



**XXII CONGRESO**  
NACIONAL INGENIERÍA MECÁNICA

# **ANALES DE INGENIERÍA MECÁNICA**

Revista de la Asociación Española  
de Ingeniería Mecánica

Año 21, Septiembre 2018

19-21

**LIBRO DE ACTAS SEP 2018 madrid**

Congreso y publicación promovidos por la Asociación Española de Ingeniería Mecánica AEIM.

**Editor:**

José I. Pedrero

**Comité Editorial:**

Miryam B. Sánchez

Miguel Pleguezuelos

Lourdes del Castillo

Eduardo Gómez

*Área de Ingeniería Mecánica*

*Departamento de Mecánica*

*UNED*

**Edita:**

Universidad Nacional de Educación a Distancia

Septiembre de 2018

**Anales de Ingeniería Mecánica**

Año 21, Septiembre

**ISSN: 0212-5072**

## Comparativa de modelos de cálculo de fuerzas hidrodinámicas para el análisis del “rattle” en transmisiones por engranajes

A. Díez Ibarbia, A. Fernández del Rincón, A. De-Juan, F. Viadero

Dpto. de Ingeniería Estructural y Mecánica. Universidad de Cantabria, fernandra@unican.es

---

*En la industria del automóvil, todas las etapas de las cajas de cambios convencionales están en contacto constantemente. Esto implica que, en un instante concreto, aunque solo haya una etapa encargada de transmitir la potencia entre ejes de entrada y salida, el resto de etapas están engranadas. Estas parejas de engranajes que no transfieren carga, sin embargo, están sometidas a pequeñas variaciones de par y velocidad, así como a la interacción entre el lubricante y las superficies de los dientes. Bajo estas condiciones, se pueden producir impactos entre los flancos y contraflancos de los dientes, los cuales resultan en vibraciones y ruidos no deseados. Este efecto es comúnmente conocido como “rattle” y deriva en daños y fallos prematuros de elementos conectados a los ejes de la transmisión, así como en una reducción del confort de los pasajeros. En este contexto, en el presente estudio se ha realizado una comparativa de las formulaciones disponibles para la simulación del comportamiento de las fuerzas debidas al lubricante, bajo condiciones de operación en las que aparezca el “rattle”. Se parte de un estudio previo, en el cual los autores evaluaron diferentes formulaciones para tal efecto, observando que existían diferencias significativas entre formulaciones y concluyendo que para el correcto cálculo de estas fuerzas se deben tener en cuenta dos fenómenos. El primero está ligado a la variación de presión producida por la entrada de fluido en la zona de contacto, mientras que el segundo está relacionado con el estrangulamiento del fluido cuando los perfiles de los dientes se acercan entre sí. Teniendo presente esta premisa, en este artículo, se ha analizado el comportamiento dinámico de transmisiones por engranajes rectos estándar en condiciones de bajo nivel de par con varias formulaciones de fuerzas hidrodinámicas, las cuales consideran ambos fenómenos para su cálculo (entrada y estrangulamiento de fluido). Con este propósito, se han calculado estas fuerzas no lineales y se ha realizado una comparativa entre formulaciones sí para una transmisión ejemplo, simulando su comportamiento bajo diferentes condiciones de operación y varias viscosidades del fluido.*

---

### 1. Introducción

El traqueteo en engranajes o “gear rattle” es un fenómeno que existe principalmente en cajas de cambios con varias etapas engranadas de forma permanente. Durante el funcionamiento de estas cajas, hay etapas que, en un instante concreto, se encargan de transmitir la carga desde el eje de entrada al de salida, mientras que existen otras etapas, que aunque están contacto, no la transfieren. Las primeras se denominan comúnmente como etapas activas, mientras que a las segundas se las llama inactivas. El fenómeno de traqueteo, al consistir en contactos repetitivos entre flanco y contraflanco de los dientes, se localiza precisamente en estas etapas inactivas. Este fenómeno se origina principalmente por las vibraciones que el motor y la etapa activa produce en las etapas inactivas, y que a su vez resultan en falta de confort para los pasajeros y en vibraciones nocivas para los elementos acoplados a dicha caja de cambios [1-4].

Este trabajo se enmarca en este contexto y se orienta al estudio de la dinámica de las etapas inactivas, por lo que la pareja de engranajes analizada está sujeta a bajos niveles de par. En estas condiciones de operación, el lubricante no se comporta como en las etapas activas, siendo la comprensión del rol del lubricante el mayor desafío para resolver este problema.

