



FACULTAD DE CIENCIAS

El cuerpo de los números construibles con origami

(The field of origami constructible numbers)

TRABAJO DE FIN DE GRADO
PARA ACCEDER AL

Grado en Matemáticas

Autora: Claudia Porras Talayero

Director: Jesús Javier Jiménez Garrido

Septiembre - 2021

Índice general

Introducción	III
1. Requisitos previos	4
1.1. Requisitos algebraicos	4
1.2. Requisitos geométricos	8
2. Construcciones geométricas planas	9
2.1. Procedimientos geométricos básicos. Herramientas	9
2.1.1. Procedimientos básicos de construcción	10
2.1.2. Procedimientos básicos de intersección	10
2.1.3. Herramientas	12
2.2. Construcciones y mapas	12
3. Axiomas de Huzita-Hatori-Justin	15
3.1. Descripción geométrica y algebraica de los axiomas	15
3.2. Características de los axiomas	20
4. Construcciones mediante Origami	25
4.1. \mathcal{O} subcuerpo de \mathbb{C}	26
4.2. Caracterización de \mathcal{O}	34
4.3. Resolución de ecuaciones de hasta grado 4	37
4.4. Polígonos regulares origami-construibles	40
4.5. Problemas clásicos de la matemática griega	42
4.5.1. La duplicación del cubo	42
4.5.2. La trisección del ángulo	42
4.5.3. La cuadratura del círculo	43
4.6. Relación con otras herramientas	43
4.6.1. Regla y compás	43
4.6.2. Cónicas	44
4.6.3. Regla marcada	44
Bibliografía	46

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi director, Javier, su dedicación y su atención.

Gracias a mis amigos y compañeras por haber hecho más amenos estos años, no me imagino cómo hubiera sido este camino sin vosotros y sin todos los momentos que hemos compartido. A mi familia, en especial a mis padres y mi hermano por haberme apoyado de manera incondicional y a mi prima Cristina, por haber sabido comprenderme siempre mejor que nadie y haber estado ahí, a pesar de la distancia.

Por último, quiero agradecer a Pablo toda la ayuda que me ha brindado desde el día que le conocí. Gracias por tu tiempo y, sobre todo, por acompañarme en cualquier circunstancia.

Resumen

De una manera similar a las construcciones con regla y compás, se pueden estudiar las construcciones mediante el doblado del papel. El objetivo del trabajo es caracterizar el conjunto de los números construibles con origami. Para lograrlo modelaremos el origami como herramienta de construcción por medio de los axiomas de Huzita-Hatori-Justin por lo que nos restringimos a pliegues rectos, pudiendo hacer un único pliegue de forma simultánea. El resultado principal establece que el conjunto de los números origami-construibles es un subcuerpo de \mathbb{C} que se representa mediante 2,3-torres de cuerpos. Como consecuencia, probaremos que es posible resolver ecuaciones generales de hasta cuarto grado y analizaremos qué polígonos regulares son construibles con esta herramienta.

Palabras clave: Origami, herramienta de construcción, axiomas de Huzita-Hatori-Justin, Teoría de Galois.

Abstract

In a similar way to straightedge-and-compass constructions, origami constructions can be studied. The aim of this work is to characterize the set of origami constructible numbers. In order to achieve this, we will model origami as a construction tool using the Huzita-Hatori-Justin axioms. Therefore, we will restrict ourselves to straight folds, being able to make a single fold simultaneously. The main result establishes that the set of origami-constructible numbers is a subfield of \mathbb{C} that is represented by 2,3-towers of fields. As a consequence, we will prove that it is possible to solve general equations of up to fourth degree and we will analyze which regular polygons can be constructed by means of this tool.

Key words: Origami, tool of construction, Huzita-Hatori-Justin axioms, Galois Theory.

Introducción

La papiroflexia es el arte de realizar figuras reconocibles mediante el doblado de papel exclusivamente, pues no está permitido pegar ni cortar el papel. Esta también se conoce como origami, que proviene de las palabras japonesas “ori” que significa doblar y “kami”, papel. Se ha decidido emplear, principalmente, la voz japonesa tanto en el título como a lo largo del trabajo para remarcar su origen. Para la elaboración de esta introducción se ha empleado el artículo de J. I. Royo Prieto [20], donde se describe la relación entre las matemáticas y la papiroflexia. Además se ha utilizado el artículo T. C. Hull [11], donde se describe la historia del vínculo entre las matemáticas y el origami, y las notas de J. Smith [21], donde se presenta la cronología del desarrollo del origami y su conexión con la difusión geográfica del papel.

Nacimiento del papel, historia del origami

La historia del origami está conectada con la aparición del papel, que tuvo lugar en China alrededor del año 100. Anteriormente se utilizaban diferentes objetos para realizar grabados como pergaminos, papiros y ropa, entre otros. En particular, los chinos utilizaban tela tejida como material de escritura.

Durante más o menos 500 años la fabricación del papel permaneció en secreto en China hasta que a principios del siglo VII se propagó por Japón gracias a los monjes budistas. En el año 751, debido a la ocupación árabe de Samarcanda, el papel comenzó a extenderse por territorios musulmanes llegando a Egipto en el siglo X. En el siglo XII los árabes establecieron la fabricación del papel en España y después, en Italia y Francia, que abrieron sus primeras fábricas de papel en 1276 y 1348, respectivamente. Poco a poco, se fue extendiendo hasta que en el siglo XV era conocido en casi toda Europa.

A pesar de que el origen del papel está datado de un modo bastante preciso, el nacimiento del origami es incierto. Se sabe que en Japón surgió como entretenimiento para las clases más altas, pues el papel era un bien preciado que solo estas se podían permitir. Durante el periodo Muromachi (s. XIV-XVI) el papel pasó a ser un producto más accesible, popularizándose a lo largo del periodo Edo (s. XVII-XIX). En esta época surge la base pájaro, usada para la realización de la figura más conocida en Japón, la grulla (Figura 1).

En el ámbito hispanohablante, uno de los principales promotores del origami fue Miguel de Unamuno. Como aficionado que era, elevó, con ironía, la papiroflexia a la categoría de ciencia en el apéndice de su ensayo *Amor y pedagogía* [23], donde escribe sus apuntes para un tratado sobre cocotología (del francés *cocotte* que se puede traducir como pajarita de papel).

Una de las aportaciones recientes al origami más relevantes es la atribuida al japonés A. Yoshizawa, pues fue el creador de la simbología actual de las instrucciones de



Figura 1: Grulla de papel.
Imagen extraída de
PapiroflexiaMania.com

plegado, mediante una notación universal. Esta simbología fue desarrollada por S. L. Randlett dando lugar al conocido sistema Yoshizawa-Randlett.

Origami y matemáticas

El primer tratado que da a conocer el origami como herramienta de construcción geométrica es el libro *Geometric Exercises in Paper Folding* [19], publicado en 1893 por el matemático T.S. Row, donde afirma erróneamente que es imposible construir la raíz cúbica de dos con origami. Este libro fue mencionado por F. Klein en una de sus publicaciones más conocidas: *Famous Problems of Elementary Geometry* [13], lo que hizo que se popularizaran las construcciones geométricas mediante origami. En 1936, M. Beloch descubrió que con el origami se pueden encontrar las tangentes comunes a dos parábolas y, de esta manera, resolver ecuaciones cúbicas generales. Ella dejó constancia de ello en su publicación *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici* [3], donde además señaló la posibilidad de resolver ecuaciones cuárticas, debido a que se pueden reducir a la resolución de cuadráticas y cúbicas.

Después, en 1989 tuvo lugar el *First International Meeting of Origami Science and Technology*¹ donde J. Justin y H. Huzita introdujeron los axiomas que modelan el origami de un solo pliegue. Tras esto, los trabajos más relevantes han sido escritos por R. C. Alperin y R. J. Lang, quienes juntos escribieron *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms* [1], donde partiendo de un descubrimiento previo del último, la posibilidad de construir un endecágono mediante origami con dos pliegues simultáneos, llegaron a la conclusión de que utilizando múltiples pliegues es posible construir cualquier polígono regular y también resolver ecuaciones generales de cualquier grado.

Todos estos trabajos tienen por objeto el estudio de la geometría plana mediante origami. Este será el enfoque de la memoria donde nos limitaremos a construcciones que se puedan realizar con un solo pliegue en cada paso.

Conviene reseñar que existen otros vínculos entre las matemáticas y el origami. Posiblemente el más conocido, se denomina papiroflexia modular que consiste en la realización de figuras utilizando varios papeles para crear una estructura. Cada hoja de papel individual se dobla en lo que llamaremos un módulo. Todos ellos poseen solapas y bolsillos, que se usan para ensamblarlos entre sí y, habitualmente, el plegado de cada módulo es sencillo. Los poliedros son la principal fuente de inspiración de esta modalidad, aunque no la única. A parte del valor artístico y estético, este aspecto nos permite la representación física de entes abstractos. En este sentido, tiene el mismo interés que un programa de ordenador que dibuja poliedros, aunque es más revelador tenerlo en la mano, poder tocarlo y girarlo; que verlo en una pantalla y simular su giro. De esta forma también se pueden experimentar de manera sencilla las propiedades de los poliedros como el grado de un vértice, la regularidad, la simetría, etc.

A continuación, explicamos brevemente la estructura del trabajo: En el primer capítulo se expondrán una serie de resultados clásicos, que se necesitarán posteriormente, relacionados tanto con el álgebra, en particular con la teoría de cuerpos, como con la geometría. En el segundo, se formalizarán los conceptos fundamentales de las construcciones geométricas. En el tercero, se describirán geométrica y algebraica-

¹Esta fue la primera de una serie de conferencias científicas internacionales donde se exploran las interacciones entre el origami, la ciencia, las matemáticas y desde 2001, la educación. En la actualidad se conocen como OSME (*Origami, Science, Mathematics and Education*) [15].



Figura 2: Poliedro estrellado de papel.
Imagen extraída de aprendiendomatematicas.com

mente los axiomas de Huzita-Hatori-Justin y se analizarán sus características. En el cuarto y último capítulo, se estudiará el cuerpo de los números origami-construibles. Se analizará qué relación tiene el origami con la teoría de Galois, llegando a nuestro principal objetivo: la caracterización de los números origami-construibles mediante torres de cuerpos (Teorema 4.24). Como consecuencia de este resultado, se verá qué ecuaciones son resolubles mediante origami y qué polígonos podemos construir con esta herramienta. Además, se explicará qué problemas clásicos de la matemática griega pueden ser resueltos mediante origami. Para finalizar, se comparará el origami con otras herramientas de construcción geométrica.

Con el objetivo de facilitar la lectura y de no aumentar la longitud de la memoria, la mayor parte de las figuras se han colocado en los márgenes del texto, salvo aquellas de especial relevancia. Asimismo, se ha empleado un código de colores por lo que se recomienda la lectura en un soporte (digital o físico) que permita su visualización adecuada.

Capítulo 1

Requisitos previos

En este capítulo vamos a ver nociones algebraicas y geométricas que necesitamos para desarrollar el trabajo. Se ha tomado como referencia el libro de D. A. Cox [4], el de D. S. Dummit y R. M. Foote [5] y el de J. P. Escofier [6]. En general se han omitido las demostraciones, salvo en el caso del Lema 1.42, cuya prueba se incluye por su papel central en los desarrollos posteriores.

1.1. Requisitos algebraicos

Comenzamos recordando algunas cuestiones elementales.

Definición 1.1 Sea $n \in \mathbb{N}$, una **raíz n -ésima de la unidad** en \mathbb{C} es un número complejo ξ tal que $\xi^n = 1$. En este caso, se puede probar que existe $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k < n$ tal que $\xi = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Proposición 1.2 El conjunto de las raíces n -ésimas de la unidad forma un grupo cíclico isomorfo a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Definición 1.3 Sea $n \in \mathbb{N}$. La **raíz primitiva n -ésima principal de la unidad** se denota por $\xi_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Observación: ξ_n es uno de los generadores del grupo cíclico de las raíces de la unidad.

Proposición 1.4 (Fórmulas de Cardano) [18, cap. 9]

- Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$, vienen dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Las soluciones de la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$, vienen dadas por:

$$A + B; \quad \omega A + \omega^2 B; \quad \omega^2 A + \omega B$$

donde :

- $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}}$

$$\begin{aligned}
\bullet B &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2}} \\
\bullet p &= \frac{3b - a^2}{3} \\
\bullet q &= \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} \\
\bullet \omega = \xi_3 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \omega^2 = \xi_3^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi i}{3}}
\end{aligned}$$

Estas últimas, son las raíces cúbicas complejas de la unidad.

La función de Euler, $\phi(n)$, nos da el número de enteros i tales que $0 \leq i < n$ y $\text{mcd}(i, n) = 1$. Se puede probar que $\phi(n)$ es el orden del grupo $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Además, podemos obtenerla de la siguiente forma:

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (1.1)$$

Definición 1.5 Sea $n \in \mathbb{N}$, llamamos *n-ésimo polinomio ciclotómico* $\Phi_n(x)$ a:

$$\Phi_n(x) = \prod_{0 \leq i \leq n; \text{mcd}(i, n) = 1} (x - \xi_n^i) \quad (1.2)$$

Proposición 1.6 Sea $n \in \mathbb{N}$, el polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$ es mónico con coeficientes enteros y tiene grado $\phi(n)$. Además, este polinomio satisface:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x) \quad (1.3)$$

A continuación, definiremos varios conceptos y enunciaremos resultados fundamentales de Teoría de Galois empleados en la memoria.

Definición 1.7 Un grupo finito G es **resoluble** si existen subgrupos G_0, G_1, \dots, G_n tales que

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$$

de manera que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que:

- G_{i-1} es normal en G_i .
- $|G_i : G_{i-1}|$ es primo.

Proposición 1.8 Todo grupo finito abeliano es resoluble.

Teorema 1.9 Si p es un número primo, entonces cada grupo de orden p^n , con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, es resoluble.

Teorema 1.10 Si p y q son primos distintos, entonces cada grupo de orden $p^n q^m$, con $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, es resoluble.

Definición 1.11 Sean L y K cuerpos. Decimos que L es una **extensión** de K si es un cuerpo que contiene a K como subcuerpo. Lo denotaremos por L/K .

Proposición 1.12 Si L es una extensión de K , entonces L es un K -espacio vectorial.

Definición 1.13 Sea L una extensión de un cuerpo K . La dimensión de L como K -espacio vectorial se llama **grado de la extensión** L/K y se representa por $[L : K]$. La extensión es finita si $[L : K]$ es finito.

Definición 1.14 Sean K_0, K_1, \dots, K_n subcuerpos tales que K_{i+1}/K_i es una extensión $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, decimos que $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n$ es una **torre de cuerpos**.

Definición 1.15 Se dice que una secuencia de subcuerpos $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n$ es una **2,3-torre de cuerpos** si cada una de las extensiones intermedias es de grado 2 ó 3, es decir, si $[F_i : F_{i-1}] \in \{2, 3\}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Teorema 1.16 Sea L/K una extensión finita y M/L otra extensión finita. Entonces, M/K es una extensión finita y se cumple:

$$[M : K] = [M : L][L : K]$$

Definición 1.17 Sea L/K una extensión y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$. Denotaremos por $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ al menor subcuerpo de L que contiene a K y a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Definición 1.18 Sea L/K una extensión decimos que L es **finitamente generada sobre K** si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ tales que $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Definición 1.19 Sea K un cuerpo y L/K una extensión. Se dice que un **elemento** $\alpha \in L$ es **algebraico** sobre K si α es raíz de algún polinomio no nulo en $K[x]$. En caso contrario, se dice que α es **trascendente** sobre K .

Proposición 1.20 Sea K un cuerpo, L/K una extensión y α un elemento de L que es algebraico sobre K . Entonces, existe un único polinomio mónico P en $K[x]$ cuya raíz es α y cuyo grado es el mínimo entre todos los polinomios no nulos en $K[x]$ que tienen α como raíz.

Definición 1.21 Sea K un cuerpo, L/K una extensión y $\alpha \in L$ un elemento algebraico sobre K . Por la proposición anterior, existe un único polinomio mónico de grado mínimo en $K[x]$ que se anula en α : el **polinomio mínimo** de α sobre K . Si $\text{gr}(P) = n$, entonces se dice que α es algebraico de grado n sobre K ; también se dice que n es el grado de α sobre K .

Definición 1.22 Una **extensión** L/K se dice **algebraica** si cada elemento de L es algebraico sobre K .

Proposición 1.23 Dados una extensión L/K y un elemento $\alpha \in L$:

- α es algebraico sobre K si y solo si $[K(\alpha) : K] < \infty$.
- Sea α algebraico sobre K . Si n es el grado del polinomio mínimo de α sobre K , entonces $[K(\alpha) : K] = n$.

Lema 1.24 Sea L/K una extensión finita, entonces:

- L/K es algebraica.
- Si $\alpha \in L$, entonces el grado del polinomio mínimo de α sobre K divide a $[L : K]$.

Teorema 1.25 *Toda extensión finita es algebraica y finitamente generada.*

Definición 1.26 *Dados dos subcuerpos K_1 y K_2 de un cuerpo L , podemos definir la **composición** de K_1 y K_2 en L como el subcuerpo más pequeño de L que contiene a ambos. Lo denotaremos por K_1K_2 .*

Proposición 1.27 *Dadas K_1 y K_2 dos extensiones finitas de un cuerpo F contenidas en L , es decir, $F \subset K_1 = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset L$ y $F \subset K_2 = F(\beta_1, \dots, \beta_m) \subset L$. Entonces la composición de K_1 y K_2 es $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$.*

Definición 1.28 *Sea $f \in K[x]$ un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$. Entonces, una extensión L/K es un **cuerpo de escisión** de f sobre K si:*

- $f = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$, donde $c \in K$ y $\alpha_i \in L$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ y
- $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Teorema 1.29 *Para todo cuerpo K , si $f(x) \in K[x]$ entonces existe una extensión L/K que es cuerpo de escisión de $f(x)$.*

Teorema 1.30 *El polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$ es irreducible sobre \mathbb{Q} , para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Corolario 1.31 *Sea $n \in \mathbb{N}$, el polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$ es el polinomio mínimo de ξ_n sobre \mathbb{Q} .*

Proposición 1.32 *El cuerpo de escisión de $x^n - 1$ o de $\Phi_n(x)$ sobre \mathbb{Q} es el cuerpo $\mathbb{Q}(\xi_n)$.*

Definición 1.33 *Sea $n \in \mathbb{N}$, a la extensión $\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}$ se le denomina **extensión ciclotómica** y está generada por las raíces n -ésimas de la unidad.*

Proposición 1.34 *Sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$.*

Definición 1.35 *Un isomorfismo de un cuerpo L en sí mismo se denomina **automorfismo** de L . Se denota por $\text{Aut}(L)$ al conjunto de los automorfismos de L .*

Definición 1.36 *Si L/K es una extensión, entonces $\text{Aut}(L/K)$ es el conjunto de los automorfismos de L que dejan fijos todos los elementos de K .*

Definición 1.37 *Sea L/K una extensión finita. Decimos que L es de Galois sobre K , o que L/K es una **extensión de Galois** si $|\text{Aut}(L/K)| = [L : K]$. Si L/K es de Galois, $\text{Aut}(L/K)$ se denomina el grupo de Galois de L/K y se denota por $\text{Gal}(L/K)$.*

Proposición 1.38 *Sea L/K una extensión de Galois de modo que existe un cuerpo intermedio $K \subset M \subset L$, entonces L/M es una extensión de Galois.*

Definición 1.39 *Un polinomio $f(x) \in K[x]$ se dice separable si en una clausura algebraica de K no tiene raíces múltiples, es decir, si todas sus raíces son distintas.*

Proposición 1.40 *L es un cuerpo de escisión sobre K de un polinomio separable $f(x)$ si y solo si L/K es de Galois.*

Teorema 1.41 *El grupo de Galois del cuerpo ciclotómico $\mathbb{Q}(\xi_n)$ es isomorfo al grupo $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.*

1.2. Requisitos geométricos

Comenzamos esta sección con una tabla que muestra la notación que se usará a lo largo del trabajo:

$d(P, Q)$	Distancia del punto P al punto Q
\overline{PQ}	Segmento del punto P al punto Q
$\triangle PQR$	Triángulo de vértices P , Q y R
\widehat{PQR}	Ángulo de $\triangle PQR$ con vértice en Q
$l \parallel l'$	La recta l es paralela a la recta l'
$l \not\parallel l'$	La recta l no es paralela a la recta l'

Cuando realizamos un doblez para llevar un punto sobre otro, la recta de pliegue obtenida es la mediatriz de ambos puntos. El siguiente lema muestra que dados una recta y un punto no perteneciente a ella, si realizamos un doblez para llevar el punto a la recta, entonces la recta de pliegue obtenida, además de ser la mediatriz entre el punto de partida y uno de los puntos de la recta, es tangente a la parábola de foco el punto original y directriz la recta dada. Este hecho elemental tiene gran importancia en las construcciones con origami.

