Facultad de Ciencias

Desigualdades funcionales y ecuaciones en derivadas parciales

(Functional inequalities and partial differential equations)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Samuel Viar Fernández

Director: Rafael Granero Belinchón

Septiembre - 2021

Resumen

El estudio de las desigualdades funcionales es un área bastante activa de la investigación en Análisis Matemático. Eso es así en parte por dos razones: estas desigualdades nos permiten entender en ocasiones cómo se relacionan unos espacios de funciones con otros y al mismo tiempo podemos usarlas para demostrar diversas propiedades de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. De la misma manera, a veces el estudio de ciertas ecuaciones en derivadas parciales arroja nuevas desigualdades funcionales interesantes por sí mismas.

En este TFG estudiaremos diversas desigualdades funcionales para espacios de Sobolev así como algunas de sus aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales de evolución. También veremos ciertos resultados que realizan el camino inverso: plantean el estudio de una ecuación en derivadas parciales como medio para obtener nuevas desigualdades funcionales.

Abstract

The study of functional inequalities is a fairly active area of research in Mathematical Analysis. This is partly for two reasons: these inequalities sometimes allow us to understand how function spaces are related to each other, and at the same time we can use them to prove several properties of certain partial differential equations. In the same way, sometimes the study of certain partial differential equations yields new functional inequalities that are interesting in their own right.

In this dissertation we will study several functional inequalities for Sobolev spaces as well as some of their applications to evolution partial differential equations. We will also see certain results that go the other way round: they propose the study of a partial differential equation as a mean to obtain new functional inequalities.

Índice

1. Los orígenes de los Espacios de Sobolev

En esta sección vamos a introducir los Espacios de Sobolev así como un poco de su historia [1] y algunas definiciones.

Primeramente, vamos a comentar lo que es el cálculo de variaciones. El cálculo de variaciones es un problema matemático que consiste en buscar máximos y mínimos de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional. Se puede ver como una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una sola variable.

Desde el principio del desarrollo del cálculo clásico de variaciones se consideró evidente que los problemas mínimos de las integrales variacionales que tienen un límite inferior finito, admiten una función minimizadora. En particular, la validez del llamado "Principio de Dirichlet"fue ampliamente aceptada: la integral variacional integral

$$\mathcal{D}(u) := \int_\Omega |Du|^2 dx \quad (\textit{Integral de Dirichlet})$$

donde Du es el vector gradiente de u, admite una función minimizadora en cada subconjunto apropiado de funciones de $C^1(\Omega)$ done Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$. Este principio ejerció un papel importante en el desarrollo de la teoría de las funciones analíticas y fue utilizado por B. Riemann sin justificación matemáticamente satisfactoria.

En 1870, K. Weierstrass observó que la existencia de funciones minimizadoras para las integrales variacionales no está garantizada. Para verlo consideró el siguiente problema de minimización:
Minimizar el funcional

$$\text{minimizar } \mathcal{I}(u) := \int_{-1}^{1} t^2(u'(t))^2 dt \quad \text{sobre } K$$

donde

$$\mathcal{K} := \{u \in C^1([-1,1]) \text{ tal que } u(-1) = -1,\ u(1) = 1\}$$

Claramente, $\mathcal{I}$(u) ≥ 0 para todo u $\in \mathcal{K}$. Para determinar el ínfimo de $\mathcal{I}$ en $\mathcal{K}$, define

$$u_\epsilon(t) := \frac{\arctan \frac{t}{\epsilon}}{\arctan \frac{1}{\epsilon}}, \quad \epsilon > 0,\ t \in [-1,1]$$

Entonces $u_\epsilon \in \mathcal{I}(u_\epsilon) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Se deduce entonces

$$inf\ \{\ \mathcal{I}(u) \mid u \in \mathcal{K}\ \} = 0$$

Sin embargo no existe una función $u_0 \in \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{I}(u_0) = 0$. En efecto, $\mathcal{I}(u_0)$ =0 implica que u_0(t) = const para todo t $\in$ [-1, 1], por lo que u_0(-1) = u_0(1), es decir, $u_0 \notin \mathcal{K}$.

Consideremos un ejemplo de problema mínimo de $\mathcal{D}$(u) para funciones de varias variables. Definimos

$$\Omega := B_1(0) \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid 0 < |x| < 1\}$$

$$\mathcal{M} := \{u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \mid u(0) = 1,\ u(x) = 0\ \forall |x| = 1,\ \int_\Omega |Du|^2 dx < \infty\ \}$$

El problema de mínimos para la integral de Dirichlet $\mathcal{D}$(u) es ahora el siguiente

$$minimizar \quad \mathcal{D}(u) = \int_\Omega |Du|^2 dx \ \ sobre\ \mathcal{M}$$

Claramente, $\mathcal{D}(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{M}$. Para determinar el ínfimo de $\mathcal{D}(u)$ cuando u recorre $\mathcal{M}$, fijamos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\eta(t) = 1$ para $t \leq 1$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$ para 1 $< t < 2$, y $\eta(t) = 0$ para $t \geq 2$. Sea $0 < \epsilon < 1$, se define

$$u_\epsilon(x) := \begin{cases} 1 - \eta\left(\dfrac{\log|x|}{\log \epsilon}\right) & si\ \ 0\ <\ |x|\ \leq\ 1, \\ 1 & si\ \ x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Entonces

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 \ \ si\ \ |x|\ \leq\ \epsilon^2, \\ 0 \ \ si\ \ \epsilon\ \leq |x|\ \leq\ 1 \end{cases} \tag{2}$$

Por lo tanto, $u_\epsilon \in C_c^\infty(B_1(0))$. En particular,

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ |x|\ \leq\ \epsilon^2, \\ -\eta'\left(\dfrac{\log|x|}{\log \epsilon}\right)\dfrac{x_i}{(\log \epsilon)|x|^2} & si\ \ \epsilon^2\ \leq\ |x|\ \leq\ \epsilon, \\ 0 & si\ \ \epsilon\ < |x|\ \leq 1 \end{cases} \tag{3}$$

