Facultad de Ciencias

Variedades casi-complejas
Almost complex manifolds

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

Grado en Matemáticas

Autor: Miguel Arbea Gómez

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Septiembre-2021

RESUMEN

Desde la aparición del número imaginario i la relación entre los "mundos" complejo y real es muy estudiada. Llegando a encontrar equivalencias entre ambos que facilitaron el estudio de los complejos a partir de la información sobre los reales que ya se tenía y, al contrario, también el estudio de los complejos permitió obtener resultados acerca de los reales.

Esta relación que se da en espacios vectoriales no es igual en variedades, donde no siempre es posible tratar variedades complejas dejando los números imaginarios a un lado.

En este trabajo de fin de grado se pretenden estudiar esas equivalencias, tanto en espacios vectoriales como en variedades, para determinar que variedades permiten esa relación con las reales. Asimismo, se clasificaran dos tipos de variedades casi-complejas e función de sus métricas.

Palabras clave: Estructuras complejas, variedades casi-complejas, variedades casi-hermíticas, variedades casi-Norden

ABSTRACT

Since the appearance of the imaginary number i the relation between the complex and real "worlds" has been studied a lot. Finding equivalences between both that facilitated the study of the complex from the information about the reals that we already had and, on the other hand, also the study of the complex allowed us to obtain results about the reals.

The relation that occurs in vector spaces is not the same in manifolds, where it is not always possible to treat complex manifolds leaving imaginary numbers aside.

This final degree work aims to study these equivalences, both in vector spaces and in manifolds, in order to determine which manifolds allow this relation with the reals. Also, two types of almost-complex varieties will be classified according to their metrics.

Key words: Complex structure, almost-complex manifolds, almost-hermitian manifolds, almost-Norden manifolds

Índice

Introducción

Los números reales y las diferentes estructuras que forman son muy conocidas y estudiadas, y por ello se intenta relacionar todo el conocimiento que proporcionan con otras estructuras que no son reales y ver si se puede aprovechar. En este caso, nos centraremos en las relaciones entre los reales y los complejos para saber cuando es posible aprovechar este conocimiento y cuando solo una parte de él.
El "mundo" complejo permite en muchas ocasiones trabajar en él de un modo equivalente sin necesidad de usar los números imaginarios. Esta idea funciona perfectamente para $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ y para espacios vectoriales complejos.

Operar números complejos a partir de unas estructuras reales tan conocidas como son las matrices 2×2, con la condición de ser de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, mediante un isomorfismo con $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longleftrightarrow & C \subset M(\mathbb{R}, 2 \times 2) \\ a + ib & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}$$

Este paso facilita mucho la comprensión y el estudio de los números complejos al haber estudiado las matrices reales desde pequeños.

O para comprobar si una función compleja es holomorfa, basta con "separar" dicha función en dos reales que cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = a + ib & \longmapsto & f(z) = u(a,b) + iv(a,b) \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \longmapsto & (u(a,b), v(a,b)) \end{array}$$

Siendo posible comprobar si una función es holomorfa olvidándose por completo de los números imaginarios.

Igualmente, para los espacios vectoriales complejos de dimensión n se puede establecer una biyección con espacios vectoriales reales de dimensión $2n$, con la ayuda de un endomorfismo J, que permite "trasladar" la multiplicación por el número imaginario i al espacio vectorial real, donde obviamente no se encuentra este número, por eso J recibe en nombre de estructura compleja.
Vemos entonces que los espacios vectoriales complejos y los espacios vectoriales reales dotados de una estructura compleja están íntimamente relacionados, pudiendo "olvidarnos" de los complejo.

Esta relación plantea la pregunta ¿Se mantiene esta equivalencia entre ambos puntos de vista más allá de los espacios vectoriales?¿Qué ocurre con las variedades?
La respuesta es no totalmente. A pesar de que funcione para espacios vectoriales, en variedades no existe tal relación. El conjunto de las variedades complejas, aquellas variedades que tienen atlas sobre $\mathbb{C}^n$ con cambios de carta holomorfos, y el conjunto de variedades reales con atlas sobre $\mathbb{R}^{2n}$ dotadas de una estructura casi-compleja J, no son iguales, de ahí que a dichas variedades reales se las denomine como casi-complejas. Si bien es cierto que toda variedad compleja es a su vez casi-compleja, la implicación recíproca no es cierta siempre, solo bajo la condición de tener la estructura casi-compleja J torsión nula.
En particular, se tiene la siguiente relación entre dicho conjuntos y las variedades reales:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Variedades}\\ \text{complejas}\end{array}\right\} \underset{\neq}{\subseteq} \left\{\begin{array}{c}\text{Variedades}\\ \text{casi-complejas}\end{array}\right\} \underset{\neq}{\subseteq} \left\{\begin{array}{c}\text{Variedades}\\ \text{reales}\end{array}\right\}$$

Con el objetivo de estudiar estas relaciones entre conjuntos, parte del primer capitulo contiene una breve introducción sobre los número complejos con información necesaria para la comprensión de algunos términos. El resto del capítulo se divide en dos partes, el desarrollo de las estructuras complejas en espacios vectoriales y la presentación de dos métricas sobre espacios vectoriales reales dotados de estructura compleja.

La generalización de las estructuras casi-complejas sobre variedades junto con el desarrollo de sus propiedades en relación con las variedades diferenciables se extiende a lo largo del segundo capítulo, en el cual se encuentra también un apartado dedicado a la relación entre las variedades casi-complejas y las complejas.

Finalmente, en el último capítulo se diferencian dos tipos de variedades casi-complejas en función de las dos métricas expuestas en el primer capítulo de las métricas.

A lo largo de el documento, se tratan conceptos de varias ramas, como Álgebra lineal, Variable compleja y Variedades diferenciales.

Capítulo 1

Resultados de Álgebra Lineal Compleja.

Para la realización de este trabajo vamos a introducir algunas nociones sobre los números complejos, [1], además de Álgebra Lineal compleja, que serán necesarias posteriormente. En particular, la generalización de los resultados de la Geometría Euclídea a espacios vectoriales sobre los número complejos. Estos conceptos y resultados has sido extraídos de [2], [3], [6], [8] y [10].

1.1. Números Complejos

Con el estudio de las ecuaciones polinómicas surge la necesidad de introducir un nuevo número, la unidad imaginaria i, definido por $i^2 = -1$ y con ella, los objetos de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$, forman un cuerpo $\mathbb{C}$, el de los números complejos, con las operaciones siguientes:

- **Suma**: Dados dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, la suma de ambos se define como $(a + c) + (b + d)i$.

- **Producto**: Dados dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, su producto se define como $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

El hecho de que los elementos del cuerpo de los complejos se puedan expresar de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ establece una clara biyección con $\mathbb{R}^2$, permitiendo su representación gráfica,

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a + bi &\longmapsto (a, b) \end{aligned}$$

A pesar de la utilidad de la anterior biyección, gracias a que permite la visualización gráfica de las operaciones suma, producto, raíces..., existen otras representaciones, como relacionar el cuerpo $\mathbb{C}$ con el conjunto de matrices 2×2 con coeficientes reales de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con las operaciones de suma y producto de matrices.

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & a+bi & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta aplicación es un homomorfismo respecto de la suma y el producto en $\mathbb{C}$:

- Las imágenes del elemento neutro, 0, y de la unidad, 1, de $\mathbb{C}$ son la matriz nula y la identidad respectivamente.

- **Respecto de la suma**: Para dos complejos $a+bi$ y $c+di$,

$$\begin{aligned} \varphi((a+bi)+(c+di)) &= \varphi((a+c)+(b+d)i) = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \varphi(a+bi) + \varphi(c+di) \end{aligned}$$

- **Respecto del producto**: Para dos complejos $a+bi$ y $c+di$,

$$\begin{aligned} \varphi((a+bi)(c+di)) &= \varphi((ac-bd)+(ad+bc)i) = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \varphi(a+bi)\varphi(c+di) \end{aligned}$$

Las equivalencias reales de los complejos permiten aprovechar los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de $\mathbb{R}^2$ ya conocidos.

Definición 1.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es* ***derivable en*** *$z_0 \in \Omega$ si existe el límite $\lim\limits_{w\to 0, w\in\mathbb{C}} \dfrac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w}$ donde la variable w tiende a 0. En caso de existir, este será el valor de la derivada $f'(z_0)$.*

Definición 1.2. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja derivable en todo punto z_0 de Ω, entonces a f se le llama* ***función holomorfa****.*

En algunos casos puede ser complicado comprobar la derivabilidad en todo punto de una función compleja por ello se pueden estudiar como funciones reales que cumplan ciertas condiciones.

Teorema 1.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con Ω abierto, dada por $f(z) = f(a+bi) = u(a,b) + v(a,b)i$ donde u y v,la parte real e imaginaria respectivamente, son funciones de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Entonces son equivalentes:*

1. *f es derivable en $z_0 = a + bi \in \Omega$.*

2. *u y v son diferenciables como funciones reales en (a,b) y además cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en (a,b):*

$$\begin{cases} u_x & = v_y \\ u_y & = -v_x \end{cases}$$

Además, el valor de la derivada en z_0 es $f'(z_0) = u_x(a,b) + v_x(a,b)i$.

Demostración. Suponemos que $f'(z_0)$ existe. Por la definición 1.1, el valor del límite que define la derivada de z debería ser el mismo acercándose por el eje real o por el imaginario:

$$\lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(a+bi+t) - f(a+bi)}{t} = \lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(a+bi+ti) - f(a+bi)}{ti}$$

Escribimos f en función de u y v:

$$\lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}} \frac{u(a+t,b) + v(a+t,b)i - u(a,b) - v(a,b)i}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0, t \in \mathbb{R}} \frac{u(a,b+t) + v(a,b+t)i - u(a,b) - v(a,b)i}{ti}$$

Separando en los numeradores las expresiones que multiplican a i de las que no, vemos que son las expresiones de las derivadas parciales de u y v,es decir,

$$u_x(a,b) + v_x(a,b)i = \frac{1}{i}(u_y(a,b) + v_y(a,b)i) = v_y(a,b) - u_y(a,b)i$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias, vemos que si f es derivable en $z_0 = a + bi$ entonces se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en (a,b).

Recíprocamente, suponemos que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en (a,b). Por el Teorema de Taylor en $\mathbb{R}^2$ tenemos que

$$u(a+c, b+d) = u(a,b) + u_x(a,b)c + u_y(a,b)d + E_u(c,d)$$

$$v(a+c, b+d) = v(a,b) + v_x(a,b)c + v_y(a,b)d + E_v(c,d)$$

donde E_u y E_v son las funciones de los errores de los polinomios de Taylor, y tienden a cero al dividirlas por $\|(c,d)\|$ si esta norma tiende a cero.

Tomando $z_0 = a + bi$ y $w = c + di$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(z_0+w) - f(z_0) &= f((a+c)+(b+d)i) - f(a+bi) \\ &= u_x(a,b)c + u_y(a,b)d + E_u(c,d) + (v_x(a,b)c + v_y(a,b)d + E_v(c,d))i \\ &= u_x(a,b)c + u_y(a,b)d + (v_x(a,b)c + v_y(a,b)d)i + \hat{E}(c,d) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{|w|\to 0} \frac{f(z_0+w) - f(z_0)}{w} &= \lim_{|c+di|\to 0} \frac{u_x(a,b)c + u_y(a,b)d + (v_x(a,b)c + v_y(a,b)d)i}{c+di} \\ &= \lim_{|c+di|\to 0} \frac{u_x(a,b)c - v_x(a,b)d + (v_x(a,b)c + u_x(a,b)d)i}{c+di} \\ &= \lim_{|c+di|\to 0} \frac{u_x(a,b)(c+di) + v_x(a,b)(-d+ci)}{c+di} \\ &= \lim_{|c+di|\to 0} u_x(a,b) + v_x(a,b)i = u_x(a,b) + v_x(a,b)i \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se hace uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann que se cumplen por hipótesis. Luego la derivada de f en z_0 existe y es $f'(z_0) = u_x(a,b) + v_x(a,b)i$. $\square$

Es decir, si calculamos la matriz jacobiana de f como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ resulta

$$J_f = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

es una matriz de la representación real de los complejos.