Lema 1.42 (Tangente a la parábola) *La recta tangente a una parábola en un punto P es la mediatriz entre el foco, F , y la proyección de P sobre la directriz. [18, cap.10]*

Dem: Denotaremos a P' como el punto de corte entre la directriz y la perpendicular a ella que pasa por P , es decir, P' es la proyección de P sobre la directriz. Por la definición de parábola, la distancia que hay entre P y F , el foco, es la misma que hay entre P y P' , es decir, $d(P, F) = d(P, P')$. Por ello, si construimos el triángulo $\triangle PFP'$ obtendremos un triángulo isósceles cuya altura pasa por P y por P'' , el punto medio entre el foco y P' (Figura 1.1). Así, vemos que la mediatriz de $\overline{FP'}$ pasa por P .

Ahora vamos a ver que esta mediatriz coincide con la tangente a la parábola en P . Sea Q otro punto de la parábola y Q' su proyección en la directriz, tenemos que $d(Q, F) = d(Q, Q')$ y $d(Q, Q') < d(Q, P')$. Por lo tanto, como la mediatriz $\overline{FP'}$ divide al plano en dos semiplanos, esta desigualdad garantiza que todos los puntos de la parábola están en el mismo semiplano. En consecuencia, esta mediatriz es la tangente a la parábola en P .

□

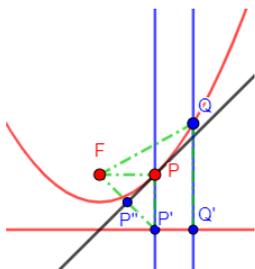


Figura 1.1: Tangente a la parábola

Capítulo 2

Construcciones geométricas planas

En el contexto de las construcciones geométricas, aparecen de forma natural nociones como por ejemplo: proceso de construcción, proceso de intersección, punto construible, curva construible o herramienta de construcción. El objetivo de este capítulo es definir de manera precisa estos conceptos. Se ha seguido el enfoque de E. Tramuns [22] para tratar de forma unificada las construcciones geométricas planas.

2.1. Procedimientos geométricos básicos. Herramientas

En este trabajo nos vamos a centrar en construcciones geométricas planas, es decir, en procesos que a partir de ciertos objetos del plano afín real generan otros objetos del plano. En concreto, consideraremos los puntos y las curvas algebraicas del plano afín.

Definición 2.1 Denotaremos por P al conjunto de puntos del plano afín real unión el vacío:

$$P = \mathbb{R}^2 \cup \{\emptyset\}$$

Observación: Representaremos los puntos de distintas maneras dependiendo de las circunstancias: o bien mediante coordenadas cartesianas (a, b) , o bien como números complejos $a + bi$.

Definición 2.2 Denotaremos por C al conjunto de curvas algebraicas afines reales:

$$C = \{V \subseteq \mathbb{R}^2 : V = V(f), \forall f \in \mathbb{R}[x, y]\}$$

Observación: $\emptyset \in C$ dado que $V(1) = V(x^2 + 1) = \emptyset$.

Definición 2.3 Denotaremos por \mathcal{P} al conjunto de n -uplas ordenadas de elementos de P , es decir:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P^n$$

Por otra parte, denotaremos por \mathcal{C} al conjunto de n -uplas ordenadas de elementos de C , es decir:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^n$$

Observación: Por simplicidad, dado $f \in \mathbb{R}[x, y]$ representaremos la curva algebraica definida por f , $V(f)$, como $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ o simplemente $\{f(x, y) = 0\}$.

2.1.1. Procedimientos básicos de construcción

Un procedimiento básico de construcción es un proceso geométrico elemental que genera un conjunto finito y ordenado de curvas a partir de un conjunto no vacío, finito y ordenado de puntos y curvas. Formalizamos esta noción con la siguiente definición:

Definición 2.4 *Un procedimiento básico de construcción es una aplicación:*

$$f : D \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

donde D es un subconjunto no vacío de $\mathcal{P} \times \mathcal{C}$.

Ejemplo 2.5 *En cada ejemplo daremos primero la descripción geométrica y posteriormente la algebraica. Para ello, necesitamos tres puntos P, Q y R de coordenadas $(p_1, p_2), (q_1, q_2)$ y (r_1, r_2) respectivamente.*



Figura 2.1: C1

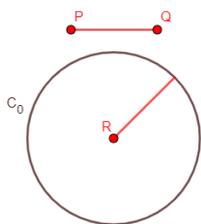


Figura 2.2: C2

- C1.**
- Dados dos puntos P y Q con $P \neq Q$, podemos trazar la recta que pasa a través de ambos.
 - $f_1((P, Q), \emptyset) = \{y(q_1 - p_1) + x(p_2 - q_2) + p_1q_2 - p_2q_1 = 0\}$, cuyo dominio de definición es $D = \{((P, Q), \emptyset) : P \neq Q\}$
- C2.**
- Dados tres puntos P, Q y R con $P \neq Q$, podemos trazar una circunferencia C_0 con centro R y radio $d(P, Q)$.
 - $f_2((P, Q, R), \emptyset) = \{x^2 + y^2 + (-2r_1)x + (-2r_2)y + r_1^2 + r_2^2 - ((q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2) = 0\}$, cuyo dominio de definición es $D = \{((P, Q, R), \emptyset) : P \neq Q\}$

2.1.2. Procedimientos básicos de intersección

Un procedimiento básico de intersección es un proceso geométrico elemental que genera un conjunto finito y ordenado de puntos a partir de un conjunto no vacío, finito y ordenado de puntos y curvas. Formalizamos esta noción con la siguiente definición:

Definición 2.6 *Un procedimiento básico de intersección es una aplicación:*

$$g : D \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$$

donde D es un subconjunto no vacío de $\mathcal{P} \times \mathcal{C}$.

Ejemplo 2.7 *Daremos tanto la descripción geométrica como la algebraica para cada ejemplo. Para ello utilizaremos dos rectas, l y l' , y dos circunferencias, C_0 y C_1 , definidas como $\{ax + by + c = 0\}$ y $\{a'x + b'y + c' = 0\}; \{x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0\}$ y $\{x^2 + y^2 + d'x + e'y + f' = 0\}$ respectivamente. Estas dos últimas son las ecuaciones generales de las circunferencias, donde C_0 tiene centro $R = (r_1, r_2)$ y radio r . De aquí, sus coeficientes son: $e = -2r_1$, $d = -2r_2$ y $f = r_1^2 + r_2^2 - r^2$.*

- P1.**
- Dadas dos rectas, $l \neq l'$, se puede obtener su intersección.
 - $g_1(\emptyset, (l, l')) = \begin{cases} (\frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}) & \text{si } l \not\parallel l' \\ \emptyset & \text{si } l \parallel l' \end{cases}$
cuyo dominio de definición es $D = \{(\emptyset, (l, l')) : l \neq l'\}$.

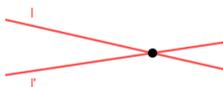


Figura 2.3: P1

P2. • Dadas una recta l y una circunferencia C_0 , se puede obtener su intersección.

$$g_2(\emptyset, (l, C_0)) = \begin{cases} (P, Q) & \text{si } a \neq 0 \text{ y } \Delta \geq 0 \\ (P', Q') & \text{si } a = 0 \text{ y } \Delta' \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } \Delta < 0 \text{ o } \Delta' < 0 \end{cases} \quad \text{donde:}$$

- $D = \{(\emptyset, (l, C_0))\}$ es el dominio de definición.
- $P = \left(-b \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2Aa} - \frac{c}{a}, \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}\right)$; $Q = \left(-b \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2Aa} - \frac{c}{a}, \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}\right)$;
- $P' = \left(\frac{-B'+\sqrt{\Delta'}}{2A'}, -a \frac{-B'+\sqrt{\Delta'}}{2bA'} - \frac{c}{b}\right)$; $Q' = \left(\frac{-B'-\sqrt{\Delta'}}{2A'}, -a \frac{-B'-\sqrt{\Delta'}}{2bA'} - \frac{c}{b}\right)$;
- $\Delta = B^2 - 4AC$; $\Delta' = B'^2 - 4A'C'$;
- $A = a^2 + b^2$; $A' = A$;
- $B = 2bc - abd + a^2e$; $B' = 2ac - abe + b^2d$;
- $C = c^2 + a^2f - acd$; $C' = c^2 + b^2f - bce$.

El valor de Δ , o si $a = 0$ el de Δ' , caracteriza la posición relativa entre la recta y la circunferencia.

- Si $\Delta < 0$ ó $\Delta' < 0$ entonces no se cortan .
- Si $\Delta = 0$ ó $\Delta' = 0$ entonces se cortan en un único punto. En este caso, si $a \neq 0$, entonces $P = Q$ y si $a = 0$, $P' = Q'$.
- Si $\Delta > 0$ ó $\Delta' > 0$ entonces se cortan en dos puntos.

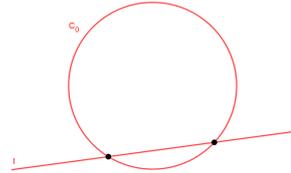


Figura 2.4: P2

P3. • Dadas dos circunferencias, $C_0 \neq C_1$, se puede obtener su intersección.

$$g_3(\emptyset, (C_0, C_1)) = \begin{cases} (P, Q) & \text{si } d - d' \neq 0 \text{ y } \Delta \geq 0 \\ (P', Q') & \text{si } e - e' \neq 0 \text{ y } \Delta' \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } \Delta < 0 \text{ o } \Delta' < 0 \end{cases} \quad \text{donde:}$$

- $D = \{(\emptyset, (C_0, C_1)) : C_0 \neq C_1\}$ es el dominio de definición.
- $P = \left((e' - e) \cdot \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A(d-d')} + \frac{f'-f}{d-d'}, \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}\right)$;
- $Q = \left((e' - e) \cdot \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A(d-d')} + \frac{f'-f}{d-d'}, \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}\right)$;
- $P' = \left(\frac{-B'+\sqrt{\Delta'}}{2A'}, (d' - d) \cdot \frac{-B'+\sqrt{\Delta'}}{2A'(e-e')} + \frac{f'-f}{e-e'},\right)$;
- $Q' = \left(\frac{-B'-\sqrt{\Delta'}}{2A'}, (d' - d) \cdot \frac{-B'-\sqrt{\Delta'}}{2A'(e-e')} + \frac{f'-f}{e-e'},\right)$;
- $\Delta = B^2 - 4AC$; $\Delta' = B'^2 - 4A'C'$;
- $A = (e' - e)^2 + (d - d')^2$;
- $B = 2(e' - e)(f' - f) + d(d - d')(e' - e) + e(d - d')^2$;
- $C = (f' - f)^2 + d(d - d')(f' - f) + f(d - d')^2$;
- $A' = (e - e')^2 + (d' - d)^2$;
- $B' = 2(d' - d)(f' - f) + e(e - e')(d' - d) + d(e - e')^2$;
- $C' = (f' - f)^2 + e(e - e')(f' - f) + f(e - e')^2$.

Los centros de las circunferencias son distintos si y solo si $d-d' \neq 0$ o $e-e' \neq 0$. En caso de tener intersección no vacía, como $C_0 \neq C_1$, los centros deben ser distintos y la expresión algebraica recoge todas las situaciones. La posición relativa de las circunferencias dependerá, como en el caso anterior, de Δ .

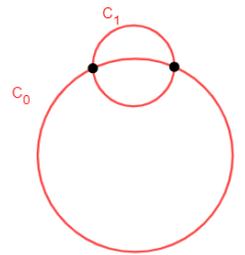


Figura 2.5: P3

Observación: El punto o los puntos obtenidos en los procedimientos anteriores no dependen de las ecuaciones de las rectas y circunferencias elegidas en cada caso, luego g_1 , g_2 y g_3 están bien definidas.

2.1.3. Herramientas

En este apartado vamos a establecer la noción de herramienta como instrumento geométrico formado a partir de diferentes procedimientos básicos que se denominan axiomas de la herramienta, para lo cual seguiremos las referencias [9, sec. 3.2] y [22, sec. 2.1].

Definición 2.8 Una *herramienta* es una dupla $\langle O_C, O_I \rangle$, donde O_C es un conjunto finito de procedimientos básicos de construcción y O_I , de intersección. Estos procedimientos básicos se denominan axiomas de la herramienta.

Ejemplo 2.9

- **Regla:** Esta herramienta simboliza cualquier instrumento físico ideal que nos permita dibujar rectas (segmentos arbitrariamente largos); lo que comúnmente conocemos como regla, pero infinita y sin marcar.

$$\mathcal{R} = \langle \{C1\}, \{P1\} \rangle.$$

- **Compás:** Esta herramienta simboliza cualquier instrumento físico ideal que nos permita dibujar circunferencias de radio arbitrariamente grande; lo que conocemos como compás, pero con brazos infinitos.

$$\mathcal{C} = \langle \{C2\}, \{P3\} \rangle.$$

- **Regla y compás:** Esta herramienta es la unión de las dos anteriores añadiendo el procedimiento básico de intersección pertinente, **P2**.

$$\mathcal{RC} = \langle \{C1, C2\}, \{P1, P2, P3\} \rangle.$$

2.2. Construcciones y mapas

A lo largo de esta sección, vamos a introducir una serie de conceptos, entre los que se encuentran la definición formal de construcción y la de sucesión de capas. Esto será necesario para poder definir en el capítulo 5 qué elementos son origami-construibles. En esta sección se ha seguido [9, sec. 3.3].

Definición 2.10 Sean $V, U_0 \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{C}$ dos subconjuntos de puntos y curvas no vacíos. U_0 se denomina conjunto inicial. Llamaremos **proceso de construcción**, o simplemente construcción, de V a partir de U_0 y lo denotaremos por $C(U_0; V)$, a una sucesión finita:

$$C(U_0; V) = \{V_1 = O_1(U_1), V_2 = O_2(U_2), \dots, V_n = O_n(U_n)\}$$

de manera que:

- O_1, \dots, O_n son procedimientos básicos (de intersección o construcción).
- En cada paso i , el conjunto $U_i \neq \emptyset$ sobre el que aplicar el axioma O_i ha sido generado previamente, es decir: $U_i \subset U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{i-1}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- $V \subset U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$, sin embargo $V \not\subset U_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{n-1}$.

Si $O_1, \dots, O_n \in O_C \cup O_I$ para alguna herramienta $\mathcal{T} = \langle O_C, O_I \rangle$, diremos que $C(U_0; V)$ es una construcción realizable con \mathcal{T} o que es \mathcal{T} -construible y lo denotaremos como $C(U_0; V) \in \mathcal{T}$.

A continuación mostramos un ejemplo de una construcción que podemos realizar con regla y compás :

Ejemplo 2.11 *La mediatriz es una construcción realizable con regla y compás, es decir, $C(\{P, Q\}; l)$ es \mathcal{RC} -construible mediante los pasos que siguen:*

1. C_0 : con **C2** se construye la circunferencia con centro P y radio $d(P, Q)$.
2. C_1 : con **C2** se construye la circunferencia con centro Q y radio $d(P, Q)$.
3. R, R' : con **P3** se obtienen los puntos de corte de C_0 y C_1 .
4. l : con **C1** se construye la recta que pasa por R y R' .

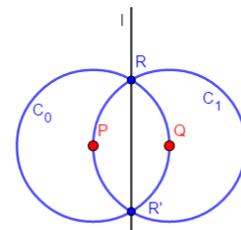


Figura 2.6: Mediatriz de P y Q construida con \mathcal{RC}

Observación:

- Consideramos que el conjunto U_0 está formado por objetos genéricos. Por tanto, podemos entender una construcción como una aplicación $C(U_0; V) : D \subset \mathcal{P} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{C}$, formada por la composición de los procedimientos básicos que la definen.
- Con todo lo anterior, si $C(U_0; V) \in \mathcal{T}$ es obvio que para todo subconjunto $V' \subset V$ se tiene que $C(U_0; V') \in \mathcal{T}$. En particular, para todo elemento $v \in V$ diremos que v es \mathcal{T} -construible a partir de U_0 .

Definición 2.12 *Un mapa es una pareja $M = (\mathcal{T}, U_0)$ formada por una herramienta \mathcal{T} y un conjunto inicial de puntos y curvas U_0 finito y no vacío.*

Notación: Dado un conjunto de puntos y curvas U , escribiremos $U = [P, C]$ para indicar que P es el subconjunto de sus puntos y C el de sus curvas.

Definición 2.13 *Sea $M = (\mathcal{T}, U_0)$ un mapa, con $\mathcal{T} = \langle O_C, O_I \rangle$. Llamaremos **sucesión de capas** asociada al mapa M a la sucesión $\{[P_n, C_n]\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ definida como:*

- $U_0 = [P_0, C_0]$.
- C_n es la unión de C_{n-1} con el conjunto de las curvas obtenidas de aplicar de todas las maneras posibles los procedimientos básicos de construcción de \mathcal{T} sobre los elementos de $[P_{n-1}, C_{n-1}]$.
- P_n es la unión de P_{n-1} con el conjunto de los puntos obtenidos de aplicar de todas las formas posibles los procedimientos básicos de intersección de \mathcal{T} sobre los elementos de $[P_{n-1}, C_n]$.

La definición anterior nos sirve para realizar razonamientos inductivos como el que utilizaremos en la demostración del resultado principal de la memoria, el Teorema 4.24. Debemos destacar que en esta noción de capa, puntos y curvas no tienen un papel simétrico: la idea de esta definición es que primero obtengamos todas las curvas de la capa n , C_n , con P_{n-1} y C_{n-1} , y después; obtengamos todos los puntos de la capa n , P_n , con P_{n-1} y todas las curvas obtenidas en la misma capa, C_n .

Veamos los elementos que conforman la primera capa del mapa $(\mathcal{RC}, \{0, 1\})$, o sea, la que podemos construir con regla y compás.