(i=1,...,n). Usando coordenadas esféricas encontramos

$$\int_{B_1(0)} |Du_\epsilon(x)|^2 dx \ \leq\ \max_{\mathbb{R}} |\eta'| \frac{n|B_1|}{(\log \epsilon)^2} \int_{\epsilon^2}^{\epsilon} r^{n-3} dr =$$

$$= \max_{\mathbb{R}} |\eta'| \frac{n|B_1|}{(\log \epsilon)^2} \begin{cases} -\log \epsilon & si\ \ N\ =\ 2, \\ \dfrac{1}{N-2}(\epsilon^{N-2} - \epsilon^{2(N-2)}) & si\ \ N \geq 3 \end{cases}$$

$$\to 0 \ cuando\ \epsilon \to 0$$

Entonces obtenemos

$$\text{ínf}\ \{\mathcal{D}(u) \mid u \in \mathcal{M}\} = 0.$$

De forma análoga al ejemplo de Weierstrass, no existe $u_0 \in \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{D}(u_0) = 0$ (de hecho, $\mathcal{D}(u_0) = 0$ implicaría $u_0(\mathrm{x}) =$ const para todo $|x| \leq 1$, pero este u_0 no obedece las condiciones de contorno tanto en x = 0 como en $\{x| \ \ |x| = 1\}$).

El ejemplo de Weierstrass indicó la necesidad de establecer con total rigor la existencia de funciones minimizadoras para integrales variacionales dentro de clases de funciones apropiadas. El primer progreso importante en la justificación del "Principio de Dirichlet"se ha realizado utilizando la clase de funciones continuas de varias variables que son absolutamente continuas en cada variable para casi todas las demás. Estos trabajos fueron iniciados por matemáticos italianos, como G. Fubini y L. Tonelli durante las dos primeras décadas del siglo pasado

Desde la década de 1920, otro impulso para el uso de las mismas clases de funciones de la escuela de *Gotinga*, motivado por la creciente interacción entre el análisis funcional y la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. En este caso, el marco funcional para los problemas de frontera y de valores propios para las ecuaciones en derivadas parciales, condujo a la consideración de la clase aquellas funciones L^2 que tienen derivadas débiles en L^2. Estas clases de funciones resultaron ser un marco apropiado para el estudio de las propiedades espectrales de los operadores diferenciales.

El trabajo de S.L. Sobolev se desarrolló en la escuela de San Petersburgo de ecuaciones diferenciales parciales. Tras finalizar sus estudios en 1929, S.L.Sobolev trabajó en el Instituto Sismológico de la Academia de Ciencias de San Petersburgo hasta 1932. Durante este tiempo, sus investigaciones matemáticas se centraron principalmente en la propagación de ondas en medio no homógeneos.

En 1935, S.L.Sobolev presentó una teoría de soluciones generalizadas de la ecuación de ondas. Además, esbozó la influencia de los trabajos de N.M. Gjunter sobre este concepto de solución, como se muestra a continuación:

> "*Como veremos más adelante, muy cerca de este campo de ideas están las investigaciones de N. M. Gjunter que se ocupan de la ecuación de potencial y la ecuación del calor. N. M. Gjunter mostró que para estos problemas de física matemática se ha demostrado que es útil pasar de la ecuación diferencial en su forma clásica a la investigación de ciertas identidades integrales que contienen derivadas de órdenes menores que las de la ecuación diferencial de la que partimos* "

En este trabajo se define una solución generalizada de la ecuación de ondas como el límite L^1 de las soluciones de clase C^2 de dicha ecuación. En estas investigaciones se hace un uso extensivo de la función media de una función integrable.

En 1935, S.L.Sobolev escribió otro artículo, en el cual introducía un concepto de funciones lineales continuas en espacios de funciones continuamente diferenciables, y anunció un teorema de existencia de una solución para una gran clase de ecuaciones hiperbólicas.

S.L.Sobolev no continuó el estudio de este nuevo concepto de solución de ecuaciones hiperbólicas, sino que se dedicó a la investigación de funciones continuamente diferenciables que son integrables al cuadrado en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y al estudio de la ecuación poliarmónicas. Presentó una representación integral para funciones continuamente diferenciables de forma continua, que hoy en día se denomina representación integral de Sobolev".

Además, Sobolev también demostró la existencia de una solución generalizada del problema de valor límite de Dirichlet para la ecuación poliédrica estableciendo la existencia de una función minimizadora de la integral variacional asociada. Este método variacional parece estar inspirado en los trabajos de la escuela de Gotinga.

A partir de 1936, S.L. Sobolev comenzó a desarrollar los fundamentos de la teoría de los espacios $W^{(m,p)}$. Tiempo más tarde, en 1938, S.L.Sobolev introdujo la clase de aquellas funciones L^1 que tienen todas las derivadas generalizadas (débiles) de un orden fijo ν en L^p. Para esta clase de funciones estableció resultados que más tarde se llamaron " teoremas de inmersión ". En ese trabajo, demostró los teoremas de inmersión para dominios que tienen forma de estrella con respecto a una bola. Posteriormente, sustituyó la notación $L_p^{(\nu)}$ por $W^{(m,p)}$. En su famosa monografía, aparecida en 1950, estudió sistemáticamente los espacios $W^{(m,p)}$ y los utilizó para la investigación de ecuaciones hiperbólicas y elípticas. Además, basándose en su representación integral para funciones suaves, demostró la inclusión $W^{(m,p)} \subset L^q$.

Por otro lado, los espacios de funciones absolutamente continuas cuyas derivadas parciales están en L^p, han sido utilizados por B. Levi(1906)($p = 2$) y a partir de los años 20 por L. Tonelli ($p = 1$ y $p \geqslant 2$) como escenario de teorías de existencia para problemas de mínimos de integrales variacionales. J. Leray (1934) utilizó el espacio $W^{(1,2)}(\mathbb{R}^3)$ como marco para sus investigaciones sobre las ecuaciones no estacionarias de Navier-Stokes. A continuación, C. W. Calkin y Ch. B. Morrey (1940) introdujeron el espacio $W^{1,p}$ y demostraron una serie de propiedades importantes de sus elementos.