1.2. Estructura compleja en un espacio vectorial

Estos resultados se aplicarán para los espacios complejos tangentes de las variedades de capítulos posteriores.

Una **estructura compleja** en un espacio vectorial real V es un endomorfismo J de V tal que $J^2 = -Id$. Un espacio vectorial real V con dicha estructura J admite una estructura de **espacio vectorial complejo**, definiendo el producto por un escalar complejo como

$$(a+ib)X = aX + bJX, \qquad X \in V,\ a,b \in \mathbb{R}$$

Por ello la dimensión real de V debe ser par, y la dimensión compleja de V la mitad de la dimensión real.

Reciprocamente, dado un espacio vectorial complejo W de dimensión n, sea J el endomorfismo lineal de W definido por

$$JX = iX, \qquad X \in W$$

Si se considera W como espacio vectorial real de dimensión $2n$, entonces J es una estructura compleja en W.

En este capitulo, V denota un espacio vectorial real.

Proposición 1.2. *Sea J una estructura compleja sobre un V de dimensión $2n$, dados elementos $X_1, ..., X_n$ que forman una base de V sobre $\mathbb{C}$ entonces $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ es una base de V sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Si vemos V como un espacio vectorial complejo, dada una base $\{X_1, ..., X_n\}$ de este, por definición de base y ser J un endomorfismo se tiene que $\{JX_1, ..., JX_n\}$ son linealmente independientes y generan un subespacio de V sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n, al igual que $\{X_1, ..., X_n\}$ genera un subespacio de V sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n, basta ver la union de ambos es linealmente independiente y por lo tanto forma una $\mathbb{R}$-base de V.
Sean $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n + \beta_1 J X_1 + \cdots + \beta_n J X_n \\ &= \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n + \beta_1 i X_1 + \cdots + \beta_n i X_n \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 i) X_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n i) X_n \end{aligned}$$

Como $\{X_1, ..., X_n\}$ es una $\mathbb{C}$-base se tiene que $\alpha_1 + \beta_1 i = \cdots = \alpha_n + \beta_n i = 0$, luego $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$, probando así que son linealmente independientes. $\square$

Dado V de dimensión n, denotamos $V^{\mathbb{C}}$ como la **complexificación de** V, es decir, $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} = V + iV$. En particular se tiene que V es un subespacio de $V^{\mathbb{C}}$.

Si V está dotado de una estructura compleja J, su extensión $\mathbb{C}$-lineal en $V^{\mathbb{C}}$ es

$$J^{\mathbb{C}}(Z) = J^{\mathbb{C}}(X_1 + iX_2) = JX_1 + iJX_2$$

Donde $Z \in V^{\mathbb{C}}$ y $X_1, X_2 \in V$.

Dicha extensión de J en $V^{\mathbb{C}}$ sigue satisfaciendo $(J^{\mathbb{C}})^2 = -Id$, de donde sus autovalores son i y $-i$, con lo que podemos denotar

$$\begin{aligned} V^{(1,0)} &= \{Z \in V^{\mathbb{C}} : J^{\mathbb{C}}Z = iZ\} \\ V^{(0,1)} &= \{Z \in V^{\mathbb{C}} : J^{\mathbb{C}}Z = -iZ\} \end{aligned}$$

Proposición 1.3. *Sea J una estructura compleja sobre V, se tienen ciertas propiedades relacionadas con la complexificación:*

I. $V^{(1,0)} = \{X - iJX : X \in V\}$

II. $V^{(0,1)} = \{X + iJX : X \in V\}$.

III. $V^c = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

IV. *El conjugado complejo en $V^{\mathbb{C}}$ define un isomorfismo real entre $V^{(1,0)}$ y $V^{(0,1)}$.*

Demostración. Para I, sea $Z = X - iJX$ con $X \in V$ un vector de $V^{\mathbb{C}}$. Veamos que Z es un elemento de $V^{(1,0)}$, es decir que $J^{\mathbb{C}}Z = iZ$,

$$J^{\mathbb{C}}(X - iJX) = JX - iJ^2X = JX + iX = i(X - iJX)$$

Para el recíproco, sea $X + iY$ un elemento de $V^{(1,0)}$. Entonces las expresiones

$$J^{\mathbb{C}}(X + iY) = JX + iJY, \qquad i(X + iY) = iX - Y$$

coinciden, igualándolas obtenemos $Y = -JX$ y se tiene que el vector $X+iY = X-iJX$. El proceso de la prueba de II es el mismo.
Para III, tenemos que todo $Z \in V^{\mathbb{C}}$ puede expresarse como suma de un elemento de $V^{(1,0)}$ con otro de $V^{(0,1)}$ de la siguiente forma $Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ)$.
Para IV, veamos que el conjugado complejo $Z = X + iY \mapsto \overline{Z} = X - iY$ con $X, Y \in V$ es biyectiva y lineal (respecto de los reales). Para probar la linealidad,

$$\begin{aligned} \overline{Z_1 + Z_2} &= \overline{X_1 + iY_1 + X_2 + iY_2} = \overline{(X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2)} = \\ &= (X_1 + X_2) - i(Y_1 + Y_2) = X_1 - iY_1 + X_2 - iY_2 = \\ &= \overline{X_1 + iY_1} + \overline{X_2 + iY_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} \\ \overline{\lambda Z} &= \overline{\lambda(X + iY)} = \overline{\lambda X + i\lambda Y} = \lambda X - i\lambda Y = \\ &= \lambda(X - iY) = \lambda\overline{(X + iY)} = \lambda\overline{Z} \end{aligned}$$

Para ver que es biyectiva, primero probamos que es inyectiva por reducción a lo absurdo. Supongamos que no lo es y sean Z_1, Z_2 dos vectores distintos de $V^{\mathbb{C}}$ tales que $\overline{Z_1} = \overline{Z_2}$. Entonces,

$$\overline{X_1 + iY_1} = X_1 - iY_1 = X_2 - iY_2 = \overline{X_2 + iY_2}$$

Esto implica que $Y_1 = Y_2$ y $X_1 = X_2$ que contradice la hipótesis $Z_1 \neq Z_2$. Luego es inyectiva.
Es sencillo ver que para todo $Z = X + iY$ existe un $Z' = X - iY$ tal que $\overline{Z'} = Z$, de hecho es $\overline{Z}$. Luego es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. Además, se tiene que para todo $Z = X - iJX \in V^{(1,0)}$, $\overline{Z} = X + iJX \in V^{(0,1)}$ y viceversa. □

Sea $\mathbb{C}^n$ el espacio vectorial complejo de n-tuplas de números complejos $(z^1, ..., z^n)$ tales que $z^k = x^k + iy^k$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{C}^n$ se identifica con el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{2n}$ de $2n$-tuplas de números reales $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$. La estructura compleja de $\mathbb{R}^{2n}$ inducida por la aplicación que manda $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$ a $(-y^1, ..., -y^n, x^1, ..., x^n)$ se llama **estructura compleja canónica** y viene dada por la matriz

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad de dimensión n.

Proposición 1.4. *Sean J y J' estructuras complejas sobre los espacios vectoriales reales V y V' respectivamente. Si se considera V y V' como espacios vectoriales complejos, entonces la aplicación $\mathbb{R}$-lineal $f : V \to V'$ es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $J' \circ f = f \circ J$.*

Demostración. Si la aplicación f es $\mathbb{C}$-lineal, se cumple $f(zX) = zf(X)$ donde $z \in \mathbb{C}$. En particular para $z = i$ se tiene $f(iX) = if(X)$, y por ser los endomorfismos J y J' la multiplicación por i al considerar V y V' como espacios vectoriales complejos, es decir $JX = iX$ y $J'Y = iY$ para $X \in V$ e $Y \in V'$, obtenemos que

$$(f \circ J)(X) = f(JX) = f(iX) = if(X) = J'f(X) = (J' \circ f)(X)$$

Para la otra implicación, considerando otra vez J y J' como la multiplicación por i en sus respectivos espacios vectoriales, se cumple $if(X) = f(iX)$ para todo $X \in V$. Además, por ser f una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, $f(X+Y) = f(X)+f(Y)$ y $f(aX) = af(X)$

para todo $a \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in V$. A partir de ambas propiedades,

$$\begin{aligned} f(zX) &= f((a+ib)X) = f(aX+ibX) = f(aX) + f(ibX) \\ &= f(aX) + if(bX) = af(X) + ibf(X) = (a+ib)f(X) \\ &= zf(X), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall X \in V \end{aligned}$$

Cumpliendo así la propiedad necesaria para que f sea una aplicación $\mathbb{C}$-lineal. □

Proposición 1.5. *Sea J una estructura compleja sobre V. Entonces un subespacio W de V es invariante por J si y solo si W es un subespacio complejo de V cuando es considerado como espacio vectorial complejo.*

Demostración. Si W es un subespacio complejo de V, veamos que es invariante por J. Por ser subespacio complejo, para todo $X \in W$ y $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $zX \in W$, en particular para $z = i$. Como $JX = iX$, tenemos que para todo $X \in W$, $iX = JX \in W$. Cumpliendo la condición de ser invariante por J.

Para la otra implicación, si W es un subespacio real invariante por J veamos que es subespacio complejo. Para ello vasta comprobar que $zX \in W$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $X \in W$.
Por ser W invariante y J la multiplicación por i, se cumple que $JX = iX \in W$ para todo $X \in W$. A partir de esto y las propiedad de los subespacios reales, dados un vector X cualquiera de W y dos números reales a y b, se tiene que tanto aX como bX pertenecen a W y además $ibX \in W$ por estar $bX \in W$. La suma de ambos vectores pertenece a W por ser este subespacio real, por lo tanto $aX + ibX = (a+ib)X \in W$. Al ser a y b números reales cualesquiera, $a + ib = z \in \mathbb{C}$ es cualquier número complejo, finalizando así la prueba. □

Sea V un espacio vectorial real y $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ su espacio dual. Una estructura compleja J en V induce otra estructura compleja en V^*, denotada como J^* tal que $(J^*X^*)(Y) = X^*(JY)$ para $X^* \in V^*$ y $Y \in V$. Además, la descomposición de la complexificación $V^{\mathbb{C}}$ en suma directa de dos subespacios induce la separación de la complexificación del dual $(V^*)^{\mathbb{C}} = (V^{\mathbb{C}})^* = \mathrm{Hom}(V^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$, cuyos elementos ω son de la forma $\omega_1 + i\omega_2$ con $\omega_1, \omega_2 \in V^*$, en suma directa de dos subespacios $(V^*)^{\mathbb{C}} =$

$V_{(1,0)} \oplus V_{(0,1)}$, donde

$$\begin{array}{rcl} V_{(1,0)} & = & \{\omega \in (V^{\mathbb{C}})^* : \omega(Y) = 0 \text{ si } Y \in V^{(0,1)}\} \\ V_{(0,1)} & = & \{\omega \in (V^{\mathbb{C}})^* : \omega(Y) = 0 \text{ si } Y \in V^{(1,0)}\} \end{array}$$

1.3. Formas Sesquilineales y Hermíticas.

Definición 1.3. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre los números complejos $\mathbb{C}$, una función $f : V \to W$ es* ***semilineal*** *si*

$$\begin{array}{rcl} f(X+Y) & = & f(X) + f(Y) \\ f(\lambda X) & = & \overline{\lambda} f(X) \end{array}$$

para todo $X, Y \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Las funciones semilineales permiten definir las siguientes formas.