El objetivo de este trabajo es analizar el papel del lubricante en condiciones de traqueteo y, por esta razón, se ha realizado un estudio de las formulaciones disponibles para simular el comportamiento de las fuerzas en ambiente fluido bajo estas condiciones de operación. Específicamente, como el régimen de lubricación es hidrodinámico, se pueden hacer varias aproximaciones en la ecuación de Reynolds, lo cual resulta en que la presión en el contacto es debida a la superposición de dos efectos. El primero es debido a la compresión del lubricante cuando los perfiles de los dientes se aproximan (fluid squeeze), mientras que el segundo está relacionado con la velocidad de entrada del lubricante en el contacto (fluid entrace).

En la literatura, existen modelos que simulan transmisiones mediante engranajes bajo estas condiciones [2, 5-12], pero sorprendentemente proponen formulaciones que tienen en cuenta solo uno de estos efectos, o consideran ambos efectos pero con diferentes condiciones de contorno. A partir de esta revisión, se llegó a la conclusión de que no existe una solución única para modelar las fuerzas hidrodinámicas. Sin embargo, en trabajos previos de los autores [13], se evaluaron algunas de estas formulaciones, lo que llevó a establecer que ambos efectos del lubricante eran necesarios para simular con precisión el fenómeno de traqueteo.

Esta es la razón por la cual, continuando con este estudio preliminar previo [13], este trabajo evalúa la dinámica de una transmisión por engranajes sujeta a condiciones de bajo par, para diferentes viscosidades del fluido, implementando formulaciones que consideran los efectos de compresión y entrada del fluido. Para ello, se requirió del uso de un modelo dinámico de transmisiones por engranajes previamente desarrollado por los autores [14-16], que se caracteriza por considerar simultáneamente los esfuerzos de engrane en ambos flancos del diente, y en el que se implementaron seis formulaciones hidrodinámicas.

## 2. Formulaciones de fuerzas hidrodinámicas

El papel desempeñado por el lubricante en condiciones de traqueteo es de crucial importancia para simular con precisión la dinámica de transmisiones mediante engranajes. En este marco, el primer paso para obtener las fuerzas presentes en el contacto entre los dientes es determinar el régimen de lubricación. En este sentido, se calcularon los parámetros no dimensionales de Greenwood y Stribeck [17]. Una vez que se aseguró que el régimen de lubricación era hidrodinámico, la fuerza del lubricante se definió a partir del cálculo del amortiguador viscoso equivalente lineal, siguiendo el modelo de Kelvin-Voigt:

$$F_c = C_{eq} \dot{\delta} \quad (1)$$

A este respecto, para obtener el valor del amortiguador viscoso equivalente  $C_{eq}$ , se resolvió la ecuación de Reynolds considerando ciertas simplificaciones debidas a que el régimen de lubricación era hidrodinámico. Estas aproximaciones están relacionadas con que no existen deformaciones locales de los dientes debido a la baja carga transmitida y con que las propiedades reológicas del fluido, como la densidad y la viscosidad, se pueden considerar constantes en las proximidades del contacto. Teniendo esto en cuenta, la ecuación de Reynolds se puede simplificar a:

$$\underbrace{\frac{\rho}{12\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right)}_{Poiseulle} = \underbrace{\rho V_e \frac{\partial h}{\partial x}}_{Wedge} + \underbrace{\rho \dot{h}}_{Squeeze} \quad (2)$$

Donde  $\rho$  y  $\eta$  son la densidad y la viscosidad dinámica del lubricante,  $h$  el espesor de película fluida,  $p$  la distribución de presiones del fluido y  $u_i$  son las velocidades de los perfiles en la dirección  $x$  (tangente a los perfiles).

Resolviendo esta expresión 2, se obtiene la distribución de presión, que es el paso previo para calcular la fuerza hidrodinámica. Para hacer esto, se considera que el espesor de la película es igual a la sección transversal del perfil del engranaje, que a su vez puede representarse mediante su serie Taylor:

$$h = h_c + \frac{x^2}{2R_{Eq}} \quad (3)$$

Como se puede observar, con dos términos de la serie de Taylor es suficiente para reproducir la curva de perfil, ya que el contacto solo afecta a un área pequeña (orden de micras). Estas ecuaciones dependen del espesor de película central  $h_c$  y del radio de curvatura equivalente  $R_{Eq}$ .