Después de la década de 1950, los espacios $W^{(m,p)}$ se convirtieron en un campo de investigación en rápido crecimiento. Posteriormente, estos espacios han recibido el nombre de "Espacios de Sobolev".

En este trabajo nos vamos a centrar más concretamente en los espacios de Sobolev $W^{1,p}$,[2] cuya definición es la siguiente:

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \ tal \ que \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi; \forall \varphi \in C_c^1(I)\}$$

2. Desigualdades de Sobolev y aplicaciones a la extinción de las soluciones de ciertas ecuaciones singulares de difusión

En este capítulo trataremos dos temas, primeramente algunas desigualdades de Sobolev, acompañadas de sus respectivas demostraciones, y a continuación, trataremos algunas aplicaciones a la extinción de las soluciones de ciertas ecuaciones singulares de difusión, en las cuales se requieren de las desigualdades de Sobolev.

2.1. Desigualdades de Sobolev

Primeramente, vamos a ver la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.[3] Para esta desigualdad, vamos a asumir que $1 \leq p < n$, y nos preguntamos si podemos establecer una estimación de la forma

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{4}$$

siendo $C > 0$ una constante, $1 \leq q < \infty$, y $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. La cuestión es que las constantes C y q no deben depender de u.

Demostremos primero que si cualquier desigualdad de la forma (4) es válida, entonces el número q no puede ser arbitrario sino que debe tener una forma muy específica. Para ello, elijamos una función $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \not\equiv 0$, y definamos para $\lambda > 0$ la función reescalada

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Aplicando (4) a u_λ, encontramos

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{5}$$

Ahora

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dy,$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda|^p \, dx = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p \, dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p \, dy,$$

Insertando estas igualdades en (5), descubrimos

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\frac{\lambda}{\lambda^{n/p}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

y entonces

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6}$$

Pero entonces si $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} \neq 0$, podemos a enviar λ a 0 o ∞ en (6) y obtenemos una contradicción. Por lo tanto, si de hecho la desigualdad deseada (4) se mantiene, tenemos necesariamente $1 - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} = 0$; entonces $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, $q = \dfrac{np}{n-p}$.

Esta observación motiva la siguiente definición:

Definición 2.1.1. Si $1 \leq p < n$, el conjugado de Sobolev de p es

$$p^* := \frac{np}{n-p} \tag{7}$$

notando que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad p^* > p \tag{8}$$

El análisis de escala anterior muestra que la estimación (4) sólo puede ser cierta para $q = p^*$. A continuación demostramos que esta desigualdad es de hecho válida.

Teorema 2.1.1.(Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) Asumiendo que $1 \leq p < n$ entonces existe una constante C, que depende sólo de p y n, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{9}$$

para todo $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$.

Ahora sí que necesitamos que u tenga un soporte compacto para que (9) se cumpla, como muestra el ejemplo $u \equiv 1$. Pero, notablemente, la constante aquí no depende en absoluto del tamaño del soporte de u.

Demostración. 1. Primero asumimos $p = 1$
Como u tiene soporte compacto, para cada $i = 1, ..., n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, dy_i;$$

y entonces

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, ..., y_i, ..., x_n)|\, dy_i \quad (i = 1, ..., n). \tag{10}$$

Integrando esta desigualdad respecto a x_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-q}} dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dx_1 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{11}$$

siendo la última desigualdad resultante de la desigualdad general de Hölder.
La desigualdad general de Hölder es la siguiente [2]:

Sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f \cdot g \in L^1$ y

$$\|fg\|_1 \ \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{12}$$

Ahora integramos (11) respecto a x_2:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\ dx_1 dx_2 \ \leq \ \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dx_1 dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1\ i\neq 2}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

siendo

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dy_1, \quad I_i := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dx_1 dyi \ \ (i \ = \ 3, ..., n).$$

Aplicando una vez más la desigualdad de Hölder (12), encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\ dx_1 dx_2$$
$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dx_1 dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dy_1 dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du| dx_1 dx_2 dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Continuamos integrando con respecto a x_3,...,x_n eventualmente para encontrar

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\ dx \ \leq \ \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du|\ dx_1 ... dy_i ... dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}} \ = \ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\ dx\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{13}$$

Esto es para el caso de $p = 1$.

2. Consideremos ahora el caso de que $1 < p < n$. Aplicamos la estimación (13) a v:=$|u|^{\gamma}$, donde se debe seleccionar $\gamma > 1$. Entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\ dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \ \leq \ \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^{\gamma}|\ dx \ = \ \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma - 1} |Du|\ dx$$

$$\leq \ \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Elegimos γ para que $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\dfrac{p}{p-1}$. Es decir, fijamos

$$\gamma \ := \ \frac{p\,(n-1)}{n-p} \ > \ 1,$$

en este caso $\dfrac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\dfrac{p}{p-1} = \dfrac{np}{n-p} = p^*$. De ahí que, en vista de (4), tenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \ \leq \ C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 2.1.2. Sea U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, y supongamos que ∂U es de tipo C^1. Supongamos que $1 \leq p < n$, y que $u \in W^{1,p}(U)$. Entonces $u \in L^{p^*}(U)$, con la estimación

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \ \leq \ C\|u\|_{W^{1,p}(U)} \tag{15}$$

donde la constante C depende sólo de p,n y U.