Definición 1.4. *Sea V un espacio vectorial sobre los números complejos $\mathbb{C}$, una función $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ es una* ***forma sesquilineal*** *si es lineal para el primer argumento y semilineal para el segundo, es decir*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(X_1 + X_2, Y) & = & \varphi(X_1, Y) + \varphi(X_2, Y), \\ \varphi(X, Y_1 + Y_2) & = & \varphi(X, Y_1) + \varphi(X, Y_2), \\ \varphi(\lambda X, Y) & = & \lambda \varphi(X, Y) \\ \varphi(X, \mu Y) & = & \overline{\mu} \varphi(X, Y) \end{array}$$

para todo $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in V$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Una función $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ es una ***forma hermítica*** *si es sesquilineal y $\varphi(X, Y) = \overline{\varphi(Y, X)}$*

Definición 1.5. *Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal, se llama* ***forma cuadrática asociada a*** *φ a la función $\Phi : V \to \mathbb{C}$ definida como $\Phi(X) = \varphi(X, X)$ para todo $X \in V$.*
Obsérvese que $\Phi(X) = \varphi(X, X) = \overline{\varphi(X, X)} \in \mathbb{R}$ si φ es hermítica.

Una forma cuadrática determina unívocamente una forma sesquilineal.

Definición 1.6. *Sea V un espacio vectorial sobre los números complejos $\mathbb{C}$, la forma hermítica $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ es* ***positiva*** *si $\Phi(X) \geq 0$ para todo $X \in V$ y* ***definida positiva*** *si $\Phi(X) > 0$ para todo $X \neq 0$ (Es posible establecer una relación de orden por ser la imagen de la forma cuadrática Φ un número real).*

1.4. Espacios Hermíticos.

Comenzamos definiendo los espacios pre-Hilbert y Hermíticos, aunque nos centraremos únicamente en los Hermíticos.

Definición 1.7. *Un par (V, φ), donde V es un espacio vectorial sobre los números complejos $\mathbb{C}$ y φ una forma hermítica en V, se llama **espacio pre-Hilbert** si φ es positiva y **espacio Hermítico** si φ es definida positiva.*

Las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Minkowski se pueden extender tanto a espacios pre-Hilbert como a Hermíticos.

Proposición 1.6. *Sea (V, φ) un espacio Hermítico con su forma cuadrática asociada Φ. Para todo $X, Y \in V$, se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|\varphi(X,Y)| \leq \sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)}.$$

También se tiene la desigualdad de Minkowski

$$\sqrt{\Phi(X+Y)} \leq \sqrt{\Phi(X)} + \sqrt{\Phi(Y)}.$$

Además, se dan ambas igualdades si y solo si X e Y son linealmente dependientes.

Demostración. Cauchy-Schwarz. Para todo $X, Y \in V$ y todo $\mu \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{gathered}\varphi(X+\mu Y, X+\mu Y) = \varphi(X,X) + \overline{\mu}\varphi(X,Y) + \mu\varphi(Y,X) + |\mu|^2\varphi(Y,Y) = \\ \varphi(X,X) + \overline{\mu}\varphi(X,Y) + \mu\overline{\varphi(X,Y)} + |\mu|^2\varphi(Y,Y) = \\ \varphi(X,X) + 2\Re(\overline{\mu}\varphi(X,Y)) + |\mu|^2\varphi(Y,Y)\end{gathered}$$

Expresando $\mu = \rho e^{i\theta}$ en su forma polar, se define la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $F(t) = \Phi(X + te^{i\theta}Y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde

$$F(t) = \Phi(X) + 2t|\varphi(X,Y)| + t^2\Phi(Y).$$

Como φ es definida positiva, se cumple que $F(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ que no cumpla que $X + te^{i\theta}Y = 0$. Si $\Phi(Y) = 0$, entonces $Y = 0$ y $|\varphi(X,Y)| = 0$, por lo que se cumple que $0 \leq 0$ en la desigualdad. Si $\Phi(Y) > 0$, la ecuación $\Phi(X) + 2t|\varphi(X,Y)| + t^2\Phi(Y) = 0$ no puede tener dos raíces reales distintas, es decir que $|\varphi(X,Y)|^2 \leq \Phi(X)\Phi(Y)$. Haciendo la raíz cuadrada en ambos lados se obtiene la desigualdad.

Cuando X e Y son l.d., es decir $X = \lambda Y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}
|\varphi(X,Y)|^2 &= |\varphi(\lambda Y,Y)|^2 = |\lambda\varphi(Y,Y)|^2 = |\lambda\Phi(Y)|^2 = |\lambda|^2\Phi(Y)^2 \\
\Phi(X)\Phi(Y) &= \Phi(\lambda Y)\Phi(Y) = \lambda\overline{\lambda}\Phi(Y)\Phi(Y) = |\lambda|^2\Phi(Y)^2
\end{aligned}$$

Dándose la igualdad.

Recíprocamente, teniendo $|\varphi(X,Y)|^2 = \Phi(X)\Phi(Y)$. Si $\Phi(Y) = 0$ entonces $Y = 0$ por lo tanto X y Y son l.d. y en otro caso, la ecuación $\Phi(X)+2t|\varphi(X,Y)|+t^2\Phi(Y) = 0$ tiene una raíz doble t_0, es decir, $\Phi(X + t_0e^{i\theta}Y) = 0$ entonces $X + t_0e^{i\theta}Y = 0$, luego X y Y son l.d.

<u>Minkowski</u>. Elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad se tiene $\Phi(X + Y) \leq \Phi(X) + \Phi(Y) + 2\sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)}$. Antes hemos obtenido $\Phi(X + Y) = \Phi(X) + 2\Re(\varphi(X,Y)) + \Phi(Y)$. Luego es suficiente probar $\Re(\varphi(X,Y)) \leq \sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)}$.
Para todo complejo z, se tiene $\Re(z) \leq |z|$, entonces $\Re(\varphi(X,Y)) \leq |\varphi(X,Y)| \leq \sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)}$, donde la segunda desigualdad es la de Cauchy-Schwarz probada anteriormente.

Cuando X e Y son l.d., queremos ver que se cumple $\Re(\varphi(X,Y)) = \sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)}$. Como ya hemos probado la igualdad en Cauchy-Schwarz tenemos $\sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)} = |\varphi(X,Y)|$ y solo bastaría ver que $\Re(\varphi(X,Y)) = |\varphi(X,Y)|$. Esto solo se cumple si $\varphi(X,Y)$ es un número real para todo X,Y complejo.

$$\varphi(X,Y) = \varphi(\lambda Y,Y) = \lambda\varphi(Y,Y)$$

Donde λ es un número real y, por ser φ una forma Hermítica, $\varphi(Y,Y) = \overline{\varphi(Y,Y)}$ implica que es un número real.
En caso de que se tenga la igualdad, se tiene $\Re(\varphi(X,Y)) = \sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)}$ entonces,

$$\sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)} = \Re(\varphi(X,Y)) \leq |\varphi(X,Y)| \leq \sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)}$$

luego, $\sqrt{\Phi(X)}\sqrt{\Phi(Y)} = \Re(\varphi(X,Y)) = |\varphi(X,Y)|$ y al igual que en el caso de Cauchy-Schwarz X y Y son l.d. □

Definición 1.8. *Si (V,φ) es un espacio Hermítico, la desigualdad de Minkowski define una norma $\sqrt{\Phi(X)}$ en V. A partir de ahora la* ***norma Hermítica*** *inducida por φ se representará como $\|X\|$.*

Al estar los espacios Hermíticos dotados de una norma, son espacios topológicos bajo la topología inducida por dicha norma. Donde la base viene dada por las bolas abiertas de centro X y radio $\epsilon > 0$ de la siguiente forma,

$$B(X,\epsilon) = \{Y \in V : \|Y - X\| < \rho\}$$

1.5. Métricas Hermíticas.

Dada una forma hermítica $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$, esta se puede dividir en dos partes, la simétrica y la antisimétrica:

$$\begin{aligned} s\varphi(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(\varphi(X,Y) + \varphi(Y,X)\right) &= s\varphi(Y,X) \\ a\varphi(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(\varphi(X,Y) - \varphi(Y,X)\right) &= -a\varphi(Y,X) \\ \varphi(X,Y) &= s\varphi(X,Y) + a\varphi(X,Y) \end{aligned}$$

A partir de la propiedad de la forma hermítica se tiene,

$$\begin{aligned} s\varphi(X,Y) &= \frac{1}{2}(\varphi(X,Y) + \varphi(Y,X)) &= \frac{1}{2}(\varphi(X,Y) + \overline{\varphi(X,Y)}) \\ &= Re(\varphi(X,Y)) \in \mathbb{R} \\ a\varphi(X,Y) &= \frac{1}{2}(\varphi(X,Y) - \varphi(Y,X)) &= \frac{1}{2}(\varphi(X,Y) - \overline{\varphi(X,Y)}) \\ &= iIm(\varphi(X,Y)) \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Proposición 1.7. *Dada una forma hermítica $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$, su parte simétrica $s\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ es una métrica riemanniana, bilineal, simétrica y definida positiva.*

Demostración. Es trivial que es bilineal, por serlo φ y la conjugación y ya hemos visto al comienzo de la sección que es simétrica. Veamos que es definida positiva,

$$s\varphi(X,X) = \frac{1}{2}(\varphi(X,X) + \varphi(X,X)) = \varphi(X,X) > 0$$

lo es por serlo φ. □

Definición 1.9. *Sea una forma hermítica $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$, se define la siguiente aplicación bilineal antisimétrica:*

$$\Omega(X,Y) = ia\varphi(X,Y) = -Im(\varphi(X,Y))$$

Toda forma hermítica φ se puede expresar en función de una métrica g dada por su parte simétrica y la aplicación antisimétrica Ω,

$$\varphi(X,Y) = s\varphi(X,Y) + a\varphi(X,Y) = g(X,Y) - i\Omega(X,Y)$$

Como hemos visto en la sección 1.2 podemos identificar los espacios vectoriales complejos con los espacios vectoriales reales dotados de una estructura compleja J, mediante la relación $J(X) = iX$. Si φ es una forma hermítica en un espacio vectorial complejo, entonces

$$\varphi(iX, iY) = i\bar{i}\varphi(X, Y) = i(-i)\varphi(X, Y) = \varphi(X, Y)$$

Por lo que podemos traspasar las definiciones 1.4, 1.5 y 1.6 al caso de los espacios vectoriales reales dotados de una estructura

Definición 1.10. *Sea V un espacio vectorial real dotado de una estructura compleja J. Se dice **producto hermítico** a un producto escalar real $g : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que*

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in V.$$

Equivalentemente,

$$g(JX, Y) = -g(X, JY), \qquad \forall X, Y \in V.$$

En particular, se tiene que $g(JX, X) = 0$ para todo $X \in V$.

De ahora en adelante el producto hermítico $g(X, Y)$ se representará en ocasiones como $X \cdot Y$.

Proposición 1.8. *Cada forma hermítica $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$, define un producto hermítico, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ a partir de la métrica de su parte simétrica.*

Demostración. Ya está probado que es bilineal, simétrico y definido positivo en la proposición 1.7. Solo falta comprobar que cumple la definición anterior,

$$\begin{array}{rclcl} g(JX, JY) & = & \frac{1}{2}(\varphi(JX, JY) + \varphi(JY, JX)) & = & \frac{1}{2}(\varphi(iX, iY) + \varphi(iY, iX)) \\ & = & \frac{i(-i)}{2}(\varphi(X, Y) + \varphi(Y, X)) & = & \frac{1}{2}(\varphi(X, Y) + \varphi(Y, X)) \\ & = & g(X, Y) & & \end{array}$$

□

Teorema 1.9. *La aplicación $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ definida en 1.9 esta relacionada con el producto hermítico g obtenido de la misma forma hermítica que Ω de la forma $\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$.*

Demostración. Por un lado tenemos,

$$\varphi(iX, Y) = i\varphi(X, Y) = is\varphi(X, Y) + ia\varphi(X, Y)$$

Donde el primer sumando es un imaginario puro y el segundo un número real.
Por otro lado,

$$\varphi(iX, Y) = s\varphi(iX, Y) + a\varphi(iX, Y)$$

Donde en este caso el primer sumando es real y el segundo imaginario puro.
Igualando los sumandos reales de ambas expresiones, obtenemos el resultado,

$$g(JX, Y) = s\varphi(iX, Y) = ia\varphi(X, Y) = \Omega(X, Y)$$

□

Debido a este teorema se definirá así la forma de Kähler en variedades casi-complejas.

