theta)$ . Imágenes obtenidas de [19].

Para la hipérbola los focos se sitúan nuevamente en  $F^1 = (c, 0)$  y  $F^2 = (-c, 0)$  con  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Obtenemos las curvas parametrizadas por  $(x_h^1, y_h^1)$  y  $(x_h^2, y_h^2)$ .

$$\begin{aligned} H_1(t) = (x_h^1, y_h^1) &= \left( \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2 z - a^2} dz - \frac{c \sinh t(c \cosh t - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}}, \frac{b(c \cosh t - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}} \right) \\ H_2(t) = (x_h^2, y_h^2) &= \left( \int_0^t \sqrt{c^2 \cosh^2 z - a^2} dz - \frac{c \sinh t(c \cosh t + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}}, \frac{b(c \cosh t + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}} \right) \end{aligned}$$

Las ruletas del foco de una hipérbola se denominan nodarias. En este caso es necesario considerar las superficies de revolución generadas por ambas curvas, que se denominan nodoides.

El nodoide generado por  $H_1(t)$ , figura 3.6 izda, tiene expresión  $N_1(t, \theta) = (y_h^1 \cos \theta, y_h^1 \sin \theta, x_h^1)$  y una curvatura media de valor  $H = \frac{-1}{2a}$ . El nodoide generado por  $H_2(t)$ , figura 3.6 dcha, tiene expresión  $N_2(t, \theta) = (y_h^2 \cos \theta, y_h^2 \sin \theta, x_h^2)$  y una curvatura media de valor  $H = \frac{-1}{2a}$ .

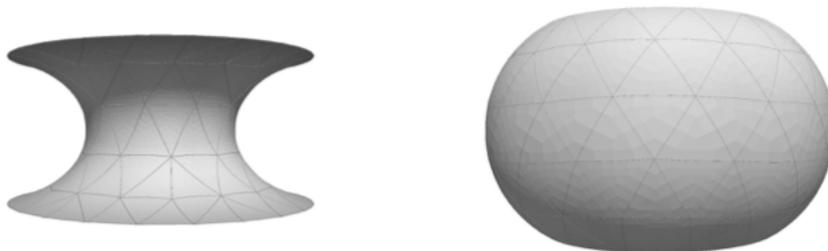


Figura 3.6: Representaciones gráficas de los nodoides. En la izquierda se representa  $N_1(t, \theta)$  y en la derecha  $N_2(t, \theta)$ . Imágenes obtenidas de [19].

### 3.2.2. Representación de Weierstrass

La representación de Weierstrass es una manera de construir analíticamente superficies de curvatura media constantemente nula, i.e. superficies minimales, a partir de funciones armónicas y complejas. La minimalidad es un concepto local y por tanto la idea de minimalidad se puede aplicar a una superficie inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$ . Servirán de guías para la sección el manual de J. Oprea [24] y las notas de M. Dorff [7]. Al final de esta sección se exponen algunas maneras de adaptar estos conceptos de Weierstrass para superficies de curvatura media constante no nula.

Para ver la representación de Weierstrass es necesario tratar las parametrizaciones y ver si cumplen ciertas condiciones. En concreto es de interés tratar parametrizaciones isotermas, que se introducen a continuación.

**Definición 3.1.** Una parametrización de una superficie  $M$ ,  $x : M \implies \mathbb{R}^3$  se dice **isoterma** si su primera forma fundamental es proporcional a la matriz identidad, es decir, si  $x_u \cdot x_u = x_v \cdot x_v$  y  $x_u \cdot x_v = x_v \cdot x_u = 0$ .

Una aplicación  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  se dice **armónica** si su laplaciano es nulo, esto es si  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$ .

Una propiedad de las superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$  es que estas admiten una representación isoterma, este resultado viene enunciado y demostrado como teorema 2.1 del capítulo 7 de [24]. De hecho en este tipo de superficies es posible construir dicho entorno explícitamente gracias a un resultado expuesto en el ejercicio 13b de la sección 3.5 de [6].

Si la parametrización  $x = x(u, v)$  de  $M$  una superficie minimal, se puede escribir  $z = u + iv$ . Así  $u = \frac{z + \bar{z}}{2}$  y  $v = \frac{x - \bar{z}}{2i}$  y se puede escribir  $x = x(z, \bar{z})$ . Se introduce a continuación un resultado que será útil para llegar a la representación de Weierstrass.