Ejemplo 2.14 • $U_0 = [P_0, C_0]$, donde $P_0 = \{0, 1\}$ y $C_0 = \{\emptyset\}$.

- Partiendo de U_0 , en la primera capa podemos construir:
 - con **C1**: l_1 , la recta que pasa por 0 y 1, o lo que es lo mismo, el eje horizontal.

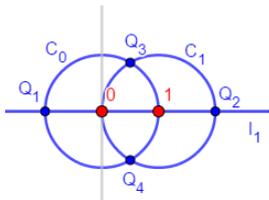


Figura 2.7: Primera capa de $(\mathcal{RC}, \{0, 1\})$

- con **C2**: C_0 y C_1 , las circunferencias de radio 1 y centros 0 y 1 respectivamente.
- con **P2**: Q_1 y Q_2 , las intersecciones entre C_0 y C_1 con l_1 .
- con **P3**: Q_3 y Q_4 , los puntos de intersección de C_0 y C_1 .

Por ello:

$$P_1 = \left\{ Q_1 = -1, Q_2 = 2, Q_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, Q_4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \cup P_0, \quad C_1 = \{l_1, C_0, C_1\}$$

En el capítulo siguiente mostraremos un ejemplo de las primeras capas del mapa $(\mathcal{O}, \{0, 1\})$, es decir, las primeras capas que podemos construir con la herramienta principal del trabajo: el origami.

Definición 2.15 Sea $M = (\mathcal{T}, U_0)$ un mapa. Llamaremos **conjunto de puntos y curvas construibles del mapa M** al conjunto definido como:

$$(U_0)^{\mathcal{M}} = [P^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}}] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} [P_n, C_n]$$

Capítulo 3

Axiomas de Huzita-Hatori-Justin

En este capítulo vamos a ver los procedimientos básicos de construcción necesarios para la formalización de la herramienta principal de nuestro trabajo. Los seis primeros axiomas son atribuidos al matemático italiano-japonés H. Huzita y, además, formaron la base del estudio de las construcciones geométricas mediante origami con un solo doblez desde los años 90. Más tarde, se agregó un séptimo axioma atribuido al japonés K. Hatori. Sin embargo, el primero en encontrar los siete axiomas fue el francés J. Justin, quien había publicado a la vez que H. Huzita el artículo *Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques* [12], aunque su trabajo pasó inadvertido durante años. Por todo ello son conocidos como los axiomas de Huzita-Justin o Huzita-Hatori.

3.1. Descripción geométrica y algebraica de los axiomas

Para cada axioma presentamos su definición geométrica y después la algebraica. Con este fin, fijamos la notación para los puntos $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ y las rectas $l = \{ax + by + c = 0\}$, $l' = \{a'x + b'y + c' = 0\}$. Se ha seguido [14] para la descripción geométrica.

- A1** • Dados dos puntos distintos, P y Q , mediante un doblez se puede construir la recta que pasa por ambos.¹

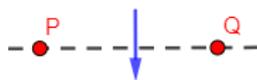


Figura 3.1: A1

- $h_1((P, Q), \emptyset) = \{y(q_1 - p_1) + x(p_2 - q_2) + p_1q_2 - p_2q_1 = 0\}$, cuyo dominio de definición es $D = \{(P, Q), \emptyset) : P \neq Q\}$.
- A2** • Dados dos puntos distintos, P y Q , mediante un doblez se puede construir la recta que coloca P sobre Q .

¹Cada axioma lo representamos con una figura, donde las líneas discontinuas indican el doblez (la recta que construimos) y las flechas azules indican la dirección del pliegue que realizamos. En la mayoría de ocasiones, esta dirección se obtiene al colocar un elemento sobre otro.

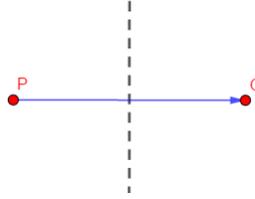


Figura 3.2: A2

- $h_2((P, Q), \emptyset) = \{2x(q_1 - p_1) + 2y(q_2 - p_2) + p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2 = 0\}$, cuyo dominio de definición es $D = \{((P, Q), \emptyset) : P \neq Q\}$. Observamos que esta recta resulta ser la mediatriz del segmento \overline{PQ} .

- A3**
- Dadas dos rectas distintas, l y l' , mediante un dobléz se puede construir cada una de las rectas que colocan l sobre l' . Pueden existir una o dos rectas.

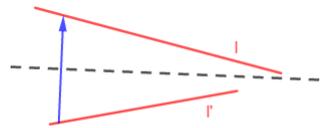


Figura 3.3: A3

- $h_3(\emptyset, (l, l')) = \begin{cases} (l_1, l_2) & \text{si } l \not\parallel l' \\ l_1 & \text{si } l \parallel l' \end{cases}$ donde:
 - $D = \{(\emptyset, (l, l')) : l \neq l'\}$ es el dominio de definición.
 - $l_1 = \{(ad' + a'd)x + (bd' + b'd)y + (cd' + c'd) = 0\}$;
 - $l_2 = \{(ad' - a'd)x + (bd' - b'd)y + (cd' - c'd) = 0\}$;
 - $d = \sqrt{a^2 + b^2}$; $d' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$.

De esta manera, si l y l' se cortan, entonces estas rectas son las bisectrices de los ángulos que forman. Si por el contrario, son paralelas, mediante h_3 solamente se obtiene la paralela equidistante a ambas; dado que el segundo conjunto es vacío.

- A4**
- Dado un punto P y una recta l ; mediante un dobléz se puede construir la perpendicular a l que pasa por P .

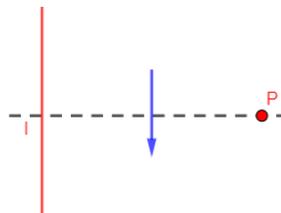


Figura 3.4: A4

- $h_4(P, l) = \{-bx + ay + bp_1 - ap_2 = 0\}$, cuyo dominio de definición es $D = \{(P, l)\}$

- A5**
- Dada una recta l y dos puntos distintos, P y Q , de modo que $P \notin l$, mediante un dobléz se pueden construir, si existen, cada una de las rectas que colocan P sobre l y pasan por Q . A lo sumo hay dos rectas.

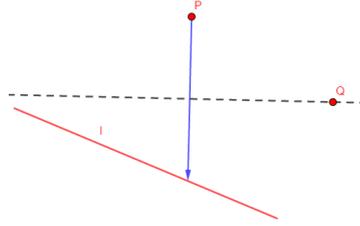


Figura 3.5: A5

- $h_5((P, Q), l) = \begin{cases} (l_1, l_2) & \text{si } a \neq 0 \text{ y } \Delta \geq 0 \\ (l'_1, l'_2) & \text{si } a = 0 \text{ y } \Delta' \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } \Delta < 0 \text{ o } \Delta' < 0 \end{cases}$ donde:
 - $D = \{((P, Q), l) : P \neq Q, P \notin l\}$ es el dominio de definición.
 - $l_1 = \{2x(r_1 - p_1) + 2y(r_2 - p_2) + p_1^2 + p_2^2 - r_1^2 - r_2^2 = 0\}$;
 - $l_2 = \{2x(s_1 - p_1) + 2y(s_2 - p_2) + p_1^2 + p_2^2 - s_1^2 - s_2^2 = 0\}$;
 - $l'_1 = \{2x(r'_1 - p_1) + 2y(r'_2 - p_2) + p_1^2 + p_2^2 - r'^2_1 - r'^2_2 = 0\}$;
 - $l'_2 = \{2x(s'_1 - p_1) + 2y(s'_2 - p_2) + p_1^2 + p_2^2 - s'^2_1 - s'^2_2 = 0\}$;
 - $r_1 = -b \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2Aa} - \frac{c}{a}$; $r_2 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$;
 - $s_1 = -b \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2Aa} - \frac{c}{a}$; $s_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$;
 - $r'_1 = \frac{-B' + \sqrt{\Delta'}}{2A'}$; $r'_2 = -a \frac{-B' + \sqrt{\Delta'}}{2Ab} - \frac{c}{b}$;
 - $s'_1 = \frac{-B' - \sqrt{\Delta'}}{2A'}$; $s'_2 = -a \frac{-B' - \sqrt{\Delta'}}{2Ab} - \frac{c}{b}$;
 - $\Delta = B^2 - 4AC$; $\Delta' = B'^2 - 4A'C'$;
 - $A = a^2 + b^2$;
 - $B = 2bc + 2abq_1 - 2a^2q_2$;
 - $C = c^2 + a^2(-p_1^2 - p_2^2 + 2p_1q_1 + 2p_2q_2) + 2acq_1$;
 - $A' = A$;
 - $B' = 2ac + 2abq_2 - 2b^2q_1$;
 - $C' = c^2 + b^2(-p_1^2 - p_2^2 + 2p_1q_1 + 2p_2q_2) + 2bcq_2$.

Al llevar P sobre $P' \in l$ y pasar por Q , las posibles rectas de pliegue deben ser la mediatriz de $\overline{PP'}$ y pasar por Q . Por el Lema 1.42, esa mediatriz es la recta tangente a la parábola de foco P y directriz l . Se pueden dar tres casos dependiendo de la posición relativa de Q y la parábola, caracterizada algebraicamente por el valor de Δ o Δ' .

- Si $\Delta < 0$ ó $\Delta' < 0$, el punto Q es interior a la parábola, luego no existe solución y la imagen es el conjunto vacío.
 - Si $\Delta = 0$ ó $\Delta' = 0$, el punto Q pertenece a la parábola y en consecuencia, solo se puede construir una recta. En este caso, si $a \neq 0$, entonces $l_1 = l_2$ y si $a = 0$, $l'_1 = l'_2$.
 - Si $\Delta > 0$ ó $\Delta' > 0$, el punto Q es exterior a la parábola y por tanto, se pueden construir dos rectas.
- A6** • Dados dos puntos distintos, P y Q , y dos rectas distintas, l y l' , tal que $P \notin l$ y $Q \notin l'$, mediante un doblado se pueden construir, si existen, cada una de las rectas que colocan simultáneamente P sobre l y Q sobre l' . A lo sumo existen tres rectas.

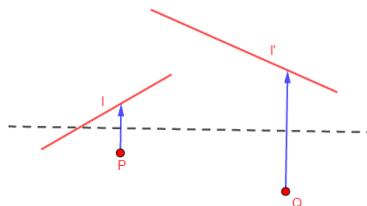


Figura 3.6: A6

- $h_6((P, Q), (l, l')) = \varphi^{-1} \circ \tilde{h}_6 \circ \varphi$
Donde:
 - $D = \{((P, Q), (l, l')) : l \neq l', P \neq Q, P \notin l, Q \notin l'\}$ es el dominio de definición.
 - $\tilde{h}_6((\tilde{P}, \tilde{Q}), (\tilde{l}, \tilde{l}')) = \begin{cases} (\tilde{l}_{m_1}, \tilde{l}_{m_2}, \tilde{l}_{m_3}) & \text{si } |M| = 3 \\ (\tilde{l}_{m_1}, \tilde{l}_{m_2}) & \text{si } |M| = 2 \\ \tilde{l}_{m_1} & \text{si } |M| = 1 \\ \emptyset & \text{si } M = \emptyset \end{cases}$
 - $\tilde{P} = (0, \frac{1}{2})$; $\tilde{l} = \{y + \frac{1}{2} = 0\}$
 - $\tilde{l}_{m_i} = \{\frac{m_i^2}{2} - m_i x + y = 0\}$.
 - $M = \{m_i \in \mathbb{R} : m_i \text{ es solución de (3.3)}\}$.
 - φ es la afinidad (3.4).

La expresión algebraica del axioma **A6** es más complicada que la del resto de los axiomas y se escribirá detalladamente en la Proposición 3.1. Geométricamente, al llevar con un doblaje P a $P' \in l$ y Q a $Q' \in l'$ simultáneamente, las posibles rectas de pliegue han de ser las mediatrices de $\overline{PP'}$ y $\overline{QQ'}$ a la vez. Por lo tanto, por el Lema 1.42, estas rectas son tangentes a dos parábolas, una de foco P y directriz l y otra de foco Q y directriz l' . A continuación daremos la expresión algebraica de estas tangentes en función de las coordenadas de P y Q y los coeficientes de l y l' .

Proposición 3.1 *Las pendientes de las tangentes comunes a dos parábolas son las raíces reales de una ecuación de tercer grado cuyos coeficientes están determinados por los coeficientes de las directrices y los focos.*

Dem: Para probar esta proposición, primero probaremos que se cumple para las parábolas de focos $\tilde{P} = (0, \frac{1}{2})$ y $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ y directrices $\tilde{l} = \{y + \frac{1}{2} = 0\}$ y $\tilde{l}' = \{\tilde{a}'x + \tilde{b}'y + \tilde{c}' = 0\}$, respectivamente. Sea la primera parábola:

$$y = \frac{x^2}{2} \quad (3.1)$$

Por el Lema 1.42, podemos obtener m , la pendiente de la recta tangente a la parábola en R como la pendiente de la recta que pasa por R y R'' , donde:

$$R = (r_1, r_2), R' = (r_1, -\frac{1}{2}), R'' = (\frac{r_1}{2}, 0)$$

$$m = \frac{r_2}{r_1 - \frac{r_1}{2}} = \frac{\frac{r_1^2}{2}}{\frac{r_1}{2}} = r_1$$

Entonces, $r_1 = m$ y $r_2 = \frac{m^2}{2}$. De este modo, la recta tangente a (3.1) en $(m, \frac{m^2}{2})$ es :

$$\tilde{l}_m = \left\{ \frac{m^2}{2} - mx + y = 0 \right\} \quad (3.2)$$

Por otra parte, nuevamente por el Lema 1.42; dado que \tilde{l}_m también ha de ser tangente a la parábola de foco \tilde{Q} y directriz \tilde{l}' en un punto S , \tilde{l}_m es la bisectriz de $\overline{\tilde{Q}S'}$, siendo $S' \in \tilde{l}'$ la proyección de S sobre \tilde{l}' . Por tanto, $S'' \in \tilde{l}_m$.

Después de esto estamos en disposición de calcular la nueva pendiente de la tangente a ambas parábolas con los siguientes pasos:

1. Hallamos la perpendicular a \tilde{l}_m que pasa por \tilde{Q} :

$$t = \{x + my - \tilde{q}_1 - m\tilde{q}_2 = 0\}.$$

2. Calculamos S'' como el punto de corte entre t y \tilde{l}_m :

$$s_1'' = \frac{m^3 + 2\tilde{q}_1 + 2m\tilde{q}_2}{2(m^2 + 1)}, \quad s_2'' = \frac{2m\tilde{q}_1 + 2m^2\tilde{q}_2 - m^2}{2(m^2 + 1)}$$

3. Sabiendo que S'' es el punto medio de $\overline{\tilde{Q}S'}$, hallamos S' :

$$s_1' = \frac{m^3 + \tilde{q}_1 + 2m\tilde{q}_2 - m^2\tilde{q}_1}{m^2 + 1}, \quad s_2' = \frac{2m\tilde{q}_1 + m^2\tilde{q}_2 - m^2 - \tilde{q}_2}{m^2 + 1}$$

4. Como $S' \in \tilde{l}'$: $\tilde{a}'s_1' + \tilde{b}'s_2' + \tilde{c}' = 0$ y así:

$$\tilde{a}'m^3 + Am^2 + Bm + C = 0 \quad (3.3)$$

donde: $A = -\tilde{a}'\tilde{q}_1 + \tilde{b}'\tilde{q}_2 - \tilde{b}' + \tilde{c}'$; $B = 2(\tilde{q}_2\tilde{a}' + \tilde{q}_1\tilde{b}')$; $C = \tilde{a}'\tilde{q}_1 - \tilde{b}'\tilde{q}_2 + \tilde{c}'$

Queda demostrado así que la proposición es cierta para las parábolas expuestas anteriormente.

La proposición también se cumple para cualquier par de parábolas de focos distintos $P \neq Q$ y directrices distintas $l \neq l'$ con $P \notin l$ y $Q \notin l'$. Esto se debe a que se puede construir una afinidad, φ , tal que: $\varphi(P) = (0, \frac{1}{2})$ y $\varphi(l) = \{y + \frac{1}{2} = 0\}$ cuya ecuación sea:

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{ap_1 + bp_2 + c} \left[\begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap_2 - bp_1 \\ \frac{-ap_1 - bp_2 + c}{2} \end{pmatrix} \right] \quad (3.4)$$

Aplicando el caso anterior a $\tilde{P} = \varphi(P)$, $\tilde{Q} = \varphi(Q)$, $\tilde{l} = \varphi(l)$, $\tilde{l}' = \varphi(l')$ y dado que las ecuaciones de φ solo dependen de los coeficientes de P y l , queda demostrada la proposición. \square

De la ecuación (3.3) podemos deducir que si $\tilde{a}' \neq 0$, habrá 1 ó 3 raíces reales que cumplan dicha ecuación, es decir, puede haber 1 ó 3 tangentes comunes a la parábola (3.1) y a otra de foco Q y directriz l' . En la Figura 3.8 se muestra un ejemplo donde hay tres tangentes comunes a ambas parábolas. Sin embargo, si $\tilde{a}' = 0$, la ecuación (3.3) se convierte en una ecuación de segundo grado y, así, podrá haber dos raíces reales que la cumplan o ninguna. Dicho de otra manera, como mucho puede haber dos rectas tangentes a las parábolas, en el caso en el que las directrices sean paralelas (Figura 3.9).

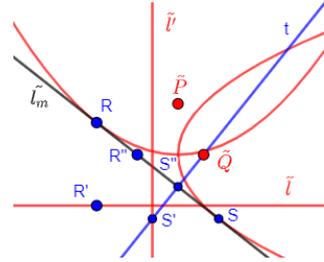


Figura 3.7: Tangente común a dos parábolas (caso de solución única de (3.3))

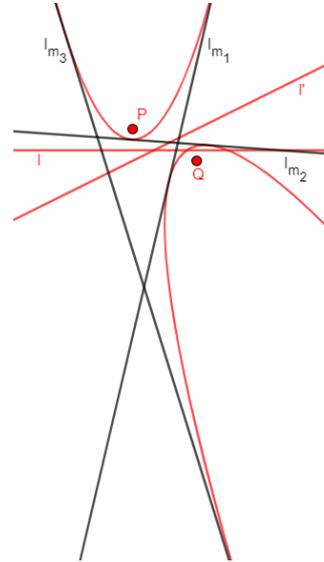


Figura 3.8: $a \neq 0$, caso con tres tangentes comunes

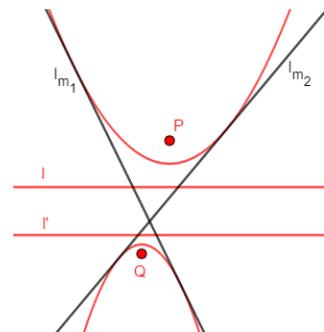


Figura 3.9: $a = 0$, caso con directrices paralelas

- A7** • Dado un punto P y dos rectas, l y l' , con $P \notin l$, mediante un dobléz se puede construir, si existe, la recta que coloca P sobre l y es perpendicular a l' . A lo sumo existe una solución.