Recíprocamente a la proposición 1.8, cada producto hermítico $g : V \times V \to \mathbb{R}$ definido en un espacio vectorial real dotado de una estructura compleja J define una forma hermítica $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(X, Y) = g(X, Y) - i\Omega(X, Y) = g(X, Y) - ig(JX, Y)$$

Por lo que hay una biyección entre formas hermíticas $V \times V \to \mathbb{C}$ y productos hermíticos $V \times V \to \mathbb{R}$.

Al igual que en los espacios Euclídeos, se conservan los conceptos de ortogonalidad, ortonormalidad, bases ortogonales u ortonormales y subespacios ortogonales a un conjunto de vectores.

Definición 1.11. *Sea J una estructura compleja sobre V y g un producto hermítico. Dos vectores $X, Y \in V$ son* ***ortogonales*** *si $g(X, Y) = X \cdot Y = 0$. Si además se tiene que $\|X\| = \|Y\| = 1$ se dice que son* ***ortonormales****.*

Definición 1.12. *Sea J una estructura compleja sobre V, dotado este de un producto hermítico. Dada una base $\{X_i\}_{i\in I}$ de V, decimos que es una* ***base ortogonal*** *si los vectores X_i son ortogonales dos a dos, es decir, $X_i \cdot X_j = 0$ para todo $i, j \in I$ con $i \neq j$. Si además $\|X_i\| = 1$ para todo $i \in I$ se dice que es una* ***base ortonormal****.*

Definición 1.13. *Sea J una estructura compleja sobre V, dotado este de un producto hermítico. Dado un subespacio W de V, se llama* ***complemento ortogonal*** *de W al conjunto de vectores de V ortogonales a todos los elementos del subespacio W,*

$$W^{\perp} = \{X \in V : X \cdot Y = 0, \ \forall Y \in W\}$$

Proposición 1.10. *Sea J una estructura compleja sobre V y g un producto hermítico. Entonces J es ortogonal respecto de g, esto es, $X \cdot JX = 0$, para todo $X \in V$.*

Demostración. Para todo $X \in V$ se tiene que $JX \cdot X = J^2 X \cdot JX = -(X \cdot JX)$, por ser g simétrico. Luego, $2(X \cdot JX) = 0$ y X y JX son ortogonales para todo X de V. □

Proposición 1.11. *Sea g un producto hermítico en un V de dimensión $2n$ dotado de una estructura compleja J. Entonces existen n elementos $X_1, ..., X_n$ en V tales que $\{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ es una base ortonormal de V respecto del producto g.*

Demostración. Usando inducción. Para el caso de $n = 1$ ($\dim V = 2$) cualquier vector unitario X es ortogonal con JX (Proposición 1.10) y por tanto formarán una base ortonormal porque se tiene

$$1 = \|X\|^2 = X \cdot X = JX \cdot JX = \|JX\|^2 \Rightarrow \|X\| = \|JX\| = 1$$

Por hipótesis inductiva, la proposición es cierta para espacios de dimensión $2(n-1)$. Si X_1 es un vector unitario, entonces $\{X_1, JX_1\}$ es una base ortonormal que genera un subespacio $V' \in V$. Sea $V'^{\perp}$ el complemento ortogonal de V' tal que $V = V' \oplus V'^{\perp}$ y $V'^{\perp}$ es invariante por J,

$$JY \cdot X_1 = -(Y \cdot JX_1) = 0, \quad JY \cdot JX_1 = Y \cdot X_1 = 0, \quad \forall Y \in V'^{\perp}$$

Entonces la restricción de J a $V'^{\perp}$ es una estructura compleja y la restricción del producto g sigue siendo hermítico. Al ser $\dim V'^{\perp} = 2(n-1)$ se tiene la hipótesis inductiva garantizando la existencia de una base ortonormal de la forma $\{X_2, ..., X_n, JX_2, ..., JX_n\}$. Probando así el enunciado. □

Un ejemplo sencillo es si g_0 es el producto interno canónico sobre $\mathbb{R}^{2n}$, entonces g_0 es el producto hermítico con respecto de la estructura compleja canónica J_0 de $\mathbb{R}^{2n}$.

Proposición 1.12. *Sea g un producto hermítico sobre V, dotado este de una estructura compleja J. Entonces, g puede extenderse únicamente a una forma $\mathbb{C}-$bilineal simétrica $g^{\mathbb{C}}$ de $V^{\mathbb{C}}$, denotado como $\cdot_{\mathbb{C}}$, que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\overline{Z} \cdot_{\mathbb{C}} \overline{W} = \overline{Z \cdot_{\mathbb{C}} W}$ *para* $Z, W \in V^{\mathbb{C}}$.

2. $Z \cdot_{\mathbb{C}} \overline{Z} > 0$ *para todo* $Z \in V^{\mathbb{C}}$ *no nulo.*

3. $Z \cdot_{\mathbb{C}} \overline{W} = 0$ *para* $Z \in V^{(1,0)}$ *y* $W \in V^{(0,1)}$.

Por otro lado, toda forma $\mathbb{C}$*-bilineal simétrica en* $V^{\mathbb{C}}$ *que satisfaga las tres condiciones es la extensión natural de un producto hermítico en* V.

Demostración. Sea la extensión de g a $V^{\mathbb{C}}$ de la forma

$$(X_1 + iY_1) \cdot_{\mathbb{C}} (X_2 + iY_2) = X_1 \cdot X_2 - Y_1 \cdot Y_2 + i(X_1 \cdot Y_2 + X_2 \cdot Y_1)$$

Para 1, vemos que cambiando Y_1, Y_2 por $-Y_1, -Y_2$ respectivamente en la extensión del producto definida, se obtiene la igualdad $\overline{Z_1} \cdot_{\mathbb{C}} \overline{Z_2} = \overline{Z_1 \cdot_{\mathbb{C}} Z_2}$.
Para 2, tenemos que $Z \cdot_{\mathbb{C}} \overline{Z} = X \cdot X + Y \cdot Y + i(X \cdot Y - X \cdot Y) > 0$, donde el término complejo se anula y los dos sumandos del término real son ambos positivos.
Para 3, sean $Z = X - iJX \in V^{(1,0)}$ y $W = Y + iJY \in V^{(0,1)}$ (por la Proposición 1.3),

$$Z \cdot_{\mathbb{C}} \overline{W} = (X - iJX) \cdot_{\mathbb{C}} (Y - iJY) = X \cdot Y - JX \cdot JY - i(JX \cdot Y + X \cdot JY)$$

Pero por ser el producto hermítico, se cumple $JX \cdot JY = X \cdot Y$ y $JX \cdot Y = -(X \cdot JY)$. Entonces, el término de la derecha de la igualdad se anula.
Supongamos $h : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ una forma $\mathbb{C}$-bilineal simétrica que satisface las propiedades 1, 2 y 3, y g' la restricción de h a $V \times V$.
Por estar g' definida en V un espacio vectorial real, se cumple que $\overline{Z} = Z$ para todo $Z \in V$. Entonces, por la propiedad 1 tenemos que g' toma valores reales,

$$\overline{Z} \cdot_{g'} \overline{W} = Z \cdot_{g'} W = \overline{Z \cdot_{g'} W}, \quad \forall Z, W \in V$$

Y por la propiedad 2 tenemos que g' es definida positiva,

$$Z \cdot_{g'} \overline{Z} = Z \cdot_{g'} Z > 0, \quad \forall Z \in V$$

Para ver que J es ortogonal respecto a g' usamos la propiedad 3, sean $Z \in V^{(1,0)}$ y $W \in V^{(0,1)}$,

$$0 = Z \cdot_h \overline{W} = (X - iJX) \cdot_h (Y - iJY) = X \cdot_{g'} Y - JX \cdot_{g'} JY - i(JX \cdot_{g'} Y + X \cdot_{g'} JY)$$

Para que el último término de la igualdad sea 0, tienen que ser tanto la parte real como la compleja nulas. Si la parte real es nula, se da la propiedad $X \cdot_{g'} Y = JX \cdot_{g'}$ y por lo tanto J es ortogonal respecto a g' por la Proposición 1.10. $\square$

El producto hermítico también induce una biyección entre el espacio vectorial V y su dual V^*. Pero hay ciertas diferencias con el caso Euclídeo por ser φ sesquilineal.

Definición 1.14. *Sea J una estructura compleja sobre V y φ una forma hermítica. Para cualquier vector $X \in V$, la aplicación $\varphi_X^l : V \to \mathbb{C}$ se define como:*

$$\varphi_X^l(Y) = \overline{X \cdot Y}, \ \forall Y \in V.$$

Por otro lado, la aplicación $\varphi_X^r : E \to \mathbb{C}$ se define como:

$$\varphi_X^r(Y) = Y \cdot X, \ \forall Y \in V.$$

De esta forma, al ser φ lineal en el primer argumento y semi-lineal en el segundo, ambas φ_X^l y φ_X^r son formas lineales en V^*. Entonces tenemos dos aplicaciones $\flat^l : V \to V^*$ y $\flat^r : V \to V^*$ definidas como

$$\flat^l(X) = \varphi_X^l, \qquad \flat^r(X) = \varphi_X^r.$$

Proposición 1.13. *Se cumple que $\varphi_X^l = \varphi_X^r$ y $\flat^l = \flat^r$.*

Demostración. Para todo $X, Y \in V$, se tiene

$$\flat^l(X)(Y) = \varphi_X^l(Y) = \overline{X \cdot Y} = Y \cdot X = \varphi_X^r(Y) = \flat^r(X)(Y).$$

Por lo tanto, usaremos la notación φ_X para φ_X^l y φ_X^r, y $\flat$ para $\flat^l$ y $\flat^r$. $\square$

Teorema 1.14. *Sea J una estructura compleja sobre V y g un producto hermítico. La aplicación $\flat : V \to V^*$ definida como $\flat(X) = \varphi_X$ para todo $X \in V$ es semilineal e inyectiva. Cuando V es de dimensión finita, la aplicación $\flat : \overline{V} \to V^*$ es un isomorfismo.*

Demostración. La prueba de que $\flat : V \to V^*$ es semilineal es trivial a partir de la igualdad $\flat = \flat^r$ y que φ sea semilineal en el segundo argumento. Sean $X, Y \in V$ con $X \neq Y$ tal que su imagen por $\flat$ coincide para todo $Z \in V$,

$$\varphi_u(Z) = \varphi_v(Z) \Rightarrow Z \cdot X = Z \cdot Y \Rightarrow Z \cdot (X - Y) = 0$$

Esto implica que $X = Y$ por ser φ positiva definida. Luego $\flat : V \to V^*$ es inyectiva. Por último, si V es de dimensión finita n, V^* también es de dimensión n y $\flat : V \to V^*$ es biyectiva. Al ser $\flat$ semilineal, la aplicación $\flat : \overline{V} \to V^*$ es un isomorfismo. $\square$

El inverso del isomorfismo $\flat : \overline{V} \to V^*$ se denota como $\sharp : V^* \to \overline{V}$.

Corolario 1.14.1. *Si V es un espacio Hermítico de dimensión finita, entonces todas las formas lineales $f \in V^*$ se corresponden con un único $Y \in V$ tal que,*

$$f(X) = X \cdot Y,\ \forall X \in V.$$

En particular, si f no es la forma identicamente cero, el kernel de f, será el conjunto de vectores ortogonales a Y, que forman un hiperplano.

El isomorfismo $\flat : \overline{V} \to V^*$ es necesario para la existencia de las aplicaciones adjuntas.

Sea V un espacio Hermítico de dimensión finita y $f : V \to V$ una aplicacion lineal. Para todo $X \in V$, la forma lineal de V^* que manda Y a $\overline{X \cdot f(Y)}$ tiene un único vector $f^*(X) \in V$ tal que $\overline{f^*(X) \cdot Y} = \overline{X \cdot f(Y)}$ (por el Corolario 1.14.1), es decir, $f^*(X) \cdot Y = X \cdot f(Y)$ para todo $Y \in V$. Además se tiene que f^* es lineal.

