

**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS  
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA  
ESTRUCTURAL Y MECÁNICA**



**TESIS DOCTORAL**

**ANÁLISIS CONJUNTO DE LOS MODOS RESISTENTES  
EN SECCIONES DE PAREDES DELGADAS  
Y SU APLICACIÓN A TABLEROS DE PUENTE**

Autor: **FRANCISCO CAMBRONERO BARRIENTOS**

Director: **JULIÁN DÍAZ DEL VALLE**

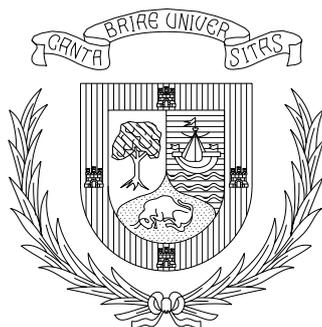
**ENERO DE 2013**



**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS  
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica



**TESIS DOCTORAL**

**ANÁLISIS CONJUNTO DE LOS MODOS RESISTENTES  
EN SECCIONES DE PAREDES DELGADAS  
Y SU APLICACIÓN A TABLEROS DE PUENTE**

Autor: **FRANCISCO CAMBRONERO BARRIENTOS**

Ingeniero de Caminos, Canales, y Puertos

Ingeniero Técnico en Mecánica

Director: **JULIÁN DÍAZ DEL VALLE**

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales, y Puertos

Catedrático de Universidad

**ENERO DE 2013**



# Dedicatoria

A mis padres Francisco y María del Carmen,  
a mi abuela materna María Manuela por su 100 cumpleaños,  
y a todos mis antepasados ya fallecidos,  
para que con este recuerdo no caigan en el olvido.  
Lumbrales (Salamanca), 26 de Noviembre de 2012.

*Verba volant, scripta manent.*

Las palabras se las lleva el aire, lo escrito permanece.



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mi tutor Julián Díaz del Valle,  
el apoyo y ayuda que siempre me ha prestado,  
desde que fui alumno en su aula,  
hasta la elaboración de la presente tesis, en especial.

También quiero expresar mi gratitud a todos aquellos  
que con su ayuda, consejo o apoyo han contribuido  
a que recorriera el largo camino de su elaboración.

Francisco Cambronero Barrientos  
En Burgos, a 20 de Enero de 2013



# Índice general

<b>1. OBJETIVOS Y ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL</b>	<b>13</b>
1.1. OBJETIVOS DE LA TESIS DOCTORAL . . . . .	13
1.2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN . . . . .	14
1.3. ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL . . . . .	15
<b>2. ESTADO DEL ARTE</b>	<b>17</b>
2.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	17
2.2. MODOS RESISTENTES Y ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES . . . . .	18
2.2.1. ELEMENTO DE S.H. ZHANG 1983 . . . . .	18
2.2.2. PROPIEDADES DE SECCIONES. YOO Y ACRA 1986 . . . . .	19
2.2.3. PROPIEDADES DE SECCIONES. MURRAY Y ATTARD 1987 . . . . .	19
2.2.4. ELEMENTO DE LI GUOHAO 1987 . . . . .	19
2.2.5. PROPIEDADES DE SECCIONES. KRENK Y JEPPESEN 1989 . . . . .	20
2.2.6. TEORÍA GENERAL DE VIGAS. RICHARD SCHARDT 1989 . . . . .	20
2.2.7. ARRASTRE POR CORTANTE LAUDIERO Y SAVOIA 1990 . . . . .	21
2.2.8. ELEMENTO DE RAZAQPUR Y LI 1991 . . . . .	21
2.2.9. ELEMENTO DE A. PROKIĆ 1993 . . . . .	22
2.2.10. MODOS RESISTENTES. JEPPE JÖNSSON 1998 . . . . .	24
2.2.11. MEJORA DEL ELEMENTO DE PROKIĆ. KATY SADEÉ 2005 . . . . .	25
2.2.12. ELEMENTO DE SHI-JUN ZHOU 2010 . . . . .	25
2.3. ELEMENTOS EN PROGRAMAS COMERCIALES . . . . .	25
2.3.1. ABAQUS . . . . .	25
2.3.2. ANSYS . . . . .	26
2.3.3. SOFISTIK . . . . .	26
2.3.4. SAP2000 . . . . .	26
2.3.5. LUSAS . . . . .	26
2.3.6. MIDAS . . . . .	27
2.3.7. CAJÓN . . . . .	27
2.4. RESUMEN . . . . .	27
<b>3. MODOS RESISTENTES DE LAS SECCIONES</b>	<b>29</b>
3.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	29
3.2. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS RESISTENTES . . . . .	30
3.3. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE DEFORMACIÓN . . . . .	32
3.4. CONVENIOS DE SIGNOS . . . . .	37

3.5.	ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE UN MODO RESISTENTE . . . . .	37
3.6.	AXIL Y FLEXIÓN . . . . .	41
3.7.	CORTANTES . . . . .	43
3.8.	ÁREAS DE CORTANTE . . . . .	52
3.8.1.	MÉTODO ENERGÉTICO . . . . .	52
3.8.2.	DEFORMACIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE . . . . .	55
3.9.	TORSIÓN UNIFORME . . . . .	56
3.10.	TORSIÓN NO UNIFORME . . . . .	66
3.11.	DISTORSIÓN UNIFORME . . . . .	73
3.12.	DISTORSIÓN NO UNIFORME . . . . .	82
3.13.	RESUMEN DE LOS MODOS RESISTENTES . . . . .	86
<b>4.</b>	<b>FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO UNIDIMENSIONAL</b>	<b>97</b>
4.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	97
4.2.	CAMPO DE MOVIMIENTOS . . . . .	98
4.3.	ALABEOS DE CORTANTE . . . . .	100
4.4.	REDEFINICIÓN DEL CAMPO DE MOVIMIENTOS . . . . .	102
4.5.	DEFORMACIONES Y TENSIONES . . . . .	102
4.6.	ENERGÍA DE DEFORMACIÓN . . . . .	104
4.7.	CARACTERÍSTICAS DE ALABEO DE CORTANTE . . . . .	110
4.8.	GRADOS DE LIBERTAD . . . . .	110
4.9.	ENERGÍA POTENCIAL DE LAS ACCIONES EXTERIORES . . . . .	114
4.10.	ENERGÍA POTENCIAL TOTAL . . . . .	115
4.11.	MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .	115
4.12.	MATRIZ RIGIDEZ . . . . .	116
4.13.	VECTOR DE FUERZAS . . . . .	118
4.14.	CÁLCULO DE ESFUERZOS . . . . .	119
4.15.	CAMBIO DE EJES . . . . .	122
<b>5.</b>	<b>APLICACIÓN EN PROBLEMAS DE FLEXIÓN</b>	<b>123</b>
5.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	123
5.2.	CARACTERÍSTICAS DE ALABEO DE LA SECCIÓN . . . . .	124
5.3.	CÁLCULO ANALÍTICO . . . . .	126
5.3.1.	FLEXIÓN EN EL PLANO $Y - Z$ . . . . .	126
5.3.2.	BIMOMENTO DE CORTANTE . . . . .	127
5.3.3.	ECUACIONES DIFERENCIALES . . . . .	128
5.3.4.	ECUACIONES DE EQUILIBRIO . . . . .	130
5.3.5.	SOLUCIÓN ANALÍTICA Y APLICACIÓN NUMÉRICA . . . . .	131
5.4.	MODELOS DE CÁLCULO NUMÉRICO . . . . .	132
5.5.	ESTUDIO DE CONVERGENCIA . . . . .	135
5.6.	COMPARACIÓN DE MOVIMIENTOS . . . . .	136
5.7.	COMPARACIÓN DE TENSIONES . . . . .	142
5.8.	COMPARACIÓN DE ESFUERZOS . . . . .	143
5.9.	ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS . . . . .	143

<b>6. APLICACIÓN EN PROBLEMAS DE TORSIÓN-DISTORSIÓN</b>	<b>149</b>
6.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	149
6.2. CARACTERÍSTICAS DE LA SECCIÓN . . . . .	151
6.3. DISTORSIÓN SEGÚN TEORÍA CLÁSICA . . . . .	154
6.4. PLANTEAMIENTO DEL CÁLCULO ANALÍTICO . . . . .	155
6.4.1. TORSIÓN-DISTORSIÓN . . . . .	155
6.4.2. ENERGÍA POTENCIAL DE LOS BIMOMENTOS . . . . .	156
6.4.3. ENERGÍA POTENCIAL DE LOS MOMENTOS . . . . .	157
6.4.4. ECUACIONES DIFERENCIALES . . . . .	159
6.4.5. ECUACIONES DE EQUILIBRIO . . . . .	163
6.5. VIGA SIMPLEMENTE APOYADA . . . . .	164
6.5.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA Y APLICACIÓN NUMÉRICA . . . . .	164
6.5.2. MODELOS DE CÁLCULO NUMÉRICO . . . . .	170
6.5.3. ESTUDIO DE CONVERGENCIA . . . . .	171
6.5.4. COMPARACIÓN DE MOVIMIENTOS . . . . .	171
6.5.5. COMPARACIÓN DE TENSIONES . . . . .	175
6.5.6. COMPARACIÓN DE ESFUERZOS . . . . .	180
6.6. VIGA EMPOTRADA . . . . .	184
6.6.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA Y APLICACIÓN NUMÉRICA . . . . .	184
6.6.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL . . . . .	184
6.6.3. MODELOS DE CÁLCULO NUMÉRICO . . . . .	189
6.6.4. ESTUDIO DE CONVERGENCIA . . . . .	189
6.6.5. COMPARACIÓN DE MOVIMIENTOS . . . . .	190
6.6.6. COMPARACIÓN DE TENSIONES . . . . .	193
6.6.7. COMPARACIÓN DE ESFUERZOS . . . . .	198
6.7. ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS . . . . .	199
<b>7. MODOS ADICIONALES DE TORSIÓN Y DISTORSIÓN</b>	<b>201</b>
7.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	201
7.2. MODO ADICIONAL DE TORSIÓN . . . . .	201
7.3. MODO ADICIONAL DE DISTORSIÓN . . . . .	205
7.4. EJEMPLO DE MODOS ADICIONALES . . . . .	205
7.5. ECUACIÓN DIFERENCIAL FLEXIÓN - TORSIÓN - DISTORSIÓN . . . . .	207
7.6. EJEMPLO DE VIGA BIEMPOTRADA . . . . .	211
7.6.1. MOVIMIENTOS . . . . .	211
7.6.2. TENSIONES NORMALES . . . . .	215
7.6.3. TENSIONES TANGENCIALES . . . . .	218
7.7. CONCLUSIONES . . . . .	219
<b>8. APLICACIONES Y ESTUDIOS PRÁCTICOS</b>	<b>221</b>
8.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	221
8.2. EJEMPLO PRÁCTICO DE UN PUENTE REAL . . . . .	222
8.2.1. INTRODUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA . . . . .	222
8.2.2. ACCIONES CONSIDERADAS . . . . .	223
8.2.3. MODELOS DE CÁLCULO . . . . .	225

8.2.4.	ESFUERZOS . . . . .	226
8.2.5.	ANÁLISIS DE LAS TENSIONES . . . . .	226
8.2.6.	CONCLUSIONES . . . . .	228
8.3.	EJEMPLO DE SECCIÓN TRICELULAR CON CANTO VARIABLE . . .	234
8.3.1.	INTRODUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA . . .	234
8.3.2.	CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LA SECCIÓN . . . . .	235
8.3.3.	MODELOS DE CÁLCULO . . . . .	238
8.3.4.	ANÁLISIS DE MOVIMIENTOS . . . . .	238
8.3.5.	ANÁLISIS DE LAS TENSIONES . . . . .	241
8.3.6.	CONCLUSIONES . . . . .	242
8.4.	COEFICIENTE DE EXCENRICIDAD EN UN PUENTE DE VIGAS . .	243
8.4.1.	INTRODUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA . . .	243
8.4.2.	CÁLCULO DE LA ESTRUCTURA . . . . .	243
8.4.3.	COEFICIENTES DE EXCENRICIDAD . . . . .	252
8.4.4.	CÁLCULO APROXIMADO . . . . .	255
8.4.5.	ESTUDIO PARAMÉTRICO . . . . .	258
8.5.	IMPORTANCIA DE LAS TENSIONES POR COACCIÓN AL ALABEO .	260
8.5.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	260
8.5.2.	SECCIÓN TIPO DE CAJÓN UNICELULAR . . . . .	260
8.5.3.	TENSIONES ADIMENSIONALES . . . . .	263
8.5.4.	LUCES DE LOS VANOS Y PRETENSADO . . . . .	264
8.5.5.	SECCIÓN POR CENTRO DEL VANO CENTRAL . . . . .	265
8.5.6.	SECCIÓN POR APOYO EN PILA . . . . .	267
8.5.7.	CONCLUSIONES . . . . .	273
8.6.	REVISIÓN DE LOS COEFICIENTES DE ANCHO EFICAZ . . . . .	274
8.6.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	274
8.6.2.	CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE ANCHO EFICAZ . . . .	274
8.6.3.	REVISIÓN DE LA LUZ EQUIVALENTE . . . . .	276
8.7.	COMPARATIVA ENTRE ECUACIONES DE TORSIÓN Y DISTORSIÓN	279
8.7.1.	INTRODUCCIÓN . . . . .	279
8.7.2.	VIGA BIAPOYADA: COMPARACIÓN DE MOVIMIENTOS . . .	282
8.7.3.	VIGA BIAPOYADA: COMPARACIÓN DE TENSIONES . . . . .	283
8.7.4.	VIGA BIEMPOTRADA . . . . .	286
8.7.5.	CONCLUSIONES . . . . .	287
<b>9.</b>	<b>RESUMEN Y CONCLUSIONES</b>	<b>289</b>
9.1.	RESUMEN . . . . .	289
9.2.	CONCLUSIONES . . . . .	290
9.3.	FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN . . . . .	292
<b>A.</b>	<b>TABLA DE SÍMBOLOS</b>	<b>295</b>
<b>B.</b>	<b>MODOS RESISTENTES: FUNCIONES DE FORMA</b>	<b>299</b>
B.1.	OBTENCIÓN DE LAS FUNCIONES DE FORMA . . . . .	299
B.2.	INTEGRALES DE LAS FUNCIONES DE FORMA . . . . .	302

<b>C. EXPRESIONES DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS</b>	<b>305</b>
<b>D. EJEMPLO DE OBTENCIÓN DE MODOS RESISTENTES</b>	<b>311</b>
D.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	311
D.2. AXIL Y FLEXIÓN . . . . .	312
D.3. CORTANTE $Q_y$ . . . . .	313
D.4. CORTANTE $Q_x$ . . . . .	315
D.5. TORSIÓN UNIFORME . . . . .	317
D.6. TORSIÓN NO UNIFORME . . . . .	319
D.7. DISTORSIÓN UNIFORME . . . . .	321
D.8. DISTORSIÓN NO UNIFORME . . . . .	328
<b>E. EL PROBLEMA DE LA DEFORMACIÓN DE CORTANTE</b>	<b>331</b>
E.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	331
E.2. VIGA BIAPOYADA CON CARGA CONTINUA . . . . .	332
E.2.1. SOLUCIÓN 0: ESTÁTICA . . . . .	332
E.2.2. SOLUCIÓN 1: TEORÍA CLÁSICA . . . . .	333
E.2.3. SOLUCIÓN 2: INTEGRACIÓN DE ALABEOS . . . . .	335
E.2.4. SOLUCIÓN 3: ECUACIÓN DIFERENCIAL . . . . .	339
E.2.5. APLICACIÓN NUMÉRICA . . . . .	344
E.3. VIGA BIAPOYADA CON CARGA PUNTUAL . . . . .	346
E.3.1. SOLUCIÓN 0: ESTÁTICA . . . . .	346
E.3.2. SOLUCIÓN 1: TEORÍA CLÁSICA . . . . .	346
E.3.3. SOLUCIÓN 2: INTEGRACIÓN DE ALABEOS . . . . .	348
E.3.4. SOLUCIÓN 3: ECUACIÓN DIFERENCIAL . . . . .	349
E.4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS . . . . .	350
<b>F. ELEMENTO UNIDIMENSIONAL: FUNCIONES DE FORMA</b>	<b>351</b>
<b>G. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE UN MODELO M.E.F.</b>	<b>355</b>
G.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	355
G.2. DESCOMPOSICIÓN DE TENSIONES . . . . .	355
G.3. DESCOMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS . . . . .	356
G.4. MODELO DE REGRESIÓN LINEAL GENERAL . . . . .	357
G.5. EJEMPLO DE DESCOMPOSICIÓN DE TENSIONES . . . . .	357
<b>H. SECCIÓN CAJÓN. CÁLCULO CONVENCIONAL</b>	<b>361</b>
H.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	361
H.2. AXIL Y FLEXIÓN . . . . .	362
H.3. CORTANTE . . . . .	362
H.4. TORSIÓN UNIFORME . . . . .	365
H.5. TORSIÓN NO UNIFORME . . . . .	367
H.6. DISTORSIÓN . . . . .	368
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>373</b>



# Capítulo 1

## OBJETIVOS Y ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL

### 1.1. OBJETIVOS DE LA TESIS DOCTORAL

Al realizar el proyecto de un puente utilizando la teoría clásica de flexión de barras de Euler-Bernoulli y de torsión uniforme de Saint-Venant, se puede obtener adecuadamente la respuesta de la estructura cuando la sección es sólida, es decir, sin huecos importantes, y con espesores de pared pequeños respecto de las dimensiones exteriores de la sección. Pero cuando la sección es de paredes delgadas (*thin-walled* en inglés) hay que utilizar la teoría de V.Z. Vlasov [1] para este tipo de secciones, para tener en cuenta que las secciones se alabean, que es lo mismo que decir que no permanecen planas. En la teoría de V.Z. Vlasov se adopta la hipótesis<sup>1</sup> de despreciar la deformación por cortante de la superficie media de las paredes ( $\gamma_{sz} = 0$ ), hipótesis que es adecuada en secciones abiertas pero no en secciones cerradas, como son las secciones tipo cajón de puentes. Sucesivos investigadores han extendido la teoría de Vlasov para secciones cerradas.

Además de los mecanismos resistentes indicados, en la sección de un tablero de puente con sección de paredes delgadas aparecen también otros como: flexión local por cargas localizadas, influencia de las deformaciones de cortante en la distribución de tensiones longitudinales etc. Lo cual hace, que por la compleja respuesta de un tablero de puente con sección de este tipo, sea muy utilizado el método de elementos finitos con elementos tipo lámina o sólido para el análisis de tensiones y esfuerzos. El método de los elementos finitos tiene en cuenta de forma conjunta todos los fenómenos resistentes de la sección, pero no proporciona información de la descomposición de los resultados como suma de dichos fenómenos. Pero conocer dicha descomposición durante la realización del proyecto de una estructura es deseable para:

- Comprender el funcionamiento de la estructura, con lo cual es posible optimizar el diseño de la misma, mejorando los comportamientos en los aspectos en que se revele más débil.
- Poder aplicar la normativa de estructuras, en la que de forma general las comprobaciones hay que realizarlas con esfuerzos y con modos resistentes por separado, y

---

<sup>1</sup>V.Z. Vlasov [1] página 15.

no con tensiones totales. Especialmente en el caso de estructuras de hormigón.

Por otra parte, con el empleo del método de los elementos finitos el modelo de cálculo necesita gran cantidad de grados de libertad, lo que lleva a que se consuma mucho tiempo en crear los modelos de cálculo y luego en revisar los resultados. Tiempo que en la realización de proyectos siempre es limitado, y tiene una valoración económica en horas de ingeniería necesarias.

Por ello, pensamos que para el cálculo del comportamiento global de un puente con sección de paredes delgadas, es deseable un cálculo unidimensional que utilizando los modos resistentes de la sección permita obtener tanto esfuerzos a nivel de sección, como la distribución de tensiones dentro de la misma, con un tiempo de modelización, cálculo y análisis de resultados mucho más pequeño que cuando se utiliza el método de los elementos finitos con elementos tridimensionales. Y además, por partir de los modos resistentes, se obtendrá directamente la descomposición de los esfuerzos y las tensiones totales.

En base a lo comentado, nos planteamos el objetivo de desarrollar una metodología general aplicable a cualquier sección, que comprenda el cálculo de los modos resistentes de la sección conjuntamente con un elemento finito unidimensional que utilice dichos modos. Los modos resistentes a considerar serían los siguientes: alargamiento longitudinal, flexión longitudinal en dos planos distintos e incluyendo la interacción de los cortantes con las tensiones normales, torsión uniforme y no uniforme, y distorsión.

## 1.2. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Para alcanzar el objetivo propuesto, se ha dividido el trabajo de investigación en las siguientes partes:

- Identificación de los modos resistentes, y planteamiento de su cálculo con una metodología válida para todo tipo de sección. Y comprobación de la misma mediante ejemplos con resolución analítica y numérica.
- Formulación de un método de cálculo conjunto de todos los modos resistentes, y verificación del mismo mediante ejemplos con resolución analítica y numérica, que serán comparados con soluciones mediante el uso de elementos finitos tipo lámina o con el método semianalítico de bandas finitas con elementos tipo lámina (combinación de una banda finita para placa con una banda finita para laja).
- Desarrollo de un elemento finito unidimensional con el mínimo número de grados de libertad posible, que implemente la formulación anterior. Y verificación del mismo por comparación con soluciones analíticas y numéricas.
- Estudio del rango de aplicabilidad de la teoría desarrollada en base a las hipótesis que se hayan utilizado.
- Realización de ejemplos prácticos de uso, para constatar las posibilidades de uso y la utilidad de los resultados del trabajo de investigación.

### 1.3. ESTRUCTURA DE LA TESIS DOCTORAL

El presente trabajo de investigación sobre el cálculo conjunto de todos los modos resistentes en piezas con sección de paredes delgadas, se ha estructurado en los siguientes capítulos:

En el **Capítulo 1: Objetivos y estructura de la tesis doctoral**, se enumeran los objetivos esenciales y específicos del presente trabajo de investigación, y se presenta la forma en la que se ha estructurado el documento.

En el **Capítulo 2: Estado del arte**, se repasa en orden cronológico los avances más significativos en el cálculo de los modos resistentes de las secciones de paredes delgadas, y en el desarrollo de elementos unidimensionales que los utilizan. Como complemento se analizan las posibilidades que en este campo tienen los programas comerciales más utilizados de cálculo de estructuras para puentes, ya que consideramos que representan la aplicación práctica para el gran público de los estudios de investigación en este campo.

En el **Capítulo 3: Modos resistentes de las secciones**, habiéndose tomado como método de obtención de los modos resistentes el desarrollado por Steen Krenk y Bo Jøppensen [2] y ampliado por Jeppe Jönsson [3], se expone el mismo, y se proponen nuevos elementos finitos que permitan resolver el problema matemático de forma exacta en todos los casos, y también disminuir al máximo el número de grados de libertad necesarios.

En el **Capítulo 4: Formulación de un elemento unidimensional con todos los modos resistentes**, se parte del campo de movimientos como suma de la contribución de todos los modos, y luego es modificado para poder incluir el alabeo por cortante. A continuación se eligen los grados de libertad y funciones de forma que interpolen dicho campo de movimientos para un elemento unidimensional, y mediante el método de minimizar la energía potencial total se plantea la obtención de la matriz de rigidez del elemento.

En el **Capítulo 5: Aplicación en problemas de flexión**, se pretende verificar la bondad de la utilización del cálculo de los modos resistentes y del elemento unidimensional desarrollados en problemas en que sólo haya flexión. Se plantea un problema concreto consistente en una viga de dos vanos iguales con carga repartida en el primero, y se resuelve de tres formas: analíticamente, planteando y resolviendo las ecuaciones diferenciales del problema; numéricamente mediante el elemento finito unidimensional desarrollado; y mediante el método de los elementos finitos con elementos tipo lámina. Las tres soluciones son comparadas para verificar los resultados de la metodología de cálculo propuesta para este tipo de problemas, y también se hace un estudio de convergencia en función del número total de grados de libertad utilizados.

En el **Capítulo 6: Aplicación en problemas de torsión-distorsión**, se hace un estudio semejante al del capítulo anterior, pero en este caso referido a problemas en que sólo haya torsión y distorsión. En este caso se plantea el problema de una viga de un vano con sección cajón, con apoyos en horquilla o de empotramiento en ambos extremos, y sometida a carga torsora en toda su longitud. En la resolución mediante ecuaciones diferenciales se hace una revisión de las distintas formas que estas pueden tomar, según las características mecánicas de acoplamiento entre torsión y distorsión que se consideren.

En el **Capítulo 7: Modos adicionales de torsión y distorsión**, se trata de dar solución a la problemática que se plantea en el capítulo anterior, referente a que los resultados que se obtienen en problemas de torsión y distorsión tienen cierto grado de inexactitud

en las secciones de empotramiento. Para tratar de mejorar la solución se propone considerar modos adicionales para estos fenómenos resistentes. Se estudia como obtenerlos, y se prueba su utilización.

En el **Capítulo 8: Aplicaciones y estudios prácticos**, mediante varios trabajos se trata de mostrar como se puede utilizar el trabajo desarrollado en casos prácticos de proyectos de puentes, o como herramienta de investigación en el estudio del comportamiento de los mismos.

En el **Capítulo 9: Resumen y conclusiones**, se exponen las conclusiones sobre el trabajo de investigación que se ha realizado, tanto sobre sus partes teóricas como prácticas. También se indican aquellos aspectos que pueden ser mejorados o ampliados mediante una futura investigación.

Para facilitar la lectura del presente trabajo, los contenidos que se han considerado auxiliares, se han incluido al final en apéndices. Entre ellos, reseñamos a continuación los que tienen más relevancia:

En el **Apéndice D: Ejemplo de obtención de modos resistentes**, se aplica a una sección concreta la metodología del capítulo 3 para obtener los modos resistentes. El ejemplo se hace paso a paso y de forma analítica para una mejor comprensión del método. En algunos ejemplos de verificación o aplicación se utilizan los resultados de este apéndice.

En el **Apéndice E: El problema de la deformación de cortante**, se analiza el fenómeno de la influencia de las deformaciones por tensiones tangenciales por cortante en las tensiones normales. El cual, de acuerdo con las conclusiones del capítulo 2 del estado del arte, es el que resulta ser más difícil de incluir en un elemento finito unidimensional. En este apéndice se aborda la resolución de varios problemas de forma analítica utilizando el modo resistente de cortante tal como se ha obtenido en el apartado correspondiente del capítulo 3, para comprender las dificultades que entraña su cálculo.

En el **Apéndice G: Descomposición en modos de un modelo M.E.F.**, se expone como mediante la utilización de métodos estadísticos se pueden descomponer en forma de suma de modos resistentes, los resultados de un modelo de elementos finitos tipo lámina. El objeto es para que cuando se vaya a validar los resultados del elemento unidimensional propuesto en el capítulo 4, además de comparar en tensiones o movimientos totales, se pueda realizar la comparación en valores parciales por modos resistentes. También, de forma independientemente al uso del elemento unidimensional que se ha propuesto, lo expuesto en este apéndice constituye una herramienta para analizar los resultados de un modelo de elementos finitos mediante su descomposición en modos. Se incluye un ejemplo numérico de descomposición.

## Capítulo 2

# ESTADO DEL ARTE

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Para el desarrollo de la parte teórica del presente trabajo de investigación, primero se necesita establecer un método adecuado de cálculo de cada uno de los modos resistentes de una sección de paredes delgadas considerándolos de forma aislada cada uno, y en segundo lugar desarrollar un elemento finito unidimensional que contemple todos ellos. Como ya existen muchos estudios sobre el tema, el primer paso necesario es conocer las diferentes opciones de cálculo ya existentes, para sobre ellas elegir las que se consideren más apropiadas como punto de partida en la búsqueda de conseguir el objetivo de este trabajo. Como en gran número de casos ambas partes del problema (modos resistentes y su uso en un elemento finito) forman una unidad, ya que de forma separada no tienen sentido, hemos optado por una presentación conjunta en orden cronológico.

En la amplia literatura existente sobre secciones de paredes delgadas (*thin-walled*) se puede encontrar trabajos específicos sobre el estado del arte en su conocimiento, abarcando temporalmente desde sus inicios a la actualidad, como es el caso de los realizados por Khaled M. Sennah y John B. Kennedy [4] [5] y que además están centrados en la aplicación al análisis de puentes, que es también el objetivo de aplicación del presente trabajo. Por ello hemos optado por centrarnos en presentar los trabajos más relevantes en relación al fin que perseguimos.

Para cada uno de los diferentes elementos finitos que vamos a presentar, incluimos un cuadro con el resumen de sus principales características para poder fácilmente compararlos. Al indicar los grados de libertad de los diferentes elementos, hemos adaptado en todos los casos la nomenclatura que usa cada autor, a la utilizada en el presente trabajo para facilitar la comparación.

Como veremos en este apartado, la inclusión del fenómeno de la influencia de las deformaciones tangenciales por cortante en las tensiones normales de flexión (*shear-lag* en inglés), es la principal carencia que tienen varios de los trabajos de investigación que se han revisado, y para el que se han propuesto diversas soluciones, por dicho motivo incluimos referencias de trabajos dedicados únicamente a este tema. Siendo el método de los elementos finitos con elementos tridimensionales o lámina, muy utilizado en el análisis del fenómeno del arrastre de cortante, obviamos las referencias en que se emplea por no ser de utilidad para nuestros objetivos.

También consideramos importante conocer cuales son los elementos finitos específicos para el cálculo de secciones de paredes delgadas, que se pueden encontrar en los programas comerciales de cálculo de estructuras más utilizados, y por tanto disponibles no sólo por los investigadores. Por ello dedicamos un apartado a este tema.

## 2.2. MODOS RESISTENTES Y ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES

### 2.2.1. ELEMENTO DE S.H. ZHANG 1983

Los investigadores S.H. Zhang, L.F. Boswell y L.P.R. Lyons presentaron en 1983 [6] [7] [8] un elemento tipo barra para análisis de estructuras con sección de paredes delgadas. El elemento es curvo en el espacio, definido por tres nudos tal como se puede ver en la figura (2.1). Cada nudo tiene nueve grados de libertad, a los seis grados convencionales de una barra en el espacio (tres movimientos y tres giros), se les añade la derivada del giro de torsión y el movimiento de distorsión y su derivada. Incluye la deformación por cortante mediante el uso del área de cortante. A la sección se le impone la restricción de tener un eje de simetría.

Al calcular las tensiones [7] [8], al término correspondiente a la tensión por flexión contenida en el eje de simetría (que da un valor constante si la coordenada  $y$  es constante), se la multiplica por una función dependiente de un coeficiente de ancho eficaz para tener en cuenta la influencia del fenómeno de arrastre de cortante en las tensiones. La función es distinta según la pared corresponda a un voladizo, o esté entre dos almas.

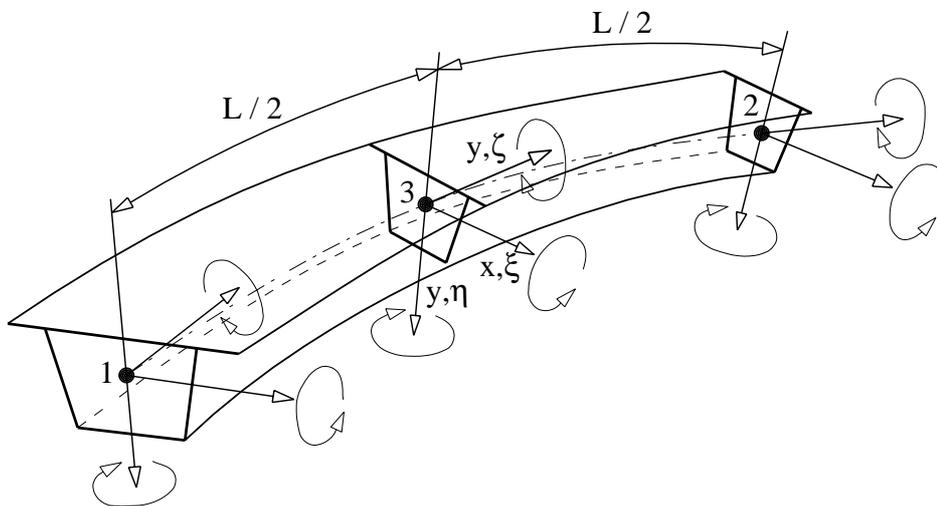


Figura 2.1: Elemento barra. S.H. Zhang 1983.

En la siguiente tabla se indica un resumen de las características de este elemento.

Autor/es	<b>S.H. Zhang , L.F. Boswell , L.P.R. Lyons</b>	
Sección	Con un eje de simetría	
Directriz	Curva en el espacio	
Nº de nudos	3	
Nº de g.d.l.	9 x 3 = 27	
g.d.l.	Movimientos:	$u_x , u_y , u_z$
	Giros:	$\theta_x , \theta_y , \theta_z , \theta'_z$
	Distorsión:	$\psi_d , \psi'_d$
Torsión-Distorsión	Ambas incluidas, estando desacopladas.	
Cortante	Deformación por cortante mediante el uso del área de cortante. Sin variación de tensiones normales por arrastre de cortante.	

### 2.2.2. PROPIEDADES DE SECCIONES. YOO Y ACRA 1986

Las características de las secciones de paredes delgadas son a menudo obtenidas mediante métodos analíticos, los cuales en las secciones cerradas supone el convertirlas en abiertas mediante cortes, y establecer ecuaciones de compatibilidad para obtener las variables incógnitas en los cortes realizados. Como el cálculo manual es muy laborioso, se han hecho programas de ordenador para realizar los cálculos necesarios, como por ejemplo el programa presentado por Chai Hong Yoo y Samir V. Acra en 1986 [9].

### 2.2.3. PROPIEDADES DE SECCIONES. MURRAY Y ATTARD 1987

Otro ejemplo de procedimiento para la obtención de las propiedades de secciones mediante métodos analíticos es el de Murray y Attard en 1987 [10]. En su método, se toman como incógnitas los alabeos en los nudos de la sección, y se plantea su obtención mediante el empleo de matrices, pero sigue siendo necesario establecer ecuaciones de compatibilidad en las secciones cerradas. Para el establecimiento de estas ecuaciones automáticamente por un programa de ordenador, es necesario un estudio complicado de la topología de la sección, para determinar el número de circuitos cerrados y donde cortarlos para convertir la sección en abierta.

### 2.2.4. ELEMENTO DE LI GUOHAO 1987

En el libro de 1987 de Li Guohao [11] se incluye el desarrollo de un elemento curvo con todos los fenómenos resistentes menos el efecto de arrastre de cortante en las tensiones normales. Todos los movimientos incluyen como grados de libertad las derivadas primera y segunda, aunque como es conocido en el método de los elementos finitos en general no es recomendable un exceso de continuidad por encima de la mínima necesaria. Las características de este elemento son:

Autor/es	<b>Li Guohao</b>	
Sección	Cualquiera	
Directriz	Curva en el espacio	
Nº de nudos	2	
Nº de g.d.l.	15 x 2 = 30	
g.d.l.	Movimientos:	$u_x, u_y, u_z$ y las primeras y segundas derivadas
	Giros:	$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ y las primeras y segundas derivadas
	Distorsión:	$\psi_d$ y la primera y segunda derivada
Torsión-Distorsión	Ambas incluidas, estando acopladas.	
Cortante	Sin variación de tensiones normales por arrastre de cortante.	

### 2.2.5. PROPIEDADES DE SECCIONES. KRENK Y JEPPESEN 1989

Los investigadores Steen Krenk y Bo Jeppesen publican en 1989 [2] un método para obtener mediante el método de los elementos finitos la distribución de tensiones, funciones de alabeo y características mecánicas en vigas de secciones de paredes delgadas para los modos resistentes de cortante y torsión uniforme. La sección se discretiza en elementos de dos nudos, teniendo el elemento cuatro grados de libertad en total, dos nodales y dos internos del elemento que dan la solución exacta del problema. Frente a métodos de cálculo basados en las ecuaciones analíticas del comportamiento de la sección, el método presentado es muy fácil de implementar en un programa de ordenador para cualquier forma de sección, ya sean abiertas o con múltiples circuitos cerrados. Este método es un desarrollo de uno anterior de S. Krenk y O. Gunneskov [12] en que para obtener las propiedades de la sección, esta es discretizada en un modelo bidimensional mediante elementos finitos triangulares.

### 2.2.6. TEORÍA GENERAL DE VIGAS. RICHARD SCHARDT 1989

La denominada *Teoría general de vigas (Generalized Beam Theory)* ha sido desarrollada por Richard Schardt [13] y continuada por otros investigadores [14] [15], y se basa en que a partir de una discretización de una sección con  $n$  nodos, planteando las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas de la sección se llega a un problema de autovalores donde los  $n$  autovectores que se obtienen definen los movimientos en el plano de la sección y fuera del mismo de los posibles modos de deformación de la sección, véase a modo de ejemplo la figura (2.2). Los cuatro primeros modos que se obtienen se corresponden con los modos resistentes de axil, flexión en dos direcciones y torsión, denominados modos rígidos por no deformarse la sección, siendo los siguientes modos de distorsión, por deformarse la sección en sentido transversal.

Para resolver el problema de una viga con una determinada carga, la solución es una combinación de todos los  $n$  modos de la sección, que por ser ortogonales conducen a un sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales, que se resuelven de forma analítica o numérica mediante diferencias finitas o elementos finitos. Esta teoría es aplicada especialmente en el estudio de inestabilidad de perfiles metálicos.

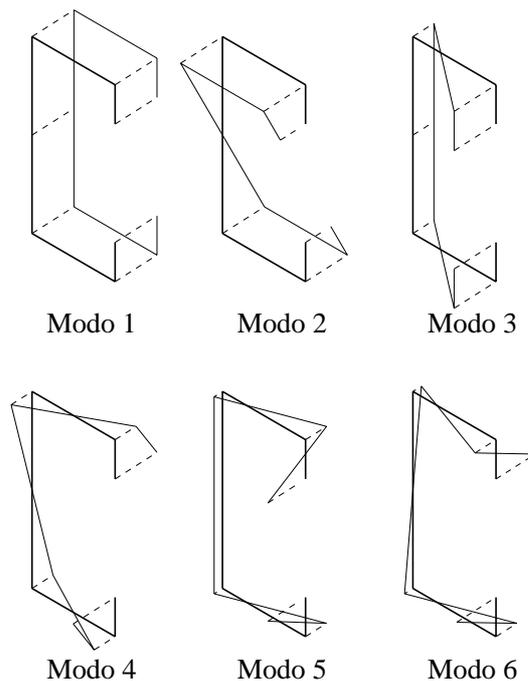


Figura 2.2: Teoría general de vigas. Modos de una sección en  $C$ .

### 2.2.7. ARRASTRE POR CORTANTE LAUDIERO Y SAVOIA 1990

En 1990 Ferdinando Laudiero y Marco Savoia publican un trabajo [16] [17] [18] sobre la influencia de las deformaciones tangenciales en problemas de flexión y torsión en vigas con secciones de paredes delgadas. Se plantea de forma analítica la obtención de la función de alabeo de la sección mediante integración de las tensiones tangenciales por cortante. A lo largo de la pieza el movimiento longitudinal se define por el producto de la función de alabeo que sólo depende de las coordenadas transversales en la sección, por una función de intensidad que sólo depende de la coordenada longitudinal a lo largo de la pieza. A partir del campo de movimientos y minimizando la energía potencial total se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales que resuelven de forma analítica para varios casos particulares.

### 2.2.8. ELEMENTO DE RAZAQPUR Y LI 1991

En 1991 A. Ghani Razaqpur y Hangang G. Li [19] [20] desarrollan un elemento barra con dos nudos de directriz recta, para vigas con secciones de paredes delgadas, que incluye todos los modos resistentes. Posteriormente en 1994 lo extienden a barras curvas en el espacio [21]. Para los modos de axil, flexión, torsión y distorsión se parte de la teoría clásica para ellos, utilizando funciones de forma basadas en las soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes. Este elemento se puede ver en la figura (2.3).

Para tener en cuenta el arrastre de tensiones por cortante se añaden grados de libertad adicionales que representan el alabeo de las tablas superior e inferior de la sección, utilizando funciones de forma cuadráticas. En la figura (2.4) se reproduce para varias secciones las funciones de forma utilizadas. Los grados de libertad utilizados dependen de la forma de la sección, por lo que no es un elemento de uso general, si no restringido a una serie de

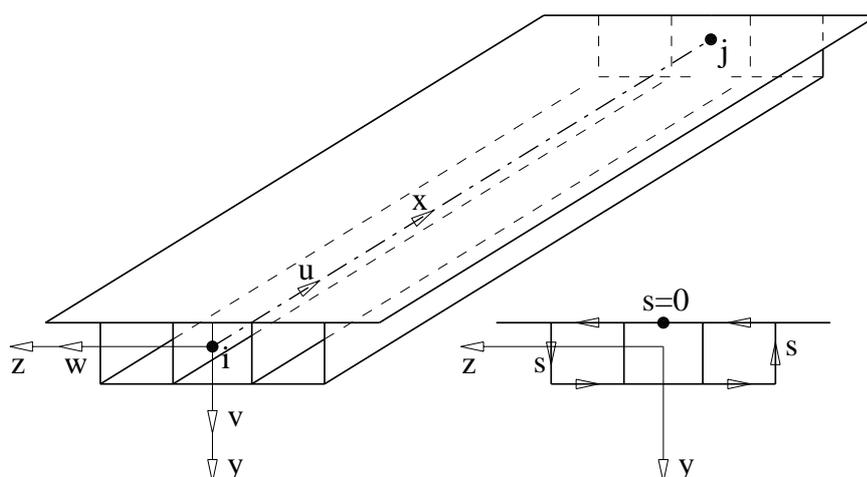


Figura 2.3: Razaqpur y Li 1991. Definición del elemento barra.

secciones tipo.

En la siguiente tabla se indica un resumen de las características de este elemento.

Autor/es	<b>A. Ghani Razaqpur y Hangang G. Li</b>	
Sección	Restringida a una serie de secciones tipo	
Directriz	Curva en el espacio	
Nº de nudos	2	
Nº de g.d.l.	7 x 2 + nº variable	
g.d.l.	Movimientos:	$u_x, u_y, u_z$
	Giros:	$\theta_x, \theta'_x, \theta_y, \theta'_y, \theta_z, \theta'_z$
	Distorsión:	$\psi_d, \psi'_d, 2$ g.d.l. por modo considerado
	Alabeo cortante:	3-5 según la forma de la sección
Torsión-Distorsión	Ambas incluidas, estando desacopladas.	
Cortante	Con deformación por cortante. Con variación de tensiones normales por arrastre de cortante.	

En 1996 A. Tesar [22], en 2004 Q.Z. Luo *et al* [23] y en 2006 Luigino Dezi *et al* [24] proponen un método de obtención de la variación de tensiones por el efecto de arrastre de cortante semejante al de Razaqpur y Li.

### 2.2.9. ELEMENTO DE A. PROKIĆ 1993

En 1993 A. Prokić [25] [26] [27] [28] [29] como resultado de la investigación para su tesis doctoral presenta un elemento barra pensado especialmente para incluir el efecto del arrastre de cortante en las tensiones normales. Tal como se ve en la figura (2.5) el elemento es de directriz recta, estando definido por 3 nudos.

El número de grados de libertad por nudo de la barra es variable. Todos los nudos tienen asignados los cinco grados de libertad convencionalmente usados para los modos de flexión y torsión  $\{ u_x, u_y, \theta_x, \theta_y, \theta_z \}$ , para los que se utiliza interpolación cuadrática

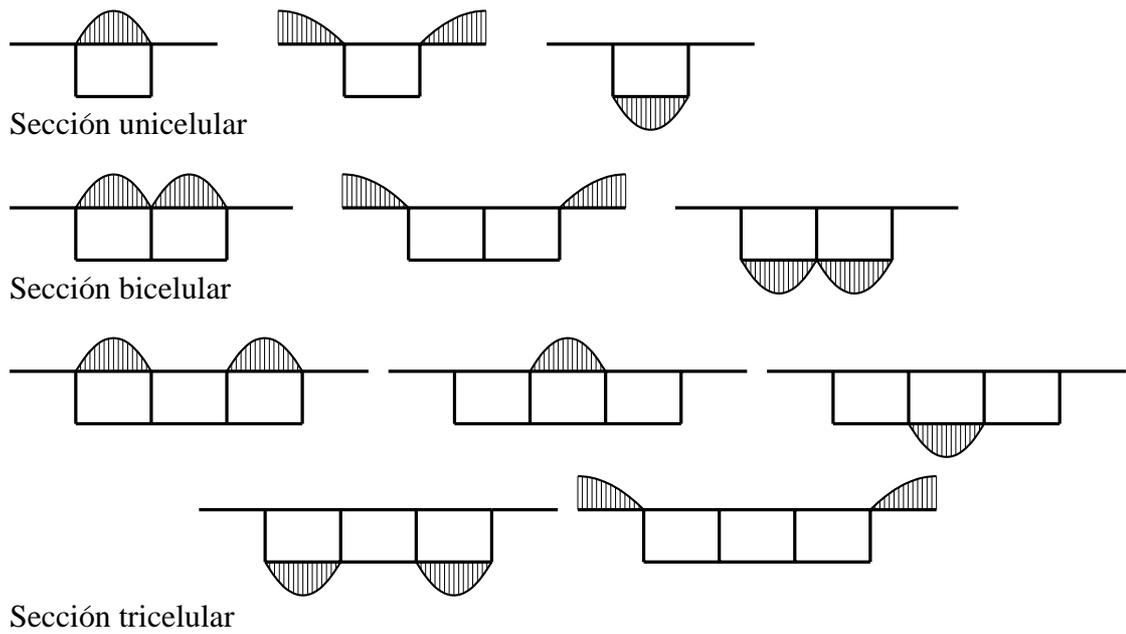


Figura 2.4: Razaqpur y Li 1991. Funciones de forma para el alabeo por cortante.

a lo largo de la barra. Para tener en cuenta el modo de axil se añade a los dos nudos extremos un grado de libertad adicional ( $u_z$ ), con los que se utiliza interpolación lineal.

La sección se discretiza con un número  $n$  de nodos, asignando por cada uno de ellos en los nudos extremos de la barra un grado de libertad que representa el alabeo que hace que la sección deje de permanecer plana. La función de forma utilizada para cada uno de estos grados de libertad vale 1.0 en el nodo, y varía linealmente hasta el valor 0.0 en los nodos adyacentes, tal como se representa en la figura (2.6). La sección se considera perfectamente rígida en su plano, por lo que no se incluye el modo resistente de distorsión.

En la siguiente tabla se indica un resumen de las características de este elemento.

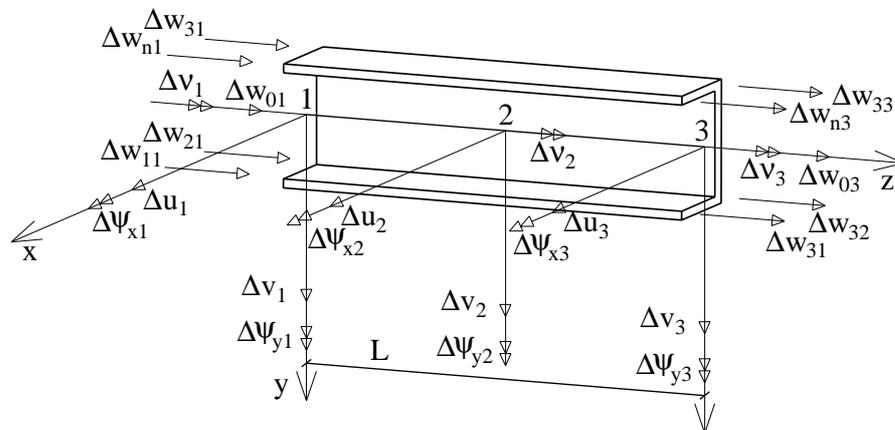
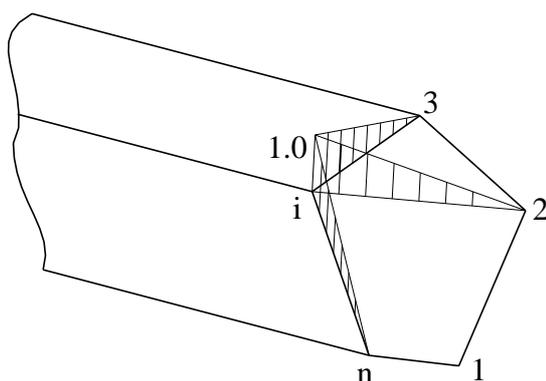


Figura 2.5: Prokić 1993. Definición del elemento barra.


 Figura 2.6: Prokić 1993. Función de forma para el alabeo  $w_i$  del nudo  $i$ .

Autor/es	<b>A. Prokić</b>	
Sección	Cualquiera. Discretizada en $n$ nodos	
Directriz	Recta en el espacio	
Nº de nudos	3	
Nº de g.d.l.	$(6 + n) + 5 + (6 + n) = 17 + 2 \cdot n$	
g.d.l.	Movimientos:	$u_x, u_y$ en los 3 nudos $u_z$ sólo en los nudos extremos
	Giros:	$\theta_x, \theta_y, \theta_z$
	Alabeo:	$n$ variables $w_i$ , sólo en los nudos extremos
Torsión-Distorsión	Sin distorsión	
Cortante	Con deformación por cortante. Con variación de tensiones normales por arrastre de cortante.	

Resulta un elemento con un número de grados de libertad variable. Se puede decir que más que un elemento tipo barra, en que sólo hubiese discretización en sentido longitudinal, es un elemento finito tridimensional en el que hay discretización tanto en sentido longitudinal como en sentido transversal dentro de la sección.

### 2.2.10. MODOS RESISTENTES. JEPPE JÖNSSON 1998

El investigador danés Jeppe Jönsson publica en 1998 [3] una extensión del trabajo de Steen Krenk y Bo Jeppesen [2] en que se amplía el método de los elementos finitos de dichos autores a la obtención de las características mecánicas de torsión no uniforme y distorsión en secciones de paredes delgadas. El elemento finito utilizado es de dos nudos, cada uno con un grado de libertad que representa el alabeo del nudo, utilizándose para interpolar dentro del elemento funciones de forma lineales. Para mejorar la exactitud del método se propone el uso de la técnica de las subestructuras, dividiendo de forma recursiva el elemento finito de interpolación lineal inicial. El autor aplica las características obtenidas en la resolución de forma analítica de problemas de distorsión [30] [31].

### 2.2.11. MEJORA DEL ELEMENTO DE PROKIĆ. KATY SADEÉ 2005

En su tesis doctoral del año 2005 [32] la investigadora Katy Sadeé estudia el elemento propuesto por A. Prokić [25] analizando sus virtudes y defectos, y proponiendo su mejora, manteniendo las ideas básicas respecto de las funciones de forma y grados de libertad utilizados en el elemento original de Prokić.

### 2.2.12. ELEMENTO DE SHI-JUN ZHOU 2010

En el año 2010 Shi-Jun Zhou [33] [34] publica un trabajo en el que propone un elemento barra de dos nudos para estructuras lineales que incluye el fenómeno de arrastre de cortante. Tomando como punto de partida la solución de Eric Reissner [35] para este problema, considera que el alabeo por arrastre de cortante viene dado por el producto de funciones de forma polinómicas de grado tres por una función de intensidad a lo largo de la pieza. Para esta función de intensidad se toman como grados de libertad su valor, y el de su derivada primera en los nudos del elemento. Las características del elemento resultante son:

Autor/es	<b>Shi-Jun Zhou</b>	
Sección	Restringida a una sección tipo dada	
Directriz	Recta (para elementos lineales en el plano)	
Nº de nudos	2	
Nº de g.d.l.	2 x 4 = 8	
g.d.l.	Movimientos:	$u_y$
	Giros:	$\theta_x$
	Alabeo:	$\chi_y$ , $\chi'_y$ intensidad del alabeo
Torsión-Distorsión	No incluidos	
Cortante	Con variación de tensiones normales por arrastre de cortante.	

## 2.3. ELEMENTOS EN PROGRAMAS COMERCIALES

En este apartado se hace un repaso de los programas comerciales de elementos finitos más utilizados en el proyecto de puentes, viendo si disponen de algún elemento unidimensional específico para secciones de paredes delgadas que implemente capacidades adicionales a las del elemento barra basado en la teoría clásica.

### 2.3.1. ABAQUS

*Abaqus* es un programa general de cálculo general mediante elementos finitos, y por tanto sin ninguna especialización para el proyecto de puentes. Consultado el manual de la versión 6.11 del año 2011 [36], se encuentra que dispone dos elementos tipo barra denominados *B31OS* y *B32OS* pensados para su empleo con secciones abiertas de paredes delgadas en las que el alabeo por torsión sea importante. Ambos elementos son para modelos 3D, teniendo el primero dos nudos y el segundo tres. En el manual de teoría se indica que se supone que la amplitud del alabeo nunca es grande, por suponerse que estará limitado en algunos puntos intermedios o impedido en uno o ambos extremos. A los seis grados convencionales para las barra 3D se añade un séptimo que representa la

magnitud del alabeo. Se tiene en cuenta la deformación de la sección por cortante mediante el uso del área de cortante.