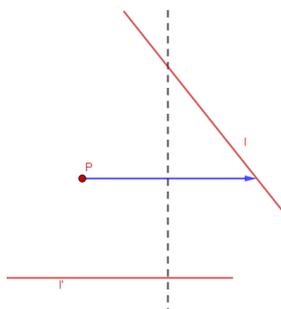


Figura 3.10: A7

$$\bullet h_7(P, (l, l')) = \begin{cases} \{a'y - b'x + b'r_1 - a'r_2 = 0\} & \text{si } l \not\parallel l' \\ \emptyset & \text{si } l \parallel l' \end{cases} \quad \text{donde:}$$

◦ $D = \{(P, (l, l')) : P \notin l\}$ es el dominio de definición.

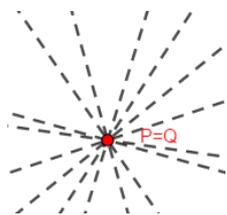
$$\circ r_1 = \frac{p_1}{2} + \frac{b(a'p_1 + b'p_2) + b'c}{2(a'b - ab')}$$

$$\circ r_2 = \frac{p_2}{2} + \frac{a(a'p_1 + b'p_2) + a'c}{2(ab' - a'b)}$$

Para que P se coloque sobre $P' \in l$ con un dobléz, la recta que buscamos ha de ser la mediatriz entre P y P' . Por lo tanto, por el Lema 1.42 este axioma equivale a construir la recta tangente a la parábola de foco P y directriz l que es perpendicular a l' . Notamos que en el caso en que l y l' sean rectas paralelas, la imagen de h_7 es el conjunto vacío, es decir, no existe solución.

3.2. Características de los axiomas

Una vez vistas las descripciones geométricas y algebraicas de cada axioma y dada su importancia en este trabajo, veremos ahora las principales características que estos poseen (para más detalles consultar [9]).

Figura 3.11: Infinitas soluciones para **A1**

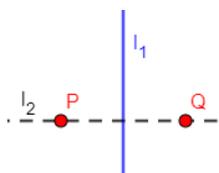
- Las restricciones impuestas en cada axioma forman parte de ellos y tienen como fin asegurar que el número de rectas sea finito.

Ejemplo 3.2 Si en **A1** no se impone que $P \neq Q$, entonces existirían infinitas rectas que pasan por el punto (Figura 3.11).

- El conjunto de axiomas es redundante dado que existen determinados axiomas que se pueden construir a través de otros.

Ejemplo 3.3 **A1**: se puede construir l_2 , la recta que une los puntos P y Q , con los pasos que siguen (Figura 3.12):

1. l_1 : con **A2** se construye la mediatriz de P y Q .
2. l_2 : con **A4** se construye la perpendicular a l_1 que pasa por P (también pasa por Q).

Figura 3.12: **A1** construido con **A2** y **A4**

A2: se puede construir l_4 , la recta que coloca P sobre Q , es decir, la mediatriz de PQ , con los siguientes pasos (Figura 3.13):

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por P y por Q .
2. l_2 : con **A4** se construye la perpendicular a l_1 que pasa por P .
3. l_3 : con **A4** se construye la perpendicular a l_1 que pasa por Q .
4. l_4 : con **A3** se construye la recta que lleva l_2 a l_3 , la paralela equidistante a ambas.

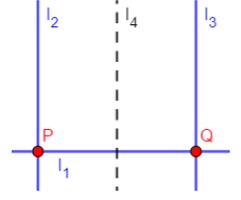


Figura 3.13: **A2** construido con **A1**, **A3** y **A4**

- El conjunto de axiomas es completo, es decir, no hay más formas de realizar nuevas rectas a través de un único doblez. Esto se prueba definiendo todas las superposiciones que se pueden realizar entre elementos: entre puntos, entre rectas y entre puntos y rectas. De esta manera, se ve que los axiomas se corresponden con todas las combinaciones posibles entre estas superposiciones de elementos que están permitidas mediante un solo doblez. La demostración completa la vemos a continuación y está basada en la prueba original de R. C. Alperin y R. J. Lang [1]. Para realizar esta prueba necesitamos definir previamente ciertos conceptos fundamentales:

Como vimos al principio del segundo capítulo, un punto P es un par ordenado (p_1, p_2) donde p_1 y p_2 son las coordenadas cartesianas del punto. También vimos entonces la definición algebraica de las rectas y distintas formas de representarlas. A continuación, mostramos una nueva manera de hacerlo: Dada una recta L , la representamos por $L = (A, B)$ si

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + 1 = 0\}.$$

Por tanto, cada recta tiene una representación única. Sin embargo, las rectas que pasan por el origen no pueden ser descritas de esta forma. Para nuestros fines, podemos lidiar con este problema traduciendo, mediante afinidades, cualquier conjunto de puntos y rectas para que ninguna recta pase por el origen. Podemos observar que cada punto y cada recta tienen dos grados de libertad, es decir, ambos elementos quedan definidos por dos números. Las coordenadas de cada punto las representamos con un par ordenado en letras minúsculas y cada recta, en letras mayúsculas.

Fijada la notación, pasamos a definir la imagen doblada de un punto y de una recta:

Definición 3.4 La imagen doblada de un punto $P = (p_1, p_2)$ en una recta de pliegue $L_F = (A_F, B_F)$ es el punto simétrico a P respecto de la recta de pliegue. Lo denotaremos por $F_{L_F}(P)$. Su descripción algebraica es la siguiente:

$$F_{L_F}(P) = \left(\frac{p_1(B_F^2 - A_F^2) - 2A_F(1 + p_2B_F)}{A_F^2 + B_F^2}, \frac{p_2(A_F^2 - B_F^2) - 2B_F(1 + p_1A_F)}{A_F^2 + B_F^2} \right)$$

Definición 3.5 La imagen doblada de una recta $L = (A, B)$ en una recta de pliegue $L_F = (A_F, B_F)$ es la recta simétrica a L respecto de la recta de pliegue. Lo denotaremos por $F_{L_F}(L)$. Su descripción algebraica está dada por el par ordenado siguiente:

$$F_{L_F}(L) = \left(\frac{A(B_F^2 - A_F^2) - 2A_FB_F}{A_F^2 - 2AA_F - 2BB_F + B_F^2}, \frac{B(A_F^2 - B_F^2) - 2AA_FB_F}{A_F^2 - 2AA_F - 2BB_F + B_F^2} \right)$$

Observación: Está claro que para cada punto P , para cada recta L y para cada recta de pliegue L_F se cumple: $F_{L_F}(F_{L_F}(P)) = P$ y $F_{L_F}(F_{L_F}(L)) = L$ luego, para cada par de puntos o rectas cualesquiera X e Y se tiene que:

$$F_{L_F}(X) = Y \Leftrightarrow F_{L_F}(Y) = X.$$

Ahora veremos los tres tipos de superposiciones que podemos realizar:

Definición 3.6 (Superposición punto-punto) *Dados dos puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$, la superposición $P \leftrightarrow Q$ se satisface si y solo si $p_1 = q_1$ y $p_2 = q_2$.*

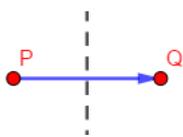


Figura 3.14: F1

Definición 3.7 (Superposición recta-recta) *Dados dos rectas $L = (A, B)$ y $L' = (A', B')$, la superposición $L \leftrightarrow L'$ se satisface si y solo si $A = A'$ y $B = B'$.*

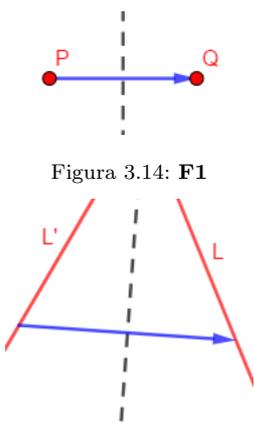


Figura 3.15: F2

Definición 3.8 (Superposición recta-punto) *Dados un punto $P = (p_1, p_2)$ y una recta $L = (A, B)$, la superposición $P \leftrightarrow L$ se satisface si y solo si $p_1A + p_2B + 1 = 0$.*

Cada uno de los siete axiomas, se puede ver como combinación de dos o más superposiciones, lo cual nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3.9 Un axioma de un solo pliegue (1FA) *es un conjunto minimal de superposiciones que definen un número finito de rectas de pliegue.*

Observamos que en la definición anterior el conjunto es minimal para excluir superposiciones redundantes y además, se establecen un número finito de soluciones porque hay combinaciones de superposiciones que tienen infinitas soluciones.

A continuación, combinamos las tres clases de superposiciones definidas anteriormente para poder ver los posibles axiomas de un solo pliegue que podemos realizar:



Figura 3.16: F3.1

F1 ($F_{L_F}(P) \leftrightarrow Q$): lleva un punto P a otro punto distinto Q .

F2 ($F_{L_F}(L) \leftrightarrow L'$): lleva una recta L a otra distinta L' .

F3 ($F_{L_F}(L) \leftrightarrow L$): lleva a una recta L sobre sí misma.

F4 ($F_{L_F}(P) \leftrightarrow L$): lleva un punto P a una recta L .²

F5 ($F_{L_F}(P) \leftrightarrow P$): lleva a un punto P sobre sí mismo.

La recta definida por un axioma de un solo pliegue está representada por dos parámetros. Por lo tanto, cualquier combinación de superposiciones que determine una recta de pliegue debe satisfacer exactamente dos ecuaciones distintas. **F1** establece un sistema de dos ecuaciones y **F2**, uno o dos sistemas de dos ecuaciones. Por tanto, ambos determinan un axioma de un solo pliegue. Además, las superposiciones **F1** y **F2** son las descritas por los axiomas **A2** y **A3**, respectivamente.

Hay dos maneras de realizar la superposición de **F3**:

²Notemos que es equivalente llevar un punto P a una recta L que llevar una recta L a un punto P , es decir, $(F_{L_F}(L) \leftrightarrow P \Leftrightarrow F_{L_F}(P) \leftrightarrow L)$.

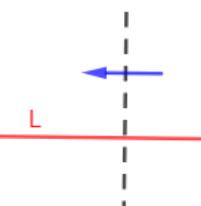


Figura 3.17: F3.2

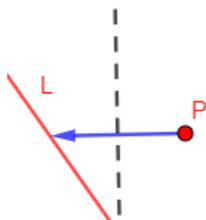


Figura 3.18: F4



Figura 3.19: F5

F3.1 La recta de pliegue es la propia recta dada L .

F3.2 Las rectas de pliegue son perpendiculares a la recta dada L .

La superposición **F3.1** no se corresponde con ninguno de los siete axiomas, según Lucero [17], sí que lo hace con un octavo axioma. La aportación a la completitud del conjunto de axiomas es meramente teórica y, habitualmente, se excluye debido a que no define ningún objeto nuevo, pues consiste en realizar una recta de pliegue sobre una recta dada.

Las otras tres superposiciones **F3.2**, **F4** y **F5** satisfacen exclusivamente una ecuación, es decir, hay infinitas rectas de pliegue posibles, por esto hacen falta dos de estas superposiciones para determinar una recta de pliegue. Entonces, consideraremos a continuación las posibles combinaciones de pares de estas tres superposiciones, para las cuales asumimos que $L \neq L'$ y que $P \neq Q$:

		F3.2 $F_{L_F}(L) \leftrightarrow L$	F4 $F_{L_F}(P) \leftrightarrow L$	F5 $F_{L_F}(P) \leftrightarrow P$
F3.2	$F_{L_F}(L') \leftrightarrow L'$	-	A7	A4
F4	$F_{L_F}(Q) \leftrightarrow L'$	A7	A6	A5
F5	$F_{L_F}(Q) \leftrightarrow Q$	A4	A5	A1

La primera combinación que aparece en la tabla consiste en llevar dos rectas diferentes en sí mismas. Esto no es posible para los axiomas de un solo pliegue debido a que si, por una parte las rectas no son paralelas entonces las ecuaciones son incompatibles y si, por otra parte las rectas son paralelas, entonces hay infinitas soluciones (perpendiculares a ambas rectas) y por tanto, no forman parte del conjunto de los axiomas de un solo pliegue.

El resto de las combinaciones corresponden a los otros cinco axiomas de Huzita-Hatori-Justin que nos faltaban por ver. De esta manera, con todas las combinaciones posibles de las superposiciones de un solo pliegue probamos que no puede haber más axiomas de un solo pliegue y por consiguiente los axiomas de Huzita-Hatori-Justin son completos.

- Como veremos en el siguiente capítulo el axioma **A6** juega un papel fundamental en las construcciones con origami. En cierta forma se puede afirmar que **A6** es el pilar central de la teoría. De hecho, si suprimimos las restricciones sobre el dominio y permitimos añadir determinadas condiciones cuando sea necesario; podemos obtener el resto de los axiomas. Dicho en otras palabras, a partir de **A6** sin restricciones, **A6SR**, se pueden obtener todos los axiomas. Por lo tanto, utilizando solamente **P1** y **A6SR** podríamos obtener todos los elementos origami-construibles cuya definición veremos al comienzo del próximo capítulo. Para ello usaremos el siguiente hecho: dados un punto P y una recta l con $P \in l$, para llevar P sobre l mediante un doblez, la recta de pliegue o pasa por P o es perpendicular a l . Veamos como construir los otros seis axiomas a partir de **A6SR**. Para el desarrollo de este apartado hemos empleado [7, cap. 6].
- Dados dos puntos distintos $P \neq Q$, podemos obtener **A1** aplicando **A6SR**: elegimos l cualquier recta que pase por P ($P \in l$) y l' cualquier recta que pase por Q ($Q \in l'$) tal que $l \nparallel l'$. Así, una de las soluciones de **A6SR** que lleva P sobre l y Q sobre l' deja fijos P y Q , es decir, es la recta que pasa por ambos puntos: **A1**.

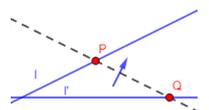
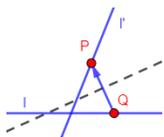
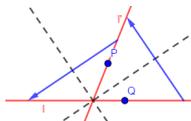
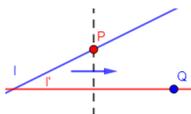
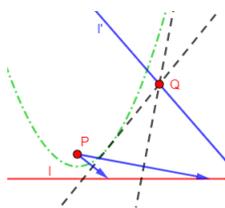
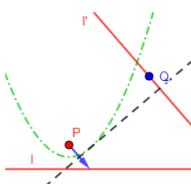


Figura 3.20: A6SR \rightarrow A1

Figura 3.21: A6SR \rightarrow A2Figura 3.22: A6SR \rightarrow A3Figura 3.23: A6SR \rightarrow A4Figura 3.24: A6SR \rightarrow A5Figura 3.25: A6SR \rightarrow A7

- Dados dos puntos distintos $P \neq Q$, podemos obtener **A2** aplicando **A6SR**: elegimos dos rectas cualesquiera $l \neq l'$ tal que $P \in l'$ y $Q \in l$. Así, una de las soluciones de **A6SR** lleva P a Q y con ello, P a l y Q a l' , es decir, se construye la mediatriz de \overline{PQ} : **A2**.
- Dadas dos rectas distintas $l \neq l'$ podemos obtener **A3** aplicando **A6SR**: elegimos dos puntos cualesquiera con $P \in l'$ y $Q \in l$ (mismas condiciones que en el caso anterior). De esta forma, otras soluciones ³, llevan l a l' y con ello, P a l y Q a l' . Dicho de otra manera, o bien se construyen las bisectrices de los ángulos que forman ambas rectas si $l \nparallel l'$, o bien se construye la paralela equidistante a ambas si $l \parallel l'$: **A3**.
- Dados un punto P y una recta l' cualesquiera, podemos obtener **A4** aplicando **A6SR**: elegimos l cualquier recta que pase por P ($P \in l$) y Q cualquier punto de la recta l' ($Q \in l'$) con $l \nparallel l'$ (las mismas condiciones que en el primer caso). De esta manera, otra recta solución ⁴, que lleva P a l y Q a l' , es la que deja fijo P . Así, para que P siga perteneciendo a l y Q a l' , la recta de pliegue ha de ser perpendicular a l' y además debe pasar por P : **A4**.
- Dados dos puntos distintos $P \neq Q$ y una recta l tal que $P \notin l$ podemos obtener **A5** aplicando **A6SR**: elegimos una recta cualquiera l' con $Q \in l'$. Las posibles rectas solución dejan fijo Q (pasan por Q) y llevan P a l : **A5**.
- Dado un punto P y dos rectas l y l' podemos obtener **A7** aplicando **A6SR**: elegimos Q un punto cualquiera con $Q \in l'$ (las condiciones del caso anterior). De esta manera, otra recta solución mueve Q a lo largo de l' , es decir, es perpendicular a l' y lleva P a l : **A7**.

Presentamos ahora una tabla resumen de los axiomas de Huzita-Hatori-Justin:

Axioma	Descripción de la recta	Restricciones	Nºsoluciones
A1	Pasa por P y por Q	$P \neq Q$	1
A2	Coloca P sobre Q	$P \neq Q$	1
A3	Coloca l sobre l'	$l \neq l'$	1 ó 2
A4	Perpendicular a l que pasa por P	-	1
A5	Coloca P sobre l y pasa por Q	$P \neq Q, P \notin l$	0,1 ó 2
A6	Coloca P sobre l y Q sobre l'	$P \neq Q, l \neq l', P \notin l, Q \notin l'$	0,1,2 ó 3
A7	Coloca P sobre l y es perpendicular a l'	$P \notin l$	0 ó 1

³Si aplicamos **A6SR** a dos rectas $l \neq l'$ y a dos puntos $P \neq Q$ con $P \in l'$ y $Q \in l$ se tiene que: por un lado si $l \parallel l'$, puede haber una sola solución en caso de que la mediatriz de \overline{PQ} coincida con la paralela equidistante o dos soluciones en caso de que no sea así. Por otro lado, si $l \nparallel l'$, pueden existir dos soluciones si una de las bisectrices coincide con la mediatriz o tres en caso contrario. Cabe destacar que cualquiera de las rectas soluciones es tangente a las parábolas de focos P y Q y directrices l y l' , respectivamente.

⁴Si aplicamos **A6SR** a dos rectas l y l' y a dos puntos $P \neq Q$ con $l \nparallel l'$, $P \in l$ y $Q \in l'$ se tiene que: si la recta que pasa por P y Q es perpendicular a cualquiera de las rectas dadas (l o l'), existen solamente dos soluciones (perpendicular a l que pasa por Q y perpendicular a l' que pasa por P); en caso contrario, existen tres soluciones. Cabe destacar que ahora las soluciones no son tangentes a las parábolas de focos P y Q y directrices l y l' respectivamente debido a que $P \in l$ y $Q \in l'$.

Capítulo 4

Construcciones mediante Origami

En este capítulo se encuentran los resultados principales del trabajo. Comenzamos definiendo el conjunto de los números origami-construibles empleando el formalismo introducido en el segundo capítulo y los axiomas presentados en el tercer capítulo.

Definición 4.1 Llamamos *origami* a la herramienta constituida por el conjunto de los axiomas de Huzita-Hatori-Justin y **P1** el procedimiento básico de intersección entre rectas.

$$\mathcal{O} = \langle \{\mathbf{A1}, \mathbf{A2}, \mathbf{A3}, \mathbf{A4}, \mathbf{A5}, \mathbf{A6}, \mathbf{A7}\}, \{\mathbf{P1}\} \rangle$$

Observación: En el capítulo anterior hemos visto que los axiomas de Huzita-Hatori-Justin son redundantes, notamos que al añadir **P1** la redundancia aumenta como podemos ver en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.2 Se puede construir l_3 , la recta que coloca P sobre l y es perpendicular a l' , **A7**, con los pasos que siguen:

1. l_1 : con **A4** se construye la perpendicular a l' que pasa por P .
2. l_2 : con **A4** se construye la perpendicular a l_1 que pasa por P .
3. P_1 : con **P1** se obtiene el punto de corte entre l y l_2 .
4. l_3 : con **A2** se construye la mediatriz de $\overline{P_1P}$.