Proposición 1.15. *Dado un espacio Hermitico V de dimensión finita, para toda aplicación lineal $f : V \to V$ hay una única aplicación lineal $f^* : V \to V$ tal que*

$$f^*(X) \cdot Y = X \cdot f(Y),\ \forall X, Y \in V.$$

Demostración. Dados $X_1, X_2 \in V$, por ser el producto Hermítico bilineal, se tiene

$$(X_1 + X_2) \cdot f(Y) = X_1 \cdot f(Y) + X_2 \cdot f(Y),$$

$$(f^*(X_1) + f^*(X_2)) \cdot Y = f^*(X_1) \cdot Y + f^*(X_2) \cdot Y,$$

para todo $Y \in V$, por como está definida f^*,

$$(f^*(X_1) + f^*(X_2)) \cdot Y = (X_1 + X_2) \cdot f(Y) = f^*(X_1 + X_2) \cdot Y,$$

para todo $Y \in V$. Luego $(f^*(X_1) + f^*(X_2)) = f^*(X_1 + X_2)$ por ser $\flat$ biyectiva. De forma similar,

$$(\lambda X) \cdot f(Y) = \lambda(X \cdot f(Y)) \text{ y } (\lambda f^*(X)) \cdot Y = \lambda(f^*(X) \cdot Y),$$

para todo $Y \in V$ y por como está definida f^*,

$$(\lambda f^*(X)) \cdot Y = (\lambda X) \cdot f(Y) = f^*(\lambda X) \cdot Y,$$

para todo $Y \in V$. No hay problemas con la sesquilinealidad de φ porque solo operamos en el primer argumento, donde es lineal. Luego $f^*(\lambda X) = \lambda f^*(X)$ por ser $\flat$ biyectiva. Esto implica que f^* es una aplicación lineal y es única por ser $\flat$ biyectiva. $\square$

Definición 1.15. *Dado un espacio Hermítico V de dimensión finita, para toda aplicación lineal $f : V \to V$, la única aplicación lineal $f^* : V \to V$ tal que $f^*(X) \cdot Y = X \cdot f(Y)$, $\forall X, Y \in V$ se llama* ***adjunta de f****. Si además $f = f^*$, f se denomina* ***autoadjunta****.*

Proposición 1.16. *Dado V un espacio Hermítico de dimensión finita, para cualquier aplicación lineal $f : V \to V$, si $f(X) \cdot X \in \mathbb{R}$ para todo $X \in V$, entonces f es autoadjunta.*

Demostración. Como $f(X) \cdot X \in \mathbb{R}$ para todo $X \in V$, se tiene

$$f(X) \cdot X = \overline{f(X) \cdot X} = X \cdot f(X) = f^*(X) \cdot X,$$

luego $(f - f^*)(X) \cdot X = 0$ para todo $X \in V$, entonces $f - f^* = 0$. □

Una prueba similar a la de la Proposición 1.15, pero para dos espacios Hermíticos V y W con sus respectivos productos $\cdot_V$ y $\cdot_W$, verifica que para toda aplicación lineal $f : V \to W$ hay una única aplicación lineal $f^* : W \to V$, la adjunta de f, tal que $f^*(X) \cdot_V Y = X \cdot_W f(Y)$ para todo $X \in W$ y todo $Y \in V$.

Las aplicaciones adjuntas tienen ciertas propiedades.

Proposición 1.17. *(1) Para toda aplicación lineal $f : V \to W$, se tiene que $f^{**} = f$.*

(2) Para cualquier par de aplicaciones lineales $f, g : V \to W$ y cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (f+g)^* &= f^* + g^* \\ (\lambda f)^* &= \overline{\lambda} f^*. \end{aligned}$$

(3) Si V,W,E son espacios Hermíticos con sus respectivos productos $\cdot_V, \cdot_W, \cdot_E$ y $f : V \to W$, $g : W \to E$ son dos aplicaciones lineales, entonces

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

1.6. Métricas Norden.

Al contrario que las métricas hermíticas, las Norden no necesitan la condición de ser definidas positivas, basta con que sean no degeneradas.

Definición 1.16. *Una* ***métrica pseudo-riemanniana*** *g en un espacio vectorial real V es una forma bilineal simétrica no degenerada, es decir, $g(X, Y) = 0$ para todo vector Y de V si y solo si X es el vector nulo.*

Toda métrica pseudo-riemanniana tiene una signatura (p, q) fija, donde p es el número de valores propios positivos y q el número de valores propios negativos de la métrica. En particular, $(n, 0)$ es la signatura de las métricas de Riemann en un espacio vectorial de dimensión n.

Definición 1.17. *Sea V un espacio vectorial real dotado de una estructura compleja J. Se dice **métrica Norden** a aquellas métricas $g : V \times V \to \mathbb{R}$ que cumplen,*

$$g(JX, JY) = -g(X, Y) \qquad \forall X, Y \in V$$

o equivalentemente,

$$g(JX, Y) = g(X, JY) \qquad \forall X, Y \in V$$

Se conservan las mismas definiciones de ortogonalidad, ortonormalidad, bases ortogonales u ortonormales y complemento ortogonal que con el producto hermítico (definiciones 1.11, 1.12 y 1.13.)

Proposición 1.18. *Para toda métrica Norden g existe una métrica asociada G dada por $G(X, Y) = g(JX, Y)$. Esta se llama **métrica gemela** de la g, y verifica que también es una métrica Norden.*

Demostración. Comprobemos que G es una métrica pseudo-riemanniana, es decir una forma bilineal simétrica no degenerada. Verificar que G es bilineal y no degenerada es trivial por serlo g. Veamos que es simétrica, esto es, que $G(X, Y) = G(Y, X)$,

$$G(X, Y) = g(JX, Y) = g(X, JY) = g(JY, X) = G(Y, X)$$

Donde la segunda igualdad es la propiedad de g por ser métrica Norden y la tercera igualdad se da por ser g simétrica. Veamos ahora que cumple la condición para ser métrica Norden, es decir, que $G(JX, JY) = -G(X, Y)$.

$$G(JX, JY) = -g(X, JY) = -g(JX, Y) = -G(X, Y)$$

Donde la segunda igualdad se cumple por ser g métrica Norden. $\square$

Dada una métrica Norden g, esta siempre tiene signatura (m, m) donde m es igual a la mitad de la dimensión del espacio vectorial. Esto es equivalente a decir que existe una base $\{X_1, ..., X_m, X_{m+1}, ..., X_{2m}\}$ de modo que la matriz de g es

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Variedades Casi-Complejas

Para poder extender los resultados tratados en el capitulo anterior a las variedades, nos basamos en [4], [5], [7], [8] y [10].

2.1. Estructuras casi-complejas

Una **estructura casi-compleja** en una variedad diferenciable real M es un campo tensorial J de tipo (1,1) tal que $J^2 = -Id$. Equivalentemente, para cada punto p en la variedad M, el endomorfismo $J_p : T_pM \to T_pM$ satisface $J_p^2 = -Id$.

Una variedad M dotada de una estructura tal, se llama **variedad casi-compleja**.

Proposición 2.1. *Toda variedad casi-compleja es de dimensión real par y orientable.*

Demostración. Una estructura casi compleja J en M define una estructura compleja en cada espacio tangente T_pM con $p \in M$ luego tiene que ser de dimensión par.
Sea $\dim M = 2n$ y p un punto cualquiera de la variedad M, en el espacio tangente $T_p(M)$ escogemos campos $X_1, ..., X_n$ tales que forman una base $\{(X_1)_p, ..., (X_n)_p\}$ en T_pM visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Entonces existe un entorno U_p de p tal que para todo punto en su interior $q \in U_p$, el conjunto $\{(X_1)_q, ..., (X_n)_q\}$ es una base de T_qM como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
Por la Proposición 1.2, $\{(X_1)_q, ..., (X_n)_q, (JX_1)_q, ..., (JX_n)_q\}$ es una base de T_qM como $\mathbb{R}$-espacio vectorial para todo punto q del entorno U_p de p.
Como los entornos abiertos U_p recubren toda la variedad M por ser todo $p \in M$, para ver que M es orientable hay que comprobar que dados dos puntos p y p' distintos de la variedad, el determinante de la diferencial del cambio de coordenadas en la intersección de sus respectivos entornos $U_p, U_{p'}$ es positivo.

Esto es, que para todo punto q en la intersección de los entornos $U_p \cap U_{p'}$, la matriz de cambio de base entre las respectivas bases de los entornos

$$B_q = \{(X_1)_q, ..., (X_n)_q, (JX_1)_q, ..., (JX_n)_q\}$$

$$B'_q = \{(X'_1)_q, ..., (X'_n)_q, (JX'_1)_q, ..., (JX'_n)_q\}$$

tenga determinante positivo.
Sea P la matriz de cambio de base entre B_q y B'_q, y $(JX_i)_q = J_q(X_i)_q$ para todo $i = \{1, ..., n\}$, entonces

$$P(X_i)_q = (X'_i)_q \quad \text{y} \quad PJ_q(X_i)_q = J_q(X'_i)_q$$

Esto implica que $PJ_q = J_qP$.
Sabiendo también que la matriz de J_q es

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz P será de la forma

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

Y su determinante es $\det P = (\det A)^2 + (\det B)^2$, que es positivo por ser una suma de cuadrados. □

Toda variedad compleja M tiene una estructura casi-compleja natural integrada. Relacionando el espacio $\mathbb{C}^n$ de n-tuplas de complejos $z^j = x^j + iy^j$ con el espacio $\mathbb{R}^{2n}$ de $2n$-tuplas $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$. Para cada punto $p \in M$, identificamos $\frac{\partial}{\partial z^1}, ..., \frac{\partial}{\partial z^n}$ como vectores del plano tangente T_pM visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, mientras que $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n}$ como vectores de T_pM visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego

$$i\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad i\frac{\partial}{\partial y^j} = -\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad \forall j = 1, ..., n.$$

Donde la multiplicación por i define una estructura compleja J en cada plano tangente T_pM de la variedad que satisface

$$J\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad J\frac{\partial}{\partial y^j} = -\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad \forall j = 1, ..., n.$$

Proposición 2.2. *Una aplicación f de un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ conserva las estructuras casi-complejas, $f_* \circ J = J \circ f_*$, si y solo si f es holomorfa.*

Demostración. Sea $(w^1, ..., w^m) \in \mathbb{C}^m$ con $w^j = u^j + iv^j$, $j = 1, ..., m$. Si expresamos f en términos de u y v tenemos que para cada $j = 1, ..., m$,

$$u^j = u^j(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n) \text{ y } v^j = v^j(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$$

y f es holomorfa si y solo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial u^j}{\partial x^k} - \dfrac{\partial v^j}{\partial y^k} = 0 \\ \dfrac{\partial u^j}{\partial y^k} + \dfrac{\partial v^j}{\partial x^k} = 0 \end{array} \qquad \forall j = 1, ..., m;\ \forall k = 1, ..., n.$$

Y la aplicación f_* es

$$\begin{array}{l} f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^m \left(\dfrac{\partial u^j}{\partial x^k}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial u^j}\right) + \sum_{j=1}^m \left(\dfrac{\partial v^j}{\partial x^k}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial v^j}\right) \\ f_*\left(\dfrac{\partial}{\partial y^k}\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^m \left(\dfrac{\partial u^j}{\partial y^k}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial u^j}\right) + \sum_{j=1}^m \left(\dfrac{\partial v^j}{\partial y^k}\right)\left(\dfrac{\partial}{\partial v^j}\right) \end{array} \qquad \forall k = 1, ..., n.$$

Componiendo estas formulas de f_* con la J definida antes de la proposición para cualquier $\mathbb{C}^r$ obtenemos que $f_* \circ J$ es

$$\begin{aligned} f_*\left(J\frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= f_*\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u^j}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial v^j}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) \\ f_*\left(J\frac{\partial}{\partial y^k}\right) &= f_*\left(-\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = -\left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u^j}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right)\right] \end{aligned}$$

Y $J \circ f_*$ es

$$\begin{aligned} J \circ f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u^j}{\partial x^k}\right) J\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k}\right) J\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u^j}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ J \circ f_*\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u^j}{\partial y^k}\right) J\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial v^j}{\partial y^k}\right) J\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial u^j}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial v^j}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) \end{aligned}$$

Dónde se de la igualdad si y solo si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, si y solo si f es holomorfa. $\square$

Para definir una estructura casi-compleja en una variedad compleja M, se transfiere la estructura casi-compleja de $\mathbb{C}^n$ a M por medio de cartas.