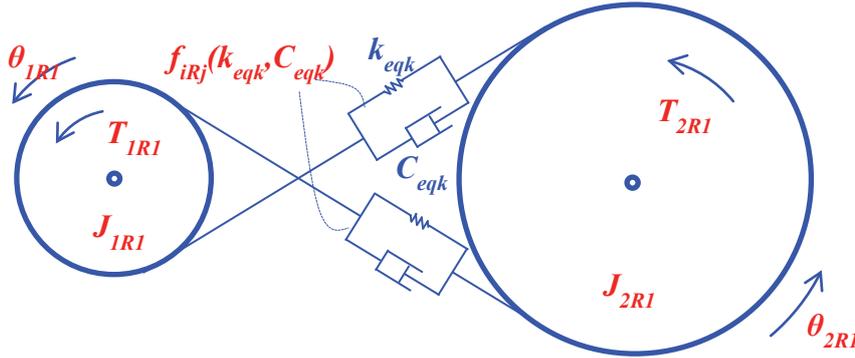
Además, para integrar la ecuación de Reynolds y obtener la fuerza hidrodinámica  $F_{HDL}$ , hay que definir los límites del área de contacto afectada ( $x_1 < x < x_2$ ):

$$p(x) = 12\eta \int \left[ \frac{1}{h^3} \int \left( V_e \frac{\partial h}{\partial x} + \dot{h} \right) \partial x \right] \partial x \rightarrow F_{HDL} = b \int_{x_1}^{x_2} p(x) \partial x = C_{eq}^{Wedge} V_e - C_{eq}^{Squeeze} \dot{\delta} \quad (4)$$

Donde  $b$  es el ancho de cara de la rueda. A este respecto, la mayoría de los autores que han tratado el fenómeno de traqueteo en engranajes consideran diferentes dominios en  $x$  y diferentes enfoques para obtener la distribución de la presión [2-12]. Por simplicidad, en la próxima sección se presenta un resumen de las seis formulaciones implementadas en el modelo y se invita al lector interesado en profundizar en el desarrollo de las mismas a los siguientes estudios [2-12], donde se describen en detalle.

### 3. Descripción del modelo dinámico

Aunque el modelo dinámico de transmisión de engranajes desarrollado previamente por los autores es de 19 grados de libertad (d.o.f.), en esta aplicación, se evaluó solo una pareja de engranajes, y por lo tanto se utilizó un modelo de 2 d.o.f., el cual se representa en la Fig. 1.



**Figura 1:** Modelo dinámico de una transmisión.

Las ecuaciones dinámicas del mismo se reducen a:

$$\begin{cases} J_{1R1}\ddot{\theta}_{1R1} + f_{1R1\theta}(\theta_{1R1}, \theta_{2R1}, \dot{\theta}_{1R1}, \dot{\theta}_{2R1}) = T_{1R1}; \\ J_{2R1}\ddot{\theta}_{2R1} + f_{2R1\theta}(\theta_{1R1}, \theta_{2R1}, \dot{\theta}_{1R1}, \dot{\theta}_{2R1}) = T_{2R1}; \end{cases} \quad (5)$$

$\theta_{iRj}$  es el grado de libertad rotacional relacionado con la inercia  $J_{iRj}$ , donde  $i$  es el número del eje donde está alojada la rueda  $j$ . En esta aplicación, existen dos ejes con una rueda cada uno, por lo que  $i$  toma valores 1 y 2 y  $j$  es igual a 1. Además,  $T_{iRj}$  representa el par externo aplicado y  $f_{iRj}$  el par debido a las fuerzas en el contacto ( $F_k$ ), que a su vez dependen de la rigidez y amortiguamiento equivalente del  $k$ -ésimo contacto ( $K_{eqk}$  y  $C_{eqk}$ ), como se presenta en la ecuación 6.

$$F_k = \begin{cases} 0 & \delta_k > h_{\max} \\ F_{HDL_k} = C_{eqk}^{Wedge} V_{ek} - C_{eqk}^{Squeeze} \dot{\delta}_k & \begin{cases} h_C = \delta_k & h_{\max} > \delta_k > h_{\min} \\ h_C = h_{\min} & h_{\min} > \delta_k > 0 \end{cases} \\ F_{EHL_k} = K_{eqk} \delta_k & \delta_k < 0 \end{cases} \quad (6)$$

La elección de la fórmula de fuerza de contacto depende de las distancias  $\delta_k$  (siendo  $k$  el número referido a cada contacto) entre pares de dientes potencialmente en contacto, también conocidas como solapamientos geométricos. Si esta distancia es mayor que un valor fijo  $h_{\max}$ , el efecto de fluido se considera insignificante, dado que los perfiles están lejanos. Además, para evitar valores infinitos de amortiguamiento viscoso, se adoptó un valor de espesor de película de saturación igual a diez veces la rugosidad media del perfil ( $h_{\min} = 10R_a$ ). Se puede observar que no existe transición entre regímenes hidrodinámico y elastohidrodinámico, pudiéndose adoptar esta simplificación porque solo se analiza la transmisión bajo condiciones de traqueteo y por tanto la carga es baja. Cuando existe superposición geométrica ( $\delta_k < 0$ ), la fuerza se calcula mediante un resorte no lineal que simula la rigidez de engrane. Por brevedad, la metodología de cálculo de esta rigidez de engrane no se presenta en este trabajo, invitando al lector interesado a examinar los siguientes trabajos [14-16].