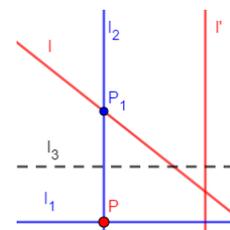


Figura 4.1: **A7** construido con **A2**, **A4** y **P1**

Definición 4.3 Diremos que un punto o una recta del plano es *origami-construible* si existe una construcción a partir de $U_0 = \{0, 1\}$ realizable por \mathcal{O} .

Definición 4.4 Llamaremos *mapa canónico del origami* al mapa:

$$\mathcal{O} = (\mathcal{O}, \{0, 1\})$$

A $\mathcal{O} = [\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_C] = (\{0, 1\})^{\mathcal{O}}$ lo llamaremos conjunto de puntos y rectas origami-construibles. Aunque el conjunto de puntos origami-construibles se denota por \mathcal{O}_P , por brevedad a partir de ahora utilizaremos \mathcal{O} en su lugar, es decir, \mathcal{O} será el conjunto de los números origami-construibles.

Como ya anticipamos en el capítulo previo, seguidamente vamos a ver las primeras capas del mapa $(\mathcal{O}, \{0, 1\})$:

Ejemplo 4.5 • $U_0 = [P_0, C_0]$, donde $P_0 = \{0, 1\}$ y $C_0 = \{\emptyset\}$.

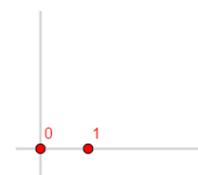


Figura 4.2: Capa 0.

- Partiendo de U_0 , en la primera capa podemos construir:
 - con **A1**: l_1 , la recta que pasa por 0 y 1, dicho de otra manera, el eje horizontal.
 - con **A2**: l_2 , la mediatriz del segmento $\overline{01}$.
 - con **P1**: Q_1 , la intersección entre l_1 y l_2 .

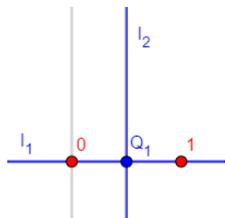


Figura 4.3: Capa 1.

Por ello:

$$P_1 = \{Q_1 = \frac{1}{2}\} \cup P_0, \quad C_1 = \{l_1, l_2\}.$$

- Partiendo de la primera capa, en la segunda podemos construir:
 - con **A2**: las mediatrices de $\overline{0Q_1}$ y $\overline{Q_1 1}$: l_3 y l_4 , respectivamente.
 - con **A3**: las bisectrices de l_1 y l_2 : l_5 y l'_5 .
 - con **A4**: l_6 , la perpendicular a l_1 que pasa por 0 (el eje vertical) y l_7 , la perpendicular a l_1 que pasa por 1.
 - con **A5**: las rectas que colocan 0 y 1 sobre l_2 y pasan por Q_1 , que además de ser las mismas, coinciden con l_5 y l'_5 .
 - con **A7**: l_3 , la recta que coloca 0 sobre l_2 y es perpendicular a l_1 y l_4 , la recta que coloca 1 sobre l_2 y es perpendicular a l_1 .
 - con **P1**: las intersecciones de todas las rectas construidas (incluso en esta capa).

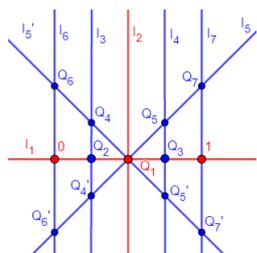


Figura 4.4: Capa 2.

Y así:

$$P_2 = \{Q_2, Q_3, Q_4, Q'_4, Q_5, Q'_5, Q_6, Q'_6, Q_7, Q'_7\} \cup P_1, \quad C_2 = \{l_3, l_4, l_5, l'_5, l_6, l_7\} \cup C_1.$$

4.1. \mathcal{O} subcuerpo de \mathbb{C}

El objetivo de esta sección es ver que el conjunto \mathcal{O} es un cuerpo, en particular, veremos que es un subcuerpo de \mathbb{C} .

Antes de ver las construcciones aritméticas que podemos realizar mediante origami, vamos a introducir algunas construcciones auxiliares:

Lema 4.6 (Paralela) *Dados un punto P y una recta l , la recta l' , paralela a l que pasa por P es origami-construible.*

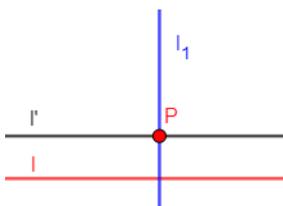


Figura 4.5: Paralela

Dem: Para su construcción basta con realizar la siguiente secuencia:

1. l_1 : con **A4** se construye la perpendicular a l que pasa por P .
2. l' : con **A4** se construye la perpendicular a l_1 que pasa por P .

□

Lema 4.7 (Simetría central) *Dados dos puntos P y Q con $P \neq Q$; el punto P' , simétrico de P respecto de Q , el centro de la simetría, es origami-construible.*

Dem: Para su construcción basta con realizar la siguiente secuencia:

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por P y Q .
2. l_2 : con **A4** se construye la perpendicular a l_1 que pasa por Q .
3. l_3, l'_3 : con **A3** se construyen las bisectrices de las rectas l_1 y l_2 .
4. l_4 : con **A4** se construye la perpendicular a l_3 , construida como en la Figura 4.6, que pasa por P .
5. R : con **P1** se obtiene la intersección de las rectas l_2 y l_4 .
6. l_5 : con **A4** se construye la perpendicular a l'_3 que pasa por R .
7. P' : con **P1** se obtiene la intersección de l_1 y l_5 .

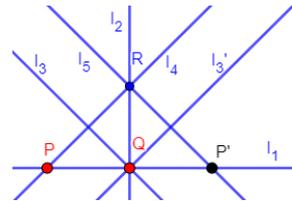


Figura 4.6: Simetría central

□

Lema 4.8 (Simetría axial) *Dados un punto P y una recta l ; el punto P' simétrico de P respecto a l , el eje de simetría, es origami-construible.*

Dem: Para su construcción basta con realizar la siguiente secuencia:

1. l_1 : con **A4** se construye la perpendicular a l que pasa por P .
2. P_1 : con **P1** se obtiene la intersección de l y l_1 .
3. P' : con el Lema 4.7 se obtiene el simétrico de P respecto a P_1 .

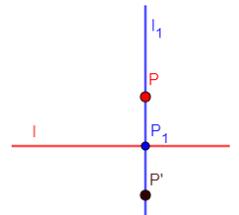


Figura 4.7: Simetría axial

□

Observación: Tanto el eje real como el imaginario son origami-construibles:

- Eje real: con **A1** se construye la recta que pasa por 0 y 1.
- Eje imaginario: con **A4** se construye la perpendicular al eje real que pasa por 0.

Lema 4.9 (Parte real) *Sea $\alpha = a + bi \in \mathcal{O}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \in \mathcal{O}$.*

Dem: Para probar que la parte real de un número complejo origami-construible también lo es vemos a continuación los pasos necesarios para su construcción (Figura 4.8):

1. l_1 : con **A4** se construye la perpendicular al eje real que pasa por α .
2. a : con **P1** se obtiene la intersección del eje real y la recta l_1 .

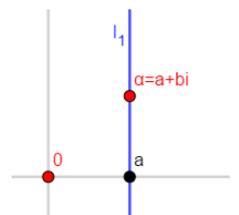


Figura 4.8: Parte real

□

Lema 4.10 (Parte imaginaria) *Sea $\alpha = a + bi \in \mathcal{O}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $b \in \mathcal{O}$.*

Dem: Para probar que la parte imaginaria de un número complejo origami-construible también lo es vemos a continuación los pasos necesarios para su construcción (Figura 4.9):

1. l_1 : con **A4** se construye la perpendicular al eje imaginario que pasa por α .
2. bi : con **P1** se obtiene la intersección del eje imaginario con la recta l_1 .
3. l_2 : con **A3** se construye la bisectriz del eje real y del imaginario que pasa por el cuadrante que contiene a α .
4. b : con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de bi respecto a l_2 .

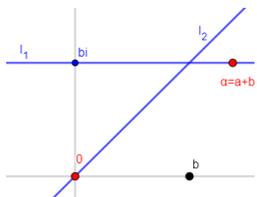


Figura 4.9: Parte imaginaria

□

Una vez vistas las construcciones auxiliares que vamos a necesitar, veremos la construcción de las operaciones aritméticas básicas: la suma, el producto e inversos, tanto para la suma (opuesto) como para el producto.

Lema 4.11 (Suma) Sea $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, entonces $\alpha + \beta \in \mathcal{O}$.

Dem: Vamos a probar que para dos números origami-construibles cualesquiera, α y β , su suma, $\alpha + \beta$, también es origami-construible:

Caso 1 : $\alpha \neq \beta$ están alineados respecto al origen. Los pasos para su construcción se muestran en la Figura 4.10 y son los siguientes:

1. l_1 : con **A2** se construye la mediatriz de α y β .
2. $\alpha + \beta$: con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de 0 respecto a l_1 .

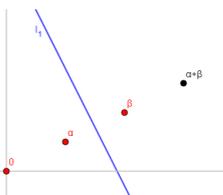


Figura 4.10: Suma: caso 1

Caso 2 : $\alpha = \beta \neq 0$ (Figura 4.11):

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa 0 y α .
2. l_2 : con **A4** se construye la perpendicular a l_1 que pasa por α .
3. 2α : con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de 0 respecto a l_2 .

Caso 3 : $\alpha \neq \beta$ no nulos, no alineados respecto al origen (Figura 4.12):

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por 0 y α .
2. l_2 : con **A1** se construye la recta que pasa por 0 y β .
3. l_3 : con el Lema 4.6 se construye la paralela a l_2 que pasa por α .
4. l_4 : con el Lema 4.6 se construye la paralela a l_1 que pasa por β .
5. $\alpha + \beta$: con **P1** se obtiene la intersección de las rectas l_3 y l_4 .

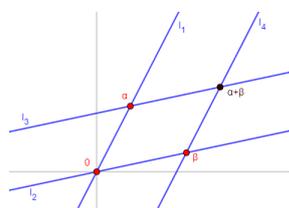


Figura 4.12: Suma: caso 3

□

Lema 4.12 (Opuesto) Sea $\alpha \in \mathcal{O}$, entonces $-\alpha \in \mathcal{O}$.

Dem: Es suficiente con observar que el opuesto de un número equivale a realizar una simetría central con centro el origen (Figura 4.13) con el Lema 4.7. □

Lema 4.13 (Producto) Sean $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, entonces $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{O}$.

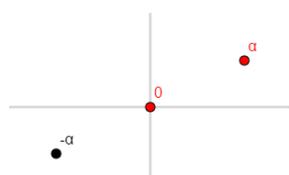


Figura 4.13: Opuesto

Dem: Vamos a probar que para dos números origami-construibles cualesquiera, α y β , su multiplicación, $\alpha \cdot \beta$, también es origami-construible:

Caso 1 : $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Este caso lo veremos por semejanza de triángulos (Figura 4.14). Los pasos para llegar a la multiplicación son los siguientes:

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por 0 y por β .
2. l_2 : con **A1** se construye la recta que pasa por 1 y por β .
3. l_3 : con el Lema 4.6 se construye la paralela a l_2 que pasa por α .
4. $\alpha\beta$: con **P1** se obtiene la intersección de las rectas l_1 y l_3 .

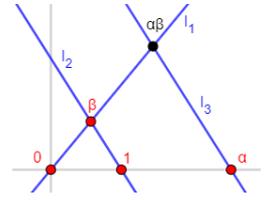


Figura 4.14: Producto: caso 1

Caso 2 : $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\beta = i$ (Figura 4.15):

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por 0 y α .
2. l_2 : con **A4** se construye la perpendicular a l_1 que pasa por 0.
3. l_3 : con **A3** se construye la bisectriz de las rectas l_1 y l_2 que pasa por el cuadrante que contiene a α .
4. αi : con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de α respecto a l_3 .

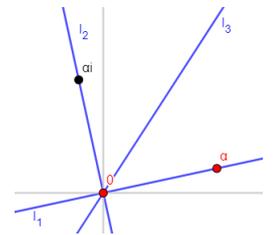


Figura 4.15: Producto: caso 2

Caso 3 : $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ (Figura 4.16):

1. $\alpha + i$: con el Lema 4.11 se obtiene la suma de α y de la unidad imaginaria, i .
2. $\alpha(\beta + i)$: con el **Caso 1**(Figura 4.14) se construye el producto de α por $\beta + i$.
3. $\alpha\beta$: con el Lema 4.9 se obtiene la parte real de $\alpha(\beta + i)$, es decir, $\alpha\beta$.

Caso 4 : Caso general $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ y $\beta = c + di \in \mathbb{C}$, donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$. Tenemos que ver ahora que $a(c + di) + b(c + di)i \in \mathcal{O}$.

1. $a(c + di)$: Por los casos anteriores (utilizaremos el **Caso 1** o el **Caso 3** dependiendo de los valores de a, c y d) es origami-construible.
2. $b(c + di)$: Por los casos anteriores (utilizaremos el **Caso 1** o el **Caso 3** dependiendo de los valores de b, c y d) es origami-construible.
3. $b(c + di)i$: Por el punto anterior, ya sabemos que $b(c + di) \in \mathcal{O}$. Por lo tanto, por el **Caso 2** (Figura 4.15) es origami-construible.
4. $a(c + di) + b(c + di)i$: Como hemos visto, $a(c + di) \in \mathcal{O}$ y $b(c + di)i \in \mathcal{O}$. Por el Lema 4.11 este también es un número origami-construible por ser la suma de dos números origami-construibles.

□

Observación: La unidad imaginaria, i , es origami-construible, pues para su construcción no habría más que aplicar el **Caso 2** del lema anterior a $\alpha = 1$.

Lema 4.14 (Inverso) Sea $\alpha \in \mathcal{O}(\alpha \neq 0)$ entonces $\frac{1}{\alpha} \in \mathcal{O}$.

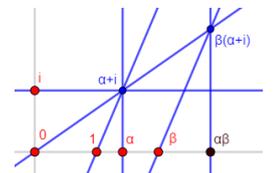


Figura 4.16: Producto: caso 3

Dem: Vamos a probar que el inverso multiplicativo de un número origami-construible también es origami-construible.

Caso 1 : $\alpha \in \mathbb{R}$. Para la construcción del inverso se requieren los siguientes pasos:

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por α y por i .
2. l_2 : con el Lema 4.6 se construye la paralela a l_1 que pasa por 1.
3. $\frac{i}{\alpha}$: con **P1** se obtiene la intersección entre el eje imaginario y la recta l_2 .
4. l_3 : con **A3** se construye la bisectriz del eje real y del imaginario que pasa por el cuadrante que contiene a α .
5. $\frac{1}{\alpha}$: con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de $\frac{i}{\alpha}$ respecto a l_3 .

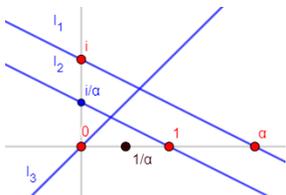


Figura 4.17: Inverso: caso 1

Caso 2 : $\alpha = a + bi$ con $b \neq 0$. Tenemos que ver ahora que $\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \in \mathcal{O}$.

1. Por los Lemas 4.9 y 4.10, la parte real, a , y la imaginaria, b , son origami-construibles.
2. Por los Lemas 4.11 (Suma), 4.12 (Opuesto) y 4.13 (Producto) $a - bi$ y $a^2 + b^2$ son origami-construible.
3. Por el **Caso 1**, $\frac{1}{a^2 + b^2}$ es origami-construible por ser a y b números reales.
4. Por último, por el Lema 4.13 (Producto) $(a - bi)\frac{1}{a^2 + b^2}$ es origami-construible.

□

Lema 4.15 Sea $\alpha = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha \in \mathcal{O} \Leftrightarrow a \in \mathcal{O}$ y $b \in \mathcal{O}$.

Dem: \Rightarrow La prueba de esta implicación es inmediata, pues como ya hemos visto anteriormente en los Lemas 4.9 y 4.10, las partes real e imaginaria de un número origami-construible son origami-construibles.

\Leftarrow Por otra parte, también es sencillo ver que $\alpha = a + bi$ es origami-construible. Para ello, basta con aplicar los Lemas 4.11 (Suma) y 4.13 (Producto), a los números dados: a y b .

□

Lema 4.16 $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{O}$.

Dem: Primeramente, como $1 \in \mathcal{O}$; se prueba por inducción, empleando el Lema 4.11(Suma), que $\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathcal{O}$.

Ahora, veremos que además $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{O}$: Dado que 0 y los números naturales son origami-construibles, debido al Lema 4.12 (Opuesto), los números enteros también lo son.

Por último, podemos probar fácilmente que dados $a, b \in \mathbb{Z} \subset \mathcal{O}$ cualesquiera, $\frac{a}{b}$ es origami-construible, basta con aplicar a b el Lema 4.14 (Inverso), y posteriormente aplicar a $\frac{1}{b}$ y a el Lema 4.13 (Producto).

□

El siguiente teorema resume los resultados previos obtenidos:

Teorema 4.17 \mathcal{O} es un cuerpo. En particular, \mathcal{O} es subcuerpo de \mathbb{C} con $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$.

Dem: Por el Lema 4.16 $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{O}$. Además, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}$ se tiene que $\alpha - \beta \in \mathcal{O}$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{O}$ con $\beta \neq 0$, se tiene que $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{O}$ por los Lemas 4.11(Suma), 4.12(Opuesto), 4.13(Producto) y 4.14(Inverso). \square

El cuerpo de los números origami-construibles contiene a \mathbb{Q} y a i , luego a $\mathbb{Q}(i)$, pero contiene más números. En concreto, vamos a estudiar qué raíces se pueden construir.

Lema 4.18 (Raíz cuadrada) Sea $\alpha \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \sqrt{\alpha} \in \mathcal{O}$.

Dem: A partir de $P = 0$, $Q = 1$ y α construimos $R = 1 + \alpha$. Vamos a probar que podemos obtener $\sqrt{\alpha}$. En primer lugar, podemos observar en la Figura 4.18, que el triángulo $\triangle PRS$ es rectángulo, al igual que $\triangle PQS$ y $\triangle QRS$, que comparten el lado \overline{QS} . De manera que, por semejanza de triángulos:

$$\frac{d(P, Q)}{d(Q, S)} = \frac{d(Q, S)}{d(Q, R)}; \frac{1}{d} = \frac{d}{\alpha} \Rightarrow d^2 = \alpha; d = \sqrt{\alpha}$$

Como se aprecia en la Figura 4.18, d se puede construir con regla y compás. Para obtener d mediante origami realizamos los siguientes pasos (Figura 4.19):

1. l_1 : con **A4** se construye la perpendicular al eje real que pasa por Q .
2. l_2 : con **A2** se construye la mediatriz del segmento \overline{PR} .
3. P_1 : con **P1** se obtiene la intersección de l_2 y el eje real.
4. l_3 : con **A5** se construye la recta que coloca P sobre l_1 , pasa por P_1 y tiene pendiente negativa.
5. S : con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de P respecto a l_3 .
6. $\sqrt{\alpha}$: con el Lema 4.10 se obtiene la parte imaginaria de S .