Una aplicación $f : M \to M'$ se llama **casi-compleja** si conserva las estructuras casi-complejas de ambas variedades M y M', es decir, cumple $J' \circ f_* = f_* \circ J$. A partir de la proposición anterior se tiene la siguiente.

Proposición 2.3. *Dadas M y M' dos variedades complejas. Una aplicación $f : M \to M'$ es holomorfa si y solo si f es casi-compleja.*

Dada una estructura casi-compleja J en una variedad M, el campo tensorial $-J$ es también una estructura casi-compleja que se llama **conjugada de** J. Si M es una variedad compleja con atlas $\{(U_j, \varphi_j)\}$, la familia de cartas $(U_j, \overline{\varphi}_j)$, donde $\overline{\varphi}_j$ es la conjugada compleja de φ_j, es otro atlas que define la variedad compleja $\overline{M}$ llamada **conjugada de** M. Si J es la estructura casi-compleja de M, entonces $-J$ es la de $\overline{M}$.

2.2. Estructuras complejas y casi-complejas

Toda estructura compleja en una variedad diferenciable es casi-compleja, pero el caso inverso no es cierto siempre. Para que una estructura casi-compleja sea a su vez una estructura compleja, se tiene que cumplir cierta propiedad. Para llagar a ella, recopilamos los siguientes resultados.

Para dos campos vectoriales X e Y de una variedad M, definimos la operación corchete de Lie como $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ para toda función f diferenciable en M. Esta operación es aditiva, antisimétrica y satisface $[X, gY] = g[X,Y] + X(g)Y$ y la identidad de Jacobi $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ para $g \in C^\infty(M)$ y X, Y, Z campos vectoriales cualesquiera de M.

Definición 2.1. *Sea J una estructura casi-compleja en una variedad diferenciable M, se define la **torsión** de J como el campo tensorial de tipo (1,2) (**tensor de Nijenhuis**) dado por*

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY] \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

*Si J no tiene torsión, $N_J = 0$, se dice que la estructura casi-compleja J es **integrable**.*

Proposición 2.4. *El tensor de Nijenhuis verifica las siguientes propiedades:*

I. $N_J(X,Y) = -N_J(Y,X)$.

II. N_J *es* $\mathbb{R}-$ *bilineal y* $N_J(fX, gY) = fgN_J(X,Y)$.

Demostración. Para I, es inmediato ver que al estar N_J definido por la suma de cuatro corchetes de Lie, que son antisimétricos, este también lo es.
Para II, tambien es inmediato que N_J es $\mathbb{R}$-bilineal por ser los corchetes de Lie que lo definen aditivos.
Veamos que $N_J(fX, gY) = fgN_J(X,Y)$,

$$N_J(fX, gY) = [fJX, gJY] - [fX, gY] - J[fJX, gY] - J[fX, gJY] \tag{2.1}$$

Desarrollando cada sumando con las propiedades $[X, gY] = g[X,Y] + X(g)Y$ y antisimétrica, obtenemos

$$\begin{aligned}
[fJX, gJY] &= g[fJX, JY] + f(JX)(g)JY = -g[JY, fJX] + f(JX)(g)JY = \\
&= -fg[JY, JX] - g(JY)(f)JX + f(JX)(g)JY = \\
&= fg[JX, JY] - g(JY)(f)JX + f(JX)(g)JY \\
[fX, gY] &= g[fX, Y] + fX(g)Y = -g[Y, fX] + fX(g)Y = \\
&= -fg[Y, X] - gY(f)X + fX(g)Y = \\
&= fg[X,Y] - gY(f)X + fX(g)Y \\
J[fJX, gY] &= gJ[fJX, Y] + J(f(JX)(g)Y) = -gJ[Y, fJX] + f(JX)(g)JY = \\
&= -fgJ[Y, JX] - gJ(Y(f)JX) + f(JX)(g)JY = \\
&= fgJ[JX, Y] - gY(f)J^2X + f(JX)(g)JY \\
&= fgJ[JX, Y] + gY(f)X + f(JX)(g)JY \\
J[fX, gJY] &= gJ[fX, JY] + J(fX(g)JY) = -gJ[JY, fX] + fX(g)J^2Y = \\
&= -fgJ[JY, X] - gJ((JY)(f)X) - fX(g)Y = \\
&= fgJ[X, JY] - g(JY)(f)JX - fX(g)Y
\end{aligned}$$

Si operamos los desarrollos obtenidos según (2.1) tenemos

$$\begin{aligned}
N_J(fX, gY) &= fg[JX, JY] - fg[X,Y] - fgJ[JX, Y] - fgJ[X, JY] \\
&= fg([JX, JY] - [X,Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]) \\
&= fgN_J(X,Y)
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.5. *Una estructura casi-compleja J en una variedad diferenciable M es una estructura compleja si y solo si es integrable. Equivalentemente, J no tiene torsión o su tensor de Nijenhuis es idénticamente nulo.*

Los ejemplos más sencillos de variedades casi-complejas que son además complejas son todas las superficies, es decir, toda variedad diferenciable de dimensión real dos.

Dada una variedad casi-compleja (M, J) de dimensión real n, a partir del Teorema 2.5 sabemos que basta comprobar que el tensor de Nijenhuis es idénticamente nulo en toda la variedad para ver que es una variedad compleja.

Esto es, para todo $p \in M$ cogemos unos campos vectoriales $X_1, ..., X_n$ tales que $\{(X_1)_p, ..., (X_n)_p\}$ forman una base en T_pM, entonces existe un entorno U_p de p tal que para todo punto q en su interior $\{(X_1)_q, ..., (X_n)_q\}$ es una base de T_qM. Para simplificar diremos que $\beta_p = \{X_1, ..., X_n\}$ define una base en el entorno U_p.

El tensor de Nijenhuis se anula en el punto $p \in M$ si y solo si $N_J(X_i, X_j) = 0$ para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ y X_i, X_j pertenecen a la base β_p en U_p.

Dependiendo de la dimensión de la variedad M, es un proceso con muchas operaciones. Para simplificarlo basta ver que al ser el tensor de Nijenhuis antisimétrico,

$$\begin{array}{c} N_J(X_i, X_j) = 0 \Longleftrightarrow N_J(X_j, X_i) = 0 \\ N_J(X_i, X_i) = 0 \end{array} \qquad \text{para todo } X_i, X_j \in \mathfrak{X}(M)$$

Luego basta comprobar que $N_J(X_i, X_j) = 0$ para todo $1 \leq i < j \leq n$ y $X_i, X_j \in \beta_p$.

En este caso, consideramos M una superficie, por lo tanto la dimensión n es dos. Fijado un punto p cualquiera de la variedad, para cualquier campo vectorial X no nulo en un entorno de p, por la Proposición 1.2, $\beta_p = \{X, JX\}$ define una base en U_p. Veamos que $N_J(X, JX) = 0$,

$$\begin{aligned} N_J(X, JX) &= [JX, J^2X] - [X, JX] - J[JX, JX] - J[X, J^2X] \\ &= -[JX, X] - [X, JX] + J[X, X] \\ &= [X, JX] - [X, JX] = 0 \end{aligned}$$

El tensor de Nijenhuis se anula en p. Como esto no depende del punto p, sino que cogemos uno cualquiera, entonces es idénticamente nulo en toda la variedad y por lo tanto cualquier superficie casi-compleja es a su vez compleja.

Además, si M es una superficie real orientable, admite una parametrización global. Luego existe una base global del espacio tangente $TM \subseteq \mathbb{R}^2$ de la forma $\{\frac{\partial}{\partial X^1}, \frac{\partial}{\partial X^2}\}$. A partir del homomorfísmo inverso de la representación real de los complejos obtenemos que el espacio vectorial TM como $\mathbb{C}$-espacio vectorial tiene como base $\{\frac{\partial}{\partial Z}\}$ con $Z = X^1 + iX^2$.

Entonces la aplicación de multiplicación por i induce la estructura casi-compleja canónica $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es decir, que toda superficie real orientable admite una estructura casi-compleja y por la prueba del ejemplo anterior es además compleja.

Un ejemplo particular es la esfera S^2, en la cual se puede obtener una estructura casi-compleja relacionándola con los cuaterniones. Tomando como referencia [12].

Un **cuaternion** es otra extensión de los número reales similar a la de los complejos, pero añadiendo las unidades imaginarias i, j y k tales que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

Cuyo espacio vectorial $\mathbb{H}$, de dimensión 4, tiene como base $\{1, i, j, k\}$. Luego se pueden escribir como $a + bi + cj + dk$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Nos interesa el subespacio de la parte puramente imaginaria de los cuaterniones $Im\mathbb{H} \subset \mathbb{H}$ generado por i, j, k.

$$Im\mathbb{H} = \{ai + bj + ck : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Se tiene que $V = \mathbb{R}^3 = Im\mathbb{H}$ es de dimensión 3 y podemos definir un producto escalar y otro vectorial como:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \longmapsto & X \cdot Y = -Re(XY) \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} \times : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (X, Y) & \longmapsto & X \times Y = Im(XY) \end{array}$$

Siendo XY el producto usual de cuaterniones. Es inmediato ver que el producto de cuaterniones se puede expresar como $XY = -X \cdot Y + X \times Y$. Además, tenemos que

$$Re(XY) = \frac{1}{2}(XY + YX), \quad Im(XY) = \frac{1}{2}(XY - YX)$$

Por ser S^2 una superficie orientable definimos el mapa de Gauss $N : S^2 \to S^2$ que manda un punto $p \in S^2$ al vector normal en dicho punto, es decir, N_p es un vector unitario tal que $N_p \perp T_p S^2$.

A partir de dicha aplicación, obtenemos una estructura casi compleja de la siguiente forma

$$\begin{array}{rccc} J_p: & T_pS^2 & \longrightarrow & T_pS^2 \\ & X & \longmapsto & J_p(X) = N_p \times X \end{array}$$

Para comprobar que es endomorfismo basta ver que para todo $X \in T_pS^2$, J_pX también está en él. Veamos que es perpendicular al vector normal en p, es decir, $N_p \cdot J_pX = N_p \cdot (N_p \times X) = 0$.

$$\begin{aligned} N_p \cdot (N_p \times X) &= -Re(N_p(N_p \times X)) = -Re(N_p Im(N_p X)) \\ &= -Re(N_p \frac{1}{2}(N_pX - XN_p)) = -\frac{1}{2}Re(N_p \frac{1}{2}(N_pX - XN_p)) \\ &= -\frac{1}{4}(N_p(N_pX - XN_p) + (N_pX - XN_p)N_p) \\ &= -\frac{1}{4}(N_pN_pX - XN_pN_p) = \frac{1}{4}(-\|N_p\|^2X + X\|N_p\|^2) = 0 \end{aligned}$$

Luego J_p es un endomorfismo de T_pS^2. Ahora vamos a verificar que $J_p^2 = -Id$.

$$\begin{aligned} J_p^2X &= J_pJ_pX = J_p(N_p \times X) = N_p \times (N_p \times X) = N_p(N_p \times X) - N_p \cdot (N_p \times X) \\ &= N_p(N_p \times X) = N_p(N_pX - N_p \cdot X) = N_pN_pX = -\|N_p\|^2X = -X \end{aligned}$$

2.3. Espacio tangente complejo

Sea J una estructura casi-compleja en una variedad diferenciable M, y por lo tanto en cada punto p de la variedad, el espacio vectorial real tangente T_pM está dotado de una estructura compleja. Llamaremos **espacio tangente complejo**, denotado como $T_pM^{\mathbb{C}}$, a la complexificación del espacio tangente T_pM. Por las propiedades de la complexificación de la Proposición 1.3, resulta que $T_pM^{\mathbb{C}} = T_p^{(1,0)}M \oplus T_p^{(0,1)}M$ donde $T_p^{(1,0)}M$ y $T_p^{(0,1)}M$ son los espacios propios de la estructura J_p correspondientes a los autovalores i y $-i$ respectivamente.