En cuanto a las fuerzas hidrodinámicas, el valor negativo del término de compresión se debe al hecho de que la fuerza es positiva cuando los perfiles se aproximan. Por el contrario, cuando los perfiles se alejan, este término se considera nulo, dado que el efecto real no está representado por esta formulación, tal y como se muestra en la ecuación 7:

$$F_{HDL_k} = \begin{cases} C_{eq_k}^{Wedge} V_{e_k} - C_{eq_k}^{Squeeze} \dot{\delta}_k & \dot{\delta}_k < 0 \\ C_{eq_k}^{Wedge} V_{e_k} & \dot{\delta}_k > 0 \end{cases} \quad (7)$$

Los amortiguamientos viscosos equivalentes debidos a los términos de entrada y estrangulamiento del fluido  $C_{eq}^{Wedge}$  y  $C_{eq}^{Squeeze}$  de las seis formulaciones implementadas en el modelo se listan en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Expresiones de amortiguamiento viscoso equivalente de las fuerzas hidrodinámicas implementadas.

| Formulation             | $C_{eq}^{Wedge}$                      | $C_{eq}^{Squeeze}$  |
|-------------------------|---------------------------------------|---|
| Rahnejat                | $2b\eta \frac{\rho_{eq}}{h_c}$        | $\frac{3\sqrt{2}\pi b\eta}{2} \left(\frac{\rho_{eq}}{h_c}\right)^{3/2}$   |
| Rahnejat/Martins        | $\sqrt{6}b\eta \frac{\rho_{eq}}{h_c}$ | $\frac{3\sqrt{2}\pi b\eta}{2} \left(\frac{\rho_{eq}}{h_c}\right)^{3/2}$   |
| Sasaki                  | $2b\eta \frac{\rho_{eq}}{h_c}$        | $\frac{3\sqrt{2}\pi b\eta}{2} \left(\frac{\rho_{eq}}{h_c}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{eq}}{h_c}} \frac{\dot{h}}{V_e}\right)\right]$ |
| Sasaki/Martins          | $\sqrt{6}b\eta \frac{\rho_{eq}}{h_c}$ | $\frac{3\sqrt{2}\pi b\eta}{2} \left(\frac{\rho_{eq}}{h_c}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{eq}}{h_c}} \frac{\dot{h}}{V_e}\right)\right]$ |
| Wiegert <sub>0.02</sub> | $\sqrt{6}b\eta \frac{\rho_{eq}}{h_c}$ | $\frac{3\sqrt{2}\pi b\eta}{2} \left(\frac{\rho_{eq}}{h_c}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\sqrt{3} \sqrt{\frac{\rho_{eq}}{h_c}} \frac{\dot{h}}{V_e}\right)\right]$            |
| Wiegert <sub>0.2</sub>  | $\sqrt{6}b\eta \frac{\rho_{eq}}{h_c}$ | $\frac{3\sqrt{2}\pi b\eta}{2} \left(\frac{\rho_{eq}}{h_c}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{\sqrt{3}\pi \dot{h}}{2V_e \sqrt{\frac{h_c}{\rho_{eq}} + \sqrt{3}\pi  \dot{h} }}\right]$                  |

## 4. Caso de estudio

Los parámetros de la transmisión analizada están resumidos en la Tabla 2.

**Table 2.** Gear transmission parameters.

| Parámetro                                   | Valor       | Parámetro                      | Valor       |
|---|-------------|--------------------------------|-------------|
| Dientes piñón                               | 18          | Addendum herramienta           | 1.25 m      |
| Dientes rueda conducida                     | 36          | Deddendum herramienta          | 1 m         |
| Inercia piñón [Kgm <sup>2</sup> ]           | 1.7519 e-04 | Radio de acuerdo herramienta   | 0.25 m      |
| Inercia rueda conducida [Kgm <sup>2</sup> ] | 0.0028      | Ancho del diente [mm]          | 26.7        |
| Módulo [mm]                                 | 3           | Viscosidad [Pas]               | 0.08 /0.008 |
| Módulo de Young [GPa]                       | 210         | Distancia entre centros [mm]   | 81.1        |
| Coef. Poisson                               | 0.3         | $h_{min}$ [mm]                 | 8 e-3       |
| Ángulo de presión                           | 20          | $h_{max}$ [mm]                 | 1           |
| Semi-longitud de contacto ( $a$ ) [mm]      | 1           | Rugosidad media ( $R_a$ ) [mm] | 8 e-4       |