La importancia de este teorema surge con el fin de ver todo $u \in L^{p^*}$ también se cumple que $u \in W^{1,p}$. Notemos que la norma de $W^{1,p}$ viene definida tal que así:

$$\|u\|_{W^{1,p}} \ = \ \|u\|_{L^p} + \|Du\|_{L^p}$$

De ahí que, en (15) se emplea la norma de u, y no la norma de Du, ya que si u es constante, Du es igual cero, y por lo tanto la desigualdad (15) no se cumpliría. Es por esto que se emplea la norma de u en $W^{1,p}$ y no la de Du en L^p

A continuación, vamos a exponer un teorema en el cual se necesita del conjunto $W_0^{1,p}$, el cual es la clausura de C_c^1 en $W^{1,p}$ para $1 \leq p < \infty$. Además, cabe señalar que el espacio $W_0^{1,p}$ está dotado de la norma inducida por $W^{1,p}$, es un espacio de Banach separable, y es reflexivo para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.1.3. Sea U un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $u \in W_0^{1,p}(U)$ para $1 \leq p < n$. Entonces tenemos

$$\|u\|_{L^q(U)} \ \leq \ C\|Du\|_{L^p(U)}$$

donde $q \in [1, p^*]$, y C es una constante.
En particular, para $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|u\|_{L^p(U)} \ \leq \ C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

Esta estimación se denomina desigualdad de Poincaré. La diferencia con el teorema 2.1.2 es que sólo el gradiente de u aparece en el lado derecho de la desigualdad. En vista de esta estimación, en $W_0^{1,p}(U)$ la norma $\|Du\|_{L^p(U)}$ es equivalente a $\|u\|_{W_0^{1,p}(U)}$, si U está acotado.

Demostración. Supongamos que Ω sea acotado en una dirección paralela a los ejes de coordenadas. Así, sea $R := \{(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \; tal \; que \; x_n \in (a, b)\}$ tal que $\Omega \subset R$. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces existen $\phi_m \in C_0^\infty(\Omega)$ para $m = 1, ...,$ tal que $\phi_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.
Como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces $\overline{u} \in W^{1,p}(R)$, donde

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si \;\; x \in \Omega, \\ 0 & si \;\; x \in R - \Omega \end{cases}$$

Sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *entonces* $\overline{\phi} \in C_0^\infty(R)$ *y*

$$\overline{\phi}(x_1, ..., x_{n-1}, x) - \overline{\phi}(x_1, ..., x_{n-1}, a) = \int_a^x \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, s) \; ds$$

Entonces, empleando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} \left|\overline{\phi}(x_1, ...x_{n-1}, x_n)\right| &= \left| \int_a^x \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, s) \; ds \right| \\ &\leq \int_a^x \left| \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, s) \right| \; ds \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, s) \right| \cdot 1 \; ds \\ &\leq \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, s) \right|^p \; ds \right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (16) \end{aligned}$$

Si elevamos a la potencia p e integrando (16) sobre (a, b), con respecto a x tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \left|\overline{\phi}(x_1, ..., x_{n-1}, x)\right|^p \; dx &\leq \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, s) \right|^p \; ds \right) \int_a^b (b-a)^{p-1} \; dx \\ &= \int_a^b \left| \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_n}(x_1, ..., x_{n-1}, s) \right|^p \; ds \; \cdot \; (b-a)^p \qquad (17) \end{aligned}$$

Luego si integramos (17) con respecto a $\overline{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$ tenemos

$$\int_R \left|\overline{\phi}(y)\right|^p \; dy \leq \int_R \left| \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_n}(y) \right|^p \; dy \; (b-a)^p$$

pero como $\int_R \left|\overline{\phi}(y)\right|^p dy = \int_\Omega |\phi(y)|^p\, dy$ y $\int_R \left|\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x_n}(y)\right|^p dy = \int_\Omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(y)\right|^p dy$ entonces

$$\int_\Omega |\phi(y)|^p\, dy \;\leq\; \int_\Omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x_n}(y)\right|^p dy\ (b-a)^p$$

Esto es,

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega)} \;\leq\; \left\|\frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right\|_{L^p(\Omega)} \cdot (b-a), \quad \forall\phi \;\in\; C_0^\infty,$$
$$\|\phi\|_{L^p(\Omega)} \;\leq\; \|D\phi\|_{L^p(\Omega)} \cdot C, \quad \forall\phi \;\in\; C_0^\infty$$

Teorema 2.1.4.(Desigualdad de Morrey) Asumiendo $n < p \leq \infty$. Entonces existe una constante C, que depende sólo de p y n, tal que

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{18}$$

para todo $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, donde

$$\gamma \;:=\; 1 \;-\; \frac{n}{p}$$

Demostración. 1. Afirmamos que existe una constante C, que depende de n y r, tal que

$$\int_{B(x,r)} |u(y) \;-\; u(x)|\; dy \;\leq\; C\int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\; dy \tag{19}$$

para toda bola $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$.

Para demostrarlo, fijamos un punto $\omega \in \partial B(0,1)$. Entonces si $0 < s < r$,

$$|u(x \;+\; s\omega) - u(x)| \;=\; \left|\int_0^s \frac{d}{dt}u(x \;+\; t\omega)\; dt\right|$$

$$= \left|\int_0^s Du(x \;+\; t\omega)\cdot\omega\; dt\right|$$

$$\leq \int_0^s |Du(x \;+\; t\omega)|\; dt.$$

Por lo tanto

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x + s\omega) - u(x)| \, dS(\omega) \leq \int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x + t\omega)| \, dS(\omega). \qquad (20)$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\int_0^s \int_{\partial B(0,1)} |Du(x + t\omega)| \, dS(\omega)dt &= \int_0^s \int_{\partial B(x,t)} \frac{|Du(y)|}{t^{n-1}} \, dS(y)dt \\
&= \int_{B(x,s)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \\
&\leq \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy,
\end{aligned}$$

donde hacemos el cambio $y = x + t\omega$, $t = |x - y|$. Por lo tanto

$$\int_{\partial B(0,1)} |u(x+s\omega) - u(x)| \, dS(\omega) = \frac{1}{s^{n-1}} \int_{\partial B(x,s)} |u(z) - u(x)| \, dS(z),$$

siendo $z = x + s\omega$. Ahora utilizando (20) ,vemos

$$\int_{\partial B(x,s)} |u(z) - u(x)| \, dS(z) \leq s^{n-1} \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} \, dy$$

A continuación integramos respecto a s desde 0 a r, y obtenemos:

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(x)| \, dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} \, dy$$

Ahora si llamamos $C = \dfrac{r^n}{n}$, obtenemos (19), y quedaría probado.