**Teorema 3.2** ([7, teorema 17]). Sea  $M$  una superficie cualquiera y  $x$  una parametrización de ella. Sea  $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$  con  $\phi^k = \frac{\partial x^k}{\partial z}$  donde  $x^k$  es la  $k$ -ésima coordenada de  $x$  y  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$ . Entonces  $x$  es isoterma si, y sólo si,  $\phi^2 = 0$ . Además, si es isoterma  $M$  es minimal si, y sólo si, todas las funciones  $\phi^k$  son analíticas.

*Demostración.* Por simplicidad se denota  $x_j = \frac{\partial x}{\partial j}$ . Así es claro ver que  $(x_z)^2 = \left(\frac{1}{2}(x_u^k - ix_v^k)\right)^2 = \frac{1}{4}((x_u^k)^2 - (x_v^k)^2 - 2ix_u^k \cdot x_v^k)$  y con ello

$$\begin{aligned}\phi^2 &= (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^3 (x_u^k)^2 - \sum_{k=1}^3 (x_v^k)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 x_u^k x_v^k \right) = \\ &= \frac{1}{4} (|x_u|^2 + |x_v|^2 - 2ix_u \cdot x_v)\end{aligned}$$

Claramente si es isoterma entonces  $\phi^2 = 0$ . Si  $\phi = 0$  entonces separando parte real e imaginaria vemos que  $x$  es isoterma.

Para la segunda afirmación del teorema se usará el corolario 16 de [7] (*Una superficie con una parametrización isoterma es minimal si, y sólo si, las funciones coordenadas son armónicas.* Gracias a este resultado basta comprobar que las funciones coordenadas sean analíticas para que la superficie sea minimal.

Se cumple la relación

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) = \frac{1}{2^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - i \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + i \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} (f_{uu} + f_{vv})\end{aligned}$$

Aplicando esto a  $x_{uu}^k$  y a  $x_{vv}^k$  se llega a

$$x_{uu}^k + x_{vv}^k = 4 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{x^k}{\partial z} \right) \right) = 4 \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\phi^k) \right) = 0$$

donde la última igualdad se debe a que  $f$  es analítica y por tanto se puede escribir en términos únicamente de  $z = u + iv$ .  $\square$

Se recuerda que la finalidad de esta sección es llegar a expresiones analíticas para las coordenadas de una superficie minimal. Por lo tanto es de interés comprobar que se puede escribir

$$\begin{aligned}dx^k &= \frac{\partial x^k}{\partial z} dz + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \phi^k dz + \overline{\phi^k} d\bar{z} = \phi^k dz + \overline{\phi^k} d\bar{z} = \\ &= 2\operatorname{Re} \phi^k dz\end{aligned}$$

y con ello  $x^k = c_k + 2\operatorname{Re} \int \phi^k dz$ .

Entonces se pueden encontrar funciones analíticas  $\phi^k$  tales que  $(\phi)^2 = 0$  y  $|\phi|^2 \neq 0$  y así describan superficies minimales. Si no se cumple esta segunda condición entonces la superficie estaría degenerada en un punto.

$$|\phi|^2 = |x_z^1|^2 + |x_z^2|^2 + |x_z^3|^2 = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^3 (x_u^k)^2 + \sum_{k=1}^3 (x_v^k)^2 \right) = \frac{1}{4} (|x_u|^2 + |x_v|^2) = \frac{g_{11}}{2}$$

Todo esto invita a considerar como candidatas a las funciones  $\phi^k$  a

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \frac{1}{2} f(1 - g^2) \\ \phi^2 &= \frac{i}{2} f(1 + g^2) \\ \phi^3 &= fg\end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que cumplen las condiciones

$$\begin{aligned}
\phi^2 &= \left(\frac{1}{2}f(1-g^2)\right)^2 + \left(\frac{i}{2}f(1+g^2)\right)^2 + (fg)^2 = \\
&= \frac{f^2}{4} + \frac{f^2g^4}{4} - \frac{f^2g^2}{2} - \frac{f^2}{4} - \frac{f^2g^4}{4} - \frac{f^2g^2}{2} + f^2g^2 = 0 \\
|\phi|^2 &= \left|\frac{1}{2}f(1-g^2)\right|^2 + \left|\frac{i}{2}f(1+g^2)\right|^2 + |fg|^2 = \\
&= \frac{|f|^2}{4} (|1-g^2|^2 + |1+g^2|^2 + 4|g|^2) = \\
&= \frac{|f|^2}{4} (1+g^2\bar{g}^2 - g^2 - \bar{g}^2 + 1 + g^2\bar{g}^2 + g^2 + \bar{g}^2 + 4g\bar{g}) = \\
&= \frac{|f|^2}{2} (1+|g|^2)^2 \neq 0 \text{ si } f = 0 \text{ entonces los } \phi^k = 0
\end{aligned}$$

Ahora se puede enunciar un teorema que proporcione la representación de Weierstrass buscada que defina superficies minimales a partir de funciones holomorfas y meromorfas, que se definen a continuación.