Los ensayos realizados consisten en introducir perturbaciones de velocidad a dos velocidades medias específicas del piñón ( $\Omega$ ), así como en aplicar un par torsional variable a la rueda conducida, el cual simula el comportamiento de un cojinete de fricción (ecuación 10).

$$\dot{\theta}_{1R1} = \Omega + \mathcal{G} \sin \Delta \omega t \quad \text{y} \quad T_{2R1} = \frac{\pi \eta_b l_b r_b^3}{2C} \dot{\theta}_{2R1} \quad (8)$$

Donde  $\Omega$  es la velocidad media de entrada en el piñón, que toma valores de 500 y 1000 rpm y  $\vartheta$  y  $\Delta\omega$  son la amplitud y frecuencia de la perturbación de la velocidad de entrada, cuyos valores se muestran en la Tabla 3.

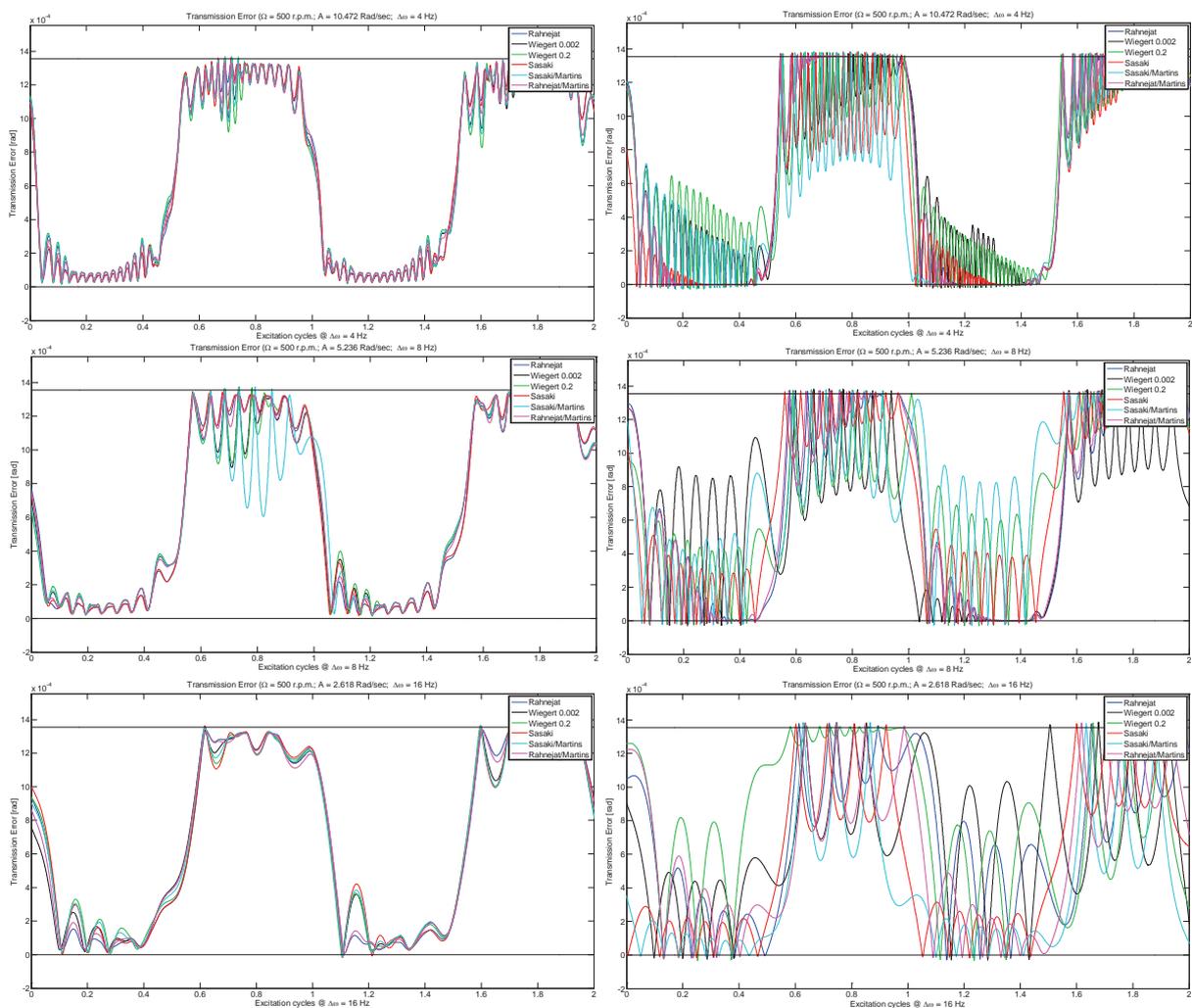
**Tabla 3.** Parámetros de las tres perturbaciones.