Por el Lema 1.42 $S \in l_1$ porque l_3 es simultáneamente la mediatriz de \overline{PS} y la recta tangente a la parábola de foco P y directriz l_1 que pasa por P_1 . En consecuencia, como $d(S, P_1) = d(P, P_1)$ se tiene que S está sobre la circunferencia de centro P_1 y radio $\overline{PP_1}$ y también, sobre l_1 . Luego $S = 1 + \sqrt{\alpha}i$. \square

Lema 4.19 (Raíz cúbica) Sea $\alpha \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{\alpha} \in \mathcal{O}$.

Dem: En primer lugar construimos $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{-\alpha}{2}$, $\frac{i}{2}$ y $\frac{-i}{2}$ que, por los lemas expuestos anteriormente son origami-construibles. A partir de estos números, los pasos necesarios para obtener $\sqrt[3]{\alpha}$ son los que siguen:

1. l_1 : con **A2** se construye la mediatriz entre 0 y α .
2. l_2 : con **A4** se construye la perpendicular al eje imaginario que pasa por $-\frac{i}{2}$.
3. l_3 : con **A6** se construye la recta que lleva $\frac{i}{2}$ a l_2 y $\frac{-\alpha}{2}$ a l_1 .
4. l_4 : con el Lema 4.6 se construye la paralela a l_3 que pasa por 0.
5. l_5 : con **A4** se construye la perpendicular al eje real que pasa por 1.
6. $1 + di$: con **P1** se obtiene la intersección entre l_4 y l_5 .
7. d : con el Lema 4.10 se obtiene la parte imaginaria de $1 + di$.

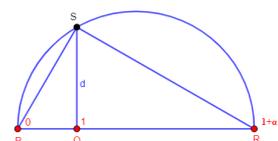


Figura 4.18: Raíz cuadrada con regla y compás

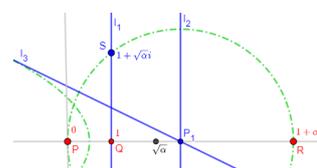


Figura 4.19: Raíz cuadrada con origami

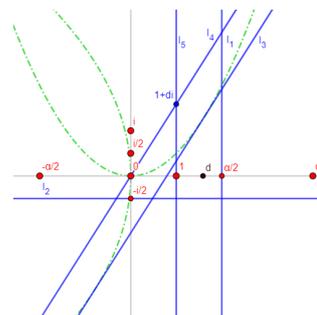


Figura 4.20: Raíz cúbica

Ahora veremos porqué el resultado de la secuencia anterior es $d = \sqrt[3]{\alpha}$:

Para ello, emplearemos la primera parte de la demostración de la Proposición 3.1 donde tomando los valores $\tilde{a}' = 1$, $\tilde{b}' = 0$, $\tilde{c}' = -\frac{\alpha}{2}$, $\tilde{q}_1 = -\frac{\alpha}{2}$ y $\tilde{q}_2 = 0$ obtenemos las parábolas con directrices $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ (l_1 y l_2) y focos $(-\frac{\alpha}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ (en coordenadas complejas $-\frac{\alpha}{2}, \frac{i}{2}$) respectivamente. Por lo probado en esta proposición, sabemos que m , la pendiente de la recta l_3 simultáneamente tangente a las dos parábolas, es una raíz real de la ecuación (3.3). Con estos valores, dicha ecuación es $m^3 - \alpha = 0$ y como la única raíz real es $\sqrt[3]{\alpha}$ tenemos que $m = \sqrt[3]{\alpha}$. Además, $l_4 = \{y = \sqrt[3]{\alpha}x\}$ y $(1, d) \in l_4 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\alpha}$.

□

Lema 4.20 (Duplicación) Sea $\sigma \in (0, \pi)$ tal que $e^{i\sigma} \in \mathcal{O}$ entonces $e^{2i\sigma} \in \mathcal{O}$.

Dem: Dado $e^{i\sigma}$, los pasos que se necesitan para construir $e^{2i\sigma}$ son los que siguen:

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por $e^{i\sigma}$ y 0.
2. $e^{2i\sigma}$: con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de 1 respecto a l_1 .

□

Observación: Si $\sigma \in (-\pi, 0)$ calculamos primero $e^{-i\sigma}$ con el Lema 4.12 (Opuesto) para después obtener $e^{-2i\sigma}$ utilizando el lema anterior y volvemos a aplicar el Lema 4.12 (Opuesto) a $e^{-2i\sigma}$.

Lema 4.21 (Bisección) Sea $\sigma \in (0, \pi)$ tal que $e^{i\sigma} \in \mathcal{O}$ entonces $e^{i\frac{\sigma}{2}} \in \mathcal{O}$.

Dem: La secuencia para construir a $e^{i\frac{\sigma}{2}}$ es la siguiente:

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por $e^{i\sigma}$ y 0.
2. l_2 : con **A3** se construye la bisectriz que forma el eje real y la recta l_1 con pendiente positiva.
3. l_3 : con **A3** se construye la bisectriz de l_1 y l_2 . De manera, que si el menor ángulo que forman l_2 con el eje real es menor que $\frac{\pi}{2}$ entonces se toma l_3 con pendiente negativa. Si por el contrario, el ángulo es mayor que $\frac{\pi}{2}$, entonces l_3 tiene pendiente positiva.
4. $e^{i\frac{\sigma}{2}}$: con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de $e^{i\sigma}$ respecto a l_3 .

□

Observación: Si $\sigma \in (-\pi, 0)$ basta con modificar el paso 2 y elegir l_2 la bisectriz con pendiente negativa.

Lema 4.22 (Trisección) Sea $\sigma \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, tal que $e^{i\sigma} \in \mathcal{O}$ entonces $e^{i\frac{\sigma}{3}} \in \mathcal{O}$.

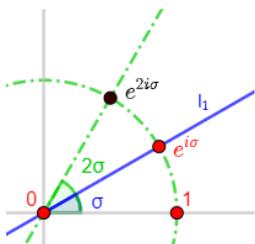


Figura 4.21: Duplicación

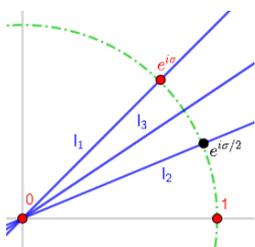


Figura 4.22: Bisección

Dem: Para construir $e^{i\frac{\sigma}{3}}$ primero se construye con **A1** l , la recta que pasa por 0 y por $e^{i\sigma}$ y después basta con realizar la siguiente secuencia:

1. l_1 : con el Lema 4.6 se construye la paralela al eje real que pasa por i .
2. l_2 : con **A2** se construye la mediatriz del segmento $\overline{0i}$.
3. l_3 : con **A6** se construye la recta que lleva 0 a P , un punto de l_2 e i a Q , un punto de l .
4. P : con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de 0 respecto a l_3 .
5. l_4 : con **A1** se construye la recta que pasa por 0 y P .
6. l_5 : con **A3** se construye la bisectriz que forman las rectas l y l_4 .
7. S : con el Lema 4.8 se construye el simétrico de $e^{i\sigma}$ respecto a l_5 .

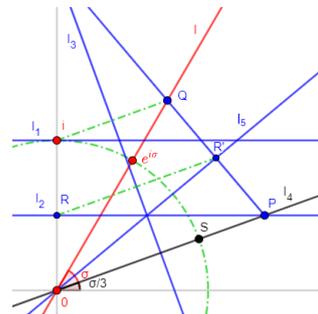
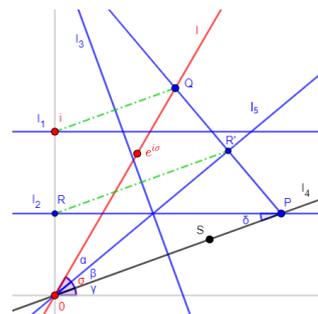


Figura 4.23: Trisección

A continuación justificaremos, basándonos en [2], porqué el resultado de la secuencia anterior es $S = e^{i\frac{\sigma}{3}}$. En [2] se puede encontrar la construcción de la trisección mediante origami paso a paso y con imágenes. Para ello, vamos a ver en la Figura 4.24 por qué el ángulo que se obtiene con la construcción anterior realmente es $\frac{\sigma}{3}$. Queremos demostrar que $\alpha = \beta = \gamma$.

Vemos que el triángulo $\triangle 0Pi$ es isósceles, pues \overline{RP} es la mediatriz del lado $\overline{0i}$. Por otro lado, vemos que $\triangle 0Pi$ y $\triangle 0PQ$ son congruentes, es decir, los lados y los ángulos son iguales. Esto se debe a que ambos triángulos son simétricos respecto a la recta l_3 . Por lo tanto, $\overline{0R'}$ es la altura de $\triangle 0PQ$ y así $\alpha = \beta$. Por simetría, $\beta = \delta$. Para finalizar, como una recta que corta rectas paralelas, como lo son el eje real y l_2 , generan ángulos iguales; también podemos decir que $\gamma = \delta$. Podemos concluir entonces que $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\sigma}{3}$.



□ Figura 4.24: Explicación trisección

Observación:

- Si $\sigma = \frac{\pi}{2}$ basta con cambiar el paso 3 de la construcción anterior y así, construir la recta l_3 con **A5** de tal manera que esta lleve 0 a un punto de l_2 y pase por i , pues $i \in l$.
- Si $\sigma \in (0, \frac{\pi}{4})$, aplicamos a $e^{i\sigma}$ el Lema 4.20(Duplicación) n veces (las necesarias para conseguir que $2n\sigma \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$). Después aplicamos el lema anterior obteniendo $e^{2in\frac{\sigma}{3}}$. Para finalizar, aplicamos el Lema 4.21(Bisección) n veces.
- Si $\sigma \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ aplicamos a $e^{i\sigma}$ el Lema 4.21 (Bisección) para poder aplicar el lema o los casos anteriores a $e^{\frac{i\sigma}{2}}$ obteniendo $e^{\frac{i\sigma}{6}}$ y después, utilizar el Lema 4.20(Duplicación).
- Si $\sigma \in (-\pi, 0)$ aplicamos a $e^{i\sigma}$ el Lema 4.12(Opuesto) para así conseguir que $-\sigma \in (0, \pi)$ y poder aplicar el lema o los casos anteriores obteniendo $e^{-i\frac{\sigma}{3}}$. Para finalizar, aplicamos otra vez el Lema 4.12.

Lema 4.23 Si $\alpha \in \mathcal{O} (\alpha \neq 0)$ con $\alpha = re^{i\sigma}$ entonces:
$$\begin{cases} \pm \sqrt{r} e^{\frac{i\sigma}{2}} \in \mathcal{O} \\ \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\sigma+2k\pi}{3}} \in \mathcal{O}, k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

Dem:

- Primero vamos a probar que $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\sigma}{2}} \in \mathcal{O}$.
 - Por una parte, vamos a ver que $r \in \mathcal{O}$. Pues si $\alpha = a + bi$, entonces $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Esto se debe a los Lemas 4.9 (Parte real), 4.10 (Parte imaginaria), 4.13 (Producto), 4.11 (Suma) y 4.18 (Raíz cuadrada). Por lo tanto, por este último lema y por el 4.12 (Opuesto) tenemos que $\pm\sqrt{r} \in \mathcal{O}$.
 - Por otra parte, vemos que multiplicando a α (Lema 4.13) por el inverso de r (Lema 4.14), $e^{i\sigma} \in \mathcal{O}$. Ahora aplicándole a este número el Lema 4.21 (Bisección) tenemos que $e^{i\frac{\sigma}{2}} \in \mathcal{O}$.

De esta forma, aplicando el Lema 4.13 (Producto) a $\pm\sqrt{r}$ y a $e^{i\frac{\sigma}{2}}$ vemos que es origami-construible.

- Ahora veremos que $\gamma_k = \{\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\sigma+2k\pi}{3}} : 0 \leq k \leq 2\} \subseteq \mathcal{O}$.
 - Con el Lema 4.19 (Raíz cúbica), vemos que $\sqrt[3]{r} \in \mathcal{O}$.
 - Ahora, con el Lema 4.22 (Trisección) vemos que $e^{i\frac{\sigma}{3}} \in \mathcal{O}$. Además, como $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} \in \mathcal{O}$ por el Lema 4.12 (Opuesto). Utilizando los Lemas 4.20 (Duplicación) y 4.22 (Trisección) tenemos ahora que $e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}} \in \mathcal{O}$ ($k = 1$ y $k = 2$). Por último, aplicando a $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ y a $e^{i\frac{\sigma}{3}}$ el Lema 4.13 (Producto) tenemos que $e^{i\frac{\sigma+2k\pi}{3}} \in \mathcal{O}, \forall k \in \{0, 1, 2\}$.

Y así, aplicando el Lema 4.13 (Producto), vemos que γ_k es origami-construible. □

4.2. Caracterización de \mathcal{O}

En esta sección se presenta el teorema principal de la memoria donde se caracteriza el cuerpo de los números origami-construibles mediante torres de cuerpos. En la mayoría de los textos en los que aparece esta caracterización de \mathcal{O} , esta se obtiene apoyándose en las construcciones con regla y compás. En esta prueba se ha elegido seguir la demostración de [9] que hace uso directo de los axiomas de Huzita-Hatori-Justin.

Teorema 4.24 *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha \in \mathcal{O}$ si y solo si existen subcuerpos:*

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

tal que $\alpha \in F_n$ y $[F_i : F_{i-1}] = 2$ ó 3 para $1 \leq i \leq n$.

Dem: ⇐ Suponemos que existen subcuerpos de \mathbb{C} tal que $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ y además $\alpha \in F_n$ y $[F_i : F_{i-1}] = 2$ ó 3 para $1 \leq i \leq n$. Veamos que $F_n \subset \mathcal{O}$ por inducción sobre n .

- $n = 0$ ($\mathbb{Q} = F_0 \subset \mathcal{O}$), $\alpha \in \mathbb{Q}$ y, por el Lema 4.16, tenemos que $\alpha \in \mathcal{O}$.
- Supongamos que $F_{n-1} \subset \mathcal{O}$. Dado $\alpha \in F_n$ y $[F_n : F_{n-1}] = 2$ ó 3 sabemos que es raíz de un polinomio $f \in F_{n-1}[X]$ de grado a lo sumo 3.

Si $gr(f) = 2$ ó 3 , por la Proposición 1.4 (Fórmulas de Cardano) podemos escribir α en términos de raíces cuadradas, cúbicas y elementos de \mathcal{O} y así, por el Lema 4.23 $\alpha \in \mathcal{O}$

\Rightarrow Recordemos que $\mathcal{O} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} [P_m, C_m]$. Vamos a probar por inducción sobre m que $\forall \alpha \in P_m$ existe una 2,3-torre $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que $Re(\alpha), Im(\alpha) \in F_n$ y $\forall l \in C_m$ existe una 2,3-torre $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_{r-1} \subset K_r \subset \mathbb{C}$ tal que los coeficientes de la ecuación de l están en K_r .

- Si $m = 0$ se tiene que $P_m = \{0, 1\}$ y $C_m = \{\emptyset\}$ así, $F_n = F_0 = \mathbb{Q}$.
- Por hipótesis, vamos a suponer que $\forall \beta \in P_{m-1}$, existe una 2,3-torre $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que $Re(\beta), Im(\beta) \in F_n$ y además $\forall l' \in C_{m-1}$ existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_{r-1} \subset K_r \subset \mathbb{C}$ cuyos coeficientes están en K_r .
- Tomamos $\alpha \in P_m$, si $\alpha \in P_{m-1}$ el resultado es cierto por hipótesis de inducción. Veamos qué ocurre si $\alpha \in P_m$ y $\alpha \notin P_{m-1}$. Evidentemente el último paso que hemos utilizado en la construcción de α es **P1**, es decir, la intersección entre dos rectas: $l, l' \in C_m$. Al menos una de ellas pertenece a la capa m , pues de no ser así $\alpha \in P_{m-1}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l \in C_m$ y que $l' \notin C_{m-1}$. En consecuencia, para concluir el razonamiento inductivo basta probar que si $l \in C_m$ y $l' \notin C_{m-1}$ entonces existe una 2,3-torre de cuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_{r-1} \subset K_r \subset \mathbb{C}$ de modo que los coeficientes de l están en K_r . Analizaremos qué ocurre por casos, según cuál haya sido el axioma con el que se ha construido la recta:

A1 l se ha construido a partir de dos puntos $P = p_1 + ip_2$ y $Q = q_1 + iq_2$; es decir, l es la recta que pasa por P y Q , construidos en la capa anterior ($P, Q \in P_{m-1}$). Según nuestra hipótesis de inducción, existen dos 2,3-torres de cuerpos que contienen las partes real e imaginaria de P y Q , respectivamente. Por la Proposición 1.27, podemos componer estas torres de manera que haya una: $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que $[F_n : F_{n-1}] = 2$ ó 3 , con $p_1, p_2, q_1, q_2 \in F_n$. Por la descripción algebraica de **A1** podemos concluir que los coeficientes de l pertenecen a F_n .

A2 l se ha construido a partir de dos puntos P y Q , obtenidos en la capa anterior $P, Q \in P_{m-1}$; es decir, l es la mediatriz de \overline{PQ} . Por hipótesis de inducción, existen dos 2,3-torres de cuerpos que contienen las partes real e imaginaria de P y Q , respectivamente. Al igual que antes, podemos componer estas torres de cuerpos de manera que haya una: $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que $[F_n : F_{n-1}] = 2$ ó 3 , con $p_1, p_2, q_1, q_2 \in F_n$. Al igual que en el caso anterior, por la descripción algebraica de **A2**, podemos decir que los coeficientes de l pertenecen a F_n .

A3 l se ha construido a partir de dos rectas r y r' construidas en la capa anterior ($r, r' \in C_{m-1}$); es decir, l es una de las rectas que lleva r a r' . Definimos las rectas de la siguiente manera:

$$r = \{ax + by + c = 0\}, r' = \{a'x + b'y + c' = 0\}$$

Por hipótesis, existen dos 2,3-torres de cuerpos, una que contiene los coeficientes de r y otra, los de r' . Como ya hemos visto, podemos componer ambas torres, obteniendo: $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ tal que $[F_n : F_{n-1}] = 2$ ó 3 , con $a, b, c, a', b', c' \in F_n$. Por la descripción algebraica de **A3**, tenemos que:

- Si $d = \sqrt{a^2 + b^2}, d' = \sqrt{a'^2 + b'^2} \in F_n$ entonces todos los coeficientes de l están en F_n .

