Facultad
de
Ciencias

Principios del Cálculo Estocástico. Valoración de derivados financieros.

(Introduction of Stochastic Calculus. Valuation of financial derivatives.)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Aída Cosío González
Director: Juan Antonio Cuesta Albertos

Septiembre-2021

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mi director, Cuesta, por darme la oportunidad de realizar el trabajo con él y, además, haber podido escoger un tema que me apetecía descubrir. Gracias por haberme dedicado tanto tiempo, por guiarme y ayudarme en todo lo posible. Por la paciencia y el esfuerzo, por esas tutorías tan divertidas que teníamos y por enseñarme algo nuevo cada día.

En segundo lugar, también me gustaría acordarme de todos los profesores que he tenido de matemáticas desde el colegio hasta llegar a la facultad. ¡Qué bonito es que te enseñen las matemáticas de forma tan amena! Al final sois partícipes de que siempre me hayan gustado tanto y de que decidiese elegir esta carrera.

No me quiero olvidar de los profesores que me habéis acompañado durante toda esta etapa. De cada uno de vosotros siempre se aprende algo diferente.

Mis compañeros de carrera, ¡qué buenos momentos me habéis dado! He tenido la oportunidad de conocer a un montón de personas y disfrutar con ellos todo este camino. Al final, unos van y otros vienen, pero todos, en un momento o en otro, han sumado, consiguiendo que disfrutase de cada uno de los días, haciéndolos mucho más entretenidos. Me gustaría resaltar los que comenzaron siendo compañeros y que ahora se han convertido en amigos. Puede que estemos un tiempo sin vernos pero todo es igual cuando nos juntamos. Y cómo no, chicas, ¡qué afortunada me siento de poder compartir tantos momentos con vosotras! Sé que me llevo una bonita amistad y que aún nos quedan un montón de aventuras por vivir.

Por último me gustaría acordarme de mi familia y amigos. Los que siempre habéis estado apoyándome en todo momento. En especial a mis padres, Ana y Pablo, por permitirme estudiar lo que quería y, por entender y respetar, mi forma de vivir esta aventura. ¡Qué bonito ha sido poder compaginarlo sin tener que renunciar a todas las actividades que forman parte de mi día a día! Y, por supuesto, a mi hermano Pablo, por todo lo que me has ayudado y apoyado siempre. Por tu paciencia conmigo y por hacer que los días sean mas divertidos. ¡Me encanta que sigas mis pasos!

Solo me queda decir: ¡GRACIAS A TODOS! Realmente soy una afortunada. Se cierra una etapa, ¡a por la siguiente aventura!

Resumen

En este trabajo se estudian los principios del cálculo estocástico: las ecuaciones diferenciales estocásticas, el Cálculo de Itô, el cambio de medida con el Teorema de Cameron - Martin - Girsanov y el teorema de representación de martingalas. Además, se estudia la valoración de derivados financieros donde se construyen estrategias para determinar el precio de un activo financiero utilizando el modelo de Black - Scholes. Se utilizan procesos discretos para introducir los problemas analizados.

Palabras clave: Black - Scholes, Cálculo estocástico, Cameron - Martin - Girnasov, Itô, martingala, opciones.

Abstract

In this work we study the introduction of stochastic calculus: stochastic differential equations, Itô Calculus, the change of measure with the Cameron - Martin - Girsanov Theorem and the martingale representation theorem. In addition, the valuation of financial derivatives is studied where strategies are built to determine the price of a financial asset using the Black - Scholes model. Discrete processes are used to introduce the analyzed problems.

Key words: Black - Scholes, Stochastic calculus, Cameron - Martin - Girnasov, Itô, martingale, options.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Comenzamos, a modo introductorio, con un ejemplo extraído del Capítulo 1 de [1].

Supongamos que tenemos el siguiente juego: se lanza una moneda al aire, si sale cara te dan un euro y si sale cruz no ganas nada. Teniendo en cuenta que hay la misma probabilidad de que salga cara o cruz, ¿cuánto dinero estarías dispuesto a pagar por participar en el juego? Sabemos que, jugando lo suficiente, aproximadamente la mitad de las veces saldrá cara, es decir, ganaremos un euro y la otra mitad de las veces no ganaremos nada. Por lo tanto, esperamos ganar 50 céntimos por tirada. Así que pagar más de 50 céntimos por tirada sería mucho para nosotros y menos de 50 céntimos sería poco para la persona que ofrece el juego. Por lo tanto, 50 céntimos parece lo razonable.

Según la definición matemática de esperanza, 50 céntimos es también el beneficio esperado del juego. Esta esperanza puede vincularse a un "precio" para el juego a través de la Ley Fuerte de los Grandes Números de Kolmogorof (Teorema 2.1). En lo sucesivo, nos referiremos a este resultado como LFGN.

Pero, ¿es un precio razonable? Supongamos que alguien ofrece 40 céntimos por el juego pero, en lugar de permitir un número grande de jugadas, solo tiene una oportunidad. La LFGN asegura beneficios en los casos de muchas jugadas repetidas, por lo que 40 céntimos sería un desastre económico para el organizador pero, en verdad, no hace nada si solo se permite una jugada.

Se podría cobrar cualquier precio por el juego y el número de "compradores" o "vendedores" contentos con ese precio podría no tener nada que ver con la esperanza matemática del resultado del juego.

Además, hemos ignorado un detalle importante: el valor temporal del dinero. El análisis que hemos hecho se ha simplificado porque el pago y la ganancia del juego se producen en el mismo tiempo. Supongamos ahora que el juego tuviera lugar a final de año, pero que el pago para poder jugar tuviera que hacerse al principio. En este caso, tendríamos que encontrar el valor de la ganancia contingente del juego no en la fecha futura del juego, sino al inicio del año.

Si estamos en enero, un euro en diciembre no es lo mismo que un euro ahora, sino algo menos. Los tipos de interés son el reconocimiento formal de este hecho y los bonos son un producto derivado de esto. Un *bono* es un instrumento financiero de deuda que emite, tanto la administración pública como entidades privadas, para financiarse, comprometiéndose a devolver el dinero prestado al comprador de ese bono más unos intereses fijados previamente, conocidos como *cupón*.

En este trabajo vamos a suponer que las deudas se capitalizan a un interés compuesto estrictamente positivo.

Hipótesis 1.1 Valor temporal del dinero. *Supongamos que para cualquier tiempo T inferior a un horizonte temporal τ, el valor actual de un euro prometido en el tiempo T viene dado por* $\exp(-rT)$ *para alguna constante $r > 0$.*
La tasa r es entonces la tasa de interés continuamente compuesta para este periodo.

El mercado de los tipos de interés no tiene por qué ser tan sencillo: r no tiene por qué ser constante; y, de hecho, en los mercados reales, no lo es. Pero, para simplificar, supondremos que lo es. Ahora podemos derivar, de la LFGN, un precio para el juego en el momento T. Pagar 50 céntimos en el momento T es lo mismo que pagar $50 \exp(-rT)$ céntimos ahora. ¿Por qué? Porque el pago de 50 céntimos en el momento T puede garantizarse comprando ahora media unidad de bono por un coste de $50 \exp(-rT)$ céntimos. Por lo tanto, el precio actual de LFGN no debe ser 50 céntimos, sino $50 \exp(-rT)$ céntimos.

Hasta ahora hemos hablado de un juego con movimientos claramente establecidos pero, ¿y las acciones? ¿Qué pasa con los precios reales de las acciones en mercado financiero real? Un modelo ampliamente aceptado sostiene que los precios de las acciones tienen una distribución log-normal. Este modelo es:

Modelo log-normal para el valor de las acciones. Si llamamos S_T al valor de las acciones de una empresa determinada, existe una variable aleatoria (v.a.) X_T con distribución normal, cuyas media, μ, y varianza, σ^2, pueden depender de T, tal que:

$$\log S_T = \log S_0 + X_T \text{ o, equivalentemente, } S_T = S_0 \exp(X_T). \tag{1.1}$$

En lo sucesivo, diremos que la distribución de X es $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y S_t denotará la cotización de una acción en el instante t.

Supongamos ahora que tenemos un derecho sobre estas acciones, que nos permite cobrar ciertas cantidades de dinero en determinadas situaciones, tal y como sucedía en el juego de la moneda. El derecho más antiguo y posiblemente más natural sobre una acción es el *futuro*. En este contrato las acciones se compran a plazo. Más precisamente: dos partes firman un contrato en el que una de ellas se compromete a entregar a la otra cierto número de acciones en un momento futuro acordado a cambio de una cantidad K fijada ahora. Entonces la pregunta sobre el precio del juego es: ¿qué cantidad debe anotarse en el contrato ahora para pagar las acciones dentro de un año?

Si el plazo de vencimiento del contrato es T, entonces el valor del contrato a su vencimiento, es decir, cuando se produce realmente la transferencia de acciones, es $S_T - K$. El valor temporal del dinero nos dice que el valor de este derecho ahora es $\exp(-rT)(S_T - K)$. La LFGN sugiere que deberíamos elegir K de modo que el valor esperado de esta cantidad aleatoria, $\mathbb{E}(\exp(-rT)(S_T - K))$, sea cero. Si es positivo o negativo, entonces el uso a largo plazo de esta fijación de precios debería conducir a la ganancia de una de las partes. Por lo tanto, una respuesta aparentemente razonable a la cuestión de la fijación de precios dice que K debería de estar ajustado de manera que $\mathbb{E}(\exp(-rT)(S_T - K)) = 0$, lo que ocurre cuando $K = \mathbb{E}(S_T)$.

¿Qué es $\mathbb{E}(S_t)$? De acuerdo con (1.1) deberemos calcular $\mathbb{E}(S_0 \exp(X))$, donde X está distribuida como una $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Para ello, podemos utilizar el siguiente resultado:

La ley del estadístico inconsciente [16]. Dada una v.a. real X con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces, para cualquier función real h tal que $h(x)$ es integrable, la esperanza de $h(X)$ es

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

La integración y la ley del estadístico inconsciente nos dicen entonces que el precio esperado de las acciones en el momento T es $S_0 \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$. Este es el precio justificado por la LFGN para el contrato a futuro. Al igual que con el juego de la moneda, solo puede ser una sugerencia en cuanto al nivel de negociación del mercado. Por otro lado, está claro que la técnica funciona para algo más que para los contratos a plazo. Muchos derechos son susceptibles de ser traducidos en forma de función, $h(x)$, y la ley del estadístico inconsciente debería ser capaz de ofrecer un valor esperado para ellas. Si se descuenta esta esperanza, se obtiene un valor teórico que la LFGN nos hace relacionar con la realidad económica.

1.1. Precios de arbitraje

Hasta aquí todo es convincente, pero por muy seductora que sea la ley del estadístico inconsciente, también es completamente inútil. El precio que acabamos de determinar para el futuro solo podría ser el precio de mercado por casualidad. En los mercados en los que las acciones pueden comprarse y venderse libremente, intentar negociar a plazo utilizando la LFGN llevaría al desastre ya que, en la mayoría de los casos, habría un interés en venderle un futuro a ese precio.

¿Por qué la LFGN falla tanto con los contratos a futuro? Como se ha mencionado anteriormente en el contexto del juego de la moneda, la LFGN no puede imponer un precio, solo lo sugiere. Pero, en este caso, hay otro mecanismo completamente diferente que sí que impone un precio. El precio justo del contrato, como veremos a continuación, es $S_0 \exp(rT)$. Sorprendentemente, no depende del valor esperado de las acciones, ni siquiera depende de que el precio de las acciones tenga una distribución determinada. Cualquiera de las contrapartes del contrato puede, de hecho, construir el derecho al comienzo del periodo del contrato y luego simplemente esperar al vencimiento para intercambiar según corresponda.

1.2. Estrategia de construcción

Supongamos que el vendedor del contrato está obligado a entregar una acción en el momento T a cambio de la cantidad K. Podría pedir un préstamo de S_0 ahora, comprar la acción con él, guardarla y esperar. Cuando el contrato venza, tiene que devolver el préstamo, por lo que, si el tipo de interés compuesto continuo es r, debería devolver $S_0 \exp(rT)$. Por tanto, si $K < S_0 \exp(rT)$, perderá dinero con toda seguridad. Por lo tanto, el precio a futuro está limitado por $S_0 \exp(rT)$. Pero, por supuesto, puede darse el caso contrario. Si el comprador fija un precio superior a $S_0 \exp(rT)$ en el contrato, sería este quien sufriría una pérdida. El precio a futuro también está acotado por arriba por $S_0 \exp(rT)$.

Por lo tanto, existe un precio impuesto, no de $S_0 \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$ sino de $S_0 \exp(rT)$. Cualquier intento de conseguir un precio diferente y ofrecerlo en el mercado llevaría inevitablemente a que alguien se aprovechase del dinero gratuito a través del procedimento de construcción. Este tipo de oportunismo de mercado es lo suficientemente antiguo como para recibir un nombre: *arbitraje*. El precio de $S_0 \exp(rT)$ es un precio de arbitraje: se justifica porque cualquier otro precio podría conducir a beneficios sin riesgo por una de las partes (obsérvase que como el número de acciones involucradas es arbitrario, los beneficios serán ilimitados). En pocas palabras, si existe un precio de arbitraje, cualquier otro precio es demasiado peligroso para ofertar. Por otro lado, conviene tener en cuenta que la LFGN no estaba equivocada: si $S_0 \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$ es mayor que $S_0 \exp(rT)$, el comprador de un contrato a futuro espera ganar dinero.

Esperanza frente a arbitraje

Los futuros son un caso especial. La estrategia de comprar la acción para mantenerla no funcionaría para derechos más complejos. La opción de compra *europea*, que ofrece al comprador el derecho pero no la obligación de recibir las acciones por un precio de ejercicio acordado de antemano, ciertamente no podría construirse de esta manera. Si el precio de las acciones termina por encima del precio de ejercicio, el comprador ejercería la opción y pediría recibir las acciones, tenerlas guardadas sería entonces útil para el vendedor. Pero si el precio de las acciones termina por debajo del precio del ejercicio, el comprador abandonará la opción y las acciones que posea el vendedor habrán sufrido una pérdida inútil.

Por lo tanto, tal vez un precio de LFGN sería apropiado para un opción de compra y, hasta 1973, mucha gente habría estado de acuerdo con esta afirmación. Casi todo parecía seguro para el precio a través de la esperanza y la LFGN, y solo los futuros y las relaciones cercanas parecían tener un precio de arbitraje. Sin embargo, desde 1973 con el modelo de Black - Scholes, que exponemos en el Capítulo 5, se descubrió lo equivocado que estaba esto.

El objetivo de esta trabajo es explorar los límites del arbitraje. Construiremos un marco matemático, lo suficientemente sólido, como para ser un modelo realista de los mercados financieros reales y, también, lo suficientemente estructurado como para apoyar las técnicas de construcción.

A efectos prácticos, las cotizaciones bursátiles pueden cambiar en cualquier instante y no solo en algunos momentos fijos en los que una cartera puede ser rebalanceada. La opción binaria de un simple cambio hacia "arriba" o "abajo" también es demasiado simple: de hecho, también a efectos prácticos, podemos considerar que cualquier cambio de cotización es posible.

Los modelos discretos nos guiarán pero extremando el cuidado con los argumentos basados en hacer tender a cero un incremento, ya que son muy peligrosos y deben ser usados rigurosamente. Encontraremos un teorema de representación que establece las bases de la construcción utilizada y será la medida de una martingala la que prepare correctamente el operador de esperanzas. Sin embargo, este proceso y las medidas serán difíciles de separar intuitivamente y necesitaremos un cálculo diferencial que nos ayudará. Los cambios de medida afectarán a los procesos de manera sorprendente. Ya no podremos proceder con total generalidad, nos centraremos en el movimiento Browniano. Si hay un principio general es que el movimiento Browniano es suficientemente sofisticado como para producir modelos interesantes y suficientemente simple como para ser manejado. Dados los matices de trabajar con procesos continuos, un simple cálculo basado en el movimiento Browniano será más que suficiente para nuestros fines.