| $\Delta\omega$ [Hz] | $\vartheta$ [rad/s] |
|---------------------|---------------------|
| 4                   | 10.472              |
| 8                   | 5.236               |
| 16                  | 2,618               |

Estos valores de perturbación se escogieron para obtener el mismo desplazamiento angular para las tres perturbaciones. Además, el par externo  $T_{2RI}$  viene definido por el lubricante, longitud, radio y la holgura radial del cojinete de fricción ( $\eta_b$ ,  $r_b$ ,  $l_b$  y  $C$ ), cuyos valores se presentan en la Tabla 4.

**Table 4.** Parámetros del cojinete de fricción.

| Parámetro           | Valor       |
|---------------------|-------------|
| Radio [mm]          | 10          |
| Holgura radial [mm] | 0.025       |
| Longitud [mm]       | 15          |
| Viscosidad [Pas]    | 0.08 /0.008 |



**Figura 2:** Error de transmisión ( $\Omega = 500$  r.p.m.) para dos ciclos de la frecuencia de excitación  $\Delta\omega$  para dos valores de viscosidad (columna izquierda  $\eta = 0.08$  Pas; columna derecha  $\eta = 0.008$  Pas); a) Caso 1 ( $A = 10.472$  rad/s,  $\Delta\omega = 4$  Hz); b) Caso 2 ( $A = 5.236$  rad/s,  $\Delta\omega = 8$  Hz); c) Caso 3 ( $A = 2.618$  rad/s,  $\Delta\omega = 16$  Hz)