**Definición 3.3.** Se dice que una función  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  con  $M \subset \mathbb{C}$  es **holomorfa** si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . Se dice que una función  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  es **meromorfa** si es holomorfa en su dominio salvo en un conjunto de puntos aislados, los polos de la función.

**Teorema 3.4** (Representación de Weierstrass [7, teorema 18]). Sea  $f$  una función analítica y  $q$  una función meromorfa en  $\Omega \subset \mathbb{C}$  con la propiedad de que en cada punto donde  $q$  tiene un polo de orden  $m$ ,  $f$  tiene un cero de orden mayor o igual que  $2m$ . Entonces toda superficie minimal tiene una parametrización isoterma local de la forma:

$$\begin{aligned}
X &= \left( \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z f(1-g^2)dw \right\}, \right. \\
&\quad \left. \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z if(1+g^2)dw \right\}, \right. \\
&\quad \left. \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z 2fgdw \right\} \right)
\end{aligned}$$

Si se toman, por ejemplo, las funciones  $f = -i\frac{\exp -z}{2}$  y  $g = -\exp z$  se obtiene la parametrización del helicoido. Se pueden encontrar funciones para representar el resto de ejemplos de superficies minimales mostrados en secciones anteriores en [24].

Para finalizar esta sección se recuerda que la representación de Weierstrass es una forma de describir superficies minimales. Sin embargo su introducción ha inspirado a numerosos matemáticos a buscar representaciones similares a esta para otras superficies de curvatura media constante no nula, como puede ser por ejemplo la introducida por R.L. Bryant (1953-) en 1987 [2]. Más ejemplos de este tipo de representaciones se pueden ver en [25].

### 3.2.3. Conjetura de Hopf. Toros de Wente

Previa a la publicación de *Counterexample to a conjecture of H. Hopf* [35] todas las superficies compactas de curvatura media constante no nula conocidas, a excepción de la esfera, tenían bordes. Este hecho había llevado a pensar en la posibilidad de que no existiese una tal superficie que no fuese la esfera. Esto se enuncia formalmente en la conjetura de Hopf.

**Conjetura de Hopf:** sea  $\Sigma$  una inmersión de una hipersuperficie orientable y cerrada de curvatura media constante  $H \neq 0$  en  $\mathbb{R}^n$ . ¿Debe  $\Sigma$  ser la  $(n-1)$ -esfera?

La conjetura involucra las superficies tratadas en este trabajo en el caso  $n = 3$ , donde el enunciado queda de la siguiente manera: sea  $\Sigma$  una superficie orientable y cerrada de curvatura media

constante  $H \neq 0$  en  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\Sigma$  es una esfera.

El mismo Hopf demostró que es cierto en el caso de inmersión de  $S^2$  en  $\mathbb{R}^3$  [9]. Wu-Yi Hsiang encontró contraejemplos para los casos  $n > 3$  ya que construyó un ejemplo en  $\mathbb{R}^4$  [10].

El primer contraejemplo para el caso  $n = 3$  llegó de la mano de H.C. Wente en el artículo [35] mencionado al principio de la sección. Wente demostró, en el teorema 3.5, la existencia de una cantidad numerable de inmersiones isométricamente distintas.

**Teorema 3.5** ([35, Counterexample theorem]). *Existe una inmersión conforme de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H \neq 0$  que es doblemente periódica con respecto a un rectángulo en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $w = u + iv = (u, v)$  representa un punto típico en  $\mathbb{R}^2$  y denotamos los puntos en  $\mathbb{R}^3$  como  $x = (x, y, z)$ , entonces podemos construir una función  $x(u, v)$  que satisface:*

- (a)  $\Delta x = 2H(x_u \times x_v)$  con  $H \neq 0$
- (b)  $|x_u| = |x_v|$ ,  $(x_u \cdot x_v) = 0$
- (c)  $|x_u| \neq 0$

Estas ecuaciones quieren decir que  $x(u, v)$  es una inmersión de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante,  $H$ . Finalmente, existen números  $A, B$  positivos tales que:

$$x(u + A, v) = x(u, v + B) = x(u, v)$$

para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . De hecho se produce una cantidad numerable de inmersiones isométricamente distintas.

El símbolo  $\Delta$  del teorema denota el operador de Laplace.

El toro de Wente, mostrado en la figura 3.7, fue la primera superficie que contradecía la conjetura de Hopf. A partir de ese momento se encontraron cantidad de superficies que cumplen dichas condiciones. De hecho se han encontrado superficies de este tipo de género cualquiera mayor o igual que 2, que se construyen mediante la unión de toros de Wente [12].