El resto del trabajo se estructura del modo siguiente:

En el Capítulo 2 presentamos los preliminares matemáticos y económicos que son necesarios para seguir la lectura de los siguientes capítulos.

En el Capítulo 3 veremos los procesos estocásticos. Dividiremos el capítulo en dos partes. Por un lado, tendremos una pequeña introducción a los procesos discretos y, por otra, analizaremos los procesos continuos.

En el Capítulo 4 trataremos el cálculo estocástico, donde veremos las ecuaciones diferenciales estocásticas, el Cálculo de Îto, la regla del producto, el cambio de medida con el Teorema de Cameron - Martin - Girsanov y, por último, el teorema de representación de martingalas.

En el Capítulo 5 nos centraremos en la valoración de derivados financieros. Para ello, veremos la construcción de estrategias para nuestro modelo, el modelo de Black - Scholes, las opciones de compra, tanto europeas como americanas, la cobertura y, por último, la aplicación del modelo.

Finalizamos con el Capítulo 6 en el que incluimos las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo aparecen definiciones, proposiciones y teoremas que usaremos a lo largo de los siguientes capítulos. Estos conceptos, tanto matemáticos, como económicos, se han extraído de las referencias: [1], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [12], [13], [14], [15], [17], [20], [21] y [22]. No incluiremos conceptos probabilísticos básicos como la definición de variable aleatoria, función de densidad o de distribución, convergencias casi seguro o en distribución, etc. Se pueden encontar en [3].

Supondremos que existe un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en el que están definidas las v.a.'s que aparecen en esta memoria.

Notación 2.1 *Como hemos señalado, llamaremos $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ a la distribución normal de media μ y varianza σ^2.*

Notación 2.2 *Las convergencias casi seguro y en distribución se denotarán con la notación:$\rightarrow_{c.s.}$ y $\rightarrow_{c.d.}$.*

La esperanza matemática de una v.a. real X es el número $\mathbb{E}(X)$ que formaliza la idea de valor medio de un fenómeno aleatorio.

Definición 2.1 Esperanza matemática. *En general, si X es una v.a. definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces el valor esperado de X está definido como la integral de Lebesgue*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

La esperanza condicionada de una v.a. X, es su valor esperado $\mathbb{E}[X \mid Y]$, el valor que tomaría en "promedio" sobre un conjunto arbitrariamente grande de resultados, sabiendo que se tiene un determinado conjunto de "condiciones".

Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una v.a. definida en el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{H}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, la función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ es usualmente no $\mathcal{H}$-medible, por lo tanto, la existencia de las integrales de la forma $\int_H X d\mathbb{P} \mid_{\mathcal{H}}$, donde $H \in \mathcal{H}$ y $\mathbb{P} \mid_{\mathcal{H}}$ es la restricción de $\mathbb{P}$ sobre $\mathcal{H}$, no puede ser formulado en general. Sin embargo, los valores locales $\int_H X d\mathbb{P}$ pueden recuperarse en $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P} \mid_{\mathcal{H}})$ con ayuda de la esperanza matemática.

Definición 2.2 Esperanza condicionada. *Una esperanza matemática de X dado $\mathcal{H}$, denotada como $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H})$, es una función $\mathcal{H}$-medible $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface:*

$$\int_H \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) d\mathbb{P} = \int_H X d\mathbb{P}$$

para todo $H \in \mathcal{H}$.

Obviamente esta definición depende de la probabilidad definida en el espacio probabilístico subyacente. En ocasiones, hacemos explícita esta definición con la notación $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X \mid \mathcal{F}]$.

La existencia y unicidad c.s. es una consecuencia del Teorema de Radon - Nikodym.

Definición 2.3 Proceso estocástico. *Un proceso estocástico es una colección de v.a.'s que se puede escribir como:*

$$\{X(t) : t \in T \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Teorema 2.1 Ley Fuerte de los Grandes Números. *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de de v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.'s). Entonces*

1. *Si $\mathbb{E}[\mid X_1 \mid] < \infty$, se cumple que*

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \rightarrow_{c.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

2. *Si $\mathbb{E}[\mid X_1 \mid] = \infty$, entonces la sucesión $\{\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\}_n$ no converge c.s. a ninguna v.a. finita.*

Teorema 2.2 Teorema Central del Límite. *Si $\{X_n\}$ es una sucesión de v.a.i.i.d.'s tales que $\sigma^2 = Var(X_1) < \infty$, entonces*

$$\frac{(X_1 + ... + X_n) - n\mathbb{E}[X_1]}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow_{c.d.} \mathcal{N}(0, 1).$$

Definición 2.4 Diagramas de árbol. *Vienen a ser grafos dirigidos, que tienen relación uno a uno entre los nodos y las historias de nuestro árbol binario, y representan eventos (los nodos del grafo) cuya realización depende de los resultados de varios sorteos sucesivos (las ramas del grafo). La probabilidad de cada suceso es el producto de las probabilidades de las ramas que llevan hasta él.*

Veamos ahora algunas definiciones en las que utilizaremos el árbol de doble bifurcación con 7 nodos de la Figura 1.1. En esta figura, en cada nodo hay una bifurcación. Los números $q_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3$ nos indican que un proceso que ha llegado, por ejemplo, al nodo S_1^1 tiene probabilidad q_2 de pasar al S_2^2 y probabilidad $1 - q_2$ de pasar al S_2^1.

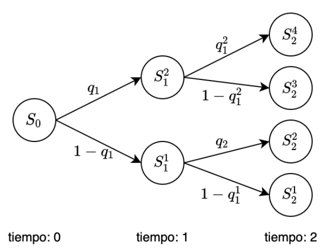

Figura 2.1: Camino doble

Definición 2.5 Proceso asociado a un árbol. *Dado un árbol vamos a llamar proceso asociado a un árbol a la colección de v.a.'s* $\{S_t : t = 0, ..., T\}$ *donde* T *es el número de pasos del árbol y* S_t *depende del nodo que visite el árbol en el instante* t.
En ocasiones se utiliza la notación $S_t^j, j = 1, ..., n_t$ *para indicar los posibles valores del proceso en el paso* t.

Definición 2.6 Medida. *Llamaremos al conjunto de probabilidades* (p_j) *o* (q_j) *una medida* $\mathbb{P}$ *o* $\mathbb{Q}$ *sobre el árbol. La medida describe la probabilidad de cualquier salto hacia arriba o hacia abajo en cada nodo, representando por* p_j *la probabilidad de moverse hacia arriba desde el nodo* j. *Podemos elegir una medida simple* $\mathbb{P}$ *con* $p_j = \frac{1}{2}$ $\forall j$ *o una medida más compleja* $\mathbb{Q}$ *donde cada salto tiene una probabilidad distinta.*

Definición 2.7 $\sigma-$**álgebra generada**. *Sea* F *una familia arbitraria de subconjuntos de* X. *Entonces existe una única y más pequeña* σ*-álgebra que contiene todos los conjuntos de* F, *aunque* F *puede o no ser en sí misma una* σ*-álgebra. De hecho, es la intersección de todas las* σ*-álgebras que contienen* F. *Esta* σ*-álgebra se denota por* $\sigma(F)$ *y se llama la* σ*-álgebra generada por* F.

Definición 2.8 $\sigma-$**álgebra engendrada por** X. *Si* $X : \Omega \Rightarrow \Omega'$ *es una aplicación y* $\sigma' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ *es una* σ*-álgebra, se llama* σ*-álgebra engendrada por* X, *denotado como* $\sigma(X)$, *a* $\sigma[X^{-1}(\sigma')]$ *que es la menor* σ*-álgebra que hace a* X *v.a..*

Definición 2.9 Filtración. *Se llama filtración a cualquier familia creciente de sub-*σ*-álgebras en un espacio medible. Es decir, dado un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$, *una filtración es una familia de* σ*-álgebras* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ *con* $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ *donde* $T \subset \mathbb{R}^+$ *y*

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}.$$

Las filtraciones pretenden ser la historia de las trayectorias. En el caso del árbol de la Figura 1.1, sería $T = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0)$, $\mathcal{F}_1 = \sigma\left(\{S_0, S_1^1\}, \{S_0, S_1^2\}\right)$ y $\mathcal{F}_2 = \sigma\left(\{S_0, S_1^1, S_2^1\}, ..., \{S_0, S_1^2, S_2^2\}\right)$.

Definición 2.10 Derecho. *Dado un árbol y un horizonte* T, *un derecho,* X, *es una v.a. cuyo valor depende de las v.a.'s* $S_1, ..., S_T$. *O, lo que es lo mismo, es una v.a.* $\mathcal{F}_T$ *medible donde* $\mathcal{F} = \sigma\{S_1, ..., S_T\}$.

La diferencia entre un derecho y un proceso es que el derecho solo se define en los nodos asociados al paso T, mientras que un proceso se define en todos los momentos hasta T incluido. Es decir, el proceso contiene la solución de la cotización de una acción hasta el tiempo T, mientras que el derecho solo depende del valor de la cotización en T.

Veamos el operador de la esperanza condicional $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\cdot \mid \mathcal{F}_i)$ en el caso del árbol. Sea $F_i = \sigma\left(S_t : t \leq i\right)$. Dado x, un derecho en el tiempo T asociado a un árbol; $\mathbb{E}(X)$ es el valor esperado para X si la única información de la que se dispone es de la distribución de probabilidad de X. En el caso de los árboles, esta distribución está determinada por $\mathbb{P}$. En cambio, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_i]$ es el valor esperado de X sabiendo el valor de S_i. Es decir, sabiendo el nodo exacto en el que se encuentra el proceso en el momento i.

Definición 2.11 Proceso adaptado. *Se dice que el proceso* X *está adaptado a la filtración* $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ *si la v.a.* $X_i : \Omega \to S$ *es una función medible de* $(\mathcal{F}_i, \Sigma)$ *para cada* I, *siendo* I *un conjunto totalmente ordenado de índices.*

Definición 2.12 Proceso previsible. *Dada una filtración* $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ *y el proceso* $\Phi = \{\phi_t : t \in T\}$ *se dice que un proceso previsible a tiempo continuo* $\phi = \phi_i$ *es un proceso cuyo valor en cualquier nodo en el momento* i *depende solo de la historia hasta el momento anterior,* $\mathcal{F}_{i-1}$.

Si comparamos un proceso previsible, con el proceso principal S, en este último, se conoce su valor por adelantado. No parece notar las ramas hasta un paso de tiempo después de que haya ocurrido.

Los procesos previsibles serán de ayuda en las situaciones en las que no podemos saber de antemano hacia dónde van a ir los precios. Esta es una característica esencial de cualquier modelo que excluya el arbitraje.

Definición 2.13 Martingala. *Un proceso $S = \{S_t : t \in T\}$ es una martingala con respecto a una medida $\mathbb{P}$ y a una filtración $\{\mathcal{F}_i\}$ si*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_j \mid \mathcal{F}_i) = S_i, \textit{para todo } i \leq j.$$

Que S sea una martingala con respecto a una medida $\mathbb{P}$, significa que el valor futuro esperado en el momento j del proceso S bajo la medida $\mathbb{P}$ condicionada por su historia hasta el momento i es simplemente el valor del proceso en el momento i. En particular esto implica que el proceso S está adaptado a la filtración. Esto significa que el proceso S no tiene ninguna deriva bajo $\mathbb{P}$, no tiene ninguna tendencia hacia arriba o hacia abajo en su valor bajo el operador de esperanza $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$. Es decir, si el proceso tiene valor 100 en algún momento, entonces su valor esperado condicional bajo $\mathbb{P}$ es 100 a partir de entonces.

Proposición 2.1 Ley de la Torre. *Si $\alpha \subset \beta$ son σ-álgebras, entonces*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \beta] \mid \alpha] = \mathbb{E}[X \mid \beta].$$

Proposición 2.2 El proceso de esperanza condicionada de un derecho. *Para cualquier derecho X, el proceso $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_i)$ es siempre una $\mathbb{P}$-martingala con respecto de la filtración $\{F_j\}_{j \geq i}$.*

Esta proposición se deduce del hecho de que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_j) \mid \mathcal{F}_i\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_i) \text{ para todo } j \geq i.$$

En otras palabras, que condicionando primero a la historia hasta el tiempo j y después a la historia hasta un tiempo anterior, i, es lo mismo que condicionar solo hasta el tiempo i. Este resultado se llama Ley de la Torre.

Es un pequeño truco elegante para producir martingalas y, como veremos, fundamental para la fijación de precios de los derivados.

Otra aplicación de la Ley de la Torre proporciona una comprobación fácil de si un proceso es una $\mathbb{P}$-martingala o no: basta comprobar si el propio proceso S_i coincide con el proceso de esperanza condicional de su valor terminal $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_T \mid \mathcal{F}_i)$. Solo si son idénticos, el proceso es una $\mathbb{P}$-martingala.

También debemos tomarnos en serio la dependencia de la probabilidad subyacente. El proceso S no es una martingala por sí misma, en su caso, es una martingala con respecto a cierta probabilidad $\mathbb{P}$. Y, por supuesto, exactamente el mismo proceso puede ser una martingala con respecto a una probabilidad y no a otra.

Definición 2.14 Función generatriz de momentos. *La función generatriz de momentos de una v.a. X es*

$$M_X(t) := \mathbb{E}[\exp(tX)], t \in \mathbb{R}.$$

siempre que esta esperanza exista.

Proposición 2.3 Caracterización de normales. *Una v.a. X es normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ bajo una medida $\mathbb{P}$ si y solo si su función generatriz de momentos:*

$$M_X(\theta) = \exp\left(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\right), \text{para todo real } \theta.$$

Definición 2.15 Volatilidad. *Es el término que mide la variabilidad de las fluctuaciones de cualquier activo financiero del mercado. Si el precio de un activo se mueve mucho y muy rápido se dice que es muy volátil. Se utiliza la desviación típica como medida la volatilidad.*

Definición 2.16 Reclamo. *Un pago que se realizará en el futuro según un contrato.*

Definición 2.17 Derivado. *Un valor que depende de valores de mercado existentes en la realidad.*

Definición 2.18 Valor con cotización aleatoria. *Es un instrumento que tiene algún tipo de valor, emitido por un gobierno o una corporación como por ejemplo acciones y bonos, que cotizan en bolsa.*

Definición 2.19 Bono de caja sin riesgo. *Es un instrumento de deuda que emite una empresa o administración pública para financiarse, que devuelve el dinero prestado al comprador mas unos intereses fijados previamente. Se supone que no tiene ningún riesgo.*

Definición 2.20 Posición corta. *Se toma cuando se esperan bajadas en bolsa y suponen vender un activo que no hemos comprado previamente, con la idea de que el precio bajará y que lo podremos comprar en un futuro a un nivel más bajo. También se conoce como venta al descubierto.*

Definición 2.21 Posición larga. *Una compra de un activo financiero con un dinero tomado a préstamo con la expectativa de que éste pueda subir de valor en el futuro.*

Capítulo 3

Procesos estocásticos

En este capítulo se analizan algunas propiedades de los procesos estocásticos que serán importantes en los capítulos sucesivos.

Comenzamos el capítulo utilizando procesos discretos para introducir los principales problemas abordados. Luego, pasaremos a introducir los procesos continuos.

Para el desarrollo de este capítulo se ha seguido los Capítulos 2 y 3 de [1].

Vamos a estudiar los procesos para tratar de replicar con contrato de futuro y, primero, lo vamos a aclarar con procesos discretos.

3.1. Procesos discretos

Consideremos un modelo sencillo para relacionarlos con los mercados financieros. Necesitamos algo aleatorio para las acciones y algo que represente el valor temporal del dinero. Utilizaremos una acción y un bono.