### 2.3.2. ANSYS

*Ansys* es también un programa general de cálculo general mediante elementos finitos. En el manual de la versión 13.0 del año 2010 [37] existe el elemento finito de nombre *BEAM24 3D Thin-walled beam*, a pesar de su nombre es una barra 3D convencional que sólo de forma adicional permite definir la forma de la sección, la cual puede ser abierta o cerrada con un circuito como máximo.

El programa dispone de los elementos denominados *BEAM188* y *BEAM189* que son barras 3D, la primera de dos nudos y la segunda de tres, que tienen un séptimo grado de libertad que representan el alabeo por torsión. Son equivalentes a las dos barras indicadas que dispone el programa *Abaqus*.

### 2.3.3. SOFISTIK

*Sofistik* es un programa de cálculo por elementos finitos dividido en módulos específicos por tipologías de estructuras, contando con uno específico para el cálculo de puentes. De acuerdo con el manual del módulo para definición de secciones *Aqua* en la versión del año 2007 [38], permite calcular la función de alabeo por torsión y el módulo de alabeo, que luego puede ser utilizado con los elementos barra añadiendo un séptimo grado de libertad correspondiente al alabeo por torsión a los seis de la barra convencional 3D. La deformación por cortante se tiene en cuenta mediante la definición del área de cortante. Se puede definir el ancho eficaz de la sección para tener en cuenta el efecto de arrastre de cortante.

### 2.3.4. SAP2000

El programa *Sap2000* es también un programa con módulos específicos para cada tipo de estructura, llamándose *CSiBridge* el módulo específico para puentes. Consultado el manual de referencia de la versión del año 2008 [39] no se ha encontrado ningún tipo de elemento barra con capacidades adicionales a las convencionales. En la ayuda del programa en internet<sup>1</sup>, se indica que para tener en cuenta el alabeo de las secciones, los elementos estructurales lineales deben ser modelizados con elementos laminares o sólidos.

### 2.3.5. LUSAS

El programa *Lusas* dispone también de un módulo específico para puentes. Consultado el manual de la versión 13.4 del año 2012 [40] tampoco dispone de ningún tipo de elemento barra con características adicionales a las convencionales.

---

<sup>1</sup>SAP2000 English Manuals. <http://www.comp-engineering.com/SAPManE.htm>

### 2.3.6. MIDAS

El programa *Midas Civil* es el módulo de este paquete informático para diseño de puentes y estructuras de obra civil. Consultado el manual en línea en internet<sup>2</sup> de la versión 2011, no se ha encontrado ningún elemento con posibilidades especiales de cálculo para secciones de paredes delgadas.

### 2.3.7. CAJÓN

El programa *Cajón* de la *Colección Caminos* [41] analiza separadamente los mecanismos de flexión, torsión de Saint-Venant y de alabeo, y de distorsión. Integra mediante el método de los elementos finitos la ecuación diferencial de la distorsión, modelada como una viga sobre terreno Winkler, donde los muelles representan la rigidez de las paredes frente a la distorsión. Permite además introducir muelles concentrados para simular la rigidez distorsional de los posibles diafragmas. El programa considera el arrastre de cortante según la formulación de la normativa española para puentes mixtos RPX-95 [42].

## 2.4. RESUMEN

Como se ha visto para el cálculo conjunto de los modos resistentes en vigas con sección de paredes delgadas, diversos investigadores han desarrollado elementos finitos unidimensionales para piezas de paredes delgadas, pudiéndose achacar a cada uno de ellos alguna carencia o defecto que impiden que sea de uso general. También se ha visto que ninguno está implementado en los programas comerciales de elementos finitos al alcance general de los proyectistas.

Pensamos que los motivos por los que no se ha encontrado un elemento unidimensional de uso general, y de fácil implementación en un programa informático comercial de cálculo de estructuras son:

- Las dificultades en el cálculo sistemático de las características mecánicas de todos los modos resistentes para cualquier sección mediante los métodos clásicos de *Resistencia de Materiales*. Son de difícil implementación en un programa de ordenador por la gran dependencia de la topología de la sección.
- La no existencia de un elemento que incluya de forma efectiva y sin ningún tipo de restricción en la forma de la sección todos los fenómenos resistentes, como por ejemplo la no inclusión del fenómeno de arrastre por cortante, el de la distorsión, o el acoplamiento de esta con la torsión.
- El punto anterior lleva a la no coincidencia para todos los posibles estados de carga de los resultados de los elementos desarrollados con los de un modelo tridimensional de elementos finitos. Y que por ello, no pueda ser considerado un elemento de uso general, y por tanto susceptible de implementación en programas comerciales.

---

<sup>2</sup>Midas Civil 2011. On-line Manual. [http://manual.midasuser.com/EN\\_TW/civil/791/index.htm](http://manual.midasuser.com/EN_TW/civil/791/index.htm)



## Capítulo 3

# MODOS RESISTENTES DE LAS SECCIONES

### 3.1. INTRODUCCIÓN

En objeto del presente capítulo es identificar los modos resistentes de las secciones que hay que utilizar en el cálculo de secciones de paredes delgadas, y como poder obtenerlos.

Para ello, primeramente mediante descomposición por equilibrio estático de las fuerzas exteriores, se van a identificar los distintos modos resistentes en que se puede dividir el comportamiento de la sección. La denominación de *modo resistente* la queremos utilizar en el sentido de ser la relación existente entre un sistema de fuerzas y/o momentos aplicados sobre la sección, y las tensiones normales y/o tangenciales que se generan en la misma. Este punto de vista en el utilizado preferentemente en la disciplina de *Resistencia de Materiales*, en que las deformaciones se utilizan como medio auxiliar para obtener las tensiones.

Vamos a utilizar la denominación de *modo de deformación* como la relación existente entre un campo de deformaciones impuesto a la sección, y las tensiones y esfuerzos que se generan en la misma. Un modo resistente tiene su correspondiente modo de deformación, queriendo denotar con la distinta denominación en que concepto se pone más énfasis, si en las tensiones o en las deformaciones.

Veremos que frente a la descomposición estática en modos resistentes de una sección, también se puede hacer una descomposición del campo de movimientos en modos de deformación. En cualquiera de las dos descomposiciones, en el caso de que no se considere alguno de los posibles estados, adquirirán el carácter de aproximadas.

Establecidos los modos resistentes o de deformación a considerar, seguidamente pasaremos a estudiar su obtención. Para ello se ha partido de los trabajos realizados por Steen Krenk y Bo Jeppensen [2] en 1989, y ampliado por Jeppe Jönsson en 1998 y 1999 [3] [30] [31] para la obtención de los modos resistentes mediante el método de los elementos finitos, lo cual permite su aplicación sin restricciones a cualquier sección, ya sea abierta, unicelular o multicelular. Steen Krenk y Bo Jeppensen para la obtención del modo de cortante, utilizan elementos de dos nudos con cuatro grados de libertad en total, dos nodales y dos anodales que dan la solución exacta. Mientras que Jeppe Jönsson utiliza para todos los modos funciones de forma lineales, proponiendo la utilización de la técnica de las subestructuras para mejorar la exactitud de la solución. En el presente trabajo se

ha buscado para todos los modos que otras funciones de forma relacionadas con variables anodales se pueden añadir, para que sin aumentar el número de grados de libertad para el conjunto de la sección, se pueda obtener la solución exacta del problema planteado.

Antes de explicar la forma de obtener los modos resistentes, en los primeros apartados se indicará los convenios de signos utilizados y la formulación de las ecuaciones diferencial e integral de equilibrio, que son la base de partida para la obtención de los modos.

## 3.2. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS RESISTENTES

La respuesta resistente de una viga con sección de paredes delgadas ante un estado general de cargas se puede dividir en varios fenómenos resistentes. Como ejemplo, se considera el caso de una sección simétrica cerrada de un puente, que siguiendo el libro de J. Schlaich [43] se puede descomponer como se representa en la figura (3.1)

En un estado general de cargas exteriores, estas pueden actuar en cualquier punto de la sección, pero para analizar la sección es deseable que sólo las haya sobre las aristas de la misma. Para ello se consideran dos estados, el estado  $a_1$ ) en que la tabla superior de la sección está perfectamente empotrada en las almas de la sección, y el estado  $a_2$ ) en que se aplican las reacciones de empotramiento con sentido contrario. El estado  $a_1$ ) representa la flexión transversal local debida a las cargas exteriores, y el estado  $a_2$ ) es el buscado con sólo cargas en las aristas.

La descomposición resultante cuando se empotra la tabla superior en las almas, permite que con ella se puede utilizar para obtener las reacciones de empotramiento debidas a las cargas puntuales localizadas sobre la tabla superior, las soluciones de losas semi-infinitas con un borde empotrado y otro libre o dos bordes empotrados, para las losas en voladizo o entre almas respectivamente. Una forma alternativa para realizar esta descomposición estática es el disponer varios apoyos simples, para que la sección considerada como un pórtico plano sea una estructura intraslacional, tal como por ejemplo se recoge en el libro de J. Manterola [44].

El segundo estado se puede descomponer en uno simétrico y otro antimétrico  $a_2) = b_1) + b_2)$ . El estado simétrico  $b_1)$  es a su vez suma de tres: el estado  $e_1)$  en que las cargas se distribuyen en toda la sección de acuerdo con la ley de rasantes de cortante, apareciendo axiles en las paredes de la sección; el estado  $e_2)$  en que los momentos simétricos producen flexión transversal; y el estado  $e_3)$  en que la sección solicitada con la ley de rasantes de sentido contrario a los del estado  $e_1)$  flecta longitudinalmente como una viga con sección rígida.

En el estado antimétrico  $b_2)$  hay equilibrio de fuerzas, pero no de momentos de torsión. Este estado se descompone en suma de dos: el estado  $c_1)$  de torsión, en que la carga torsora que solicita la sección se ha sustituido por una distribución de rasantes de torsión; y el estado  $c_2)$ , en el que las acciones antimétricas están en equilibrio estático con los rasantes con sentido contrario del estado  $c_1)$ .

Este último estado  $c_2)$  se descompone en un estado intraslacional y uno traslacional, que son: el estado  $d_1)$  en que la sección rigidizada con diagonales para convertirla en intraslacional presenta un estado de flexión transversal; y el estado  $d_2)$  en que la sección está solicitada con las reacciones contrarias de las diagonales del estado  $d_1)$ , correspondiéndose con una sollicitación de distorsión.

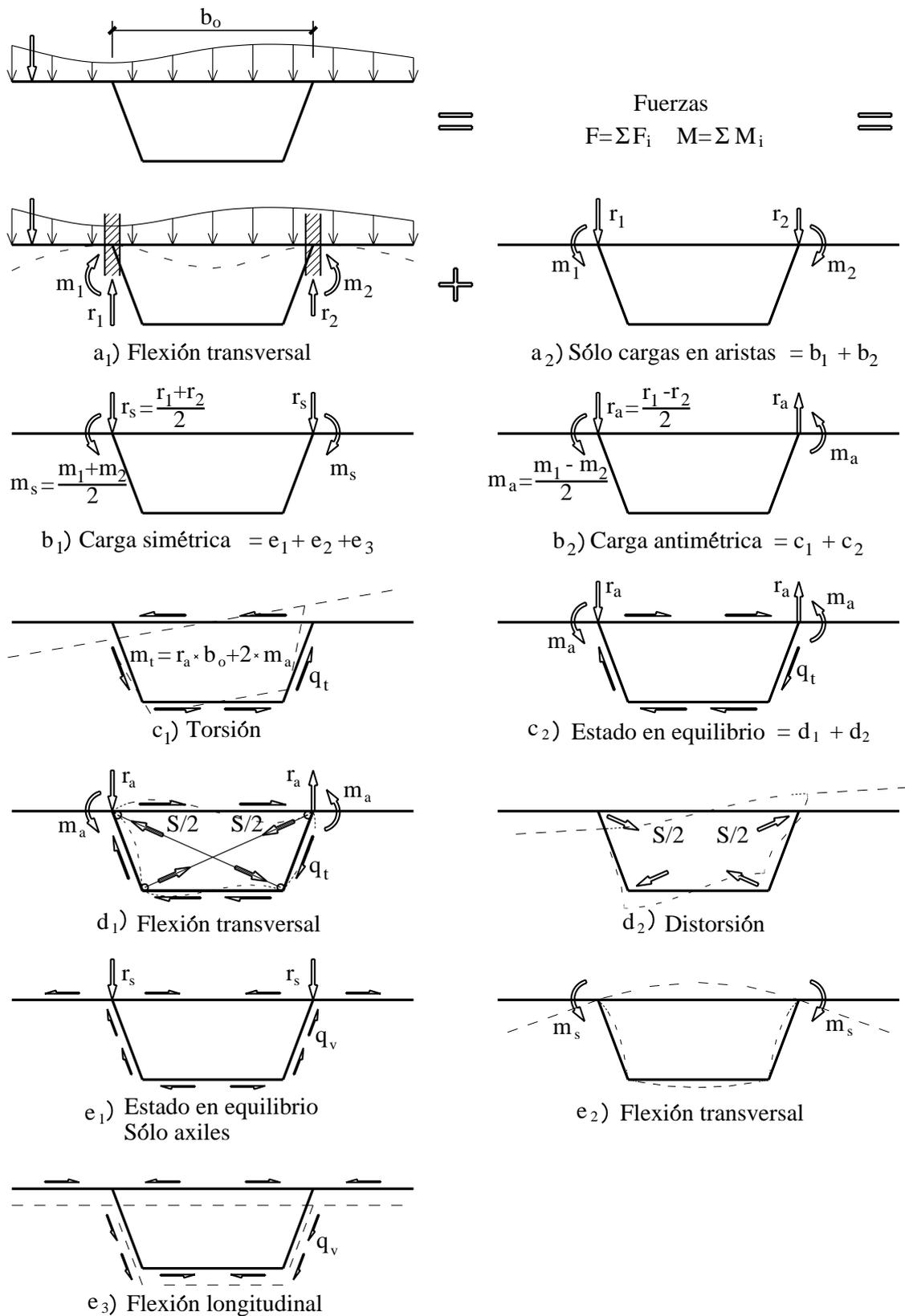


Figura 3.1: Sección cerrada. Descomposición en mecanismos resistentes.

A partir de la figura (3.1) quitando aquellos estados auxiliares que se han ido descomponiendo, queda la figura (3.2) en la que sólo quedan representados los mecanismos resistentes de la sección que son: flexión transversal en diversas variantes, flexión longitudinal, torsión y distorsión. En un estado general de cargas, a estos mecanismos hay que añadir el de axil longitudinal.

Para el caso de una sección abierta se puede hacer una descomposición semejante. Si se considera el caso en que no haya ningún impedimento a la deformación transversal de la sección a lo largo de toda la viga, en el estado  $a_1$ ) de flexión transversal local de la tabla superior solamente es necesario impedir los movimientos verticales en los puntos correspondientes al apoyo en las almas. La descomposición en mecanismos resistentes se representa en la figura (3.3), y en ella no aparece un estado de distorsión.

Si en la sección abierta se considera que si hay algún impedimento a la deformación transversal de la sección, en el estado  $a_1$ ) se introducen los apoyos necesarios para que como pórtico sea una estructura intraslacional. La descomposición para este caso se representa en la figura (3.4), y en ella si aparece un estado de distorsión.

### 3.3. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE DEFORMACIÓN

Las descomposiciones anteriores están realizadas con la pretensión de ser exactas, y basadas en el equilibrio estático entre los esfuerzos exteriores y un conjunto de modos resistentes. Entendiendo como modo resistente la respuesta de la sección ante un esfuerzo exterior dado.

$$\left. \begin{aligned} F_{exterior} &= \sum F_i \\ M_{exterior} &= \sum M_i \end{aligned} \right\}$$

Igual que en el método de elementos finitos se buscan soluciones aproximadas al suponer que el campo de movimientos depende de un conjunto finito de funciones tipo, denominadas funciones de forma o modos, en el cálculo de secciones de paredes delgadas se puede aproximar su comportamiento mediante un conjunto finito de modos de deformación, tal como se representa en las figuras (3.5) y (3.6).

$$v_j(x, y, z) = \sum w_{ji}(x, y, z) \cdot u_i(z)$$

Donde cada modo de deformación queda definido por una deformada transversal para un movimiento unidad en un nudo y con una función de alabeo compatible, y se multiplica por una función de intensidad que depende de la posición a lo largo de la pieza. En las figuras se han tomado como modos de deformación las deformadas correspondientes a los modos resistentes, pero se puede proceder de forma general eligiendo cualquier deformada posible, pero la identificación entre modos de deformación y modos resistentes permite dar significado físico a cada parte del resultado total.

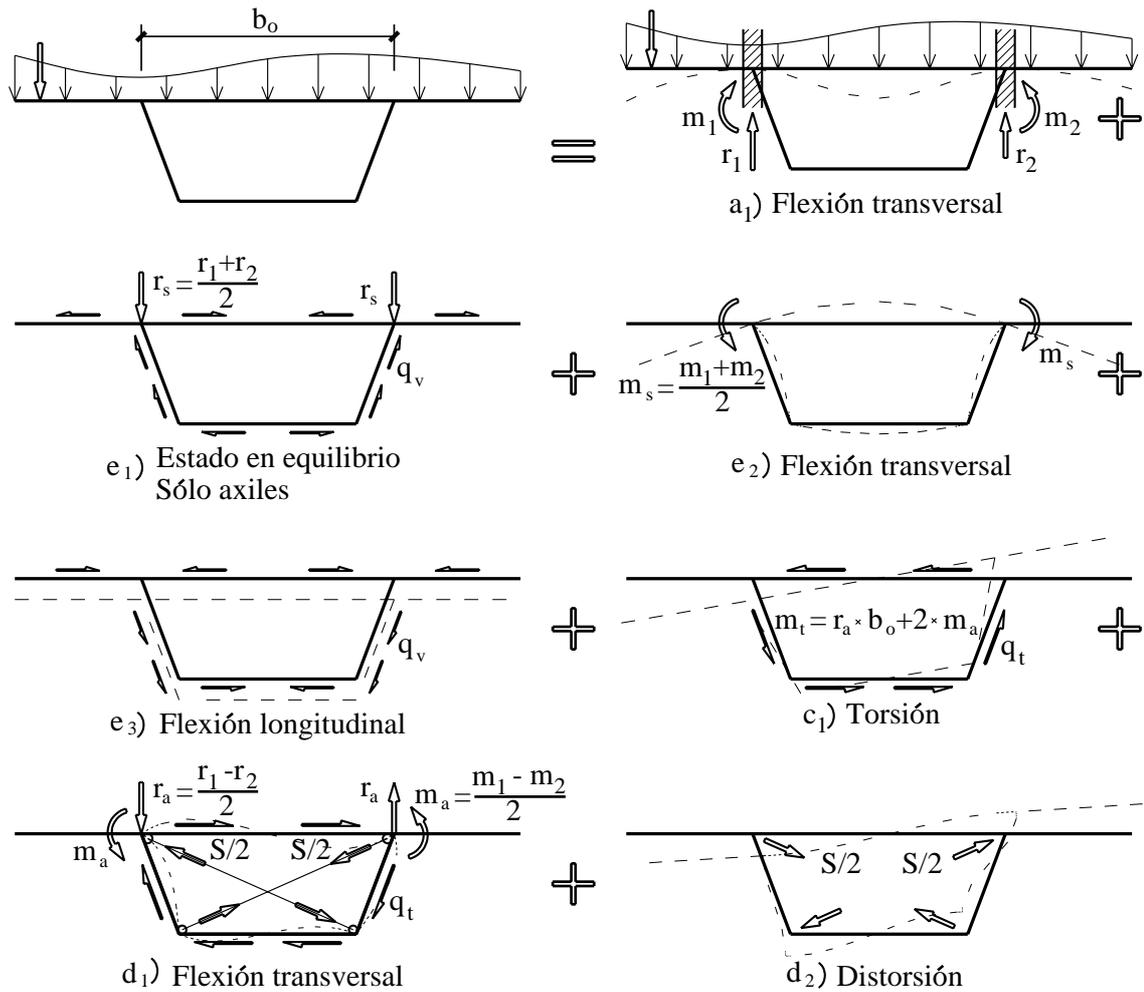


Figura 3.2: Sección cerrada. Descomposición en mecanismos resistentes: resumen.

### 3.3. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE DEFORMACIÓN

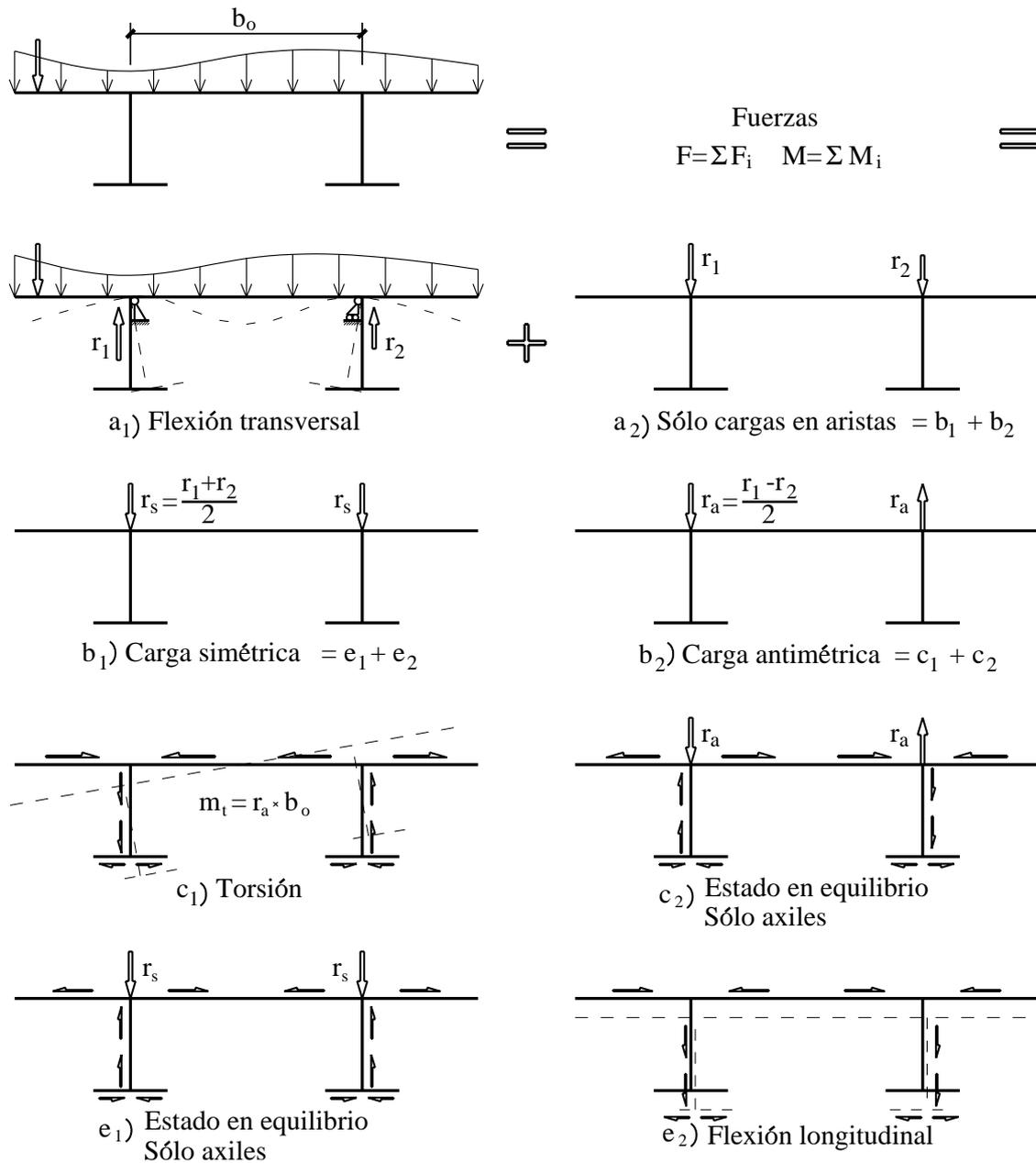


Figura 3.3: Sección abierta sin impedimentos a la deformación transversal. Descomposición en mecanismos resistentes.

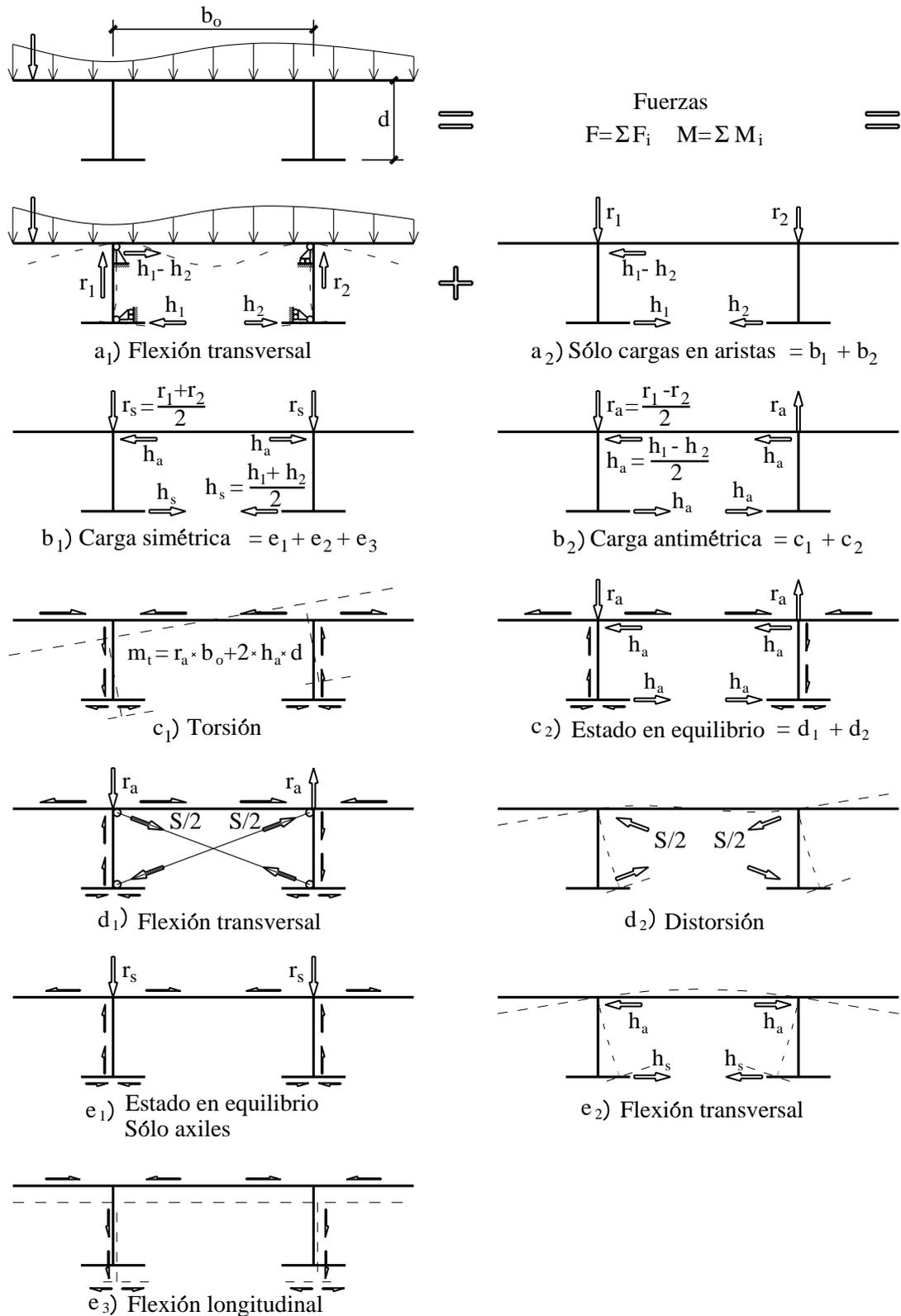


Figura 3.4: Sección abierta con impedimentos a la deformación transversal. Descomposición en mecanismos resistentes.

### 3.3. DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE DEFORMACIÓN

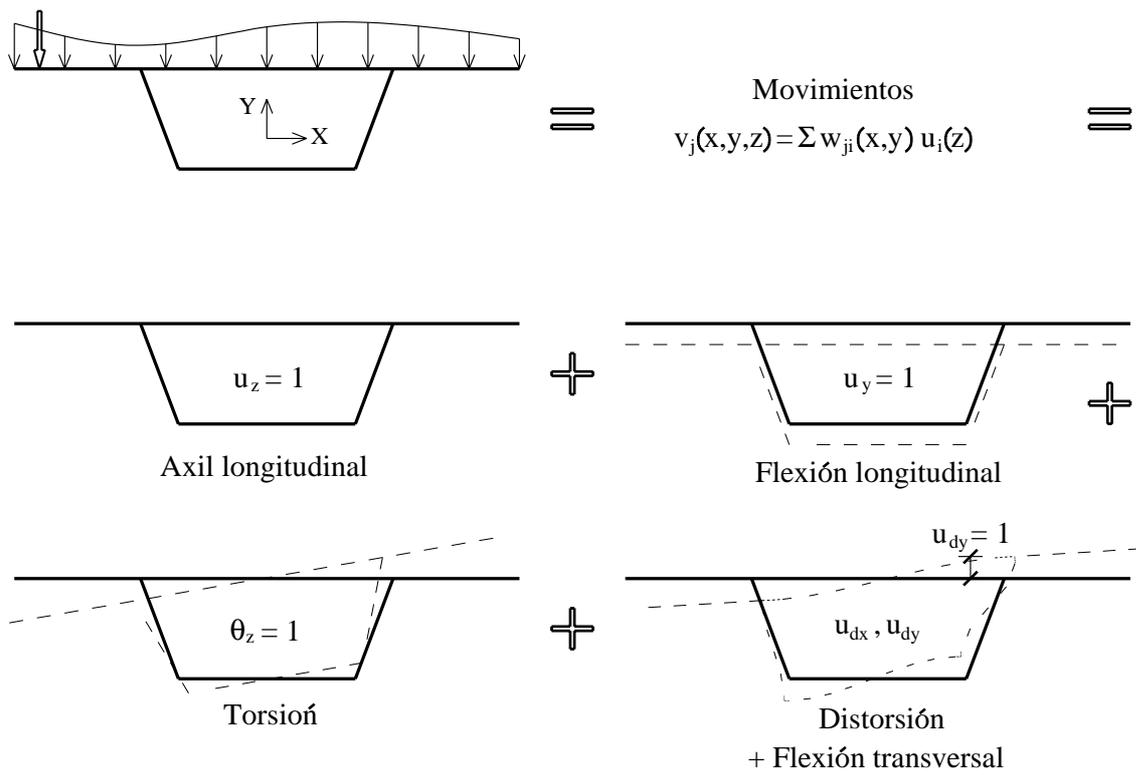


Figura 3.5: Sección cerrada. Descomposición en modos de deformación.

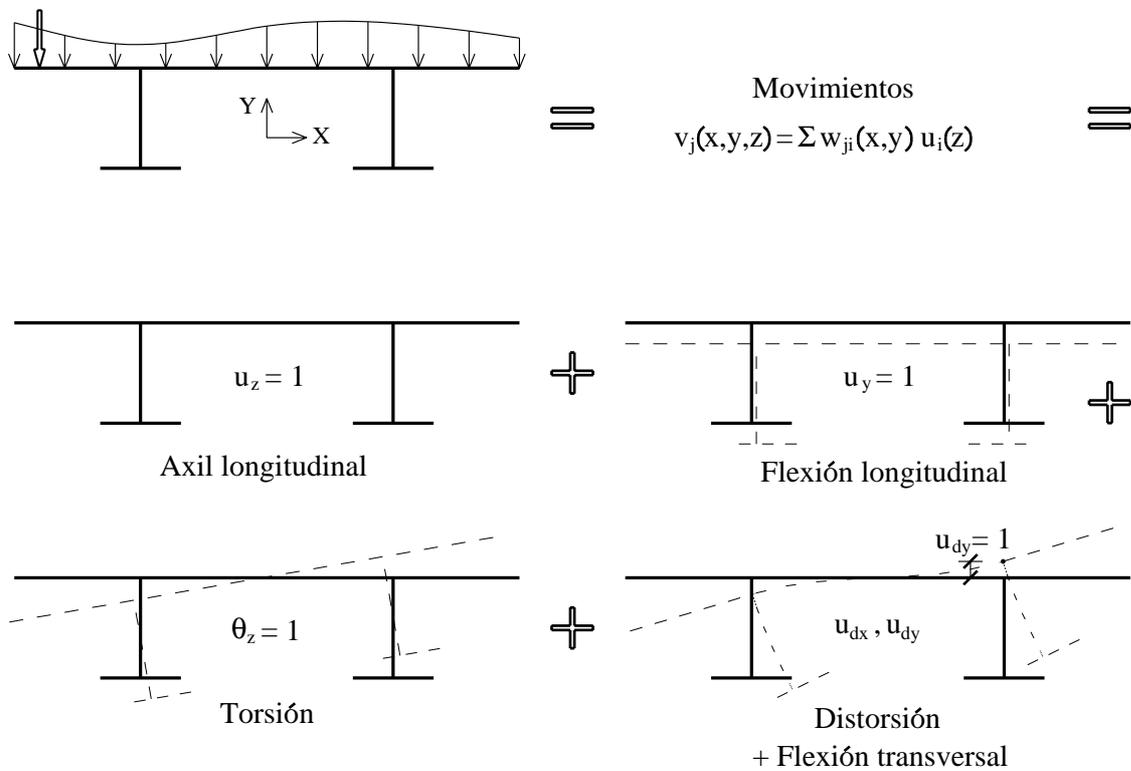


Figura 3.6: Sección abierta. Descomposición en modos de deformación.

### 3.4. CONVENIOS DE SIGNOS

Los convenios de signos que se van a utilizar son los siguientes:

- La sección está contenida en el plano  $x - y$ , siendo el eje  $z$  el de avance de la pieza. Los movimientos son positivos cuando se producen en sentido positivo de los ejes, y los giros cuando se producen en el sentido de avance de los ejes según la regla del sacacorchos. Este convenio se ha representado en la figura (3.7).

Se denomina  $\{v_x, v_y, v_z\}$  a los movimientos de un punto cualquiera, por lo que son funciones de  $(x, y, z)$ . Y se denomina  $\{u_x, u_y, u_z\}$  a los movimientos de conjunto de la sección, por lo que son funciones sólo de  $(z)$ .

- Las tensiones tangenciales  $\tau_{sz}$  se consideran positivas cuando su dirección es la del sentido de avance de la pared considerada, y las tensiones normales se consideran positivas cuando su sentido es el de la dirección de avance del eje  $z$ . Este convenio de signos se ha representado en la figura (3.8).
- Para los esfuerzos sobre la sección se considera el mismo convenio que para los movimientos y giros, tal como se puede ver en la figura (3.9)

### 3.5. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE UN MODO RESISTENTE

En este apartado, estableciendo el equilibrio estático de las tensiones en un elemento diferencial, se busca obtener las ecuaciones diferencial e integral de equilibrio que relacionan las tensiones en una pared de una sección.

En una pared delgada de una sección, con dirección longitudinal dada por el vector unitario  $(t_x, t_y)$  y transversal dada por el vector unitario  $(n_x, n_y) = (-t_y, t_x)$  tal como se representa en la figura (3.10), la relación entre las tensiones tangenciales en ejes globales y en ejes locales se obtiene estableciendo el equilibrio de fuerzas en dirección  $z$ .

$$\left. \begin{aligned} \tau_{sz} &= +\tau_{xz} \cdot t_x + \tau_{yz} \cdot t_y \\ \tau_{nz} &= -\tau_{xz} \cdot t_y + \tau_{yz} \cdot t_x \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Teniendo en cuenta que por condición de contorno, si no hay tensiones exteriores aplicadas sobre el mismo, la tensión tangencial en el mismo es nula  $\tau_{nz} = 0$ , despejando se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_{sz} \cdot t_x \\ \tau_{yz} &= \tau_{sz} \cdot t_y \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Por otra parte, se considera un elemento diferencial de una sección, tal como se muestra en la figura (3.11), y se establece el equilibrio de este elemento diferencial en dirección del eje  $z$ :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

### 3.5. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE UN MODO RESISTENTE

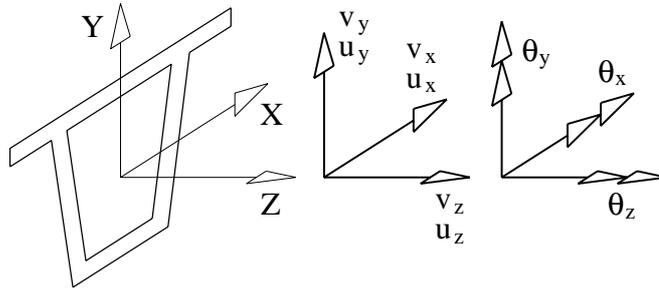


Figura 3.7: Convenio de signos de movimientos y giros.

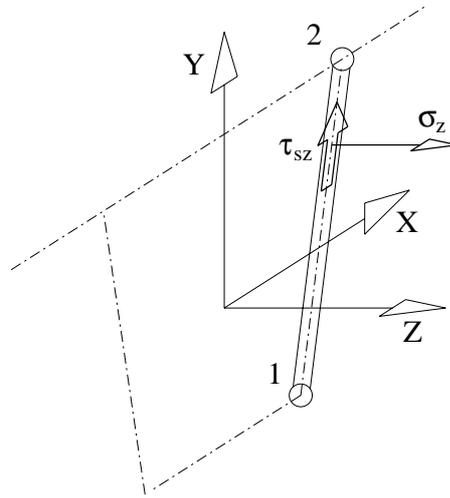


Figura 3.8: Convenio de signos de tensiones.

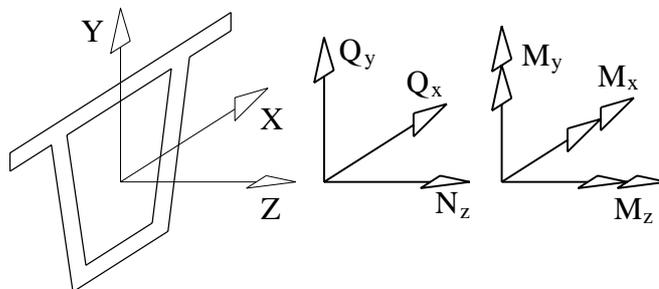


Figura 3.9: Convenio de signos de esfuerzos.

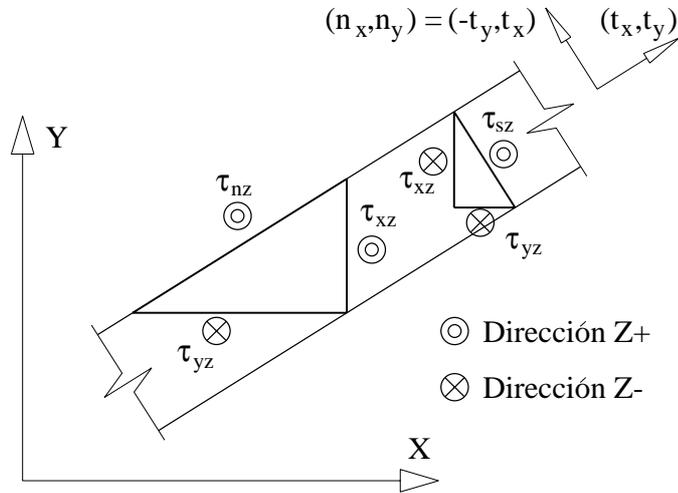


Figura 3.10: Tensiones tangenciales en una pared.

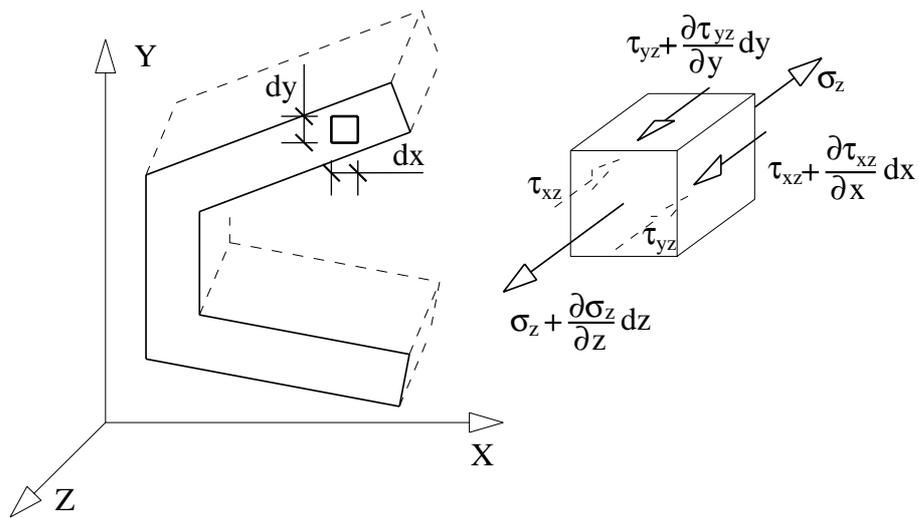


Figura 3.11: Equilibrio de un elemento diferencial.

Aplicando el método de los residuos ponderados [45], como la ecuación diferencial se cumple en toda la sección, si se multiplica por una función de peso arbitraria  $\delta\chi$  y se integra en toda la sección, la integral o residuo debe ser nula.

$$\int_A \left( \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \right) \delta\chi \, dA = 0$$

$$\int_A \left( \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} \right) \delta\chi \, dA + \int_A \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \delta\chi \, dA = 0$$

Siendo  $(n_x, n_y)$  el vector perpendicular al contorno  $\Gamma$  de la sección, se aplica a la primera integral de la expresión anterior el teorema de la divergencia (o integración por partes):

$$\oint_{\Gamma} (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y) \delta\chi \, d\Gamma - \int_A \left( \frac{\partial\delta\chi}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial\delta\chi}{\partial y} \tau_{yz} \right) dA + \int_A \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \delta\chi \, dA = 0$$

Como  $(\tau_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y)$  es la tensión tangencial en dirección perpendicular al contorno de la sección, su valor es nulo como se ha indicado,  $\tau_{nz} = 0$ , por lo que queda:

$$\int_A \left( \frac{\partial\delta\chi}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial\delta\chi}{\partial y} \tau_{yz} \right) dA = \int_A \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \delta\chi \, dA \quad (3.3)$$

Si para la función  $\delta\chi$  se adopta una función constante en el espesor y que sólo varíe según la longitud  $s$  a lo largo de la pared, se puede escribir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\delta\chi}{\partial x} &= \frac{\partial\delta\chi}{\partial s} t_x \\ \frac{\partial\delta\chi}{\partial y} &= \frac{\partial\delta\chi}{\partial s} t_y \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Sustituyendo (3.2) y (3.4) en la ecuación integral (3.3) queda finalmente:

$$\boxed{\int_A \frac{\partial\delta\chi}{\partial s} \tau_{sz} \, dA = \int_A \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} \delta\chi \, dA} \quad (3.5)$$

Ecuación que permite calcular las tensiones tangenciales  $\tau_{sz}$  si se conocen las tensiones normales  $\sigma_z$  o viceversa.

Otra forma de la ecuación diferencial de equilibrio se obtiene del equilibrio de fuerzas de la figura (3.12).

$$\boxed{\frac{\partial\tau_{sz}}{\partial s} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0} \quad (3.6)$$

También se adopta la hipótesis de suponer que las paredes están en un estado de tensión plana, o sea las paredes son libres de deformarse en dirección perpendicular a su plano ( $\sigma_n = 0$ ), y que además también son libres de deformarse en su dirección ( $\sigma_s = 0$ ). Por todo ello la tensión longitudinal  $\sigma_z$  sólo depende de la deformación longitudinal  $\epsilon_z$ . Siendo  $\nu$  el coeficiente de Poisson se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \cdot \epsilon_z \\ \sigma_s &= 0 \\ \epsilon_s &= -\nu \cdot \epsilon_z \end{aligned}$$

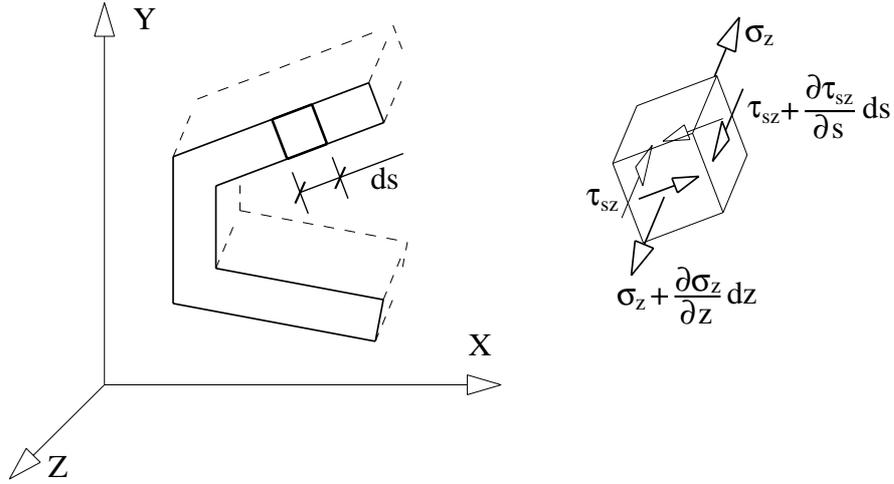


Figura 3.12: Equilibrio de un elemento diferencial.

### 3.6. AXIL Y FLEXIÓN

En ejes principales de inercia el modo de deformación por axil viene definido por un movimiento unidad en dirección del eje  $z$ , y los de flexión por giros unidad alrededor de los ejes que pasan por el centro de gravedad  $(x_c, y_c)$  tal como se representa en la figura (3.13). Siendo  $u_z(z)$  el movimiento a nivel del centro de gravedad,  $\theta_x(z)$  y  $\theta_y(z)$  los giros alrededor de los ejes, las funciones de alabeo y el movimiento  $v_z(x, y, z)$  vienen dados por:

$$\left. \begin{aligned} w_{nz} &= +1 \\ w_{mx} &= +1 \cdot (y - y_c) \\ w_{my} &= -1 \cdot (x - x_c) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_z &= w_{nz} \cdot u_z + w_{mx} \cdot \theta_x + w_{my} \cdot \theta_y \\ &= 1 \cdot u_z + (y - y_c) \cdot \theta_x - (x - x_c) \cdot \theta_y \end{aligned}} \quad (3.8)$$

De acuerdo con la *Mecánica de Medios Continuos* [46], por derivación del campo de movimientos se obtiene la deformación longitudinal:

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{du_z}{dz} + (y - y_c) \cdot \frac{d\theta_x}{dz} - (x - x_c) \cdot \frac{d\theta_y}{dz}$$

Y a partir de la deformación se obtiene la tensión longitudinal:

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E \cdot \left( \frac{du_z}{dz} + (y - y_c) \cdot \frac{d\theta_x}{dz} - (x - x_c) \cdot \frac{d\theta_y}{dz} \right)$$

Por integración de las tensiones se obtiene el axil sobre la sección:

$$N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA = \int_A E \cdot dA \cdot \frac{du_z}{dz} + \int_A E \cdot (y - y_c) \cdot dA \cdot \frac{d\theta_x}{dz} - \int_A E \cdot (x - x_c) \cdot dA \cdot \frac{d\theta_y}{dz}$$

La segunda y tercera integral se anulan por ser los momentos estáticos referidos al centro de gravedad de la sección. Llamando  $E_o$  al módulo de elasticidad en que se homogeneiza la sección queda:

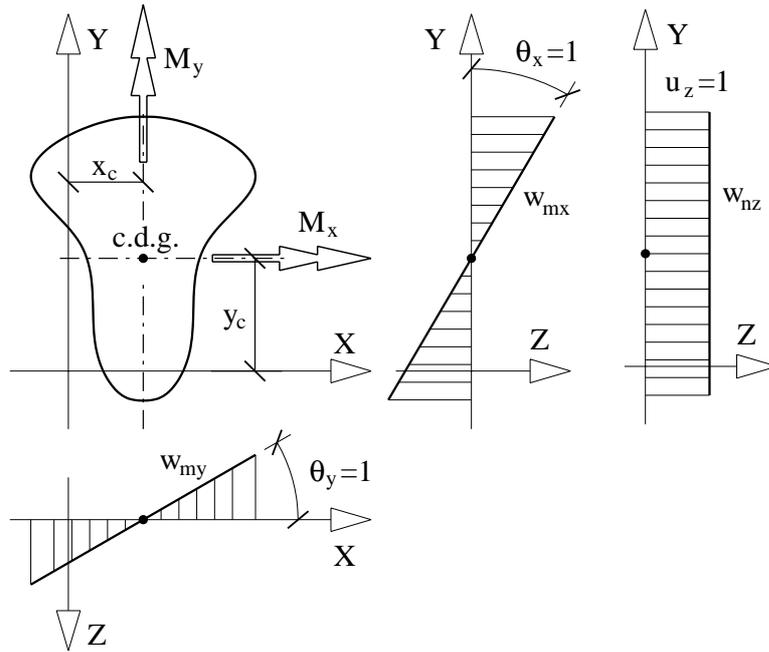


Figura 3.13: Movimientos de flexión y axil.

$$\begin{aligned}
 N_z &= E_o \cdot A \cdot \frac{du_z}{dz} \\
 A &= \int_A \frac{E}{E_o} \cdot dA
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Estableciendo el equilibrio entre los momentos exteriores  $M_x$  y  $M_y$  y los momentos de las tensiones normales respecto del centro de gravedad se tiene:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_A \sigma_z \cdot (y - y_c) \cdot dA = + \int_A E (y - y_c) dA \frac{du_z}{dz} + \\
 &+ \int_A E (y - y_c)^2 dA \frac{d\theta_x}{dz} - \int_A E (x - x_c)(y - y_c) dA \frac{d\theta_y}{dz}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= - \int_A \sigma_z \cdot (x - x_c) \cdot dA = - \int_A E (x - x_c) dA \frac{du_z}{dz} + \\
 &- \int_A E (x - x_c)(y - y_c) dA \frac{d\theta_x}{dz} + \int_A E (x - x_c)^2 dA \frac{d\theta_y}{dz}
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Las primeras integrales se anulan por ser los momentos estáticos respecto del centro de gravedad de la sección. Las otras integrales representan las inercias de la sección:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_A \frac{E}{E_o} (y - y_c)^2 dA \\
 I_y &= \int_A \frac{E}{E_o} (x - x_c)^2 dA \\
 I_{xy} &= \int_A \frac{E}{E_o} (x - x_c) (y - y_c) dA
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

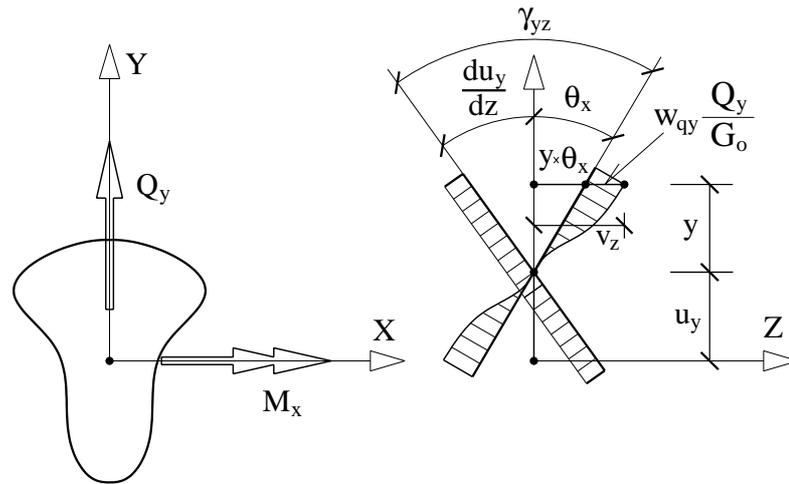


Figura 3.14: Alabeo por cortante.  $v_z = y \cdot \theta_x + w_{qy} \cdot Q_y / G_o$

Si se considera que se trabaja en ejes principales de inercia, el producto de inercia es nulo  $I_{xy} = 0$ , y la relación entre los momentos y las deformaciones queda como sigue:

$$\begin{cases} M_x = E_o \cdot I_x \cdot \frac{d\theta_x}{dz} \\ M_y = E_o \cdot I_y \cdot \frac{d\theta_y}{dz} \end{cases} \quad (3.13)$$

Como se considera la existencia de deformación por cortante, no hay igualdad entre el giro de la sección y la derivada de los movimientos. Por ello el modo de deformación de flexión, ecuaciones (3.7) y (3.8), se completa con dos modos definidos por un movimiento unidad según los ejes. Si  $u_x(z)$  y  $u_y(z)$  son los movimientos del eje de la pieza, para un punto cualquiera de la sección:

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y, z) &= 1 \cdot u_x(z) \\ v_y(x, y, z) &= 1 \cdot u_y(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

### 3.7. CORTANTES

Se considera una sección referida a sus ejes principales de inercia flectando dentro del plano  $y - z$ , sometida a un cortante  $Q_y$  aplicado en dirección del eje  $y+$ , junto con un momento flector  $M_x$  que se considera positivo cuando gira alrededor del eje  $x+$ . Como se tiene en cuenta la deformación por cortante, no se cumple la identidad entre la derivada del movimiento y el giro de la sección ( $du_y/dz \neq -\theta_x$ ), tal como se refleja en la figura (3.14).