2. Ahora elegimos un $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, aplicando (19) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|u(x)| = |u(x) + u(y) - u(y)| &\leq \int_{B(x,1)} |u(x) - u(y)| \, dy + \int_{B(x,1)} |u(y)| \, dy \\
&\leq C \int_{B(x,1)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy + C\|u\|_{L^p(B(x,1))} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p \, dy \right)^{1/p} \left(\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} + C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

La última estimación se mantiene ya que $p > n$ implica que $(n-1)\dfrac{p}{p-1} \leq n$, por lo tanto

$$\int_{B(x,1)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\, dy \;<\; \infty$$

Como $x \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} |u| \;\leq\; C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n} \tag{21}$$

3. A continuación, escogemos $x, y \in \mathbb{R}^n$ y sea $r := |x-y|$. Sea $W := B(x,r) \cap B(y,r)$. Entonces tenemos

$$|u(x)-u(y)| \;= |u(x)-u(y)+u(z)-u(z)| \;\leq\; \int_W |u(x)-u(z)|\; dz + \int_W |u(y)-u(z)| \tag{22}$$

Si aplicamos (19) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_W |u(x)-u(z)|\; dz \;&\leq\; C\int_{B(x,r)} |u(x)-u(z)|\; dz \\
&\leq\; C\left(\int_{B(x,r)} |Du|^p dz\right)^{1/p} \left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-z|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} dz\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (23)\\
&\leq\; C\left(r^{n-(n-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{1/p} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&=\; Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

De forma similar obtenemos,

$$\int_W |u(y)-u(z)|\; dz \;\leq\; Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Sustituyendo esta estiamación y (23) en (22) se obtiene

$$|u(x)-u(y)| \;\leq\; Cr^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \;=\; C|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

De ahí que

$$[u]_{C^{0,1-n/p}(\mathbb{R}^n)} \;=\; \sup_{x\neq y}\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-n/p}}\right\} \;\leq\; C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Por lo tanto, con esta desigualdad y con (21), quedaría probado (18).

2.2. Extinción de soluciones de ecuaciones singulares de difusión

Una desigualdad de Sobolev invariante de escala. Nuestro límite para el tiempo de extinción hará uso de la desigualdad de Sobolev, para $n \geqslant 2$

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{n}{n-1}}\ dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \ \leq\ S_n \int_\Omega |Du|\,. \tag{24}$$

Esta estimación es válida para

(a) cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue finita, para todo u con media 0.
(b) cuando $\Omega = \mathbb{T}^n$, para todo u periódico con media 0.

Sin embargo, la estimación sigue dependiendo de la forma del dominio. Para explicar la dependencia en la forma del dominio, vamos a centrarnos en la configuración periódica (b) en un espacio de dimensión 2. Sea C_L la mejor constante para (24) cuando u es periódica con valor medio 0 y con periodo $[0, L) \times [0, 1/L)$. Restringiendo la atención a $u(x) = f(x_1)$, tenemos

$$\left(\int_0^L |f(x_1)|^2\ dx_1\right)^{1/2} L^{-1/2} \ \leq\ C_L L^{-1} \int_0^L |f'(x_1)|\, dx_1$$

para todo f con media 0. Haciendo un cambio de variable $x_1 = Lz$, obtenemos

$$\left(\int_0^1 |g(z)|^2\ dz\right)^{1/2} \ \leq\ C_L L^{-1} \int_0^1 |g'(z)|\, dz$$

para todo g con valor medio 0. De ello se desprende que C_L/L queda acotado lejos de 0 cuando $L \to \infty$. De ahí que, en la configuración periódica la mejor constante en (24) tiende a infinito cuando el periodo se vuelve muy excéntrico.

Un límite superior para el tiempo de extinción. Nos interesa el tiempo de extinción $T^*(u_0)$ de la solución de la ecuación

$$u_t = \mathrm{div}\ \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$$

con una de las condiciones de frontera. Está definida por

$$T^*(u_0) = \inf\{t \in (0, \infty)\ :\ u(x, \tau) = 0\ para\ \tau \geqslant t\}$$

donde u es la solución con datos iniciales u_0. Nuestro principal resultado es

Teorema 2.2.1. Para el problema periódico de dimensión $n \geqslant 2$ con dato inicial $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$, el tiempo de extinción satisface

$$T^*(u_0) \ \leq\ S_n \|u_0\|_{L^n}$$

Demostración. Está claro para el caso $n = 2$.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u|^2 \; dx = -\int_{\Omega} |\nabla u| \tag{25}$$

Sea $\Omega = \mathbb{R}^n$.Por la desigualdad de Sobolev invariante de escala (24) tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} |u|^2 \; dx \;\leq\; -\frac{1}{S_2}\left(\int_{\Omega} |u|^2 \; dx\right)^{1/2} \tag{26}$$

de donde se sigue

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}(t) \;\leq\; -S_2^{-1} \text{ siempre que } \|u\|_{L^2}(t) \neq 0$$

Este argumento se aplica también al problema de frontera de Dirichlet, siempre que sustituyamos u por $\overline{u}$. Por lo tanto, en todas las configuraciones tenemos

$$\|u\|_{L^2}(t) \;\leq\; \|u_0\|_{L^2} - S_2^{-1}t, \text{para } t < T^*(u_0)$$

Como el lado izquierdo es no negativo, concluimos que $T^*(u_0) \;\leq\; S_2\|u_0\|_{L^2}$.

Para $n \geqslant 3$, la prueba es más complicada. Comenzamos con un cálculo formal, multiplicamos la EDP

$$u_t \;=\; \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \tag{27}$$

por u^{n-1}, y tenemos

$$\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u^n \; dx \;=\; \int_{\Omega} u^{n-1}u_t \; dx \;=\; \int_{\Omega} u^{n-1}\operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|) \; dx$$

Si integramos por partes, encontramos que el lado derecho es igual a

$$\begin{aligned} -(n-1)\int_{\Omega} u^{n-2}\nabla u \;\cdot\; \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \; dx \;+\; \int_{\partial\Omega} u^{n-1}\frac{\partial u/\partial v}{|\nabla u|} \; dS \;=\; \\ -(n-1)\int_{\Omega} u^{n-2}|\nabla u| \; dx \;=\; -\int_{\Omega} \left|\nabla u^{n-1}\right| \; dx \end{aligned}$$

Aquí hemos empleado la condición de contorno de Dirichlet para concluir que la integral en la frontera es igual a cero.