La cotización de la acción comenzará en el instante $t = 0$ y terminará en el tiempo $t = \delta$. Además, para simplificar supondremos que solo pueden ocurrir dos cosas: un movimiento alcista o uno bajista de amplitud determinada. Es decir, o la acción sube o baja una unidad entre 0 y δ. Se representa en la Figura 3.1.

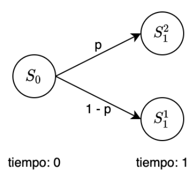

Figura 3.1: Ramas binomiales

Como podemos observar en la Figura 3.1 nuestra aleatoriedad tiene cierta estructura. La probabilidad de subir al nodo S_1^2 es p, mientras que la de bajar a nodo S_1^1 es $1 - p$. La acción tendrá un valor al principio llamado S_0. Este valor representa un precio al que podemos comprar y vender las acciones en cantidades ilimitadas en el instante $t = 0$. Deberemos mantener la posición inalterada hasta el momento δ. No ocurre nada en el periodo intermedio por mantener la acción, no hay ningún cargo por mantener cantidades positivas o negativas, pero al final del periodo cada acción tendrá un nuevo valor: si se desplaza hacia abajo tendrá un valor v y, si lo hace hacia arriba, su valor será v^* con $v^* > v$. Por tanto, $\mathbb{P}[S_1^2 = v] = p$ y $\mathbb{P}[S_1^1 = v^*] = 1-p$.

Necesitamos ahora algo que represente el valor temporal del dinero: un bono en efectivo. Habrá un tipo de interés continuamente compuesto r que se mantendrá fijo durante el periodo $t = 0$ a $t = \delta$. Es decir, un euro en el tiempo cero crecerá hasta $\exp(r\delta)$ en el momento $t = \delta$. Introduciremos un bono en efectivo B que podemos comprar o vender en el momento cero por algún precio, B_0, y que en δ valdrá $B_0 \exp(r\delta)$.

Estos dos instrumentos constituyen nuestro mundo financiero y, aunque sea sencillo, sigue teniendo vínculos inciertos para los inversores. Solo uno de los posibles valores de las acciones conviene a un determinado inversor y sus planes tendrán éxito o fracasarán por el resultado aleatorio. Por lo tanto, podría haber un mercado de instrumentos que dependiera del valor que la acción toma al final del periodo. La exigencia del inversor de una compensación basada en el valor futuro de la acción podría codificarse mediante una función f que asigne a las dos posibilidades futuras (nodos S_1^1 y S_1^2), los beneficios o penalizaciones $f(S_1^1)$ y $f(S_1^2)$. Por ejemplo, un contrato a futuro, suscrito a un valor K, podría codificarse como $f(S_1^1) = v - K$, $f(S_1^2) = v^* - K$.

Nótese que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_1) = (1-p)v + pv^*$ es la esperanza de una rama.

Consideremos ahora una cartera general (ϕ, ψ), formada por ϕ unidades de la acción (con un valor inicial de ϕS_0) y ψ del bono en efectivo B (con un valor inicial de ψB_0). Si comprásemos esta cartera en el momento cero, costaría $\phi S_0 + \psi B_0$, sin embargo, en el momento δ tendría uno de los dos posibles valores:

- $\phi v^* + \psi B_0 \exp(r\delta)$ después de un movimiento hacia arriba
- y $\phi v + \psi B_0 \exp(r\delta)$ después de un movimiento hacia abajo

Tenemos dos expresiones, dos posibles valores de derecho y dos variables libres ϕ y ψ. Además, tenemos dos valores $f(S_1^1)$ y $f(S_1^2)$ que queremos duplicar bajo el movimiento apropiado de la acción y tenemos dos variables ϕ y ψ que podemos ajustar. Así, la estrategia puede reducirse a la resolución de las dos siguientes ecuaciones simultáneas para (ϕ, ψ):

$$\phi v^* + \psi B_0 \exp(r\delta) = f(v^*),$$

$$\phi v + \psi B_0 \exp(r\delta) = f(v).$$

Una propiedad importante de estas ecuaciones es que son independientes de las probabilidades de subida y de bajada. Además, tiene estructura de martingala.

Exceptuando el caso en el que v y v^* fuesen idénticos, en cuyo caso S sería un bono y no una acción, tenemos las soluciones:

$$\phi = \frac{f(S_1^2) - f(S_1^1)}{v^* - v}, \tag{3.1}$$

$$\psi = B_0^{-1} \exp(-r\delta) \left(f(S_1^2) - \frac{(f(S_1^2) - f(S_1^1))v^*}{v^* - v} \right). \tag{3.2}$$

Si compramos esta cartera (ϕ, ψ) y la mantenemos, estas ecuaciones nos garantizan que conseguiremos replicar el valor de f: si la acción sube, la cartera pasa a valer $f(S_1^2)$ y, si la acción baja, la cartera pasa a valer $f(S_1^1)$. Hemos sintetizado el derivado.

Con este sencillo modelo podemos darnos cuenta que en nuestro mundo financiero simplificado cualquier derivado f puede replicarse a partir de una cartera adecuada de bonos y acciones, y construido con antelación. Esto tiene un efecto sobre el valor del derecho, ya que a diferencia del valor derivado de la esperanza, $\mathbb{E}[X(S_T)] = \sum_{i=1}^{K_T} X(S_T^i)\mathbb{P}[S_T = S_T^i]$, el coste de la cartera que hemos construido es ejecutable en un mercado ideal como un precio racional. Denotemos por V el valor de comprar la cartera (ϕ, ψ), es decir, $\nu = \phi s_1 + \psi B_0$, que por (3.1) y (3.2) es:

$$V = S_0 \left(\frac{f(S_1^2) - f(S_1^1)}{v^* - v} \right) + \exp(-r\delta) \left(f(S_1^2) - \frac{(f(S_1^2) - f(S_1^1))v^*}{v^* - v} \right).$$

Acabamos de ver el modelo de una rama, pero esto lo podemos extender a un árbol con varias ramas. La idea clave es la inducción hacia atrás, es decir, extender la construcción de la cartera de nodo en nodo, desde el lado derecho hasta el lugar de partida requerido. Consideremos entonces un derecho general para nuestra acción S. Cuando examinábamos una sola rama de nuestro árbol, teníamos la función f que dependía solo de un único momento. Ahora podemos ampliar la idea a un derecho para cubrir no solo el valor de S en el momento en el que se ejerce el derecho, sino también la historia de S hasta ese momento.

Veamos un ejemplo numérico. Tenemos un bono sin intereses y una acción, ambos con un precio inicial de 1 €. Al final del siguiente intervalo la acción vale 2 € si sube o 0,5 € si baja. Suponiendo que el coste del dinero es cero, ¿cuál es valor de un apuesta que paga 1 € si la acción sube?

Sea B el precio del bono, S el precio de las acciones y X el pago de la apuesta. Compre una cartera que consta de $\frac{2}{3}$ de una unidad de acciones y un préstamo de $\frac{1}{3}$ de unidad de bono. El coste de esta cartera en el momento cero es: $\frac{2}{3} \times 1€ - \frac{1}{3} \times 1\text{ €} = 0{,}33$ €. Pero, después de un salto alcista, esta cartera pasa a valer $\frac{2}{3} \times 2\text{ €} - \frac{1}{3} \times 1\text{ €} = 1$ €. Después de un salto hacia abajo, su valor es $\frac{2}{3} \times 0{,}5\text{ €} - \frac{1}{3} \times 1\text{ €} = 0$ €. La cartera simula exactamente el pago de la apuesta, por lo que debe valer exactamente lo mismo que la apuesta. Debe ser que el valor inicial de la cartera de 0,33 € también es el valor inicial de la apuesta.

3.2. Procesos continuos

En la sección anterior nos limitamos a analizar el uso de un árbol binomial. Empezamos de forma sencilla y esperando (con alguna justificación) que se podrían construir modelos de mercado relativamente complejos a partir de tales materiales. La ramificación binomial fue el pilar para nuestro mercado "realista". Para el mundo continuo necesitamos un fundamento análogo.

¿Qué es un proceso continuo? Dos principios a pequeña escala nos guiarán. Primero, el valor puede cambiar en cualquier instante. Segundo, cualquier número real positivo puede tomarse como valor de la cotización. Además supondremos que el proceso de continuo por lo que el valor no puede dar saltos instantáneos.

Al menos, como punto de partida, podemos asumir que los índices bursátiles o los precios de valores individuales se comportan de esta manera. A pesar de que las cotizaciones muestran dientes de sierra muy afilados, no es demasiado irreal afirmar que su comportamiento es continuo.

Desde Bachelier en 1900, quien analizó el movimiento de la bolsa de valores en París [9], la gente ha ido más allá y ha comparado los precios con un proceso continuo particular, el movimiento Browniano, que es la modelización del movimiento de una de las coordenadas de una partícula de gas que se mueve al azar.

Movimiento Browniano

Casi un siglo después de que el botánico Robert Brown observara al microscopio partículas de polen suspendidas en un líquido golpeándose entre sí, el modelo matemático para sus movimientos, fue desarrollado adecuadamente. El primer paso para el análisis del movimiento Browniano es construir una familia especial de procesos binomiales discretos.

Definición 3.1 Camino aleatorio. *Para un entero positivo n, definimos el proceso binomial $W_n(t)$ tal que:*

1. $W_n(0) = 0$,
2. *espaciado:* $\frac{1}{n}$,
3. *saltos hacia arriba y hacia abajo iguales de tamaño:* $\frac{1}{\sqrt{n}}$,
4. *medida* $\mathbb{P}$*: las probabilidades de saltar arriba o abajo en cualquier instante* $1, 2, ...$ *son iguales a* $\frac{1}{2}$.

En otras palabras, si $X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de v.a.'s binomiales independientes tomando valores $+1$ ó -1 con la misma probabilidad, entonces el valor de $W_n(t)$ en el instante $\frac{i}{n}$ está definido como:

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{X_i}{\sqrt{n}}, \text{para todo } i \geq 1.$$

Los dos primeros pasos se muestran en la Figura 3.2. ¿Cómo será W_n cuando n se haga grande?

Los procesos $W_n, n = 1, ...$ en lugar de descontrolarse, (ver Figura 3.3) parece que se estabilizan hacia algo a medida que n aumenta. Los movimientos de tamaño $\frac{1}{\sqrt{n}}$ parecen forzar algún tipo de convergencia. ¿Podemos hacer una declaración formal? Consideremos, por ejemplo, la distribución de W_n en el instante 1: para un particular W_n, hay $2n+1$ posibles valores que puede tomar, que van desde $-\sqrt{n}$ a $\sqrt{n}$. Pero la distribución de $W_n(1)$, independientemente de n, siempre tiene media cero y varianza unitaria porque $W_n(1)$ es la suma de n v.a.'s independientes e idénticamente distribuidas, cada una con medida cero y varianza $\frac{1}{n}$.

Además, el Teorema Central del Límite nos da un límite para este tipo de distribuciones binomiales: a medida que n aumenta, la distribución de $W_n(1)$ tiende a la normal $\mathcal{N}(0,1)$. Por otro lado, podemos extender el proceso W_n al intervalo $[0,1]$ del modo siguiente:

$$W_n(t) = \sqrt{t}\left(\frac{\sum_{i=1}^{[nt]} X_i}{\sqrt{[nt]}}\right), t \in [0,1].$$

Ahora, dado $t \in [0,1]$, la distribución del cociente que aparece dentro del paréntesis tiende, por

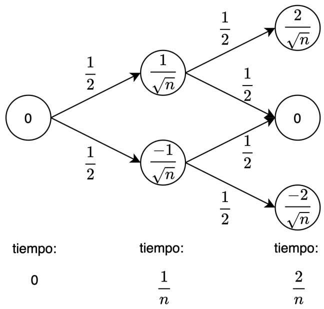

Figura 3.2: Los dos primeros pasos de un camino aleatorio W_n.

el Teorema Central del Límite, a una v.a. normal $\mathcal{N}(0,1)$. Y, por lo tanto, la distribución de $W_n(t)$ tiende a una normal $\mathcal{N}(0,t)$.

Hay una unidad formal subyacente a la familia: todas las distribuciones marginales tienden hacia la misma estructura de normales.

No solo lo cumplen todas las distribuciones marginales, sino también todas las distribuciones de los incrementos. Cada paso aleatorio W_n tiene la propiedad de que sus futuras variaciones de posición, conocida su posición actual, son independientes de esa posición (y, de hecho, independientes de toda su historia de movimientos hasta este momento): el futuro desplazamiento $W_n(s+t) - W_n(s)$ se distribuye binomialmente con media cero y varianza t. Así, de nuevo, teniendo en cuenta que $\frac{\sqrt{tn}}{\sqrt{[tn]}} \to 1$, el Teorema Central del Límite nos da una estructura límite constante y todas las condicionales marginales tienden hacia una distribución normal centrada. Es decir, dados $1 \geq w \geq s \geq 0$; la distribución de $W(w)$ dado $W(s)$ es $\mathcal{N}(W(s), w-s)$. Por lo tanto, las marginales condicionadas no están i.d..

Las marginales convergen, las marginales condicionales convergen y, por tentación, diríamos que las distribuciones de procesos también convergen. De hecho, lo hacen, aunque este no es el lugar para establecer el cuidadoso marco formal para dar sentido a esta afirmación. La distribución de W_n converge en $[0,\infty)$ y converge hacia el movimiento Browniano.

Definición 3.2 ***El movimiento Browniano***. *El proceso* $W = (W_t : t \geq 0)$ *definido en* $(\Omega, \sigma, \mathbb{P})$ *es un movimiento Browniano si y solo si*

1. $W(0) = 0$ *c.s.*,
2. *Dados* $s, t \geq 0$, $W(s+t) - W(s)$ *es una v.a.* $\mathcal{N}(0,t)$,
3. *Los incrementos son independientes. Es decir, si* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k$; *entonces las v.a.'s* $W(t_1) - W(t_0), ..., W(t_k) - W(t_{k-1})$ *son independientes.*

De aquí se deduce que con probabilidad uno las trayectorias son continuas.

La última condición, aunque es un eco exacto del comportamiento de los precursores discretos $W_n(t)$, es sutil. No es difícil encontrar ejemplos de procesos que tienen marginales $\mathcal{N}(0,t)$ y no son movimientos Brownianos. En el mundo continuo, como lo fue en el discreto, no son solo las

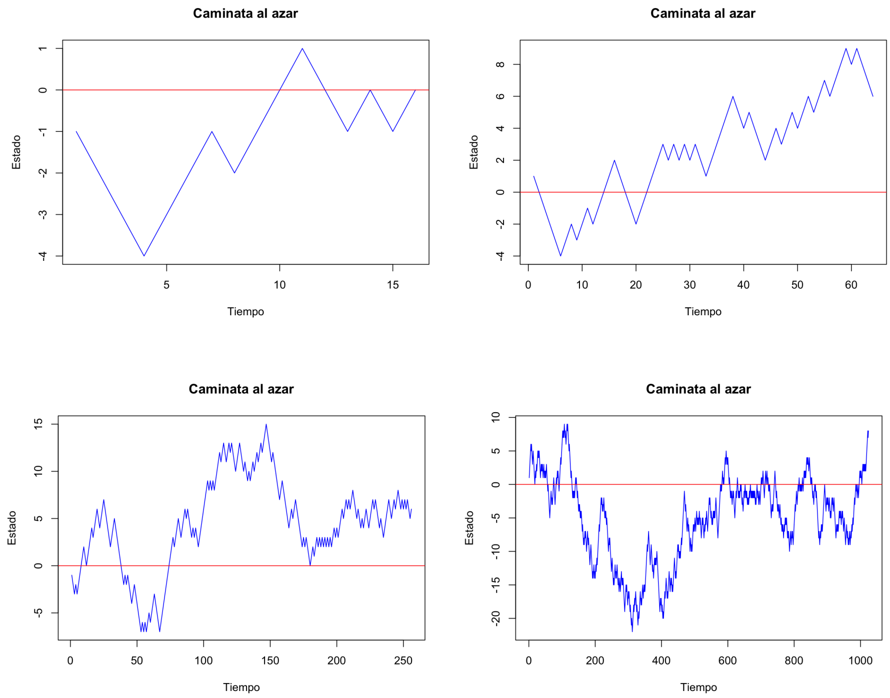

Figura 3.3: Caminatas al azar de 16, 64, 256 y 1024 pasos respectivamente.

marginales unidimensionales las que cuentan. Sin embargo, todas las marginales condicionadas a todas las historias $\mathcal{F}_s$ si que determinan la distribución conjunta. De hecho, será el proceso de explicar todo esto, lo que nos lleva a un cálculo Browniano.