El movimiento  $v_z(x, y, z)$  de un punto situado a una distancia  $y$  del centro de gravedad de coordenadas  $(x_c, y_c) = (0, 0)$ , es la suma del originado por el giro de la sección  $\theta_x(z)$ , y del alabeo  $w_{qy}(x, y)$  correspondiente a un cortante de valor unidad. Para que la función de alabeo  $w_{qy}$  tenga sólo unidades de longitud, se divide el cortante por el módulo de

elasticidad transversal  $G_o$  en que se homogeneiza la sección<sup>1</sup>.

$$\boxed{v_z = +y \cdot \theta_x + w_{qy} \cdot \frac{Q_y}{G_o}} \quad (3.15)$$

Por derivación del movimiento  $v_z$  se obtiene la deformación longitudinal.

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} + \frac{w_{qy}}{G_o} \cdot \frac{dQ_y}{dz} \quad (3.16)$$

Despreciando la influencia de las deformaciones por cortante en las deformaciones normales, o considerando que el cortante es constante a lo largo de la pieza porque la carga exterior sobre la sección sea nula, la deformación normal y la tensión correspondiente quedan como sigue:

$$\epsilon_z = y \cdot \frac{d\theta_x}{dz}$$

$$\sigma_z = E \cdot y \cdot \frac{d\theta_x}{dz}$$

Teniendo en cuenta que la relación (3.13) entre el giro de la sección y el momento flector es:

$$\frac{d\theta_x}{dz} = \frac{M_x}{E_o \cdot I_x}$$

Queda que la tensión normal y su derivada valen:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{E \cdot M_x}{E_o \cdot I_x} \cdot y}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E \cdot y}{E_o \cdot I_x} \cdot \frac{dM_x}{dz}$$

En esta expresión se ve que no hay influencia de la deformación por cortante en las tensiones normales, lo cual está de acuerdo con la hipótesis realizada. Teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio entre cortante y momento flector de acuerdo a la figura (3.15), queda finalmente para la variación de las tensiones normales la ecuación:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E \cdot y}{E_o \cdot I_x} \cdot Q_y \quad (3.17)$$

Para poder obtener para una pared la deformación transversal contenida en el plano de la pared, primero es necesario obtener la relación entre el movimiento  $u_s$  en ejes locales y el movimiento  $u_y$  en ejes globales. De acuerdo con la figura (3.16) la relación se obtiene mediante la proyección de  $u_y$  sobre el eje local mediante un producto escalar:

$$v_s = (0, u_y) \cdot (t_x, t_y) = u_y \cdot t_y$$

<sup>1</sup>Modificación en este trabajo respecto del desarrollo original [3]

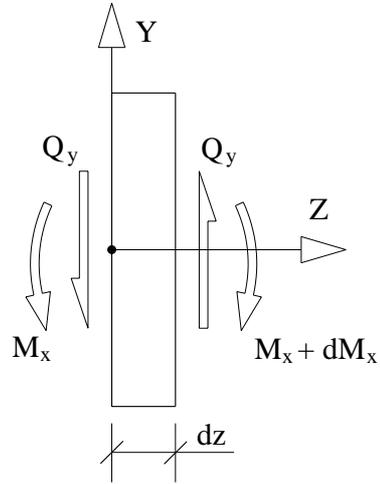


Figura 3.15: Equilibrio de una rebanada.

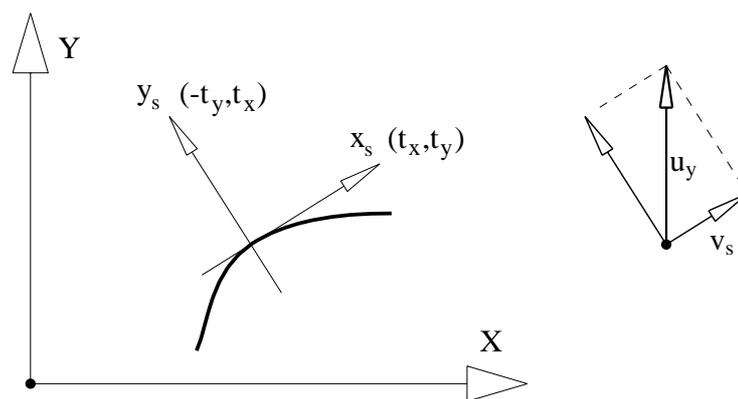


Figura 3.16: Movimientos global y local.

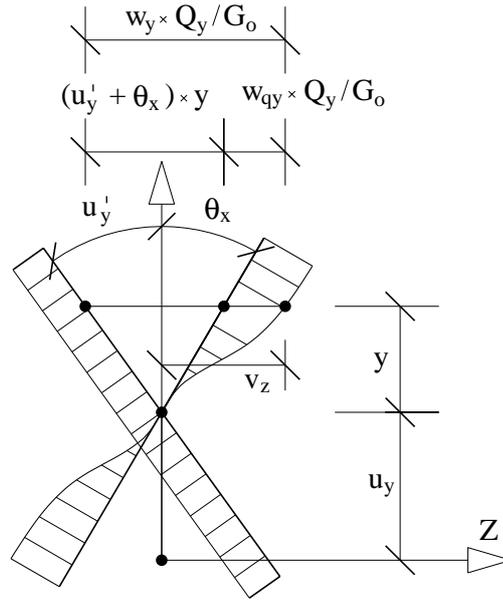


Figura 3.17: Alabeo por cortante.

Ahora se puede obtener dicha deformación transversal de acuerdo a la *Mecánica de Medios Continuos* [46], utilizando para  $v_s$  la ecuación anterior, y para  $v_z$  la ecuación (3.15).

$$\begin{aligned}
 \gamma_{sz} &= \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} = \\
 &= \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \\
 &= \frac{du_y}{dz} \cdot t_y + \left( 0 + \frac{\partial w_{qy}}{\partial x} \cdot \frac{Q_y}{G_o} \right) \cdot t_x + \left( \theta_x + \frac{\partial w_{qy}}{\partial y} \cdot \frac{Q_y}{G_o} \right) \cdot t_y = \\
 &= \left( \frac{\partial w_{qy}}{\partial x} \cdot t_x + \frac{\partial w_{qy}}{\partial y} \cdot t_y \right) \cdot \frac{Q_y}{G_o} + \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \cdot t_y = \\
 &= \frac{\partial w_{qy}}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} + \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \cdot t_y \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $(du_y/dz + \theta_x)$  es un valor constante dentro de cada sección al ser funciones que solamente dependen de  $z$ , se realiza el siguiente cambio de variable representado en la figura (3.17), en el que se introduce la nueva función de alabeo  $w_y(x, y)$ .

$$\boxed{w_y \cdot \frac{Q_y}{G_o} = \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \cdot y + w_{qy} \cdot \frac{Q_y}{G_o}} \tag{3.19}$$

Despejando el alabeo  $w_{qy}$  de esta ecuación, y sustituyéndole en la ecuación (3.15) del movimiento longitudinal  $v_z$  queda:

$$\boxed{v_z = -y \cdot \frac{du_y}{dz} + w_y \cdot \frac{Q_y}{G_o}} \tag{3.20}$$

Derivando respecto de  $s$  en la expresión del cambio de variable:

$$\frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} = \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \cdot t_y + \frac{\partial w_{qy}}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o}$$

Y despejando el último término queda:

$$\frac{\partial w_{qy}}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} = \frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} - \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \cdot t_y$$

Que se sustituye en la ecuación (3.18) de la deformación transversal, obteniendo para la deformación y tensión transversal las expresiones:

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} \quad (3.21)$$

$$\tau_{sz} = G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} = G \cdot \frac{\partial \gamma_{sz}}{\partial s} = G \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial s^2} \cdot \frac{Q_y}{G_o} \quad (3.23)$$

En la ecuación integral de equilibrio (3.5) se sustituyen las expresiones de las tensiones tangenciales (3.22) y de la variación de las tensiones normales (3.17), y simplificando el término  $Q_y$  queda la ecuación integral que permite obtener el alabeo  $w_y$ .

$$\int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} G \frac{\partial w_y}{\partial s} dA = G_o \int_A \frac{E y}{E_o I_x} \delta \chi dA \quad (3.24)$$

Para resolver esta ecuación, la función de alabeo  $w_y$  se interpola en función de los valores en los nodos. Siendo  $[N_i]$  una matriz fila con las funciones de interpolación, y  $\{w_{yi}\}$  un vector columna con los valores nodales se puede escribir:

$$\begin{aligned} w_y &= [N_i] \cdot \{w_{yi}\} \\ \frac{\partial w_y}{\partial s} &= \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \{w_{yi}\} = [N'_i] \{w_{yi}\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Se utiliza el método de Galerkin [45], consistente en utilizar para las funciones de ponderación  $\delta \chi$  las mismas funciones de interpolación de la solución, es decir:

$$\delta \chi = \delta w_y$$

Y teniendo en cuenta la expresión de interpolación de  $w_y$  queda:

$$\begin{aligned} \delta \chi &= [N_i] \cdot \{\delta w_{yi}\} \\ \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} &= \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \cdot \{\delta w_{yi}\} = [N'_i] \{\delta w_{yi}\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.25) y (3.26) en la ecuación (3.24):

$$\int_A \{\delta w_{yi}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{yi}\} dA = G_o \int_A \{\delta w_{yi}\}^t [N'_i]^t \frac{E y}{E_o I_x} dA$$

Que se puede expresar como el sistema de ecuaciones lineales siguiente, donde  $[K]$  es la matriz de rigidez, y  $\{f_{yi}\}$  el vector de fuerzas correspondientes a los grados de libertad elegidos:

$$[K] \{w_{yi}\} = \{f_{yi}\}$$

$$[K] = \int_A [N'_i]^t G [N'_i] dA$$

$$\{f_{yi}\} = G_o \int_A [N'_i]^t \frac{E y}{E_o I_x} dA$$

Para poder resolver el sistema de ecuaciones planteado es necesario imponer un valor nulo del alabeo en un punto cualquiera. Resuelto el sistema hay que obtener una constante de integración, para lo cual se modifica la ecuación (3.20) introduciendo la constante  $w_{yo}$ , con lo que resulta:

$$v_z = -y \cdot \frac{du_y}{dz} + (w_y + w_{yo}) \cdot \frac{Q_y}{G_o} \quad (3.27)$$

Por derivación se obtiene la deformación longitudinal, y a partir de ella la tensión normal:

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -y \cdot \frac{d^2 u_y}{dz^2} + \frac{w_y + w_{yo}}{G_o} \cdot \frac{dQ_y}{dz}$$

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E \cdot \left( -y \cdot \frac{d^2 u_y}{dz^2} + \frac{w_y + w_{yo}}{G_o} \cdot \frac{dQ_y}{dz} \right)$$

Se impone la condición de que no haya axil sobre la sección:

$$N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA = 0$$

$$-\frac{d^2 u_y}{dz^2} \int_A E \cdot y \cdot dA + \frac{dQ_y}{dz} \int_A E \cdot \frac{w_y + w_{yo}}{G_o} \cdot dA = 0$$

Y teniendo en cuenta que se trabaja en ejes principales de inercia, la primera integral se hace nula, y despejando la constante de integración se obtiene su valor:

$$w_{yo} = - \frac{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_y \cdot dA}{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot dA} \quad (3.28)$$

Para elegir las funciones de forma que resuelvan el problema de forma exacta hay que buscar cual es el grado del polinomio de la solución analítica. Si se sustituyen en la ecuación de equilibrio (3.6) las ecuaciones de la variación de las tensiones normales (3.17) y tangenciales (3.23) resulta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w_y}{\partial s^2} = - \frac{G_o \cdot E \cdot y}{G \cdot E_o \cdot I_x}} \quad (3.29)$$

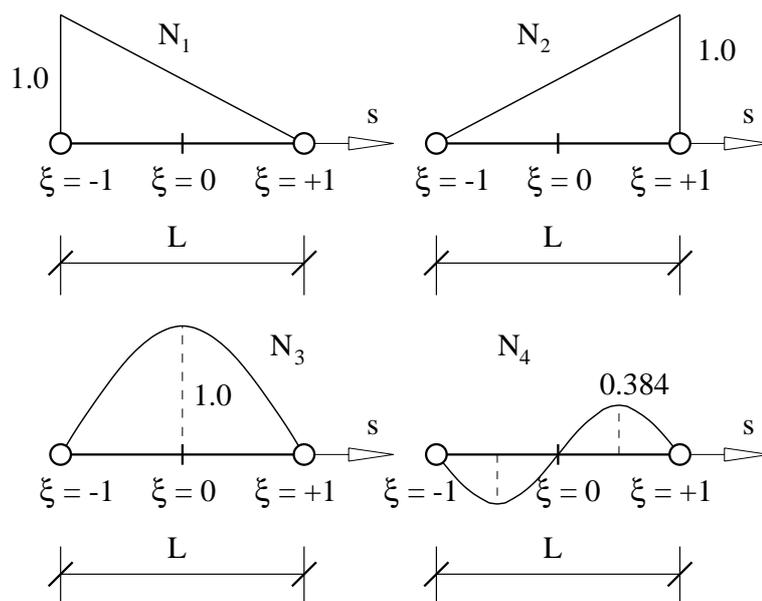


Figura 3.18: Funciones de forma.

Como la ordenada  $y$  de un punto de una pared es función lineal de  $s$ , la función de alabeo  $w_y$  depende de forma cúbica de  $s$ . Por lo que hacen falta cuatro grados de libertad en cada pared para obtener una solución exacta.

Se eligen como grados de libertad los alabeos en los extremos de cada pared, y dos variables internas anodales. Las funciones de forma correspondientes representadas en la figura (3.18) se han elegido de forma que las derivadas de la tercera y cuarta función de forma sean ortogonales a las funciones derivadas de la primera y segunda (véase el apéndice B). Sus ecuaciones son las siguientes:

$$\xi = \frac{s}{L/2}$$

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \\ N_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} \\ N_3(\xi) &= 1-\xi^2 \\ N_4(\xi) &= \xi-\xi^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

En forma matricial:

$$w_y(\xi) = \left[ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2}, 1-\xi^2, \xi-\xi^3 \right] \begin{Bmatrix} w_{y1} \\ w_{y2} \\ w_{y3} \\ w_{y4} \end{Bmatrix} = [N_i] \cdot \{w_{yi}\} \quad (3.31)$$

Derivando:

$$ds = \frac{L}{2} \cdot d\xi$$

$$[N'_i] = \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] = \left[ -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -2 \cdot \xi, 1 - 3 \cdot \xi^2 \right] \cdot \frac{2}{L}$$

Y finalmente, siendo  $L$  y  $t$  la longitud y el espesor de la pared, integrando con la expresión obtenida para la matriz de rigidez se obtiene:

$$[K] = \frac{2 \cdot G \cdot t}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 \end{array} \right] \quad (3.32)$$

Las variables internas quedan desacopladas de las variables nodales, por lo que no es necesario introducir las mismas en la matriz ensamblada de toda la sección.

Para obtener el término de fuerzas, primero se interpola linealmente la ordenada  $y$  de un punto de la pared en función de los valores en los nudos, y realizando la integral necesaria se obtiene para dicho término:

$$y(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \cdot y_1 + \frac{1 + \xi}{2} \cdot y_2$$

$$\{f_{yi}\} = \left( \left[ \begin{array}{c} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ -1/15 \end{array} \right] \cdot y_1 + \left[ \begin{array}{c} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{array} \right] \cdot y_2 \right) \cdot \frac{E}{E_o} \cdot \frac{t \cdot L}{I_x} \cdot G_o \quad (3.33)$$

Las variables internas al estar desacopladas se pueden obtener directamente despejando en la matriz de rigidez del elemento:

$$w_{y3} = \frac{E \cdot G_o \cdot L^2}{16 \cdot E_o \cdot G \cdot I_x} \cdot (y_1 + y_2)$$

$$w_{y4} = \frac{E \cdot G_o \cdot L^2}{48 \cdot E_o \cdot G \cdot I_x} \cdot (y_2 - y_1) \quad (3.34)$$

Una vez obtenidos los alabeos por cortante, se pueden obtener las tensiones tangenciales para cortante unidad ( $Q_y = 1$ ) de la siguiente forma:

$$\tau_{sz} = G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o}$$

$$\tau_{sz} = \frac{G}{G_o} \cdot [N'_i]^t \cdot \{w_{yi}\} = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2 \cdot \xi, 1 - 3 \cdot \xi^2 \right] \cdot \frac{2 \cdot G}{L \cdot G_o} \cdot \{w_{yi}\} \quad (3.35)$$

Se ha expuesto la resolución para cortante en la dirección  $y$ , siendo idéntico el planteamiento para cortante en dirección  $x$ . De forma resumida para el cortante  $Q_x$  las ecuaciones son:

$$v_z = -x \cdot \theta_y + w_{qx} \cdot \frac{Q_x}{G_o} \quad (3.36)$$

$$\sigma_z = -E \cdot x \cdot \frac{d\theta_y}{dz} = -\frac{E M_y}{E_o I_y} x$$

$$Q_x = -\frac{dM_y}{dz}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E x}{E_o I_y} Q_x$$

$$v_s = u_x \cdot t_x$$

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w_{qx}}{\partial s} \cdot \frac{Q_x}{G_o} + \left( \frac{du_x}{dz} - \theta_y \right) \cdot t_x$$

$$w_x \cdot \frac{Q_x}{G_o} = \left( \frac{du_x}{dz} - \theta_y \right) \cdot x + w_{qx} \cdot \frac{Q_x}{G_o}$$

$$\boxed{v_z = -\frac{du_x}{dz} \cdot x + w_x \cdot \frac{Q_x}{G_o}} \quad (3.37)$$

$$\boxed{\gamma_{sz} = \frac{\partial w_x}{\partial s} \cdot \frac{Q_x}{G_o}} \quad (3.38)$$

$$\tau_{sz} = G \cdot \frac{\partial w_x}{\partial s} \cdot \frac{Q_x}{G_o}$$

$$\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} = G \cdot \frac{\partial^2 w_x}{\partial s^2} \cdot \frac{Q_x}{G_o}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 w_x}{\partial s^2} = -\frac{G_o \cdot E \cdot x}{G \cdot E_o \cdot I_y}}$$

$$\int_A \{\delta w_{xi}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{xi}\} dA = G_o \int_A \{\delta w_{xi}\}^t [N'_i]^t \frac{E x}{E_o I_y} dA$$

$$[K] \{w_{xi}\} = \{f_{xi}\}$$

$$[K] = \int_A [N'_i]^t G [N'_i] dA$$

$$\{f_{xi}\} = G_o \int_A [N'_i]^t \frac{E x}{E_o I_y} dA$$

En el apéndice B se incluyen las expresiones analíticas para las diversas integrales que es necesario hacer con las funciones de forma del elemento finito propuesto.

### 3.8. ÁREAS DE CORTANTE

En el cálculo de vigas el parámetro que se utiliza para tener en cuenta la deformabilidad por cortante es el área de cortante  $A_q$ , que es la característica mecánica que relaciona la deformación transversal  $\gamma$ , con el esfuerzo cortante  $Q$  y el módulo de elasticidad del material de la sección  $G_o$ .

$$\gamma = \frac{Q}{G_o A_q}$$

Como la deformación transversal no es constante en la sección, el área de cortante se puede obtener a partir de diferentes hipótesis que proporcionan distintos valores. Las hipótesis más utilizadas son:

- Igualdad en la energía de deformación.
- Hipótesis de deformación transversal constante.

A continuación se expone como utilizando las funciones de alabeo de cortante  $w_x$  y  $w_y$ , se puede obtener esta característica mecánica aplicando cada una de estas hipótesis.

#### 3.8.1. MÉTODO ENERGÉTICO

Mediante este método, para obtener el área de cortante se plantea la igualdad entre la energía de deformación de las tensiones tangenciales, con el trabajo realizado por el esfuerzo cortante supuesto aplicado este en el eje de la pieza. El primer paso es determinar cada uno de estos términos de energía y de trabajo a partir del campo de movimientos.

Si en una sección hay cortantes según los dos ejes simultáneamente, el movimiento en dirección longitudinal  $v_z(x, y, z)$  es la suma del correspondiente a cada cortante, ecuaciones (3.20) y (3.37):

$$v_z = -y \cdot \frac{du_y}{dz} + w_y \cdot \frac{Q_y}{G_o} - x \cdot \frac{du_x}{dz} + w_x \cdot \frac{Q_x}{G_o}$$

Y la deformación tangencial la suma de las ecuaciones (3.21) y (3.38):

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} + \frac{\partial w_x}{\partial s} \cdot \frac{Q_x}{G_o}$$

La energía de deformación por cortante viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= \frac{1}{2} \int_A \tau_{sz} \cdot \gamma_{sz} \cdot dA = \frac{1}{2} \int_A G \cdot \gamma_{sz}^2 \cdot dA = \\ &= \frac{1}{2} \int_A G \cdot \left( \frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} + \frac{\partial w_x}{\partial s} \cdot \frac{Q_x}{G_o} \right)^2 \cdot dA \end{aligned}$$

Desarrollando esta ecuación y expresándola matricialmente:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2} [ Q_x, Q_y ] \frac{1}{G_o} \begin{bmatrix} D_{w_x \cdot w_x} & D_{w_x \cdot w_y} \\ D_{w_x \cdot w_y} & D_{w_y \cdot w_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} [ Q_x , Q_y ] \frac{1}{G_o} [D_w] \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} D_{w_x.w_x} &= \int_A \frac{G}{G_o} \left( \frac{\partial w_x}{\partial s} \right)^2 \cdot dA \\ D_{w_x.w_y} &= \int_A \frac{G}{G_o} \frac{\partial w_x}{\partial s} \cdot \frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot dA \\ D_{w_y.w_y} &= \int_A \frac{G}{G_o} \left( \frac{\partial w_y}{\partial s} \right)^2 \cdot dA \end{aligned} \quad (3.39)$$

Considerando los cortantes aplicados en el eje de la pieza, el trabajo que realizan viene dado por el producto de su valor por el incremento de movimiento en una longitud  $dz$  por la deformación tangencial al nivel del eje, tal como se representa en la figura (3.19).

$$dW = \frac{1}{2} \cdot ( \gamma_{xz} \cdot dz \cdot Q_x + \gamma_{yz} \cdot dz \cdot Q_y )$$

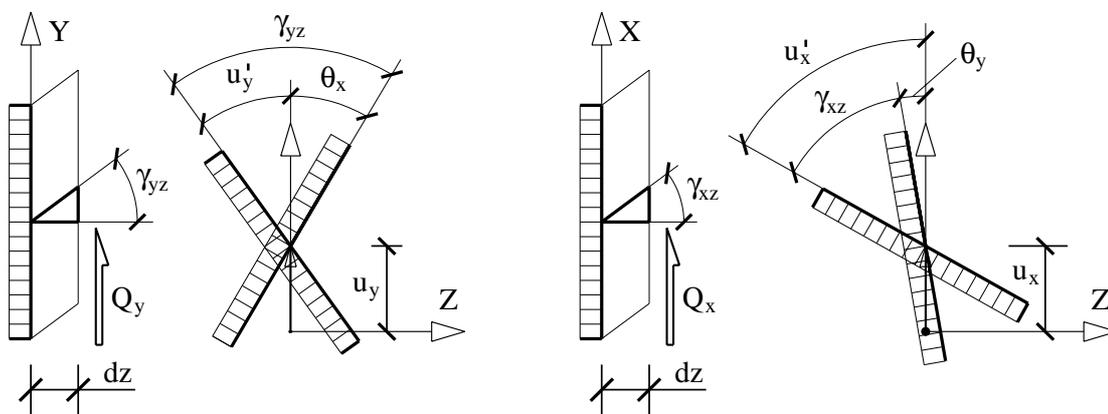


Figura 3.19: Cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$ , y sus deformaciones.

Expresándolo en forma matricial, y sustituyendo los valores de las deformaciones tangenciales de acuerdo a la figura (3.19):

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{2} [ Q_x , Q_y ] \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [ Q_x , Q_y ] \begin{bmatrix} \frac{du_x}{dz} - \theta_y \\ \frac{du_y}{dz} + \theta_x \end{bmatrix}$$

Igualando la energía de deformación  $dU$  desarrollada por las tensiones con el trabajo  $dW$  de las fuerzas queda:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = G_o [D_w]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz  $[D_w]^{-1}$  son las áreas de cortante de la sección.

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = G_o \begin{bmatrix} A_x & A_{xy} \\ A_{xy} & A_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{D_{w_y \cdot w_y}}{D_{w_x \cdot w_x} D_{w_y \cdot w_y} - (D_{w_x \cdot w_y})^2} \\ A_{xy} &= \frac{-D_{w_x \cdot w_y}}{D_{w_x \cdot w_x} D_{w_y \cdot w_y} - (D_{w_x \cdot w_y})^2} \\ A_y &= \frac{D_{w_x \cdot w_x}}{D_{w_x \cdot w_x} D_{w_y \cdot w_y} - (D_{w_x \cdot w_y})^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Para el caso particular en que se cumpla que ( $D_{w_x \cdot w_y} = 0$ ), por ejemplo en secciones con un eje de simetría, las áreas de cortante vienen dadas por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{1}{D_{w_x \cdot w_x}} \\ A_y &= \frac{1}{D_{w_y \cdot w_y}} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Mediante la integración por partes de la expresión de  $D_{w_y \cdot w_y}$  se puede obtener una ecuación alternativa para el área de cortante:

$$D_{w_y \cdot w_y} = \int_A \frac{G}{G_o} \frac{\partial w_y}{\partial s} \frac{\partial w_y}{\partial s} dA = \frac{G}{G_o} w_y \frac{\partial w_y}{\partial s} \Big|_0^L - \int_A \frac{G}{G_o} \frac{\partial^2 w_y}{\partial s^2} w_y dA$$

El primer término en secciones abiertas es nulo, porque por condición de tensión tangencial nula en los bordes la derivada de la función de alabeo es nula, y en secciones cerradas el término es nulo por coincidir el punto inicial y final. Y si además se sustituye la ecuación (3.29) queda:

$$D_{w_y \cdot w_y} = \frac{1}{I_x} \int_A \frac{E}{E_o} w_y y dA$$

Llamando:

$$I_{w_y \cdot y} = \int_A \frac{E}{E_o} w_y y dA$$

Se puede escribir:

$$D_{w_y \cdot w_y} = \frac{I_{w_y \cdot y}}{I_x}$$

En el caso particular en que se cumpla que  $D_{w_x \cdot w_y} = 0$  se puede escribir:

$$A_y = \frac{1}{D_{w_y \cdot w_y}} = \frac{I_x}{I_{w_y \cdot y}} \quad (3.43)$$

Y de la misma forma para el área de cortante en la otra dirección se obtiene:

$$I_{w_x \cdot x} = \int_A \frac{E}{E_o} w_x x dA$$

$$D_{w_x \cdot w_x} = \frac{I_{w_x \cdot x}}{I_y}$$

$$A_x = \frac{1}{D_{w_x \cdot w_x}} = \frac{I_y}{I_{w_x \cdot x}} \quad (3.44)$$

### 3.8.2. DEFORMACIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

Se estudia ahora el caso correspondiente a la adopción de la hipótesis de que la deformación por cortante es constante en la sección en la dirección del cortante aplicado.

Siendo  $Q_x$  y  $Q_y$  los cortantes aplicados, y  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  las deformaciones constantes correspondientes, en una pared de la sección cuya dirección venga dada por el vector unitario  $(t_x, t_y)$  la deformación transversal en la dirección de la pared, obtenida como proyección mediante producto escalar de la deformación producida por cada cortante, viene dada por:

$$\gamma_{sz} = (\gamma_{xz}, 0) \cdot (t_x, t_y) + (0, \gamma_{yz}) \cdot (t_x, t_y) = \gamma_{xz} \cdot t_x + \gamma_{yz} \cdot t_y$$

La energía de deformación viene dada por la integración de estas deformaciones en toda la sección:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2} \int_A G \gamma_{sz}^2 dA$$

Sustituyendo la ecuación de  $\gamma_{sz}$  y desarrollando la integral queda:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2} [\gamma_{xz}, \gamma_{yz}] G_o \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$D_{xx} = \int_A \frac{G}{G_o} (t_x)^2 \cdot dA$$

$$D_{xy} = \int_A \frac{G}{G_o} t_x \cdot t_y \cdot dA \quad (3.45)$$

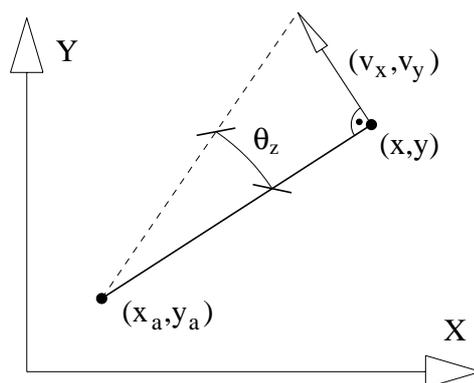
$$D_{yy} = \int_A \frac{G}{G_o} (t_y)^2 \cdot dA$$

El trabajo realizado por los cortantes es el producto de los mismos por el movimiento en su dirección:

$$dW = \frac{1}{2} [\gamma_{xz} \cdot dz, \gamma_{yz} \cdot dz] \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}$$

Y ahora, igualando la energía de deformación con el trabajo de los cortantes, se obtienen las áreas de cortante, que resultan corresponderse con las ecuaciones (3.45):

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = G_o \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Figura 3.20: Movimientos por el giro de torsión  $\theta_z$ .

Los valores que se obtienen para las áreas de cortante  $\{D_{xx}, D_{xy}, D_{yy}\}$  son diferentes de los valores de las áreas de cortante  $\{A_x, A_{xy}, A_y\}$  obtenidas a partir de la energía de deformación. Pero en muchos casos, cuando en una formulación se obtienen las primeras, pueden ser sustituidas por las segundas. Estas últimas, por haber sido obtenidas a partir de la distribución real de tensiones, reproducen mejor la realidad.

### 3.9. TORSIÓN UNIFORME

En una sección en un estado de sollicitación de torsión, se considera que la sección gira como sólido rígido alrededor de un centro de giro  $(x_a, y_a)$  un ángulo  $\theta_z(z)$  alrededor del eje longitudinal de la pieza. Los movimientos en ejes globales en el plano de la sección en teoría de pequeñas deformaciones, vienen dados de acuerdo con la figura (3.20) como:

$$\begin{aligned} v_x &= -(y - y_a) \cdot \theta_z \\ v_y &= +(x - x_a) \cdot \theta_z \end{aligned} \quad (3.46)$$

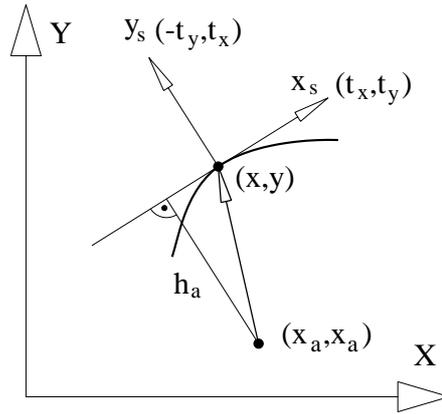
El movimiento en sentido longitudinal se define por el producto de una función de alabeo  $w_a$  que depende de  $(x, y)$  por la derivada del giro  $d\theta_z/dz$  que es una función de  $(z)$ :

$$v_z = w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \quad (3.47)$$

Para obtener la deformación tangencial va a hacer falta conocer el movimiento local en dirección tangente a la pared. Si  $(t_x, t_y)$  es el vector unitario tangente a la pared, el movimiento buscado viene dado por:

$$v_s = v_x \cdot t_x + v_y \cdot t_y \quad (3.48)$$

Una variable auxiliar necesaria es la distancia  $h_a$  del centro de giro a la recta tangente en un punto de la sección, que de acuerdo con la figura (3.21) se puede calcular como el producto escalar del vector  $(x - x_a, y - y_a)$  por el vector unitario perpendicular a dicha recta  $(-t_y, t_x)$ :


 Figura 3.21: Distancia  $h_a$  al centro de giro.

$$h_a = +(y - y_a) \cdot t_x - (x - x_a) \cdot t_y \quad (3.49)$$

La deformación y tensión longitudinal, siendo  $E$  el módulo de elasticidad longitudinal, vienen dadas por:

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = w_a \cdot \frac{d^2 \theta_z}{dz^2} \quad (3.50)$$

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E \cdot w_a \cdot \frac{d^2 \theta_z}{dz^2} \quad (3.51)$$

Como en este apartado se está estudiando el caso de torsión con alabeo libre, la tensión longitudinal tiene que ser nula  $\sigma_z = 0$ , por lo tanto:

$$\frac{d^2 \theta_z}{dz^2} = 0 \quad (3.52)$$

La deformación transversal en el plano de la pared en estudio será:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot t_x + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot t_y + \frac{\partial v_z}{\partial s} \\ &= -(y - y_a) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \cdot t_x + (x - x_a) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \cdot t_y + \frac{\partial w_a}{\partial s} \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \\ &= \left( -(y - y_a) \cdot t_x + (x - x_a) \cdot t_y + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \\ &= \left( -h_a + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Y la tensión tangencial, siendo  $G$  el módulo de elasticidad transversal:

$$\tau_{sz} = G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \left( -h_a + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \quad (3.54)$$

Y teniendo en cuenta que la distancia  $h_a$  es constante en una pared recta, derivando en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} = G \cdot \frac{\partial^2 w_a}{\partial s^2} \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \quad (3.55)$$

La ecuación integral (3.5) cuando  $\sigma_z = 0$  se reduce a la siguiente:

$$\int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} \tau_{sz} dA = 0 \quad (3.56)$$

Y ahora, sustituyendo (3.54) en (3.56):

$$\int_A G \cdot \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} \cdot \frac{\partial w_a}{\partial s} dA - \int_A G \cdot \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} \cdot h_a dA = 0 \quad (3.57)$$

Se resuelve esta ecuación de la misma forma que se ha hecho en el caso de cortante. Se interpola la función de alabeo  $w_a$  en función de valores nodales, y se toma como función arbitraria  $\delta \chi = \delta w_a$ .

$$w_a = [N_i] \cdot \{w_{ai}\}$$

$$\frac{\partial w_{ai}}{\partial s} = \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \cdot \{w_{ai}\} = [N'_i] \cdot \{w_{ai}\} \quad (3.58)$$

$$\delta \chi = [N_i] \cdot \{\delta w_{ai}\}$$

$$\frac{\partial \delta \chi}{\partial s} = [N'_i] \cdot \{\delta w_{ai}\}$$

La ecuación integral (3.57) queda:

$$\int_A \{\delta w_{ai}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{ai}\} dA = \int_A \{\delta w_{ai}\}^t [N'_i]^t G h_a dA$$

Que se puede expresar como el sistema de ecuaciones lineales:

$$[K] \{w_{ai}\} = \{f_{ai}\}$$

Donde:

$$[K] = \int_A [N'_i]^t G [N'_i] dA \quad (3.59)$$

$$\{f_{ai}\} = \int_A [N'_i]^t G h_a dA \quad (3.60)$$

Para poder resolver este sistema de ecuaciones es necesario suponer inicialmente un centro de giro  $(x_b, y_b)$ , e imponer en un punto cualquiera que el alabeo es nulo  $w_{bi} = 0$ . Resuelto el sistema de ecuaciones, se pueden calcular las deformaciones tangenciales.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \left( -(y - y_b) + \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = \left( +(x - x_b) + \frac{\partial w_b}{\partial y} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \end{aligned} \right\}$$

Si se conociera el centro de giro correcto  $(x_a, y_a)$  se tendrían unas expresiones semejantes para obtener las deformaciones tangenciales. Por ejemplo, para la deformación  $\gamma_{xz}$  se tendrían dos ecuaciones distintas, una para cada centro de giro:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \left( -(y - y_a) + \frac{\partial w_a}{\partial x} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = \left( -(y - y_b) + \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \end{aligned} \quad (3.61)$$

La ecuación integral de equilibrio que determina la distribución de tensiones tangenciales tiene solución única, y por lo tanto las deformaciones tangenciales que se deducen de las tensiones tienen solución única. Por ello, igualando las dos expresiones alternativas para la deformación tangencial  $\gamma_{xz}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \left( -(y - y_a) + \frac{\partial w_a}{\partial x} \right) &= \left( -(y - y_b) + \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial(w_a - w_b)}{\partial x} &= -(y_a - y_b) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Y de forma semejante con la deformación  $\gamma_{yz}$  se tiene:

$$\frac{\partial(w_a - w_b)}{\partial y} = +(x_a - x_b) \quad (3.63)$$

Las ecuaciones (3.62) y (3.63) definen un plano de ecuación:

$$w_a = w_b - (y_a - y_b) \cdot x + (x_a - x_b) \cdot y + c^*$$

Donde  $(x_a, y_a)$  y  $c^*$  son las incógnitas, y  $(x_b, y_b)$  el centro de giro supuesto inicialmente en el cálculo. Haciendo el cambio de variable siguiente, donde  $(x_c, y_c)$  son las coordenadas del centro de gravedad de la sección:

$$c^* = (y_a - y_b) \cdot x_c - (x_a - x_b) \cdot y_c + c$$

Queda:

$$w_a = w_b - (y_a - y_b) \cdot (x - x_c) + (x_a - x_b) \cdot (y - y_c) + c \quad (3.64)$$

Para obtener las tres incógnitas  $\{ x_a, y_a, c \}$ , como se estudia una sección solicitada sólo con un esfuerzo de torsión, se imponen las condiciones de que el axil y los momentos resultantes de las tensiones normales en la sección sean nulos. Planteando que el axil en la sección sea nulo se tiene:

$$N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA = \int_A E \cdot w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} \cdot dA = 0$$

Luego se tiene que cumplir:

$$\begin{aligned} \int_A E \cdot w_a \cdot dA &= 0 \\ \int_A E \cdot (w_b - (y_a - y_b) \cdot (x - x_c) + (x_a - x_b) \cdot (y - y_c) + c) \cdot dA &= 0 \\ \int_A E w_b dA - (y_a - y_b) \int_A E (x - x_c) dA + \\ + (x_a - x_b) \int_A E (y - y_c) dA + c \int_A E dA &= 0 \end{aligned}$$

Como la segunda y la tercera integral se anulan por ser los momentos estáticos de la sección respecto de su centro de gravedad  $(x_c, y_c)$ , siendo  $E_o$  el módulo de elasticidad en el que se homogeneiza la sección, la constante de integración  $c$  buscada vendrá dada por:

$$c = \frac{- \int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_b \cdot dA}{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot dA} \quad (3.65)$$

Estableciendo que el momento flector alrededor del eje  $x$  sea nulo:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_z \cdot (y - y_c) \cdot dA &= 0 \\ \int_A E \cdot w_a \cdot \frac{d^2 \theta_z}{dz^2} \cdot (y - y_c) \cdot dA &= 0 \\ \int_A (w_b - (y_a - y_b) \cdot (x - x_c) + (x_a - x_b) \cdot (y - y_c) + c) \cdot (y - y_c) \cdot dA &= 0 \quad (3.66) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $(x_c, y_c)$  es el centro de gravedad, y que las inercias a flexión son:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A \frac{E}{E_o} \cdot (y - y_c)^2 \cdot dA \\ I_{xy} &= \int_A \frac{E}{E_o} \cdot (x - x_c) \cdot (y - y_c) \cdot dA \\ I_y &= \int_A \frac{E}{E_o} \cdot (x - x_c)^2 \cdot dA \end{aligned}$$

La ecuación (3.66) queda:

$$\int_A E \cdot w_b \cdot (y - y_c) dA - (y_a - y_b) E_o I_{xy} + (x_a - x_b) E_o I_x = 0$$

Si se elige unos ejes coincidentes con los ejes principales de inercia ( $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$ ,  $I_{xy} = 0$ ) se obtiene:

$$x_a = x_b - \frac{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_b \cdot y \cdot dA}{I_x} = x_b - \frac{I_{wb.y}}{I_x} \quad (3.67)$$

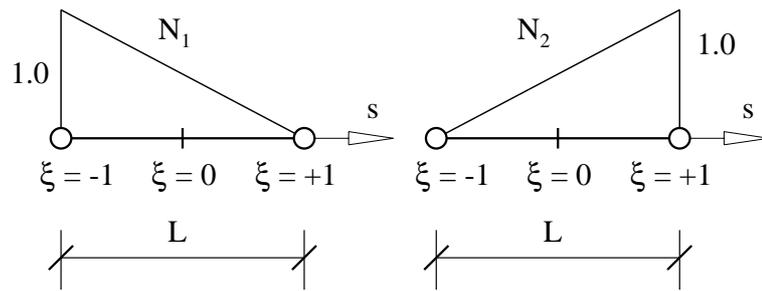


Figura 3.22: Funciones de forma.

Y de igual forma, estableciendo que el momento alrededor del eje  $y$  sea nulo se obtiene:

$$y_a = y_b + \frac{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_b \cdot x \cdot dA}{I_y} = y_b + \frac{I_{wb \cdot x}}{I_y} \quad (3.68)$$

Si en la ecuación de equilibrio (3.6) se tiene en cuenta que las tensiones normales son nulas, véase la ecuación (3.52), y se sustituye la ecuación (3.55) de las tensiones tangenciales resulta:

$$\frac{\partial^2 w_a}{\partial s^2} = 0 \quad (3.69)$$

Y por lo tanto, la función de alabeo  $w_a$  es una función lineal de  $s$ , luego hacen falta dos grados de libertad en cada pared para obtener una solución exacta.

Para la interpolación de la función de alabeo de la ecuación (3.58), se va a dividir la sección en paredes de directriz recta, y dentro de cada pared se realiza una interpolación lineal de la función de alabeo  $w_a$  en función de los valores en los extremos  $w_{a1}$  y  $w_{a2}$ , mediante las funciones representadas en la figura (3.22). Siendo  $L$  la longitud de la pared, y  $s$  la distancia de un punto al centro de la pared, dichas funciones de forma tienen las expresiones siguientes:

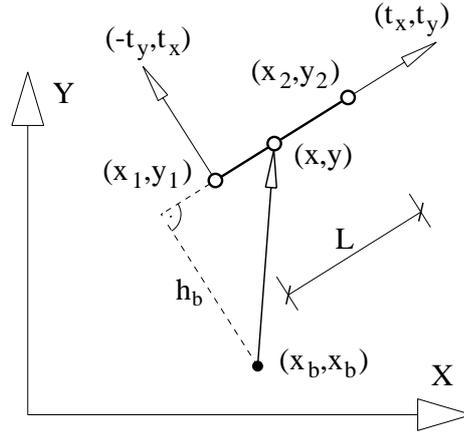
$$\begin{aligned} \xi &= \frac{s}{L/2} \\ N_1(\xi) &= \frac{1 - \xi}{2} \\ N_2(\xi) &= \frac{1 + \xi}{2} \\ w_a(\xi) &= N_1(\xi) \cdot w_{a1} + N_2(\xi) \cdot w_{a2} \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$w_a(\xi) = \left[ \frac{1 - \xi}{2}, \frac{1 + \xi}{2} \right] \begin{Bmatrix} w_{a1} \\ w_{a2} \end{Bmatrix} = [N_i] \cdot \{w_{ai}\} \quad (3.70)$$

Derivando:

$$ds = \frac{L}{2} \cdot d\xi$$


 Figura 3.23: Distancia  $h_b$  al centro de giro  $(x_b, y_b)$ .

$$[N'_i] = \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] = \left[ \frac{dN_1}{d\xi} \frac{d\xi}{ds}, \frac{dN_2}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} \right] = \left[ \frac{-1}{L}, \frac{1}{L} \right]$$

Sustituyendo esta ecuación en la (3.59), y siendo  $t$  el espesor de la pared considerada se obtiene la matriz de rigidez de una pared de la sección:

$$[K] = \int_A [N'_i]^t \cdot G \cdot [N'_i] dA = \int_A [N'_i]^t \cdot G \cdot [N'_i] \cdot t \cdot ds \quad (3.71)$$

$$[K] = \frac{G \cdot t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Al considerar una pared recta de longitud  $L$  entre los puntos de coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , la distancia al centro de giro medida en perpendicular a la tangente en cualquier punto de la pared es constante, y se determina como ya se ha visto mediante el producto escalar de dos vectores, que de acuerdo con la figura (3.23) es:

$$\begin{aligned} h_b &= (x_1 - x_b, y_1 - y_b) \cdot (-t_y, t_x) = \\ &= -(x_1 - x_b) \cdot \frac{y_2 - y_1}{L} + (y_1 - y_b) \cdot \frac{x_2 - x_1}{L} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Sustituyendo este valor de  $h_b$  en la ecuación (3.60), se obtiene mediante integración el término de fuerzas:

$$\{f_{ai}\} = G \cdot t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot h_b \quad (3.74)$$

En resumen el procedimiento de cálculo es el siguiente: se toma un centro de giro cualquiera  $(x_b, y_b)$ , y para cada una de las paredes en que se subdivide la sección se calcula la matriz de rigidez con la ecuación (3.72), y la contribución de la pared al término de fuerzas con la ecuación (3.74). Se ensambla el sistema de ecuaciones y se impone que en un nudo cualquiera que el alabeo incógnita sea cero.

Resuelto el sistema de ecuaciones para la función de alabeo  $w_b$ , con las expresiones (3.65) (3.67) y (3.68) se pueden calcular el valor de las constantes para obtener la solución correcta de la función de alabeo  $w_a$  mediante la expresión (3.64), a la cual se la denomina función de alabeo normalizada. Teniendo en cuenta las funciones de interpolación, estas constantes se obtienen con las siguientes expresiones en función de los grados de libertad, para el caso de trabajar en ejes principales de inercia:

$$c = -\frac{\sum \frac{E}{E_o} \cdot t \cdot L \cdot \frac{w_{a1} + w_{a2}}{2}}{\sum \frac{E}{E_o} \cdot t \cdot L}$$

$$x_a = x_b - \frac{1}{I_x} \sum \frac{E \cdot t \cdot L}{E_o \cdot 6} (2 \cdot w_{a1} \cdot y_1 + w_{a1} \cdot y_2 + w_{a2} \cdot y_1 + 2 \cdot w_{a2} \cdot y_2)$$

$$y_a = y_b + \frac{1}{I_y} \sum \frac{E \cdot t \cdot L}{E_o \cdot 6} (2 \cdot w_{a1} \cdot x_1 + w_{a1} \cdot x_2 + w_{a2} \cdot x_1 + 2 \cdot w_{a2} \cdot x_2)$$

Una vez normalizada la función de alabeo  $w_a$ , la tensión tangencial de cada pared se determina mediante la ecuación (3.54). Teniendo en cuenta las funciones de interpolación viene dada por:

$$\begin{aligned} \tau_{sz} &= G \cdot \gamma_{sz} = -G \cdot \left( h_a - \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \\ &= -G \cdot \left( h_a - \frac{w_{a2} - w_{a1}}{L} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$h_a = \frac{1}{L} \left( (y_1 - y_a) \cdot (x_2 - x_1) - (x_1 - x_a) \cdot (y_2 - y_1) \right)$$

El momento torsor uniforme  $M_{zu}$  sobre la sección, se obtiene por integración del momento que crean las tensiones tangenciales respecto del centro de giro, como se indica en la figura (3.24):

$$\begin{aligned} M_{zu} &= -\int_A \tau_{sz} \cdot h_a \cdot dA = \int_A G \left( h_a - \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) h_a \cdot dA \cdot \frac{d\theta_z}{dz} = \\ &= \sum G \cdot \left( h_a - \frac{w_{a2} - w_{a1}}{L} \right) \cdot h_a \cdot t \cdot L \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \end{aligned}$$

Denominando  $G_o$  al módulo de elasticidad transversal en que se homogeneiza la sección, y teniendo en cuenta que la inercia a torsión  $I_t$  es la relación entre el momento torsor uniforme  $M_{zu}$  y la derivada del giro, se puede obtener la inercia de la siguiente forma:

$$\boxed{M_{zu} = G_o \cdot I_t \cdot \frac{d\theta_z}{dz}} \quad (3.76)$$

$$I_t = \frac{M_{zu}}{G_o \cdot \frac{d\theta_z}{dz}} = \int_A \frac{G}{G_o} \left( h_a - \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) h_a \cdot dA =$$

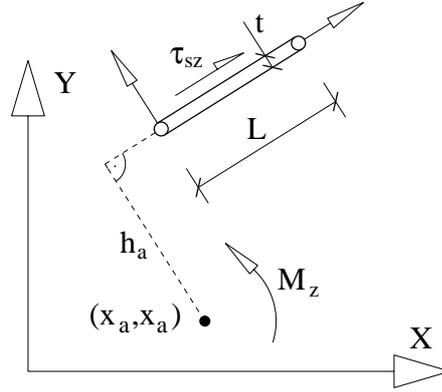


Figura 3.24: Momento torsor.

$$= \sum \frac{G}{G_o} \cdot \left( h_a - \frac{w_{a2} - w_{a1}}{L} \right) \cdot h_a \cdot t \cdot L \quad (3.77)$$

Teniendo en cuenta la relación (3.76) entre el momento torsor  $M_{zu}$  y la derivada del giro  $d\theta_z/dz$ , las tensiones tangenciales dadas por (3.75) se pueden expresar como:

$$\tau_{sz} = -\frac{G}{G_o} \left( h_a - \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \frac{M_{zu}}{I_t} \quad (3.78)$$

Que también se puede expresar como:

$$t_a = \left( \frac{\partial w_a}{\partial s} - h_a \right) \quad (3.79)$$

$$\tau_{sz} = \frac{G}{G_o} \frac{M_{zu}}{I_t} t_a \quad (3.80)$$

Para completar el estudio de la torsión uniforme, se determina la energía de deformación de las tensiones tangenciales y el trabajo realizado por las acciones torsoras exteriores. Para obtener la energía de deformación se integra el trabajo realizado por las tensiones tangenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dz} &= \frac{1}{2} \int_A \tau_{sz} \cdot \gamma_{sz} \cdot dA = \frac{1}{2} \int_A G \cdot \gamma_{sz}^2 \cdot dA = \\ &= \frac{1}{2} G_o \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right)^2 \cdot dA \cdot \left( \frac{d\theta_z}{dz} \right)^2 = \frac{1}{2} G_o I_t \left( \frac{d\theta_z}{dz} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Para obtener el trabajo realizado por la carga torsora, se considera que si sobre un punto  $(x, y)$  de la sección hay aplicada una fuerza de componentes  $(p_x, p_y)$ , tal como se ve en la figura (3.25), el trabajo que realiza esta fuerza al producirse el giro de torsión de ángulo  $\theta_z$  alrededor del centro de giro  $(x_a, y_a)$  viene dado por la mitad del producto de la fuerza por los movimientos del punto de aplicación.

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{2} \left( -(y - y_a) \cdot \theta_z \cdot p_x + (x - x_a) \cdot \theta_z \cdot p_y \right) = \frac{1}{2} \cdot m_t \cdot \theta_z \quad (3.82)$$

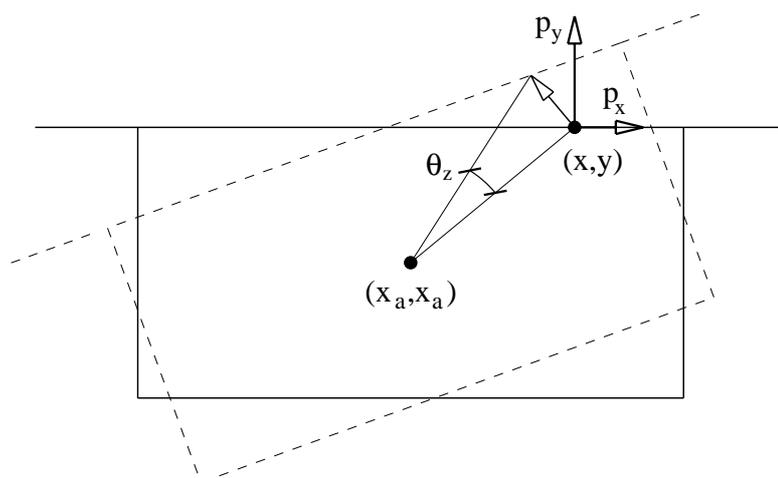


Figura 3.25: Carga torsora.