Aplicando la estimación de Sobolev invariante de escala (24) obtenemos lo siguiente

$$\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u^n \; dx \;\leq\; -S_n^{-1}\left(\int_{\Omega} u^n \; dx\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

De ahí que concluimos

$$\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^n}^n \;\leq\; -S_n^{-1}\|u\|_{L^n}^{n-1} \tag{28}$$

Es fácil ver que (28) implica nuestra estimación del tiempo de extinción.

Si queremos obtener más información acerca de este tema, podemos verlo en [4].

3. Desigualdades de Landau-Kolmogorov y su aplicación a la existencia de soluciones para leyes de conservación .

En este capítulo, vamos a ver y demostrar la desigualdad de Landau-Kolmogorov, así como algún caso especial, y además, vamos a emplear dicha desigualdad para estudiar su aplicación a la existencia de soluciones para leyes de conservación.

3.1. Desigualdades de Landau-Kolmogorov

Vamos a comentar algunas observaciones sobre resultados relativos a la desigualdad de Landau,

$$\|f'\|_{L^\infty} \leq 2\|f''\|_{L^\infty}^{1/2}\|f\|_{L^\infty}^{1/2}$$

y la desigualdad de Kolmogorov,

$$\|f^{(k)}\|_{L^\infty} \leq K(k,n)\|f^{(n)}\|_{L^\infty}^{k/n}\|f\|_{L^\infty}^{1-(k/n)}$$

donde las mejores constantes $K(k,n)$ fueron determinadas en $C(-\infty,\infty)$ por Kolmogorov.

Observación 3.1.1 Para $C(\mathbb{R})$ un caso especial de la desigualdad de Kolmogorov es $\|f'\| \leq \sqrt{2}\|f''\|^{1/2}\|f\|^{1/2}$.

Demostración Vamos a demostrar que

$$\|f'(x)\|_{L^\infty}^2 \leq 2\|f(x)\|_{L^\infty}\|f''(x)\|_{L^\infty}$$

o lo que es lo mismo

$$\sup\, |f'(x)|^2 \leq 2\, \sup|f(x)|\, \sup|f''(x)|$$

Suponiendo que f es no negativo se obtiene lo siguiente

$$|f'(x)|^2 \leq 2f(x)\, \sup|f''(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En efecto, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$0 \leq f(x+t) = f(x) + tf'(x) + \frac{t^2 f''(\epsilon)}{2}$$

Por lo tanto, sabemos

$$0 = f(x) - f(x+t) + tf'(x) + t^2\frac{f''(\epsilon)}{2}$$

y entonces,

$$0 \leq 2\|f\|_{L^\infty} + t\|f'\|_{L^\infty} + \frac{t^2}{2}\|f''\|_{L^\infty} = p(t)$$

Ahora, vamos a calcular las raíces de $p(t)$:

$$t = \frac{-\|f'\|_{L^\infty} \pm \sqrt{\|f'\|^2_{L^\infty} - 4 \cdot 2\|f\|_{L^\infty} \cdot \frac{\|f''\|_{L^\infty}}{2}}}{4\|f\|_{L^\infty}}$$

Como $p(t)$ es no negativo, entonces o tiene una raíz doble o no tiene raíces, por lo tanto

$$\|f'\|^2_{L^\infty} - 4 \cdot 2\|f\|_{L^\infty} \cdot \frac{\|f''\|_{L^\infty}}{2} \leq 0$$

y entonces

$$\|f'\|^2_{L^\infty} \leq 4\|f\|_{L^\infty}\|f''\|_{L^\infty}$$

Por lo que quedaría probado.

Teorema 3.1.1 Si para un espacio de Banach X tenemos $\|f'\| \leq M\|f''\|^{1/2}\|f\|^{1/2}$, entonces para $0 < k < n$ existen constantes $K(n,k)$ tales que $\|f^{(k)}\| \leq K(n,k)\|f^{(n)}\|^{k/n}\|f\|^{1-(k/n)}$.

Demostración. Vamos a probarlo por inducción. Para $n = 2$ sabemos que se cumple. Asumiendolo para n, entonces usando

$$\begin{aligned} \|f^{(n)}\| &\leq M\|f^{(n+1)}\|^{1/2}\|f^{(n-1)}\|^{1/2} \leq \\ &\leq MK(n,n-1)\|f^{(n+1)}\|^{1/2}\|f^{(n)}\|^{1/2(1-(1/n))}\|f\|^{1/2n} \end{aligned}$$

o

$$\|f^{(n)}\| \leq (MK(n,n-1))^{2n/n+1}\|f^{(n+1)}\|^{n/n+1}\|f\|^{1/n+1}$$

También para $k < n$

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\| &\leq K(n,k)\|f^{(n)}\|^{k/n}\|f\|^{1-(k/n)} \leq \\ &\leq K(n,k)(MK(n,n-1))^{2k/n+1}\|f^{(n+1)}\|^{k/n+1}\|f\|^{1-(k/n+1)} \end{aligned}$$

Esta consideración produce desigualdades que conectan $f^{(k)}$, $f^{(n)}$ y f para una gran clase de espacios de Banach.

Si queremos profundizar más en la desigualdad de Kolmogorov, podemos visitar [5] y [6].

3.2. Aplicación de la desigualdad de Landau-Kolmogorov a la existencia de soluciones para leyes de conservación

En cuanto a su aplicación a la existencia de soluciones para leyes de conservación, vamos a estudiar la siguiente ecuación:

$$u_t = uu_x \tag{29}$$

Por el método de las características esta ecuación tiene solución local (hasta cierto $T^* > 0$ al menos).La pregunta que nos hacemos ahora consiste en dar cotas inferiores a T^*.