También vale la pena señalar lo extraño que es el movimiento Browniano. No nos detendremos a probarlas (se puede encontrar en [11]) pero, a continuación, incluimos algunas propiedades sorprendentes:

- Aunque, con probabilidad uno, W es continuo en todos los puntos, no es (con probabilidad uno) diferenciable en ningún punto.

  En verdad, esto es una propiedad de cualquier proceso no constante con incrementos independientes. Si $W(t)$ fuera derivable sería:

  $$\lim_{h\to 0^+} \frac{W(t+h)-W(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{W(t)-W(t-h)}{h} = W'(t) \neq 0.$$

  Por lo tanto, si existe un $h_0 > 0$ tal que $0 < h < h_0$, entonces

  $$\text{signo } (W(t+h)-W(t)) = \text{ signo } (W(t)-W(t-h)),$$

  lo que contradice la independencia de incrementos. Por lo tanto, si $W(t)$ es derivable y la derivada no es nula, los incrementos no son independientes. Por lo tanto, las trayectorias del movimiento Browniano no son derivables.

- El movimiento Browniano eventualmente alcanzará (con probabilidad uno) cualquier valor real sin importar lo grande que sea. Además, su módulo puede que esté un millón de unidades por encima del eje, pero (con probabilidad uno) volverá a bajar a cero, en algún momento posterior.

- El movimiento Browniano alcanza un número infinito de veces (con probabilidad uno) todos los números reales.

- No importa en qué escala se examine el movimiento Browniano (con probabilidad uno) se ve igual: el movimiento Browniano es un fractal.

  La auto-semejanza del movimiento Browniano significa que dado el intervalo $[r, s]$, con $s > r$, sucede que el proceso $W_h^* = W(r+h) - W(r)$, $h \in [0, s-r]$ es un Browniano restringido al intervalo $[0, s-r]$.

  Pero, por supuesto, esta auto-semejanza es ideal para un bloque de construcción: podríamos construir un movimiento Browniano global a partir de muchos segmentos de movimiento Browniano local. Y, podríamos construir procesos aleatorios generales a partir de pequeños segmentos de movimiento Browniano (adecuadamente escalados).

- Cualquier trayectoria tiene una infinidad de ceros en cualquier entorno del instante $t = 0$. Esta situación sucederá cada vez que la partícula regrese a su origen. De hecho, con probabilidad uno, el conjunto

$$S_0(\omega) = \{t \geq 0 \mid X_t(\omega) = 0\}$$

  es un conjunto cerrado, no acotado, de longitud cero y sin puntos aislados. En consecuencia, es un conjunto no numerable.

De estas propiedades se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Con probabilidad uno, las trayectorias del movimiento Browniano no son de variación acotada en ningún intervalo de tiempos. Esto se debe a que toda función de variación acotada en un intervalo es derivable en casi todos los puntos del intervalo (salvo los de un conjunto de longitud cero). Por lo tanto, como cualquier función monótona en un intervalo es de variación acotada, las trayectorias del movimiento Browniano no son monótonas en ningún intervalo (con probabilidad uno).

2. Todo intervalo tiene en su interior al menos un extremo relativo (como cualquier función continua que no es monótona en un intervalo). Por lo tanto, el conjunto de instantes donde tiene extremos relativos es denso en $[0, \infty)$.

El movimiento Browniano es conocido también como proceso de Wiener.

El movimiento Browniano como modelo bursátil

Vamos a analizar la posibilidad de usar el movimiento Browniano como modelo global para el comportamiento bursátil. El movimiento Browniano tiene media cero, mientras que las acciones de una compañía crecen o decrecen (dependiendo de si la economía se encuentra en crecimiento o en expansión) a algún ritmo aunque a largo plazo esperamos que su valor suba, aunque solo sea por la inflación. Podemos añadir una "deriva" al movimiento Browniano para reflejar este hecho. Por ejemplo, el proceso $S_t = W_t + \mu t$, para alguna constante μ que refleje el crecimiento nominal, se llama el movimiento Browniano con deriva.

Y, si parece demasiado ruidoso, o no lo suficientemente ruidoso, podemos escalar el movimiento Browniano: por ejemplo, $S_t = \sigma W_t + \mu t$, para un factor de ruido constante σ.

Podemos ser más aventureros en la utilización del movimiento Browniano. Vamos a tratar de vincular el comportamiento del mercado con la exponencial del movimiento Browniano:

$$S_t = \exp(\sigma W_t + \mu t). \tag{3.3}$$

Este proceso es bien conocido y usualmente llamado movimiento Browniano exponencial con deriva o, a veces, movimiento Browniano geométrico con deriva. No es el único modelo para las cotizaciones y, de hecho, veremos otros más adelante, pero es simple y no tan malo. El movimiento Browniano exponencial puede resultar un componente eficaz en el análisis de este tipo de fenómenos.

Nótese que estamos utilizando exponenciales en el movimiento Browniano ya que el dinero crece exponencialmente con el interés. Y, este modelo, lo que dice es que el valor de las acciones crece exponencialmente con el rendimiento de la bolsa más una variación aleatoria. De hecho, el objetivo de los capítulos siguientes es analizar este asunto.

Capítulo 4

Cálculo estocástico

Comenzamos introduciendo las ecuaciones diferenciales estocásticas. Después, veremos el Cálculo de Itô y la regla del producto. Seguiremos con el cambio de medida (donde trataremos la derivada de Radon - Nikodym) y con el Teorema de Cameron - Martin - Girsanov. Finalizaremos el capítulo con el teorema de representación de martingalas.

Para el desarrollo de este capítulo se ha seguido fundamentalmente el Capítulo 3 de [1].

A lo largo de los siguientes capítulos utilizaremos $\mathcal{F}_t$, que es la σ-álgebra generada por las v.a.'s $\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$.

Notación 4.1 Logaritmo de las cotizaciones. *Sea* $X_t = \log(X_t)$ *el logaritmo de las cotizaciones* S_t.

Si bien el movimiento Browniano no es diferenciable en el sentido del cálculo diferencial ordinario, si que lo es en el del cálculo diferencial estocástico que mostraremos en esta sección.

Como introducción, vamos a comenzar la explicación suponiendo que las reglas del cálculo diferencial ordinario son formalmente aplicables en el contexto que nos ocupa. Por lo tanto, de (3.3) tendríamos una ecuación diferencial estocástica que tendrá un término basado en dt y un término Browniano, basado en W que llamaremos dW_t. Por lo tanto, la ecuación es

$$dX_t = \sigma dW_t + \mu dt. \tag{4.1}$$

Como en el caso diferencial ordinario, tanto la deriva μ como la volatilidad σ pueden depender del tiempo t. Pero también pueden ser aleatorios y depender de los valores que X tomó hasta la misma t. Tales procesos, como X y σ, cuyo valor en el tiempo t puede depender de la historia de $\mathcal{F}_t$, pero no del futuro, son adaptados a la filtración $\mathcal{F}$ del movimiento Browniano W.

Es importante que nos demos cuenta de la dificultad que supone dar sentido a esa ecuación diferencial por el hecho de que W_t es no diferenciable en todo punto. Es decir, tenemos una ecuación diferencial en la que interviene una función que no es diferenciable.

En el capítulo anterior vimos que las trayectorias del movimiento Browniano no son funciones de variación acotada, es decir, su variación total es infinita. Sin embargo, el valor esperado de su variación cuadrática es finita. Se trata de una propiedad útil para comprobar propiedades de la integral estocástica. Por lo tanto, podemos calcular su variación cuadrática:

Sean $a = t_0^n < t_1^n < ... < t_k^n = b$ y consideremos las v.a.'s

$$v_i^n = \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid^2, i = 1, ..., k_n.$$

Por lo tanto, v_i^n es el cuadrado de una $\mathcal{N}(0, t_i^n - t_{i-1}^n)$ y en consecuencia $\mathbb{E}[v_i^n] = t_i^n - t_{i-1}^n$ y, por tanto, si $S_n = \sum_{i=1}^{k_n} \mid X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \mid^2$ se tiene que $\mathbb{E}[S_n] = b - a$.

Vamos a calcular ka esperanza de S_n:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_n - (b-a))^2] &= \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{k_n} v_i^n - (t_i^n - t_{i-1}^n))^2] \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[(v_i^n - (t_i^n - t_{i-1}^n))^2] + 2\sum_{i \neq j} \mathbb{E}[(v_i^n - (t_i^n - t_{i-1}^n)]\mathbb{E}[(v_j^n - (t_j^n - t_{j-1}^n)] \\ &=: T_1 + T_2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde hemos usado que la esperanza del producto de v.a. 's independientes es el producto de las esperanzas.

Trivialmente, $T_2 = 0$. Además, si suponemos que $\delta_n = \text{máx}(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$,

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_i \mathbb{E}(v_i^n)^2 - 2(t_i^n - t_{i-1}^n)\mathbb{E}(v_i^n) + (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\ &= \sum_i 3(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 - \sum_i (t_i^n - t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\ &= 2\sum_i (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \\ &\leq 2\delta_n(b-a) \to 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por lo tanto, se tiene que $S_n \to b - a$ en media cuadrática y, por lo tanto, en probabilidad.

4.1. Ecuaciones diferenciales estocásticas

La definición de ecuación diferencial que sigue no es universal y, en particular, excluye casos discontinuos como los procesos de Poisson. Sin embargo, será bastante adecuada para todos los modelos que encontraremos.

Además, incluye la condición técnica de que σ y μ deben ser procesos $\mathcal{F}$-previsibles, lo que significa que están adaptados a la filtración $\mathcal{F}$ (ver Definición 2.9) y que pueden tener algunas discontinuidades de salto. Esta clase es usada bajo todas las operaciones que se utilizan posteriormente y todos los modelos considerados estarán dentro de ella.

Una ecuación típica es de la forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t,$$

donde W denota el movimiento Browniano. Esta ecuación puede ser interpretada como la forma informal de expresar la siguiente ecuación integral:

$$X_{t+s} - X_t = \int_t^{t+s} \mu(X_u, u)du + \int_t^{t+s} \sigma(X_u, u)dW_u.$$

La ecuación anterior caracteriza el comportamiento del proceso estocástico de tiempo continuo X_t como la suma de una integral ordinaria de Lebesgue y una integral de Itô. Una interpretación de la ecuación diferencial estocástica es que en un pequeño intervalo de tiempo de longitud δ, el proceso estocástico se distribuye siguiendo una normal de media $\mu(X_t, t)\delta$ y varianza $\sigma(X_t, t)^2\delta$ y es independiente del comportamiento anterior del proceso. Esto es así porque los incrementos de un proceso de Wiener son independientes y están distribuidos de forma normal. La función μ se denomina *coeficiente de deriva* mientras que σ se denomina *coeficiente de difusión*. El proceso estocástico X_t se denomina *proceso de difusión.* [19]

La solución de una EDE depende de la medida que se está considerando.

4.2. Cálculo de Itô

La integración intuitiva no nos lleva muy lejos. Necesitamos herramientas para manipular las ecuaciones diferenciales, similares a las del cálculo diferencial: regla de la cadena, regla del producto, fórmula de integración por partes, etc.

¿Hasta dónde podría llevarnos el cálculo diferencial? Supongamos que tuviésemos alguna función f de movimiento Browniano, digamos $f(W_t) = W_t^2$. ¿Podríamos usar una simple regla de la cadena para producir el diferencial estocástico df_t? Bajo las reglas diferenciales usadas, $d(W_t^2)$ será $2W_t dW_t$.

¿Cómo podemos abordar $\int_0^t W_s dW_s$? Consideremos dividir el intervalo de tiempo $[0, t]$ en los intervalos determinados por los puntos $\left\{0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, ..., \frac{(n-1)t}{n}, t\right\}$ para algún n. Entonces, de acuerdo con la definición de integral, podemos aproximar la integral con una suma sobre esta partición, es decir,

$$\int_0^t W_s dW_s \approx \sum_{i=0}^{n-1} W\left(\frac{it}{n}\right)\left(W\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - W\left(\frac{it}{n}\right)\right). \tag{4.4}$$

Ahora, algo empieza a preocuparnos. El término de diferencia dentro del paréntesis es solo el incremento del movimiento Browniano desde un punto de la partición al siguiente. Por la tercera propiedad del movimiento Browniano, ese incremento es independiente del movimiento Browniano hasta ese punto y, en particular, es independiente del factor $W\left(\frac{it}{n}\right)$. Además, el incremento tiene media cero, lo que significa que también lo tiene el producto del incremento y $W\left(\frac{it}{n}\right)$. Entonces, la suma consta de términos con media cero, lo que obliga a tener una media cero.

Pero, W_t^2 tiene media t, debido a la estructura de variación del movimiento Browniano, por lo que suponiendo que podamos cambiar el orden de la esperanza y la integral es correcta por la construcción de la integral, se tiene que $2W_t dW_t$ no puede ser la diferencial de W_t^2, porque su integral ni siquiera tiene la esperanza correcta. El lema de Itô permite calcular esta diferencial (y muchas otras).

Teorema 4.1 Lema de Itô. *Si X es un proceso estocástico que satisface*

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt \tag{4.5}$$

y f es una función determinista, dos veces diferenciable y continua, entonces $Y_t := f(X_t)$ es también un proceso estocástico que satisface

$$dY_t = \left(\sigma_t f^{'}(X_t)\right) dW_t + \left(\mu_t f^{'}(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f^{''}(X_t)\right) dt.$$

Volviendo a nuestro W_t^2, podemos aplicar Îto con $X = W$ y $f(x) = x^2$ y tenemos

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt \text{ o, equivalentemente } W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + t.$$

En particular, si $X = W$, entonces

$$df(W_t) = f^{'}(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f^{''}(W_t)dt.$$

EDEs de procesos

El uso más inmediato del lema de Îto es generar EDEs a partir de una expresión funcional para un proceso. Considere el movimiento Browniano exponencial que se estableció en la Sección 3.2:

$$S_t = \exp(\sigma W_t + \mu t). \tag{4.6}$$

¿Qué EDE sigue S? Sabemos que podemos manejar el término de dentro de los paréntesis pero también tenemos que tomar un diferencial estocástico de la función exponencial. Sin embargo, con la formulación correcta, podemos usar la fórmula de Îto.

Supongamos que $X_t = \sigma W_t + \mu t$ y f la función exponencial $f(x) = e^x$. Entonces, evidentemente $dX_t = \sigma dW_t + \mu dt$ y $S_t = f(X_t)$, una aplicación de la fórmula de Îto nos da:

$$dS_t = S_t\left(\sigma dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt\right). \tag{4.7}$$

Aquí, la cantidad σ se denomina, a veces, la *volatilidad-logarítmica* del proceso, porque es la volatilidad (es como se llama en economía a la desviación típica en este contexto) del proceso $\log S_t$ y que, a menudo, se abrevia solo como volatilidad a pesar de la definición existente de ese término. También, usaremos el nombre *deriva-logarítmica* para la deriva μ del $\log X_t$ que es diferente de la deriva de $\frac{dX_t}{X_t}$ de (4.7).

Procesos de EDEs

Al igual que la diferenciación ordinaria, usar Îto para convertir procesos en EDEs es relativamente sencillo. Y, si eso fuera todo lo que quisiéramos hacer, habría pocos problemas. Pero no lo es, una de las necesidades clave que tenemos es ir en la dirección resolver EDEs.