Donde  $m_t$  es la carga torsora que origina la fuerza aplicada.

$$m_t = -(y - y_a) \cdot p_x + (x - x_a) \cdot p_y \quad (3.83)$$

Al obtener la energía de deformación se ha encontrado una expresión para la inercia a torsión (3.81) distinta de la que se tenía (3.77). Por lo que se tienen para la inercia a torsión las dos ecuaciones diferentes siguientes:

$$\begin{aligned} I_t &= \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right)^2 dA \\ I_t &= \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) (-h_a) dA \end{aligned} \quad (3.84)$$

Para demostrar la igualdad entre estas expresiones, en el segundo término de la segunda integral se suma y se resta  $w'_a = \partial w_a / \partial s$  quedando:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + w'_a \right) (-h_a) dA &= \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + w'_a \right) \left( -h_a + w'_a - w'_a \right) dA = \\ &= \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + w'_a \right)^2 dA - \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + w'_a \right) w'_a dA \end{aligned}$$

El valor de  $G \cdot t_a = G \cdot (-h_a + w'_a)$  representa las tensiones tangenciales en la línea media de las paredes de la sección cuando la variación del giro es la unidad, y por condición de contorno su valor es nulo en las paredes con un extremo libre, y en las paredes con contornos cerrados es un valor constante, por lo que la última integral se reduce a una integral en los contornos cerrados de la sección.

$$= \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + w'_a \right)^2 dA - \oint_A \frac{G}{G_o} \cdot t_a w'_a dA$$

En la última integral por ser ( $t_a = constante$ ) y ser por tanto la integral en circuitos cerrados de la derivada de una función su valor es nulo, quedando por tanto demostrada la igualdad entre las dos expresiones de la inercia a torsión.

Sobre el estado de torsión uniforme, resta indicar que la forma de la función de alabeo de torsión  $w_a$  considerada, no tiene variación en el espesor de las paredes por lo que sólo se obtienen tensiones constantes en el ancho, lo que lleva a que en secciones con paredes abiertas las tensiones tangenciales que se obtienen son nulas.

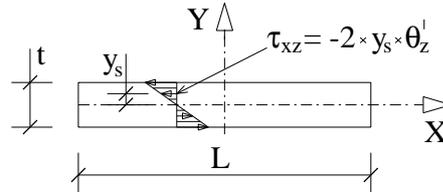


Figura 3.26: Tensiones tangenciales es una sección rectangular de pequeño espesor.

En este caso, posteriormente al cálculo hay que añadir explícitamente la variación tensiones tangenciales en el espesor<sup>2</sup>, véase la figura (3.26), y la contribución a la inercia a torsión  $I_t = L \cdot t^3/3$ .

Matemáticamente para que haya una pieza en estado de torsión uniforme, es decir sin ninguna tensión longitudinal  $\sigma_z$  por coacción al alabeo, se tienen que cumplir las siguientes condiciones: no existir carga torsora  $m_t$  a lo largo de la pieza y sólo haber en los extremos de la pieza momentos torsores  $M_z$  iguales y de sentido contrario; sólo haber una sección con el giro impedido; y no existir ninguna sección con el alabeo impedido. En la figura (3.27) se ha representado una pieza que cumple estas condiciones, siendo las ecuaciones que resuelven el problema las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \theta_z(z) &= \frac{M_z}{G I_t} \cdot z \\ v_z(x, y, z) &= \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \cdot w_a(x, y) = \frac{M_z}{G I_t} \cdot w_a(x, y) \\ \sigma_z &= E \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\}$$

### 3.10. TORSIÓN NO UNIFORME

Se analiza en este apartado el modo de torsión cuando el alabeo está impedido, modo que se denomina torsión no uniforme. Los movimientos en el plano de la estructura  $\{v_x(x, y, z), v_y(x, y, z)\}$  y en dirección tangente a las paredes  $v_s(x, y, z)$  vienen dados por las mismas expresiones (3.46) (3.48) que en torsión uniforme, y el movimiento fuera del

<sup>2</sup>En una sección rectangular de poco espesor, el campo de movimientos de forma aproximada es  $\{v_x = -y \cdot \theta'_z, v_y = x \cdot \theta'_z, v_z = -x \cdot y \cdot \theta''_z\}$ , de la que se deducen las tensiones tangenciales  $\tau_{xz} = -G \cdot 2 \cdot y \cdot \theta'_z$  y  $\tau_{yz} = 0$ , y a partir de la energía de deformación por tensiones tangenciales se deduce  $I_t = L \cdot t^3/3$ . El campo es aproximado porque incumple que  $\tau_{xz} = 0$  en los extremos por condición de contorno. Integrando el momento que originan las tensiones  $\tau_{xz}$  sólo se obtiene la mitad del torsor, ya que la otra mitad la darían las tensiones  $\tau_{yz}$  que deberían existir en los extremos.

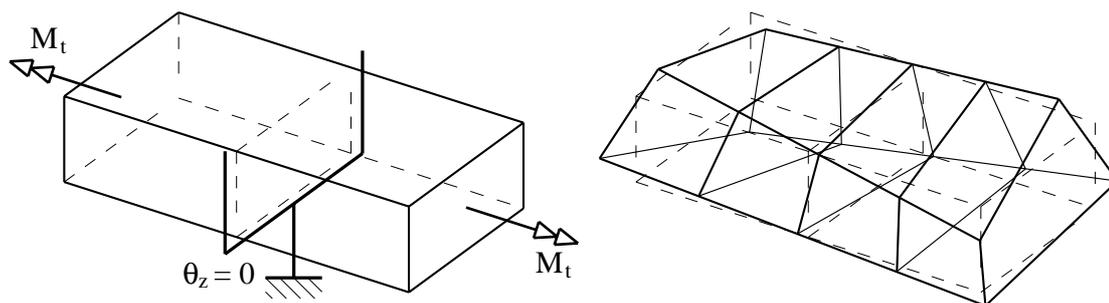


Figura 3.27: Pieza en estado de torsión uniforme.

plano de la sección  $v_z(x, y, z)$  viene definido por la expresión (3.47) con el añadido de un término adicional:

$$v_z = w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + w_{at} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \quad (3.85)$$

Con este campo de movimientos la deformación tangencial viene dada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot t_x + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot t_y + \frac{\partial v_z}{\partial s} = \\ &= -(y - y_a) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \cdot t_x + (x - x_a) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \cdot t_y + \frac{\partial w_a}{\partial s} \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} = \\ &= \left( -(y - y_a) \cdot t_x + (x - x_a) \cdot t_y + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} = \\ &= \left( -h_a + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Como se esta estudiando una sección sometida solamente a torsión no uniforme, para que no haya torsión uniforme se hace  $d\theta_z/dz = 0$ , con lo que queda:

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \quad (3.87)$$

La tensión tangencial y su derivada serán:

$$\tau_{sz} = G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} = G \cdot \frac{\partial^2 w_{at}}{\partial s^2} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \quad (3.89)$$

Y la deformación longitudinal:

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} + w_{at} \cdot \frac{d^4\theta_z}{dz^4} \quad (3.90)$$

Se desprecia la influencia de las tensiones tangenciales en las tensiones normales, o también se puede decir que se desprecia el valor de la derivada cuarta del giro respecto del valor de la derivada segunda. Por lo que desaparece el último término, quedando:

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = w_a \cdot \frac{d^2 \theta_z}{dz^2} \quad (3.91)$$

A partir de la deformación longitudinal la tensión normal y su derivada son:

$$\boxed{\sigma_z = E \cdot w_a \cdot \frac{d^2 \theta_z}{dz^2}} \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E \cdot w_a \cdot \frac{d^3 \theta_z}{dz^3} \quad (3.93)$$

Sustituyendo las expresiones (3.88) y (3.93) en la ecuación integral (3.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} G \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \frac{d^3 \theta_z}{dz^3} dA &= \int_A \delta \chi E w_a \frac{d^3 \theta_z}{dz^3} dA \\ \int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} G \frac{\partial w_{at}}{\partial s} dA &= \int_A \delta \chi E w_a dA \end{aligned} \quad (3.94)$$

De la misma forma que en torsión uniforme, se interpola la función incógnita  $w_{at}$  en función de los valores nodales:

$$\begin{aligned} w_{at} &= [N_i] \{w_{ati}\} \\ \frac{\partial w_{at}}{\partial s} &= \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \{w_{ati}\} = [N'_i] \{w_{ati}\} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Para la función arbitraria se adopta el valor  $\delta \chi = \delta w_{at}$ , por lo que su valor y derivada son:

$$\begin{aligned} \delta \chi &= [N_i] \cdot \{\delta w_{ati}\} \\ \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} &= \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \cdot \{\delta w_{ati}\} = [N'_i] \{\delta w_{ati}\} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Sustituyendo (3.95) y (3.96) en la ecuación (3.94):

$$\int_A \{\delta w_{ati}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{ati}\} dA = \int_A \{\delta w_{ati}\}^t [N_i]^t E w_a dA$$

Que se puede expresar como el sistema de ecuaciones lineales:

$$[K] \{w_{ati}\} = \{f_{ati}\}$$

Donde:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_A [N'_i]^t G [N'_i] dA \\ \{f_{ati}\} &= \int_A [N_i]^t E w_a dA \end{aligned}$$

Se puede obtener una ecuación alternativa para el problema de torsión no uniforme sustituyendo en la ecuación de equilibrio (3.6), la ecuación de la variación de las tensiones normales (3.93) y tangenciales (3.89), con lo que resulta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w_{at}}{\partial s^2} = -\frac{E}{G} \cdot w_a} \quad (3.97)$$

Como la función de alabeo de torsión uniforme  $w_a$  de una pared es función lineal de  $s$ , en base a la ecuación anterior la función de alabeo  $w_{at}$  depende de forma cúbica de  $s$ . Por lo que hacen falta cuatro grados de libertad en cada pared para obtener una solución exacta.

Para las funciones de forma se eligen las mismas que las utilizadas en el cálculo de la sección a cortante, ver figura (3.18) y ecuaciones (3.30). En ambos casos por ser idéntica la expresión de la matriz de rigidez, esta resulta ser la misma.

$$[K] = \frac{2 \cdot G \cdot t}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 \end{array} \right] \quad (3.98)$$

Para obtener el término de fuerzas se utiliza la interpolación de la función de alabeo de torsión uniforme  $w_a$ .

$$w_a(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \cdot w_{a1} + \frac{1+\xi}{2} \cdot w_{a2} = [N_i] \cdot \{w_{ai}\}$$

$$\{f_{ati}\} = \left( \left[ \begin{array}{c} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ -1/15 \end{array} \right] \cdot w_{a1} + \left[ \begin{array}{c} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{array} \right] \cdot w_{a2} \right) \cdot E \cdot t \cdot L \quad (3.99)$$

Las variables internas quedan desacopladas como en el caso del cortante, siendo sus valores en este caso en estudio:

$$w_{at3} = \frac{E \cdot L^2}{16 \cdot G} \cdot (w_{a1} + w_{a2})$$

$$w_{at4} = \frac{E \cdot L^2}{48 \cdot G} \cdot (w_{a2} - w_{a1}) \quad (3.100)$$

Ensambladas todas las matrices de rigidez de los elementos, para poder resolver el sistema de ecuaciones es necesario hacer nulo el alabeo  $w_{at}$  en un nodo cualquiera. Resuelto el sistema hay que obtener una constante de integración, sumando a la función de alabeo obtenida una constante  $w_{ato}$ . Para ello se plantea que el axil es nulo, integrando las tensiones normales obtenidas a partir de la deformación longitudinal total dada por la ecuación (3.90).

$$N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA = 0$$

$$w_{at}^* = w_{at} + w_{ato}$$

$$\int_A E \cdot \left( w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} + (w_{at} + w_{ato}) \cdot \frac{d^4\theta_z}{dz^4} \right) \cdot dA = 0$$

Teniendo en cuenta que por la normalización de la función de alabeo  $w_a$  la primera integral es nula, y despejando la constante de integración:

$$w_{ato} = - \frac{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_{at} \cdot dA}{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot dA} \quad (3.101)$$

La determinación de la constante anterior se le puede dar el significado de desacoplar el modo de deformación de torsión con el modo de axil. A este procedimiento se le denomina ortogonalizar modos.

La función de alabeo si se ortogonaliza respecto de los giros de flexión, ocurre en general que la función resultante en los extremos libres de la sección no cumple que la primera derivada sea nula ( $w'_{at} = 0$ ), por lo que no se cumpliría la condición de contorno de que en un extremo libre la tensión tangencial sea nula, por lo que no se puede realizar esta ortogonalización respecto de los giros de flexión.

Obtenida la función de alabeo, las tensiones tangenciales se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tau_{sz} &= G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} = \\ &= G \cdot [N'_i]^t \cdot \{w_{ati}\} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} = \\ &= G \cdot \frac{2}{L} \cdot \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2 \cdot \xi, 1 - 3 \cdot \xi^2 \right] \cdot \{w_{ati}\} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \end{aligned}$$

El momento torsor no uniforme  $M_{zw}$  se obtiene mediante la integración de las tensiones tangenciales, de acuerdo con la figura (3.24).

$$\begin{aligned} M_{zw} &= - \int_A \tau_{sz} \cdot h_a \cdot dA = - \int_A G \cdot \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot h_a \cdot dA \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} = \\ &= - \int_A G \cdot [N'_i] \cdot \{w_{ati}\} \cdot h_a \cdot dA \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \quad (3.102) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta esta ecuación y definiendo el módulo de alabeo  $I_a$  como:

$$I_a = - \frac{M_{zw}}{E_o \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3}}$$

$$M_{zw} = -E_o \cdot I_a \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \quad (3.103)$$

Queda para el mismo la expresión:

$$I_a = \int_A \frac{G}{E_o} \cdot \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot h_a \cdot dA \quad (3.104)$$

Sustituyendo la interpolación que se realiza para la función de alabeo  $w_{at}$  se obtiene:

$$I_a = \int_A \frac{G}{E_o} \cdot [N'_i] \cdot \{w_{ati}\} \cdot h_a \cdot dA = \sum (-w_{at1} + w_{at2}) \cdot \frac{t \cdot h_a \cdot G}{E_o}$$

Una expresión alternativa para el módulo de alabeo es la siguiente:

$$I_a = \int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_a^2 \cdot dA \quad (3.105)$$

Para demostrarla, en la ecuación (3.104) se sustituye la ecuación (3.79), quedando:

$$\begin{aligned} I_a &= \int_A \frac{G}{E_o} \cdot w'_{at} \cdot h_a \cdot dA = \int_A \frac{G}{E_o} \cdot w'_{at} \cdot (w'_a - t_a) \cdot dA = \\ &= \int_A \frac{G}{E_o} \cdot w'_{at} \cdot w'_a \cdot dA - \int_A \frac{G}{E_o} \cdot w'_{at} \cdot t_a \cdot dA \end{aligned}$$

Por las mismas razones que las indicadas en el apartado anterior en la demostración de la igualdad de las dos expresiones para la inercia a torsión  $I_t$  la última integral es nula. Integrando por partes la integral restante, y teniendo en cuenta la relación (3.97) se puede escribir:

$$\begin{aligned} I_a &= \int_A \frac{G}{E_o} \cdot w'_{at} \cdot w'_a \cdot dA = \frac{G}{E_o} \cdot w'_{at} \cdot w_a \cdot t \Big|_0^L - \int_A \frac{G}{E_o} \cdot w''_{at} \cdot w_a \cdot dA = \\ &= \frac{G}{E_o} \cdot w'_{at} \cdot w_a \cdot t \Big|_0^L + \int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_a^2 \cdot dA = 0 + I_a \end{aligned}$$

El primer término en secciones abiertas se anula por ser ( $w'_{at} = 0$ ), al ser nulas las tensiones tangenciales en los extremos libres, y en secciones cerradas por coincidir el comienzo del recorrido con el final se anula también dicho término. Quedando por tanto demostrada la igualdad entre las dos expresiones (3.104) y (3.105) para el módulo de alabeo  $I_a$ .

Las tensiones tangenciales se normalizan para momento torsor no uniforme unidad, sustituyendo en la expresión (3.88) de las mismas la relación (3.103) entre la derivada tercera del ángulo de giro y el momento torsor no uniforme.

$$\begin{aligned} \tau_{sz} &= G \cdot \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3 \theta_z}{ds^3} = -\frac{G}{E_o} \cdot \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{M_{zw}}{I_a} = \\ &= -\frac{G}{E_o} \cdot [N'_i] \cdot \{w_{ati}\} \cdot \frac{M_{zw}}{I_a} \end{aligned} \quad (3.106)$$

Las tensiones tangenciales se suelen expresar con una ecuación semejante a las tensiones tangenciales de cortante, mediante la variable  $S_a^3$  que representa el rasante en las paredes:

$$\tau_{sz} = \frac{M_{zw}}{I_a} \cdot \frac{S_a}{t} \quad (3.107)$$

<sup>3</sup>En secciones abiertas la variable  $S_a$  se corresponde con el momento estático sectorial. Combinando la ecuación (3.97) con la ecuación  $S_a = -(G/E_o) \cdot \partial w_{at} / \partial s \cdot t$  se obtiene  $S_a = \int_A E/E_o \cdot w_a \cdot dA + Constante$ .

Siendo por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 S_a &= \tau_{sz} \cdot \frac{I_a}{M_{zw}} \cdot t = -\frac{G}{E_o} \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot t = \\
 &= -\frac{G}{E_o} \cdot \frac{2}{L} \cdot \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2 \cdot \xi, 1 - 3 \cdot \xi^2 \right] \cdot \{w_{ati}\} \cdot t \quad (3.108)
 \end{aligned}$$

Se recuerda que para el caso de secciones abiertas (V.Z. Vlasov [1]) la función de alabeo  $w_a$  se corresponde con la coordenada sectorial, y  $S_a$  con el momento estático sectorial.

$$\begin{aligned}
 w_a &= \int_o^s h_a ds \\
 S_a &= \int_o^s w_a t ds
 \end{aligned}$$

Para obtener una expresión más sencilla para las tensiones normales por torsión no uniforme, se denomina bimomento torsor  $B_w$  a:

$$\boxed{B_w = E_o \cdot I_a \cdot \frac{d^2 \theta_z}{dz^2}} \quad (3.109)$$

De forma que las tensiones normales dadas por la ecuación (3.92) se pueden expresar como:

$$\boxed{\sigma_z = E \cdot w_a \cdot \frac{d^2 \theta_z}{dz^2} = \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_w}{I_a} \cdot w_a} \quad (3.110)$$

De acuerdo con las expresiones del momento torsor no uniforme  $M_{zw}$  y del bimomento torsor  $B_w$ , existe entre estas variables la relación siguiente:

$$\boxed{M_{zw} = -\frac{dB_w}{dz}} \quad (3.111)$$

Posteriormente hará falta conocer el valor del trabajo realizado por los momentos torsores y los bimomentos. Si en un extremo libre de una pieza se aplica un bimomento torsor  $B_w$ , el trabajo que realiza viene dado por el que realizan las tensiones normales que origina el bimomento, al producirse los movimientos  $v_z$  de la sección.

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_A \sigma_z v_z dA = \frac{1}{2} \int_A \left( \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_w}{I_a} \cdot w_a \right) \cdot \left( w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \right) dA = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{B_w}{I_a} \frac{d\theta_z}{dz} \int_A \frac{E}{E_o} w_a^2 dA = \frac{1}{2} B_w \frac{d\theta_z}{dz} \quad (3.112)
 \end{aligned}$$

Si en el extremo de una pieza lo que hay aplicado es un momento torsor  $M_z = M_{zu} + M_{zw}$  el trabajo que realiza este es:

$$W = \frac{1}{2} M_z \theta_z \quad (3.113)$$

En un estado en que sólo haya torsión, se tiene que cumplir que los cortantes, obtenidos por integración de las tensiones tangenciales según una dirección sean nulos. Dicha condición se cumple, pudiéndose encontrar la demostración tanto para el caso de torsión uniforme como no uniforme en el apéndice C, expresiones (C.9) (C.10) (C.13) y (C.14).

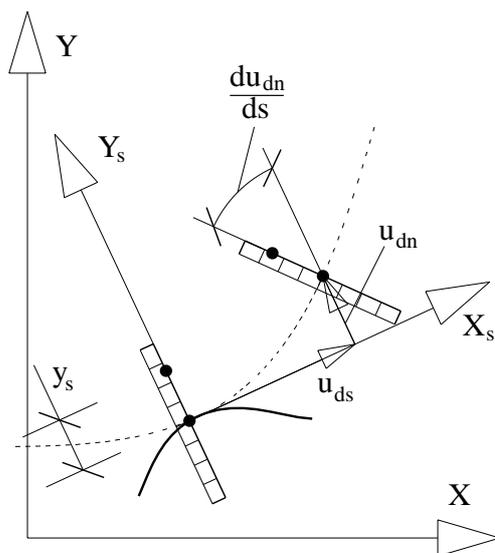


Figura 3.28: Movimientos de distorsión en ejes locales.

### 3.11. DISTORSIÓN UNIFORME

La distorsión es la deformación que se produce en una sección cuando esta sometida a un sistema autoequilibrado de fuerzas en su plano. En la literatura sobre el tema, la distorsión también es conocida como *Torsión de secciones transversales deformables* [47], frente a la torsión que sería para secciones no deformables o rígidas.

Al obtener el modo de torsión de una sección, a esta se le impone una deformada en su plano dada por un giro de conjunto, si se adopta la hipótesis de que el alabeo sea libre se está en el caso de torsión uniforme, y en el caso de que se considere impedido, se está en el caso de torsión no uniforme. El modo de distorsión es muy semejante, ya que también a la sección se le impone una deformada en su plano obtenida por flexión de la misma por fuerzas contenidas en dicho plano, y con las mismas dos hipótesis sobre el alabeo hay dos posibles formas de distorsión, que por semejanza con la torsión se han denominado distorsión uniforme y no uniforme<sup>4</sup>.

Al calcular la sección como una estructura plana sometida a un sistema de fuerzas autoequilibrado, se obtienen los movimientos en el plano de la sección en el eje de las paredes  $\{ u_{dx}(x, y), u_{dy}(x, y) \}$ , los cuales mediante una transformación de coordenadas se ponen en coordenadas locales tangentes en cada punto a las paredes de la sección  $\{ u_{ds}(x, y), u_{dn}(x, y) \}$ . Denominando  $\psi_d(z)$  a la función de intensidad de la deformada de distorsión a lo largo de la pieza, los movimientos  $\{ v_{ds}(x, y, z), v_{dn}(x, y, z) \}$  en ejes locales para un punto de una pared a una distancia  $y_s$  del eje de la misma se pueden escribir como:

<sup>4</sup>En la referencia [3] se denominan a la distorsión uniforme y no uniforme como: *distortional problem* para determinar *the distortional warping function*; y *shear problem of distortional warping*.

$$\boxed{\begin{aligned} v_{ds} &= \left( u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \psi_d \\ v_{dn} &= u_{dn} \cdot \psi_d \end{aligned}} \quad (3.114)$$

Y en ejes globales, el movimiento del eje de las paredes viene dado por:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= u_{dx} \cdot \psi_d \\ v_y &= u_{dy} \cdot \psi_d \end{aligned}} \quad (3.115)$$

Para dar sentido físico a la función de intensidad de distorsión, la deformada de la sección en su plano se normaliza de forma que el movimiento máximo o el giro máximo sea la unidad, de forma que la función de intensidad tiene el sentido de ser el valor de ese movimiento a lo largo de la pieza.

El movimiento en sentido longitudinal  $v_z(x, y, z)$  se expresa como producto de una función de alabeo  $w_d(x, y)$  por la derivada de la función de intensidad de distorsión  $\psi_d(z)$ :

$$\boxed{v_z = -w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz}} \quad (3.116)$$

A partir del campo de movimientos por derivación se obtienen la deformación longitudinal y tangencial:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = -w_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial v_z}{\partial s} + \frac{\partial v_{ds}}{\partial z} = -\frac{\partial w_d}{\partial s} \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + \left( u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \\ &= \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \end{aligned}$$

Y a partir de las deformaciones se obtienen las tensiones correspondientes:

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = -E \cdot w_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \quad (3.117)$$

$$\tau_{sz} = G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \quad (3.118)$$

Como se está estudiando la sección en un estado de distorsión uniforme en la que el alabeo es libre, no puede haber tensiones longitudinales:

$$\sigma_z = 0$$

Por lo que es necesario para que estas se anulen que:

$$\frac{d^2\psi_d}{dz^2} = 0$$

Sustituyendo los valores de las tensiones obtenidas en la ecuación integral (3.5) queda:

$$\int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} \cdot G \cdot \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} = 0$$

$$\int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} \cdot G \cdot \frac{\partial w_d}{\partial s} \cdot dA = \int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} \cdot G \cdot \left( u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot dA \quad (3.119)$$

Para resolver esta ecuación, la función de alabeo  $w_d$ , se interpola en función de los valores en los nodos. Siendo  $[N_i]$  una matriz fila con las funciones de interpolación, y  $\{w_{di}\}$  un vector columna con los valores nodales:

$$w_d = [N_i] \cdot \{w_{di}\}$$

$$\frac{\partial w_d}{\partial s} = \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \{w_{di}\} = [N'_i] \{w_{di}\} \quad (3.120)$$

Para la función arbitraria  $\delta \chi$  se elige el valor:

$$\delta \chi = \delta w_d$$

Y teniendo en cuenta la expresión de interpolación de  $w_d$  queda:

$$\delta \chi = [N_i] \cdot \{\delta w_{di}\}$$

$$\frac{\partial \delta \chi}{\partial s} = \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \cdot \{\delta w_{di}\} = [N'_i] \{\delta w_{di}\} \quad (3.121)$$

Sustituyendo (3.120) y (3.121) en la ecuación (3.119):

$$\int_A \{\delta w_{di}\}^t [N'_i]^t G [N_i] \{w_{di}\} dA = \int_A \{\delta w_{di}\}^t [N'_i]^t G \left( u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) dA$$

La integral de la distancia  $y_s$  de un punto al eje de la pared en el espesor de la misma, es nula por ser el momento estático de la sección transversal de la pared respecto de su centro de gravedad, por lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$\int_A \{\delta w_{di}\}^t [N'_i]^t G [N_i] \{w_{di}\} dA = \int_A \{\delta w_{di}\}^t [N'_i]^t G u_{ds} dA$$

Que se puede expresar como el sistema de ecuaciones lineales:

$$[K] \{w_{di}\} = \{f_{di}\}$$

Donde:

$$[K] = \int_A [N'_i]^t G [N_i] dA$$

$$\{f_{di}\} = \int_A [N'_i]^t G u_{ds} dA$$

Si en la ecuación diferencial de equilibrio (3.6) se sustituye el valor de las tensiones tangenciales (3.118), y se tiene en cuenta que en distorsión uniforme las tensiones normales son nulas ( $\sigma_z = 0$ ), queda lo siguiente:

$$G \cdot \left( -\frac{\partial^2 w_d}{\partial s^2} + \frac{du_{ds}}{ds} - \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \cdot y_s \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w_d}{\partial s^2} = \frac{du_{ds}}{ds} - \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \cdot y_s$$

Se desprecia las deformaciones longitudinales  $du_{ds}/ds$  de las paredes en su plano, que equivale a que se haya tomado en el cálculo del pórtico para la flexión transversal valores de áreas de axil infinitas para las barras, y se desprecia el espesor de la pared respecto al resto de las dimensiones de la pared, con lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w_d}{\partial s^2} = 0} \quad (3.122)$$

Y por lo tanto, la función de alabeo  $w_d$  es una función lineal de  $s$ , por lo que hacen falta dos grados de libertad en cada pared para obtener una solución exacta.

Como funciones de forma se eligen las mismas que las utilizadas en el cálculo de la sección a torsión uniforme, ver figura (3.22) y ecuaciones (3.70). En ambos casos por ser idéntica la expresión para la matriz de rigidez, esta resulta ser la misma.

$$[K] = \frac{G \cdot t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Para obtener el término de fuerzas se interpolan los movimientos de la deformada de distorsión en función de los valores nodales. En el caso de que en el cálculo del pórtico transversal se hubieran despreciado las deformaciones por axil, el valor sería constante y no sería necesaria hacer esta interpolación.

$$u_{ds}(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \cdot u_{ds1} + \frac{1+\xi}{2} \cdot u_{ds2}$$

$$\{f_{di}\} = G \cdot t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{u_{ds1} + u_{ds2}}{2} \quad (3.124)$$

Se ensambla el sistema de ecuaciones para la sección, y para poderlo resolver se impone que en un nodo cualquiera la incógnita  $w_d$  sea nula. Es necesario obtener una constante de integración  $w_{do}$ , para lo cual se plantea que el axil es nulo ( $N_z = 0$ ) mediante la integración de las tensiones normales dadas por la ecuación (3.117).

$$w_d^* = w_d + w_{do}$$

$$N_z = \int_A \sigma_z \cdot dA = -E_o \int_A \frac{E}{E_o} \cdot (w_d + w_{do}) \cdot \frac{d^2 \psi_d}{dz^2} \cdot dA = 0$$

Despejando la constante buscada se obtiene para ella la expresión:

$$w_{do} = -\frac{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_d \cdot dA}{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot dA} \quad (3.125)$$

Teniendo en cuenta la interpolación lineal de la función de alabeo:

$$w_{do} = - \frac{\sum \frac{E}{E_o} \cdot \frac{w_{d1} + w_{d2}}{2} \cdot t \cdot L}{\sum \frac{E}{E_o} \cdot t \cdot L}$$

Para evitar el acoplamiento entre el modo de distorsión uniforme y los modos de flexión y torsión hay que ortogonalizarlos. Para ortogonalizar respecto de la flexión por el momento  $M_x$  a la función de alabeo de distorsión uniforme  $w_d^*$  le sumamos la función de alabeo de flexión de este momento  $w_{mx}$  ( ver figura (3.13) y ecuación (3.7) ) multiplicada por una constante a determinar.

$$w_d^{**} = w_d^* + (y - y_c) \cdot C_y$$

Se impone la condición de que la integral del producto de las funciones de alabeo que se ortogonalizan sea nula. Esta condición tiene el significado de que, el trabajo realizado por las tensiones de un modo al tener un movimiento dado por las deformaciones del otro modo sea nulo. Que en este caso es lo mismo que, establecer que sea nulo el momento flector por las tensiones normales que dependen de la función de alabeo de distorsión  $w_d$ .

$$\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_d^{**} \cdot (y - y_c) \cdot dA = 0$$

$$\int_A \frac{E}{E_o} \cdot \left( w_d^* + (y - y_c) \cdot C_y \right) \cdot (y - y_c) \cdot dA = 0$$

Despejando y teniendo en cuenta que se está en ejes principales de inercia:

$$C_y = - \frac{1}{I_x} \cdot \int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_d^* \cdot (y - y_c) \cdot dA = - \frac{I_{wd^*.x}}{I_x} \quad (3.126)$$

$$I_{wd^*.x} = \sum (2 w_{d1}^* y_1 + w_{d1}^* y_2 + w_{d2}^* y_1 + 2 w_{d2}^* y_2) \cdot \frac{t \cdot L}{6}$$

Como el modo de flexión está formado por las ecuaciones (3.8) y (3.14), para completar la ortogonalización a la deformada por distorsión en el plano de la sección hay que sumar multiplicando por la misma constante  $C_y$  el modo correspondiente de flexión.

$$\left. \begin{aligned} u_{dx}(s)^{**} &= u_{dx}(s) \\ u_{dy}(s)^{**} &= u_{dy}(s) + 1 \cdot C_y \end{aligned} \right\}$$

A la nueva función de alabeo obtenida  $w_d^{**}$  se la ortogonaliza de la misma forma respecto del otro modo de flexión correspondiente al momento  $M_y$ .

$$\left. \begin{aligned} w_d^{***} &= w_d^{**} - (x - x_c) \cdot C_x \\ u_{dx}(s)^{***} &= u_{dx}(s)^{**} - 1 \cdot C_x \\ u_{dy}(s)^{***} &= u_{dy}(s)^{**} \end{aligned} \right\}$$

$$C_x = \frac{1}{I_y} \cdot \int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_d^{**} \cdot (x - x_c) \cdot dA \quad (3.127)$$

Se procede de forma idéntica para ortogonalizar la función de alabeo de distorsión  $w_d^{***}$  con la de torsión uniforme  $w_a$ .

$$w_d^{****} = w_d^{***} + w_a \cdot C_a$$

$$\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_d^{***} \cdot w_a \cdot dA = 0$$

$$C_a = -\frac{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_d^{***} \cdot w_a \cdot dA}{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_a^2 \cdot dA} = -\frac{1}{I_a} \int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_d^{***} \cdot w_a \cdot dA \quad (3.128)$$

De la misma forma que para la ortogonalización con los modos de flexión, como el modo de deformación de torsión está constituido por las ecuaciones (3.46) y (3.47), hay que sumar los movimientos de torsión en el plano de la sección multiplicados por la misma constante.

$$\left. \begin{aligned} u_{dx}(s)^{****} &= u_{dx}(s)^{***} - (y - y_a) \cdot C_a \\ u_{dy}(s)^{****} &= u_{dy}(s)^{***} + (x - x_a) \cdot C_a \end{aligned} \right\}$$

Puede ocurrir que las funciones de alabeo de torsión  $w_a$  y distorsión  $w_d$  sean proporcionales, en ese caso no es posible ortogonalizarlas.

En el caso de existir varios modos de distorsión en la sección es necesario ortogonalizarlos entre ellos. El procedimiento y las expresiones son totalmente semejantes a las que se acaba de ver para la ortogonalización con el modo de torsión uniforme, sin más que sustituir esta por una de las funciones de alabeo de distorsión.

Realizada la ortogonalización entre modos, con el modo de deformación de distorsión obtenido ya se puede obtener las tensiones tangenciales a partir de la ecuación (3.118). Se desprecia la variación de las tensiones en el espesor de las paredes, quedando por tanto:

$$\tau_{sz} = G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \quad (3.129)$$

$$\tau_{sz} = G \left( -\left[ -\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} w_{d1} \\ w_{d2} \end{Bmatrix} + \left[ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right] \begin{Bmatrix} u_{ds1} \\ u_{ds2} \end{Bmatrix} \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz}$$

Se define el momento distorsor uniforme  $M_{du}$  como:

$$\boxed{M_{du} = -G_o \cdot D_{td.td} \cdot \frac{d\psi_d}{dz}} \quad (3.130)$$

$$\boxed{D_{td.td} = \int_A \frac{G}{G_o} \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} \right)^2 dA} \quad (3.131)$$

$$= \sum \frac{G}{G_o} \left( -\frac{w_{d2} - w_{d1}}{L} + \frac{1-\xi}{2} u_{ds1} + \frac{1+\xi}{2} u_{ds2} \right)^2 \cdot t \cdot L$$

Las tensiones tangenciales en función del momento distorsor uniforme  $M_{du}$  quedan como sigue:

$$\begin{aligned}
 \tau_{sz} &= -\frac{G}{G_o} \cdot \frac{\left(-\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds}\right)}{D_{td.td}} \cdot M_{du} = \\
 &= \frac{G}{G_o} \left(-\frac{w_{d2} - w_{d1}}{L} + \frac{1-\xi}{2} u_{ds1} + \frac{1+\xi}{2} u_{ds2}\right) \frac{M_{du}}{D_{td.td}} \quad (3.132)
 \end{aligned}$$

También se pueden escribir como:

$$\boxed{t_d = \left(u_{ds} - \frac{\partial w_d}{\partial s}\right)} \quad (3.133)$$

$$\boxed{\tau_{sz} = -\frac{G}{G_o} \cdot \frac{M_{du}}{D_{td.td}} \cdot t_d} \quad (3.134)$$

La deformación de las paredes en su dirección  $\epsilon_s$  se obtiene por derivación del movimiento en dirección tangente  $v_{ds}$ , el cual viene dado por la ecuación (3.114).

$$\epsilon_s = \frac{dv_{ds}(s)}{ds} = \left(\frac{du_{ds}}{ds} - \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} y_s\right) \cdot \psi_d$$

El axil y el momento transversal en las paredes de la sección, se obtienen multiplicando la deformación  $\epsilon_s$  por el módulo de elasticidad, e integrando en el espesor de las paredes:

$$\begin{aligned}
 N_{ds}(s) &= \int_{-t/2}^{t/2} E \epsilon_s dy_s = E t \frac{du_{ds}}{ds} \psi_d \\
 M_{ds}(s) &= -\int_{-t/2}^{t/2} E \epsilon_s y_s dy_s = E \frac{t^3}{12} \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \psi_d
 \end{aligned}$$

El cortante transversal se obtiene por equilibrio:

$$Q_{ds}(s) = \frac{dM_{ds}}{ds} \quad (3.135)$$

Si se desea evaluar la energía de deformación por la deformación transversal de la sección, viene dada en función de los movimientos en ejes locales por:

$$\begin{aligned}
 \frac{dU}{dz} &= \frac{1}{2} \int_A E \epsilon_s^2 dA = \\
 &= \frac{1}{2} \int E \left[ \int_{-t/2}^{t/2} \left( \left(\frac{du_{ds}}{ds}\right)^2 - 2 \left(\frac{du_{ds}}{ds} \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2}\right) \cdot y_s + \left(\frac{d^2 u_{dn}}{ds^2}\right)^2 \cdot y_s^2 \right) dy_s \right] (\psi_d)^2 ds = \\
 &= \frac{1}{2} \int E \left( t \cdot \left(\frac{du_{ds}}{ds}\right)^2 + \frac{t^3}{12} \cdot \left(\frac{d^2 u_{dn}}{ds^2}\right)^2 \right) (\psi_d)^2 ds
 \end{aligned}$$

Siendo  $E_o$  el módulo de elasticidad en el que se homogeneiza la sección, se puede escribir:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{2} E_o K_d (\psi_d)^2 \quad (3.136)$$

$$K_d = \int \frac{E}{E_o} \left( t \cdot \left( \frac{du_{ds}}{ds} \right)^2 + \frac{t^3}{12} \cdot \left( \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right)^2 \right) ds \quad (3.137)$$

Los axiles y momentos transversales sobre la sección se pueden expresar ahora como:

$$N_{ds}(s) = \frac{E}{E_o} \cdot \frac{M_{K_d}}{K_d} \cdot \left( t \cdot \frac{du_{ds}}{ds} \right) \quad (3.138)$$

$$M_{ds}(s) = \frac{E}{E_o} \cdot \frac{M_{K_d}}{K_d} \cdot \left( \frac{t^3}{12} \cdot \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right) \quad (3.139)$$

Siendo:

$$M_{K_d}(z) = E_o \cdot K_d \cdot \psi_d(z) \quad (3.140)$$

Para evaluar el valor de la rigidez  $K_d$ , primero en cada pared se interpolan los movimientos transversales  $\{u_{ds}, u_{dn}\}$  de un punto cualquiera en función de los valores nodales:

$$u_{ds}(\xi) = \frac{1-\xi}{2} u_{ds1} + \frac{1+\xi}{2} u_{ds2}$$

$$\begin{aligned} u_{dn}(\xi) = & \left( 1 - 3 \frac{(1+\xi)^2}{4} + 2 \frac{(1+\xi)^3}{8} \right) u_{dn1} + \left( \frac{1+\xi}{2} - 2 \frac{(1+\xi)^2}{4} + 3 \frac{(1+\xi)^3}{8} \right) u'_{dn1} \\ & + \left( 3 \frac{(1+\xi)^2}{4} - 2 \frac{(1+\xi)^3}{8} \right) u_{dn2} + \left( -\frac{(1+\xi)^2}{4} + \frac{(1+\xi)^3}{8} \right) u'_{dn2} \end{aligned}$$

Y luego integrando, se obtiene:

$$K_d = K_{ds} + K_{dn} \quad (3.141)$$

$$K_{ds} = \frac{E \cdot t}{E_o} [u_{ds1}, u_{ds2}] \begin{bmatrix} 1/L & -1/L \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ds1} \\ u_{ds2} \end{bmatrix}$$

$$\{u_{dn}\} = \begin{Bmatrix} u_{dn1} \\ u'_{dn1} \\ u_{dn2} \\ u'_{dn2} \end{Bmatrix}$$

$$K_{dn} = \frac{E \cdot t^3}{E_o \cdot 12} \{u_{dn}\}^t \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ 6/L^2 & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ -12/L^3 & -6/L^2 & 12/L^3 & -6/L^2 \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & 4/L \end{bmatrix} \{u_{dn}\}$$

En el caso en que al calcular la sección transversal con las fuerzas de distorsión se haya despreciado la deformación por axil de las paredes el primer término es nulo  $K_{ds} = 0$ .

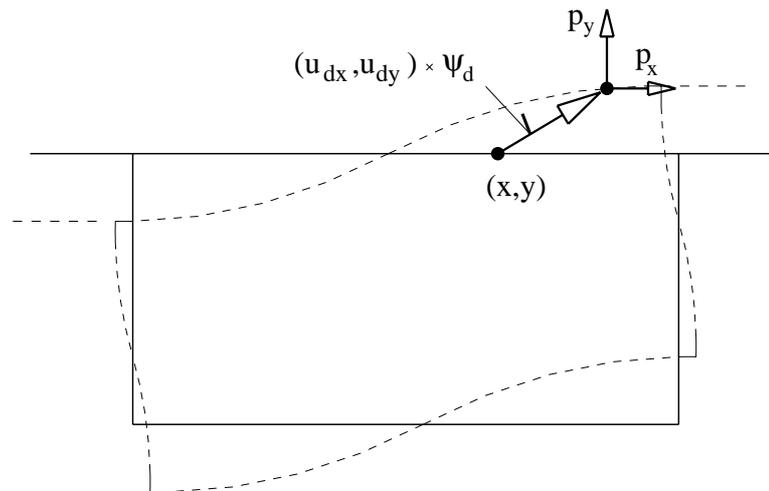


Figura 3.29: Carga distorsora  $m_d = (u_{dx} \cdot p_x + u_{dy} \cdot p_y)$ .

Para obtener la definición matemática de la carga torsora y el trabajo que realiza, se hace la siguiente consideración. Si sobre un punto  $(x, y)$  de la sección hay aplicada una fuerza de componentes  $(p_x, p_y)$ , tal como se ve en la figura (3.29), el trabajo que realiza al producirse el movimiento de distorsión  $(u_{dx}, u_{dy}) \cdot \psi_d$  viene dado por la mitad del producto de la fuerza por los movimientos del punto de aplicación.

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{2} (u_{dx} \cdot \psi_d \cdot p_x + u_{dy} \cdot \psi_d \cdot p_y) = \frac{1}{2} \cdot m_d \cdot \psi_d \quad (3.142)$$

Donde  $m_d$  es la carga distorsora que origina la fuerza aplicada.

$$m_d = (u_{dx} \cdot p_x + u_{dy} \cdot p_y) \quad (3.143)$$

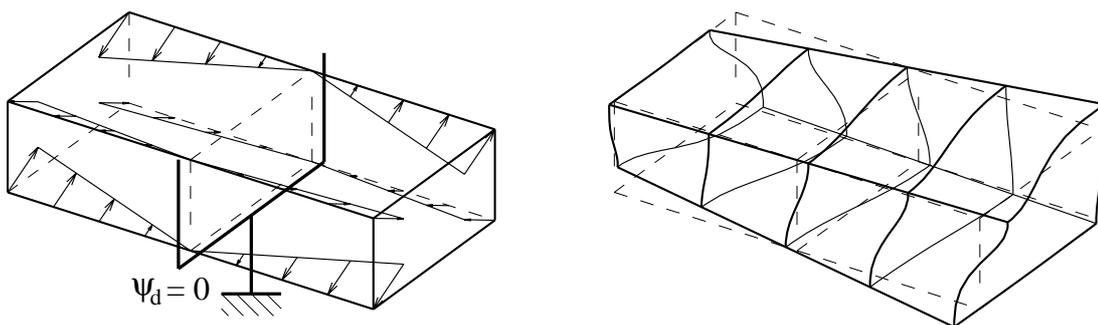


Figura 3.30: Pieza en estado de distorsión uniforme.

Matemáticamente para que haya una pieza en estado de distorsión uniforme, es decir sin ninguna tensión longitudinal  $\sigma_z$  por coacción al alabeo, se tienen que cumplir las siguientes condiciones: existir una carga distorsora  $m_d$  con variación lineal a lo largo de toda la pieza; sólo haber una sección con la distorsión impedida; y no existir ninguna sección con el alabeo impedido. En la figura (3.30) se ha representado una pieza que cumple estas condiciones, siendo las ecuaciones que resuelven el problema las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} m_d(z) &= c_d \cdot z \\ \psi_d(z) &= \frac{c_d}{E K_d} \cdot z \\ v_z(x, y, z) &= -\frac{\partial \psi_d}{\partial z} \cdot w_d(x, y) = -\frac{c_d}{E K_d} \cdot w_d(x, y) \\ \sigma_z &= E \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\}$$

### 3.12. DISTORSIÓN NO UNIFORME

En el estado de distorsión no uniforme los movimientos en el plano de la estructura vienen dados por las mismas expresiones que en distorsión uniforme (3.114), y el movimiento fuera del plano de la sección es el de distorsión uniforme (3.116) al que se le añade un término adicional:

$$\boxed{\begin{aligned} v_{ds} &= \left( u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \psi_d \\ v_{dn} &= u_{dn} \cdot \psi_d \end{aligned}}$$

$$\boxed{v_z = -w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + w_{dt} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3}} \quad (3.144)$$

A partir del campo de movimientos se obtienen la deformación longitudinal y tangencial:

$$\epsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} = -w_d \frac{d^2\psi_d}{dz^2} + w_{dt} \frac{d^4\psi_d}{dz^4} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= \frac{\partial v_z}{\partial s} + \frac{\partial v_{ds}}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial w_d}{\partial s} \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3} + \left( u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \\ &= \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Se desprecia la influencia de las deformaciones tangenciales en las tensiones normales (segundo término en la expresión de  $\epsilon_z$ ), o dicho de otra forma, se desprecia el valor de la cuarta derivada respecto el valor de la segunda derivada. Y como se está estudiando el caso de alabeo impedido, para que en la ecuación de  $v_z$  sea nulo el primer término es necesario hacer  $d\psi_d/dz = 0$ . Con estas hipótesis las deformaciones quedan:

$$\epsilon_z = -w_d \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \quad (3.147)$$

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3} \quad (3.148)$$

Y las correspondientes tensiones y sus derivadas:

$$\boxed{\sigma_z = -E w_d \frac{d^2 \psi_d}{dz^2}} \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -E w_d \frac{d^3 \psi_d}{dz^3} \quad (3.150)$$

$$\boxed{\tau_{sz} = G \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \frac{d^3 \psi_d}{dz^3}} \quad (3.151)$$

$$\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} = G \frac{\partial^2 w_{dt}}{\partial s^2} \frac{d^3 \psi_d}{dz^3} \quad (3.152)$$

Sustituyendo los valores de las tensiones obtenidas en la ecuación integral de equilibrio (3.5) queda:

$$\int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} \cdot G \cdot \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot \frac{d^3 \psi_d}{dz^3} \cdot dA = - \int_A \delta \chi \cdot E \cdot w_d \cdot \frac{d^3 \psi_d}{dz^3} \cdot dA \quad (3.153)$$

Como en los modos anteriores, se interpola la función incógnita  $w_{dt}$  en función de los valores nodales:

$$\begin{aligned} w_{dt} &= [N_i] \{w_{dti}\} \\ \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} &= \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \{w_{dti}\} = [N'_i] \{w_{dti}\} \end{aligned} \quad (3.154)$$

Y para la función arbitraria se adopta el valor  $\delta \chi = \delta w_{dt}$ , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \delta \chi &= [N_i] \cdot \{\delta w_{dti}\} \\ \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} &= \left[ \frac{dN_i}{ds} \right] \cdot \{\delta w_{dti}\} = [N'_i] \{\delta w_{dti}\} \end{aligned} \quad (3.155)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.154) y (3.155) en la ecuación (3.153):

$$\int_A \{\delta w_{dti}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{dti}\} dA = - \int_A \{\delta w_{dti}\}^t [N_i]^t E w_d dA$$

Que se puede expresar como el sistema de ecuaciones lineales:

$$[K] \{w_{dti}\} = \{f_{dti}\}$$

Donde:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_A [N'_i]^t G [N'_i] dA \\ \{f_{dti}\} &= - \int_A [N_i]^t E w_d dA \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio (3.6) la ecuación de la variación de las tensiones normales (3.150) y tangenciales (3.152) resulta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w_{dt}}{\partial s^2} = \frac{E}{G} \cdot w_d} \quad (3.156)$$

Como la función de alabeo de distorsión uniforme  $w_d$  de una pared es función lineal de  $s$ , la función de alabeo  $w_{dt}$  depende de forma cúbica de  $s$ . Por lo que hacen falta cuatro grados de libertad en cada pared para obtener una solución exacta.

Como funciones de forma se eligen las mismas que las utilizadas en el cálculo de la sección a cortante, ver figura (3.18) y ecuaciones (3.30). En ambos casos por ser idéntica la expresión de la matriz de rigidez, esta resulta ser la misma.

$$[K] = \frac{2 \cdot G \cdot t}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 \end{array} \right] \quad (3.157)$$

Para obtener el término de fuerzas se utiliza la interpolación de la función de alabeo de distorsión uniforme  $w_d$ .

$$w_d(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \cdot w_{d1} + \frac{1+\xi}{2} \cdot w_{d2} = [N_i] \cdot \{w_{di}\}$$

$$\{f_{dti}\} = - \left( \left( \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ -1/15 \end{bmatrix} \cdot w_{d1} + \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{bmatrix} \cdot w_{d2} \right) \cdot E \cdot t \cdot L \right) \quad (3.158)$$

Las variables internas quedan desacopladas como en el caso del cortante, siendo sus valores:

$$w_{dt3} = -\frac{E \cdot L^2}{16 \cdot G} \cdot (w_{d1} + w_{d2})$$

$$w_{dt4} = -\frac{E \cdot L^2}{48 \cdot G} \cdot (w_{d2} - w_{d1}) \quad (3.159)$$

Como en los casos anteriores, para poder resolver el sistema de ecuaciones al ensamblar las matrices de rigidez de todos los elementos, es necesario considerar nula la incógnita en un nodo cualquiera. Y la función de alabeo obtenida es necesario ortogonalizarla respecto del modo de axil. El procedimiento es el siguiente:

$$w_{dt}^* = w_{dt} + w_{dto}$$

$$w_{dto} = -\frac{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_{dt} \cdot dA}{\int_A \frac{E}{E_o} \cdot dA} \quad (3.160)$$

Obtenidos los alabeos, las tensiones tangenciales se obtienen de la siguiente forma:

$$\tau_{sz} = G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot \frac{d^3 \psi_d}{ds^3}$$

$$\tau_{sz} = G \cdot [N_i']^t \cdot \{w_{dti}\} = G \cdot \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2 \cdot \xi, 1 - 3 \cdot \xi^2 \right] \cdot \frac{2}{L} \cdot \{w_{dti}\} \cdot \frac{d^3 \psi_d}{ds^3}$$

Se define el momento distorsor no uniforme  $M_{dw}$  como:

$$M_{dw} = E_o \cdot I_d \cdot \frac{d^3 \psi_d}{ds^3} \quad (3.161)$$

$$I_d = \int_A \frac{E}{E_o} w_d^2 dA \quad (3.162)$$

Las tensiones tangenciales se pueden escribir ahora como:

$$\tau_{sz} = \frac{G}{E_o} \frac{M_{dw}}{I_d} \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} = \frac{M_{dw}}{I_d} \frac{S_d}{t} \quad (3.163)$$

Donde  $S_d$  que representa el rasante en las paredes viene dado por:

$$S_d = \frac{G}{E_o} \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot t = \frac{G}{E_o} \cdot \frac{2}{L} \cdot \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2 \cdot \xi, 1 - 3 \cdot \xi^2 \right] \cdot \{w_{dti}\} \cdot t \quad (3.164)$$

Denominando bimomento distorsor  $B_d$  a:

$$B_d = -E_o \cdot I_d \cdot \frac{d^2 \psi_d}{dz^2} \quad (3.165)$$

Las tensiones normales dadas por la ecuación (3.149) se pueden expresar como:

$$\sigma_z = -E \cdot w_d \cdot \frac{d^2 \psi_d}{dz^2} = \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_d}{I_d} \cdot w_d \quad (3.166)$$

De acuerdo con las expresiones del momento distorsor no uniforme  $M_{dw}$  y del bimomento distorsor  $B_d$ , existe entre ellos la relación siguiente:

$$M_{dw} = -\frac{dB_d}{dz}$$

Si en un extremo libre de una pieza se aplica un bimomento distorsor  $B_d$ , el trabajo que se realiza viene dado por el que producen las tensiones normales equivalentes a  $B_d$ , al producirse los movimientos  $v_z$  de la sección.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_A \sigma_z v_z dA = \frac{1}{2} \int_A \left( \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_d}{I_d} \cdot w_d \right) \cdot \left( -w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \right) dA = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{B_d}{I_d} \frac{d\psi_d}{dz} \int_A \frac{E}{E_o} w_d^2 dA = -\frac{1}{2} B_d \frac{d\psi_d}{dz} \end{aligned} \quad (3.167)$$

En un estado en que sólo hubiese distorsión el esfuerzo cortante en la sección tiene que ser nulo. La demostración de que se cumple, tanto para el caso de distorsión uniforme como no uniforme, se ha incluido en el apéndice C, expresiones (C.11) (C.12) (C.15) y (C.16).

### 3.13. RESUMEN DE LOS MODOS RESISTENTES

Como recapitulación de lo visto en el presente capítulo, se hace a continuación un resumen de los modos resistentes que se han considerado, presentando las fórmulas principales para cada uno. Para ver como se usan, en el apéndice D se incluye un ejemplo de cálculo de los modos resistentes de una sección.