Por la proposición 3.17 del TFG de Pablo Peña [9] , sabemos que $\|u(t)\|_{L^\infty} = \|u(0)\|_{L^\infty}$.

Para encontrar las cotas, derivamos dos veces (29), obteniendo

$$u_{xxt} = (u_x u_x + uu_{xx})_x = u_{xx}u_x + u_x u_{xx} + u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{30}$$

Entonces, empleando el siguiente lema[9]:

Lema 3.2.1 Sea $\eta \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0})$ tal que para todo $\eta \geqslant 0$, $\eta(x,\tau) \in C^0_\infty(\mathbb{R})$ y $\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} \left|\frac{\partial\eta}{\partial t}(x,t)\right| \in \mathbb{R}$ para todo $T \geqslant 0$. Entonces las funciones $M_\eta(t) = \text{máx}_x\, \eta(x,t)$ y $m_\eta(t) = \text{mín}_x\, \eta(x,t)$ son Lipschitz continuas en todo intervalo acotado en el que estén definidas.

Sabemos que $M = \text{máx}\ u_{xx}$ y $m = \text{mín}\ u_{xx}$ son Lipschitz continuas en todo intervalo acotado en el que estén definidas. Por lo tanto, por el teorema de Rademacher, dichas funciones han de ser diferenciables en casi todo punto de dichos intervalos.

Vamos a llamar x_t e y_t los puntos en los que se alcanza el mínimo y el máximo respectivamente para cada $t \in [0,+\infty)$ para el que estén definidos, sus derivadas, cuando existan, han de verfificar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(y_{t+h}, t+h) - u_{xx}(y_t, t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(y_{t+h}, t+h) - u_{xx}(y_t, t+h) + u_{xx}(y_t, t+h) - u_{xx}(y_t, t)}{h} \\
&\geqslant \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(y_t, t+h) - u_{xx}(y_t, t)}{h} = \frac{\partial u_{xx}}{\partial t}(y_t, t)
\end{aligned}$$

De forma análoga obtenemos la desigualdad opuesta

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{M(t-h)-M(t)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(y_{t-h},t-h)-u_{xx}(y_t,t)}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(y_{t-h},t-h)-u_{xx}(y_t,t-h)+u_{xx}(y_t,t-h)-u_{xx}(y_t,t)}{-h} \\ &\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(y_t,t-h)-u_{xx}(y_t,t)}{-h} = \frac{\partial u_{xx}}{\partial t}(y_t,t)\end{aligned}$$

A continuación, se realiza de manera similar para el otro caso:

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{m(t+h)-m(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(x_{t+h},t+h)-u_{xx}(x_t,t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(x_{t+h},t+h)-u_{xx}(x_t,t+h)+u_{xx}(x_t,t+h)-u_{xx}(x_t,t)}{h} \\ &\geqslant \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(x_t,t+h)-u_{xx}(x_t,t)}{h} = \frac{\partial u_{xx}}{\partial t}(x_t,t)\end{aligned}$$

Y finalmente, obtenemos la desigualdad restante

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{m(t-h)-m(t)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(x_{t-h},t-h)-u_{xx}(x_t,t)}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(x_{t-h},t-h)-u_{xx}(x_t,t-h)+u_{xx}(x_t,t-h)-u_{xx}(x_t,t)}{-h} \\ &\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{u_{xx}(x_t,t-h)-u_{xx}(x_t,t)}{-h} = \frac{\partial u_{xx}}{\partial t}(x_t,t)\end{aligned}$$

Por otro lado, empleando (30), obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}M = \frac{\partial u_{xx}}{\partial t}(y_t) = 3u_{xx}(y_y)u_x(y_t) + 0 = 3Mu_x(y_t) \tag{31}$$

Por la desigualdad de Kolmogorov multiplicada por -1, sabemos que

$$u_x(y_t) \geq -\|u_x\|_{L^\infty} \geq -CM^{1/2}\|u(t)\|_{L^\infty}$$

y como hemos dicho antes que

$$\|u(t)\|_{L^\infty} = \|u(0)\|_{L^\infty}$$

entonces

$$u_x(y_t) \geq -CM^{1/2}\|u_0\|_{L^\infty} = -C(u_0)M^{1/2}$$

Empleando esto, continuamos en (31) obteniendo

$$\frac{d}{dt}M \geq -3MC(u_0)M^{1/2} = -C'(u_0)M^{3/2}$$

y entonces obtenemos la siguiente EDO

$$\frac{dM}{M^{3/2}} \geq -C'(u_0)dt \tag{32}$$

Integrando la EDO (32)

$$M^{-1/2}(t) - M^{-1/2}(0) \geq -C'(u_0)t$$

o lo que es lo mismo

$$M^{-1/2}(t) \geq M^{-1/2}(0) - C'(u_0)t$$

y entonces, si lo invertimos obtenemos

$$M^{1/2}(t) \leq \frac{M^{1/2}(0)}{1 - M^{1/2}(0)C'(u_0)t}$$

Entonces, para $t \geqslant 0$ suficientemente pequeño, conseguimos la cota deseada.

4. El método de la entropía-disipación de la entropía y su aplicación para obtener diversas desigualdades de Sobolev logarítmicas

En esta sección vamos a estudiar el siguiente modelo:

$$u_t = (uu_x)_x, \quad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}^+ \tag{33}$$

donde $u = u(x,t)$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ con condiciones de borde periódicas.

Teorema 4.1. Se verifica la siguiente desigualdad de Sobolov logarítmica

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\log(g(x))\ dx \ - \ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \ + \ 2\pi \leq \ C\int_{-\pi}^{\pi} g_x^2(x)dx \tag{34}$$

para toda $g \geqslant 0$, y tal que $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 1$.