En general, no podemos. La mayoría de las EDEs son demasiado difíciles de resolver. Pero, al igual que algunas EDOs, existen EDEs interesantes que pueden resolverse usando la fórmula de Itô para comprobar que una suposición inspirada es la solución.

Por tanto, supongamos que estamos interesados en resolver la EDE

$$dX_t = \sigma X_t dW_t, \tag{4.8}$$

donde $\sigma > 0$ es fijo.

Necesitamos una suposición inspirada. Se observa que si tomamos $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$, entonces las EDEs (4.7) y (4.8) coinciden. Por lo tanto, la aplicación de la fórmula de Itô conduce a que:

$$X_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$$

es una solución de (4.8), que es lo que queríamos. Así que hemos encontrado una solución. Las EDEs resolubles son escasas y (4.8) es lo suficientemente especial como para tener un nombre: la exponencial de Doléans del movimiento Browniano.

Volvamos ahora a la EDE (4.6). Coinciden los términos de deriva y volatilidad para esta EDE y la EDE de $\exp(\sigma W_t + \nu t)$ si y solo si tomamos $\nu = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. Entonces nuestra suposición es que

$$X_t = \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right).$$

Y, nuevamente, la fórmula de Îto confirma nuestra intuición.

4.3. La regla del producto

Recordemos que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones diferenciables, la regla del producto (o de Leibnitz) dice que:

$$(fg)' = f'g + fg',$$

y, por lo tanto,

$$(fg)(t) = (fg)(0) + \int_0^t (g(s)df(s) + f(s)dg(s)).$$

¿Esta regla será cierta para el cálculo estocástico? La respuesta es no (ver [2]). De hecho, si $f(t) = g(t) = W_t$, la regla de Leibnitz nos da la relación $d(W_t^2) = 2W_t dW_t$, pero ya hemos visto que la fórmula correcta del cálculo de Itô es $d(W_t^2) = 2W_t dW_t + t$. La regla de la cadena correcta para el cálculo de Itô es la siguiente:

Teorema 4.2 *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ e $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ es el proceso de difusión*

$$dX_{t_i} = \sigma_{t_i} dW_t + \mu_{t_i} dt.$$

Entonces, $\{X_t Y_t\}_{t\geq 0}$ es el proceso de difusión dado por

$$d(X_t Y_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + \sigma_{t_1}\sigma_{t_2} dt.$$

Teniendo en cuenta que la forma correcta de interpretar esta expresión es:

$$X_tY_t = X_t(0)Y_t(0) + \int_0^t Y_t(s)dX_t(s) + \int_0^t X_t(s)dY_t(s) + \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds.$$

No existe una expresión válida para el producto de los procesos generales, pero si que existe para el producto de algunas difusiones.

4.4. Cambio de medida: el Teorema Cameron - Martin - Girsanov

En realidad, no hemos ignorado la importancia de la medida, las trayectorias de W_t no son estrictamente un movimiento Browniano por sí mismas, sino un movimiento Browniano con respecto a alguna medida $\mathbb{P}$: un $\mathbb{P}$-movimiento Browniano. Y, así, nuestra formulación diferencial estocástica describe el comportamiento del proceso X con respecto a la medida $\mathbb{P}$ que a W_t un movimiento Browniano. Pero la teoría desarrollada hasta ahora no nos da idea de cómo W_t y, mucho menos, X_t cambian a medida que cambia la medida.

Da la casualidad de que los movimientos Brownianos cambian de manera fácil y agradable bajo ciertos cambios de medida. Y, así, por extensión a través de sus diferenciales, también lo hacen los procesos estocásticos asociados a EDEs basados en EDOs.

4.4.1. Cambio de medida: la derivada de Radon-Nikodym. Procesos discretos

Para tener una idea intuitiva de los efectos de un cambio de medida vamos a comenzar con los procesos discretos.

Si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son dos probabilidades definidas en (Ω, σ) donde Ω es a lo sumo numerable y $\sigma = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{Q}$ se puede recuperar a partir de $\mathbb{P}$ y los cocientes $\frac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{P}(x)}$ siempre que

$$\text{si } \mathbb{Q}(x) > 0 \text{ entonces } \mathbb{P}(x) > 0.$$

O, de modo equivalente,

$$\text{si } \mathbb{P}(x) = 0 \text{ entonces } \mathbb{Q} = 0. \tag{4.9}$$

Cuando se cumple (4.9), se dice que $\mathbb{Q}$ es *absolutamente continua* respecto de $\mathbb{P}$ y se representa como $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Definición 4.1 Equivalencia de medidas. *Dos medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes si operan en el mismo espacio muestral y coinciden en lo que es posible que suceda. Formalmente, si A es cualquier evento en el espacio muestral, entonces*

$$\mathbb{P}(A) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) > 0.$$

En otras palabras, si A es posible bajo $\mathbb{P}$ entonces es posible bajo $\mathbb{Q}$ y, si A es imposible bajo $\mathbb{P}$, entonces también es imposible bajo $\mathbb{Q}$. Y viceversa.

Solo podemos definir de manera concreta $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ y $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes y solo en los puntos $\mathbb{P}$-posibles y $\mathbb{Q}$-posibles. Pero, por supuesto, si los caminos son $\mathbb{P}$-imposibles y $\mathbb{Q}$ es equivalente a $\mathbb{P}$, entonces también son $\mathbb{Q}$-imposibles.

Por lo tanto, dos medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ deben ser equivalentes antes de que tengan derivadas de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ y $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$.

Teorema 4.3 Teorema de Radon - Nikodym *[18]. Dado un espacio medible (X, Σ) en el que están definidas dos medidas σ-finitas μ y ν, se tiene que, si $\nu \ll \mu$, entonces existe una función Σ-medible $f : X \to [0, \infty)$, tal que para todo conjunto medible $A \subseteq X$,*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Esperanza y $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$

Si bien todavía estamos trabajando con procesos discretos, deberíamos abastecernos de algunos datos sobre las esperanzas y la derivada Radon-Nikodym. Una de las razones para definirlo fue la codificación eficiente que representaba. Todo lo que necesitábamos saber sobre $\mathbb{Q}$ podía extraerse de $\mathbb{P}$ y $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Tenemos que tener en cuenta que $x \to \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(x)$ solo está definida cuando $\mathbb{P}(x) > 0$.

Consideremos entonces el reclamo X que es una v.a., en otras palabras, una correspondencia de caminos a valores. Entonces, la esperanza de X con respecto a $\mathbb{Q}$ está dada por

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \sum_{w \in \Omega} X(\omega)\mathbb{Q}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right].$$

Por atractivo que sea, representa solo el caso simple: $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ se define con un horizonte de tiempo particular en mente: los extremos de los caminos. Especificamos X en este momento y solo queríamos una esperanza incondicionada. En términos formales, el resultado que obtuvimos fue

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X_T\middle|\mathcal{F}_0\right),$$

donde T es el horizonte de tiempo para $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ y X_T se conoce en el tiempo T. ¿Qué pasa con $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t|\mathcal{F}_s)$ para t distinta de T y s distinta de cero? Necesitamos conocer $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ de alguna manera no solo para los extremos de los caminos sino en todas partes: $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ es una v.a., pero nos gustaría un proceso.

Proceso de Radon-Nikodym

Podemos hacer esto dejando que el horizonte temporal varíe y estableciendo ζ_t para ser la derivada de Radon-Nikodym de las probabilidades de los caminos hasta el tiempo t. Es decir, ζ_t es la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ pero solo para caminos truncados en el tiempo t, por lo que solo observa la razón de probabilidades hasta ese momento. Por ejemplo, en el momento 1, los posibles caminos son $\{0, 1\}$ y $\{0, -1\}$ y la derivada ζ_1 toma los valores $\frac{q_1}{p_1}$ y $\frac{(1-q_1)}{(1-p_1)}$ respectivamente. En el tiempo cero, el proceso derivado ζ_0 es constate 1, ya que el único "camino" es el punto $\{0\}$ que tiene probabilidad 1 tanto en $\mathbb{P}$ como en $\mathbb{Q}$. Concretamente, podemos completar ζ_t en nuestro árbol en términos de $p's$ y $q's$ (ver Figura 4.1).

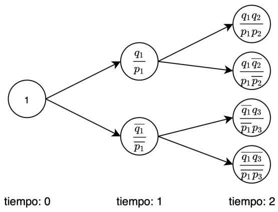

Figura 4.1: Árbol con el proceso ζ_t establecido ($\overline{p_i} = 1 - p_i, \overline{q_i} = 1 - q_i$)

De hecho, podemos suponer ζ_t como la esperanza condicional de la derivada de Radon-Nikodym del horizonte T,

$$\zeta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle| \mathcal{F}_t\right),$$

para cada t menor o igual que el horizonte T.

Podemos ver que la esperanza condicionada de $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ con respecto a $\mathbb{P}$ nos da el proceso de probabilidades condicionadas de la manera correcta. El proceso ζ_t representa exactamente lo que queríamos: una idea de la cantidad de cambio de medida hasta el momento t a lo largo del camino actual. Si quisiésemos saber $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t)$ sería $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t)$. Si queremos calcular $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t|\mathcal{F}_s)$ entonces es sencillo comprobar que para algún $s < t$ la cantidad de cambio de medida del tiempo s al tiempo t es, simplemente, $\frac{\zeta_t}{\zeta_s}$. Es decir, el cambio hasta el tiempo t, con el cambio hasta el tiempo s eliminado. En otras palabras

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t|\mathcal{F}_s) = \zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t|\mathcal{F}_s).$$

Proposición 4.1 Resumen de Radon-Nikodym. *Dadas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ medidas equivalentes y un horizonte de tiempo T, podemos definir una v.a. $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ definida en los $\mathbb{P}$-posibles caminos, tomando valores reales positivos, tal que*

1. *$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X_T)$, para todos los reclamos X_T conocidos en el tiempo T.*

2. *Además, si X_t es un reclamo en el tiempo t, se tiene que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t|\mathcal{F}_s) = \zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t|\mathcal{F}_s)$, $s \leq t$, donde ζ_t es el proceso $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_s)$.*

4.4.2. Cambio de medida: la derivada continua de Radon-Nikodym. Procesos continuos

Para repetir lo anterior para el movimiento Browniano, parece que tenemos que ser capaces de escribir la probabilidad de cada posible camino que el proceso puede tomar, abarcando no solo un espacio de estados continuos sino también una línea también continua. La teoría de la probabilidad resuelve el problema, si nos limitamos a representar las distribuciones marginales para el proceso en cada momento. A pesar de la naturaleza continua del espacio de estados, sabemos que, en ciertas ocasiones, podemos expresar probabilidades en términos de una función de densidad de probabilidad.

Pero ya hemos señalado que las distribuciones marginales no son suficientes. Aunque sabemos que hay otras alternativas, necesitamos nada menos que todas las distribuciones marginales en cada tiempo t condicionada a la historia $\mathcal{F}_s$ para todos los tiempos $s < t$.

Un enfoque es especificar un camino, si no para todos los tiempos antes del horizonte T, al menos para algún conjunto de tiempos arbitrariamente grande pero aún finito $\{t_0 = 0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = T\}$. Consideremos, entonces, el conjunto de caminos que visitan los puntos $\{x_1, ..., x_n\}$ en los instantes $\{t_1, ..., t_n\}$. Si tuviésemos $n = 1$ podríamos usar la función de densidad de la probabilidad de W_{t_1} que es la función de densidad de una normal $\mathcal{N}(0, t_1)$, para evaluar la verosimilitud relativa de los diversos grupos de caminos que se obtienen al variar x también podemos hacerlo para un número finito de t_i. Todo lo que necesitamos es la función de densidad conjunta $f^n_{\mathbb{P}}(x_1, ..., x_n)$ para evaluar la verosimilitud de que el proceso tome valores $\{x_1, ..., x_n\}$ en los momentos $\{t_1, ..., t_n\}$.

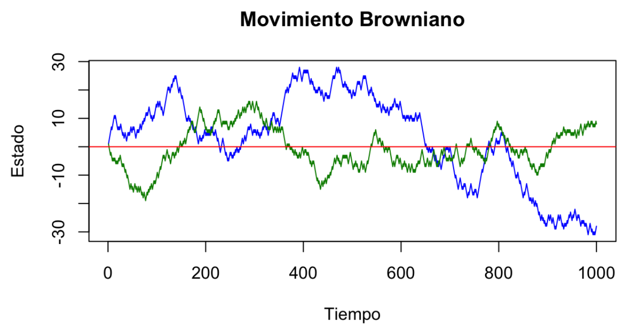

Figura 4.2: Dos movimientos Brownianos que coinciden en ciertos puntos.

Proposición 4.2 Función de densidad conjunta para el movimiento Browniano. *Si tomamos t_0 y x_0 como cero y escribimos $\triangle x_i$ para $x_i - x_{i-1}$ y $\triangle t_i = t_i - t_{i-1}$, entonces la tercera condición del movimiento Browniano implica que*

$$f^n_{\mathbb{P}}(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \triangle t_i}} \exp\left(-\frac{(\triangle x_i)^2}{2 \triangle t_i}\right).$$

Entonces podemos escribir la función de densidad correspondiente a la medida $\mathbb{P}$ para un proceso en un conjunto finito de tiempos. Y en el límite continuo, tenemos un control sobre la medida $\mathbb{P}$ para un proceso continuo.

Proposición 4.3 Versión continua de la derivada de Radon-Nikodym *[2]. Dada una probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ absolutamente continua con respecto a $\mathbb{Q}$ y sea Z la derivada de Radon - Nikodym, entonces se tiene:*

$$\int_\Omega X(\omega) d\tilde{\mathbb{P}}(\omega) = \int_\Omega X(\omega) Z(\omega) d\mathbb{P}(\Omega).$$

Esta derivada de tiempo continuo $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ todavía satisface

1. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t|\mathcal{F}_s) = \zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t|\mathcal{F}_s)$, $s \leq t \leq T$,

donde $\{\zeta_t\}$ con $t \in [0,T]$ es el proceso $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_s)$ y, X_t, es cualquier proceso adaptado a la historia $\mathcal{F}_s$.

Cambios simples de medida: movimiento Browniano más deriva constante

Tenemos la mecánica del cambio de medida, pero todavía no tenemos ni idea de lo que hace el cambio de medida en el mundo continuo. Supongamos, por ejemplo, que tenemos un movimiento $\mathbb{P}$-Browniano W_t. ¿Cómo se ve W_t bajo una medida equivalente $\mathbb{Q}$? ¿Sigue siendo un movimiento Browniano reconocible o es algo muy diferente?

La previsión puede proporcionar un ejemplo simple. Consideremos W_t un movimiento $\mathbb{P}$-Browniano y definamos la probabilidad $\mathbb{Q}$ como una medida equivalente a $\mathbb{P}$ por

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T), \text{ para algún } \gamma \in \mathbb{R}, \tag{4.10}$$

para algún horizonte de tiempo T. ¿Qué aspecto tiene W_t con respecto a $\mathbb{Q}$?

Una forma de comenzar, y es solo un comienzo, es mirar la distribución de W_T bajo $\mathbb{Q}$. Necesitamos encontrar la distribución de probabilidad de W_T con respecto a $\mathbb{Q}$, o algo equivalente. Un truco útil es mirar la Proposición 2.3.

Para calcular $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta W_T))$, podemos usar la primera propiedad del resumen de la derivada de Radon-Nikodym, que nos dice que es lo mismo que la $\mathbb{P}$-esperanza $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\exp(\theta W_T))$. Por otro lado, la Proposición 2.3 nos permite concluir que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T + \theta W_T)) = \exp(-\frac{1}{2}\gamma^2 T + \frac{1}{2}(\theta-\gamma)^2 T),$$

porque W_T es una normal $\mathcal{N}(0,T)$ con respecto a $\mathbb{P}$; y de aquí se tiene que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta W_T)) = \exp(-\theta\gamma T + \frac{1}{2}\theta^2 T), \tag{4.11}$$

que es la función generadora de momentos de una normal $\mathcal{N}(-\gamma T, T)$. Así, la distribución de W_T, bajo $\mathbb{Q}$, también es normal con varianza T pero con media $-\gamma T$.