#### MODO DE AXIL

Es el modo más sencillo, y se corresponde con la respuesta de la sección ante una fuerza longitudinal  $N_z$  aplicada en su centro de gravedad.

Campo de movimientos (3.7) (3.8):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= 0 \\ v_z &= 1 \cdot u_z \end{aligned} \right\}$$

Deformaciones (3.9):

$$\epsilon_z = \frac{du_z}{dz} = \frac{N_z}{E_o \cdot A}$$

Características mecánicas (3.9):

$$A = \int_A \frac{E}{E_o} \cdot dA$$

Tensiones:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A}$$

**MODO DE FLEXIÓN Y CORTANTE**

Se presentan las fórmulas para el caso de flexión en el plano principal de inercia  $y - z$ , en el que la sección está solicitada por un momento flector  $M_x$  y un esfuerzo cortante  $Q_y$ . El caso para la flexión en el otro plano principal  $x - z$  es totalmente semejante al aquí presentado.

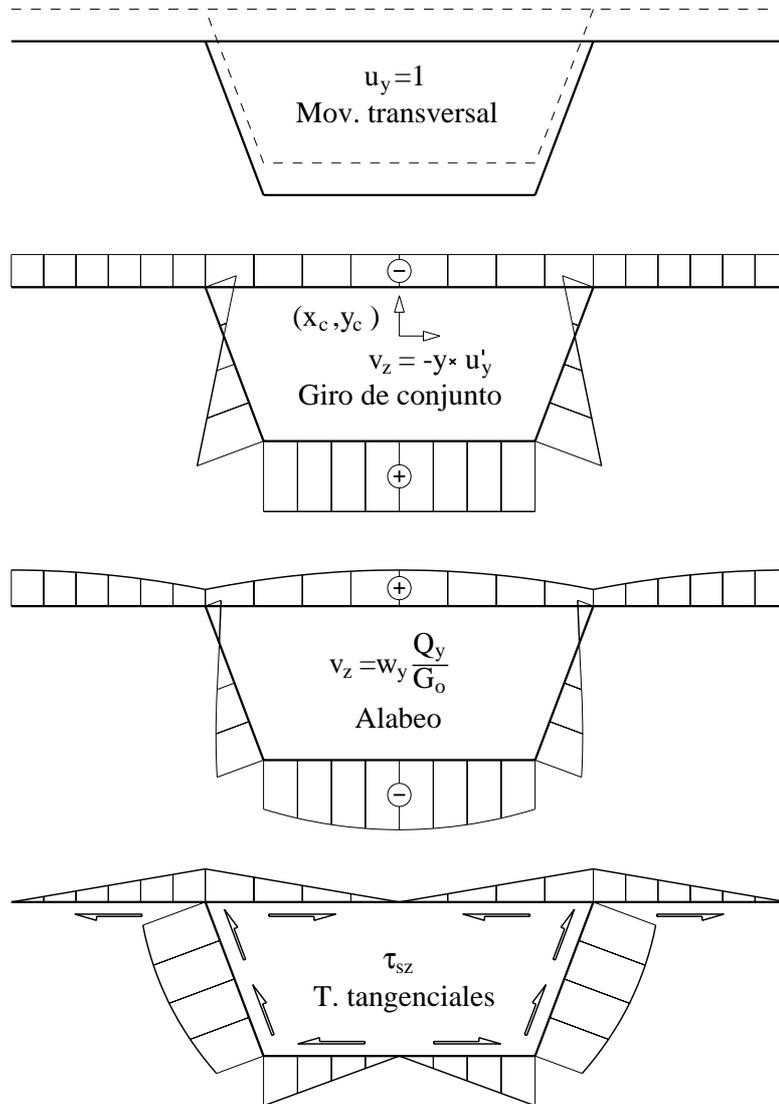


Figura 3.31: Modo de flexión.

Campo de movimientos (3.15) (3.20):

$$\left. \begin{aligned}
 v_x &= 0 \\
 v_y &= 1 \cdot u_y \\
 v_z &= +y \cdot \theta_x + w_{qy} \cdot \frac{Q_y}{G_o} = -y \cdot \frac{du_y}{dz} + w_y \cdot \frac{Q_y}{G_o}
 \end{aligned} \right\}$$

Las dos expresiones alternativas para el movimiento  $v_z$  están relacionadas mediante el cambio de variable (3.19):

$$w_y \cdot \frac{Q_y}{G_o} = \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \cdot y + w_{qy} \cdot \frac{Q_y}{G_o}$$

Deformaciones (3.16) (3.18) (3.21):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} + \frac{w_{qy}}{G_o} \cdot \frac{dQ_y}{dz} \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial w_{qy}}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} + \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \cdot t_y = \frac{\partial w_y}{\partial s} \cdot \frac{Q_y}{G_o} \end{aligned} \right\}$$

Características mecánicas (3.12):

$$I_x = \int_A \frac{E}{E_o} y^2 dA \left. \right\}$$

Tensiones (3.16) (3.22):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= E \left( y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} + \frac{w_{qy}}{G_o} \cdot \frac{dQ_y}{dz} \right) \\ \tau_{sz} &= G \frac{\partial w_y}{\partial s} \frac{Q_y}{G_o} \end{aligned} \right\}$$

Función incógnita:  $w_y$ .

Número de grados de libertad por elemento: 4

Funciones de forma: cúbicas, figura (3.18).

Matriz de rigidez del elemento (3.32):

$$[K] = \frac{2 \cdot G \cdot t}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 \end{array} \right]$$

Vector de fuerzas (3.33):

$$\{f_{yi}\} = \left( \left[ \begin{array}{c} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ -1/15 \end{array} \right] \cdot y_1 + \left[ \begin{array}{c} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{array} \right] \cdot y_2 \right) \cdot \frac{E}{E_o} \cdot \frac{t \cdot L}{I_x} \cdot G_o$$

Ortogonalizaciones de la función de alabeo:

- Respecto del alabeo de axil (3.28).

Por estas orthogonalizaciones se cumple:

$$\int_A \frac{E}{E_o} w_y dA = 0$$

MODO DE TORSIÓN UNIFORME

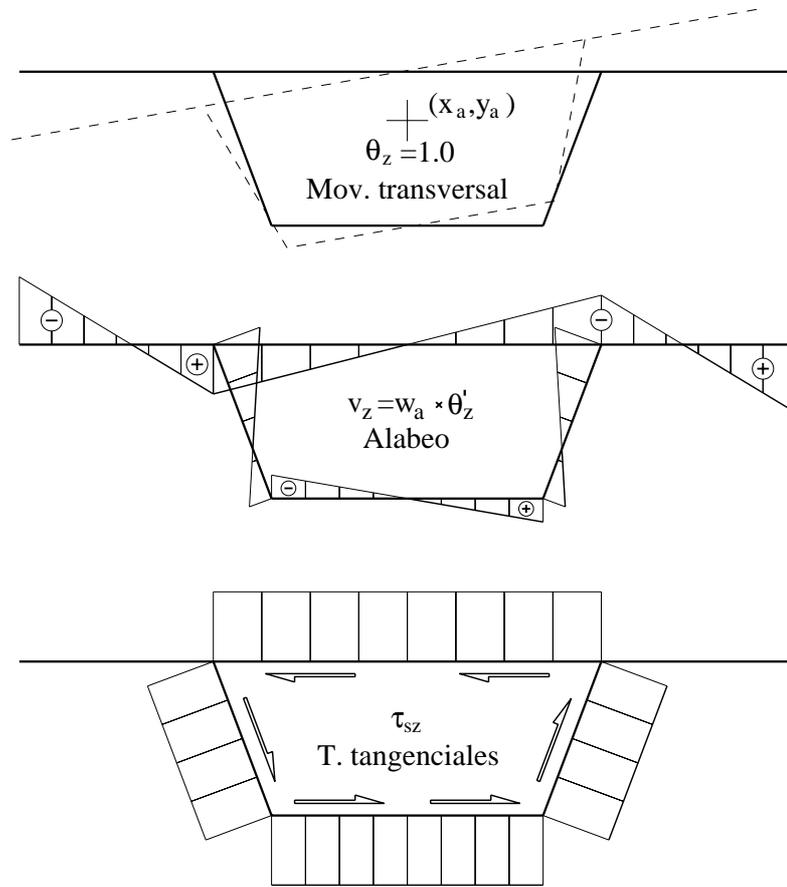


Figura 3.32: Modo de torsión uniforme.

Campo de movimientos (3.46) (3.47):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -(y - y_a) \cdot \theta_z \\ v_y &= +(x - x_a) \cdot \theta_z \\ v_z &= w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \end{aligned} \right\}$$

Deformaciones (3.49) (3.50) (3.52) (3.53):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= 0 \\ \gamma_{sz} &= \left( \frac{\partial w_a}{\partial s} - h_a \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} = t_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} \end{aligned} \right\}$$

$$h_a = -(x - x_a) \cdot t_y + (y - y_a) \cdot t_x$$

Características mecánicas (3.84):

$$I_t = \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( h_a - \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \cdot h_a \cdot dA$$

$$I_t = \int_A \frac{G}{G_o} \cdot \left( -h_a + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right)^2 dA$$

Momento torsor uniforme (3.76):

$$M_{zu} = G_o \cdot I_t \cdot \frac{d\theta_z}{dz}$$

Tensiones (3.51) (3.52) (3.79) (3.80):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{sz} &= \frac{G}{G_o} \frac{M_{zu}}{I_t} t_a \end{aligned} \right\}$$

Función incógnita:  $w_a$ .

Número de grados de libertad por elemento: 2.

Funciones de forma: lineales, figura (3.22).

Matriz de rigidez del elemento (3.72):

$$[K] = \frac{G \cdot t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vector de fuerzas (3.74):

$$\{f_{ai}\} = G \cdot t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot h_a$$

Ortogonalizaciones de la función de alabeo:

- Respecto del alabeo de axil (3.65).
- Respecto de los alabeos por giros de flexión (3.67) (3.68).

Por estas orthogonalizaciones se cumple:

$$\left. \begin{aligned} \int_A \frac{E}{E_o} w_a dA &= 0 \\ I_{w_a \cdot x} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_a x dA = 0 \\ I_{w_a \cdot y} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_a y dA = 0 \end{aligned} \right\}$$

MODO DE TORSIÓN NO UNIFORME

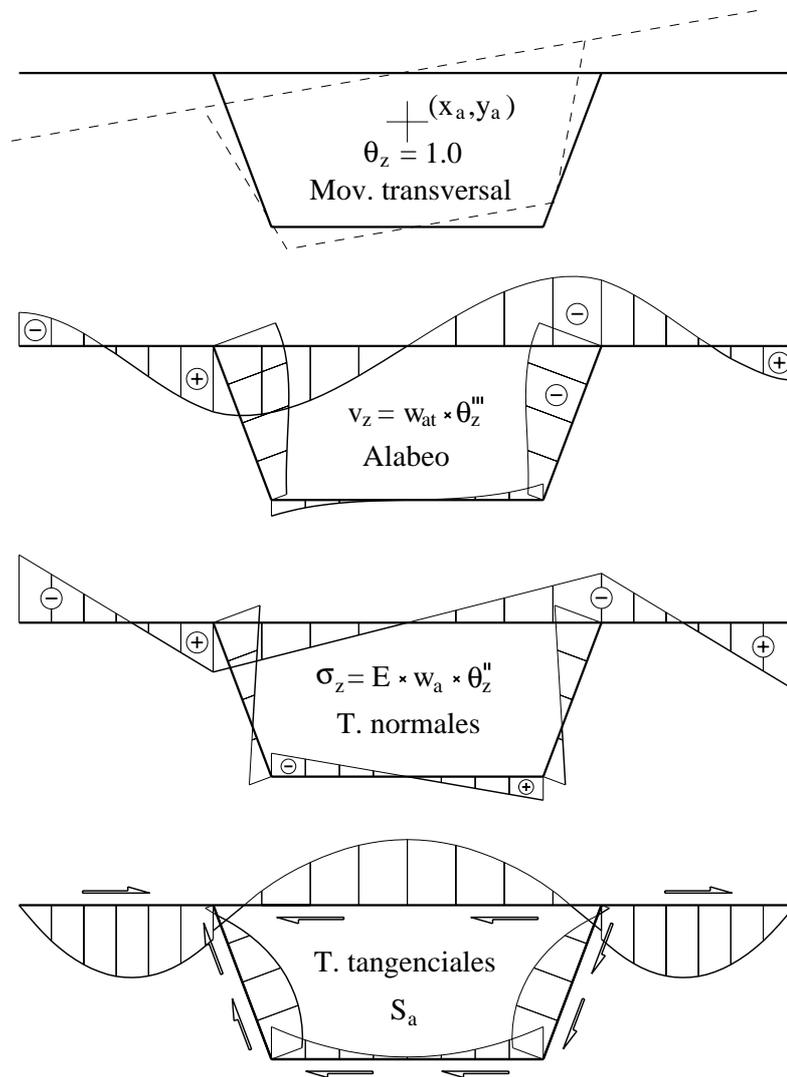


Figura 3.33: Modo de torsión no uniforme.

Campo de movimientos (3.46) (3.85):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -(y - y_a) \cdot \theta_z \\ v_y &= +(x - x_a) \cdot \theta_z \\ v_z &= w_{at} \cdot \frac{d^3 \theta_z}{dz^3} \end{aligned} \right\}$$

Deformaciones (3.91) (3.87):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= w_a \cdot \frac{d^2 \theta_z}{dz^2} \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3 \theta_z}{dz^3} \end{aligned} \right\}$$

Características mecánicas (3.104) (3.105):

$$I_a = \int_A \frac{G}{E_o} \cdot \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot h_a \cdot dA$$

$$I_a = \int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_a^2 \cdot dA$$

Momento torsor no uniforme (3.103):

$$M_{zw} = -E_o \cdot I_a \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3}$$

Bimomento torsor (3.109):

$$B_w = E_o \cdot I_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2}$$

Tensiones (3.110) (3.88) (3.107):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= E \cdot w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} = \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_w}{I_a} \cdot w_a \\ \tau_{sz} &= G \cdot \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\theta_z}{ds^3} = \frac{M_{zw}}{I_a} \cdot \frac{S_a}{t} \end{aligned} \right\}$$

Función incógnita:  $w_{at}$ .

Número de grados de libertad por elemento: 4.

Funciones de forma: cúbicas, figura (3.18).

Matriz de rigidez del elemento (3.98):

$$[K] = \frac{2 \cdot G \cdot t}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 \end{array} \right]$$

Vector de fuerzas (3.99):

$$\{f_{ati}\} = \left( \left[ \begin{array}{c} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ -1/15 \end{array} \right] \cdot w_{a1} + \left[ \begin{array}{c} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{array} \right] \cdot w_{a2} \right) \cdot E \cdot t \cdot L$$

Ortogonalizaciones de la función de alabeo:

- Respecto del alabeo de axil (3.101).

Por estas orthogonalizaciones se cumple:

$$\int_A \frac{E}{E_o} w_{at} dA = 0$$

MODO DE DISTORSIÓN UNIFORME

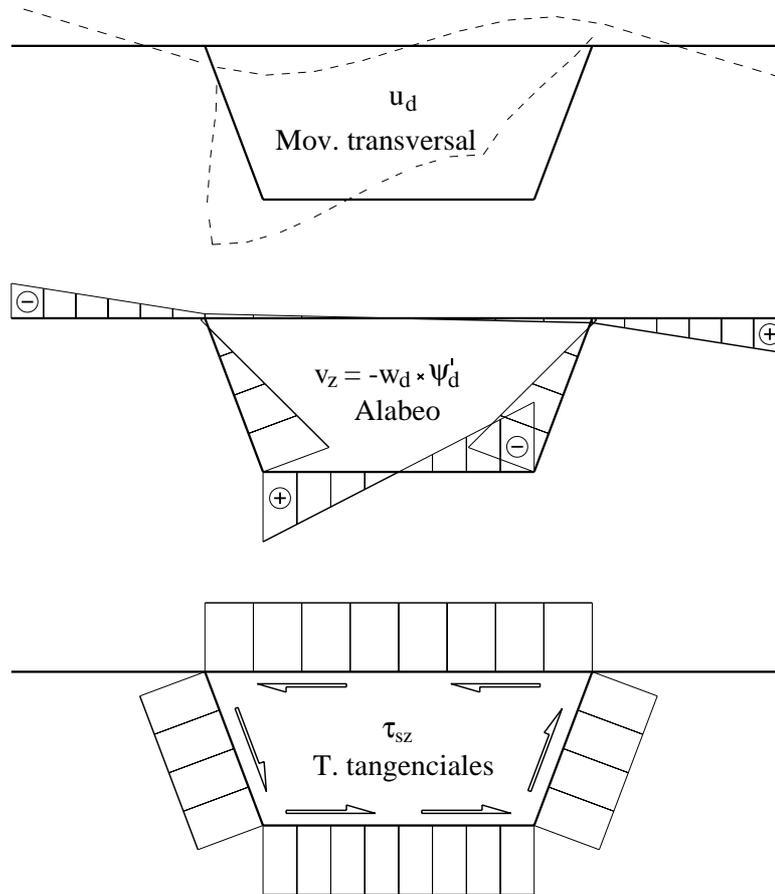


Figura 3.34: Modo de distorsión uniforme.

Campo de movimientos (3.115) (3.116):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= u_{dx} \cdot \psi_d \\ v_y &= u_{dy} \cdot \psi_d \\ v_z &= -w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \end{aligned} \right\}$$

Deformaciones (3.129):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= 0 \\ \gamma_{sz} &= \left( u_{ds} - \frac{\partial w_d}{\partial s} \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} = t_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \end{aligned} \right\}$$

Características mecánicas (3.131) (3.137):

$$\left. \begin{aligned} D_{td.td} &= \int_A \frac{G}{G_o} \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} \right)^2 dA \\ K_d &= \int \frac{E}{E_o} \left( t \cdot \left( \frac{du_{ds}}{ds} \right)^2 + \frac{t^3}{12} \cdot \left( \frac{d^2 u_{dn}}{ds^2} \right)^2 \right) ds \end{aligned} \right\}$$

Momento distorsor uniforme (3.130):

$$M_{du} = -G_o \cdot D_{t_d \cdot t_d} \cdot \frac{d\psi_d}{dz}$$

Tensiones (3.133) (3.134):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{sz} &= -\frac{G}{G_o} \frac{M_{du}}{D_{t_d \cdot t_d}} t_d \end{aligned} \right\}$$

Función incógnita:  $w_d$ .

Número de grados de libertad por elemento: 2.

Funciones de forma: lineales, figura (3.22).

Matriz de rigidez del elemento (3.123):

$$[K] = \frac{G \cdot t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vector de fuerzas (3.124):

$$\{f_{di}\} = G \cdot t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{u_{ds1} + u_{ds2}}{2}$$

Ortogonalizaciones de la función de alabeo:

- Respecto del alabeo de axil (3.125).
- Respecto de los alabeos por giros de flexión (3.126) (3.127).
- Respecto del alabeo  $w_a$  de torsión uniforme (3.128). (No siempre se puede realizar).

Por estas orthogonalizaciones se cumple:

$$\left. \begin{aligned} \int_A \frac{E}{E_o} w_d dA &= 0 \\ I_{w_d \cdot x} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_d x dA = 0 \\ I_{w_d \cdot y} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_d y dA = 0 \\ I_{w_a \cdot w_d} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_a w_d dA = 0 \end{aligned} \right\}$$

Nota: la última ecuación sólo se cumple si se puede orthogonalizar  $w_d$  respecto  $w_a$ .

MODO DE DISTORSIÓN NO UNIFORME

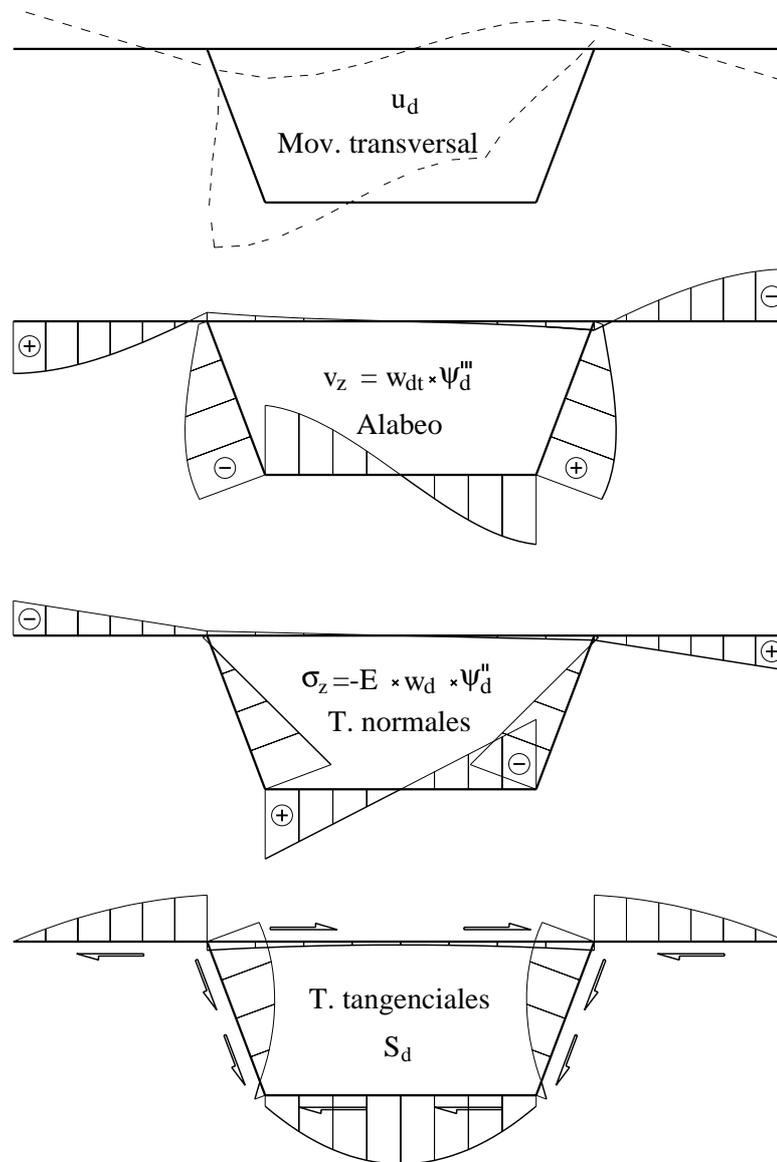


Figura 3.35: Modo de distorsión no uniforme.

Campo de movimientos (3.115) (3.144):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= u_{dx} \cdot \psi_d \\ v_y &= u_{dy} \cdot \psi_d \\ v_z &= w_{dt} \cdot \frac{d^3 \psi_d}{dz^3} \end{aligned} \right\}$$

Deformaciones (3.147) (3.148):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= -w_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \\ \gamma_{sz} &= \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3} \end{aligned} \right\}$$

Características mecánicas (3.162):

$$I_d = \int_A \frac{E}{E_o} w_d^2 dA$$

Momento distorsor no uniforme (3.161):

$$M_{dw} = E_o \cdot I_d \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3}$$

Bimomento distorsor (3.165):

$$B_d = -E_o \cdot I_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2}$$

Tensiones (3.166) (3.151) (3.163):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -E \cdot w_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2} = \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_d}{I_d} \cdot w_d \\ \tau_{sz} &= G \cdot \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3} = \frac{M_{dw}}{I_d} \cdot \frac{S_d}{t} \end{aligned} \right\}$$

Función incógnita:  $w_{dt}$ .

Número de grados de libertad por elemento: 4.

Funciones de forma: cúbicas, figura (3.18).

Matriz de rigidez del elemento (3.157):

$$[K] = \frac{2 \cdot G \cdot t}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 \end{array} \right]$$

Vector de fuerzas (3.158):

$$\{f_{dti}\} = - \left( \left[ \begin{array}{c} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/3 \\ -1/15 \end{array} \right] \cdot w_{d1} + \left[ \begin{array}{c} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{array} \right] \cdot w_{d2} \right) \cdot E \cdot t \cdot L$$

Ortogonalizaciones de la función de alabeo:

- Respecto del alabeo de axil (3.160).

Por estas orthogonalizaciones se cumple:

$$\int_A \frac{E}{E_o} w_{dt} dA = 0$$

## Capítulo 4

# FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO UNIDIMENSIONAL CON TODOS LOS MODOS RESISTENTES

### 4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 se ha expuesto una formulación válida para cualquier sección abierta o cerrada para obtener todos los modos resistentes de la misma. Para cada uno de los modos se ha establecido el campo de movimientos, como producto de funciones que dependen de las coordenadas en el plano de la sección, por funciones que dependen de la coordenada longitudinal de la pieza, por lo que se está ya en condiciones de plantear como obtener las funciones que dependen de las coordenadas de la sección.

Ahora, si se suman todos esos campos de movimientos se puede obtener el correspondiente a un estado genérico de cargas en el que se puedan dar de forma simultánea todos los modos resistentes, y en el que sólo serán incógnitas las funciones que dependen de la coordenada longitudinal de la pieza. Y mediante el método de los elementos finitos, si se aproximan las funciones incógnitas mediante interpolación de los valores de las funciones en determinados puntos, se puede desarrollar un elemento finito que permita obtener la respuesta de una pieza incluyendo todos los modos resistentes mediante cálculo numérico.

En el presente capítulo se va a exponer como obtener un elemento finito de este tipo, siendo las bases de partida para su formulación las siguientes:

- Se considera la hipótesis de pequeñas deformaciones, y material con comportamiento elástico y lineal.
- Por el método utilizado de cálculo de los modos resistentes, no hay ninguna restricción en la forma de la sección. Se puede aplicar a secciones abiertas o multicelulares, con ejes de simetría o sin ellos, y con paredes con el mismo o diferente material.

- Se incluye todos los modos: axil, flexión en dos planos, torsión y distorsión.
- Respecto al problema específico del cortante, se incluye tanto la deformación por cortante como el efecto en las tensiones normales por arrastre de cortante.

Los pasos que se van a realizar para su obtención son:

- Se define el campo de movimientos  $\{ v_x , v_y , v_z \}$  como la suma del campo de movimientos de cada modo a nivel de sección, multiplicados por una función que mide la intensidad de los mismos a lo largo de la pieza.
- Se calculan las deformaciones longitudinal y transversal a partir del campo de movimientos.
- Por integración de las deformaciones se obtiene la energía de deformación, y junto con la energía potencial de las acciones exteriores, se obtiene el potencial total de energía en función de las funciones incógnitas.
- Previamente, las funciones de alabeo de los modos resistentes se ortogonalizan entre sí lo máximo posible, para evitar al máximo el número de acoplamientos.
- Las funciones incógnitas se interpolan en función de los valores nodales.
- Estableciendo la minimización de la energía potencial total, respecto de los valores nodales, se obtiene la matriz de rigidez del elemento. Estableciendo el equilibrio de fuerzas en los nudos, se ensamblan las matrices de cada elemento, quedando un sistema lineal de ecuaciones.
- Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales obtenido, se puede conocer la respuesta total de la pieza, como su descomposición en los distintos modos resistentes.

## 4.2. CAMPO DE MOVIMIENTOS

En apartados anteriores se ha estudiado de forma aislada cada modo resistente de una sección, siendo en todos ellos el punto de partida la formulación de su campo de movimientos. Con la hipótesis de cálculo lineal para una sección sometida a una sollicitación general de esfuerzos, su campo de movimientos es la suma de los de todos los modos resistentes: axil y flexión (3.8), cortante (3.15) (3.36), torsión uniforme y no uniforme (3.46) (3.85), y distorsión uniforme y no uniforme (3.115) (3.144). En ejes principales de inercia referidos al centro de gravedad de la sección se tiene para el campo de movimientos:

Modo	$\mathbf{v}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$
<i>Axil</i>			$1 \cdot u_z$
<i>Flexión <math>y - z</math></i>		$1 \cdot u_y$	$y \cdot \theta_x$
<i>Cortante <math>y</math></i>			$w_{qy} \cdot \frac{Q_y}{G_o}$
<i>Flexión <math>x - z</math></i>	$1 \cdot u_x$		$-x \cdot \theta_y$
<i>Cortante <math>x</math></i>			$w_{qx} \cdot \frac{Q_x}{G_o}$
<i>Torsión</i>	$-(y - y_a) \cdot \theta_z$	$(x - x_a) \cdot \theta_z$	$+w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + w_{at} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3}$
<i>Distorsión</i>	$u_{dx} \cdot \psi_d$	$u_{dy} \cdot \psi_d$	$-w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + w_{dt} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3}$

Si se tiene en cuenta los cambios de variable realizados en la obtención de las funciones de alabeo por cortante, ecuaciones (3.20) y (3.37), también se puede escribir como:

Modo	$\mathbf{v}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$
<i>Axil</i>			$1 \cdot u_z$
<i>Flexión <math>y - z</math></i>		$1 \cdot u_y$	$-y \cdot \frac{du_y}{dz}$
<i>Cortante <math>y</math></i>			$w_y \cdot \frac{Q_y}{G_o}$
<i>Flexión <math>x - z</math></i>	$1 \cdot u_x$		$-x \cdot \frac{du_x}{dz}$
<i>Cortante <math>x</math></i>			$w_x \cdot \frac{Q_x}{G_o}$
<i>Torsión</i>	$-(y - y_a) \cdot \theta_z$	$(x - x_a) \cdot \theta_z$	$+w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + w_{at} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3}$
<i>Distorsión</i>	$u_{dx} \cdot \psi_d$	$u_{dy} \cdot \psi_d$	$-w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + w_{dt} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3}$

(4.1)

En cualquiera de las dos expresiones aparecen los esfuerzos cortantes  $Q_x(z)$  y  $Q_y(z)$  como funciones incógnitas. Con las ecuaciones (3.40) los cortantes se pueden poner en función de los movimientos:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= G_o A_x \cdot \left( \frac{du_x}{dz} - \theta_y \right) + G_o A_{xy} \cdot \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \\ Q_y &= G_o A_{xy} \cdot \left( \frac{du_x}{dz} - \theta_y \right) + G_o A_y \cdot \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \end{aligned} \right\}$$

Pero como se puede ver con los ejemplos del apéndice E, cuyas conclusiones están en el apartado E.4, no es posible plantear con las ecuaciones resultantes la resolución mediante el método de los elementos finitos, por necesitarse establecer condiciones contrapuestas sobre la continuidad de los movimientos  $u_x$  y  $u_y$ . Ya que al depender la energía de deformación de la derivada segunda de los movimientos  $u_x''$  y  $u_y''$ , es necesario que haya continuidad de las primeras derivadas  $u_x'$  y  $u_y'$ , pero por otra parte para que puedan producirse bajo

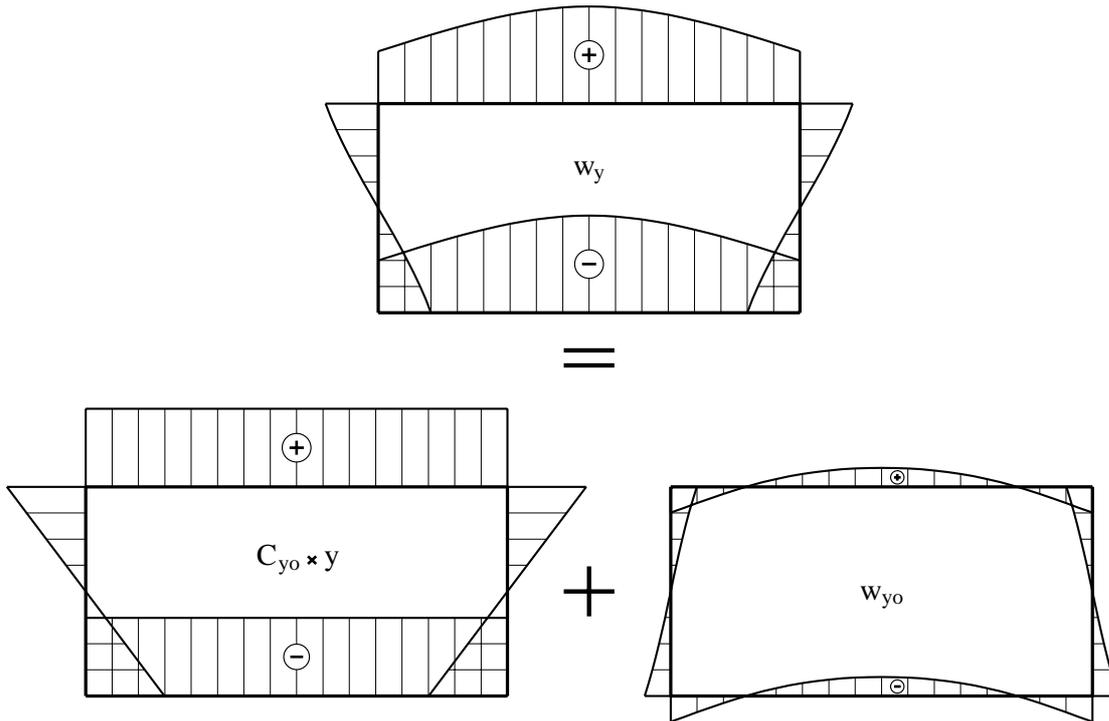


Figura 4.1: Descomposición de la función de alabeo de cortante  $w_y$ .

cargas puntuales o en apoyos intermedios un salto en el valor de los cortantes, es necesario que no haya dicha continuidad de las derivadas primeras.

### 4.3. ALABEOS DE CORTANTE

Viendo en la figura (3.17)<sup>1</sup> la representación de la función de alabeo  $w_y$  por el cortante  $Q_y$ , se ve que incluye un giro de conjunto dado por la deformación ( $u'_y + \theta_x$ ) y un movimiento por el alabeo  $w_{qy}$  que hace que la sección deje de ser plana. El giro de conjunto se puede eliminar ortogonalizando la función de alabeo  $w_y$  respecto de un giro unidad, obteniéndose una nueva función  $w_{y_0}$ .

$$w_{y_0} = w_y - C_{y_0} \cdot y \quad (4.2)$$

En la figura (4.1) se representa gráficamente con un ejemplo el significado de esta descomposición de la función de alabeo  $w_y$ .

Para realizar esta ortogonalización se establece que la integral del producto de las funciones que se ortogonalizan sea nula.

$$\int_A \frac{E}{E_0} (w_y - C_{y_0} \cdot y) \cdot (1.0 \cdot y) \cdot dA = 0$$

$$\int_A \frac{E}{E_0} w_y y \, dA - C_{y_0} \int_A \frac{E}{E_0} y^2 \, dA = 0$$

<sup>1</sup>Página 46

$$C_{y_o} = \frac{\int_A \frac{E}{E_o} w_y y dA}{\int_A \frac{E}{E_o} y^2 dA} = \frac{I_{w_y \cdot y}}{I_x}$$

Y de la misma forma para el alabeo por el cortante  $Q_x$ :

$$\boxed{w_{x_o} = w_x - C_{x_o} \cdot x} \quad (4.3)$$

$$C_{x_o} = \frac{\int_A \frac{E}{E_o} w_x x dA}{\int_A \frac{E}{E_o} x^2 dA} = \frac{I_{w_x \cdot x}}{I_y}$$

En el caso particular en que  $D_{w_x \cdot w_y} = 0$  de acuerdo con las ecuaciones (3.43) y (3.44) las constantes de ortogonalización se pueden relacionar con las áreas de cortante:

$$C_{y_o} = \frac{1}{A_y} \quad (4.4)$$

$$C_{x_o} = \frac{1}{A_x}$$

A la nueva función  $w_{y_o}$  dándole la consideración de *modo de deformación*, permite definir el movimiento  $v_z(x, y, z)$  de flexión en el plano  $y - z$  como suma de:

- Un modo de deformación función de  $(x, y)$  que representa un giro unitario alrededor del eje  $x$  ( $w_{m_x}(x, y) = 1.0 \cdot y$ ), con el cual la sección permanece plana, multiplicado por una intensidad del modo función de  $(z)$ , que tiene el significado de ser el giro  $\theta_x(z)$ .
- Un modo de deformación función de  $(x, y)$  que representa un alabeo  $w_{y_o}(x, y)$  que hace que la sección deje de ser plana, multiplicado por una función de  $(z)$  que representa la intensidad del alabeo  $\chi_y(z)$ . Para que la función de intensidad de alabeo sea adimensional se multiplica por una constante, que es el área de cortante de la sección.

Aplicando esta superposición de modos a la flexión en los planos  $x - z$  y  $y - z$ , el movimiento longitudinal  $v_z(x, y, z)$  se expresa como:

$$\begin{aligned} v_z(x, y, z) = & + \left( -x \cdot \theta_y(z) + w_{x_o}(x, y) \cdot A_x \cdot \chi_x(z) \right) \\ & + \left( +y \cdot \theta_x(z) + w_{y_o}(x, y) \cdot A_y \cdot \chi_y(z) \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Este procedimiento de descomposición de los alabeos en un sumatorio de modos de deformación que son funciones de  $(x, y)$ , por su intensidad que son funciones de  $(z)$ , ha sido ya utilizado por F. Laudiero en 1990 [16] para resolver el problema de forma analítica, pero utilizando una definición distinta de la función de alabeo de cortante a usar. Otros autores también han utilizado este procedimiento, variando el significado o definición de los modos y de las funciones de intensidad.

## 4.4. REDEFINICIÓN DEL CAMPO DE MOVIMIENTOS

Adoptando la descomposición en modos del movimiento  $v_z$  por flexión definido en el apartado anterior, el campo de movimientos queda con las ecuaciones siguientes, las cuales se han representado en las figuras (4.2) y (4.3).

Modo	$\mathbf{v}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$
<i>Axil</i>			$1 \cdot u_z$
<i>Flexión <math>y - z</math></i>		$1 \cdot u_y$	$y \cdot \theta_x$
<i>Cortante <math>y</math></i>			$w_{yo} \cdot A_y \cdot \chi_y$
<i>Flexión <math>x - z</math></i>	$1 \cdot u_x$		$-x \cdot \theta_y$
<i>Cortante <math>x</math></i>			$w_{xo} \cdot A_x \cdot \chi_x$
<i>Torsión</i>	$-(y - y_a) \cdot \theta_z$	$(x - x_a) \cdot \theta_z$	$+w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + w_{at} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3}$
<i>Distorsión</i>	$u_{dx} \cdot \psi_d$	$u_{dy} \cdot \psi_d$	$-w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + w_{dt} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3}$

(4.6)

## 4.5. DEFORMACIONES Y TENSIONES

La deformación longitudinal  $\epsilon_z$  se obtiene derivando el movimiento longitudinal  $v_z$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ &= \frac{du_z}{dz} + \left( +y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} + w_{yo} \cdot A_y \cdot \frac{d\chi_y}{dz} \right) + \left( -x \cdot \frac{d\theta_y}{dz} + w_{xo} \cdot A_x \cdot \frac{d\chi_x}{dz} \right) \\ &\quad + \left( +w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} + w_{at} \cdot \frac{d^4\theta_z}{dz^4} \right) + \left( -w_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2} + w_{dt} \cdot \frac{d^4\psi_d}{dz^4} \right) \end{aligned}$$

Se desprecian los términos con derivadas de orden cuarto, que se corresponden con la influencia de las deformaciones tangenciales en las tensiones normales, quedando:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{du_z}{dz} + \\ &\quad + \left( +y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} + w_{yo} \cdot A_y \cdot \frac{d\chi_y}{dz} \right) \\ &\quad + \left( -x \cdot \frac{d\theta_y}{dz} + w_{xo} \cdot A_x \cdot \frac{d\chi_x}{dz} \right) \\ &\quad + w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} - w_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde los cinco sumandos se corresponden respectivamente con las deformaciones por axil, flexión en los planos  $y - z$  e  $x - z$ , y por torsión y distorsión.

Siendo el vector director tangente en un punto de la sección:

$$(t_x, t_y) = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$$

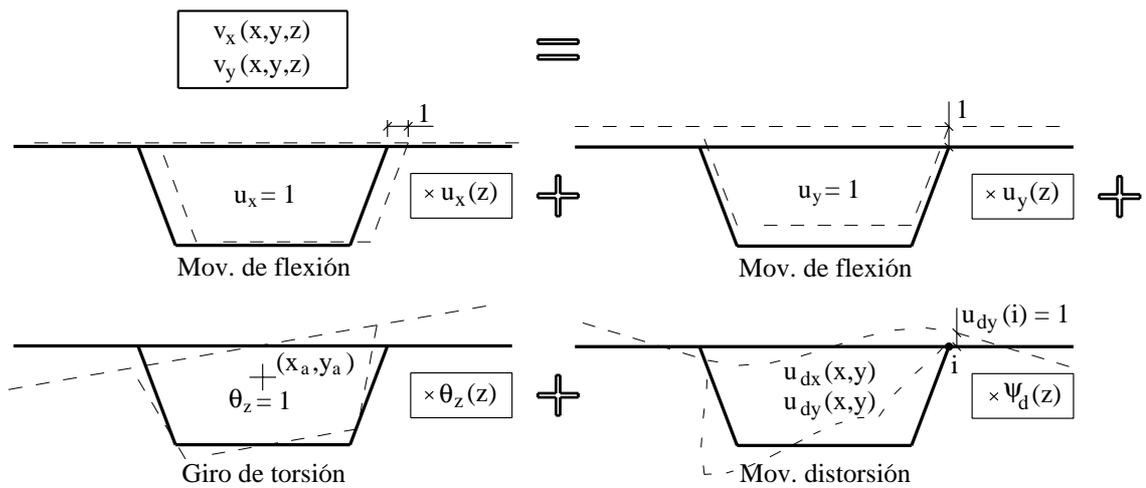


Figura 4.2: Campo de movimientos:  $v_x(x, y, z)$  ,  $v_y(x, y, z)$

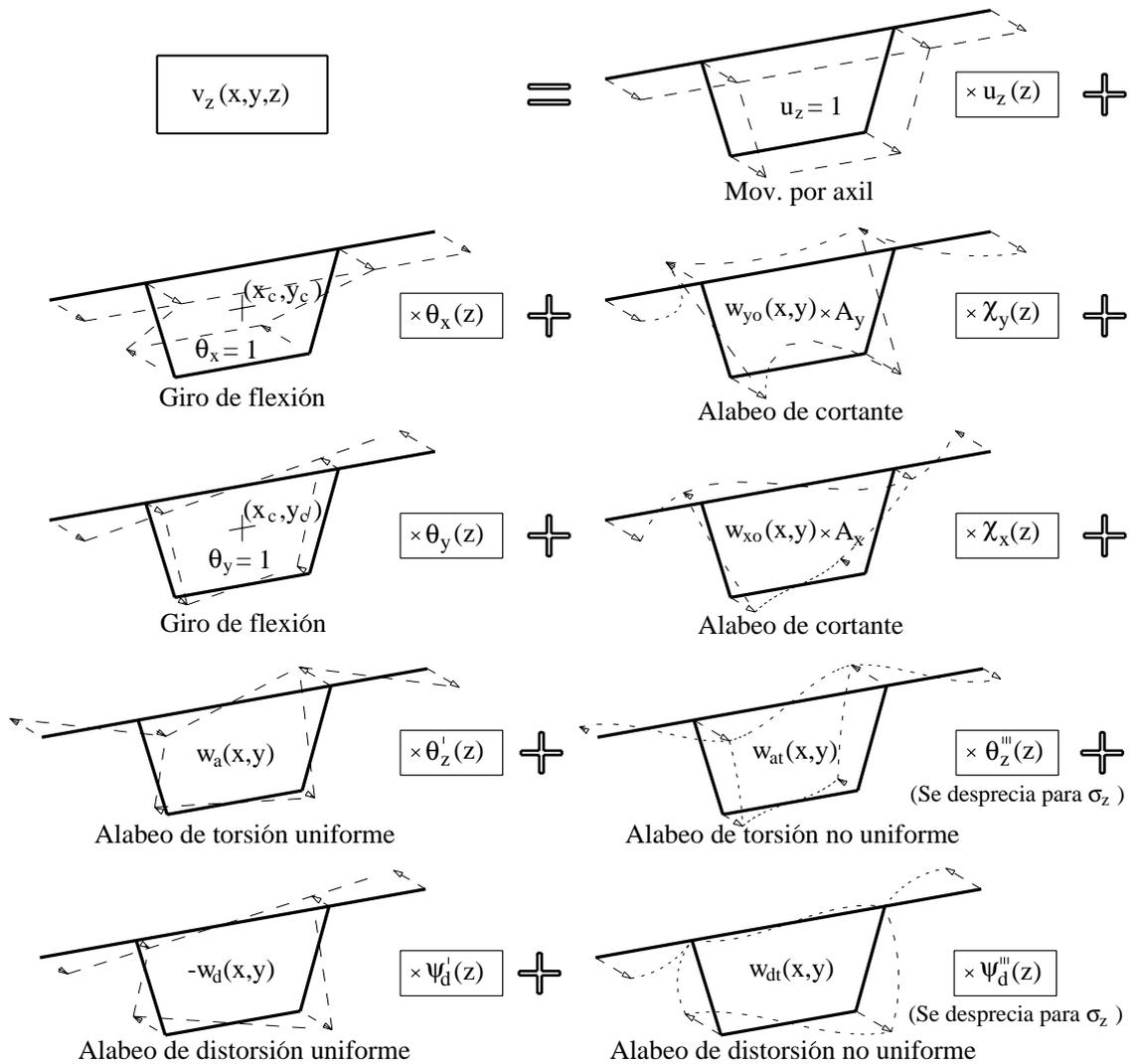


Figura 4.3: Campo de movimientos:  $v_z(x, y, z)$

El movimiento en dirección tangente  $v_s$  en un punto se expresa como:

$$v_s = t_x \cdot v_x + t_y \cdot v_y$$

Con lo que la deformación tangencial en dirección de cada pared es:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} = t_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} + t_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial s} = \\ &= t_x \cdot \left( \frac{du_x}{dz} - (y - y_a) \frac{d\theta_z}{dz} + u_{dx} \frac{d\psi_d}{dz} \right) + \\ &+ t_y \cdot \left( \frac{du_y}{dz} + (x - x_a) \frac{d\theta_z}{dz} + u_{dy} \frac{d\psi_d}{dz} \right) + \\ &+ t_y \theta_x + \frac{\partial w_{yo}}{\partial s} A_y \chi_y - t_x \theta_y + \frac{\partial w_{xo}}{\partial s} A_x \chi_x + \\ &+ \frac{\partial w_a}{\partial s} \frac{d\theta_z}{dz} + \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \frac{d^3\theta_z}{dz^3} - \frac{\partial w_d}{\partial s} \frac{d\psi_d}{dz} + \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \frac{d^3\psi_d}{dz^3} \end{aligned}$$

Como según (3.49) existe la relación ( $h_a = +(y - y_a) t_x - (x - x_a) t_y$ ), queda:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= \left( t_x \left( \frac{du_x}{dz} - \theta_y \right) + \frac{\partial w_{xo}}{\partial s} A_x \chi_x \right) \\ &+ \left( t_y \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) + \frac{\partial w_{yo}}{\partial s} A_y \chi_y \right) \\ &+ \left( \frac{\partial w_a}{\partial s} - h_a \right) \frac{d\theta_z}{dz} + \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \\ &+ \left( u_{ds} - \frac{\partial w_d}{\partial s} \right) \frac{d\psi_d}{dz} + \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \frac{d^3\psi_d}{dz^3} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Donde los dos primeros sumandos se corresponden respectivamente con las deformaciones por los cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$ , los dos siguientes con las de torsión, y los dos últimos con las de distorsión.

Las tensiones se obtienen multiplicando la deformación longitudinal  $\epsilon_z$  y transversal  $\gamma_{sz}$ , por el módulo de elasticidad longitudinal  $E$  y transversal  $G$  respectivamente.

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z \quad (4.9)$$

$$\tau_{sz} = G \cdot \gamma_{sz} \quad (4.10)$$

## 4.6. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Siendo el vector de deformaciones longitudinales generalizadas (véase ecuación (4.7)):

$$\{\epsilon_g\}^t = \left\{ \frac{du_z}{dz}, \frac{d\theta_y}{dz}, \frac{d\chi_x}{dz}, \frac{d\theta_x}{dz}, \frac{d\chi_y}{dz}, \frac{d^2\theta_z}{dz^2}, \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \right\}$$

La energía de deformación por tensiones longitudinales viene dada por:

$$\frac{dU_\epsilon}{dz} = \frac{1}{2} \int_A E \cdot \epsilon_z^2 \cdot dA = \frac{1}{2} \{\epsilon_g\}^t E_o \left( \int_A \frac{E}{E_o} [A_\epsilon] dA \right) \{\epsilon_g\} =$$

$$= \frac{1}{2} \{\epsilon_g\}^t E_o [ I ] \{\epsilon_g\} \quad (4.11)$$

Siendo:

$$[A_\epsilon] = \begin{bmatrix} 1 & -x & A_x w_{xo} & y & A_y w_{yo} & w_a & -w_d \\ -x & x^2 & -x A_x w_{xo} & -x y & -A_y w_{yo} x & -w_a x & w_d x \\ A_x w_{xo} & -x A_x w_{xo} & (A_x w_{xo})^2 & y A_x w_{xo} & A_x w_{xo} A_y w_{yo} & A_x w_{xo} w_a & -A_x w_{xo} w_d \\ y & -x y & y A_x w_{xo} & y^2 & y A_y w_{yo} & w_a y & -w_d y \\ A_y w_{yo} & -A_y w_{yo} x & A_x w_{xo} A_y w_{yo} & y A_y w_{yo} & (A_y w_{yo})^2 & A_y w_{yo} w_a & -A_y w_{yo} w_d \\ w_a & -w_a x & A_x w_{xo} w_a & w_a y & A_y w_{yo} w_a & w_a^2 & -w_a w_d \\ -w_d & w_d x & -A_x w_{xo} w_d & -w_d y & -A_y w_{yo} w_d & -w_a w_d & w_d^2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que se trabaja en ejes principales de inercia se cumple:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{E}{E_o} y dA &= 0 & \int_A \frac{E}{E_o} x dA &= 0 \\ \int_A \frac{E}{E_o} x y dA &= 0 \end{aligned}$$

Como las funciones de alabeo de cortante se han ortogonalizado respecto del axil y respecto del giro:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{E}{E_o} w_{yo} dA &= 0 & I_{w_{yo},y} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{yo} y dA = 0 \\ \int_A \frac{E}{E_o} w_{xo} dA &= 0 & I_{w_{xo},y} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{xo} x dA = 0 \end{aligned}$$

Y como las funciones de alabeo de torsión y distorsión uniforme se han ortogonalizado respecto del axil y del giro de flexión, las siguientes integrales son nulas:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{E}{E_o} w_a dA &= 0 & \int_A \frac{E}{E_o} w_d dA &= 0 \\ \int_A \frac{E}{E_o} x w_a dA &= 0 & \int_A \frac{E}{E_o} x w_d dA &= 0 \\ \int_A \frac{E}{E_o} y w_a dA &= 0 & \int_A \frac{E}{E_o} y w_d dA &= 0 \end{aligned}$$

Quedando:

$$[I] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 & 0 & -A_y I_{w_{yo}x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_x^2 I_{w_{xo}w_{xo}} & A_x I_{w_{xo}y} & A_x I_{w_{xo}w_{yo}} A_y & A_x I_{w_{xo}w_a} & -A_x I_{w_{xo}w_d} \\ 0 & 0 & A_x I_{w_{xo}y} & I_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_y I_{w_{yo}x} & A_x I_{w_{xo}w_{yo}} A_y & 0 & A_y^2 I_{w_{yo}w_{yo}} & A_y I_{w_{yo}w_a} & -A_y I_{w_{yo}w_d} \\ 0 & 0 & A_x I_{w_{xo}w_a} & 0 & A_y I_{w_{yo}w_a} & I_a & -I_{w_a w_d} \\ 0 & 0 & -A_x I_{w_{xo}w_d} & 0 & -A_y I_{w_{yo}w_d} & -I_{w_a w_d} & I_d \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} A &= \int_A \frac{E}{E_o} dA \\ I_y &= \int_A \frac{E}{E_o} x^2 dA & I_{w_{xo}w_{xo}} &= \int_A \frac{E}{E_o} (w_{xo})^2 dA \\ I_x &= \int_A \frac{E}{E_o} y^2 dA & I_{w_{yo}w_{yo}} &= \int_A \frac{E}{E_o} (w_{yo})^2 dA \\ I_{w_{yo}x} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{yo} x dA & I_{w_{xo}y} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{xo} y dA \\ I_{w_{xo}w_{yo}} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{xo} w_{yo} dA & I_{w_a w_d} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_a w_d dA \\ I_a &= \int_A \frac{E}{E_o} (w_a)^2 dA & I_d &= \int_A \frac{E}{E_o} (w_d)^2 dA \\ I_{w_{xo}w_a} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{xo} w_a dA & I_{w_{xo}w_d} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{xo} w_d dA \\ I_{w_{yo}w_a} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{yo} w_a dA & I_{w_{yo}w_d} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{yo} w_d dA \end{aligned} \tag{4.12}$$

Se considera desacoplada la flexión de la torsión-distorsión, para ello no se consideran los términos cruzados entre cortante y torsión-distorsión. En pruebas realizadas considerando dichos términos los resultados que se obtuvieron no eran correctos. Hay que recordar que las funciones de alabeo por cortante no son las originales de dicho modo, si no funcio-

nes orthogonalizadas respecto del giro, y que también se ha modificado el significado de la función de intensidad correspondiente. Con esta consideración queda finalmente:

$$[I] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 & 0 & -A_y I_{w_{y_0} x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_x^2 I_{w_{x_0} w_{x_0}} & A_x I_{w_{x_0} y} & A_x I_{w_{x_0} w_{y_0}} A_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_x I_{w_{x_0} y} & I_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_y I_{w_{y_0} x} & A_x I_{w_{x_0} w_{y_0}} A_y & 0 & A_y^2 I_{w_{y_0} w_{y_0}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_a & -I_{w_a w_d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{w_a w_d} & I_d \end{bmatrix}$$

La energía de deformación por la deformación en su plano de la sección por distorsión se obtiene con la ecuación (3.136).

$$\frac{dU_{K_d}}{dz} = \frac{1}{2} E_o K_d \psi_d^2$$

Denominando vector de deformación generalizada de distorsión a:

$$\{\epsilon_{K_d}\} = \{\psi_d\}$$

Se puede escribir como:

$$\frac{dU_{K_d}}{dz} = \frac{1}{2} \{\epsilon_{K_d}\}^t E_o [K_d] \{\epsilon_{K_d}\} \quad (4.13)$$

Se desprecia el valor de las derivadas terceras del giro de torsión  $\theta_z'''$  y del movimiento de distorsión  $\psi_d'''$ , respecto del valor de las derivadas primeras. Es lo mismo que decir que se desprecia la energía de deformación de las tensiones tangenciales por torsión y distorsión no uniformes. También hay que tener en cuenta que si en la energía de deformación se incluyen derivadas terceras, sería un problema de continuidad  $C_2$  en que hay que incluir como grados de libertad las derivadas segundas [45].