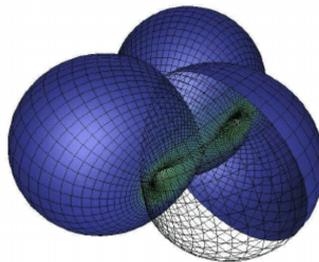


Figura 3.7: Representación gráfica del toro de Wente. Obtenida de [17].



## Capítulo 4

# Curvaturas intrínsecas y extrínsecas

En la geometría diferencial la visión extrínseca de las superficies viene dada no sólo por las superficies en sí sino también por los embeddings que las determinan. Esto conlleva a que dichos conceptos dependan del embedding considerado. En este sentido las superficies se pueden estudiar como contenidas en un espacio mayor. Son conceptos extrínsecos la curvatura media  $H$  o las curvaturas principales entre otros.

Con el trabajo de Riemann se comenzó a tratar el concepto de geometría intrínseca. Se recuerda que los conceptos intrínsecos se definen como aquellos que se pueden formular a partir de la primera forma fundamental y sus derivadas. La geometría intrínseca trata los problemas como si estuviésemos moviéndonos dentro de la propia superficie. Un concepto intrínseco es la curvatura de Gauss como anuncia el propio Gauss en su teorema egregio.

Estos dos puntos de vista de la geometría no son mutuamente excluyentes un ejemplo claro de esto es la relación entre la curvatura media y la de Gauss. Usando las expresiones de estas dadas por las curvaturas principales,  $H = \frac{k_1+k_2}{2}$  y  $K = k_1 \cdot k_2$ , es inmediato comprobar que

$$H^2 \geq K \tag{4.1}$$

Además se verá en una sección de este capítulo un importante resultado de geometría diferencial, el teorema de inmersión de Nash, que indica que toda superficie puede incluirse en cierto espacio euclídeo.

Como último comentario antes de empezar con la primera sección es claro que los conceptos intrínsecos y extrínsecos no se reservan exclusivamente para las matemáticas. El uso de un tipo u otro de forma de trabajo depende del área de conocimiento y de los conceptos tratados. Por ejemplo en física relativista se usa un tratamiento intrínseco ya que se trata el espacio-tiempo y un planteamiento extrínseco exigiría que existiese algo fuera de este espacio, lo cual no resulta muy natural.

### 4.1. Curvatura de Casorati

Se ha comprobado que tanto la curvatura de Gauss como la media pueden ser constantemente nulas en superficies que no sean el plano. Este hecho puede resultar contraintuitivo para cualquier persona no familiarizada con estos conceptos. Casorati pensaba de esta manera y cuando enunció su propia medida de curvatura, la curvatura de Casorati  $C$ , la consideró como la más razonable e invitaba a otros matemáticos a denominarla simplemente *curvatura*.

Si se analizan las curvaturas mencionadas y su expresión mediante las curvaturas principales,  $k_1 \cdot k_2$ ,  $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ , podría llegar a pensarse que una curvatura con una expresión de la forma  $k_1^2 + k_2^2$  puede ser un resultado interesante. Esto es porque una expresión de este estilo aparece en muchos otros aspectos de las matemáticas, sin ir mas lejos que a la hora de definir en las curvas  $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ . Casorati llegó, mediante un razonamiento geométrico, a la expresión de la actualmente conocida como **curvatura de Casorati**  $C = \frac{1}{2}(k_1^2 + k_2^2)$ .

Se expone ahora el razonamiento geométrico seguido por Casorati [3], [33]. Sea una superficie  $S$  y un punto  $O$  de la misma. El primer paso es considerar el círculo geodésico  $\alpha$  de la superficie con radio  $\sigma$  y centro el punto  $O$ . Sea  $P$  un punto en  $\alpha$  y sea  $\delta$  la geodésica que cumple  $O = \delta(0)$  y  $P = \delta(\sigma)$ . Se denota su la dirección de su tangente en el punto  $O$  mediante  $u$ , i.e.  $u = \sigma'(0)$ . Sean  $\vec{N}(O)$  y  $\vec{N}(P)$  los vectores normales unitarios de  $\mathbb{R}^3$  en los puntos  $O$  y  $P$  de  $S$ . Entonces si  $\Delta\Psi_u$  es el ángulo que existe entre los vectores normales en  $O$  y  $P$ , este mide en cierta manera como se curva la superficie en la dirección  $u$ . A mayor ángulo, mayor curvatura experimenta la superficie en dicha dirección.