¿Qué pasa con W_t para t menor que T? La distribución marginal de W_T es lo que esperaríamos si W_t sobre $\mathbb{Q}$ fuera un movimiento Browniano con una deriva constante $-\gamma$. Por supuesto, muchos otros procesos también tienen una distribución normal marginal $\mathcal{N}(-\gamma T, T)$ en el tiempo T, pero sería un resultado elegante si el único efecto de cambiar $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ vía $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T)$ fuera simplemente introducir una deriva de $-\gamma$.

Y así es. El proceso W_t es un movimiento Browniano con respecto a $\mathbb{P}$ y un movimiento Browniano con deriva constante $-\gamma$ bajo $\mathbb{Q}$. Para probarlo, debemos demostrar que $\tilde{W} = W_t + \gamma t$, bajo $\mathbb{Q}$, cumple las tres condiciones de la Definición 3.2.

Obviamente $\tilde{W}_0 = 0$. Además, cálculos análogos a los que permitieron concluir (4.11) permiten obtener que

2′. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(\theta\tilde{W}_t\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right)$;

3′. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\theta\left(\tilde{W}_{t+s}-\tilde{W}_s\right)\right)\Big|\mathcal{F}_s\right]=\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 t\right)$.

Por otro lado, recuerdo que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ es grande cuando W_T es muy negativa y pequeña cuando W_T está más cerca de cero o es positiva. Por lo tanto, los caminos que terminan siendo negativos son más probables bajo $\mathbb{Q}$ (movimiento Browniano con deriva hacia abajo) que bajo $\mathbb{P}$ (movimiento Browniano sin deriva). En consecuencia, los caminos que terminan cerca o por encima de cero son menos probables bajo $\mathbb{Q}$ bajo $\mathbb{P}$.

4.4.3. Cameron-Martin-Girsanov

Así que el cambio de medida determinado por (4.10) cambia un movimiento Browniano por otro con deriva, nada más. Y, por supuesto, la deriva es uno de los elementos de nuestra forma diferencial estocástica de procesos. Todos los procesos que nos interesan se pueden representar como diferenciales formados por cierta cantidad de movimiento Browniano y cierta cantidad de deriva. La correspondencia de los diferenciales estocásticos bajo $\mathbb{P}$ con los diferenciales estocásticos bajo $\mathbb{Q}$ es tan natural como agradable. Esta es la conclusión del siguiente resultado:

Teorema 4.4 Teorema de Cameron-Martin-Girsanov. *Si W_t es un movimiento $\mathbb{P}$-Browniano y γ_t es un proceso $\mathcal{F}$-previsible que satisface $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt)\right]<\infty$, entonces existe una medida $\mathbb{Q}$ tal que*

1. *$\mathbb{Q}$ es equivalente a $\mathbb{P}$.*
2. *$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=\exp(-\int_0^T \gamma_t dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt)$.*
3. *$\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t \gamma_s ds$ es un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano.*

En otras palabras, el Teorema 4.4 permite concluir que W_t es un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano con deriva igual a $-\int_0^t \gamma_s ds$ en el tiempo t. En lo sucesivo, nos referiremos a este resultado como Teorema C-M-G.

Además, el Teorema 4.4 también indica que si queremos convertir un movimiento $\mathbb{P}$-Browniano en un movimiento Browniano con una determinada deriva, entonces hay una $\mathbb{Q}$ que lo hace.

También es cierto el inverso del Teorema 4.4.

Teorema 4.5 Inverso de Cameron-Martin-Girsanov. *Si W_t es un movimiento $\mathbb{P}$-Browniano, y $\mathbb{Q}$ es una medida equivalente a $\mathbb{P}$, entonces existe un proceso $\mathcal{F}$-previsible γ_t tal que*

$$\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t \gamma_s ds$$

es un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano. Esto es, W_t con una deriva $\int_0^t \gamma_s ds$ es movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano. Adicionalmente, la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ con respecto a $\mathbb{P}$ (en el tiempo T) es $\exp(-\int_0^T \gamma_t dW_t-\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt)$.

Teorema de Cameron - Martin - Girsanov y ecuaciones diferenciales estocásticas

El Teorema C-M-G se aplica al movimiento Browniano, pero todos nuestros procesos, en el fondo, funcionan como movimientos Brownianos. Ahora podemos ver las recompensas de nuestro cálculo Browniano al instante: el Teorema C-M-G es en una herramienta poderosa para controlar la deriva de cualquier proceso.

Supongamos que X es un proceso estocástico que satisface 4.5.

Supongamos que queremos averiguar si hay una medida $\mathbb{Q}$ tal que la deriva del proceso X bajo $\mathbb{Q}$ sea $\nu_t dt$ en lugar de $\mu_t dt$.

Como primer paso, dX_t se puede reescribir como

$$dX_t = \sigma_t \left(dW_t + \frac{\mu_t - \nu_t}{\sigma_t} dt \right) + \nu_t dt.$$

Si llamamos $\gamma_t = \frac{\mu_t - \nu_t}{\sigma_t}$ y si γ_t satisface $\mathbb{E}_{\mathbb{P}} \exp(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt) < \infty$ entonces el teorema de C-M-G garantiza, efectivamente, hay una nueva medida $\mathbb{Q}$ tal que $\tilde{W}_t := W_t + \int_0^t \frac{\mu_s - \nu_s}{\sigma_s} ds$ es un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano. Y esto significa que el diferencial de X bajo $\mathbb{Q}$ es

$$dX_t = \sigma_t d\tilde{W}_t + \nu_t dt,$$

donde $\tilde{W}$ es un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano, que le da a X la deriva ν_t que queríamos.

También, podemos establecer límites a los cambios que el cambio a una medida equivalente puede ocasionar en un proceso. Dado que el cambio de medida puede cambiar el movimiento Browniano a un movimiento Browniano con deriva, la volatilidad del proceso debe seguir siendo la misma.

Ejemplos de cambios de medida

1. Sea X_t el proceso Browniano con deriva $\sigma W_t + \mu t$, donde W es un movimiento $\mathbb{P}$-Browniano y σ y μ son constantes. Entonces, usando C-M-G con $\gamma_t = \frac{\mu}{\sigma}$, existe una medida $\mathbb{Q}$, equivalente a $\mathbb{P}$, bajo la cual $\tilde{W}_t = W_t + (\frac{\mu}{\sigma})t$ es un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano.
   Las medidas también dan lugar a distintas esperanzas. Por ejemplo, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_t^2)$ es igual a $\mu^2 t^2 + \sigma^2 t$, pero $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t^2) = \sigma^2 t$.

2. Sea X_t el movimiento Browniano exponencial con EDE

   $$dX_t = X_t(\sigma dW_t + \mu dt),$$

   donde W es el movimiento $\mathbb{P}$-Browniano. ¿Podemos cambiar la medida para que X tenga la nueva EDE

   $$dX_t = X_t(\sigma dW_t + \nu dt),$$

   para alguna constante arbitraria ν?

   Usando C-M-G con $\gamma_t = \frac{\mu - \nu}{\sigma}$, de hecho, existe una medida $\mathbb{Q}$ bajo la cual $\tilde{W}_t = W_t + \frac{(\mu - \nu)t}{\sigma}$ es un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano. Entonces X tiene la EDE

   $$dX_t = X_t(\sigma d\tilde{W}_t + \nu dt),$$

   donde $\tilde{W}$ es un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano.

4.5. Teorema de representación de martingalas

Podemos resolver algunas EDEs con la fórmula de Îto y hemos visto cómo las EDEs cambian cuando su medida cambia. El precio de los derivados resultó ser una esperanza bajo una medida y el cálculo de una esperanza mostró la estrategia bursátil necesaria para justificar este precio.

De acuerdo con la Definición 2.13, una medida de martingala es aquella que la esperanza del valor futuro dado su valor actual y su historia pasada es simplemente su valor actual.

Representación

Según el teorema de representación binomial: si M_t y N_t son ambos $\mathbb{P}$-martingalas, entonces comparten más que solo el nombre, localmente solo pueden diferir por una escala, en particular, por el tamaño de la apertura de cada ramificación. Podríamos representar los cambios en N_t por los cambios de escala en la otra $\mathbb{P}$-martingala no trivial. Así, el N_t puede ser representado por la suma escalada de estos cambios. En el mundo continuo:

Teorema 4.6 Teorema de representación de martingalas. *Supongamos que M_t es un proceso y una $\mathbb{Q}$-martingala, cuya volatilidad es σ_t que satisface que es distinta de cero casi seguro. Si N_t es $\mathbb{Q}$-martingala, entonces existe un proceso $\mathcal{F}$-previsible ϕ tal que $\int_0^T \phi_t^2\sigma_t^2 dt < \infty$ con probabilidad uno y N se puede escribir como*

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s.$$

Además, ϕ es (esencialmente) único.

Esto es virtualmente idéntico al resultado del caso discreto con la suma reemplazada por una integral. Como nos estamos acostumbrando, el paso a un proceso continuo extrae una penalización técnica formal. En este caso, la volatilidad de la $\mathbb{Q}$ martingala debe ser positiva con probabilidad 1. Si existe una medida $\mathbb{Q}$ bajo la cual M_t es una $\mathbb{Q}$-martingala, entonces cualquier otra $\mathbb{Q}$-martingala puede ser representada en términos de M_t. El proceso ϕ_t es simplemente la relación entre sus respectivas volatilidades.

Desviación

En la discusión de las martingalas se incluyó la descripción intuitiva de que una martingala no se desvía hacia arriba o hacia abajo en promedio. Por otro lado, tenemos una definición técnica de la deriva a través de nuestra formulación diferencial estocástica. Nos podemos hacer una pregunta, ¿las difusiones sin término de deriva son siempre martingalas? Y, viceversa, ¿pueden las martingalas ser siempre representadas como $\sigma_t dW_t$ para algún proceso $\mathcal{F}$-previsible de volatilidad σ_t?

Una forma de hacerlo es con el teorema de representación de martingalas. Si una difusión X_t es una $\mathbb{P}$-martingala entonces con W_t un movimiento $\mathbb{P}$-Browniano, tenemos un proceso $\mathcal{F}$-previsible ϕ_t tal que

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s dW_s.$$

Esta es solo la forma integral del incremento $dX_t = \phi_t dW_t$, que no tiene término de deriva. El inverso también es cierto (salvo por una limitación técnica), pero más difícil de demostrar. Como referencia:

Proposición 4.4 Una guía para coleccionistas de martingalas. *Si X es una difusión con volatilidad σ_t (esto es $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$) que satisface la condición técnica $\mathbb{E}[\int_0^T \sigma_s^2 ds)^{\frac{1}{2}}] < \infty$, entonces*

1. *X_t es una martingala.*
2. *$\mu_t = 0$ para todo t.*

Si la condición técnica falla, un proceso sin deriva puede no ser una martingala. Tales procesos se llaman *martingalas locales.*

Martingalas exponenciales

La limitación técnica de la Proposición 4.4 puede ser complicada de comprobar. Por ejemplo, tome la EDE (sin deriva) para un proceso exponencial $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$. La condición (en este caso, $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 X_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$) es difícil de comprobar, pero para estos ejemplos exponenciales específicos, una prueba más práctica es:

Proposición 4.5 Una guía para coleccionistas de martingalas exponenciales. *Si $dX_t = \sigma_t X_t dW_t$, para algún proceso $\mathcal{F}$-previsible σ_t, entonces la condición*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 ds\right)\right) < \infty$$

implica que X es una martingala. Además la solución de la EDE es $X_t = X_0 \exp(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds)$.

Capítulo 5

Valoración de derivados financieros

Comenzamos este capítulo con la construcción de estrategias. Seguiremos aplicando el modelo de Black - Scholes y su aplicación. Después, trataremos tanto las opciones europeas como americanas. Y, finalizaremos con la cobertura en su totalidad y aplicada a Black - Scholes.

Para el desarrollo de este capítulo se ha seguido fundamentalmente el Capítulo 3 de [1].

5.1. Construcción de estrategias

Tenemos las herramientas matemáticas: la fórmula de Itô, el Teorema de C-M-G y el teorema de representación de martingalas. Ahora necesitamos una idea de cómo "engancharlos" en un modelo financiero. En los modelos más simples, el de Black-Scholes, por ejemplo, tendremos un mercado que consistirá en un valor con cotización aleatoria y un bono de caja sin riesgo; y con esto viene la idea de una cartera.

Definición 5.1 Cartera (ϕ, ψ). *Una cartera es un par de procesos ϕ_t y ψ_t que describen respectivamente el número de unidades del valor y el bono que poseemos en el instante t. Ambos procesos pueden tomar valores positivos o negativos (permitiremos la venta a corto ilimitada de la acción o del bono). Los procesos ϕ_t y ψ_t deben ser $\mathcal{F}$-previsible.*

Estrategias de autofinanciación

Con la idea de una cartera viene la idea de una *estrategia*. La descripción $(\phi_t, \psi_t), t \in [0, T]$ es una estrategia dinámica que detalla la cantidad de cada componente que se debe mantener en cada instante. Y, un conjunto particularmente interesante de estrategias o carteras son las que son financieramente autónomas o autofinanciadas.

Una *cartera se autofinancia* si el cambio de su valor depende únicamente del cambio de los precios de los activos. Por lo tanto, no admite retiradas de fondos ni requiere aportaciones de capital después del instante inicial.

Con la cotización de las acciones S_t y la cotización de los bonos B_t, el valor, V_t, de una cartera

(ϕ_t, ψ_t) en el tiempo t es $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$. En el instante t suceden dos cosas: por un lado, la antigua cartera cambia de valor porque S_t y B_t han cambiado y, por otro, la cartera puede ser ajustada para dar una nueva cartera de la estrategia bursátil (ϕ_t, ψ_t). Si el coste del ajuste se corresponde perfectamente con las ganancias o pérdidas de la cartera, entonces no se requiere dinero extra exterior: la cartera se autofinancia.

En un proceso a tiempo discreto se utiliza la ecuación de diferencia

$$\triangle V_i = \phi_i \triangle S_i + \psi_i \triangle B_i.$$

Pero, en el tiempo continuo, obtendremos una ecuación diferencial estocástica:

Proposición 5.1 Cartera autofinanciada. *Si $\{(\phi_t, \psi_t) : t \in [0, T]\}$ es una cartera con precio de acciones S_t y precio de bonos B_t, entonces son equivalentes*

1. *$\{(\phi_t, \psi_t) : t \in [0, T]\}$ se autofinancia.*
2. *$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$, para todo $t \in [0, T]$.*

Ejemplo 5.1 *Supongamos que el precio de las acciones S_t está dado por un movimiento Browniano W_t (por lo tanto, $S_t = W_t$ para todo t) y el precio del bono B_t es constante ($B_t = 1$ para todo t). ¿Qué tipos de carteras se autofinancian?*

1. *Supongamos que $\phi_t = \psi_t = 1$ para todo t. Si mantenemos una unidad de acciones y una unidad de bonos cambios para todo el tiempo, entonces el valor de la cartera ($V_t = W_t + 1$) puede fluctuar, pero todo será debido a la fluctuación de las acciones. Por lo tanto, no se necesita dinero extra para mantener la estrategia (ϕ_t, ψ_t) y tampoco sale dinero, esta cartera (ϕ_t, ψ_t) debería autofinanciarse.*
   Comprobando esto formalmente, $V_t = W_t + 1$ implica que $dV_t = dW_t$ que es lo mismo que $\phi_t dS_t + \psi_t dB_t$, como requeríamos (recordando que $dB_t = 0$).
2. *Supongamos que $\phi_t = 2W_t$ y $\psi_t = -t - W_t^2$. Aquí (ϕ_t, ψ_t) es una cartera, ϕ_t es previsible y el valor de la cartera es $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = W_t^2 - t$. Por la fórmula de Îto, $dV_t = 2W_t dW_t$, que es idéntico a $\phi_t dS_t + \psi_t dB_t$, como se requería.*

Aunque parezca sorprendente, mantener tantas unidades de acciones como el doble de su precio actual, es exactamente compensado por los beneficios de las acciones y la cambiante cantidad de bonos en la cartera: $-(t + W_t^2)$. La estrategia (ϕ_t, ψ_t) podría (en un mercado sin costes por las transacciones) seguirse perfectamente sin financiación adicional.