Sus elementos llamados **vectores tangentes complejos**, pueden ser tipo $(1,0)$ si pertenecen a $T_p^{(1,0)}M$ y de tipo $(0,1)$ si pertenecen a $T_p^{(0,1)}M$. A partir de la Proposición 1.3 se extrae el siguiente lema.

Lema 2.6. *Un vector tangente complejo $(Z)_p \in T_pM^{\mathbb{C}}$ es de tipo $(1,0)$ (respectivamente de tipo $(0,1)$) si y solo si $(Z)_p = (X)_p - iJ(X)_p$ (respectivamente $(Z)_p = (X)_p + iJ(X)_p$) para algún vector tangente real $(X)_p$.*

Al igual que en el caso de los espacios tangentes, denominamos el conjunto $TM^{\mathbb{C}} = \bigcup_{p \in M} T_pM^{\mathbb{C}}$ de vectores tangentes complejos a una variedad como el fibrado tangente complejo sobre M.

Los campos vectoriales complejos Z pueden escribirse como $Z = X + iY$ con X, Y campos vectoriales reales de M y también tienen definida la aplicación del corchete de Lie para dos campos complejos Z_1 y Z_2.

$$[Z_1, Z_2] = [X_1 + iY_1, X_2 + iY_2] = [X_1, X_2] - [Y_1, Y_2] + i([X_1, Y_2] + [Y_1, X_2])$$

Un campo complejo Z es de tipo $(1, 0)$ si $(Z)_p$ es un vector tangente complejo de tipo $(1, 0)$ y es de tipo $(0, 1)$ si $(Z)_p$ es un vector tangente de tipo $(0, 1)$. Además, los campos complejos de tipo $(1, 0)$ son de la forma $Z = X - iJX$ y los de tipo $(0, 1)$ son de la forma $Z = X + iJX$ para $X \in \mathfrak{X}$.

Teorema 2.7. *Sea J una estructura casi-compleja en una variedad M. Entonces son equivalentes:*

I. *El corchete de campos complejos de tipo* $(1, 0)$ *es también de tipo* $(1, 0)$.

II. *El corchete de campos complejos de tipo* $(0, 1)$ *es también de tipo* $(0, 1)$.

III. $N_J = 0$.

Demostración. Dados dos campos complejos de tipo $(1, 0)$, $Z = X - iJX$ y $W = Y - iJY$, el corchete es

$$[Z, W] = [X, Y] - [JX, JY] - i([X, JY] + [JX, Y])$$

Este es un campo de tipo $(1, 0)$ si y solo si $J([X, Y] - [JX, JY]) = [X, JY] + [JX, Y]$, o lo que es lo mismo $-[X, Y] + [JX, JY] = J([X, JY] + [JX, Y])$, y por como está definido N_J en la Definición 2.1, se anula para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}$. Entonces I y III son equivalentes.

Para la equivalencia de II y III, es el mismo proceso. Dados dos campos complejos de tipo $(0, 1)$, $Z = X + iJX$ y $W = Y + iJY$, el corchete es

$$[Z, W] = [X, Y] - [JX, JY] + i([X, JY] + [JX, Y])$$

Este es un campo de tipo $(0, 1)$ si y solo si $J([X, Y] - [JX, JY]) = [X, JY] + [JX, Y]$, o lo que es lo mismo $-[X, Y] + [JX, JY] = J([X, JY] + [JX, Y])$, y por como está definido N_J en la Definición 2.1, se anula para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}$. Entonces I y III son equivalentes. $\square$

2.4. Conexiones casi-complejas.

Definición 2.2. *Dada una variedad M, una* ***conexión*** ∇ *es una aplicación bilineal*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tal que $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ *y* $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$.

Definición 2.3. *Sea* (M, ∇) *una variedad con conexión.*

1. *Se llama* ***tensor de torsión*** *al operador*

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

2. *Se dice que* ∇ *es* ***simétrica o libre de torsión*** *si* $T(X, Y) = 0$ *para todo campo vectorial* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

3. *Se llama* ***tensor de curvatura*** *al operador*

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

Dada una estructura casi-compleja J, una conexión ∇ y un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define el tensor de tipo $(1,1)$ $\nabla_X J$ como:

$$(\nabla_X J) Y = \nabla_X JY - J \nabla_X Y, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Se le llama **derivada covariante de J respecto de X** y se dice que J **es paralela respecto a** ∇, si $\nabla J = 0$, es decir $\nabla_X JY = J \nabla_X Y$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 2.4. *Una conexión* ∇ *en* M *se llama* ***casi-compleja*** *si cumple que su estructura casi-compleja* J *es paralela respecto a ella.*

Teorema 2.8. *Toda variedad casi-compleja* M *admite una conexión casi-compleja cuya torsión* T *viene dada por* $N_J = 4T$, *donde* N_J *es la torsión de la estructura casi-compleja* J.

Demostración. Considerando una conexión cualquiera ∇ en M libre de torsión y definiendo el campo tensorial Q de tipo $(1,2)$ siguiente

$$4Q(X,Y) = (\nabla_{JY}J)X + J((\nabla_Y J)X) + 2J((\nabla_X J)Y)$$

donde X e Y son campos vectoriales. Consideramos la conexión ∇' definida

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y - Q(X,Y).$$

Para probar que ∇' es casi-compleja, comparamos $\nabla'_X(JY)$ con $J\nabla'_X Y$.

$$\begin{aligned} \nabla'_X(JY) &= \nabla_X(JY) - Q(X,JY) \\ &= (\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y - Q(X,JY) \\ J\nabla'_X Y &= J\nabla_X Y - JQ(X,Y) \end{aligned}$$

Entonces ∇' es casi-compleja si se cumple $Q(X,JY) - JQ(X,Y) = (\nabla_X J)Y$. Sabemos que

$$\begin{aligned} 4Q(X,JY) &= -(\nabla_Y J)X + J((\nabla_{JY}J)X) + 2J((\nabla_X J)JY) \\ 4JQ(X,Y) &= J((\nabla_{JY}J)X) - (\nabla_Y J)X - 2(\nabla_X J)Y \end{aligned}$$

Como $0 = \nabla_X(J^2) = (\nabla_X J)J + J(\nabla_X J)$ en el último término de la primera ecuación de las dos anteriores obtenemos

$$2J((\nabla_X J)JY) = 2J(-J(\nabla_X J)Y) = 2(\nabla_X J)Y.$$

Obteniendo la igualdad que queríamos al restar $4(Q(X,JY) - JQ(X,Y)) = 4(\nabla_X J)Y$. Luego, ∇' es casi-compleja. La torsión T de ∇' es,

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y] \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] - Q(X,Y) + Q(Y,X) \\ &= -Q(X,Y) + Q(Y,X) \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que ∇ no tiene torsión. A partir de la definición del tensor Q tenemos

$$\begin{aligned} 4T(X,Y) &= 4(Q(Y,X) - Q(X,Y)) \\ &= (\nabla_{JX}J)Y + J((\nabla_Y J)X) - (\nabla_{JY}J)X - J((\nabla_X J)Y) \end{aligned}$$

Estos cuatro términos se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}
(\nabla_{JX}J)Y &= \nabla_{JX}(JY) - J\nabla_{JX}Y \\
J((\nabla_Y J)X) &= J(\nabla_Y(JX)) + \nabla_Y X \\
(\nabla_{JY}J)X &= \nabla_{JY}(JX) - J\nabla_{JY}X \\
J((\nabla_X J)Y) &= J(\nabla_X(JY)) + \nabla_X Y
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
4T(X,Y) &= \nabla_{JX}(JY) - J\nabla_{JX}Y + J(\nabla_Y(JX)) + \nabla_Y X \\
&\quad -\nabla_{JY}(JX) + J\nabla_{JY}X - J(\nabla_X(JY)) - \nabla_X Y \\
&= [JX, JY] - J[JX, Y] - [X, Y] - J[X, JY] \\
&= N_J(X, Y)
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da por no tener torsión ∇. □

Corolario 2.8.1. *Una variedad casi-compleja M admite una conexión casi-compleja libre de torsión si y solo si la estructura casi-compleja no tiene torsión.*

Demostración. Si la estructura casi-compleja J no tiene torsión entonces $N_J = 0$ y es un caso particular del Teorema 2.8. Si M admite una conexión ∇ casi-compleja libre de torsión, usando esta en la demostración del Teorema 2.8, de la igualdad $\nabla J = 0$ se obtiene $Q = 0$, luego $N_J = 0$ y J no tiene torsión. □

Proposición 2.9. *Si ∇ es una conexión libre de torsión en una variedad casi-compleja (M,J), $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple*

$$N_J(X,Y) = -J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY}J)X + (\nabla_{JX}J)Y.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
N_J(X,Y) &= [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\
&= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX) \\
&\quad -J(\nabla_X JY - \nabla_{JY}X) \\
&= (\nabla_{JX}JY - J\nabla_{JX}Y) - (\nabla_{JY}JX - J\nabla_{JY}X) - (J\nabla_X JY + \nabla_X Y) \\
&\quad +(J\nabla_Y JX + \nabla_Y X) \\
&= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X - J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2.10. *Sea M una variedad casi-compleja dotada de una estructura casi-compleja J. Entonces la torsión T y la curvatura R de la conexión casi-compleja satisfacen las siguientes igualdades.*

1. $T(JX, JY) - JT(JX, Y) - JT(X, JY) - T(X, Y) = -N_J(X, Y)$,
   para cualesquiera campos vectoriales X e Y, donde N_J es la torsión de J.

2. $R(X, Y)JZ = JR(X, Y)Z$, *para cualesquiera campos vectoriales X, Y y Z.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata a partir de las igualdades

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

junto con $\nabla J = 0$ por ser ∇ conexión casi-compleja.

Para 1:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & T(JX, JY) & = & \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX - [JX, JY] \\ (2) & -JT(JX, Y) & = & -J\nabla_{JX} Y + J\nabla_Y JX + J[JX, Y] \\ & & = & -\nabla_{JX} JY + \nabla_Y J^2 X + J[JX, Y] \\ & & = & -\nabla_{JX} JY - \nabla_Y X + J[JX, Y] \\ (3) & -JT(X, JY) & = & -J\nabla_X JY + J\nabla_{JY} X + J[X, JY] \\ & & = & -\nabla_X J^2 Y + \nabla_{JY} JX + J[X, JY] \\ & & = & +\nabla_X Y + \nabla_{JY} JX + J[X, JY] \\ (4) & -T(X, Y) & = & -\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X, Y] \end{array}$$

Sumando los cuatro términos, vemos que todas las conexiones se anulan y únicamente quedan los operadores de Lie,

$$\begin{aligned} (1) + (2) + (3) + (4) &= -[JX, JY] + J[JX, Y] + J[X, JY] + [X, Y] \\ &= -([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]) \\ &= -N_J(X, Y) \end{aligned}$$

Para 2:

$$\begin{aligned} R(X,Y)JZ &= \nabla_X(\nabla_Y(JZ)) - \nabla_Y(\nabla_X(JZ)) - \nabla_{[X,Y]}JZ \\ &= \nabla_X(J\nabla_Y(Z)) - \nabla_Y(J\nabla_X(Z)) - J\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= J\nabla_X(\nabla_Y(Z)) - J\nabla_Y(\nabla_X(Z)) - J\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= J\left(\nabla_X(\nabla_Y(Z)) - \nabla_Y(\nabla_X(Z)) - \nabla_{[X,Y]}Z\right) \\ &= JR(X,Y)Z \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Métricas adaptadas

Este capítulo se basa en la clasificación de las variedades casi-complejas tratadas en el capítulo anterior en función de las métricas Hermítica y Norden expuestas en el primer capítulo del texto. Para las variedades casi-Hermíticas nos basamos en los resultados de [7], [8] y [10], mientras que para los conceptos de las variedades casi-Norden las referencias [2], [9] y [11]. Además de [4] y [5] comunes en ambas.