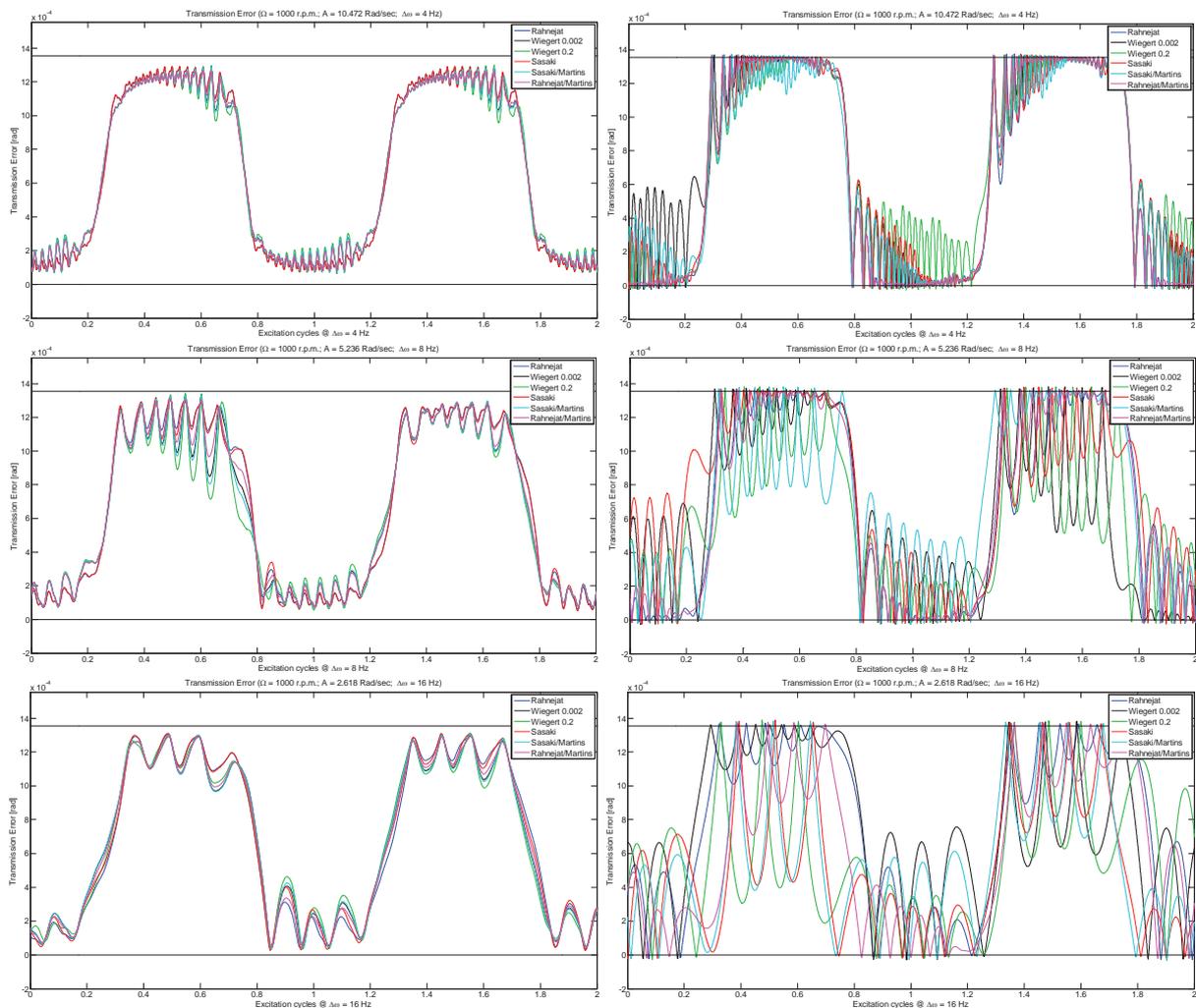
## 5. Resultados

Como la velocidad del piñón está predefinida en los ensayos realizados, solo hay un d.o.f., que se representa mediante el Error de Transmisión Dinámico (DTE). En la Fig. 2 se muestra el DTE cuando la velocidad media del piñón es de 500 rpm para las tres perturbaciones consideradas. Además, cada columna corresponde a un valor diferente de viscosidad dinámica del lubricante, 0.08 Pas en los gráficos de la izquierda y 0.008 Pas en los de la derecha. Las líneas horizontales negras representan el juego de la pareja de engranajes, por lo tanto, cuando el DTE está fuera de este rango, se produce interferencia física entre los perfiles. A este respecto, se considera como referencia de la posición angular el punto primitivo, por esta razón el valor angular inferior del juego es cero.

En el lado izquierdo, se puede observar que las seis formulaciones implementadas siguen una tendencia similar, apreciando que la consideración de Martin en el efecto de arrastre del fluido marca la diferencia entre las formulaciones de Rahnejat y Sasaki y las otras cuatro. Concretamente, en estas cuatro formulaciones, se producen algunos impactos que provocan que exista cierta dispersión entre los resultados.

Sin embargo, en el lado derecho, con baja viscosidad, ocurre lo contrario. Se observa que el efecto del estrangulamiento del fluido es más importante en este caso, y por lo tanto, se perciben mayores discrepancias entre formulaciones.

En la Fig. 3, se presenta el DTE cuando la velocidad media del piñón es de 1000 rpm, siguiendo la misma estructura que en la figura anterior.



**Figura 3:** Error de transmisión ( $\Omega = 1000$  r.p.m.) para dos ciclos de la frecuencia de excitación  $\Delta\omega$  para dos valores de viscosidad (columna izquierda  $\eta = 0.08$  Pas; columna derecha  $\eta = 0.008$  Pas); **a)** Caso 1 ( $A = 10.472$  rad/s,  $\Delta\omega = 4$  Hz); **b)** Caso 2 ( $A = 5.236$  rad/s,  $\Delta\omega = 8$  Hz); **c)** Caso 3 ( $A = 2.618$  rad/s,  $\Delta\omega = 16$  Hz)

En cuanto a los resultados, se llegó a conclusiones similares a las del caso de 500 rpm. La consideración de Martin marca la diferencia en el caso de alta viscosidad, no existiendo impactos en ninguna de las tres perturbaciones con esta velocidad media. Mientras que en el caso de baja viscosidad, a medida que aparecen más impactos debido al incremento de la frecuencia de excitación, el efecto del estrangulamiento del fluido se hace más importante que el debido a la velocidad de entrada del fluido.

## 6. Conclusiones

En este estudio, se realizó el análisis del fenómeno de traqueteo en transmisiones por engranajes. Concretamente, se estudiaron los resultados, a través del error de transmisión dinámico, utilizando seis formulaciones distintas para incorporar el comportamiento de las fuerzas hidrodinámicas en el modelo de transmisión de engranajes desarrollado previamente por los autores.