Al despreciar dichas derivadas terceras, de acuerdo con la ecuación (4.8) el vector de deformaciones transversales generalizadas a considerar es:

$$\{\gamma_g\}^t = \left\{ \frac{du_x}{dz}, \theta_y, \chi_x, \frac{du_y}{dz}, \theta_x, \chi_y, \frac{d\theta_z}{dz}, \frac{d\psi_d}{dz} \right\}$$

La energía de deformación por tensiones tangenciales viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dU_\gamma}{dz} &= \frac{1}{2} \int_A G \cdot \gamma_{sz}^2 \cdot dA = \frac{1}{2} \{\gamma_g\}^t G_o \left( \int_A \frac{G}{G_o} [A_\gamma] dA \right) \{\gamma_g\} = \\ &= \frac{1}{2} \{\gamma_g\}^t G_o [D] \{\gamma_g\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Siendo:

$$t_a = \left( \frac{\partial w_a}{\partial s} - h_a \right) \quad w'_{xo} = \frac{\partial w_{xo}}{\partial s}$$

$$t_d = \left( u_{ds} - \frac{\partial w_d}{\partial s} \right) \quad w'_{yo} = \frac{\partial w_{yo}}{\partial s}$$

$$[A_\gamma] = \begin{bmatrix} t_x^2 & -t_x^2 & A_x w'_{xo} t_x & t_x t_y & t_x t_y & A_y w'_{yo} t_x & t_a t_x & t_d t_x \\ -t_x^2 & t_x^2 & -A_x w'_{xo} t_x & -t_x t_y & -t_x t_y & -A_y w'_{yo} t_x & -t_a t_x & -t_d t_x \\ A_x w'_{xo} t_x & -A_x w'_{xo} t_x & (A_x w'_{xo})^2 & A_x w'_{xo} t_y & A_x w'_{xo} t_y & A_y w'_{yo} A_x w'_{xo} & A_x w'_{xo} t_a & A_x w'_{xo} t_d \\ \hline t_x t_y & -t_x t_y & A_x w'_{xo} t_y & t_y^2 & t_y^2 & A_y w'_{yo} t_y & t_a t_y & t_d t_y \\ t_x t_y & -t_x t_y & A_x w'_{xo} t_y & t_y^2 & t_y^2 & A_y w'_{yo} t_y & t_a t_y & t_d t_y \\ A_y w'_{yo} t_x & -A_y w'_{yo} t_x & A_y w'_{yo} A_x w'_{xo} & A_y w'_{yo} t_y & A_y w'_{yo} t_y & (A_y w'_{yo})^2 & A_y w'_{yo} t_a & A_y w'_{yo} t_d \\ \hline t_a t_x & -t_a t_x & A_x w'_{xo} t_a & t_a t_y & t_a t_y & A_y w'_{yo} t_a & t_a^2 & t_a t_d \\ t_d t_x & -t_d t_x & A_x w'_{xo} t_d & t_d t_y & t_d t_y & A_y w'_{yo} t_d & t_a t_d & t_d^2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que las siguientes integrales tienen valor nulo, por ser la suma en toda la sección de las componentes en dirección  $x$  e  $y$  de las tensiones tangenciales por torsión y distorsión uniformes (véase el apéndice C, ecuaciones (C.9) (C.10) (C.11) y (C.12)):

$$D_{t_a.x} = \int_A \frac{G}{G_o} t_x t_a dA = 0$$

$$D_{t_a.y} = \int_A \frac{G}{G_o} t_y t_a dA = 0$$

$$D_{t_d.x} = \int_A \frac{G}{G_o} t_x t_d dA = 0$$

$$D_{t_d.y} = \int_A \frac{G}{G_o} t_y t_d dA = 0$$

Queda:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{xx} & -D_{xx} & A_x D_{w_{xo}x} & D_{xy} & D_{xy} & A_y D_{w_{yo}x} & 0 & 0 \\ -D_{xx} & D_{xx} & -A_x D_{w_{xo}x} & -D_{xy} & -D_{xy} & -A_y D_{w_{yo}x} & 0 & 0 \\ A_x D_{w_{xo}x} & -A_x D_{w_{xo}x} & A_x^2 D_{w_{xo}w_{xo}} & A_x D_{w_{xo}y} & A_x D_{w_{xo}y} & A_x D_{w_{yo}w_{xo}} A_y & A_x D_{w_{xo}t_a} & A_x D_{w_{xo}t_d} \\ \hline D_{xy} & -D_{xy} & A_x D_{w_{xo}y} & D_{yy} & D_{yy} & A_y D_{w_{yo}y} & 0 & 0 \\ D_{xy} & -D_{xy} & A_x D_{w_{xo}y} & D_{yy} & D_{yy} & A_y D_{w_{yo}y} & 0 & 0 \\ A_y D_{w_{yo}x} & -A_y D_{w_{yo}x} & A_x D_{w_{yo}w_{xo}} A_y & A_y D_{w_{yo}y} & A_y D_{w_{yo}y} & A_y^2 D_{w_{yo}w_{yo}} & A_y D_{w_{yo}t_a} & A_y D_{w_{yo}t_d} \\ \hline 0 & 0 & A_x D_{w_{xo}t_a} & 0 & 0 & A_y D_{w_{yo}t_a} & I_t & D_{t_d t_a} \\ 0 & 0 & A_x D_{w_{xo}t_d} & 0 & 0 & A_y D_{w_{yo}t_d} & D_{t_d t_a} & D_{t_d t_d} \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 D_{xx} &= \int_A \frac{G}{G_o} (t_x)^2 dA & D_{yy} &= \int_A \frac{G}{G_o} (t_y)^2 dA \\
 D_{xy} &= \int_A \frac{G}{G_o} t_x t_y dA & D_{w_{y_o}.w_{x_o}} &= \int_A \frac{G}{G_o} w'_{y_o} w'_{x_o} dA \\
 D_{w_{x_o}.w_{x_o}} &= \int_A \frac{G}{G_o} (w'_{x_o})^2 dA & D_{w_{x_o}.x} &= \int_A \frac{G}{G_o} w_{x_o} t_x dA \\
 D_{w_{y_o}.w_{y_o}} &= \int_A \frac{G}{G_o} (w'_{y_o})^2 dA & D_{w_{y_o}.y} &= \int_A \frac{G}{G_o} w_{y_o} t_y dA \\
 D_{w_{x_o}.y} &= \int_A \frac{G}{G_o} w_{x_o} t_y dA & D_{w_{y_o}.x} &= \int_A \frac{G}{G_o} w_{y_o} t_x dA \\
 D_{w_{x_o}.t_a} &= \int_A \frac{G}{G_o} w_{x_o} t_a dA & D_{w_{x_o}.t_d} &= \int_A \frac{G}{G_o} w_{x_o} t_d dA \\
 D_{w_{y_o}.t_a} &= \int_A \frac{G}{G_o} w_{y_o} t_a dA & D_{w_{y_o}.t_d} &= \int_A \frac{G}{G_o} w_{y_o} t_d dA \\
 I_t &= \int_A \frac{G}{G_o} (t_a)^2 dA & D_{t_d.t_d} &= \int_A \frac{G}{G_o} (t_d)^2 dA \\
 D_{t_d.t_a} &= \int_A \frac{G}{G_o} t_a t_d dA
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Tal como se ha hecho con las deformaciones longitudinales, prescindiendo de los términos que acoplan el problema de flexión con el de torsión-distorsión queda finalmente:

$$[D] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|cc}
 D_{xx} & -D_{xx} & A_x D_{w_{x_o}x} & D_{xy} & D_{xy} & A_y D_{w_{y_o}x} & 0 & 0 \\
 -D_{xx} & D_{xx} & -A_x D_{w_{x_o}x} & -D_{xy} & -D_{xy} & -A_y D_{w_{y_o}x} & 0 & 0 \\
 A_x D_{w_{x_o}x} & -A_x D_{w_{x_o}x} & A_x^2 D_{w_{x_o}w_{x_o}} & A_x D_{w_{x_o}y} & A_x D_{w_{x_o}y} & A_x D_{w_{y_o}w_{x_o}} A_y & 0 & 0 \\
 \hline
 D_{xy} & -D_{xy} & A_x D_{w_{x_o}y} & D_{yy} & D_{yy} & A_y D_{w_{y_o}y} & 0 & 0 \\
 D_{xy} & -D_{xy} & A_x D_{w_{x_o}y} & D_{yy} & D_{yy} & A_y D_{w_{y_o}y} & 0 & 0 \\
 A_y D_{w_{y_o}x} & -A_y D_{w_{y_o}x} & A_x D_{w_{y_o}w_{x_o}} A_y & A_y D_{w_{y_o}y} & A_y D_{w_{y_o}y} & A_y^2 D_{w_{y_o}w_{y_o}} & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_t & D_{t_d t_a} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{t_d t_a} & D_{t_d t_d}
 \end{array} \right]$$

## 4.7. CARACTERÍSTICAS DE ALABEO DE CORTANTE

En las expresiones de la energía de deformación deducidas en el apartado anterior aparecen características mecánicas referentes al alabeo de cortante, obtenidas mediante integración de la función de alabeo ortogonalizada  $w_{yo}$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.2) y (4.3) con la que se realiza la ortogonalización, se puede establecer la relación entre las características con la función ortogonalizada y sin ortogonalizar.

Siendo las relaciones fáciles de deducir, se incluyen a continuación las que intervienen en la flexión en el plano  $y - z$ .

$$\begin{aligned}
 w_{yo} &= w_y - C_{yo} \cdot y = w_y - \frac{1}{A_y} \cdot y \\
 I_{w_{yo} \cdot y} &= I_{w_y \cdot y} - C_{yo} \cdot I_x \\
 I_{w_{yo} \cdot w_{yo}} &= I_{w_y \cdot w_y} - 2 \cdot C_{yo} \cdot I_{w_y \cdot y} + C_{yo}^2 \cdot I_x \\
 D_{w_{yo} \cdot y} &= D_{w_y \cdot y} - C_{yo} \cdot D_{yy} \\
 D_{w_{yo} \cdot w_{yo}} &= D_{w_y \cdot w_y} - 2 \cdot C_{yo} \cdot D_{w_y \cdot y} + C_{yo}^2 \cdot D_{yy}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

## 4.8. GRADOS DE LIBERTAD

Se elige un elemento finito con tres nodos, ya que es el mínimo número de nudos para definir una curva en el espacio, y así el elemento desarrollado puede ser generalizado a tres dimensiones. También, porque con dos nudos la interpolación para las flechas sería lineal y daría pobres resultados, pudiendo con tres nudos ser cuadrática. A continuación se estudia el mínimo número de grados de libertad necesarios para cada función incógnita.

En la energía de deformación las funciones incógnitas  $\{u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \chi_x, \chi_y\}$ , solamente aparecen con un orden de derivación, por lo que al ser un problema de continuidad  $C_0$ , los grados de libertad a tomar son los valores de dichas funciones en los nodos del elemento, tal como indica O.C. Zienkiewicz [45].

Las funciones incógnitas  $\{\theta_z, \psi_d\}$  aparecen en la energía de deformación con un orden de derivación hasta derivadas segundas, por lo que al ser un problema de continuidad  $C_1$ , los grados de libertad necesarios son los valores en los nudos de las funciones incógnitas y sus derivadas primeras.

Por lo tanto los grados de libertad necesarios por nudo son los siguientes:

$$\boxed{\{u_i\}^t = \left\{ \begin{array}{l} u_{xi}, u_{yi}, u_{zi}, \\ \theta_{xi}, \theta_{yi}, \\ \theta_{zi}, \theta'_{zi}, \\ \chi_{xi}, \chi_{yi}, \\ \psi_{di}, \psi'_{di} \end{array} \right\}}$$

Para los grados de libertad correspondientes a las funciones incógnitas con continuidad  $C_0$ , se eligen los polinomios de grado dos representados en la figura (4.4), y que tienen por ecuaciones:

$$\xi = \frac{s}{L/2}$$

$$-1 \leq \xi \leq +1$$

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= (\xi^2 - \xi)/2 \\ N_2(\xi) &= (1 - \xi^2) \\ N_3(\xi) &= (\xi^2 + \xi)/2 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

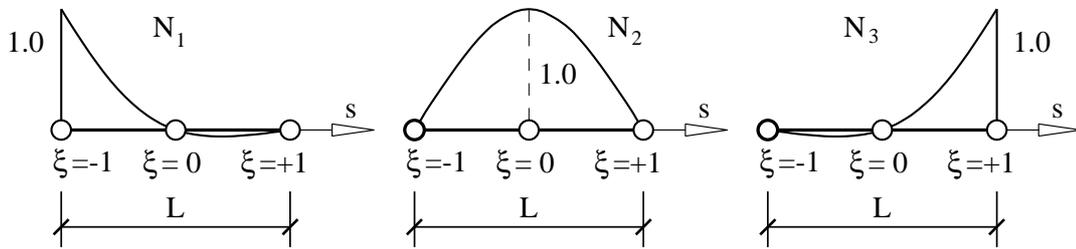


Figura 4.4: Funciones de forma  $N_i$ .

Y para los grados de libertad correspondientes a las funciones incógnitas con continuidad  $C_1$ , las funciones de forma que se eligen son los polinomios de grado tres representados en la figura (4.5), y que tienen por ecuaciones:

$$\begin{aligned} -1 \leq \xi \leq 0 \quad & P_{11}(\xi) = (1 - 3(\xi + 1)^2 + 2(\xi + 1)^3) \\ & P_{12}(\xi) = ((1 + \xi) - 2(1 + \xi)^2 + (1 + \xi)^3) L/2 \\ & P_{21}(\xi) = 3(1 + \xi)^2 - 2(1 + \xi)^3 \\ & P_{22}(\xi) = (-(1 + \xi)^2 + (1 + \xi)^3) L/2 \\ & P_{31}(\xi) = 0 \\ & P_{32}(\xi) = 0 \\ 0 \leq \xi \leq 1 \quad & P_{11}(\xi) = 0 \\ & P_{12}(\xi) = 0 \\ & P_{21}(\xi) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \\ & P_{22}(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) L/2 \\ & P_{31}(\xi) = (3\xi^2 - 2\xi^3) \\ & P_{32}(\xi) = (-\xi^2 + \xi^3) L/2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

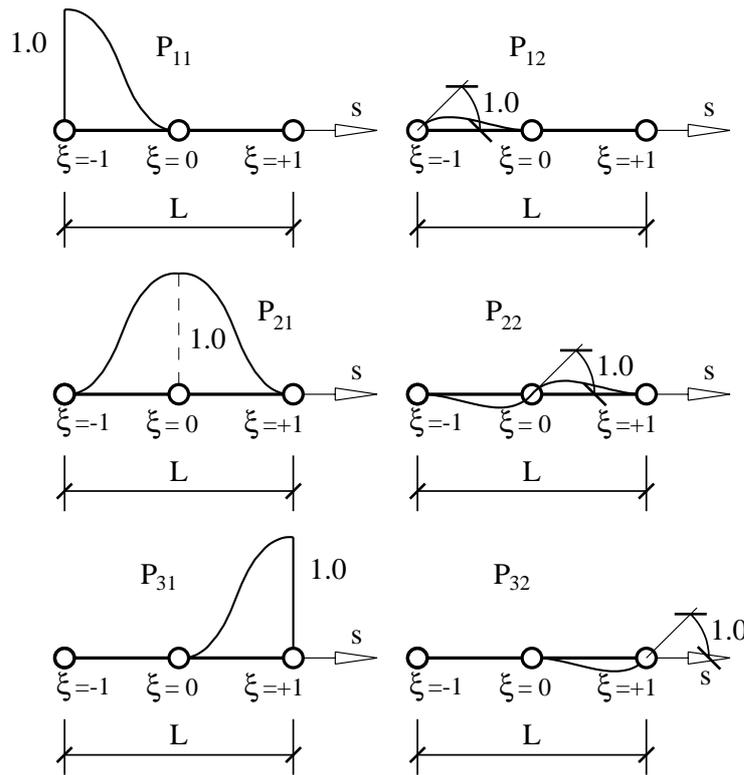


Figura 4.5: Funciones de forma  $P_i$ .

Con las funciones de forma elegidas, la interpolación de las funciones incógnitas queda de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \psi_d \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} N_i & \cdot \\ \cdot & N_i & \cdot \\ \cdot & \cdot & N_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & N_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & N_i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & P_{i1} & P_{i2} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & N_i & \cdot & \cdot \\ \cdot & N_i & \cdot \\ \cdot & P_{i1} & P_{i2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ \theta'_{zi} \\ \chi_{xi} \\ \chi_{yi} \\ \psi_{di} \\ \psi'_{di} \end{Bmatrix}$$

Que se puede poner en forma matricial como:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^3 [N_i] \{u_i\}$$

El operador diferencial para obtener las deformaciones longitudinales generalizadas  $\{\epsilon_g\}$  se obtiene de la siguiente forma:

$$\{\epsilon_g\} = \begin{pmatrix} \frac{du_z}{dz} \\ \frac{d\theta_y}{dz} \\ \frac{d\chi_x}{dz} \\ \frac{d\theta_x}{dz} \\ \frac{d\chi_y}{dz} \\ \frac{d^2\theta_z}{dz^2} \\ \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d^2}{dz^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{d^2}{dz^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \psi_d \end{pmatrix}$$

En notación matricial:

$$\{\epsilon_g\} = [L_\epsilon] \{u\} = [L_\epsilon] \sum_{i=1}^3 [N_i] \{u_i\} = \sum_{i=1}^3 [B_{\epsilon,i}] \{u_i\} \quad (4.19)$$

$$[B_{\epsilon,i}] = [L_\epsilon] [N_i]$$

El operador para obtener la deformación generalizada  $\{\epsilon_{K_d}\}$  para la energía de deformación transversal de la sección por distorsión es el siguiente:

$$\{\epsilon_{K_d}\} = \{\psi_d\} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \psi_d \end{pmatrix}$$

En notación matricial:

$$\{\epsilon_{K_d}\} = [L_{K_d}] \{u\} = [L_{K_d}] \sum_{i=1}^3 [N_i] \{u_i\} = \sum_{i=1}^3 [B_{K_d,i}] \{u_i\} \quad (4.20)$$

$$[B_{K_d,i}] = [L_{K_d}] [N_i]$$

Y el operador diferencial para obtener las deformaciones transversales generalizadas  $\{\gamma_g\}$  es:

$$\{\gamma_g\} = \begin{Bmatrix} \frac{du_x}{dz} \\ \theta_y \\ \chi_x \\ \frac{du_y}{dz} \\ \theta_x \\ \chi_y \\ \frac{d\theta_z}{dz} \\ \frac{d\psi_d}{dz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{d}{dz} & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \psi_d \end{Bmatrix}$$

Que en notación matricial queda como:

$$\{\gamma_g\} = [L_\gamma] \{u\} = [L_\gamma] \sum_{i=1}^3 [N_i] \{u_i\} = \sum_{i=1}^3 [B_{\gamma,i}] \{u_i\} \quad (4.21)$$

$$[B_{\gamma,i}] = [L_\gamma] [N_i]$$

## 4.9. ENERGÍA POTENCIAL DE LAS ACCIONES EXTERIORES

La energía potencial de las acciones exteriores es la suma de las correspondientes a: las cargas repartidas según cada eje  $p_x, p_y, p_z$ ; los momentos flectores distribuidos  $m_x, m_y$ ; la carga torsora  $m_t$  (el trabajo es según la ecuación (3.82) ); y la carga distorsora  $m_d$  (el trabajo es según la ecuación (3.142) ). Quedando la expresión:

$$\frac{dV}{dz} = - p_x u_x - p_y u_y - p_z u_z \\ - m_x \theta_x - m_y \theta_y - m_t \theta_z - m_d \psi_d$$

Que expresada en forma matricial, y teniendo en cuenta la interpolación de los movimientos, se puede poner como:

$$\frac{dV}{dz} = - \{u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \chi_x, \chi_y, \psi_d\} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ m_x \\ m_y \\ m_t \\ 0 \\ 0 \\ m_d \end{Bmatrix} =$$

$$= - \{u\}^t \{p\} = - \sum_{i=1}^3 \{u_i\}^t [N_i]^t \{p\}$$

Para una pieza de longitud  $L$  la energía potencial viene dada por la integral de la expresión anterior:

$$V = - \{u_i\}^t \int_0^L \left( \sum_{i=1}^3 [N_i]^t \{p\} \right) dz$$

#### 4.10. ENERGÍA POTENCIAL TOTAL

La energía de deformación total viene dada por la integral a lo largo de la pieza de la suma de tres términos dados por las ecuaciones (4.11), (4.13) y (4.14). En los cuales sustituyendo las expresiones para las deformaciones generalizadas (4.19), (4.20) y (4.21) queda:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L \left( dU_\epsilon + dU_{K_d} + dU_\gamma \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left( \{\epsilon_g\}^t E_o [I] \{\epsilon_g\} + \{\epsilon_{K_d}\}^t E_o [K_d] \{\epsilon_{K_d}\} + \{\gamma_g\}^t G_o [D] \{\gamma_g\} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \{u_i\}^t \int_0^L \left( [B_\epsilon]^t E_o [I] [B_\epsilon] + [B_{K_d}]^t E_o [K_d] [B_{K_d}] + [B_\gamma]^t G_o [D] [B_\gamma] \right) dz \{u_i\} \end{aligned}$$

La energía potencial total viene dada por la suma entre la energía de deformación y la energía potencial de las fuerzas exteriores:

$$\Pi = U + V \quad (4.22)$$

#### 4.11. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

A continuación se hace una pequeña revisión de la formulación de un problema mediante el método de los elementos finitos, que se puede encontrar de forma más extensa en las publicaciones de Zienkiewick [45] o Bathe [48].

Siendo  $\{u\}$  las funciones incógnitas,  $\{u_i\}$  los grados de libertad, y estando la energía potencial total  $\Pi$  definida por una expresión de la siguiente forma:

$$\{u\} = [N_i] \{u_i\}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \{u_i\}^t \int_0^L [B]^t [D] [B] dz \{u_i\} - \{u_i\}^t \int_0^L [N_i]^t \{p\} dz$$

La variación de la misma cuando se produce una variación  $\{\delta u_i\}$  de los parámetros incógnitas viene dada por:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \Pi(\{u_i\} + \delta\{u_i\}) - \Pi(\{u_i\}) = \\ &= \{\delta u_i\}^t \int_0^L [B]^t [D] [B] dz \{u_i\} - \{\delta u_i\}^t \int_0^L [N_i]^t \{p\} dz \end{aligned}$$

Con la condición de que la energía potencial  $\Pi$  tenga un valor mínimo  $\delta\Pi = 0$  para cualquier variación de las incógnitas  $\{\delta u_i\}$ , se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$[K] \{u_i\} = \{f_i\}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_0^L [B]^t [D] [B] dz \\ \{f_i\} &= \int_0^L [N_i]^t \{p\} dz \end{aligned}$$

## 4.12. MATRIZ RIGIDEZ

Aplicando lo visto en los apartados previos, la submatriz de rigidez del elemento que relaciona los movimientos del nudo  $i$  con los del nudo  $j$  viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} [K_{ij}] &= \int_0^L \left( [B_{\epsilon,i}]^t E_o [I] [B_{\epsilon,j}] + [B_{K_d,i}]^t E_o [K_d] [B_{K_d,j}] + [B_{\gamma,i}]^t G_o [D] [B_{\gamma,j}] \right) dz = \\ &= \int_0^L [k_{ij}] dz \end{aligned}$$

Denotando con el signo  $(t)$  las derivadas de las funciones de forma respecto de la coordenada  $z$ .

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} & 0 & K_{0,3} & K_{0,4} & 0 & 0 & K_{0,7} & K_{0,8} & 0 & 0 \\ K_{1,0} & K_{1,1} & 0 & K_{1,3} & K_{1,4} & 0 & 0 & K_{1,7} & K_{1,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline K_{3,0} & K_{3,1} & 0 & K_{3,3} & K_{3,4} & 0 & 0 & K_{3,7} & K_{3,8} & 0 & 0 \\ K_{4,0} & K_{4,1} & 0 & K_{4,3} & K_{4,4} & 0 & 0 & K_{4,7} & K_{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{5,5} & K_{5,6} & 0 & 0 & K_{5,9} & K_{5,10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{6,5} & K_{6,6} & 0 & 0 & K_{6,9} & K_{6,10} \\ K_{7,0} & K_{7,1} & 0 & K_{7,3} & K_{7,4} & 0 & 0 & K_{7,7} & K_{7,8} & 0 & 0 \\ K_{8,0} & K_{8,1} & 0 & K_{8,3} & K_{8,4} & 0 & 0 & K_{8,7} & K_{8,8} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{9,5} & K_{9,6} & 0 & 0 & K_{9,9} & K_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{10,5} & K_{10,6} & 0 & 0 & K_{10,9} & K_{10,10} \end{bmatrix}$$

Axil:

$$K_{2,2} = N'_i E_o A N'_j$$

Flexión en el plano x-z:

$$\begin{aligned}
 K_{4.4} &= N'_i E_o I_y N'_j & + N_i G_o D_{xx} N_j \\
 K_{4.7} &= - N'_i E_o A_x I_{w_{x_o}.x} N'_j & - N_i G_o A_x D_{w_{x_o}.x} N_j \\
 K_{7.4} &= - N'_i E_o A_x I_{w_{x_o}.x} N'_j & - N_i G_o A_x D_{w_{x_o}.x} N_j \\
 K_{7.7} &= N'_i E_o A_x^2 I_{w_{x_o}.w_{x_o}} N'_j & + N_i G_o A_x^2 D_{w_{x_o}.w_{x_o}} N_j \\
 \\ 
 K_{0.0} &= N'_i G_o D_{xx} N'_j \\
 K_{0.4} &= - N'_i G_o D_{xx} N'_j \\
 K_{4.0} &= - N_i G_o D_{xx} N'_j \\
 K_{0.7} &= N'_i G_o A_x D_{w_{x_o}.x} N_j \\
 K_{7.0} &= N_i G_o A_x D_{w_{x_o}.x} N'_j
 \end{aligned}$$

Flexión en el plano y-z:

$$\begin{aligned}
 K_{3.3} &= N'_i E_o I_x N'_j & + N_i G_o D_{yy} N_j \\
 K_{3.8} &= N'_i E_o A_y I_{w_{y_o}.y} N'_j & + N_i G_o A_y D_{w_{y_o}.y} N_j \\
 K_{8.3} &= N'_i E_o A_y I_{w_{y_o}.y} N'_j & + N_i G_o A_y D_{w_{y_o}.y} N_j \\
 K_{8.8} &= N'_i E_o A_y^2 I_{w_{y_o}.w_{y_o}} N'_j & + N_i G_o A_y^2 D_{w_{y_o}.w_{y_o}} N_j \\
 \\ 
 K_{1.1} &= N'_i G_o D_{yy} N'_j \\
 K_{1.3} &= N'_i G_o D_{yy} N'_j \\
 K_{3.1} &= N_i G_o D_{yy} N'_j \\
 K_{1.8} &= N'_i G_o A_y D_{w_{y_o}.y} N_j \\
 K_{8.1} &= N_i G_o A_y D_{w_{y_o}.y} N'_j
 \end{aligned}$$

Acoplamiento entre flexiones:

$$\begin{aligned}
 K_{3.7} &= N'_i E_o A_x I_{w_{x_o}.y} N'_j & + N_i G_o A_x D_{w_{x_o}.y} N_j \\
 K_{4.8} &= - N'_i E_o A_y I_{w_{y_o}.x} N'_j & - N_i G_o A_y D_{w_{y_o}.x} N_j \\
 K_{7.3} &= N'_i E_o A_x I_{w_{x_o}.y} N'_j & + N_i G_o A_x D_{w_{x_o}.y} N_j \\
 K_{8.4} &= - N'_i E_o A_y I_{w_{y_o}.x} N'_j & - N_i G_o A_y D_{w_{y_o}.x} N_j \\
 K_{7.8} &= N'_i E_o A_x A_y I_{w_{y_o}.w_{x_o}} N'_j & + N_i G_o A_x A_y D_{w_{y_o}.w_{x_o}} N_j \\
 K_{8.7} &= N'_i E_o A_x A_y I_{w_{y_o}.w_{x_o}} N'_j & + N_i G_o A_x A_y D_{w_{y_o}.w_{x_o}} N_j \\
 \\ 
 K_{0.1} &= N'_i G_o D_{xy} N'_j \\
 K_{1.0} &= N'_i G_o D_{xy} N'_j \\
 K_{3.4} &= - N_i G_o D_{xy} N'_j \\
 K_{4.3} &= - N_i G_o D_{xy} N'_j \\
 K_{0.3} &= N'_i G_o D_{xy} N'_j \\
 K_{1.4} &= - N'_i G_o D_{xy} N'_j \\
 K_{3.0} &= N_i G_o D_{xy} N'_j \\
 K_{4.1} &= - N_i G_o D_{xy} N'_j \\
 K_{0.8} &= N'_i G_o A_y D_{w_{y_o}.x} N_j \\
 K_{1.7} &= N'_i G_o A_x D_{w_{x_o}.y} N_j \\
 K_{7.1} &= N_i G_o A_x D_{w_{x_o}.y} N'_j \\
 K_{8.0} &= N_i G_o A_y D_{w_{y_o}.x} N'_j
 \end{aligned}$$

Torsión - distorsión:

$$\begin{aligned}
 K_{5.5} &= P''_{i1} E_o I_a P''_{j1} + P'_{i1} G_o I_t P'_{j1} \\
 K_{5.6} &= P''_{i1} E_o I_a P''_{j2} + P'_{i1} G_o I_t P'_{j2} \\
 K_{6.5} &= P''_{i2} E_o I_a P''_{j1} + P'_{i2} G_o I_t P'_{j1} \\
 K_{6.6} &= P''_{i2} E_o I_a P''_{j2} + P'_{i2} G_o I_t P'_{j2} \\
 \\ 
 K_{5.9} &= - P''_{i1} E_o I_{w_a.w_d} P''_{j1} + P'_{i1} G_o D_{t_d.t_a} P'_{j1} \\
 K_{5.10} &= - P''_{i1} E_o I_{w_a.w_d} P''_{j2} + P'_{i1} G_o D_{t_d.t_a} P'_{j2} \\
 K_{6.9} &= - P''_{i2} E_o I_{w_a.w_d} P''_{j1} + P'_{i2} G_o D_{t_d.t_a} P'_{j1} \\
 K_{6.10} &= - P''_{i2} E_o I_{w_a.w_d} P''_{j2} + P'_{i2} G_o D_{t_d.t_a} P'_{j2} \\
 \\ 
 K_{9.5} &= - P''_{i1} E_o I_{w_a.w_d} P''_{j1} + P'_{i1} G_o D_{t_d.t_a} P'_{j1} \\
 K_{9.6} &= - P''_{i1} E_o I_{w_a.w_d} P''_{j2} + P'_{i1} G_o D_{t_d.t_a} P'_{j2} \\
 K_{10.5} &= - P''_{i2} E_o I_{w_a.w_d} P''_{j1} + P'_{i2} G_o D_{t_d.t_a} P'_{j1} \\
 K_{10.6} &= - P''_{i2} E_o I_{w_a.w_d} P''_{j2} + P'_{i2} G_o D_{t_d.t_a} P'_{j2} \\
 \\ 
 K_{9.9} &= P''_{i1} E_o I_d P''_{j1} + P'_{i1} G_o D_{t_d.t_d} P'_{j1} + P_{i1} E_o K_d P_{j1} \\
 K_{9.10} &= P''_{i1} E_o I_d P''_{j2} + P'_{i1} G_o D_{t_d.t_d} P'_{j2} + P_{i1} E_o K_d P_{j2} \\
 K_{10.9} &= P''_{i2} E_o I_d P''_{j1} + P'_{i2} G_o D_{t_d.t_d} P'_{j1} + P_{i2} E_o K_d P_{j1} \\
 K_{10.10} &= P''_{i2} E_o I_d P''_{j2} + P'_{i2} G_o D_{t_d.t_d} P'_{j2} + P_{i2} E_o K_d P_{j2}
 \end{aligned}$$

En el apéndice F se recogen las integrales necesarias de las funciones de forma para obtener la matriz de rigidez. Si se quiere realizar la integración de forma numérica, como el polinomio de grado más alto a integrar es de grado seis, en cada intervalo de definición de las funciones de forma  $P_{ij}$  es necesario un esquema de cuatro puntos para la fórmula de cuadratura de Gauss [45].

### 4.13. VECTOR DE FUERZAS

Se ha visto que el vector de fuerzas viene dado por:

$$\{f_i\} = \int_0^L [N_i]^t \{p\} dz$$

$$\{p\} = \{p_x, p_y, p_z, m_x, m_y, m_t, 0, 0, m_d\}^t$$

Desarrollando estas ecuaciones, de acuerdo con las funciones de forma elegidas, el término de fuerzas para el nudo  $i$  queda como:

$$\{f_i\} = \int_0^L \left\{ \begin{array}{c} N_i \cdot p_x \\ N_i \cdot p_y \\ N_i \cdot p_z \\ \hline N_i \cdot m_x \\ N_i \cdot m_y \\ P_{i1} \cdot m_t \\ P_{i2} \cdot m_t \\ 0 \\ 0 \\ \hline P_{i1} \cdot m_d \\ P_{i2} \cdot m_d \end{array} \right\} dz$$

En el apéndice F se pueden encontrar los valores necesarios de las integrales exactas de las funciones de forma.

#### 4.14. CÁLCULO DE ESFUERZOS

Los esfuerzos a nivel de sección se pueden obtener por integración de las tensiones, las cuales de acuerdo con el apartado 4.5 se obtienen con las expresiones:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \left( u'_z + w_a \cdot \theta''_z - w_d \cdot \psi''_d \right. \\ &\quad \left. + \left( +y \cdot \theta'_x + w_{yo} \cdot A_y \cdot \chi'_y \right) + \left( -x \cdot \theta'_y + w_{xo} \cdot A_x \cdot \chi'_x \right) \right) \\ \tau_{sz} &= G \left( \left( t_x \left( u'_x - \theta_y \right) + w'_{xo} A_x \chi_x \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( t_y \left( u'_y + \theta_x \right) + w'_{yo} A_y \chi_y \right) \right. \\ &\quad \left. + t_a \theta'_z + w'_{at} \theta'''_z + t_d \psi'_d + w'_{dt} \psi'''_d \right) \end{aligned}$$

El esfuerzo axial  $N_z$  se obtiene integrando las tensiones normales en el área de la sección. Teniendo en cuenta que se trabaja en ejes principales de inercia y que las funciones de alabeo  $\{w_{yo}, w_{xo}, w_a, w_d\}$  están ortogonalizadas respecto del axil, queda:

$$N_z = \int_A \sigma_z dA = E_o \cdot A \cdot u'_z \quad (4.23)$$

Los esfuerzos cortantes  $Q_x$  y  $Q_y$  se obtienen por integración de la componente en cada dirección de las tensiones tangenciales, componentes que se obtienen multiplicando la tensión tangencial por el vector unitario de la dirección de las paredes  $(t_x, t_y)$ . Teniendo en cuenta que por torsión y distorsión no hay esfuerzos cortantes sobre la sección (véase el apéndice C, ecuaciones (C.9) a (C.16)), se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_A \tau_{sz} \cdot t_x \cdot dA \\ &= +G_o \cdot D_{xx} \cdot \left( u'_x - \theta_y \right) + G_o \cdot A_x \cdot D_{w_{xo}.x} \cdot \chi_x \\ &\quad + G_o \cdot D_{xy} \cdot \left( u'_y + \theta_x \right) + G_o \cdot A_y \cdot D_{w_{yo}.x} \cdot \chi_y \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
 Q_y &= \int_A \tau_{sz} \cdot t_y \cdot dA \\
 &= +G_o \cdot D_{xy} \cdot (u'_x - \theta_y) + G_o \cdot A_x \cdot D_{w_{x_o}.y} \cdot \chi_x \\
 &\quad + G_o \cdot D_{yy} \cdot (u'_y + \theta_x) + G_o \cdot A_y \cdot D_{w_{y_o}.y} \cdot \chi_y
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Las expresiones de los cortantes dependen de funciones interpoladas con polinomios de grado dos, mientras que con carga repartida constante los cortantes varían linealmente. Se obtienen valores mejores de los cortantes, si estos se calculan en los puntos de integración de Gauss para un esquema de dos puntos ( $\xi = \pm\sqrt{3}/3$ ), y luego se interpola linealmente en los puntos en que se desee el cortante.

Si se calculan las tensiones tangenciales por los cortantes a partir del campo de movimientos inicial (4.1), que está basado en la ecuaciones de los modos resistentes, las tensiones tangenciales se obtendrían de la siguiente forma:

$$\tau_{sz}(Q_x, Q_y) = G \left( \frac{\partial w_x}{\partial s} \frac{Q_x}{G_o} + \frac{\partial w_y}{\partial s} \frac{Q_y}{G_o} \right) \tag{4.26}$$

Pero al modificar el campo de movimientos introduciendo los alabeos de cortante ortogonalizados (4.6), la ecuación para obtener las tensiones tangenciales por cortantes es:

$$\tau_{sz}(Q_x, Q_y) = G \left( \left( t_x (u'_x - \theta_y) + w'_{x_o} A_x \chi_x \right) + \left( t_y (u'_y + \theta_x) + w'_{y_o} A_y \chi_y \right) \right) \tag{4.27}$$

Al haber dividido las funciones de alabeo  $w_x$  y  $w_y$  en suma de dos funciones, y que además se multiplican por funciones de  $(z)$  distintas, la distribución de tensiones tangenciales que se obtiene con la ecuación (4.27) no es continua, lo que significa que en los encuentros entre paredes el equilibrio de tensiones tangenciales es aproximado. Por ello al calcular las tensiones tangenciales por cortantes, se obtienen mejores resultados, si en vez de calcularlas a partir de las deformaciones que se deducen del campo de movimientos modificado (4.6), se hace a partir de las tensiones tangenciales para cortantes unidad calculadas al obtener los modos resistentes de cortante, ecuación (4.26).

Los momentos flectores se obtienen integrando las tensiones normales multiplicadas por la distancia de su punto de aplicación al eje considerado. Teniendo en cuenta que se trabaja en ejes principales de inercia, y que las funciones de alabeo de torsión  $w_a$  y distorsión  $w_d$  están ortogonalizadas respecto de los giros alrededor de los ejes, quedan las expresiones:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA = \\
 &= E_o \cdot I_x \cdot \theta'_x + E_o \cdot A_x \cdot I_{w_{x_o}.y} \cdot \chi'_x + E_o \cdot A_y \cdot I_{w_{y_o}.y} \cdot \chi'_y \\
 M_y &= - \int_A \sigma_z \cdot x \cdot dA = \\
 &= E_o \cdot I_y \cdot \theta'_y - E_o \cdot A_x \cdot I_{w_{x_o}.x} \cdot \chi'_x - E_o \cdot A_y \cdot I_{w_{y_o}.x} \cdot \chi'_y
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ortogonalización realizada de las funciones de alabeo de cortante, se cumple que ( $I_{w_{y_o}.y} = 0$ ) y ( $I_{w_{x_o}.x} = 0$ ), por lo que las expresiones anteriores se simplifican a las siguientes:

$$\begin{aligned}
 M_x &= E_o \cdot I_x \cdot \theta'_x + E_o \cdot A_x \cdot I_{w_{x_o}.y} \cdot \chi'_x \\
 M_y &= E_o \cdot I_y \cdot \theta'_y - E_o \cdot A_y \cdot I_{w_{y_o}.x} \cdot \chi'_y
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Nótese que por los grados de interpolación utilizados para las funciones incógnitas, los momentos flectores que se obtienen tienen una variación lineal en el elemento, mientras que con carga repartida constante el grado correcto de la solución sería de grado dos.

En las secciones con un eje de simetría, son nulas las integrales ( $I_{w_{x_o}.y} = 0$ ) y ( $I_{w_{y_o}.x} = 0$ ), resultando por tanto para este caso particular:

$$\begin{aligned}
 M_x &= E_o \cdot I_x \cdot \theta'_x \\
 M_y &= E_o \cdot I_y \cdot \theta'_y
 \end{aligned}$$

El momento torsor se obtiene integrando el producto de las tensiones tangenciales por la distancia  $h_a$  de la pared considerada al centro de esfuerzos cortantes ( $x_a, y_a$ ). Teniendo en cuenta que las tensiones tangenciales por flexión no crean momentos torsores, se tiene:

$$\begin{aligned}
 M_z &= - \int_A \tau_{sz} \cdot h_a \cdot dA = \\
 &= -G_o \left( \int_A \frac{G}{G_o} t_a h_a dA \right) \theta'_z - E_o \left( \int_A \frac{G}{E_o} w'_{at} h_a dA \right) \theta''_z \\
 &\quad - G_o \left( \int_A \frac{G}{G_o} t_d h_a dA \right) \psi'_d - E_o \left( \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} h_a dA \right) \psi''_d
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (C.1) (C.2) (C.8) y (C.5) del apéndice C queda:

$$\begin{aligned}
 M_z &= G_o I_t \theta'_z - E_o I_a \theta''_z + G_o D_{t_d.t_a} \psi'_d + E_o I_{w_a.w_d} \psi''_d = \\
 &= M_{zu} + M_{zw} - \frac{D_{t_d.t_a}}{D_{t_d.t_d}} M_{du} + \frac{I_{w_a.w_d}}{I_d} M_{dw}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 M_{zu} &= +G_o I_t \theta'_z \\
 M_{zw} &= -E_o I_a \theta''_z \\
 M_{du} &= -G_o D_{t_d.t_d} \psi'_d \\
 M_{dw} &= +E_o I_d \psi''_d
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

La última expresión para  $M_z$  coincide con la derivada respecto del giro de torsión de la energía potencial de tensiones tangenciales de torsión y distorsión (véase el apartado 6.4.3).

De acuerdo con las condiciones de contorno (6.5) del sistema de ecuaciones diferenciales de torsión y distorsión, y de la expresión (6.3) de la energía potencial de los momentos de torsión y distorsión, se define el momento distorsor  $M_d$  como:

$$\begin{aligned} M_d &= G_o D_{t_d.t_a} \theta'_z + E_o I_{w_a.w_d} \theta'''_z + G_o D_{t_d.t_d} \psi'_d - E_o I_d \psi'''_d = \\ &= \frac{D_{t_d.t_a}}{I_t} M_{zu} - \frac{I_{w_a.w_d}}{I_a} M_{zw} - M_{du} - M_{dw} \end{aligned} \quad (4.31)$$

### 4.15. CAMBIO DE EJES

La matriz de rigidez y el vector de fuerzas obtenidos están definidos en ejes locales del elemento, y puede desearse cambiarlos a ejes globales de estructura. De los grados de libertad, los seis primeros se pueden cambiar de ejes de referencia, mientras que los cinco últimos no se pueden cambiar por tener sólo significado en ejes locales. Dividiendo los grados de libertad en estos dos grupos, la matriz de rigidez se particiona en cuatro.

$$\begin{aligned} \{u_{i.1}\}^t &= \{u_{xi}, u_{yi}, u_{zi}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^t \\ \{u_{i.2}\}^t &= \{\theta'_{zi}, \chi_{xi}, \chi_{yi}, \psi_{di}, \psi'_{di}\}^t \\ \begin{Bmatrix} f_{i.1} \\ f_{i.2} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{ij.11} & K_{ij.12} \\ K_{ij.21} & K_{ij.22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{j.1} \\ u_{j.2} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Si  $[T_i]$  es la matriz de cambio de base de los seis primeros grados de libertad del nudo  $i$  de la base global a la local, la matriz de rigidez en ejes globales es:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} [T_i]^t [K_{ij.11}] [T_j] & [T_i]^t [K_{ij.12}] \\ [K_{ij.21}] [T_j] & [K_{ij.22}] \end{bmatrix}$$

En la figura (4.6) se ha representado un elemento recto definido por tres nudos alineados, y otros tres nudos auxiliares para orientar los ejes locales de cada nudo. En este caso los ejes locales de los tres nudos deben ser los mismos, por lo que sólo sería necesario un nudo auxiliar para orientación de los ejes locales.

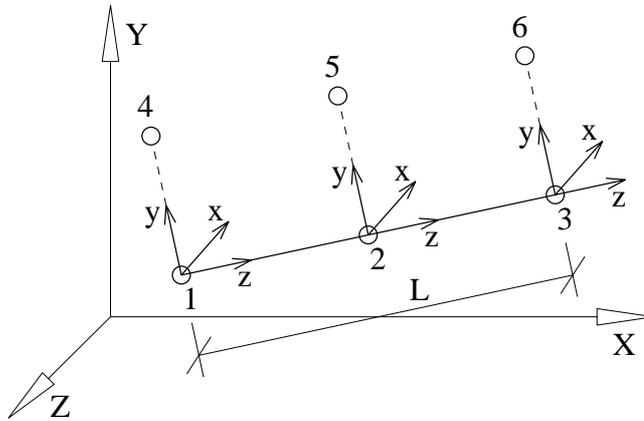


Figura 4.6: Definición geométrica del elemento.

## Capítulo 5

# APLICACIÓN EN PROBLEMAS DE FLEXIÓN

### 5.1. INTRODUCCIÓN

Con el objeto de comprobar el elemento desarrollado en un estado de flexión puro, se plantea la resolución de una viga de dos vanos de la misma luz y con carga repartida en el primer vano, tal como se representa en la figura (5.1).

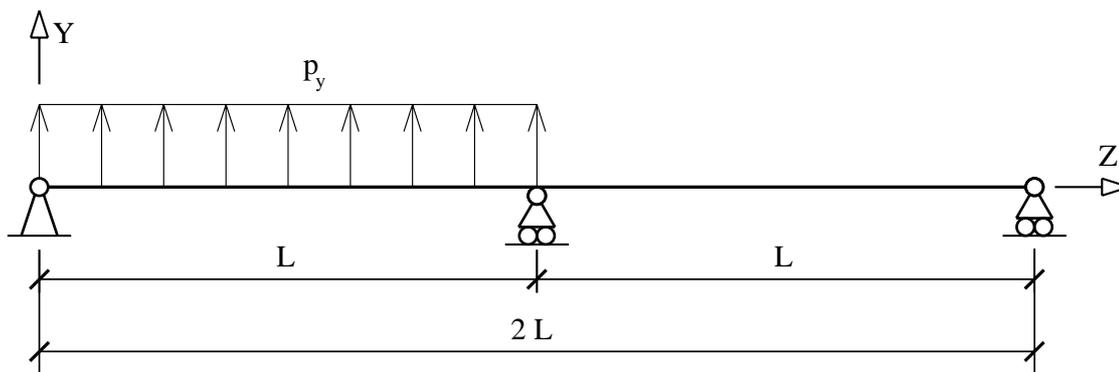


Figura 5.1: Viga de dos vanos.

El problema, primero se va resolver de forma analítica, y luego se va hacer una aplicación numérica para una viga con luz de cada vano de  $L = 15.00$  (m) y con una carga repartida sobre el primero de  $p_y = -500.00$  (kN/m). La sección de la viga está representada en la figura (5.2), siendo una sección rectangular de paredes delgadas: de  $h = 3.0$  (m) de canto,  $b = 6.00$  (m) de ancho, y de espesor  $t = 0.20$  (m), siendo el material de módulo de elasticidad  $E = 3.00 \cdot 10^7$  (kN/m<sup>2</sup>) y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.20$ . El cálculo de sus características se encuentra en el apéndice D.

Con el fin de verificar los resultados del elemento finito desarrollado en el capítulo 4, se van a comparar los obtenidos mediante los siguientes cinco métodos:

- Solución **ED**. Resolución de la ecuación diferencial del problema.
- Solución **B3N**. Con el elemento finito unidimensional desarrollado.

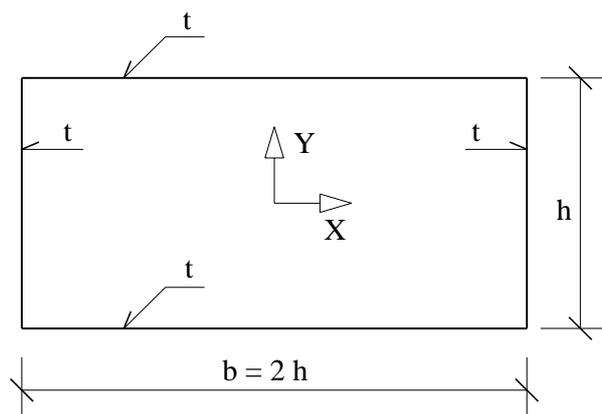


Figura 5.2: Sección rectangular.

- Solución **BF**. Método de las bandas finitas.
- Solución **MEF**. Método de los elementos finitos tipo lámina.
- Solución **C**. Barra convencional 3D sin deformación por cortante.

Los cálculos numéricos necesarios se han realizado con el programa general de elementos finitos *Vettones* [49], en el cual se ha implementado el cálculo de las características de las secciones de paredes delgadas de acuerdo con el apartado 3, y el elemento finito unidimensional del apartado 4. En el cálculo con elementos finitos se ha utilizado un elemento lámina de ocho nudos obtenido a partir de un hexaedro isoparamétrico curvo tal como se describe en el libro de Zienkiewick [45], o en el trabajo [50]. Y en el cálculo con bandas finitas se ha utilizado el elemento lámina de dos nudos descrito por Y. K. Cheung [51].

## 5.2. CARACTERÍSTICAS DE ALABEO DE LA SECCIÓN

Las características mecánicas de la sección del problema planteado están deducidas en el apéndice D, en concreto la función de alabeo de cortante  $w_y$  correspondiente al cortante  $Q_y$  de dirección  $y$  se obtiene en el apartado D.3, y está representada en la figura (D.3)<sup>1</sup>. Se necesita ortogonalizarla respecto del giro utilizando la ecuación (4.2), para lo cual se necesita determinar el coeficiente  $C_y$  dado por la ecuación (4.4).

$$w_{yo} = w_y - C_{yo} \cdot y$$

$$C_{yo} = \frac{1}{A_y} = \frac{183}{245 t h}$$

El resultado de la ortogonalización es el representado en la figura (5.3). En la figura (5.4) se representa como la función de alabeo de cortante  $w_y$  se descompone en un giro de conjunto  $C_{yo} \cdot y$  con el que la sección permanece plana, y un alabeo  $w_{yo}$  propiamente dicho.

<sup>1</sup>Página 314

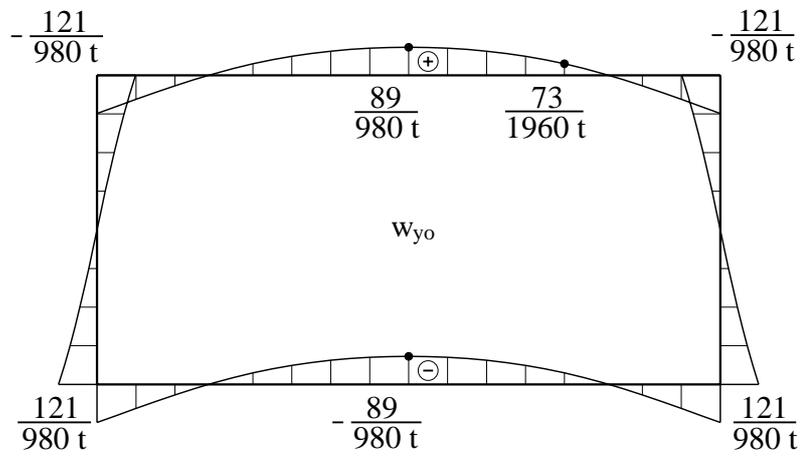


Figura 5.3: Alabeo de cortante ortogonalizado  $w_{yo}$ .