Se considera ahora el punto  $Q = \delta(\Delta\Psi_u)$ , es decir, el punto en  $S$  a distancia  $\Delta\Psi_u$  del punto  $O$ . Si se consideran todos los puntos  $Q$  para diferentes direcciones se obtiene una curva  $\Gamma$ .

Se ha visto que a mayor  $\Delta\Psi_u$ , mayor curvatura poseerá la superficie. Claramente a mayor  $\Delta\Psi_u$ , mayor área encerrará la curva  $\Gamma$ . Luego a mayor área encerrada por la curva, mayor será la curvatura de Casorati.

Casorati definió su curvatura como el límite cuando  $\sigma$  tiende a 0 del cociente entre el área que encierra  $\Gamma$ ,  $A(\Gamma)$  con el área que encierra el límite el círculo geodésico  $A(\delta)$ . La expresión simbólica es

$$C(O) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{A(\Gamma)}{A(\delta)}$$

No es muy complicado realizar los cálculos analíticos para calcular dicho límite, usando la notación previa y siendo  $\alpha$  el ángulo que forma el segmento  $\overline{OP}$  con una dirección fija del plano tangente a  $S$  en  $O$ , se calcula la integral mediante coordenadas polares y se tiene

$$C(O) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \overline{OQ}^2 d\alpha}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \overline{OP}^2 d\alpha} \quad (4.2)$$

Se realizan ahora los cálculos de las cuentas para llegar a la expresión conocida de la curvatura. Sea  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(x, y, z) = 0\}$  y si  $F_z(O) \neq 0$ , en un entorno de  $O$  se puede escribir la superficie como una superficie de Monge, esto es  $f(x, y) = (x, y, h(x, y))$ . Se tiene

$$f_x = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}\right); \quad f_y = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

Se quiere realizar el procedimiento anteriormente mencionado luego se busca calcular su vector normal para comprobar el ángulo que forma con el eje  $z$ .

$$\vec{N} = \frac{f_x \times f_y}{\|f_x \times f_y\|} = \frac{\left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right)\right\|}$$

Los cosenos de los ángulos  $\theta_i$  que forma este vector con los ejes se consiguen fácilmente mediante  $\vec{N} \cdot \vec{e}_i = \cos \theta_i$  con  $e_i$  el vector de la base canónica correspondiente al eje  $i$ . Adoptando la notación habitual se tiene

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

Y cosenos quedan

$$-\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

$$-\frac{p+dp}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}}, \quad -\frac{q+dq}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}}$$

Ahora bien, el sistema de referencia escogido es arbitrario. Se puede tomar tal que  $O$  se sitúe en el origen, la normal en el punto esté en el eje  $z$  y una de las tangentes principales esté en la dirección del eje  $x$ . Así se tiene que las coordenadas en este nuevo sistema son

$$x = y = z = 0, \quad p = q = 0, \quad s = 0,$$

$$dp = rdx, \quad dq = tdy$$

Esto no sólo simplifica los cálculos sino que también hace posible saber directamente los valores de la curvatura. Estos son  $r$  y  $t$  ya que el eje  $x$  está en una dirección principal y  $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = r$  y el eje  $y$  es ortogonal a este y así la otra dirección principal tiene esa dirección y como  $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = t$ .

Los diferenciales quedan

$$dx = OP \cos \alpha = \sigma \cos \alpha, \quad dy = OP \sin \alpha = \sigma \sin \alpha$$

$$dp = r\sigma \cos \alpha, \quad dq = t\sigma \sin \alpha$$

Ahora sólo tiene sentido calcular el coseno que forma el vector normal con el eje  $z$  pues este es el ángulo que forman las dos normales. Este es

$$\frac{1}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + 1}}$$

El signo del coseno realmente dependerá de la parametrización de la superficie ya que sabemos que el signo del vector normal depende de la misma. Esto no afecta a los cálculos siguientes. Calculando el seno se tiene

$$\sqrt{1 - \cos^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{dp^2 + dq^2 + 1}} = \frac{dp^2 + dq^2}{dp^2 + dq^2 + 1} = \frac{\sigma \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\sigma^2 (r^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha) + 1}}$$

Si se recuerda la ecuación 4.2 se busca el límite cuando  $\sigma$  tiende a 0, luego se puede aplicar infinitesimales al denominador ya que el término  $\sigma^2$  tiende a 0 más rápido que el resto. Así se tiene que la longitud  $\overline{OQ}$  es

$$\overline{OQ} = \sigma \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha}$$

Y por tanto la integral del numerador en la ecuación 4.2

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \overline{OQ}^2 d\alpha = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha) d\alpha$$

Que se resuelve fácilmente aplicando las igualdades trigonométricas  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  y  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ .

Además como  $\overline{OP} = \sigma$  para cualquier  $\alpha$ , debido a que es el radio del círculo geodésico, es inmediato ver que tiene valor  $2\pi\sigma^2$ . Así la curvatura de Casorati en el punto  $O$  tiene como expresión

$$C(O) = \frac{r^2 + t^2}{2}$$

Pero como se ha indicado antes,  $r$  y  $t$  son las curvaturas principales y por tanto si se denota  $r = k_1$  y  $t = k_2$  se tiene la expresión conocida de la curvatura

$$C = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2}$$

Estas cuentas se pueden repetir utilizando el operador de Casorati, que en el caso de superficies en  $\mathbb{R}^3$  es  $A_C = \mathcal{L}^2$  con  $\mathcal{L}$  el operador de Weingarten. Es bien sabido que este tiene dos autovectores

$(v_1, v_2)$  que son las direcciones principales de la superficie en el punto y sus autovalores asociados son las curvaturas principales  $(k_1^2, k_2^2)$ . Por tanto se tiene

$$A_C \cdot v_i = A^2 \cdot v_i = A \cdot A \cdot v_i = A \cdot k_i \cdot v_i = k_i^2$$

Luego los autovectores de  $A_C$  son los de  $\mathcal{L}$  y sus autovalores son  $k_1^2$  y  $k_2^2$ . Por lo tanto la curvatura de Casorati se obtiene como  $C = \frac{1}{2} \text{tr}(A_C) = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2}$ , la expresión previamente introducida.

Claramente se cumple que la curvatura de Casorati es constantemente nula si las dos curvaturas principales son constantemente nulas. Por tanto sólo se tiene  $C = 0$  para el plano.

Para que una superficie tenga curvatura de Casorati constante se ha de cumplir  $C = \frac{k_1^2 + k_2^2}{2} = \frac{a}{2}$  con  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , el factor 2 se incluye para facilitar la notación. Así una solución de esta expresión será

$$\begin{aligned} k_1 &= \pm \sqrt{a} \cdot \sin \theta \\ k_2 &= \pm \sqrt{a} \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Algunas superficies de curvatura de Casorati constante ya tratadas son la esfera de radio  $R$ ,  $C = \frac{1}{R^2}$ , y el cilindro circular de radio  $R$ ,  $C = \frac{1}{2R^2}$ .

Existe una clara relación entre la curvatura de Gauss, media y de Casorati. Basta observar sus expresiones para comprobar que

$$M^2 = \frac{G + C}{2}$$

Para puntos umbílicos se tiene

$$C = G = M^2$$

Como dato curioso se ha descrito la importancia de la curvatura de Casorati a la hora de crear una representación geométrica de la percepción visual. Es decir, las curvaturas de las percepciones visuales tempranas de superficies en los humanos se representan mejor mediante la curvatura de Casorati [23], [32]. Lo cual refuerza el planteamiento inicial propuesto por el mismo Casorati de que su curvatura es la más intuitiva.

## 4.2. Conjetura y energía de Willmore

La energía de Willmore es la medida de cuanto se desvía una superficie de ser una esfera. Se introdujo en el siglo XIX por S. Poisson y M. Germain [30]. Sin embargo, el formalismo matemático no llegó hasta T. Willmore.

Formalmente, para superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , la *energía de Willmore* de una superficie  $S$  compacta y orientable se expresa mediante

$$W = \int_S H^2 dA$$

donde  $H$  es la curvatura media.

En la literatura no existe unanimidad a la hora de definir este concepto. Algunos autores utilizan como definición la siguiente expresión

$$\bar{W} = \int_S H^2 dA - \int_S K dA$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss.

Para el caso de superficies regulares compactas y convexas es clara la equivalencia entre usar  $W$  y  $\bar{W}$  ya que, gracias al teorema de Gauss-Bonnet se sabe que

$$\int_S K dA = 2\pi k(S)$$

con  $k(S)$  la característica de Euler de la superficie que es invariante topológico y por tanto el segundo sumando de  $\bar{W}$  no depende de la parametrización escogida.

Se tiene que la energía de Willmore  $W$  tiene valor mayor o igual que  $4\pi$  y la igualdad se da en el caso en el que la superficie es una esfera. Esto es, Willmore demostró que para toda superficie compacta la de menor energía de Willmore es la esfera.