El último ejemplo muestra que ser autofinanciado no es una propiedad automática de una cartera. La comprobación de Îto funcionó, pero podría haber fallado fácilmente si ψ_t hubiese sido diferente y, en este caso, la estrategia (ϕ_t, ψ_t) habría requerido inyecciones o forzado la salida de flujos de efectivo.

Estrategias bursátiles

Ahora podemos definir estrategias de replicación para un reclamo:

Definición 5.2 Estrategia de replicación. *Es una estrategia de negociación de cartera autofinanciada que cubre un derecho. Supongamos que estamos en un mercado de un bono sin riesgo B, un valor de riesgo S con volatilidad σ_t y un reclamo X sobre eventos en el tiempo T.*

Un estrategia de replicación para X es una cartera autofinanciada (ϕ, ψ) tal que $\int_0^T \sigma_t^2 \phi_t^2 dt < \infty$ y $V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = X$.

Como se explicó en la sección 3.1, si (ϕ, ψ) es una estrategia de replicación de X, el valor de X en cada instante $t \in [0, T]$ debe coincidir con $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$ ya que, en otro caso, el principio de arbitraje produciría ganancias o pérdidas ilimitadas.

5.2. El modelo de Black-Scholes

Tenemos las herramientas y hemos visto el enfoque general para poder comenzar con el modelo de Black-Scholes. Entonces, tomando el modelo bursátil de la sección 3.2, usaremos el Teorema de C-M-G (sección 4.4) y, después, usaremos el teorema de representación de martingalas (sección 4.5) para crear una estrategia de replicación para cada reclamo. La fórmula de Îto facilitará el trabajo.

El modelo

Necesitamos un modelo para el comportamiento bursátil, lo suficientemente simple como para que podamos encontrar estrategias de replicación, pero no tan simple que no podamos creer en él como un modelo del mundo real.

Nuestro mercado consistirá en un bono en efectivo a tasa de interés constante sin riesgo y una acción negociable de riesgo cuya cotización sigue un movimiento Browniano exponencial.

Definición 5.3 Modelo de Black - Scholes básico. *Postulamos la existencia de constantes reales r, μ y σ, con $r, \sigma > 0$, tales que el precio del bono B_t y el precio de la cotización bursátil verifican:*

$$B_t = \exp(rt) \ \text{y} \ S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t), \tag{5.1}$$

donde r es la tasa de interés sin riesgo, σ es la volatilidad bursátil y μ es la deriva bursátil. Adicionalmente supondremos que no hay costes de transacción y que ambos instrumentos son negociables libre e instantáneamente, ya sea en largo o en corto al precio cotizado en cantidades ilimitadas.

Como hemos visto en la sección 3.2, este modelo tiene, al menos, un parecido razonable con el mundo real.

Tasas de interés cero

Si hay un parámetro que arroja una cortina de humo alrededor de la primera ejecución en un análisis del modelo de Black - Scholes, es la tasa de interés r. Los problemas que causa son más tediosos que fatales; como veremos pronto, las herramientas que tenemos son lo suficientemente poderosas para hacerles frente. Pero simplificaremos de momento fijando $r = 0$, con lo que se obtiene que $B_t = 1$ para todo t.

Así que ahora comenzamos. Para un pago arbitrario X, conocido para un horizonte de tiempo T, queremos encontrar una estrategia autofinanciada de replicación $(\phi_t, \psi_t), t \in [0, T]$.

Buscando una estrategia autofinanciada de replicación

Seguiremos un proceso de tres pasos, que describimos a continuación,

Procedimiento 5.1 *Tres pasos para la replicación:*

1. *Encontrar una medida $\mathbb{Q}$ bajo la cual el precio de la acción S_t es una martingala.*
2. *Formar el proceso $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)$.*
3. *Encontrar un proceso previsible ϕ_t, tal que $dE_t = \phi_t dS_t$.*

Más adelante veremos que esto resuelve el problema.

El paso dos no requiere ningún comentario. A continuación, explicamos cómo llevar a cabo los pasos uno y tres.

Paso uno

En primer lugar, aplicamos el Teorema de C-M-G y, en segundo lugar, vamos a ver si S_t es una $\mathbb{Q}$-martingala para una $\mathbb{Q}$ determinada; queremos encontrar una EDE para S_t.

La acción sigue la ecuación (5.1), por lo que el logaritmo del precio de las acciones, $Y_t = \log(S_t)$, sigue un movimiento Browniano con deriva $Y_t = \log S_0 + \sigma W_t + \mu t$. Por lo tanto, la EDE para Y_t es fácil de escribir: $dY_t = \sigma dW_t + \mu dt$. Pero, por supuesto, la fórmula de Îto hace posible escribir la EDE para $S_t = \exp(Y_t)$ como

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)S_t dt.$$

Para que S_t sea una martingala, lo primero que hay que hacer es acabar con la deriva en esta EDE. Si dejamos que γ_t sea un proceso con valor constante $\gamma = \frac{(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}$, entonces el Teorema de C-M-G dice que hay una medida $\mathbb{Q}$ tal que $\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$ es un $\mathbb{Q}$-movimiento Browniano (la condición técnica del Teorema C-M-G se satisface porque γ_t es constante). Sustituyendo en él, la EDE ahora es

$$dS_t = \sigma S_t d\tilde{W}_t.$$

Una vez que hemos anulado la deriva, S_t podría ser una $\mathbb{Q}$-martingala. Como S_t es una exponencial y σ es constante, se cumple la condición de la Proposición 4.4, lo que significa que S_t es una $\mathbb{Q}$-martingala. En consecuencia, $\mathbb{Q}$ es la medida de martingala para S_t.

Paso tres

Dado que hay una $\mathbb{Q}$, bajo la cual tanto E_t como S_t son $\mathbb{Q}$-martingalas, podemos utilizar el teorema de representación de martingalas. En consecuencia, existe un proceso previsible ϕ_t que construye $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)$ a partir de S_t (para usar este teorema, necesitamos comprobar que la volatilidad de S_t siempre es positiva, pero esto es cierto porque la volatilidad es solo σS_t y, tanto σ como S_t, son siempre positivos). Formalmente:

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) + \int_0^t \phi_s dS_s,$$

o, por supuesto, $dE_t = \phi_t dS_t$. Entonces, el teorema de representación de martingalas nos dice un hecho importante: dada una $\mathbb{Q}$ que hace S_t una $\mathbb{Q}$-martingala con volatilidad positiva, se verifica que $dE_t = \phi_t dS_t$ para algún ϕ_t.

Estrategia de replicación

El procedimiento 5.1 nos proporciona los elementos para la construcción de la estrategia de replicación del modo siguiente. Nuestra estrategia es:

- mantener ϕ_t unidades de acciones en el tiempo t y
- mantener $\psi_t = E_t - \phi_t S_t$ unidades del bono en el tiempo t.

Esta cartera, ¿se autofinancia? El valor de la cartera en el momento t es

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = E_t,$$

porque, como hemos señalado, al ser $r = 0$, se tiene que $B_t = 1$. Por lo tanto, $dV_t = dE_t$ y, en consecuencia, $dE_t = \phi_t dS_t$. Como, dB_t es cero, tenemos la condición de autofinanciamiento $dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$.

Dado que el valor terminal de la estrategia V_t es $E_T = X$, tenemos una estrategia de replicación para X, lo que significa que hay un precio de arbitraje para X en todo momento. Específicamente, hay un precio de arbitraje para X en el instante cero: el valor de la cartera (ϕ_0, ψ_0), lo que hace que el precio sea E_0 o $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)$. En otras palabras, el precio del pago X es su valor esperado bajo la medida que hace que el proceso bursátil S_t sea una martingala.

Nos detenemos para observar ciertos detalles a mi entender sorprendentes. El primero es simplemente el hecho de que existen estrategias que replican pagos arbitrarios. Además, es particularmente extraño que, a pesar de la falta de conocimiento no solo del valor final del pago sino también de la distribución de probabilidad, podamos construir su réplica.

La segunda sorpresa, igualmente importante, es que el precio del derivado tiene una expresión simple: el valor esperado del pago. Es fácil olvidarse, que esta no es la esperanza del pago con respecto a la medida real de S_t, sino que es la medida que lo convierte en un movimiento Browniano exponencial con deriva μ y volatilidad σ.

La tercera sorpresa es la simplicidad del proceso S_t bajo su medida de martingala. Si realmente queremos calcular los precios de un pago en particular, tenemos que poder calcular el valor esperado del pago bajo la medida de martingala $\mathbb{Q}$. Como el pago depende de S_t, esto normalmente implica calcular el valor esperado, bajo $\mathbb{Q}$, de alguna función de los valores de S_t hasta $t = T$. Si S_t fuera un proceso complicado en $\mathbb{Q}$, entonces esta tarea también podría ser desagradable. Pero S_t es un movimiento Browniano exponencial bajo $\mathbb{Q}$. Si resolvemos la EDE, entonces

$$S_t = \exp\left(\sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),$$

y encontramos que S_t tiene la misma constante de volatilidad σ y una nueva, pero constante, deriva de $-\frac{1}{2}\sigma^2$. Entonces, si S_t era manejable bajo su medida original, también lo es bajo su medida de martingala.

Tasas de interés distintas de cero

Ahora podemos volver a introducir la tasa de interés r. ¿Qué pasa si r no es cero? No podemos simplemente ignorarlo. Consideremos un contrato a plazo con el pago $S_T - k$ para algún precio k. Recordamos que la k, que le da al contrato a plazo un valor cero en el tiempo cero, es $k = S_0 e^{rT}$. El arbitraje para producir esto es fácil de entender. Pero nuestra regla, cuando r era cero, de simplemente tomar el valor esperado del pago bajo la medida de martingala S_t no puede funcionar. De hecho,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T - S_0 e^{rT}) = S_0(1 - e^{rT}) \neq 0.$$

Incluso descontar el pago no ayudará en este caso. Por tanto, nuestra regla de encontrar una medida que convierta S_t en una martingala solo es válida cuando r es cero. Cuando r no es cero, el crecimiento inexorable del efectivo se interpone en el camino. Así que adivinemos: si el crecimiento del efectivo es molesto, podemos eliminarlo descontándolo todo (es una operación que se lleva a cabo en instituciones bancarias en las que éstas adquieren pagarés o letras de cambio de cuyo valor nominal se descuenta el equivalente a los intereses que generaría el instante entre su fecha de emisión y la fecha de vencimiento). Llamamos B_t^{-1} al proceso de descuento y formamos una acción con descuento $Z_t = B_t^{-1} S_t$ con $B_t^{-1} = \exp(-r(T-t))$ y un pago con descuento $B_T^{-1} X$.

En este mundo con descuentos, se nos podría perdonar por pensar que r es nuevamente cero. Entonces, tal vez nuestro análisis funcione nuevamente. Por supuesto, todo esto es solo una justificación heurística. Si no podemos encontrar una estrategia de replicación, entonces, por atractivo que sea este proceso, será inútil. Centrándonos en nuestro proceso bursátil con descuento Z_t, no es demasiado difícil escribir una EDE

$$dZ_t = Z_t \left(\sigma dW_t + \left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt \right).$$

La ecuación anterior se deduce tomando $L_t = \log(Z_t)$, luego $L_t = \sigma W_t + (\mu - r)\, t$ y, entonces, $dL_t = \sigma dW_t + (\mu - r)\, dt$. La expresión se deduce del lema de Itô.

Ahora vamos a repetir los tres pasos del caso $r = 0$.

Paso uno

Para convertir Z_t en una martingala, podemos utilizar el Teorema de C-M-G como antes, solo que ahora introducimos una deriva de $\frac{(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}$ al movimiento Browninano subyacente. Entonces existe una probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a la probabilidad original $\mathbb{P}$ y un movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano $\tilde{W}_t$ tal que

$$dZ_t = \sigma Z_t d\tilde{W}_t.$$

Por lo tanto, Z_t, bajo $\mathbb{Q}$, no tiene deriva y es una martingala.

Paso dos

Necesitamos un proceso que alcance el pago con descuento y, también, que sea una $\mathbb{Q}$-martingala. Y, como antes, la esperanza condicional lo proporciona: tomaremos $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t)$.

Paso tres

El precio de las acciones con descuento Z_t es una $\mathbb{Q}$-martingala; y también lo es el proceso de esperanza condicional del pago descontado E_t. Así, el teorema de la representación de martingalas garantiza la obtención de un ϕ_t previsible tal que $dE_t = \phi_t dZ_t$.

Queremos alcanzar el pago real con cantidades de acciones reales pero, en nuestro mundo de descuento, podemos alcanzar el pago descontado manteniendo ϕ_t unidades de las acciones descontadas.

¿Qué pasa con la tenencia de los bonos? La tenencia de los bonos en el mundo con descuento es $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$, por lo que podemos probar eso también en el mundo real. Algo que nos puede tranquilizar proviene del hecho de que en el momento T tendremos ϕ_T unidades de acciones y ψ_T unidades del bono que valdrán $\phi_T S_T + \psi_T B_T = B_T E_T = X$.

Entonces, nuestra estrategia de replicación es

- mantener ϕ_t unidades de la acción en el momento t, y
- mantener $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ unidades del bono.

¿Estamos en lo cierto? El valor V_t de la cartera (ϕ_t, ψ_t) viene dado por $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = B_t E_t$. Por lo tanto, podemos escribir dV_t como

$$dV_t = B_t dE_t + E_t dB_t.$$

Pero dE_t es $\phi_t dZ_t$ y, por tanto, $dV_t = \phi_t B_t dZ_t + E_t dB_t$. Como $E_t = \phi_t Z_t + \psi_t$, tenemos

$$dV_t = \phi_t B_t dZ_t + (\phi_t Z_t + \psi_t) dB_t = \phi_t (B_t dZ_t + Z_t dB_t) + \psi_t dB_t.$$

Pero, $d(B_t Z_t) = B_t dZ_t + Z_t dB_t$, y como $S_t = B_t Z_t$, tenemos

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t.$$

Esto es, (ϕ_t, ψ_t) se autofinancia.

Proposición 5.2 Estrategia de autofinanciamiento. *Una estrategia de cartera (ϕ_t, ψ_t) de conservación de ϕ_t acciones de valor S_t y un ψ_t bonos en efectivo no volátil de valor B_t, tiene valor $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$ y valor descontado $E_t = \phi_t Z_t + \psi_t$, donde Z es el proceso de acciones descontadas $Z_t = B_t^{-1} S_t$. Entonces, la estrategia se autofinancia si*

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t,$$

o equivalentemente, si

$$dE_t = \phi_t dZ_t.$$

Como hemos señalado, una estrategia se autofinancia si sus cambios en su valor se deben solo a cambios en los valores de los activos. De manera equivalente: si los cambios en su valor descontado se deben solo a cambios en los valores descontados de los activos.

Como sabemos que $V_T = X$, hemos probado que (ϕ_t, ψ_t) es una estrategia que replica X.

Resumen. Supongamos que tenemos un modelo de Black-Scholes para acciones y bonos continuamente negociables. Entonces, todos los pagos de esperanza finita X, conocidos para algún horizonte temporal T, tienen asociadas estrategias de replicación (ϕ_t, ψ_t). Además, el precio de arbitraje de dicho pago X viene dado por

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X | \mathbb{F}_t), \tag{5.2}$$

donde $\mathbb{Q}$ es la medida de martingala para las acciones con descuento $B_t^{-1} S_t$.