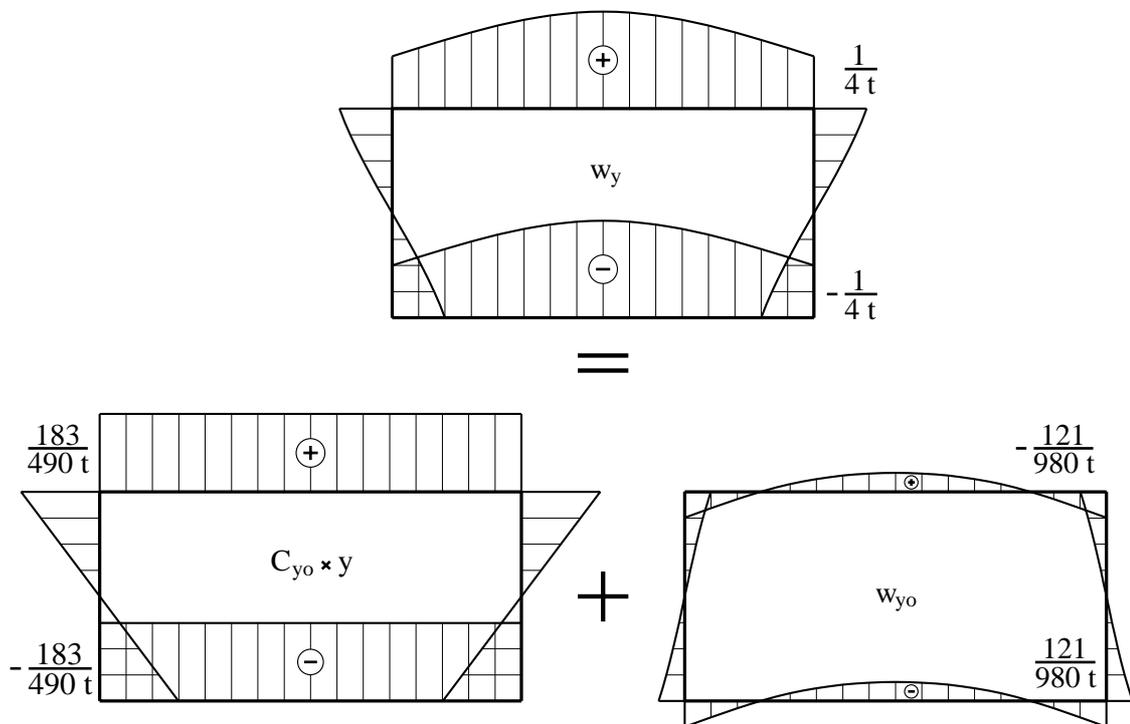


Figura 5.4: Descomposición del alabeo  $w_y$  de cortante.

Las características mecánicas de la sección referentes a la función de alabeo ortogonalizada  $w_{yo}$  se han de calcular con las ecuaciones (4.12) y (4.15). A partir de las características (D.2) ya obtenidas para la función de alabeo sin ortogonalizar  $w_y$ , utilizando las relaciones (4.16) se puede obtener las características para la función ortogonalizada  $w_{yo}$ .

$$I_{w_{yo}.w_{yo}} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{yo}^2 dA = \frac{1843}{68600} \frac{h}{t}$$

$$I_{w_{yo}.y} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{yo} y dA = 0$$

$$D_{w_{yo}.w_{yo}} = \int_A \frac{G}{G_o} \left( \frac{\partial w_{yo}}{\partial s} \right)^2 dA = \frac{22143}{60025} \frac{1}{t h}$$

$$D_{w_{yo}.y} = \int_A \frac{G}{G_o} \frac{\partial w_{yo}}{\partial s} t_y dA = -\frac{121}{245}$$

Los valores numéricos para el caso en estudio son:

$$\begin{aligned} I_x &= 6.3000 & (m^4) \\ A_y &= 0.8033 & (m^2) \\ D_{yy} &= 1.2000 & (m^2) \\ I_{w_{yo}.w_{yo}} &= 0.4030 & (-) \\ D_{w_{yo}.w_{yo}} &= 0.6148 & (m^{-2}) \\ D_{w_{yo}.y} &= -0.4939 & (-) \end{aligned}$$

### 5.3. CÁLCULO ANALÍTICO

Como el problema planteado es de flexión contenida en el plano  $y-z$ , se necesita obtener las ecuaciones particulares para este caso concreto. Para ello se va a partir del campo de movimientos particularizado, con el que se puede obtener por derivación las deformaciones, y por integración de estas la energía de deformación. Las ecuaciones diferenciales que resuelven el problema se obtienen minimizando la energía potencial total.

#### 5.3.1. FLEXIÓN EN EL PLANO $Y-Z$

En el caso particular en que solamente haya flexión en el plano  $y-z$  el campo de movimientos (4.6) se reduce a las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} v_y(x, y, z) &= 1 \cdot u_y(z) \\ v_z(x, y, z) &= y \cdot \theta_x(z) + A_y \cdot w_{yo}(x, y) \cdot \chi_y(z) \end{aligned} \right\}$$

Y a partir del mismo, las tensiones y deformaciones (4.7) (4.8) son:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \cdot \epsilon_z = E \cdot \left( y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} + w_{yo} \cdot A_y \cdot \frac{d\chi_y}{dz} \right) \\ \tau_{sz} &= G \cdot \gamma_{sz} = G \cdot \left( t_y \cdot \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) + A_y \cdot \frac{\partial w_{yo}}{\partial s} \cdot \chi_y \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Denotando las derivadas respecto de la coordenada  $z$  con el símbolo ( $'$ ), la energía de deformación por tensiones normales (4.11) y tangenciales (4.14) para una rebanada de espesor  $dz$  vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dU_\epsilon}{dz} &= \frac{1}{2} \{\epsilon_g\}^t E_o [I] \{\epsilon_g\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \theta'_x, \chi'_y \right\} E_o \left[ \begin{array}{c|c} I_x & 0 \\ \hline 0 & A_y^2 I_{w_{y_0} \cdot w_{y_0}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta'_x \\ \chi'_y \end{array} \right\} \\ \frac{dU_\gamma}{dz} &= \frac{1}{2} \{\gamma_g\}^t G_o [D] \{\gamma_g\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ u'_y, \theta_x, \chi_y \right\} G_o \left[ \begin{array}{c|c|c} D_{yy} & D_{yy} & A_y D_{w_{y_0} \cdot y} \\ \hline D_{yy} & D_{yy} & A_y D_{w_{y_0} \cdot y} \\ \hline A_y D_{w_{y_0} \cdot y} & A_y D_{w_{y_0} \cdot y} & A_y^2 D_{w_{y_0} \cdot w_{y_0}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u'_y \\ \theta_x \\ \chi_y \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Para una pieza de longitud  $L$  la energía de deformación total se obtiene por integración de estas expresiones:

$$U = \int_0^L (dU_\epsilon + dU_\gamma) dz$$

La energía potencial de las fuerzas exteriores, carga repartida  $p_y$  a lo largo de la pieza, y esfuerzos  $Q_y$  y  $M_x$  en los extremos es:

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^L p_y u_y dz \\ &- (Q_y(L) u_y(L) - Q_y(0) u_y(0)) \\ &- (M_x(L) \theta_x(L) - M_x(0) \theta_x(0)) \end{aligned}$$

### 5.3.2. BIMOMENTO DE CORTANTE

En los extremos de una pieza puede existir también una distribución de tensiones dada por un valor impuesto de  $\chi'_y$ . El valor de estas tensiones es:

$$\sigma_z = E \cdot A_y \cdot w_{y_0} \cdot \chi'_y$$

El momento flector al que equivalen se obtiene por integración en la sección:

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA = E_o A_y \left( \int_A \frac{E}{E_o} w_{y_0} y dA \right) \chi'_y = E_o A_y I_{w_{y_0} \cdot y} \chi'_y$$

Pero por la ortogonalización realizada de la función de alabeo se cumple que  $I_{w_{y_0} \cdot y} = 0$ , por lo que el momento flector que originan es nulo. Definiendo como bimomento de cortante a la expresión:

$$\boxed{B_{w_{y_0}} = E_o A_y^2 I_{w_{y_0} \cdot w_{y_0}} \chi'_y} \quad (5.2)$$

Las tensiones se pueden escribir como:

$$\sigma_z = \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_{w_{y_o}}}{A_y^2 I_{w_{y_o}.w_{y_o}}} \cdot A_y w_{y_o}$$

Cuando en la sección se produzcan los movimientos  $v_z$ , estas tensiones acumulan la siguiente energía potencial:

$$\begin{aligned} V &= - \int_A v_z \sigma_z dA = - \int_A (y \theta_x + A_y w_{y_o} \chi_y) \frac{E}{E_o} \frac{B_{w_{y_o}}}{A_y^2 I_{w_{y_o}.w_{y_o}}} A_y w_{y_o} dA = \\ &= - \frac{B_{w_{y_o}}}{A_y I_{w_{y_o}.w_{y_o}}} \left( \theta_x \int_A \frac{E}{E_o} y w_{y_o} dA + A_y \chi_y \int_A \frac{E}{E_o} w_{y_o}^2 dA \right) = \\ &= - \frac{B_{w_{y_o}}}{A_y I_{w_{y_o}.w_{y_o}}} (I_{w_{y_o}.y} \theta_x + A_y I_{w_{y_o}.w_{y_o}} \chi_y) = - B_{w_{y_o}} \chi_y \end{aligned}$$

### 5.3.3. ECUACIONES DIFERENCIALES

La energía potencial total de la pieza como suma entre la energía de deformación y la energía potencial de las fuerzas exteriores, para el caso de flexión en el plano  $y - z$  queda como sigue:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L (dU_\epsilon + dU_\gamma) dz \\ &\quad - \int_0^L p_y u_y dz \\ &\quad - (Q_y(L) u_y(L) - Q_y(0) u_y(0)) \\ &\quad - (M_x(L) \theta_x(L) - M_x(0) \theta_x(0)) \\ &\quad - (B_{w_{y_o}}(L) \chi_y(L) - B_{w_{y_o}}(0) \chi_y(0)) \end{aligned}$$

Estableciendo que las funciones solución son aquellas que hacen mínima esta energía potencial  $\Pi$  para cualquier pequeño incremento de las mismas, se tiene que cumplir:

$$\left. \begin{aligned} \Pi(u_y + \delta u_y) - \Pi(u_y) &= 0 \\ \Pi(\theta_x + \delta \theta_x) - \Pi(\theta_x) &= 0 \\ \Pi(\chi_y + \delta \chi_y) - \Pi(\chi_y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Desarrollando estas ecuaciones se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} G_o D_{yy} (u_y'' + \theta_x') + G_o A_y D_{w_{y_o}.y} \chi_y' &= -p_y \\ -E_o I_x \theta_x'' + G_o D_{yy} (u_y' + \theta_x) + G_o A_y D_{w_{y_o}.y} \chi_y &= 0 \\ -E_o A_y^2 I_{w_{y_o}.w_{y_o}} \chi_y'' + G_o A_y D_{w_{y_o}.y} (u_y' + \theta_x) + G_o A_y^2 D_{w_{y_o}.w_{y_o}} \chi_y &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
 \left( G_o D_{yy} (u'_y + \theta_x) + G_o A_y D_{w_{yo}.y} \chi_y - Q_y \right) \delta u_y \Big|_0^L &= 0 \\
 \left( E_o I_x \theta'_x - M_x \right) \delta \theta_x \Big|_0^L &= 0 \\
 \left( E_o A_y^2 I_{w_{yo}.w_{yo}} \chi'_y - B_{w_{yo}} \right) \delta \chi_y \Big|_0^L &= 0
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales es parecido al planteado por F. Laudiero en 1990 [16], con la diferencia de que dicho investigador considera un valor nulo para la característica mecánica  $D_{w_{yo}.y}$ .

Este sistema de ecuaciones con derivadas de segundo orden, se puede poner en forma de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\{Y'\} = [A] \cdot \{Y\} + \{f\}$$

$$\begin{aligned}
 \{Y\}^t &= \{ u_y, u'_y, \theta_x, \theta'_x, \chi_y, \chi'_y \} \\
 \{Y'\}^t &= \{ u'_y, u''_y, \theta'_x, \theta''_x, \chi'_y, \chi''_y \} \\
 \{f\}^t &= \left\{ 0, -\frac{p_y}{G_o D_{yy}}, 0, 0, 0, 0 \right\}
 \end{aligned}$$

Siendo:

$$[A] = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -a \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & b & b & 0 & c & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & d & d & 0 & e & 0
 \end{array} \right]$$

$$a = \frac{A_y D_{w_{yo}.y}}{D_{yy}} \quad d = \frac{G_o D_{w_{yo}.y}}{A_y E_o I_{w_{yo}.w_{yo}}}$$

$$b = \frac{G_o D_{yy}}{E_o I_x} \quad e = \frac{G_o D_{w_{yo}.w_{yo}}}{E_o I_{w_{yo}.w_{yo}}}$$

$$c = \frac{G_o A_y D_{w_{yo}.y}}{E_o I_x}$$

Calculando los autovalores y autovectores de la matriz  $[A]$  se consigue la solución del sistema homogéneo de ecuaciones, el cual depende de seis parámetros  $c_i$ . Y sumándole una solución particular, se obtiene la solución general que resulta ser:

$$\{Y\} = [\Phi] \{c_i\} + \{Y_p\}$$

$$\{c_i\}^t = \{ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \}$$

$$\lambda = \sqrt{e - a \cdot d}$$

$$k = \frac{6}{b + c}$$

$$[\Phi(z)] = \begin{bmatrix} e^{\lambda z}/\lambda & 1 & z & z^2 & z^3 & -e^{-\lambda z}/\lambda \\ e^{\lambda z} & 0 & 1 & 2z & 3z^2 & e^{-\lambda z} \\ 0 & 0 & -1 & -2z & -3z^2 - k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6z & 0 \\ -e^{\lambda z}/a & 0 & 0 & 0 & -k & -e^{-\lambda z}/a \\ -\lambda e^{\lambda z}/a & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda e^{-\lambda z}/a \end{bmatrix}$$

Siendo la expresión de la solución particular:

$$\{Y_p\} = \left\{ \begin{array}{l} a_{p4} z^4 + a_{p2} z^2 \\ 4 a_{p4} z^3 + 2 a_{p2} z \\ \hline b_{p3} z^3 \\ 3 b_{p3} z^2 \\ \hline c_{p1} z \\ c_{p1} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{p2} = \frac{p_y}{2 G_o} \frac{1}{\left( D_{yy} - \frac{D_{w_{yo}.y}^2}{D_{w_{yo}.w_{yo}}} \right)} \\ c_{p1} = -\frac{2 D_{w_{yo}.y}}{A_y D_{w_{yo}.w_{yo}}} a_{p2} \\ b_{p3} = \frac{G_o D_{yy}}{3 E_o I_x} a_{p2} + \frac{G_o A_y D_{w_{yo}.y}}{6 E_o I_x} c_{p1} \\ a_{p4} = -\frac{b_{p3}}{4} \end{array} \right\}$$

#### 5.3.4. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

De las condiciones de contorno (5.4) de las ecuaciones diferenciales (5.3) se deducen las expresiones de los esfuerzos:

$$\begin{array}{l} M_x = E_o I_x \theta'_x \\ Q_y = G_o D_{yy} (u'_y + \theta_x) + G_o A_y D_{w_{yo}.y} \chi_y \\ B_{w_{yo}} = E_o A_y^2 I_{w_{yo}.w_{yo}} \chi'_y \end{array}$$

Teniendo en cuenta estas expresiones del momento  $M_x$  y el cortante  $Q_y$ , es fácil comprobar que las dos primeras ecuaciones diferenciales del sistema (5.3) equivalen a las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{array}{r} \frac{dQ_y}{dz} + p_y = 0 \\ -\frac{dM_x}{dz} + Q_y = 0 \end{array}$$

### 5.3.5. SOLUCIÓN ANALÍTICA Y APLICACIÓN NUMÉRICA

Para obtener la solución de la viga de dos vanos con carga continua en el primer vano las condiciones de contorno a imponer a la solución general son:

- Movimiento vertical nulo ( $u_y = 0$ ) en los tres puntos de apoyo.
- Momento flector nulo ( $\theta'_x = 0$ ) en los apoyos extremos.
- Alabeo libre en los apoyos extremos ( $\sigma_z = 0$ ), que es lo mismo que imponer la condición de bimomento de cortante nulo ( $\chi'_y = 0$ ).
- Continuidad del giro y de su primera derivada en el apoyo central.
- Continuidad de la intensidad de alabeo y de su primera derivada en el apoyo central.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de las condiciones de contorno de las ecuaciones diferenciales, y poniendo un subíndice 1 y 2 para indicar las funciones solución correspondientes a cada vano, las condiciones de contorno indicadas matemáticamente equivalen a las siguientes:

$$\left. \begin{array}{ll} u_{y1}(0) = 0 & u_{y1}(L) = 0 \\ \theta'_{x1}(0) = 0 & \chi'_{y1}(0) = 0 \\ \\ u_{y2}(0) = 0 & u_{y2}(L) = 0 \\ \theta'_{x2}(L) = 0 & \chi'_{y2}(L) = 0 \\ \\ \theta_{x1}(L) = \theta_{x2}(0) & \theta'_{x1}(L) = \theta'_{x2}(0) \\ \chi_{y1}(L) = \chi_{y2}(0) & \chi'_{y1}(L) = \chi'_{y2}(0) \end{array} \right\}$$

Llamando  $c_i$  y  $d_i$  a los coeficientes de las autofunciones de las soluciones para el vano uno y dos respectivamente, las condiciones de contorno proporcionan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned}
 (1/\lambda) c_1 + c_2 - (1/\lambda) c_6 &= 0 \\
 (e^{\lambda L}/\lambda)c_1 + c_2 + Lc_3 + L^2c_4 + L^3c_5 - (e^{-\lambda L}/\lambda)c_6 &= -a_{p4}L^4 - a_{p2}L^2 \\
 c_4 &= 0 \\
 -(\lambda/a) c_1 + (\lambda/a) c_6 &= -c_{p1} \\
 (1/\lambda) d_1 + d_2 - (1/\lambda) d_6 &= 0 \\
 (e^{\lambda L}/\lambda) d_1 + d_2 + L d_3 + L^2 d_4 + L^3 d_5 - (e^{-\lambda L}/\lambda)d_6 &= 0 \\
 -2 d_4 - 6 L d_5 &= 0 \\
 -(\lambda e^{\lambda L}/a) d_1 + (\lambda e^{-\lambda L}/a) d_6 &= 0 \\
 -c_3 - 2 L c_4 - (3 l^2 + k) c_5 + d_3 + k d_5 &= -b_{p3} L^3 \\
 -2 c_4 - 6 L c_5 + 2 d_4 &= -3 b_{p3} L^2 \\
 -(e^{\lambda L}/a)c_1 - k c_5 - (e^{-\lambda L}/a)c_6 + (1/a)d_1 + k d_5 + (1/a)d_6 &= -c_{p1} L \\
 -(\lambda e^{\lambda L}/a) c_1 + (\lambda e^{-\lambda L}/a) c_6 + (\lambda/a) d_1 - (\lambda/a) d_6 &= -c_{p1}
 \end{aligned} \right\}$$

Utilizando este sistema, se ha obtenido la solución de la ecuación diferencial para los datos concretos propuestos. En los gráficos (5.5) y (5.6) se presentan los valores de las funciones incógnitas  $\{ u_y , \theta_x , \chi_y \}$  y de sus derivadas.

## 5.4. MODELOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Para obtener resultados en puntos intermedios de las paredes de la sección se ha dividido cada una de ellas en ocho partes, tal como se representa en la figura (5.7). Se ha indicado con flechas el sentido de recorrido de los elementos, que es el que determina el sentido positivo de las tensiones tangenciales  $\tau_{sz}$ . La carga continua exterior se aplica dividida en dos cuchillos de carga sobre las almas, para que no aparezcan esfuerzos de flexión local sobre la pared superior de la sección.

En la figura (5.8) se ha representado el modelo con elementos unidimensionales de tres nudos. En el programa utilizado se asigna los seis grados de libertad habituales de una estructura 3D  $\{ u_{xi} , u_{yi} , u_{zi} , \theta_{xi} , \theta_{yi} , \theta_{zi} \}$  a los nudos propios de la barra, y los cinco grados de libertad adicionales del elemento  $\{ \theta'_{zi} , \chi_{xi} , \chi_{yi} , \psi_{di} , \psi'_{di} \}$  a nudos auxiliares colocados en paralelo a las barras, y que sirven también para orientar el eje local  $y$  de la sección. Además de disponer las vinculaciones a los movimientos en los nudos de las barras, se impide el alabeo por distorsión  $\psi_{di} = 0$  en los nudos auxiliares coincidentes con las tres secciones de apoyo.

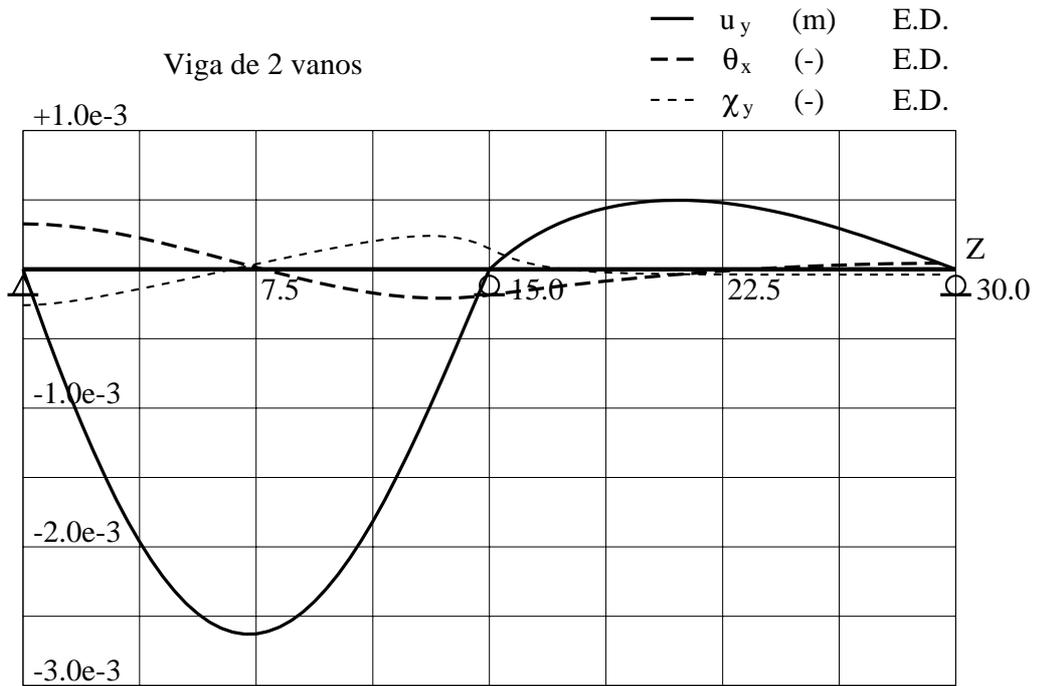


Figura 5.5: Viga de dos vanos. Resultados de la ecuación diferencial (1).

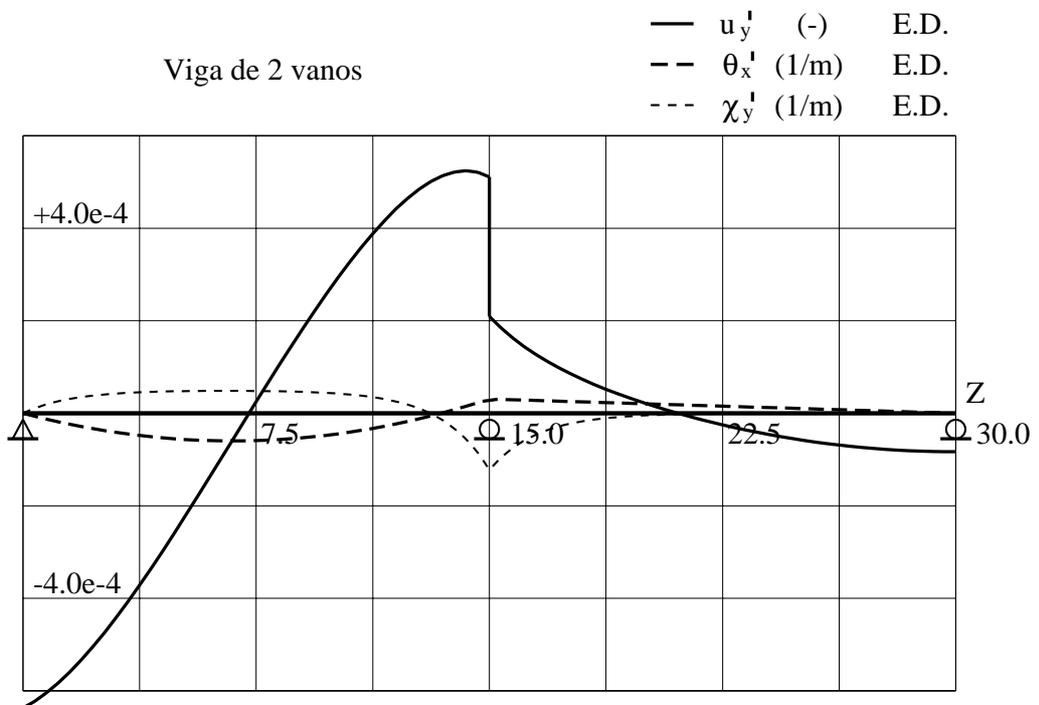


Figura 5.6: Viga de dos vanos. Resultados de la ecuación diferencial (2).

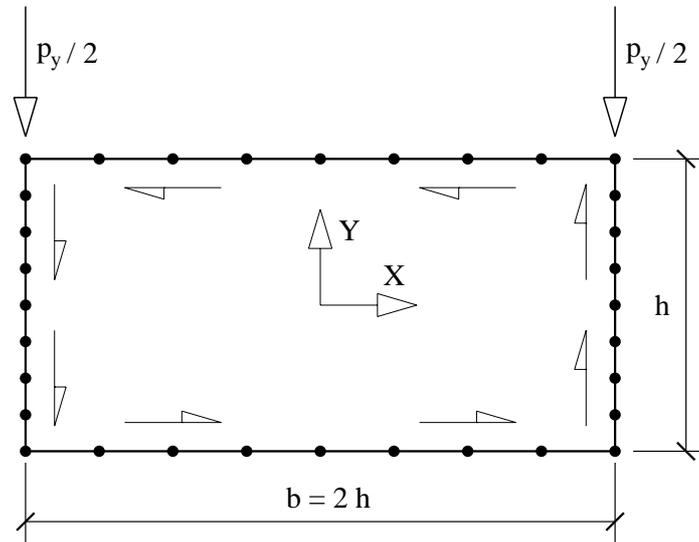


Figura 5.7: Sección: puntos de cálculo de tensiones y sentido de recorrido.

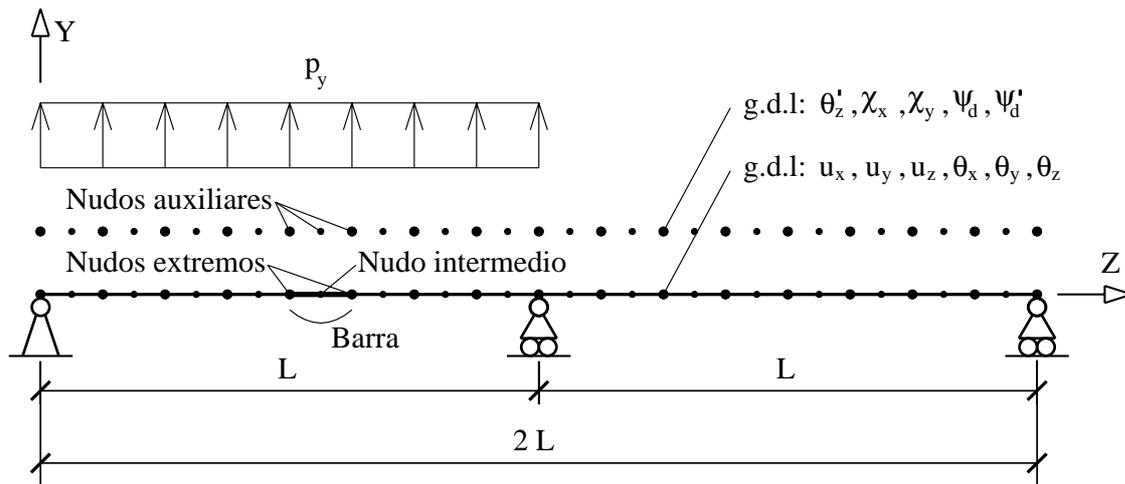


Figura 5.8: Viga de dos vanos: discretización en barras de tres nudos **B3N**.

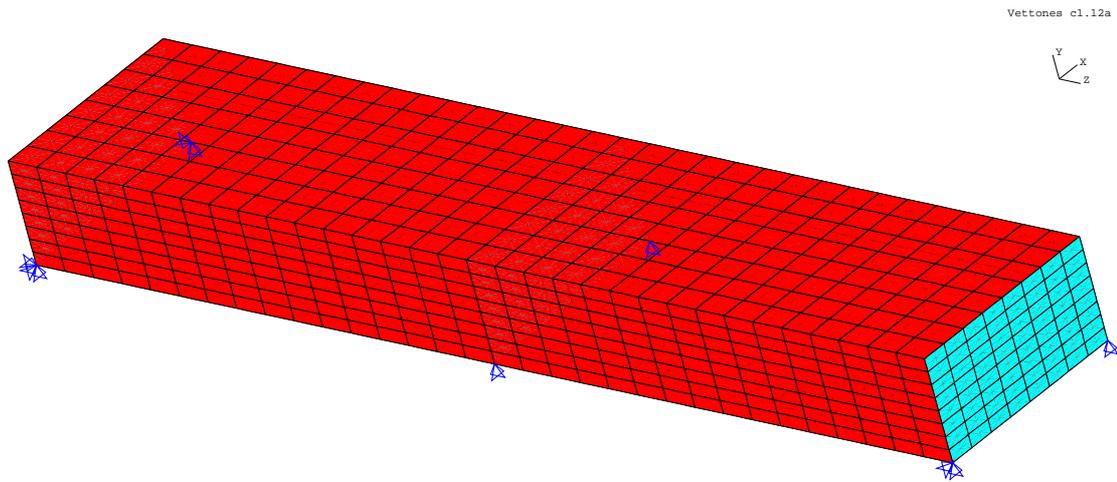


Figura 5.9: Viga de dos vanos: discretización en elementos finitos **MEF** tipo lámina.

El modelo de elementos finitos tipo lámina de ocho nudos, se ha realizado con la misma división en elementos en sentido transversal que la sección, y en sentido longitudinal que el modelo de barras, para de esa forma poder comparar resultados en los mismos puntos. En las tres secciones de apoyo se han dispuesto elementos tipo membrana para evitar su distorsión, pero como sólo presentan rigidez ante esfuerzos en su plano permiten el libre alabeo de la sección. Como los elementos membrana no tienen rigidez en sentido perpendicular a su plano, los grados de libertad afectados, son eliminados del modelo para evitar que haya mecanismos locales que impedirían resolver el problema. En la figura (5.9) se ha representado el modelo de elementos tipo lámina.

Respecto al modelo de bandas finitas que se utiliza, la discretización es la misma que la de la sección, ver figura (5.7). En sentido longitudinal se han utilizado 41 armónicos, con los cuales la descomposición de la carga en armónicos suma el 99.0% de la carga total aplicada. Los resultados del cálculo de bandas finitas son guardados por el programa en forma similar a un modelo de elementos finitos para poder visualizarlos.

## 5.5. ESTUDIO DE CONVERGENCIA

Para analizar la convergencia del elemento finito unidimensional **B3N** hacia la solución analítica de las ecuaciones diferenciales del problema que resuelve, se ha realizado el cálculo con discretizaciones crecientes. En la siguiente tabla, en función del número de barras por vano, se han recogido los valores de las funciones incógnitas en el centro del primer vano, observándose una buena convergencia.

	$u_y(L/2)$	$\theta_x(L/2)$	$\chi_y(L/2)$
$N^\circ$ Barras	(m)	(-)	(-)
1	$-2.139 \cdot 10^{-3}$	$1.653 \cdot 10^{-5}$	$3.992 \cdot 10^{-5}$
2	$-2.574 \cdot 10^{-3}$	$1.044 \cdot 10^{-5}$	$3.629 \cdot 10^{-5}$
4	$-2.622 \cdot 10^{-3}$	$1.276 \cdot 10^{-5}$	$3.741 \cdot 10^{-5}$
8	$-2.627 \cdot 10^{-3}$	$1.302 \cdot 10^{-5}$	$3.720 \cdot 10^{-5}$
16	$-2.627 \cdot 10^{-3}$	$1.304 \cdot 10^{-5}$	$3.718 \cdot 10^{-5}$
<i>Ecu.Dif.</i>	$-2.627 \cdot 10^{-3}$	$1.304 \cdot 10^{-5}$	$3.718 \cdot 10^{-5}$

## 5.6. COMPARACIÓN DE MOVIMIENTOS

En el caso en estudio, en el que solamente hay flexión en el plano  $y - z$ , el campo de movimientos definido en el apartado 4.4 se reduce a las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} v_y(x, y, z) &= 1 \cdot u_y(z) \\ v_z(x, y, z) &= y \cdot \theta_x(z) + w_{yo}(x, y) \cdot A_y \cdot \chi_y(z) \end{aligned} \right\}$$

Teniendo en cuenta las mismas, y mediante el método de descomposición estadístico descrito en el apéndice G, se pueden obtener de los modelos de elementos finitos y bandas finitas los valores numéricos de las funciones  $\{ u_y(z) , \theta_x(z) , \chi_y(z) \}$ .

Las ecuaciones que proporcionan las tensiones normales y tangenciales a partir de las ecuaciones (4.7), (4.8), (4.9) y (4.10) son:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \cdot \left( y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} + w_{yo} \cdot A_y \cdot \frac{d\chi_y}{dz} \right) \\ \tau_{sz} &= G \cdot \left( t_y \cdot \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) + \frac{\partial w_{yo}}{\partial s} \cdot A_y \cdot \chi_y \right) \end{aligned}$$

Que mediante los mismos métodos estadísticos permiten obtener las siguientes funciones  $\{ u_y(z)' + \theta_x(z) , \theta_x(z)' , \chi_y(z) , \chi_y(z)' \}$ . La función  $\chi_y$  se obtiene tanto de la regresión de los movimientos como de las tensiones, por lo que se ha adoptado la media entre ambos valores.

En las siguientes tablas se representa la comparación de los movimientos en puntos de apoyo y centros de vano para los resultados obtenidos mediante: resolución analítica de la ecuación diferencial (**ED**), barra de tres nudos (**B3N**), elementos finitos tipo lámina (**MEF**), bandas finitas tipo lámina (**BF**) y barras convencionales sin deformación por cortante (**C**). En los puntos en que teóricamente los valores son continuos, pero en los que se obtiene dos valores algo diferentes, se ha puesto el valor medio. Y donde los valores teóricamente son discontinuos (caso de  $u_y'$  en el apoyo intermedio), se ha reflejado el valor a cada lado del punto.

Tabla de movimientos:  $u_y$  movimiento vertical,  $\theta_x$  giro de la sección y  $\chi_y$  intensidad de alabeo de cortante.

$z(m)$	Método	$u_y(m)$	$\theta_x(-)$	$\chi_y(-)$
0.0	<i>ED</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$3.274 \cdot 10^{-4}$	$-2.586 \cdot 10^{-4}$
	<b>B3N</b>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$3.274 \cdot 10^{-4}$	$-2.589 \cdot 10^{-4}$
	<i>MEF</i>	$-1.034 \cdot 10^{-4}$	$3.184 \cdot 10^{-4}$	$-2.538 \cdot 10^{-4}$
	<i>BF</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$3.409 \cdot 10^{-4}$	$-2.515 \cdot 10^{-4}$
	<i>C</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$2.790 \cdot 10^{-4}$	--
7.5	<i>ED</i>	$-2.627 \cdot 10^{-3}$	$1.304 \cdot 10^{-5}$	$3.718 \cdot 10^{-5}$
	<b>B3N</b>	$-2.627 \cdot 10^{-3}$	$1.302 \cdot 10^{-5}$	$3.720 \cdot 10^{-5}$
	<i>MEF.</i>	$-2.714 \cdot 10^{-3}$	$1.271 \cdot 10^{-5}$	$3.568 \cdot 10^{-5}$
	<i>BF</i>	$-2.767 \cdot 10^{-3}$	$3.347 \cdot 10^{-5}$	$3.275 \cdot 10^{-5}$
	<i>C</i>	$-1.221 \cdot 10^{-3}$	$-2.325 \cdot 10^{-5}$	--
15.0	<i>ED</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$-1.860 \cdot 10^{-4}$	$1.486 \cdot 10^{-4}$
	<b>B3N</b>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$-1.860 \cdot 10^{-4}$	$1.487 \cdot 10^{-4}$
	<i>MEF</i>	$-1.219 \cdot 10^{-4}$	$-1.853 \cdot 10^{-4}$	$1.470 \cdot 10^{-4}$
	<i>BF</i>	$-3.583 \cdot 10^{-4}$	$-1.793 \cdot 10^{-4}$	$1.416 \cdot 10^{-4}$
	<i>C</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$-1.860 \cdot 10^{-4}$	--
22.5	<i>ED</i>	$4.791 \cdot 10^{-4}$	$-1.304 \cdot 10^{-5}$	$-3.718 \cdot 10^{-5}$
	<b>B3N</b>	$4.797 \cdot 10^{-4}$	$-1.302 \cdot 10^{-5}$	$-3.720 \cdot 10^{-5}$
	<i>MEF</i>	$3.901 \cdot 10^{-4}$	$-2.288 \cdot 10^{-5}$	$-3.608 \cdot 10^{-5}$
	<i>BF</i>	$2.528 \cdot 10^{-4}$	$-3.347 \cdot 10^{-5}$	$-3.275 \cdot 10^{-5}$
	<i>C</i>	$5.232 \cdot 10^{-4}$	$2.325 \cdot 10^{-5}$	--
30.0	<i>ED</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$4.461 \cdot 10^{-5}$	$-3.857 \cdot 10^{-5}$
	<b>B3N</b>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$4.464 \cdot 10^{-5}$	$-3.859 \cdot 10^{-5}$
	<i>MEF.</i>	$1.061 \cdot 10^{-5}$	$3.280 \cdot 10^{-5}$	$-3.506 \cdot 10^{-5}$
	<i>BF</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.776 \cdot 10^{-5}$	$-3.179 \cdot 10^{-5}$
	<i>C</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$9.301 \cdot 10^{-5}$	--

Tabla de derivadas de los movimientos:  $u'_y$  derivada del movimiento vertical,  $\theta'_x$  derivada del giro de la sección y  $\chi'_y$  derivada de la intensidad de alabeo de cortante.

$z(m)$	Método	$u'_y(-)$	$\theta'_x(1/m)$	$\chi'_y(1/m)$
0.0	<i>ED</i>	$-6.371 \cdot 10^{-4}$	$-0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<b>B3N</b>	$-6.433 \cdot 10^{-4}$	$-8.666 \cdot 10^{-7}$	$4.716 \cdot 10^{-6}$
	<i>MEF</i>	$-6.146 \cdot 10^{-4}$	$3.781 \cdot 10^{-7}$	$1.253 \cdot 10^{-7}$
	<i>BF</i>	$-6.418 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
7.5	<i>ED</i>	$2.508 \cdot 10^{-5}$	$-5.903 \cdot 10^{-5}$	$4.813 \cdot 10^{-5}$
	<b>B3N</b>	$2.578 \cdot 10^{-5}$	$-5.979 \cdot 10^{-5}$	$4.831 \cdot 10^{-5}$
	<i>MEF.</i>	$2.432 \cdot 10^{-4}$	$-5.954 \cdot 10^{-5}$	$4.678 \cdot 10^{-5}$
	<i>BF</i>	$2.436 \cdot 10^{-7}$	$-6.045 \cdot 10^{-5}$	$4.666 \cdot 10^{-5}$

$z(m)$	Método	$u'_y(-)$	$\theta'_x(1/m)$	$\chi'_y(1/m)$
15.0	<i>ED</i>	$(5.110 \mid 2.093) \cdot 10^{-4}$	$3.075 \cdot 10^{-5}$	$-1.221 \cdot 10^{-4}$
	<b>B3N</b>	$(5.226 \mid 2.045) \cdot 10^{-4}$	$3.025 \cdot 10^{-5}$	$-1.097 \cdot 10^{-4}$
	<i>MEF</i>	$(5.013 \mid 2.158) \cdot 10^{-4}$	$2.833 \cdot 10^{-5}$	$-1.108 \cdot 10^{-4}$
	<i>BF</i>	$3.475 \cdot 10^{-4}$	$2.418 \cdot 10^{-5}$	$-1.152 \cdot 10^{-4}$
22.5	<i>ED</i>	$-2.508 \cdot 10^{-5}$	$1.537 \cdot 10^{-5}$	$-9.160 \cdot 10^{-7}$
	<b>B3N</b>	$-2.577 \cdot 10^{-5}$	$1.538 \cdot 10^{-5}$	$-7.911 \cdot 10^{-7}$
	<i>MEF</i>	$-1.433 \cdot 10^{-5}$	$1.482 \cdot 10^{-5}$	$2.995 \cdot 10^{-7}$
	<i>BF</i>	$-2.436 \cdot 10^{-7}$	$1.368 \cdot 10^{-5}$	$8.748 \cdot 10^{-8}$
30.0	<i>ED</i>	$-8.319 \cdot 10^{-5}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<b>B3N</b>	$-8.382 \cdot 10^{-5}$	$8.808 \cdot 10^{-9}$	$-6.790 \cdot 10^{-8}$
	<i>MEF</i>	$-6.822 \cdot 10^{-5}$	$-5.812 \cdot 10^{-8}$	$9.357 \cdot 10^{-8}$
	<i>BF</i>	$-5.320 \cdot 10^{-5}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$

A la vista de los resultados se pueden hacer los siguientes comentarios:

- Todas las gráficas, figuras (5.10) a (5.15), son semejantes, tanto en su forma como en sus valores. Excepto las correspondientes al cálculo con barras convencionales por no incluir la deformación por cortante.
- En el movimiento vertical  $u_y$  hay un quiebro en el punto de apoyo intermedio por el salto en el valor del cortante, que produce un salto en el valor de la deformación transversal ( $\gamma_{sz} = du_y/dz + \theta_x$ ) en la que interviene la derivada del movimiento vertical.
- En el apoyo central, en el cálculo con elementos finitos y con bandas finitas, hay deformaciones localizadas en los puntos de apoyo en la parte inferior de las almas, que hacen que toda la sección tenga un movimiento vertical medio de descenso. Este efecto es más acusado en los resultados del modelo de bandas finitas porque en este caso no hay elementos que simulen la existencia de diafragmas.
- En los modelos de barras y de elementos finitos tipo lámina, por no haber continuidad en todas las derivadas de las funciones, a derecha e izquierda de un punto pueden darse valores distintos. En cambio en el modelo de bandas finitas, por la continuidad longitudinal del desarrollo en serie longitudinal no se puede producir un salto, lo cual se aprecia especialmente en los valores de  $u'_y$  que proporciona este método.
- En la gráfica (5.15) de la derivada de la función de intensidad de alabeo de cortante  $\chi'_y$ , se aprecia que en el centro del primer vano donde la carga exterior es constante el valor de  $\chi'_y$  es aproximadamente constante, y que en el segundo vano donde la carga exterior es nula, el valor de  $\chi'_y$  es aproximadamente nulo. Este hecho se debe a que como era previsible, la forma general de la función  $\chi_y$  es semejante a la de cortantes  $Q_y$ , y el de su derivada  $\chi'_y$  semejante a la de la carga exterior  $p_y$ . En los puntos cercanos a los apoyos del primer vano, que es el que tiene la carga repartida, es donde tienen los valores más altos tanto el valor de la función  $\chi_y$  como de su derivada  $\chi'_y$ .

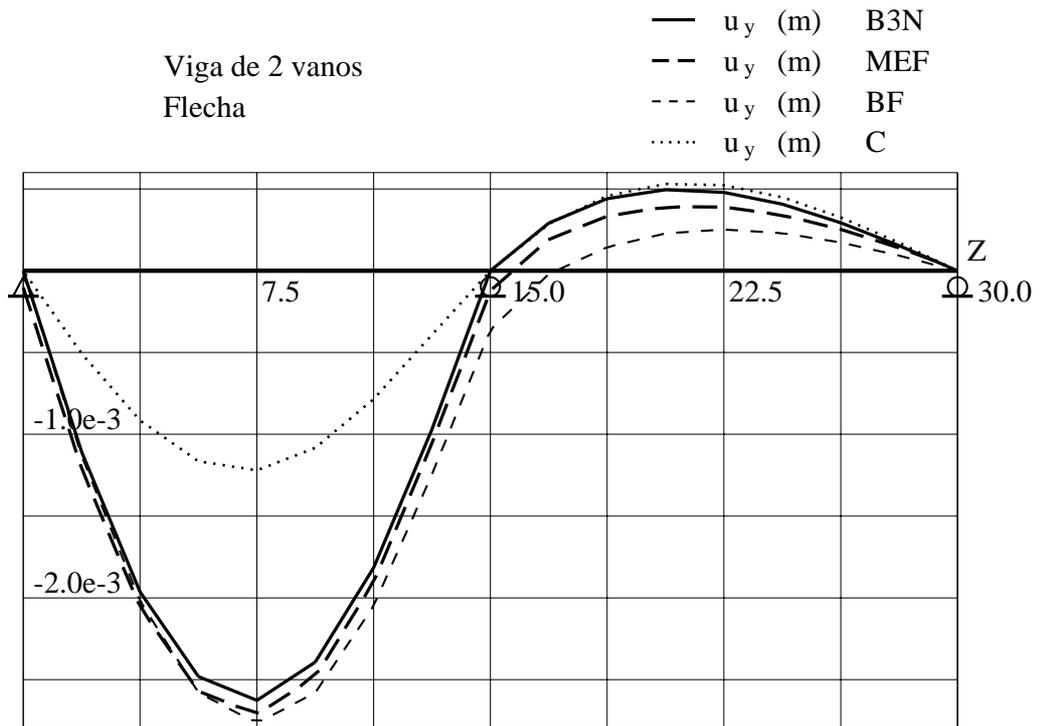


Figura 5.10: Viga de dos vanos: movimiento vertical  $u_y$  (m).

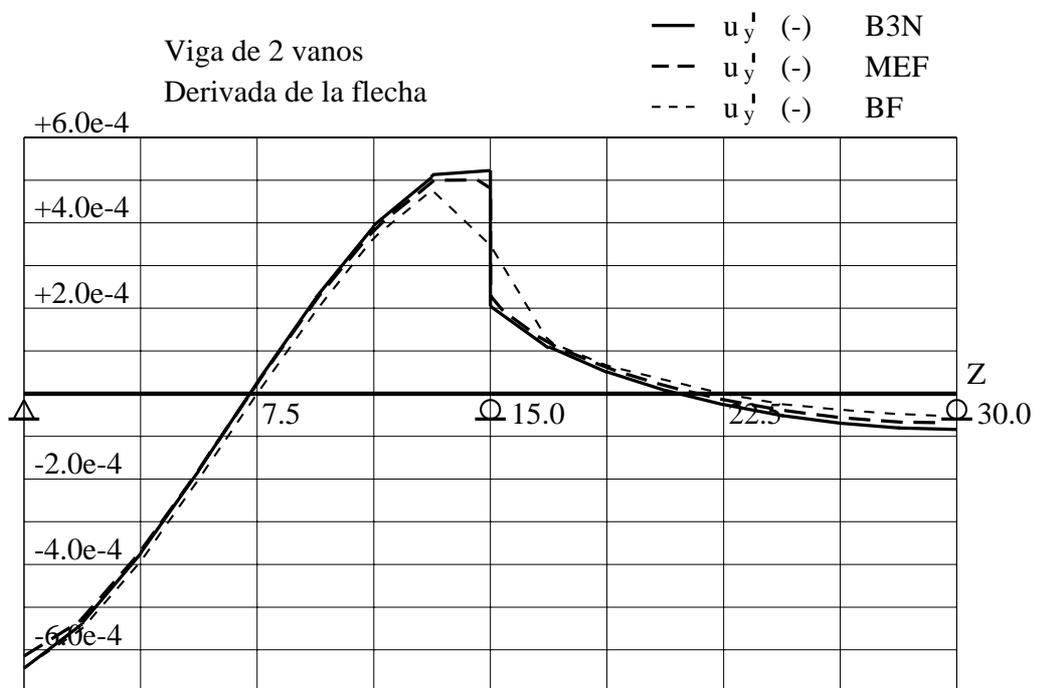


Figura 5.11: Viga de dos vanos: derivada del movimiento vertical  $u_y'$  (-).

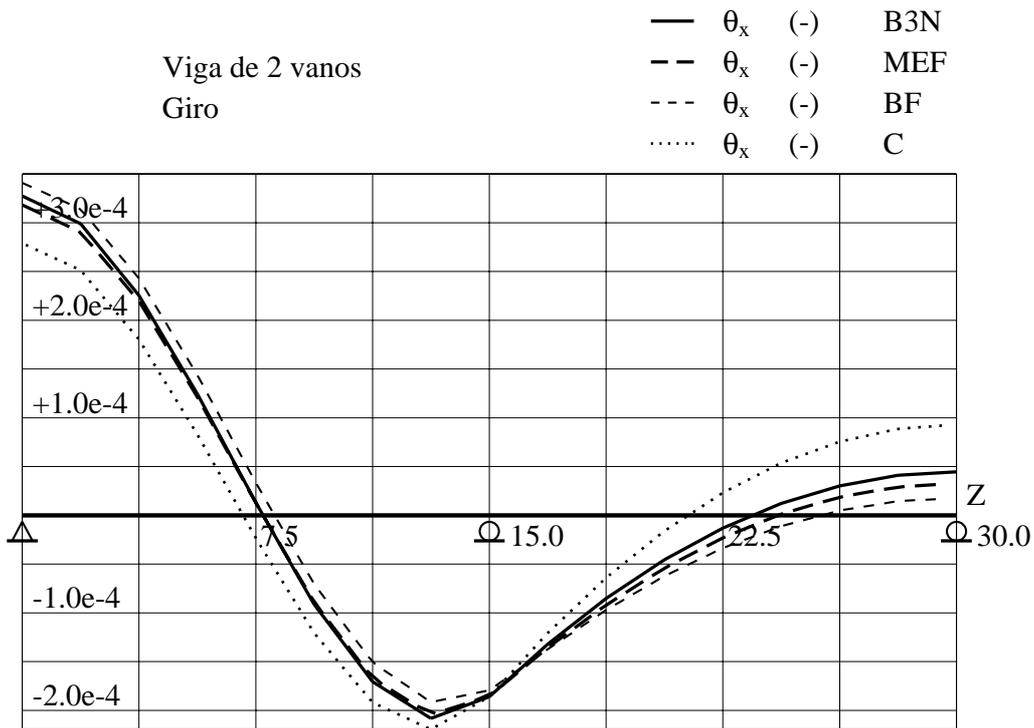


Figura 5.12: Viga de dos vanos: giro  $\theta_x$  (-).

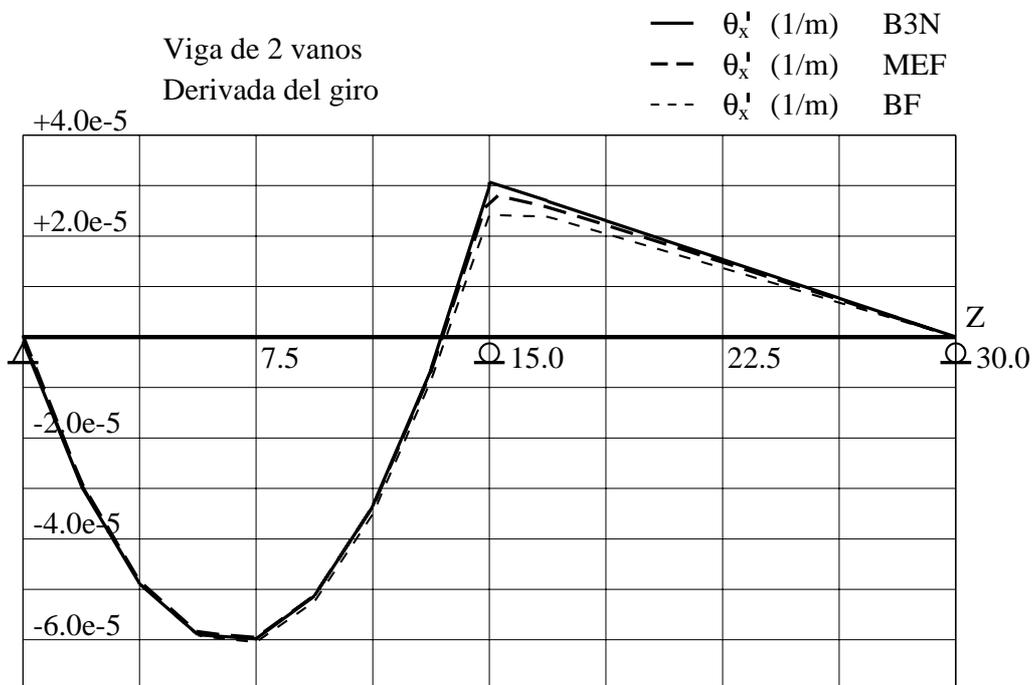


Figura 5.13: Viga de dos vanos: derivada del giro  $\theta'_x$  (1/m).