- Si $d \notin F_n \Rightarrow [F_n(d) : F_n] = 2$ y por consiguiente, tenemos que $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset F_n(d) \subset \mathbb{C}$ es una 2,3-torre que contiene todos los coeficientes de l . (Análogamente para el caso en que $d' \notin F_n$).
 - Si $d \notin F_n$ y $d' \notin F_n$ entonces $[F_n(d) : F_n] = 2$ y $[F_n(d, d') : F_n(d)] = 2$, por tanto, $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset F_n(d) \subset F_n(d, d') \subset \mathbb{C}$ es una 2,3-torre que contiene todos los coeficientes de l .
- A4** l se ha construido a partir de un punto $P \in P_{m-1}$ y una recta $r \in C_{m-1}$ construidos en la capa anterior, es decir, l es la recta perpendicular a r que pasa por P . Por hipótesis existe una 2,3-torre que contiene las partes real e imaginaria de P y otra que contiene los coeficientes de r , ya definida en el caso anterior. Existe una 2,3-torre (composición de las ya mencionadas) $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ con $p_1, p_2, a, b, c \in F_n$. Por la descripción algebraica de **A4**, podemos concluir que los coeficientes de l pertenecen a F_n .
- A5** l se ha construido a partir de dos puntos $P, Q \in P_{m-1}$ y una recta $r \in C_{m-1}$ construidos en la capa anterior, es decir, l es una de las rectas que coloca P sobre r y pasa por Q . Por hipótesis, existen dos 2,3-torres que contienen las partes real e imaginaria de P y Q respectivamente, y otra, que contiene los coeficientes de r . Sabemos que hay una 2,3-torre (composición) $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ con $p_1, p_2, q_1, q_2, a, b, c \in F_n$. Por la definición algebraica de **A5**, tenemos que:
- Si $\sqrt{\Delta} \in F_n$ entonces todos los coeficientes de l están en F_n .
 - Si $\sqrt{\Delta} \notin F_n$ entonces $[F_n(\sqrt{\Delta}) : F_n] = 2$ porque $\Delta \in F_n$ y por tanto, $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset F_n(\sqrt{\Delta}) \subset \mathbb{C}$ es una 2,3-torre que contiene los coeficientes de l .
- A6** l se ha construido a partir de dos puntos $P, Q \in P_{m-1}$ y dos rectas $r, r' \in C_{m-1}$ construidas en la capa anterior, es decir, l es una de las rectas que coloca P sobre r y Q sobre r' . Por hipótesis, existen cuatro 2,3-torres de cuerpos, una que contiene las partes real e imaginaria de P otra, las de Q y las dos restantes, contienen los coeficientes de r y r' respectivamente. Sabemos que existe una 2,3-torre composición de las otras cuatro $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ con $p_1, p_2, q_1, q_2, a, b, c, a', b', c' \in F_n$. Por la descripción algebraica de **A6**, sabemos que los coeficientes de la afinidad φ definida en (3.4) y los de φ^{-1} obtenidos a partir de los de φ están en F_n . Luego $l = \varphi^{-1}(\tilde{l}_m)$, donde $\tilde{l}_m = \{\frac{m^2}{2} - mx + y = 0\}$ y m es la solución de la ecuación de tercer grado (3.3). En consecuencia, como el polinomio mínimo de m sobre F_n será de grado a lo sumo 3, la extensión $F_n(m)/F_n$ será de grado 2 ó 3. Así, $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset F_n(m) \subset \mathbb{C}$ será una 2,3-torre y los coeficientes de l estarán en $F_n(m)$.
- A7** l se ha construido a partir de un punto $P \in P_{m-1}$ y dos rectas $r, r' \in C_{m-1}$, construidos en la capa anterior. En otras palabras, l es la recta que coloca P sobre r y es perpendicular a r' . Por hipótesis, existe una 2,3-torre que contiene las partes real e imaginaria de P y dos, que contienen los coeficientes de r y r' respectivamente. Hay una 2,3-torre de cuerpos composición de las ya mencionadas, $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$ con $p_1, p_2, a, b, c, a', c' \in F_n$. Por la descripción algebraica de **A7**, sus coeficientes están en F_n .

□

Corolario 4.25 Si α es un número origami-construible, entonces es algebraico sobre \mathbb{Q} y existen $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$.

Dem: Si $\alpha \in \mathcal{O}$, por el teorema anterior se tiene que existen subcuerpos

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

tal que $\alpha \in F_n$ y $[F_i : F_{i-1}] = 2$ ó $3 \forall 1 \leq i \leq n$. Así, por el Teorema 1.16:

$$[F_n : \mathbb{Q}] = [F_n : F_{n-1}] \cdots [F_2 : F_1] \cdot [F_1 : \mathbb{Q}] = 2^c 3^d$$

donde c y d son el número de subextensiones de grado dos y tres respectivamente de la extensión F_n/\mathbb{Q} . Por tanto, $[F_n : \mathbb{Q}] < \infty$ y por el Teorema 1.25, F_n/\mathbb{Q} es algebraica. Por esta razón, podemos decir que α es algebraico sobre \mathbb{Q} . Por otra parte, como $\alpha \in F_n$, se tiene que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha) \subset F_n$ y entonces:

$$[F_n : \mathbb{Q}] = [F_n : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^c 3^d$$

Es decir, que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ divide a $2^c 3^d$. Por tanto, podemos concluir que existen $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ con $a \leq c$ y $b \leq d$, tales que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^a 3^b$. \square

4.3. Resolución de ecuaciones de hasta grado 4

Veamos que se pueden resolver ecuaciones de grado 4 o menor mediante origami.

Proposición 4.26 Dados $a, b, c, d \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ las soluciones reales de la ecuación:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

pertenecen a \mathcal{O} . En otras palabras, las soluciones reales de cualquier ecuación de grado tres o menor con coeficientes en $\mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ se pueden determinar mediante origami.

Dem: Sabemos por la Proposición 3.1 que las pendientes de las tangentes a las parábolas de focos $(0, \frac{1}{2})$ y $\tilde{Q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ y directrices $\{y + \frac{1}{2} = 0\}$ y $\tilde{l}' = \{\tilde{a}'x + \tilde{b}'y + \tilde{c}' = 0\}$, respectivamente, son las soluciones reales de la ecuación (3.3). Dicho esto, para determinar las soluciones reales de la ecuación de tercer grado $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ primero hay que resolver el siguiente sistema de cuatro ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} a &= \tilde{a}' \\ b &= -\tilde{a}'\tilde{q}_1 + \tilde{b}'\tilde{q}_2 - \tilde{b}' + \tilde{c}' \\ c &= 2(\tilde{q}_2\tilde{a}' + \tilde{q}_1\tilde{b}') \\ d &= \tilde{a}'\tilde{q}_1 - \tilde{b}'\tilde{q}_2 + \tilde{c}' \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Podemos sustituir \tilde{a}' por a en las tres últimas ecuaciones y calcular después tres de las incógnitas en función de a, b, c, d y la incógnita restante. Por simplicidad, nosotros mostramos seguidamente \tilde{c}' , \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 en función de los coeficientes ya mencionados y \tilde{b}' :

$$\tilde{c}' = \frac{b + d + \tilde{b}'}{2}; \quad \tilde{q}_1 = \frac{\tilde{b}'(c - a) - ab + ad}{2(a^2 + \tilde{b}'^2)}; \quad \tilde{q}_2 = \frac{ac + \tilde{b}'(b - d) + \tilde{b}'^2}{2(a^2 + \tilde{b}'^2)}$$

De esta manera, tomando para $\tilde{b}' \in \mathbb{R} \cap \mathcal{O}$ un valor cualquiera ¹, podemos hallar el resto de incógnitas. Por esta razón, es obvio que el sistema anterior no tiene solución

¹Notemos que \tilde{b}' no podrá ser nulo en caso de que a también lo sea, pues $a^2 + \tilde{b}'^2 \neq 0$.

única. Ahora, habiendo dado valor a \tilde{b}' y una vez halladas las incógnitas de este sistema, obtenemos las coordenadas del punto \tilde{Q} y los coeficientes de la recta \tilde{l}' , que está claro que son origami-construibles a partir de a, b, c y d . Construimos entonces la recta y el punto anterior, así como también $(0, \frac{1}{2})$ y $\{y + \frac{1}{2} = 0\}$. Para concluir, las soluciones del axioma **A6** nos darán a lo sumo 3 rectas, cuyas pendientes, que también se pueden hallar mediante origami, son las raíces reales de la ecuación de tercer grado dada. \square

Ejemplo 4.27 *Soluciones reales de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$: Resolviendo el sistema (4.1) para $a = 1, b = -2, c = -5, d = 6$ y tomando $\tilde{b}' = 0$ obtenemos la siguiente solución:*

$$\tilde{l}' = \{x + 2 = 0\}; \quad \tilde{Q} = (4, \frac{-5}{2})$$

Ahora, con **A6** llevamos $(0, \frac{1}{2})$ a $\{y + \frac{1}{2} = 0\}$ y \tilde{Q} a \tilde{l}' y obtenemos tres rectas: $\{y = -2x - 2\}$; $\{y = 3x - \frac{9}{2}\}$; $\{y = x - \frac{1}{2}\}$ cuyas pendientes son $-2, 3$ y 1 respectivamente (Figura 4.27). Podemos concluir entonces que la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene tres raíces reales: $-2, 3$ y 1 .

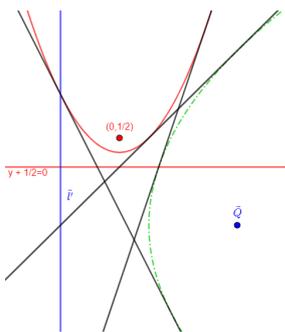


Figura 4.25: Ejemplo 4.27

Cabe destacar que debido a que la solución del sistema de ecuaciones no es única, podemos encontrar distintos puntos y distintas rectas que sean focos y directrices de parábolas distintas, pero tengan las mismas tangentes comunes a la parábola $y = \frac{x^2}{2}$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.28 *Soluciones reales de la ecuación $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$: Resolviendo el sistema (4.1) para $a = 1, b = 2, c = 4$ y $d = 3$ tomaremos dos valores distintos para \tilde{b}' y así, obtendremos dos soluciones diferentes:*

- Por un lado, si tomamos $\tilde{b}' = 1$: $\tilde{l}'_1 = \{x + y + 3 = 0\}$ y $\tilde{Q}_1 = (1, 1)$.
- Por otro lado, si tomamos $\tilde{b}' = 0$: $\tilde{l}'_2 = \{x + \frac{5}{2} = 0\}$ y $\tilde{Q}_2 = (\frac{1}{2}, 2)$.

Con **A6** llevando primero $(0, \frac{1}{2})$ a $\{y + \frac{1}{2} = 0\}$ y \tilde{Q}_1 a \tilde{l}'_1 y después, $(0, \frac{1}{2})$ a $\{y + \frac{1}{2} = 0\}$ y \tilde{Q}_2 a \tilde{l}'_2 obtenemos la misma recta: $\{y = -x - \frac{1}{2}\}$ cuya pendiente es -1 (Figura 4.26). Entonces podemos concluir que la única raíz real de la ecuación $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$ es -1 .

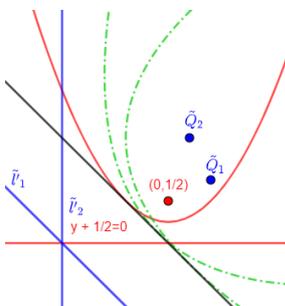


Figura 4.26: Ejemplo 4.28

Corolario 4.29 [18, págs. 131-134] *Dados $a, b, c, d, e \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ las soluciones reales de la ecuación:*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

pertenecen a \mathcal{O} . Dicho de otra manera, las soluciones reales de cualquier ecuación de grado cuatro o menor con coeficientes en $\mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ se pueden determinar mediante origami.

Dem: En caso de que $a = 0$, probado en la Proposición 4.26. Si por el contrario $a \neq 0$, para probar este resultado reduciremos la resolución de una ecuación cuártica cualquiera a ecuaciones cúbicas y cuadradas, utilizando el método de Descartes. Para ello, podemos comenzar suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $a = 1$ y entonces tenemos la siguiente ecuación: $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Continuamos haciendo la sustitución $y - \frac{b}{4} = x$, quedando así:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{4.2}$$

donde:

$$p = c - \frac{3b^2}{8}; \quad q = \frac{b^3}{8} - \frac{bc}{2} + d; \quad r = \frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{256} - \frac{bd}{4} + e$$

Por lo tanto, si $q = 0$, se trata de una ecuación bicuadrada y podemos reducir la ecuación (4.2) a una cuadrática, que ya sabemos que sus soluciones reales son construibles mediante origami. Por el contrario, si $q \neq 0$, sumando $zy^2 + \frac{z^2}{4}$ en ambos lados de la ecuación (4.2) obtenemos:

$$\left(y^2 + \frac{z}{2}\right)^2 = (z-p)y^2 - qy + \frac{z^2}{4} - r \quad (4.3)$$

De este modo, como el lado izquierdo es un cuadrado, el lado derecho también ha de serlo. Así, z ha de cumplir:

$$\left(y^2 + \frac{z}{2}\right)^2 = (gy + h)^2 \quad (4.4)$$

Y por lo tanto, z también satisface las dos ecuaciones cuadráticas siguientes:

$$y^2 + \frac{z}{2} = gy + h; \quad y^2 + \frac{z}{2} = -(gy + h) \quad (4.5)$$

Entonces, de las ecuaciones (4.3) y (4.4) obtenemos las siguientes:

$$g^2 = z - p; \quad h^2 = \frac{z^4}{4} - r; \quad 2gh = -q$$

$$q^2 - 4(z-p)\left(\frac{z^2}{4} - r\right) = 0$$

o equivalentemente:

$$z^3 - z^2p - 4zr + 4pr - q^2 = 0 \quad (4.6)$$

que sabemos por la Proposición 4.26 que sus soluciones reales también son construibles mediante origami. Podemos decir entonces que este es el método para determinar las soluciones de una ecuación cuártica. Primero, encontrando una raíz $z \geq 0$ de la ecuación cúbica (4.6) y resolviendo después las ecuaciones cuadráticas (4.5). \square

Ejemplo 4.30 *Soluciones reales de $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 12x + 15 = 0$: Calculamos primero p , q y r , obteniendo:*

$$p = -14; \quad q = 12; \quad r = 16$$

A continuación, hallamos las soluciones de $z^3 + 14z^2 - 64z - 1040 = 0$ con la Proposición 4.26: resolviendo el sistema (4.1) con $a = 1$, $b = 14$, $c = -64$, $d = -1040$ y tomando $\tilde{b}' = 0$ obtenemos la siguiente solución:

$$\tilde{l}' = \{x - 513 = 0\}; \quad \tilde{Q} = (-527, -32)$$

Utilizando A6 tenemos una única tangente común a las parábolas de focos $(0, \frac{1}{2})$ y \tilde{Q} y directrices $\{y + \frac{1}{2} = 0\}$ y \tilde{l}' respectivamente con pendiente $6\sqrt{3} - 2$, es decir, $z = 6\sqrt{3} - 2$ es la única solución real de la ecuación de tercer grado. Ahora, para que g y h cumplan $2gh = -q$, han de tener signos opuestos por lo tanto, si $g = -\sqrt{6\sqrt{3} - 2}$ entonces $h = \sqrt{(3\sqrt{3} - 1)^2 - 16}$. Calculamos las soluciones de las ecuaciones de (4.5), que en este caso son:

$$y^2 - (3 + \sqrt{3})y + 2(1 + \sqrt{3}) = 0 \quad (4.7)$$

$$y^2 + (3 + \sqrt{3})y + 4(\sqrt{3} - 1) = 0 \quad (4.8)$$

resolviendo el sistema (4.1) con $a = 0, b = 1, c = -(3 + \sqrt{3}), d = 2(1 + \sqrt{3})$ y tomando $b' = 1$ para la primera ecuación y con $a = 0, b = 1, c = 3 + \sqrt{3}, d = 4(\sqrt{3} - 1)$ y tomando $b' = 2$ para la segunda ecuación. De esta manera, se obtienen la siguiente solución para el primer sistema:

$$\tilde{l}'_1 = \{y + 2 + \sqrt{3} = 0\}; \quad \tilde{Q}'_1 = \left(\frac{-3 - \sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} \right)$$

y para el segundo sistema se obtiene la siguiente solución:

$$\tilde{l}'_2 = \{2y - \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} = 0\}; \quad \tilde{Q}'_2 = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{7}{4} - 3 \right)$$

Llevando ahora $(0, \frac{1}{2})$ a $\{y + \frac{1}{2} = 0\}$ y \tilde{Q}'_1 a \tilde{l}'_1 obtenemos que las soluciones de (4.7) son 2 y $\sqrt{3} + 1$. Por otro lado, llevando $(0, \frac{1}{2})$ a $\{y + \frac{1}{2} = 0\}$ y \tilde{Q}'_2 a \tilde{l}'_2 obtenemos que las soluciones de (4.8) son -4 y $1 - \sqrt{3}$. Por último, deshacemos el cambio $y - 1 = x$, concluyendo que las soluciones reales de la ecuación $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 12x + 15 = 0$ son $1, \sqrt{3}, -5, -\sqrt{3}$.

4.4. Polígonos regulares origami-construibles

En cuanto a esta sección, vamos a ver qué polígonos regulares son origami-construibles, para lo cual se ha utilizado la referencia [16, sec. 4.5].

Definición 4.31 *Un polígono origami-construible es una forma cerrada y plana conectada por un número finito de rectas origami-construibles.*

Un polígono es regular si sus lados tienen igual longitud y sus ángulos interiores, la misma amplitud.

Observación: Los vértices y los ángulos interiores de un polígono origami-construible también son origami-construibles por ser intersección de rectas origami-construibles. También lo es el ángulo central $\theta = \frac{2\pi}{n}$ por ser la intersección de las bisectrices (A3) de dos ángulos interiores consecutivos (Figura 4.29).

Definición 4.32 [18, pág. 140] *Un número primo $p \in \mathbb{N}$ se dice **primo de Pierpont** si es de la forma $p = 2^a 3^b + 1$ con $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Teorema 4.33 (de Pierpont) *Un polígono regular de n lados es origami-construible si y solo si $n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_r$ para algún $r \in \mathbb{N}$, donde cada p_i es un primo distinto de la forma: $p_i = 2^c 3^d + 1$ para algún $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, es decir, cada p_i es un primo de Pierpont distinto.*

Dem: Suponemos primero que tenemos un polígono regular de n lados que es origami-construible. Podemos situarlo en el plano de tal manera que esté centrado en el 0 con un vértice en el 1. De esta forma, los vértices del polígono son las raíces n -ésimas de la unidad que también son origami-construibles. Por otra parte, si la raíz n -ésima primitiva principal de la unidad es origami-construible entonces por el Lema 4.13 (Producto), también lo serán todas las raíces n -ésimas de la unidad. Por tanto, podemos construir un polígono regular de n lados con las rectas, mediante dobles, que pasan por las raíces n -ésimas de la unidad consecutivas. En otras palabras, un polígono regular de n lados es origami-construible si y solo si la raíz

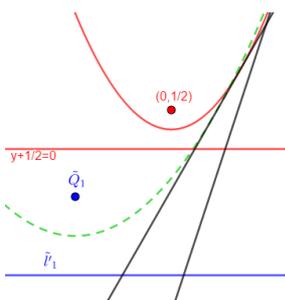


Figura 4.27: Resolución de (4.7)

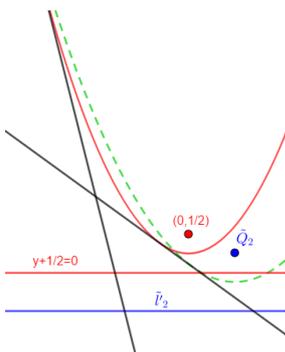


Figura 4.28: Resolución de (4.8)

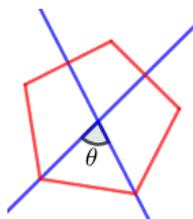


Figura 4.29: Ángulo central

primitiva n -ésima principal de la unidad $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ es origami-construible. Dicho esto, basta con demostrar que ξ_n es origami-construible si y solo si $n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_r$ para algún $r \in \mathbb{N}$ donde cada p_i es un primo distinto de la forma $p_i = 2^c 3^d + 1$ para algún $a, b, c, d \geq 0$.