Como hemos señalado, en este caso, $\mathbb{Q}$ no es la medida que convierte el precio de la acción en una martingala, sino la medida que convierte a la acción descontada en una martingala. Y el precio de arbitraje del reclamo es la esperanza bajo $\mathbb{Q}$ del reclamo descontado.

En resumen, cuando las tasas de interés son distintas de cero, las nuevas reglas son solo versiones con precio descontado de las reglas antiguas:

Procedimiento 5.2 *Tres pasos para la replicación (caso con descuento):*

1. *Encontrar una medida $\mathbb{Q}$ bajo la cual el precio descontado de las acciones Z_t sea una martingala.*
2. *Formar el proceso $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_t^{-1} X | \mathcal{F}_t)$.*
3. *Encontrar un proceso previsible ϕ_t, tal que $dE_t = \phi_t dZ_t$.*

5.3. Opciones de compra. Opciones europeas

Siguiendo con el modelo de Black y Scholes, fijaremos el precio de la opción de compra europea. Recordemos que una opción europea es el derecho, pero no la obligación, de comprar una unidad de acciones por una cantidad predeterminada k en una fecha de ejercicio concreta T. En notación formal, nuestro pago es $\max(S_T - k, 0)$; o, en una notación más conveniente, $(S_T - k)^+$.

Primero, deberíamos encontrar V_0, el valor de la estrategia de replicación (y, por lo tanto, de la opción) en el tiempo cero. De acuerdo con (4.1) se tiene que

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((S_T - k)^+),$$

donde $\mathbb{Q}$ es la medida de martingala para $B_t^{-1} S_t$.

Pero, ¿cómo calculamos V_0? Lo primero que hay que notar es la sencillez del reclamo. El valor $(S_T - k)^+$ solo depende del precio de las acciones en un momento determinado, es decir, el tiempo de vencimiento, T. Por tanto, para encontrar la esperanza de este reclamo, solo necesitamos encontrar la distribución de S_T con respecto de $\mathbb{Q}$.

Para ello, podemos mirar el proceso S_t escrito en términos de movimiento $\mathbb{Q}$-Browniano $\tilde{W}_t$. Como $d(\log(S_t)) = \sigma d\tilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt$, entonces denotando el precio de las acciones en el tiempo cero S_0 por s, tenemos que $\log(S_t) = \log(s) + \sigma \tilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ y, así, $S_t = s \exp(\sigma \tilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t)$.

Entonces, la distribución de S_T viene dada por s veces la exponencial de una normal con media

$(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T$ y varianza $\sigma^2 T$. Por tanto, si Z es una normal $\mathcal{N}(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$, podemos escribir S_T como $se^{(Z+rT)}$ y, en consecuencia:

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT}\mathbb{E}((se^{(Z+rT)}-k)^+) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\int_{\log\left(\frac{k}{s}\right)-rT}^{\infty}\left(se^x - ke^{-rT}\right)\exp\left(-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}\right)dx. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Esta integral se puede descomponer mediante un cambio de variable en términos de la función de distribución de una normal estándar. En concreto, si ϕ denota esta función, se tiene que:

Fórmula 5.1 Fórmula de Black-Scholes.

$$V_0 = s\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{s}{k}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\left(\frac{s}{k}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{5.4}$$

Esta es la fórmula de Black-Scholes para fijar el precio de las opciones de compra europeas. Nótese que aunque no se hace explícito en la notación, V_0 depende de s y T.

5.4. El modelo de Black-Scholes en acción

Ejemplo 5.2 *Si una acción tiene una volatilidad constante del* 18 % *y una deriva constante del* 8 %*, con tasas de interés continuamente compuestas constantes al* 6 % *anuales, ¿cuál es el valor de una opción para comprar las acciones por 25 € en dos años, si su precio actual es de 20 €?*

La descripción se ajusta a las condiciones de Black-Scholes. Por lo tanto, usando $s = 20$*,* $k = 25$*,* $\sigma = 0{,}18$*,* $r = 0{,}06$*, y* $t = 2$*, podemos calcular* V_0 *como 1,221 €.*

A continuación vamos a analizar como varía V_0 en 5.4, con cada uno de los parámetros manteniendo fijos el resto.

Dependencia del precio

De acuerdo con (5.4), para valores del precio actual de las acciones mucho menores que k, el valor de la fórmula en sí se vuelve pequeño, lo que significa que es poco probable que la cotización se recupere a tiempo. Por el contrario, para valores de s mucho mayores que k, tiene una probabilidad alta de ejecutarse. En consecuencia, el precio de la opción es aproximadamente $s - ke^{-rT}$, que es el valor actual de una acción a plazo fijado al precio k para el tiempo T.

Dependencia del tiempo

A medida que el tiempo hasta el vencimiento T se reduce, las posibilidades de que el precio se mueva mucho disminuyen y, el valor de la opción, se acerca cada vez más al valor del pago al precio actual, $(s-k)^+$. Sin embargo, para tiempos de más duración, el valor de la opción aumenta.

Dependencia de la volatilidad

En igualdad del resto de condiciones, la opción vale más cuanto más volátil sea la acción. En un extremo, si σ es muy pequeño, la opción se asemeja a un bono sin riesgo y vale $(s - k\exp^{-rT})^+$, que es el valor del futuro correspondiente y, es cero, en caso contrario. En el otro extremo, si σ es muy grande, la opción vale s.

5.5. Otras opciones

A veces, una opción ofrece más posibilidades que simplemente elegir entre dos alternativas en la fecha de vencimiento. Las opciones americanas son el ejemplo más conocido de tales derivados. Estas opciones otorgan el derecho a comprar, digamos, una unidad de determinada acción por un precio de ejercicio k en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento T inclusive, en lugar de solo en esa fecha. El comprador de la opción tiene que tomar decisiones en cada instante para decidir si ejecuta la opción y cuándo.

Obviamente, solo puede utilizar la información de precios disponible hasta el momento presente. El momento (aleatorio) de ejecución se llama *tiempo de parada*. Si lo denotamos por τ el pago correspondiente es

$$(S_\tau - k)^+ \text{ en el tiempo } \tau.$$

Si el emisor de la opción conociera de antemano qué tiempo de parada usará el inversor, el coste en el momento cero de cubrir su pago sería

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r\tau}(S_\tau - k)^+).$$

Como no sabemos qué τ se utilizará, una estrategia razonable es prepararse para el peor caso posible y cobrar el valor máximo (maximizando en todas las posibles estrategias de parada). Por tanto,

$$V_0 = \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rt}(S_t - k)^+).$$

Proposición 5.3 Fijación de precios de derivados con opcionalidad. *En general, si el comprador de la opción tiene un conjunto de opciones A y recibe un pago X_a en el instante T, después de elegir a en A, entonces el emisor de la opción debe cobrar*

$$V_0 = \sup_{a\in A} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}X_a)$$

por ello. Si el comprador no ejerce la opción de manera óptima, entonces la cobertura del emisor producirá un superávit en la fecha T.

5.6. La cobertura en su totalidad

Volviendo a la opción europea, sería útil saber la estrategia de replicación real requerida, es decir, averiguar realmente cuántas acciones se necesitarían en cada momento para construir artificialmente la opción.

La cantidad de acciones, ϕ_t, proviene del teorema de representación de martingalas, pero desafortunadamente, el teorema simplemente establece que ϕ_t existe. Sin embargo, este resultado, en el fondo, nos dice que la razón por la que el pago descontado se puede construir a partir de las acciones descontadas es que, al ser martingalas bajo la misma medida, cada una de ellas solo es una versión a escala de la otra. El proceso ϕ_t es simplemente la proporción de volatilidades. Por tanto, intuitivamente, ϕ_t debería ser algo como la relación entre el cambio en el valor de la opción causado por un movimiento en el precio de las acciones y el cambio en el precio de las acciones utilizado. Y, si tenemos un pago suficientemente restringido donde la única entrada requerida de la filtración para fijar el precio del pago es el precio de las acciones en el momento actual y, además, que la relación funcional implícita entre el valor del pago y el precio actual de las acciones es regular, entonces podríamos esperar que la derivada parcial del valor de la opción con respecto al precio de la acción sea la ϕ_t que buscamos.

Supongamos que el derivado X es una función del valor final del precio de las acciones, de modo que $X = f(S_T)$ para alguna función f. Entonces, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 5.4 Precio de valor final. *Si el derivado X es igual a $f(S_T)$, para alguna f, entonces el valor de X en el tiempo t es igual a $V_t = V(S_t, t)$, donde*

$$V(s,t) = \exp\left(-r\left(T-t\right)\right)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(f\left(S_T\right)|S_t = s\right)$$

Y, entonces, la estrategia de inversión (suponiendo que exista) viene dada por $\phi_t = \frac{\partial V}{\partial s}(S_t, t)$.

Por lo tanto, como habíamos anunciado, la cantidad de acciones en la cartera replicada en cualquier momento es la derivada del precio de la opción con respecto al precio de la acción.

5.7. Cobertura explícita de Black-Scholes

La opción de compra europea es un pago de valor final por lo que, de acuerdo con la Proposición 5.1, la cantidad de acciones requeridas es la derivada de la función de valor con respecto al precio de las acciones. En símbolos,

$$\phi_t = \frac{\partial V}{\partial s}(S_t, T-t) = \Phi\left(\frac{\log\frac{S_t}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Debido a que Φ siempre está entre cero y uno, solo necesitamos tener una *posición larga* acotada en la acción. Además, el valor de la tenencia de bonos en cualquier momento es

$$B_t\psi_t = -ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\log\frac{S_t}{k} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

que, aunque siempre es un préstamo, está acotado por el precio de ejercicio k.

Hay dos posibilidades a medida que se alcanza la madurez. Si el precio de las acciones es menor que el precio de ejercicio, entonces tanto el bono como la tenencia de acciones se reducen a cero, lo que refleja la creciente inutilidad de la opción. Alternativamente, si el precio se mantiene por encima del valor del ejercicio, entonces la tenencia de acciones aumenta a una unidad y el valor del bono es $-k$. Esta combinación equilibra exactamente la demanda ahora segura de una unidad de acción a cambio de una cantidad en efectivo k.

Capítulo 6

Conclusiones

Incluso con un modelo estocástico para la acción, podemos replicar cualquier pago. La cartera replicada tiene un valor dado por el reclamo descontado esperado con respecto a una medida que convierte la acción descontada en una martingala y, por lo tanto, independientemente de la distribución de probabilidad que siguen los pagos. Además, el cambio a la medida de martingala tiene un efecto notablemente simple en el proceso S_t: solo cambia la deriva a otro valor constante. La acción sigue siendo un movimiento Browniano exponencial; incluso la volatilidad σ permanece igual.

Para concluir, hacemos una reflexión sobre los puntos fuertes y las limitaciones de esta metodología (ver [10]).

Claramente, el modelo de Black-Scholes marcó un antes y un después en el mundo financiero, consiguiendo el premio Nobel de Economía en 1997 [23]. Uno de sus puntos fuertes es que permite estimar la volatilidad del mercado de un activo subyacente en función del precio y el tiempo. Otro punto fuerte es la estrategia de autofinanciación cuyo pago final es igual al pago de un valor derivado al vencimiento siempre y cuando el inversor pueda comprar y vender activos de forma continua sin costes por las transacciones.

Por otro lado, este modelo también tiene sus limitaciones debido a que se basa en algunas suposiciones sobre el mercado que no se ajustan del todo a la realidad. Una de ellas es que la volatilidad es constante en el tiempo y esto puede ser cierto a corto pero no a largo plazo. Además, si dejamos a parte la deriva, supone que las acciones se mueven siguiendo una caminata al azar, es decir, que suben o bajan con la misma probabilidad. Más concretamente: supone que una acción con precio claramente por encima de su valor (igualmente por debajo) puede seguir subiendo con la misma probabilidad que bajando. Pero, en realidad, el mercado se mueve siguiendo diferentes factores económicos y, por lo tanto, esto no es realista. Otro punto a destacar en este modelo es que supone que la acción subyacente no paga dividendos, sin embargo, la mayoría de las empresas sí los pagan. Este modelo tampoco tiene en cuenta las comisiones y costes de transacción, que en la vida real sí que suponen un gasto extra. Además, solo permite manejar directamente las opciones de tipo europeo, por lo que no incluye las americanas que pueden ejercerse en cualquier momento y no solo a vencimiento ni otras, más complejas, que también existen en el mercado.

Bibliografía

[1] BAXTER, MARTIN and RENNIE, ANDREW. *Financial Calculus. An introduction to derivative pricing.*; United Kingdom. Cambridge University Press, 1997. ISBN: 0 521 55289 3 hardback.

[2] CALOGERO, SIMONE. *Stochastic Calculus Financial Derivatives and PDE's.* 2019. `http://www.math.chalmers.se/~calogero/Lecture_Notes11.pdf` [Consulta: 11/09/2021]

[3] CUESTA ALBERTOS, JUAN ANTONIO. *Cálculo de Probabilidades. 2º Grado Matemáticas.* Universidad de Cantabria.

[4] Economipedia. Bono. `https://economipedia.com/definiciones/bono.html` [Consulta: 13/09/2021]

[5] Economipedia. Derivado financiero. `https://economipedia.com/definiciones/derivado-financiero.html` [Consulta: 13/09/2021]

[6] Economipedia. Posición corta. `https://economipedia.com/definiciones/posicion-corta.html` [Consulta: 13/09/2021]

[7] Economipedia. Posición larga. `https://economipedia.com/definiciones/posicion-larga.html` [Consulta: 13/09/2021]

[8] Economipedia. Volatilidad. `https://economipedia.com/definiciones/volatilidad.html` [Consulta: 13/09/2021]

[9] NAVIÓN, ALEJANDO. ¿Quién es Louis Bachelier? `https://web.archive.org/web/20110918081947/http://laberintos.itam.mx/files/350.pdf` [Consulta: 25/08/2021]

[10] TENENG, DEAN. Limitations of the Black-Scholes model. *International Research Journal of Finance and Economics.* 99-102. (2011).

[11] VÉLEZ IBARROLA, RICARDO. *Introducción al Movimiento Browniano.* UNED.

[12] Wikipedia. Adapted process. `https://en.wikipedia.org/wiki/Adapted_process` Consulta: 13/09/2021]

[13] Wikipedia. Conditional expectation. `https://en.wikipedia.org/wiki/Conditional_expectation` [Consulta: 10/09/2021]

[14] Wikipedia. Expected value. `https://en.wikipedia.org/wiki/Expected_value` [Consulta: 10/09/2021]

[15] Wikipedia. Filtration (mathematics). https://en.wikipedia.org/wiki/Filtration_(mathematics). [Consulta: 20/08/2021]

[16] Wikipedia. Law of the unconscious statistician. https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_the_unconscious_statistician [Consulta: 11/09/2021]

[17] Wikipedia. Moment-generating function. https://en.wikipedia.org/wiki/Moment-generating_function. [Consulta: 14/09/2021]

[18] Wikipedia. Radon–Nikodym theorem. https://en.wikipedia.org/wiki/RadonNikodym_theorem [Consulta: 14/09/2021]

[19] Wikipedia. Stochastic differential equation. https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_differential_equation [Consulta: 11/09/2021]

[20] Wikipedia. Stochastic process. https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_process#Stochastic_process. [Consulta: 20/08/2021]

[21] Wikipedia. Tree diagram (probability theory). https://en.wikipedia.org/wiki/Tree_diagram_(probability_theory) [Consulta: 08/09/2021]

[22] Wikipedia. σ-algebra. https://en.wikipedia.org/wiki/-algebra#Definition [Consulta: 10/09/2021]

[23] ZORRILLA SALGADOR, JUAN PABLO. El Analista Económico-Financiero. https://elanalistaeconomicofinanciero.blogspot.com/2012/06/robert-c-merton-y-myron-s-scholes.html [Consulta: 05/09/2021]