Esto es fácil de comprobar este hecho considerando  $S_+ = \{x \in S | K(x) \geq 0\}$  i.e. los puntos de la superficie de curvatura de Gauss no negativa se ve fácilmente que

$$W = \int_S H^2 dA \geq \int_{S_+} H^2 dA \geq \int_{S_+} K dA \geq 4\pi \quad (4.3)$$

donde la primera desigualdad resulta de que  $H^2$  es positivo y por tanto la integral sobre una superficie mayor será más grande. La segunda proviene de la relación introducida al principio del capítulo,  $H^2 \geq K$ . La última desigualdad es consecuencia de que la curvatura de Gauss es el jacobiano de la aplicación de Gauss, que sabemos que existe debido a que  $S$  es orientable. La aplicación de Gauss manda un punto de la superficie en un punto de la esfera unidad, de área  $4\pi$ , dado por su vector normal.

Obviamente la igualdad se da en las esferas ya que en estas  $H^2 = K = \frac{1}{R^2}$  y así  $W = \frac{1}{R^2} \text{area}(S) = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi$ .

Para superficies de género mayor que 1 es de esperar que este límite inferior para el valor que puede tomar la energía de Willmore sea mayor que el dado por la ecuación 4.3.

En particular Willmore creía que la cota inferior para el caso de toros regulares con embeddings en  $\mathbb{R}^3$  era

$$W \geq 2\pi$$

Esta relación se conoce como **conjetura de Willmore** y fue formulada en 1965. La igualdad se alcanza con el embedding del toro dado por  $f(\theta, \varphi) = ((\sqrt{2} + \cos \varphi) \cos \theta, (\sqrt{2} + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi)$ . Esta se trata de la proyección estereográfica del todo de Clifford en  $\mathbb{R}^3$  [31].

Numerosas variaciones de la conjetura fueron demostradas durante los años añadiendo más condiciones, por ejemplo los teoremas 2, 3 y 4 de [31].

Destaca la demostración de P. Li y S. Yan que demostraron [13] en 1982 que una inmersión que no fuese embedding tenía cota inferior de la energía de Willmore de  $8\pi$ .

No es hasta 2012 cuando F.C. Marques y A. Neves prueban la veracidad de la conjetura usando la teoría Min-Max de Almgren-Pitts de superficies. La prueba se puede encontrar en [15] pero su dificultad se escapa a los niveles y objetivos de este trabajo.

### 4.3. Inmersiones isométricas: teorema de Nash

Gracias al teorema de Whitney sabemos toda superficie diferenciable admite un embedding en  $\mathbb{R}^4$ .

**Teorema 4.1** (Segundo teorema de inmersión de Whitney [26, teorema 4.15]). *Toda variedad diferenciable de dimensión  $n$  admite un embedding regular en  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

Para obtener un resultado más general sobre embeddings se tuvo que esperar hasta 1956, cuando Nash demostró su teorema de inmersión.

**Teorema 4.2** (Teorema de inmersión de Nash [4, teorema 1.1]). *Toda variedad riemanniana de dimensión  $n$  admite un embedding isométrico en un espacio euclídeo  $\mathbb{E}^m$  con  $m = \frac{n}{2}(n+1)(3n+11)$ .*

En concreto, para el caso de superficies es  $n = 2$  y así  $m = 51$ . Es decir, toda superficies regular admite un embedding isométrico en  $\mathbb{R}^{51}$ . El problema de las inmersiones ha sido tratado por una gran cantidad de matemáticos desde los tiempos de Riemann, por tanto el resultado demostrado por Nash debería proporcionar ayuda a la hora de resolver ciertas cuestiones.

El teorema de Nash da la demostración de que las variedades pueden verse como subvariedades en un espacio mayor y así poder recurrir a argumentos extrínsecos a la hora de resolver ciertos problemas. Dicha afirmación es verdadera, sin embargo, el hecho de que una superficie esté inmersa en  $\mathbb{R}^{51}$ , o una  $n$ -variedad cualquiera en  $\mathbb{E}^{\frac{n}{2}(n+1)(3n+11)}$ , no siempre sirve de mucha ayuda ya que los espacios de grandes dimensiones suelen ser más difíciles de manejar y no existen muchos resultados válidos para subvariedades de dimensión arbitraria [4].

El problema tiene que ver con la codimensión de la variedad tratada, esto es la diferencia entre la dimensión del espacio que contiene la variedad con la dimensión de la variedad en sí. Para variedades de codimensión uno, las hipersuperficies, la geometría es similar a la que estamos acostumbrados en  $\mathbb{R}^3$  ya que se pueden definir, entre otros, los conceptos de curvaturas principales, curvatura de Gauss [11], curvatura media, recta normal.