Las seis formulaciones implementadas siguen una tendencia similar, observando que la consideración de Martin en el efecto de arrastre del fluido marca la diferencia entre las formulaciones de Rahnejat y Sasaki y las otras cuatro. Esto se aprecia especialmente para el caso de alta viscosidad dinámica, en la que el efecto de arrastre supera al correspondiente al estrangulamiento del fluido. Sin embargo, ocurre lo contrario con bajas viscosidades, observando que el efecto de compresión del fluido es más importante en este caso, y esto resulta en discrepancias entre las formulaciones. Por lo tanto, se concluye que la viscosidad influye claramente en el papel de los efectos presentes en el contacto, específicamente, con el incremento de la viscosidad, el efecto de velocidad de entrada del fluido se vuelve más importante que el de estrangulamiento del mismo, siendo el caso contrario cuando la viscosidad disminuye.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del proyecto DPI2017-85390-P, financiado por el Ministerio Español de Ciencia y Tecnología, y del proyecto EUIN2017-88667, financiado por el Ministerio Español de Economía y Competitividad. Los autores también desean mostrar su agradecimiento al proyecto PRX14/00451 financiado por el Ministerio Español de Educación Cultura y Deporte.

## Referencias

- [1] M. Ankouni, A. A. Lubrecht, P. Velex. Modelling of damping in lubricated line contacts – Applications to spur gear dynamic simulations, *Proceedings IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 230 (7-8), (2016), 1222-1232.
- [2] R. Brancati, E. Rocca, R. Russo. An analysis of the automotive driveline dynamic behaviour focusing on the influence of the oil squeeze effect on the idle rattle phenomenon, *Journal of Sound and Vibration*, 303, (2007), 858-872.
- [3] M. De la Cruz, S. Theodossiades, H. Rahnejat, P. Kelly. Analysis of non-linear impact dynamics in automotive transmissions: gear rattle. *Proceedings of the 7th international conference on engineering computational technology* (2010).
- [4] S. Theodossiades, O. Tangasawi, H. Rahnejat. Gear teeth impacts in hydrodynamic conjunctions promoting idle gear rattle, *Journal of Sound and Vibration*, 303 (3-5), (2007), 632-658.
- [5] C. Gill-Jeong. Analysis of the nonlinear behavior of gear pairs considering hydrodynamic lubrication and sliding friction, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23, (2009), 2125-2137.
- [6] R. Guilbault, S. Lalonde, M. Thomas. Nonlinear damping calculation in cylindrical gear dynamic modeling, *Journal of Sound and Vibration*, 331, (2012), 2110-2128.
- [7] F.H. Liu, S. Theodossiades, L.A. Bergman, A.F. Vakakis, D.M. McFarland. Analytical characterization of damping in gear teeth dynamics under hydrodynamic conditions. *Mech Mach Theory*. 94, (2015), 141-7.
- [8] R. Russo, R. Brancati, E. Rocca. Experimental investigations about the influence of oil lubricant between teeth on the gear rattle phenomenon, *Journal of Sound and Vibration*, 321, (2009), 647-661.
- [9] H. Rahnejat, R. Gohar. The vibrations of radial ball bearings. *Proc Inst Mech Eng Part C: J Mech Eng Sci*. 199(3), (1985), 181-93.
- [10] B. Wiegert, H. Hetzler, and W. Seemann. A comparison between elastohydrodynamic and dry hertzian line contacts with regard to their nonlinear vibration behaviour. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. 11, (2011), 335-336.
- [11] B. Wiegert, H. Hetzler, and W. Seemann. An analytical expression of the normal force of hydrodynamic line contacts under transient conditions. *Tribology International*. 61, (2013), 32 – 39.

- 
- [12] J.R. Ottewill, S.A. Neild, R.E. Wilson. An investigation into the effect of tooth profile errors on gear rattle. *J Sound Vib.* 329(17), (2010), 3495–506.
- [13] A. Fernandez-Del-Rincon, A. Diez-Ibarbia, and S. Theodossiades. Gear transmission rattle: Assessment of meshing forces under hydrodynamic lubrication. *Applied Acoustics*. In press (2017).
- [14] A. Diez-Ibarbia, A.F. del Rincon, M. Iglesias, A. de-Juan, P. Garcia, F. Viadero. Efficiency analysis of spur gears with a shifting profile. *Meccanica.* 51(3), (2016), 707–23.
- [15] A. Fernández-del Rincón, M. Iglesias, A. de Juan, A. Diez-Ibarbia, P. García, F. Viadero. Gear transmission dynamics: effects of index and run out errors. *Appl Acoust.* 108, (2016), 63-83.
- [16] A. Fernández del Rincón, F. Viadero, M. Iglesias, P. García, A. de-Juan, R. Sancibrian, A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions, *Mechanism and Machine Theory*, 61, (2013), 30-58.
- [17] Evans CR. Measurement and mapping of the rheological properties of elastohydrodynamic lubricants. University of Cambridge, (1983).