Demostración
Para realizar la demostración, vamos a considerar la solución de (33), la cual verifica

$$\min_x u(x,t) \ \geqslant \ min_x u_0 \ > \ 0, \ \max_x u(x,t) \ \leq \ \max_x u_0 \tag{35}$$

Realizando entonces un cálculo directo tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t)) \ + \ \mathcal{I}(u) \ = \ 0,$$

donde $\mathcal{F}$ es la entropía dada por

$$\mathcal{F}(u(t)) \ = \ \int_{\mathbb{T}} u(t)\log(u(t)) \ - \ u(t) \ + \ 1 \tag{36}$$

y la información de Fisher $\mathcal{I}$ es

$$\mathcal{I}(u) \ = \ \|u_x\|_{L^2}^2\,,$$

y verifica lo siguiente

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I} \ = \ -\int (uu_x)_x u_{xx} \ = \ -\int u_x^2 u_{xx} - uu_{xx}^2 \ = \ -\int uu_{xx}^2$$

donde la última igualdad viene de que $\int u_x^2 u_{xx} = 0$ por la regla de Barrow.

Además, empleando (35) tenemos

$$\begin{aligned}\int uu_{xx}^2 \ &\geqslant \ min\ u_0 \int u_{xx}^2 \\ &\geqslant \ min\ u_0 \int u_x^2 \quad \text{(esto se cumple por la desigualdad de Poincaré)} \\ &\geqslant \ min\ u_0 \mathcal{I}\end{aligned}$$

En particular, por la desigualdad de Gronwall [8]:
Sea I un intervalo de la recta real de la forma $[a,\infty)$, $[a,b]$ o $[a,b)$ con $a<b$. Sean β y u funciones continuas de valor real definidas en I. Si u es diferenciable en el interior I^o de I (el intervalo I sin los puntos extremos a y b y posiblemente b) y satisface la desigualdad diferencial

$$u'(t) \leq \beta(t)u(t), \qquad t \in I^o,$$

entonces u está acotada por la solución de la ecuación diferencial correspondiente $v'(t) = \beta(t)v(t)$:

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right)$$

para todo $t \in I$,

,concluimos que u_0 tiende al estado homogéneo $\langle\ u_0\ \rangle$ exponencialmente rápido. También tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t)) = -\mathcal{I}(u(t)) \geqslant \frac{1}{2min_x u_0}\left[\frac{d}{dt}\mathcal{I}(u(t))\right] \tag{37}$$

y,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t)) \ \geqslant \frac{1}{2min_x u_0}\frac{d}{dt}\mathcal{I}(u(t))$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \frac{d}{dt}(-\mathcal{F}(u(t))) \ &\leq \ \int_t^\infty \frac{-1}{2min_x u_0}\frac{d}{dt}\mathcal{I}(u(t)), \\ -\mathcal{F}(u(\infty)) \ + \ \mathcal{F}(u(t)) \ &\leq \ \frac{-1}{2min_x u_0}\mathcal{I}(u(\infty)) + \frac{1}{2min_x u_0}\mathcal{I}(u(t)). \end{aligned}$$

Como $\langle\ u_0\ \rangle = \int_\Omega u_0 = 1$, tenemos que $\mathcal{F}(u(\infty)) = 0$, obtenemos lo siguiente

$$\mathcal{F}(u(0)) \leq \frac{1}{2min_x u_0}\mathcal{I}(u(0)). \tag{38}$$

Por lo que quedaría demostrado.

Teorema 4.2. La solución de (33) verifica

$$\mathcal{F}(u(t)) \leq C(u_0)e^{-2\min\, u_0 t} \tag{39}$$

Demostración. Consideramos la aproximación de la viscosidad evanescente de (33) con $\gamma(x) \equiv 1$

$$\partial_t u^\epsilon = (uu_x)_x + \epsilon\partial_x^2 u^\epsilon, \qquad x \in \mathbb{T},\ t \in \mathbb{R}^+$$

Podemos observar que la solución de esta ecuación también verifica (35), y realizando un cálculo directo tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u^\epsilon(t)) + \mathcal{I}(u^\epsilon) + \epsilon \left\| \frac{\partial_x u^\epsilon}{\sqrt{u^\epsilon}} \right\|_{L^2}^2 = 0$$

Empleando (38) se tiene

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u^\epsilon) = -\mathcal{I}(u^\epsilon) - \epsilon \left\| \frac{\partial_x u^\epsilon}{\sqrt{u^\epsilon}} \right\|_{L^2}^2 \leq -C\mathcal{F}(u^\epsilon) 2\text{min } u_0 \tag{40}$$

Entonces, si aplicamos Gronwall, obtenemos

$$\mathcal{F}(u^\epsilon) \leq e^{-2\text{min } u_0 t}\mathcal{F}(0)$$

y entonces si pasamos a límite en ϵ, ya tendríamos (39).

Para obtener más información podemos encontrarla en [7]

Referencias

[1] Naumann, J. (2002). Remarks on the Prehistory of Sobolev Spaces. 36.

[2] Brezis, H. (1984). Analisis Funcional, Teoria Y Aplicaciones (J. R. Esteban (ed.); Alianza Ed).

[3] Evans, L. C. (1998). Partial differential equations. Graduate studies in mathematics, 19(4), 7.

[4] Giga, Y., Kohn, R. V. (2011). Scale-invariant extinction time estimates for some singular diffusion equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 30(2), 509–535. https://doi.org/10.3934/dcds.2011.30.509

[5] Ditzian, Z. (1975). Some remarks on inequalities of Landau and Kolmogorov. aequationes mathematicae, 12(2-3), 145-151

[6] Maz'ya, V. G., Shaposhnikova, T. Y. O. (2002). Sharp pointwise interpolation inequalities for derivatives. Functional analysis and its applications, 36(1), 30-48

[7] Burczak, J., Granero-Belinchón, R. (2016). Boundedness of large-time solutions to a chemotaxis model with nonlocal and semilinear flux. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 47(1), 369–387. https://doi.org/10.12775/TMNA.2016.012

[8] Gronwall, Thomas H. (1919), "Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations", Ann. of Math., 20 (2): 292–296

[9] Pablo Peña Labayru(2020) Singularidades en modelos unidimensionales de las ecuaciones de Navier-Stokes