\Rightarrow Suponemos que ξ_n es origami-construible. Por el Corolario 4.25, $[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] = 2^l 3^k$ con $l, k \geq 0$ y por la Proposición 1.34, $[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$. Y así, tenemos que $\phi(n) = 2^l 3^k$. Sea la factorización de n la siguiente: $n = q_1^{a_1} \cdots q_s^{a_s}$, donde q_1, \dots, q_s son distintos primos y $a_1, \dots, a_s \geq 1$. Por la ecuación (1.1):

$$\phi(n) = q_1^{a_1-1} \cdots q_s^{a_s-1} (q_1 - 1) \cdots (q_s - 1) = q_1^{a_1-1} (q_1 - 1) \cdots q_s^{a_s-1} (q_s - 1)$$

Como $\phi(n) = 2^l 3^k$ y la factorización es única, cada q_i es 2 ó 3 o $q_i - 1 = 2^c 3^d$ para algún $c, d \geq 0$.

\Leftarrow Suponemos ahora que $n = 2^a 3^b p_1 \cdots p_r$ para algún $r \in \mathbb{N}$ donde cada p_i es un primo distinto de la forma $p_i = 2^c 3^d + 1$ para algún $a, b, c, d \geq 0$. Por la ecuación (1.1):

$$\begin{aligned} \phi(n) &= 2^a 3^b p_1 \cdots p_r \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = \\ &= 2^a 3^{b-1} (p_1 - 1) \cdots (p_r - 1) = 2^l 3^k \end{aligned}$$

para algún $l, k \geq 0$. Entonces $G = Gal(\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q})$ es de orden $\phi(n) = 2^l 3^k$, además es un grupo abeliano, debido a que es isomorfo a $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ por el Teorema 1.41, y por tanto es resoluble. Luego por la Definición 1.7 tenemos una secuencia de subgrupos $1 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ donde cada G_i/G_{i-1} es una extensión de Galois de grado 2 ó 3. Podemos concluir por el Teorema 4.24 que ξ_n es origami-construible. \square

Vistos cuáles son los polígonos regulares origami-construibles, vamos a ver cómo podemos construir con esta herramienta el polígono regular con menor número de lados que, sin embargo, no es construible con regla y compás, el de 7 lados (7 es un primo de Pierpont).

Ejemplo 4.34 (Heptágono) [8, pág. 186] Primeramente, construimos $P = -1$, $Q = \sqrt{27}i$, $A = 6$ que, por los lemas de la sección anterior son origami-construibles. Nuestro objetivo es obtener un heptágono regular centrado en 0, cuyo primer vértice sea $A = 6$.

1. l_1 : con **A1** se construye la recta que pasa por P y Q .
2. l_2, l'_2 : con el Lema 4.22 se construyen las rectas que trisecan a l_1 y el eje real.
3. R : con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de Q respecto a la recta l'_2 (la de mayor pendiente entre las dos construidas anteriormente).
4. l_3 : con **A4** se construye la perpendicular al eje real que pasa por R .
5. l_4, l'_4 : con **A5** se construyen las rectas que colocan A sobre l_3 y pasan por 0.
6. B : con el Lema 4.8 se obtiene el simétrico de A respecto a l_4 .
7. C, D, E, F, G : con el Lema 4.20 (Duplicación) partiendo de A se obtiene C , de B , D y así sucesivamente.
8. con **A1** se construyen las rectas que unen los vértices.

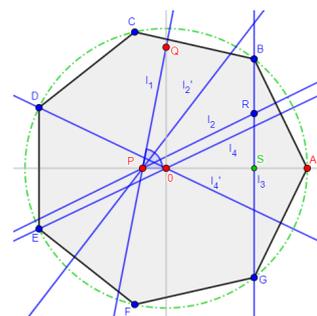


Figura 4.30: Heptágono

Dem: Al igual que hemos hecho con otras construcciones, justificaremos que el polígono construido es un heptágono regular: Denotamos por S al punto de corte entre el eje real y la recta l_3 . La construcción es correcta si $B = 6 e^{\frac{2\pi i}{7}}$, osea, si $d(0, S) = 6 \cos(\frac{2\pi}{7})$ ó equivalentemente, si $d(P, S) = 1 + 6 \cos(\frac{2\pi}{7})$. Está claro que $d(P, Q) = \sqrt{28}$ y que $\cos(\widehat{APQ}) = \frac{1}{\sqrt{28}}$ por ser $\widehat{APQ} = \widehat{0PQ}$. También, $\cos(\widehat{APR}) = \cos(\widehat{SPR}) = \frac{d(P, S)}{d(P, R)}$, como $d(P, R) = d(P, Q)$ se tiene que: $d(P, S) = \sqrt{28} \cos(\widehat{APR}) = \sqrt{28} \cos(\frac{1}{3} \widehat{APQ})$. Por todo lo anterior, se tendrá que cumplir que:

$$\sqrt{28} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{1}{\sqrt{28}}\right) = 1 + 6 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \quad (4.9)$$

Para ello, sea $\xi_7 = \cos(\frac{2\pi}{7}) + i \sin(\frac{2\pi}{7})$ la raíz séptima primitiva principal de la unidad, tenemos que $\eta = \xi_7 + \xi_7^{-1} = 2 \cos(\frac{2\pi}{7})$. Luego por una parte, $\eta^3 + \eta^2 - 2\eta - 1 = \xi_7^3 + \xi_7^2 + \xi_7 + 1 + \xi_7^{-1} + \xi_7^{-2} + \xi_7^{-3}$ y por otra parte, la suma de las raíces n -ésimas de la unidad es 0. Así, η es una raíz de la ecuación:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Tomando $x = \frac{y-1}{3}$, vemos que $1 + 3\eta = 1 + 3 \cdot 2 \cos(\frac{2\pi}{7})$ es una raíz de:

$$y^3 - 21y - 7 = 0.$$

Para ver ahora que se cumple (4.9), sustituimos $y = \sqrt{28} \cos\theta$ en la ecuación anterior: $7\sqrt{28} (4 \cos^3\theta - 3 \cos\theta) = 7$ y por consiguiente $\cos(3\theta) = \frac{1}{\sqrt{28}}$. Para concluir podemos deducir que $\theta = \frac{1}{3} \arccos(\frac{1}{\sqrt{28}})$, de esta manera queda probado que se verifica (4.9). \square

4.5. Problemas clásicos de la matemática griega

Durante esta sección vamos a explicar brevemente los tres problemas geométricos de la antigua Grecia y veremos también si estos pueden resolverse con la herramienta que nos ocupa, el origami. [4, págs. 262-263]

4.5.1. La duplicación del cubo

El problema que tratamos ahora consiste en saber si es posible construir un cubo que doble el volumen de un cubo dado. Podemos escoger un cubo cuyas aristas tengan longitud 1 entonces, su volumen también será 1. Dicho esto, necesitamos construir un cubo de volumen 2. Puesto que, el volumen del cubo es igual a su arista al cubo, deducimos entonces que podemos duplicarlo si podemos construir un número tal que $s^3 = 2$, o lo que es lo mismo, $s = \sqrt[3]{2}$. Por lo tanto, por el Lema 4.19 concluimos que es posible duplicar el cubo mediante origami.

4.5.2. La trisección del ángulo

Este problema consiste en construir un ángulo cuya amplitud sea exactamente la tercera parte de un ángulo dado. Como ya hemos visto anteriormente, con la secuencia de pasos que muestra el Lema 4.22 podemos resolver este problema mediante origami.

4.5.3. La cuadratura del círculo

El tercer y último problema que vamos a tratar en esta sección es la cuadratura del círculo. Consiste en construir un cuadrado del mismo área que un círculo dado. Si suponemos que tenemos un círculo cuyo radio es 1, entonces su área será π . Como el área de un cuadrado es igual al lado al cuadrado, tendría que ser posible construir $\sqrt{\pi}$. Ahora bien, si $\sqrt{\pi}$ fuera origami-construible, entonces también lo sería π . Esto implicaría por el Corolario 4.25 que π es algebraico sobre \mathbb{Q} . Sin embargo, en 1882 Lindemann consiguió probar que π es trascendente sobre \mathbb{Q} , se puede encontrar una demostración en [10, sec. 1.7]. Llegamos entonces a una contradicción y por lo tanto, π no es origami-construible y en consecuencia, este problema no puede ser resuelto mediante origami.

4.6. Relación con otras herramientas

De manera natural surge la comparación del origami con otras herramientas. En esta sección se enunciarán, sin demostrar, varios resultados que nos permiten relacionar el origami con otras herramientas.

4.6.1. Regla y compás

En primer lugar, vamos a comentar las principales diferencias y similitudes existentes entre $(\{0, 1\})^{\mathcal{RC}}$ y $(\{0, 1\})^{\mathcal{O}}$, es decir, entre el conjunto de puntos y curvas construibles con los mapas $\mathcal{C} = (\mathcal{RC}, \{0, 1\})$ y $\mathcal{O} = (\mathcal{O}, \{0, 1\})$:

De la misma forma que para los números origami-construibles tenemos el Teorema 4.24, para los números construibles con regla y compás tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.35 [4, págs. 259-261] *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha \in \mathcal{C}$ si y solo si existen subcuerpos:*

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \mathbb{C}$$

tal que $\alpha \in F_n$ y $[F_i : F_{i-1}] = 2$ para $1 \leq i \leq n$.

En virtud de este teorema, podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Todo número construible con regla y compás es origami-construible.
- Con regla y compás no podemos construir raíces cúbicas y consecuentemente, no se puede resolver el problema de la duplicación del cubo.
- Con regla y compás no es posible trisecar ángulos.
- Tanto los números construibles con regla y compás como los origami-construibles son algebraicos sobre \mathbb{Q} . Por esta razón, no podemos resolver el problema de la cuadratura del círculo con ninguna de las dos herramientas.

Debido a la caracterización de los números construibles con regla y compás, añadimos, como es evidente, que no todos los polígonos que son origami-construibles se pueden realizar también con regla y compás. De hecho, mientras que para la herramienta principal de este trabajo tenemos el Teorema 4.33, para la regla y el compás se tiene el que:

Teorema 4.36 (de Gauss-Wantzel) [18, pág. 46] *Un polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y solo si $n = 2^a p_1 \cdots p_r$ para algún $r \in \mathbb{N}$, donde cada p_i es un primo distinto de la forma: $p_i = 2^{2^s} + 1$ para algún $a, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, conocidos estos como primos de Fermat.*

Este teorema fue enunciado por Gauss tras haber construido el polígono regular de 17 lados. A pesar de que no hubo constancia de que lo demostrara, la primera prueba completa es de L. Wantzel.

4.6.2. Cónicas

Una herramienta relacionada con el origami es la construcción mediante el trazado y la intersección de cónicas (para más información consultar [24]).

En la antigua Grecia, Menaechmus, tutor de Alejandro Magno, consiguió resolver con esta herramienta el famoso problema de la duplicación del cubo, encontrando un segmento de longitud $\sqrt[3]{a}$, dado otro de longitud a mediante parábolas. Este lo hizo de manera similar a la que hemos mostrado en Proposición 3.1 .

En el siglo III, Pappus resolvió el segundo de los tres problemas clásicos que hemos expuesto anteriormente, la trisección del ángulo, intersecando cónicas, en particular, utilizó la hipérbola.

Estos hechos históricos motivaron el estudio de C. R. Videla citado previamente. En este trabajo se emplea la definición de cónicas (elipse, hipérbola, parábola) en términos de sus focos, excentricidades y directrices ². Esta elección permite a C. R. Videla caracterizar el cuerpo de los números construibles con el trazado y la intersección de cónicas de un modo sencillo.

Vemos ahora cuáles son los axiomas de esta herramienta según E. Tramuns [22, pág. 34], describiendo previamente geoméricamente algunos axiomas que aún no conocemos:

C3 Dadas la directriz, uno de los focos y dos puntos cuya distancia es la excentricidad, se puede construir una cónica que cumpla estos parámetros.

P4 Dados una recta y una cónica, se pueden obtener sus puntos de intersección.

P5 Dadas dos cónicas, se pueden obtener sus puntos de intersección.

P6 Dadas una circunferencia y una cónica, se pueden obtener sus puntos de intersección.

$$\mathcal{CO} = \{\{\mathbf{C1}, \mathbf{C2}, \mathbf{C3}\}, \{\mathbf{P1}, \mathbf{P2}, \mathbf{P3}, \mathbf{P4}, \mathbf{P5}, \mathbf{P6}\}\}.$$

Teorema 4.37 [24] *Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces α es construible mediante cónicas si y solo si α es origami-construible, es decir, $\alpha \in \mathcal{O}$.*

4.6.3. Regla marcada

La otra herramienta equiparable al origami es la regla marcada (para más detalle ver [18, cap. 9]). Esta regla posee dos marcas cuya distancia es 1. Esta peculiaridad que hace que con esta herramienta sea posible realizar más construcciones que con la regla simple. Con la regla marcada podemos realizar el método de construcción geométrico conocido por los matemáticos griegos como *neusis*: consiste en apoyar la regla sobre un punto dado e inclinarla hasta que las dos marcas de la regla coincidan con dos objetos dados. Los diferentes procedimientos que se pueden realizar con esta técnica y una regla marcada son los siguientes :

²Las elipses que no son circunferencias y las hipérbolas pueden definirse como el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancias a un punto dijo F llamado foco y a una recta fija llamada directriz es una constante menor, o mayor que 1, respectivamente. Esa constante es la excentricidad. Ambas curvas tienen una directriz para cada foco. Por otra parte, la parábola tiene excentricidad 1, puesto que cualquier punto equidista del foco y de la directriz, que en este caso son únicos. La circunferencia no se puede definir de esta manera porque su excentricidad es 0. Por ello, tratamos la circunferencia como un caso particular.

1. Dados un punto P y una recta l podemos apoyar una de las marcas en el punto P y rotar la regla marcada hasta que la otra marca se apoye sobre la recta l en el punto Q (Figura 4.31).
2. Dados un punto P y dos rectas l y l' podemos apoyar la regla sobre P e inclinar la regla hasta que ambas marcas se apoyen sobre las dos rectas (Figura 4.32).

Cada uno de estos procedimientos se formaliza con un axioma de construcción³ y con otro de intersección. Para el primero, los axiomas empleados son los siguientes:

C4 Dado un punto P y una recta l , se pueden trazar las rectas que pasan por P y cortan a l en puntos que están a distancia 1 de P .

P7 Dadas una recta l y una circunferencia de radio 1 y centro P , se pueden obtener sus puntos de intersección.

Por otra parte, los axiomas que se utilizan en el segundo procedimiento son los siguientes:

C5 Dado un punto P y dos rectas l y l' , se pueden trazar las rectas que pasan por P y además intersecan a l y l' en dos puntos cuya distancia es 1.

P8 Dadas dos rectas, l y l' , se pueden obtener los puntos de intersección con la recta trazada por **C5**.

Por consiguiente, podemos definir esta herramienta de la siguiente manera:

$$\mathcal{RM} = \langle \{C1, C4, C5\}, \{P1, P7, P8\} \rangle.$$

Teorema 4.38 [4, págs. 280-281] Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces α es construible la regla marcada si y solo si α es origami-construible, es decir, $\alpha \in \mathcal{O}$.

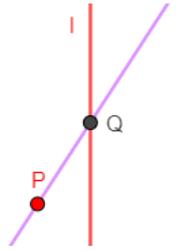


Figura 4.31: Procedimiento 1 con la regla marcada mediante *neusis*.

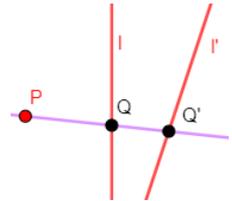


Figura 4.32: Procedimiento 2 con la regla marcada mediante *neusis*.

³En las figuras de ambos procedimientos representamos en morado una de las rectas que se obtiene al utilizar los axiomas de construcción.

Bibliografía

- [1] Alperin, Roger C. and Lang, Robert J. *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms*, 2009, págs. 371-394.
- [2] Artacho, Amadeo. *Trisección de un ángulo...con origami* [en línea] Disponible en: <https://matematicascercanas.com/2015/12/23/4276/> [Consulta: 15/04/2021].
- [3] Beloch, M. *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*, Periodico di Matematiche Ser. 4, 16, 1936, págs. 104-108.
- [4] Cox, David A. *Galois Theory*, Second edition, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2012.
- [5] Dummit, David S. and Foote, Richard M. *Abstract algebra*, Third edition, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, 2004.
- [6] Escofier, Jean-Pierre. *Galois Theory*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [7] Ghourabi, Fadoua; Kasem, Asem and Kaliszyk, Cezary. *Algebraic Analysis of Huzita's Origami Operations and Their Extensions*. In: Automated Deduction in Geometry. Springer Nature, 2013, págs. 143-160.
- [8] Gleason, Andrew M. *Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon*, The American Mathematical Monthly, Vol. 95, N°. 3. 1998, págs. 185-194.
- [9] Gómez Villamayor, Javier. *Math-Origami. Aspectos algebraicos de las construcciones con origami*, Universidad de Valladolid, 2017.
- [10] Hadlock, Charles Robert. *Field Theory and Its Classical Problems*, Carus Monographs, Vol. 19, MAA, Washington, DC, 1978.
- [11] Hull, Thomas C. *Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill*, The American Mathematical Monthly Vol. 11, N°. 4, 2011, págs. 307-315.
- [12] Justin, Jacques. *Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques*, In Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, 1989, págs. 251-261.
- [13] Klein, Felix. *Famous Problems of Elementary Geometry*, Ginn & Company, 1897.
- [14] Lang, Robert J. *Origami and Geometric Constructions*, 2015.
- [15] Lang, Robert J. *Origami Conferences* [en línea] Disponible en: <https://langorigami.com/article/origami-conferences/> [Consulta: 15/08/21]

- [16] Lee, Hwa Young. *Origami-constructible numbers*, The University of Georgia, 2017.
- [17] Lucero, Jorge C. *On the elementary single-fold operations of origami: reflections and incidence constraints on the plane*, arXiv.org, Cornell University, 2016.
- [18] Martin, George E. *Geometric constructions*, S. Axler, F. W. Gehring, K. A. Ribet, New York, 1998.
- [19] Row, T. Sundara. *Geometric Exercises in Paper Folding*, Addison & Co., 1893.
- [20] Royo Prieto, José Ignacio. *Matemáticas y papiroflexia*, Sigma, 2002, págs. 175-192.
- [21] Smith, John *Notes on the History of Origami*, 2005 [en línea] Disponible en: http://www.britishorigami.info/academic/johnsmith/history_notes.php [Consulta: 25/07/2021]
- [22] Tramuns, E. *Una formalització de les construccions geomètriques*, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2012.
- [23] Unamuno, Miguel de. *Amor y pedagogía*, Henrich y Ca, Barcelona, 1902.
- [24] Videla, Carlos R. *On points constructible from conics*, The Mathematical Intelligencer 19, 1997, págs. 53-57.