# Bibliografía

- [1] A.D. Alexandrov. Uniqueness theorems for surfaces in the large. *American Mathematical Society*, 13(19):412–416, 1958.
- [2] R.L. Bryant. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space. *Astérisque*, 154-155:312–347, 1987.
- [3] F. Casorati. Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. *Acta Math*, 14:95–110, 1890.
- [4] B-Y. Chen. A tour through  $\delta$ -invariants: from nash's embedding theorem to ideal immersions, best waysof living and beyond. *Publications de l'institut mathématique*, 94(108):67–80, 2013.
- [5] Hilbert D. *Geometry and the Imagination*. Chelsea, 1952.
- [6] M.P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Prentice-Hall, 1990.
- [7] M. Dorff. Lecture notes on minimal surfaces. <http://www.jimrolf.com/complexGrant/ChapterMinSurfaces.pdf>, 2006. Brigham Young University.
- [8] E. García. Una introducción a la curvatura. <http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/Docencia/cys/Garcia%20Rio.pdf>. Universidad de Santiago de Compostela.
- [9] H. Hopf. Differential geometry in the large (second edition). Seminar lectures New York University 1946 and Stanford University 1956. Edited by A. Dold and B. Eckmann.
- [10] W.Y. Hsiang. Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the eucliden spaces. *Differential Geometry*, 17:337–356, 1982.
- [11] M.N. Ivaki. Deforming a hypersurface by gauss curvature and support function. *Journal of Functional Analysis*, 271:2133–2165, 2016.
- [12] N. Kapouleas. Constant mean curvature surfaces constructed by fusic wente tori. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 89:5695–5698, 1992.
- [13] S.T. Li, P.; Yau. A new conformal invariant and its applications to the willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. *Inventiones Mathematicae*, 69:269–291, 1982.
- [14] M. Lipschutz. *Geometría diferencial (Primera edición)*. McGraw-Hill, 1971.
- [15] A. Marques, F.C.; Neves. Min-max theory and the willmore conjecture. *Annals of Mathematics*, 179:683–782, 2012.
- [16] W.S. Massey. Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space. *Tohoku Mathematical Journal*, 14(1):73–79, 1962.
- [17] I. McIntosh. Harmonic tori and their spectral data. [https://www.researchgate.net/publication/2113847\\_Harmonic\\_tori\\_and\\_their\\_spectral\\_data](https://www.researchgate.net/publication/2113847_Harmonic_tori_and_their_spectral_data), 2004. The University of New York.

- [18] E. Bendito; M.J. Bowick; A. Medina. Delaunay surfaces. <https://www.researchgate.net/publication/236935602>, 2013. Universidad Politécnica de Cataluña / Syracuse University.
- [19] E. Bendito; M.J. Bowick; A. Medina. A natural parametrization of the roulettes of the conics generating the delaunay surfaces. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, 33:27–45, 2014.
- [20] W.H.; Pérez, J.; Tinaglia, G. Meeks III. Constant mean curvature surfaces. <https://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/Survey-JDG-Meeks-April26-2016.pdf>, 2016. Universidad de Granada.
- [21] G.D. Millman, R.S.; Parker. *Elements of differential geometry*. Prentice-Hall, 1977.
- [22] J.A. Montaldi. Surfaces in 3-space and their contact with circles. *Journal of Differential Geometry*, 23:109–126, 1986.
- [23] P. Ons, B.; Verstraelen. A geometrical description of visual sensation. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 33:5–15, 2010.
- [24] J. Oprea. *Differential geometry and its applications*. Prentice Hall, 1997.
- [25] M. Pember. Weierstrass-type representations. *Geometriae Dedicata*, 204:299–309, 2020.
- [26] M. Persson. The whitney embedding theorem. Trabajo de fin de grado, University of Umeå, 2014.
- [27] H. Poincaré. *Science and hypothesis*. The Walter Schott Publishing CO., 1905.
- [28] R. Sharma. The weierstrass representation always gives a minimal surface. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 14(1), 2013.
- [29] D.J. Struik. *Lectures on classical differential geometry*. Addison–Wesley, 1961.
- [30] M.D. Toda. *Willmore Energy and Willmore Conjecture (1st Edition)*. Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [31] P. Topping. Towards the willmore conjecture. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 11:361–393, 2000.
- [32] L. Verstraelen. The geometry of eye and brain. *Soochow Journal of Mathematics*, 30(3):367–376, 2004.
- [33] L. Verstraelen. Geometry of submanifolds. i. the first casorati curvature indicatrices. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 37(1):5–23, 2013.
- [34] Kühnel W. *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds (Second Edition)*. American Mathematical Society, 1950.
- [35] H. Wente. Counterexample to a conjecture of h. hopf. *Pacific Journal of Mathematics*, 121(1):193–243, 1986.