3.1. Variedades casi-Hermíticas

Una métrica Hermítica en una variedad casi-compleja M es una métrica de Riemann g, invariante por la estructura casi-compleja J, es decir, $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para cualesquiera campos vectoriales X e Y.

Una variedad casi-compleja dotada de una métrica Hermítica (M, J, g) se llama **variedad casi-Hermítica**. Si J es una estructura compleja de la variedad M, se llama **variedad Hermítica**.

Proposición 3.1. *En una variedad casi-Hermítica (M, J, g), la estructura casi-compleja J es antisimétrica respecto de la métrica g.*

Demostración. Por como está definida la métrica, se tiene que

$$g(JX, Y) = g(J^2X, JY) = -g(X, JY)$$

$\square$

Definición 3.1. *Sea (M,J,g) una variedad casi-Hermítica, se define la* ***2-forma fundamental*** *o* ***forma de Kähler*** *como*

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Además, se da que Ω es invariante por J,

$$\Omega(JX, JY) = g(J^2X, JY) = -g(X, JY) = g(JX, Y) = \Omega(X, Y)$$

Y antisimétrica,

$$\Omega(X, Y) = g(JX, Y) = -g(X, JY) = -g(JY, X) = -\Omega(Y, X)$$

Al igual que en la Sección 2.4 sobre conexiones casi-complejas se define la derivada covariante de una estructura casi-compleja, para la forma de Kähler de una variedad se define la **derivada covariante de** Ω respecto de un campo X como la 2-forma

$$\nabla_X\Omega(Y, Z) = X(\Omega(Y, Z)) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z)$$

Proposición 3.2. *Toda variedad casi-compleja admite una métrica Hermítica siempre que sea paracompacta.*

Demostración. Dada una variedad casi-compleja M, tomamos una métrica Riemanniana g (que existe por ser M paracompacta). Obtenemos una métrica Hermítica h definida como $h(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY)$ para cualesquiera campos vectoriales X e Y. $\square$

Por ser una variedad casi-Hermítica (M, J, g) una variedad de Riemann, se pueden definir ciertas conexiones especiales.

Definición 3.2. *Sea ∇ una conexión de una variedad casi-Hermítica (M,J,g). Se dice que es una* ***conexión métrica*** *si para cualesquiera campos vectoriales $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se satisface la siguiente igualdad*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Además, existe una única conexión métrica llamada ***conexión de Levi-Civita*** *que es libre de torsión.*

Proposición 3.3. *Sea (M,J,g) una variedad casi-Hermítica, sea Ω la forma fundamental y ∇ la conexión de Levi-Civita. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

I. $\nabla_X\Omega(Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z)$ *para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

II. $\nabla_X J$ *es antisimétrico para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$.

III. $J(\nabla_X J)JY = (\nabla_X J)Y$, *es decir,* $(\nabla_X J)J = -(J\nabla_X J)$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Para I,

$$\begin{aligned}
\nabla_X\Omega(Y,Z) &= X(\Omega(Y,Z)) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z)\\
&= X(g(JY,Z)) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z)\\
&= g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z) - g(J\nabla_X Y, Z) - g(JY, \nabla_X Z)\\
&= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z)\\
&= g((\nabla_X J)Y, Z)
\end{aligned}$$

Para II,

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X J)Y, Z) &= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) = g(\nabla_X JY, Z) + g(\nabla_X Y, JZ)\\
&= X(g(JY,Z)) - g(JY, \nabla_X Z) + X(g(Y, JZ) - g(Y, \nabla_X JZ)\\
&= X(g(JY,Z)) + g(Y, J\nabla_X Z) - X(g(JY, Z) - g(Y, \nabla_X JZ)\\
&= g(Y, J\nabla_X Z - \nabla_X JZ) = -g(Y, (\nabla_X J)Z)
\end{aligned}$$

Para III,

$$\begin{aligned}
g(J(\nabla_X J)JY, Z) &= -g((\nabla_X J)JY, JZ) = -g(\nabla_X J^2 Y, JZ) + g(J\nabla_X JY, JZ)\\
&= g(\nabla_X Y, JZ) + g(\nabla_X JY, Z)\\
&= -g(J\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X JY, Z)\\
&= g((\nabla_X J)Y, Z)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.4. *Sea (M,J,g) una variedad casi-Hermítica, entonces el tensor de Nijenhuis verifica lo siguiente para cualesquiera* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

I. $N_J(X, JX) = 0$.

II. $N_J(X,Y) + N_J(Y,X) = 0$.

III. $N_J(X,Y) + N_J(JX, JY) = 0$.

Demostración. Para I, a partir de las Proposiciones 2.9 y 3.3

$$\begin{aligned}
N_J(X, JX) &= -J(\nabla_X J)JX + J(\nabla_{JX} J)X - (\nabla_{J^2X} J)X + (\nabla_{JX} J)JX \\
&= -(\nabla_X J)X + J(\nabla_{JX} J)X + (\nabla_X J)X - J(\nabla_{JX} J)X = 0
\end{aligned}$$

Para II, a partir de la Proposición 2.9,

$$\begin{aligned}
N_J(X, Y) &= -J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY} J)X + (\nabla_{JX} J)Y \\
N_J(Y, X) &= -J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X \\
N_J(X, Y) + N_J(Y, X) &= 0
\end{aligned}$$

Para III, a partir de las Proposiciones 2.9 y 3.3

$$\begin{aligned}
N_J(JX, JY) &= -J(\nabla_{JX} J)JY + J(\nabla_{JY} J)JX - (\nabla_{J^2Y} J)JX + (\nabla_{J^2X} J)JY \\
&= -(\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X - J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_X J)Y \\
&= -N_J(X, Y)
\end{aligned}$$

□

3.2. Variedades casi-Norden

Una métrica Norden en una variedad casi-compleja M es una métrica de pseudo-riemanniana g, que cumple $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ para cualesquiera campos vectoriales X e Y.

Una variedad casi-compleja dotada de una métrica Norden (M, J, g) se llama **variedad casi-Norden**. Si J es una estructura compleja de la variedad M, se llama **variedad Norden**.

Proposición 3.5. *En una variedad casi-Norden (M, J, g), la estructura casi-compleja J es simétrica respecto de la métrica g.*

Demostración. Por como está definida la métrica, se tiene que

$$g(JX, Y) = -g(J^2X, JY) = g(X, JY)$$

□

Por la Proposición 1.18, sabemos que en las variedades casi-Norden (M, J, g) existe una métrica gemela asociada $G(X, Y) = g(JX, Y)$ que también es Norden y por lo tanto (M, J, G) también es una variedad casi-Norden.

Si las conexiones de Levi-Civita de las métricas gemelas g y G son ∇ y $\widetilde{\nabla}$ respectivamente, el intercambio de una a otra se llama intercambio gemelo.

Definición 3.3. *Sea (M,J,g) una variedad casi-Norden, se define el tensor*

$$\Phi(X, Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Este tensor se llama el ***potencial de*** $\widetilde{\nabla}$ ***respecto de*** ∇. *Como las conexiones de Levi-Civita son libres de torsión,* Φ *es simétrico.*

Proposición 3.6. *El potencial* $\Phi(X, Y)$ *es anti-simétrico respecto el intercambio gemelo, es decir,*

$$\widetilde{\Phi}(X, Y) = -\Phi(X, Y).$$

Demostración. Por como está definido el potencial, sabemos que $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Phi(X, Y)$. Luego,

$$\widetilde{\Phi}(X, Y) = \nabla_X Y - \widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_X Y - \Phi(X, Y) = -\Phi(X, Y)$$

□

Definición 3.4. *Sea M una variedad casi-Norden con sus métricas gemelas g, G y sus respectivas conexiones de Levi-Civita* ∇, $\widetilde{\nabla}$. *Definimos una conexión lineal D dada por*

$$D_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\Phi(X, Y)$$

denominada ***conexión media*** *de* ∇ *y* $\widetilde{\nabla}$.

Se llama así porque por cómo está definida se tiene que

$$D_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\Phi(X, Y) = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\left(\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X Y + \widetilde{\nabla}_X Y\right)$$

Proposición 3.7. *La conexión media D es invariante respecto al intercambio gemelo.*

Demostración.

$$\widetilde{D}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\widetilde{\Phi}(X, Y) = \nabla_X Y + \Phi(X, Y) - \frac{1}{2}\Phi(X, Y) = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\Phi(X, Y) = D_X Y$$

□

Proposición 3.8. *Sea (M, J, g) una variedad casi-Norden, el tensor de Nijenhuis es invariante respecto del intercambio gemelo, esto es, $N_J(X,Y) = \widetilde{N}_J(X,Y)$ para todo $X, Y \in M$.*

Demostración. A partir de las definiciones 2.1 y 3.3 del tensor N_J y del potencial respectivamente y por ser ∇ y $\widetilde{\nabla}$ conexiones de Levi-Civita, obtenemos,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{N}_J(X,Y) &= [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\
&= \widetilde{\nabla}_{JX} JY - \widetilde{\nabla}_{JY} JX - \widetilde{\nabla}_X Y + \widetilde{\nabla}_Y X \\
&\quad -J\widetilde{\nabla}_{JX} Y + J\widetilde{\nabla}_Y JX - J\widetilde{\nabla}_X JY + J\widetilde{\nabla}_{JY} X \\
&= \nabla_{JX} JY + \Phi(JX, JY) - \nabla_{JY} JX - \Phi(JY, JX) \\
&\quad -\nabla_X Y - \Phi(X,Y) + \nabla_Y X + \Phi(Y, X) \\
&\quad -J\nabla_{JX} Y - J\Phi(JX, Y) + J\nabla_Y JX + J\Phi(Y, JX) \\
&\quad -J\nabla_X JY - J\Phi(X, JY) + J\nabla_{JY} X + J\Phi(JY, X) \\
&= \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\
&\quad -J\nabla_{JX} Y + J\nabla_Y JX - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY} X \\
&\quad +\Phi(JX, JY) - \Phi(JY, JX) - \Phi(X, Y) + \Phi(Y, X) \\
&\quad -J\Phi(JX, Y) + J\Phi(Y, JX) - J\Phi(X, JY) + J\Phi(JY, X) \\
&= [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\
&\quad +\Phi(JX, JY) - \Phi(JX, JY) - \Phi(X, Y) + \Phi(X, Y) \\
&\quad -J\Phi(JX, Y) + J\Phi(JX, Y) - J\Phi(X, JY) + J\Phi(X, JY) \\
&= N_J(X,Y)
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 4

Bibliografía

[1] Bak J. y Newman D. J., *Complex Analysis*, Third Edition, Springer, 2017.

[2] Bang-Yen C., *Pseudo-Riemannian Geometry, δ-Invariants and Applications*, World Scientific, 2011.

[3] Budinich P. y Trautman A., *The Spinorial Chessboard*, Springer-Verlag, 1988.

[4] Etayo Gordejuela F., *Variedades Diferenciables*, notas del curso Variedades Diferenciables, 2020-2021.

[5] Etayo Gordejuela F., *Estructuras polinómicas en variedades diferenciables*, Curso de Doctorado, Universidad de Cantabria, 1993-1994.

[6] Gallier J. y Quaintance J., *Algebra, Topology, Differential Calculus, and Optimization Theory For Computer Science and Machine Learning*, 2020.

[7] Goldberg S. L. , *Curvature and Homology*, Revised Edition, Dover Publications, 1998.

[8] Herrera A. C., *Estructuras Killing-Yano invariantes en Variedades Homogéneas*, Tesis Doctoral, 2018.

[9] ISCAN M. y SALIMOV A. A., *On Kähler-Norden manifolds*, Mathematical Sciences, Vol. 119, No. 1, 2009, pp. 71-80.

[10] Kobayashi S. y Nomizu K., *Foundations of differential geometry*, Vol.I-II, Intescience, 1963-1969.

[11] Manev M., *Invariant Tensors under the Twin Interchange of Norden Metrics on Almost Complex Manifolds*, Springer Basel, 2015.

[12] Svante J., *Quaternions and rotation*, lecture notes, 2017.