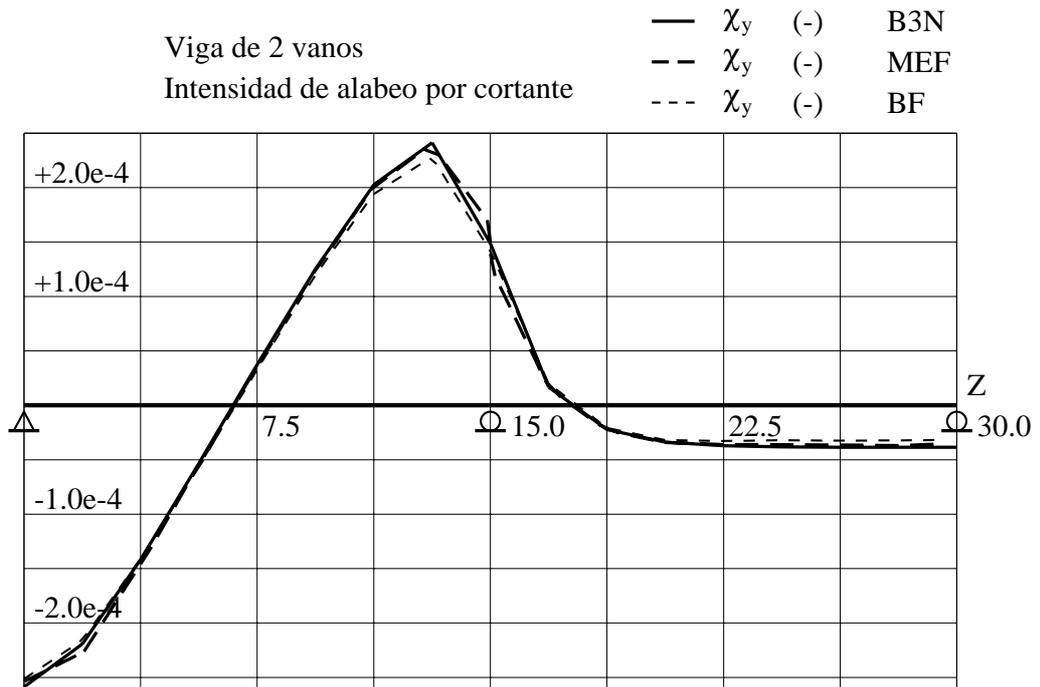


Figura 5.14: Viga de dos vanos: intensidad de alabeo de cortante  $\chi_y$  (-).

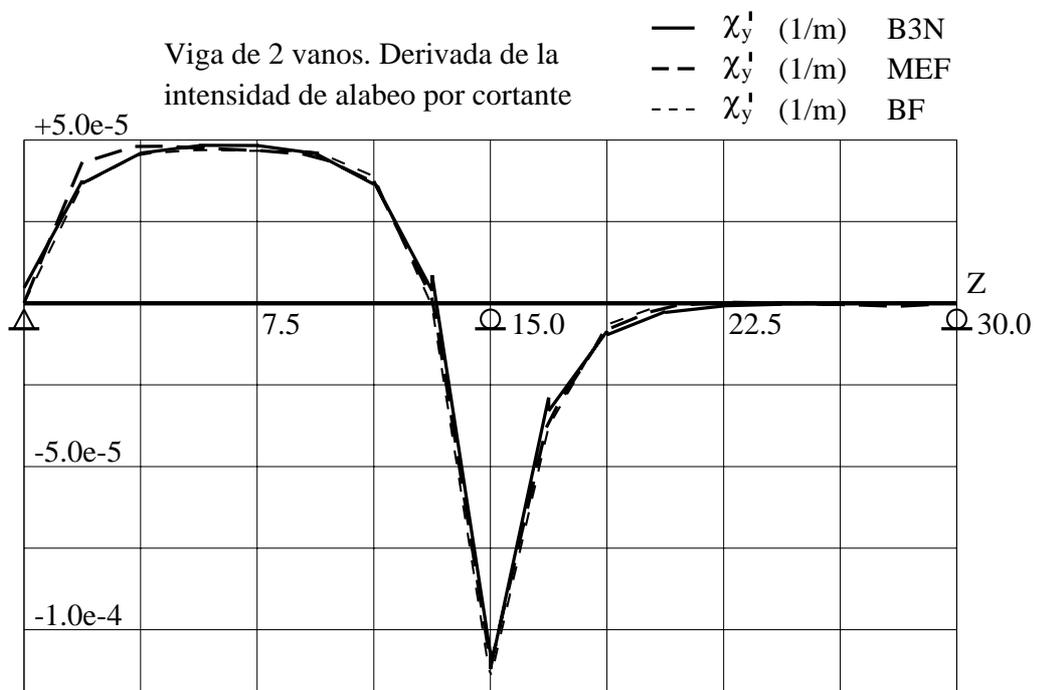


Figura 5.15: Viga de dos vanos: derivada de la intensidad de alabeo de cortante  $\chi_y'$  (1/m).

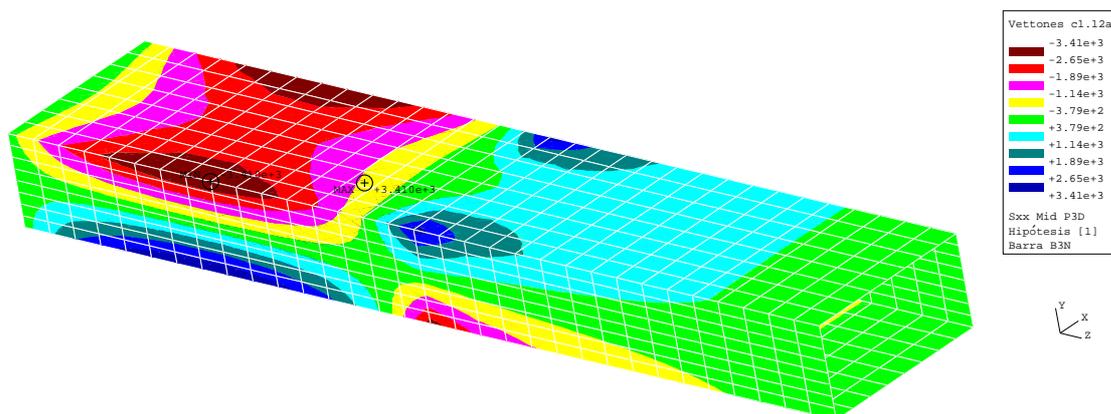


Figura 5.16: Viga de dos vanos. Modelo de barras **B3N**. Tensiones  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ).

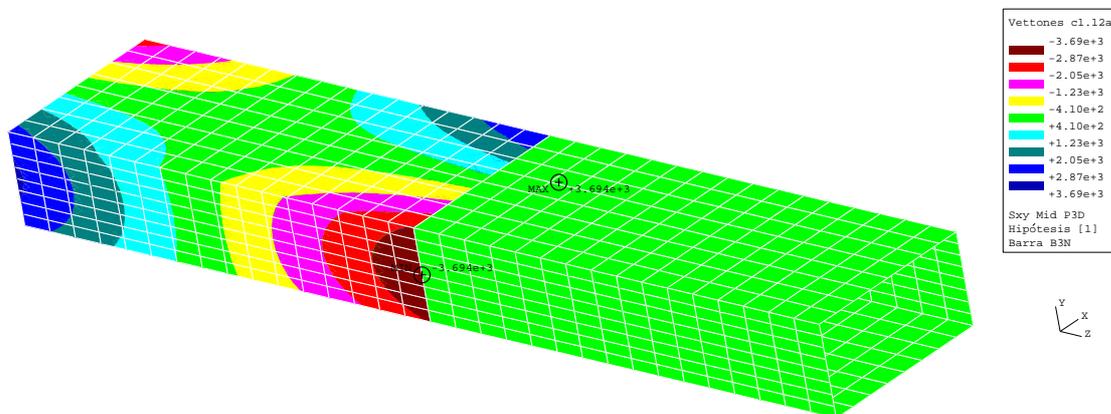


Figura 5.17: Viga de dos vanos. Modelo de barras **B3N**. Tensiones  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ).

## 5.7. COMPARACIÓN DE TENSIONES

Las tensiones normales y tangenciales obtenidas con el modelo de ocho elementos unidimensionales (**B3N**) por vano están representadas en las figuras (5.16) y (5.17). El elemento unidimensional (**B3N**) por tener asociada la geometría de la sección, permite que se pueda proyectar la sección a lo largo de la barra para dibujar el campo de tensiones tridimensionalmente.

Para poder comparar la forma de la distribución de tensiones, en la figura (5.18) se representa las tensiones normales en la sección central del vano primero, y en la sección por el apoyo intermedio. En la sección por centro de vano la coincidencia es muy buena, siendo menor en la sección por el apoyo intermedio, porque el modelo de elementos finitos reproduce los efectos locales en la distribución de tensiones por los apoyos puntuales en el extremo inferior de las almas, que no aparecen en el modelo de barras **B3N**.

En la figura (5.19) se representa la distribución de tensiones tangenciales en las sección de apoyo extremo del primer vano, y en una sección próxima a la misma. En la sección próxima al apoyo la coincidencia es buena, y peor en la sección de apoyo por la existencia

en los resultados de elementos finitos de los efectos locales ya comentados.

Para comparar los valores de las tensiones a lo largo de la viga, en las figuras (5.20) y (5.21) se representa el valor de la tensión  $\sigma_z$  en la esquina superior de la sección y en el centro de la tabla superior. En las figuras (5.22) y (5.23) se representa las tensiones tangenciales  $\tau_{sz}$  en la esquina superior de la sección y en el centro del alma. Las gráficas sugieren los mismos comentarios, buena coincidencia en tramos centrales de los vanos y peor en las zonas próximas a los apoyos.

## 5.8. COMPARACIÓN DE ESFUERZOS

Mediante integración de las tensiones en secciones a lo largo de la viga en los modelos de elementos finitos (**MEF**) y bandas finitas (**BF**) se obtiene los esfuerzos cortante y flector para dichos métodos de cálculo, ya que no proporcionan esfuerzos directamente. Los valores así obtenidos se comparan con los del elemento finito unidimensional (**B3N**) en la figuras (5.24) y (5.25), apreciándose una buena coincidencia de los resultados. Se aprecia valores erróneos del método de bandas finitas en los resultados de cortante alrededor del apoyo central, por la incapacidad de este método de reproducir un salto brusco en un punto.

## 5.9. ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Para completar la verificación de los resultados obtenidos en la figura (5.26) se ha representado los coeficientes de determinación o coeficientes de correlación múltiple al cuadrado  $R^2$ , de la descomposición realizada de los resultados de tensiones del modelo de elementos finitos con las ecuaciones (5.1). Predominan los valores próximos a la unidad que significan que el ajuste es bueno.

Para las tensiones tangenciales  $\tau_{sz}$  el ajuste es peor en los puntos de apoyo por tener los resultados de los elementos finitos efectos locales de concentración de tensiones en los puntos de apoyo. También el ajuste es peor en el centro del primer vano donde el cortante es nulo, porque en ese punto con valores casi nulos de tensiones la diferencia relativa entre resultados es mayor, aunque en valores absolutos sean muy parecidos.

Para las tensiones normales  $\sigma_z$  la descomposición en los modos utilizados es muy buena con valores prácticamente iguales a la unidad a lo largo de toda la viga. El ajuste es peor en las cercanías del apoyo intermedio, que es la zona donde cambian más rápidamente los valores de las tensiones, y además el modelo de elementos finitos reproduce efectos de concentración local de tensiones en puntos de apoyo puntuales (véase la figura 5.18) que los modos resistentes utilizados no pueden reproducir.

En conclusión el modelo de comportamiento desarrollado basado en modos resistentes para una viga de secciones de paredes delgadas en estados de flexión proporciona a lo largo de toda la viga resultados prácticamente iguales a los proporcionados por métodos de cálculo más complejos como el de los elementos finitos, y con una exactitud mucho mayor que los resultados que se obtendrían con la teoría clásica de vigas. Y que sólo hay diferencias mayores en las zonas con puntos de apoyo, por la existencia de concentraciones locales de tensiones que el modelo de viga con modos resistentes no puede reproducir.

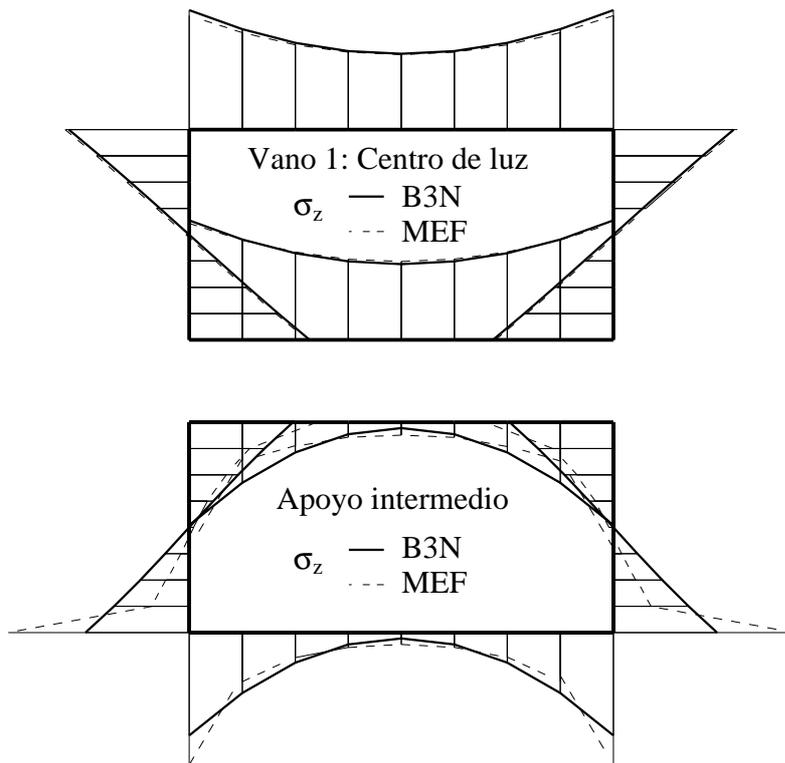


Figura 5.18: Viga de dos vanos. Comparación de tensiones normales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ).

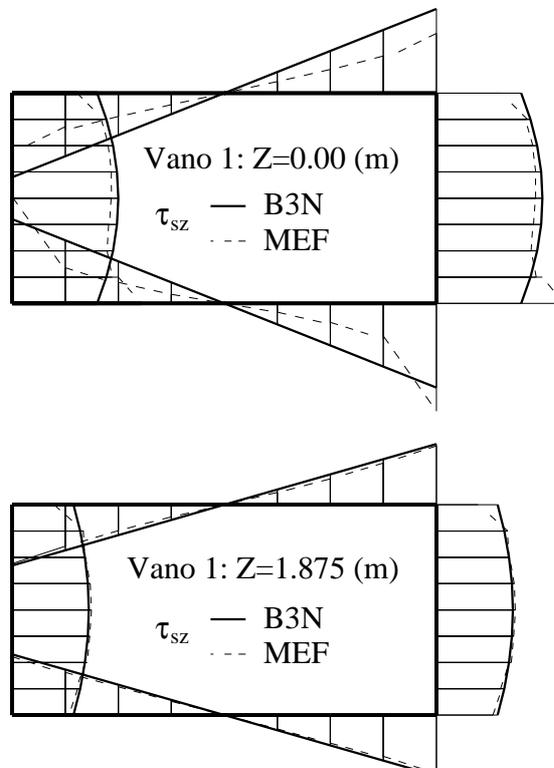


Figura 5.19: Viga de dos vanos. Comparación de tensiones tangenciales  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ).

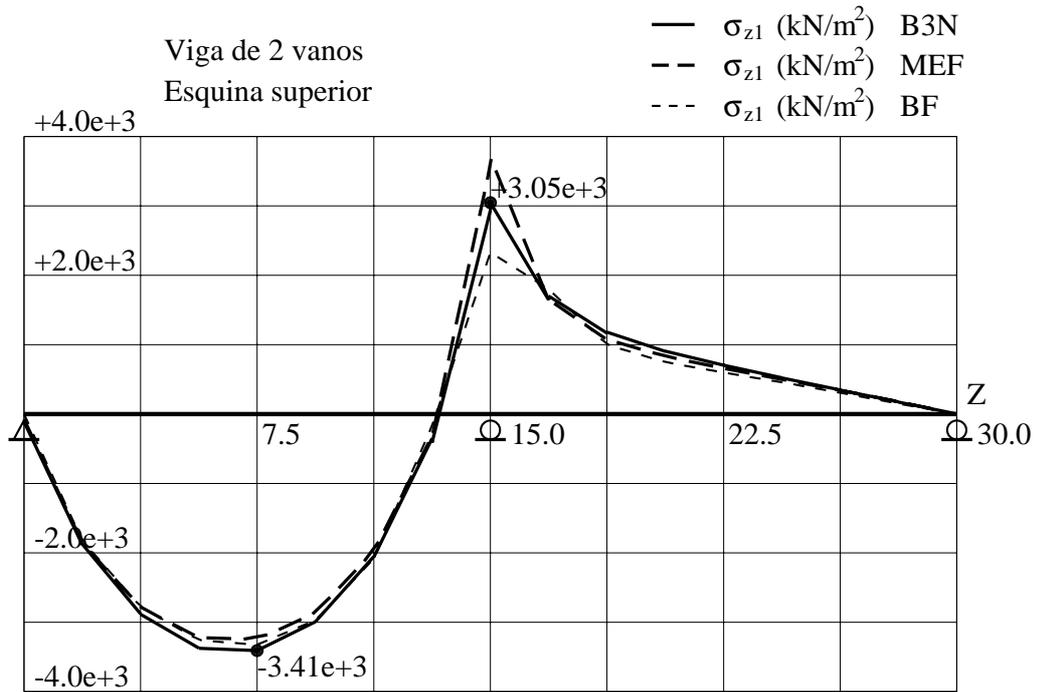


Figura 5.20: Tensión  $\sigma_z$  (kN/m<sup>2</sup>). Esquina superior.

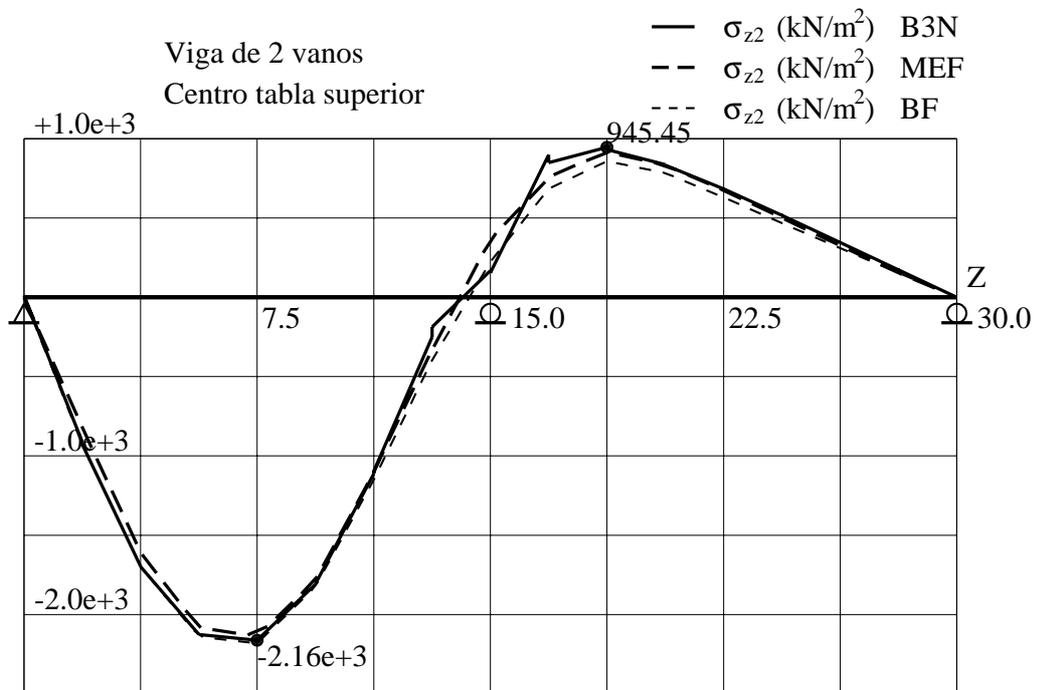


Figura 5.21: Tensión  $\sigma_z$  (kN/m<sup>2</sup>). Centro tabla superior.

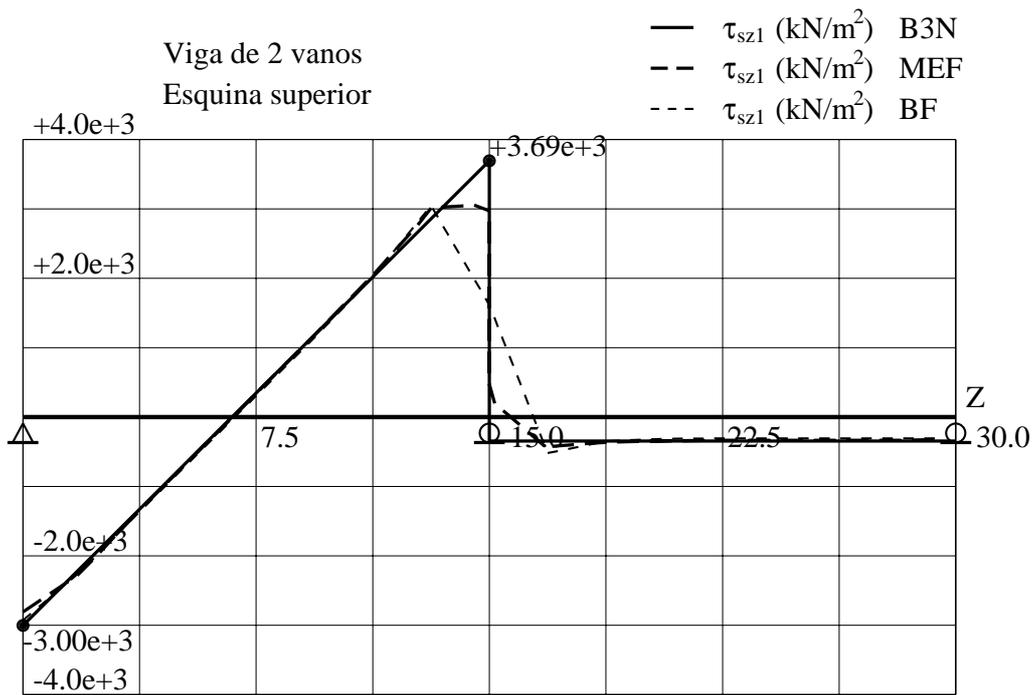


Figura 5.22: Tensión  $\tau_{sz}$  (kN/m<sup>2</sup>). Esquina superior.

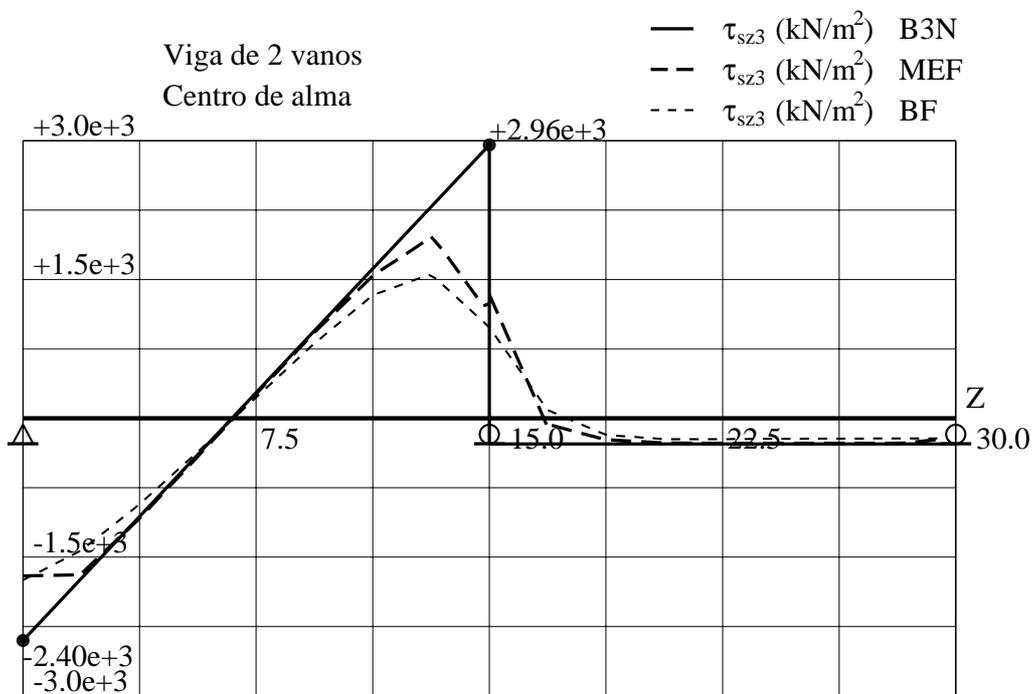


Figura 5.23: Tensión  $\tau_{sz}$  (kN/m<sup>2</sup>). Centro del alma.

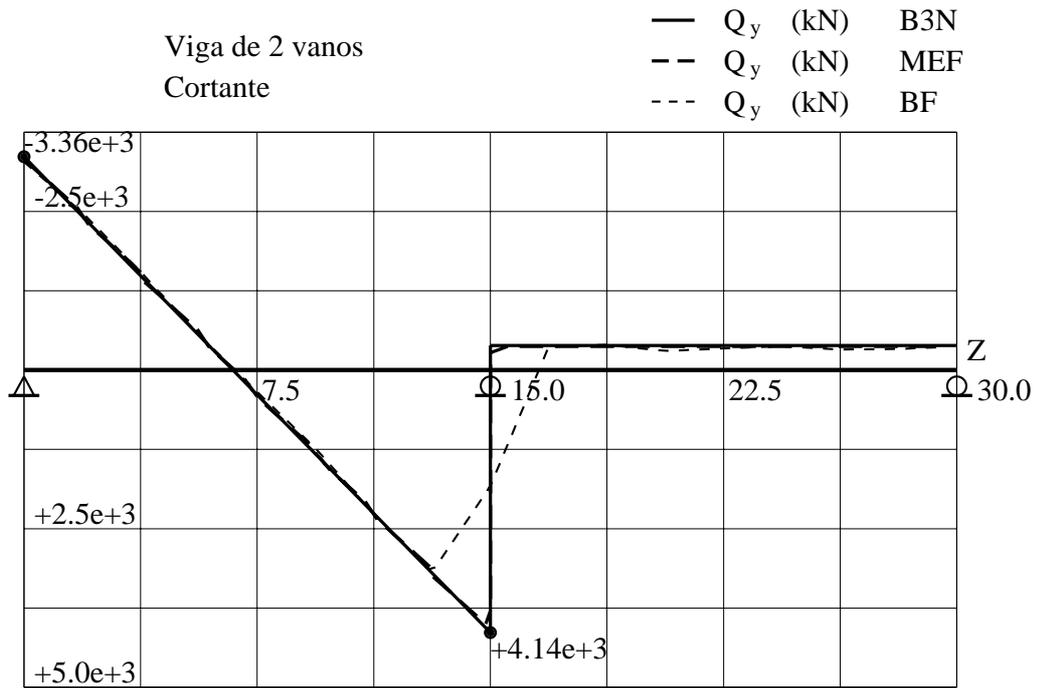


Figura 5.24: Viga de dos vanos. Cortante  $Q_y$  (kN).

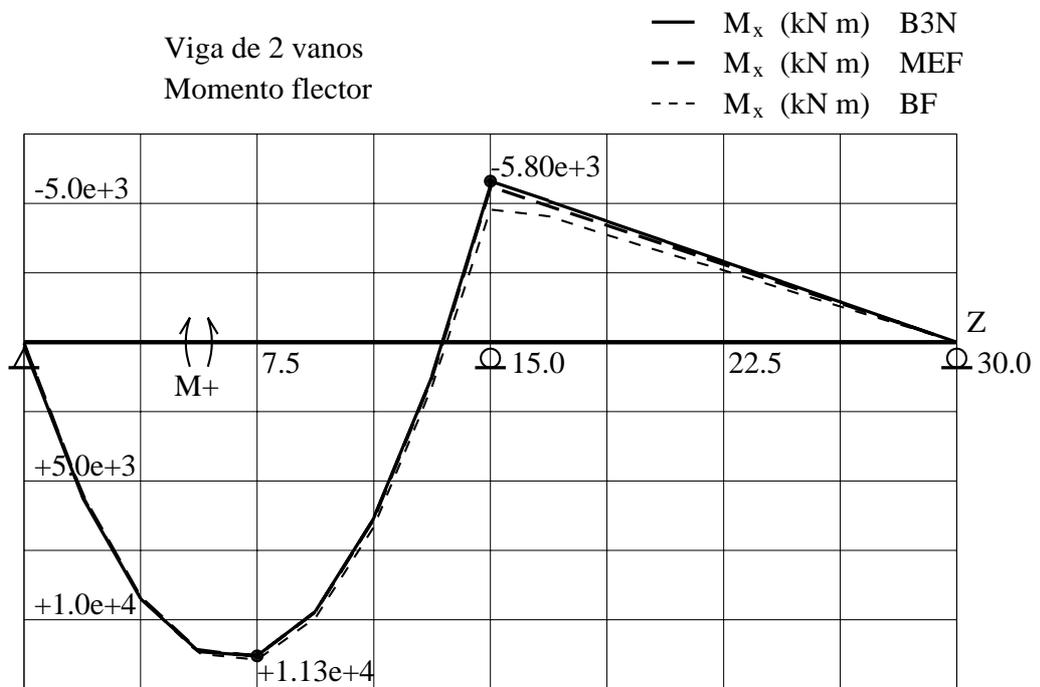


Figura 5.25: Viga de dos vanos. Momento flector  $M_x$  (kN · m).

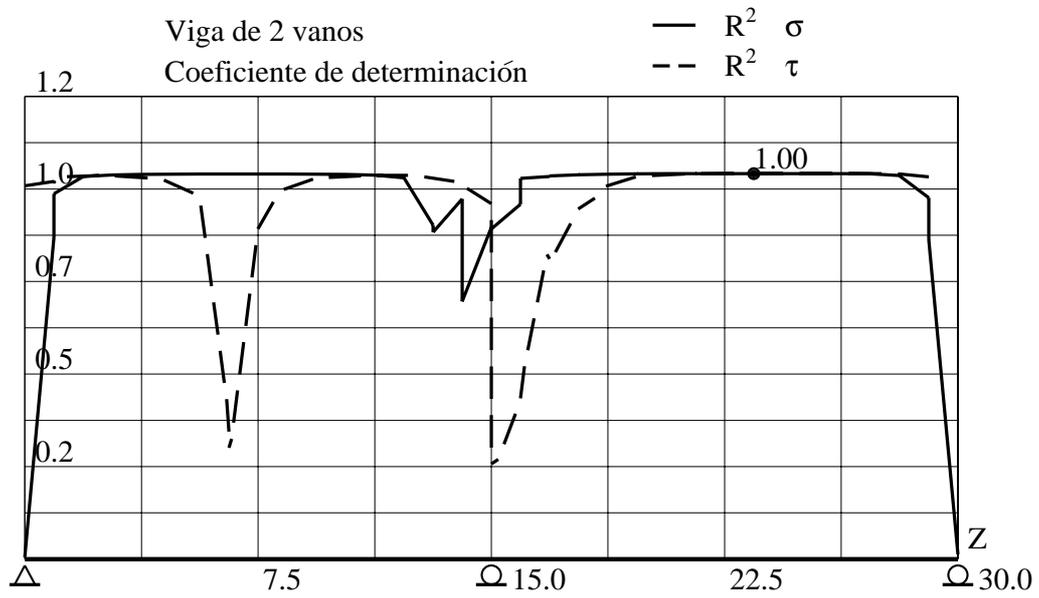


Figura 5.26: Coeficiente de determinación de la regresión de las tensiones normales y tangenciales.

## Capítulo 6

# APLICACIÓN EN PROBLEMAS DE TORSIÓN-DISTORSIÓN

### 6.1. INTRODUCCIÓN

Con el fin de validar el elemento unidimensional desarrollado en el capítulo 4 en la resolución de problemas de torsión-distorsión, se plantea el cálculo de una viga con sección tipo cajón, tal como se ha representado en la figura (6.1). Respecto a los apoyos, se van a considerar dos posibles tipos de vinculaciones, apoyos en horquilla en ambos extremos o empotramientos en los mismos. Se aplican sobre el extremo superior de las almas, cargas repartidas del mismo valor pero de distinto sentido en toda la longitud de la viga. La geometría de la sección tipo está representada en la figura (6.2), para la cual se ha tomado la misma notación que la utilizada por J. Schlaich [43].

Para la realización de una aplicación numérica se han considerado los siguientes valores:

$$\begin{array}{l|l} L = 15.00 \text{ (m)} & p_y = 100.00 \text{ (kN/m)} \\ b = 5.00 \text{ (m)} & b_o = 2.00 \text{ (m)} \\ b_u = 2.00 \text{ (m)} & d = 1.00 \text{ (m)} \\ t_o = 0.20 \text{ (m)} & t_s = 0.20 \text{ (m)} \\ t_u = 0.20 \text{ (m)} & E = 3.00 \cdot 10^7 \text{ (kN/m}^2\text{)} \\ \nu = 0.20 \text{ (-)} & G = 1.25 \cdot 10^7 \text{ (kN/m}^2\text{)} \end{array}$$

Con el fin de verificar los resultados obtenidos, se van a comparar los que se obtienen mediante los siguientes métodos:

- Solución **ED**. Resolución de la ecuación diferencial del problema.
- Solución **B3N**. Elemento finito unidimensional desarrollado.
- Solución **BF**. Método de las bandas finitas.
- Solución **MEF**. Método de los elementos finitos tipo lámina.
- Solución **C**. Barra convencional 3D sólo con torsión uniforme.

En primer lugar, se quiere comprobar que el elemento unidimensional proporciona resultados que convergen a la solución de las ecuaciones diferenciales del problema. Y en

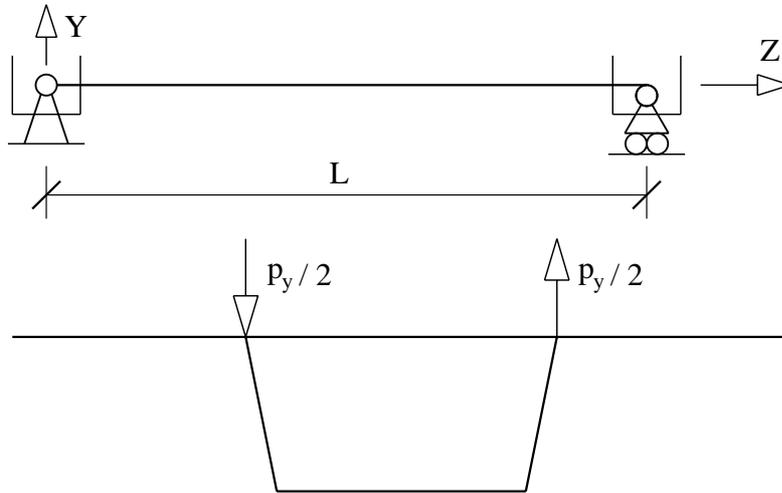


Figura 6.1: Viga cajón con apoyos en horquilla.

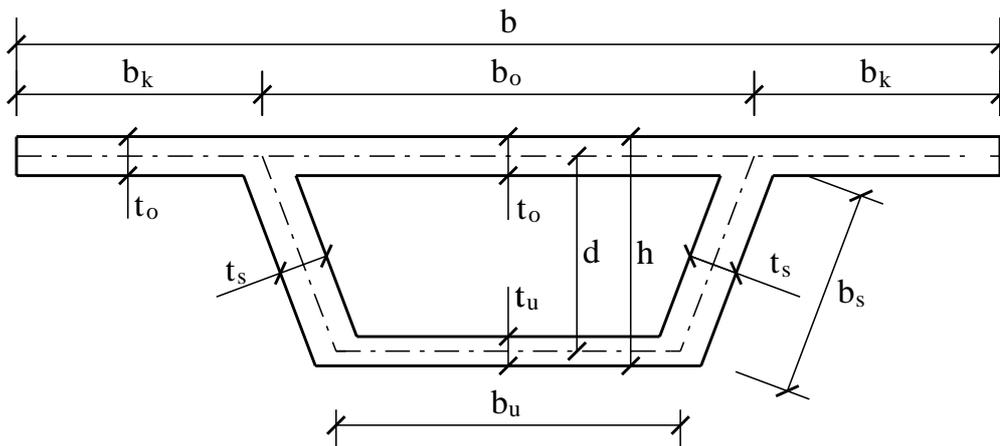


Figura 6.2: Sección cajón. Geometría tipo.

segundo lugar, se quiere validar la teoría e hipótesis planteadas mediante comparación con los resultados de otros métodos de cálculo, en los que no se hagan las hipótesis consideradas.

## 6.2. CARACTERÍSTICAS DE LA SECCIÓN

Para que los puntos de obtención de tensiones sean los mismos en el modelo de elementos unidimensionales **B3N**, que en los modelos de cálculo de elementos finitos y bandas finitas, en todos los casos la sección se ha discretizado como se refleja en la figura (6.3). En ella se indica el sentido de avance considerado en las paredes, y el esquema de fuerzas de distorsión considerado. Como se puede ver, la deformada de distorsión se ha normalizado para que el máximo movimiento vertical sea la unidad, por lo que la función de intensidad de distorsión  $\psi_d$  tiene el significado de ser el movimiento vertical de las almas.

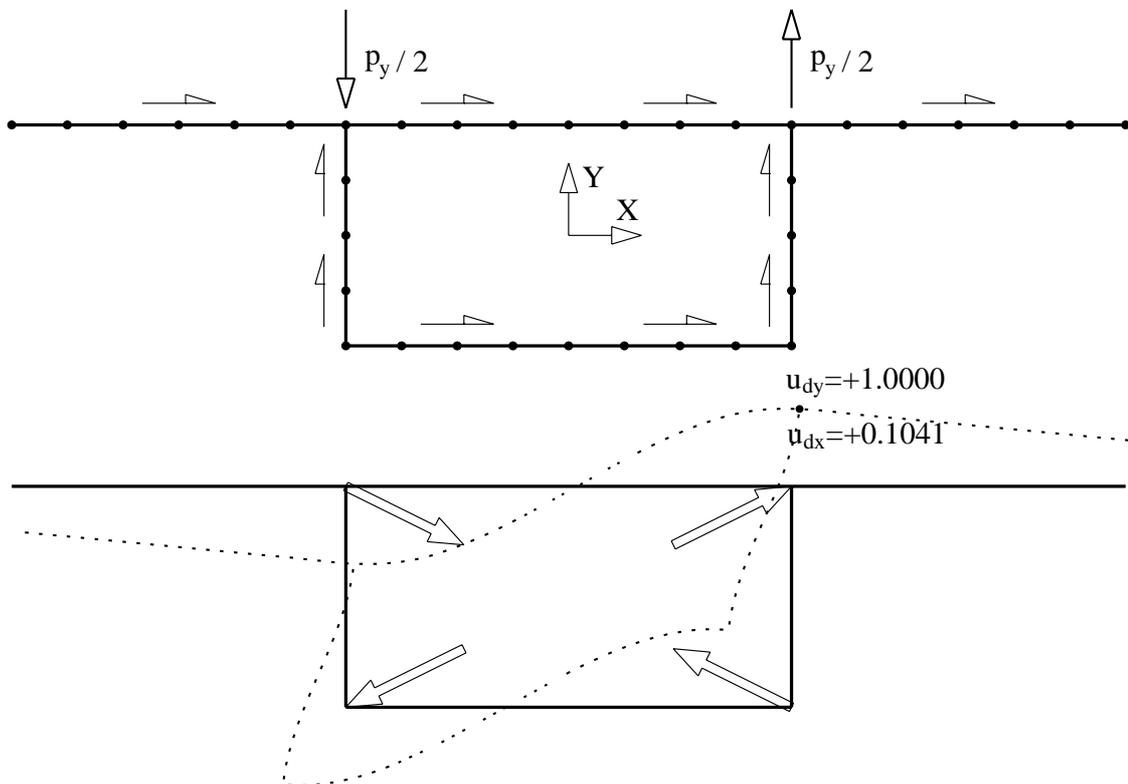


Figura 6.3: Sección cajón. Discretización y deformada de distorsión.

Obtenidos los modos de torsión y distorsión según la metodología del capítulo 3, en las figuras (6.4) y (6.5) se han representado las funciones de alabeo de torsión y sus derivadas, y en las figuras (6.6) y (6.7) las de distorsión. En los dibujos se indica mediante las flechas el sentido que tienen las tensiones tangenciales en las paredes.

Mediante la integración de las funciones de alabeo con las ecuaciones (4.12) y (4.15) se obtienen las siguientes características mecánicas.

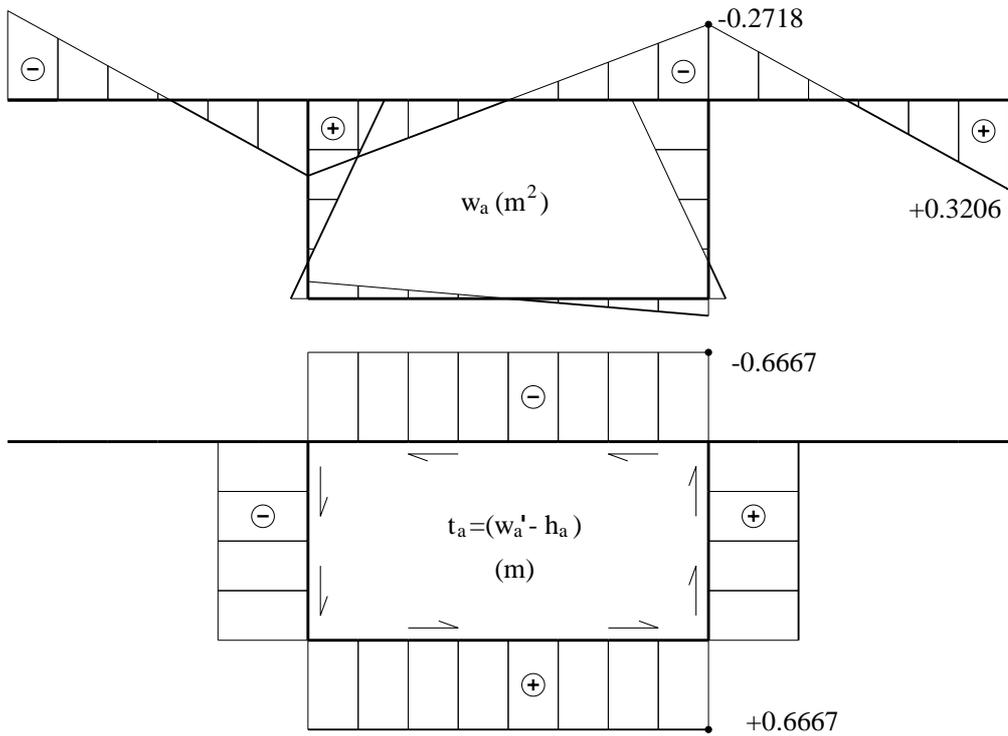


Figura 6.4: Sección cajón. Torsión uniforme.

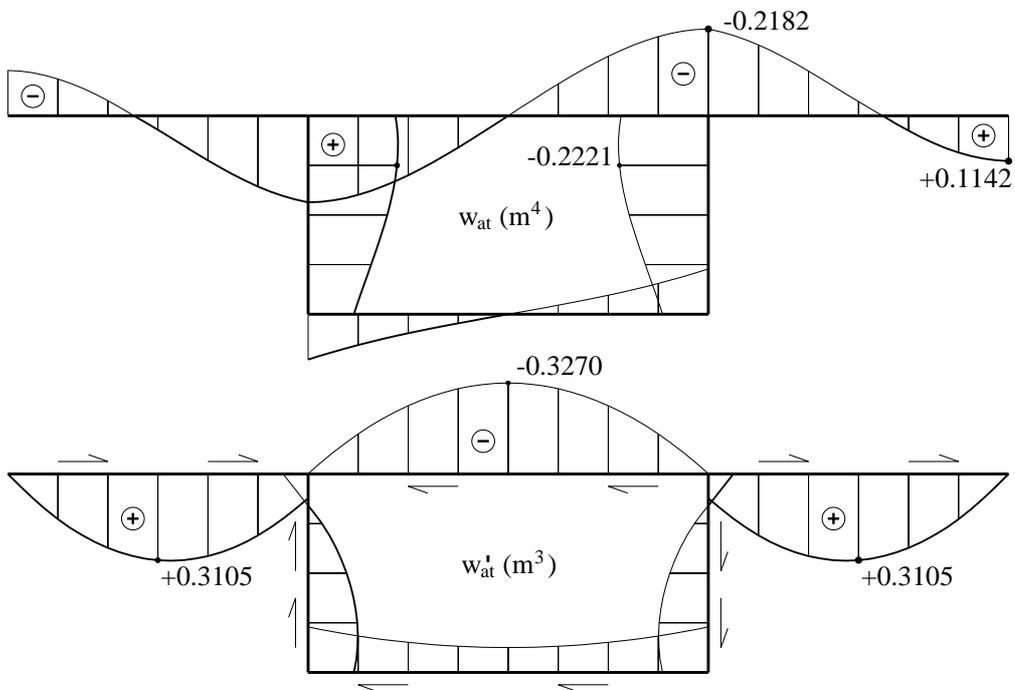


Figura 6.5: Sección cajón. Torsión no uniforme.

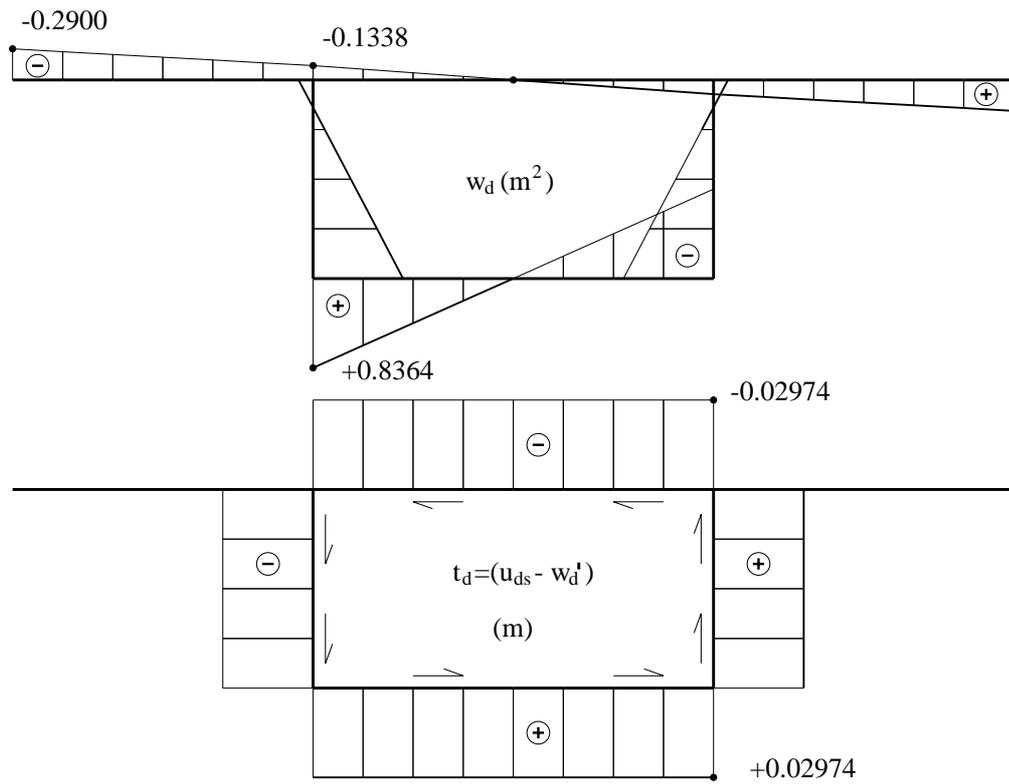


Figura 6.6: Sección cajón. Distorsión uniforme.

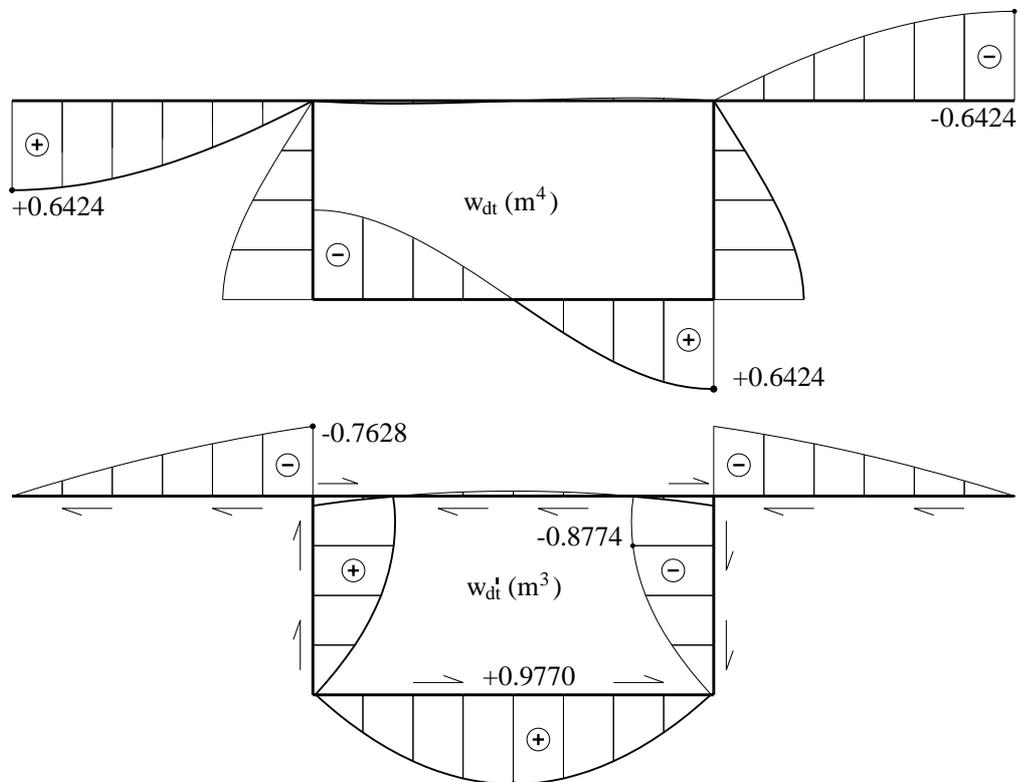


Figura 6.7: Sección cajón. Distorsión no uniforme.

$$\begin{array}{l}
 I_t = 5.3333 \cdot 10^{-1} \quad (m^4) \\
 D_{t_d.t_d} = 1.0613 \cdot 10^{-3} \quad (m^4) \\
 D_{t_d.t_a} = 2.3792 \cdot 10^{-2} \quad (m^4) \\
 K_d = 1.9472 \cdot 10^{+0} \quad (m^2)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 I_a = 3.6377 \cdot 10^{-2} \quad (m^6) \\
 I_d = 2.0457 \cdot 10^{-1} \quad (m^6) \\
 I_{w_d.w_a} = 0.0000 \cdot 10^{+0} \quad (m^6)
 \end{array} \right.$$

Al obtener el modo de distorsión la función de alabeo  $w_d$  se ha ortogonalizado respecto de la función de alabeo de torsión  $w_a$ , por ello la inercia cruzada  $I_{w_a.w_d}$  es nula.

En el cálculo de las tensiones normales se habían despreciado los términos que dependían de  $w_{at}$  y  $w_{dt}$ , y que estaban multiplicados por las cuartas derivadas. En el caso de que si se consideraran, para conocer si aparecen momentos flectores o no, sería necesario obtener las inercias correspondientes, que a la vista de la forma de las funciones de alabeo se obtendría:

$$\begin{array}{ll}
 I_{w_{at}.x} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{at} x dA \neq 0 & I_{w_{at}.y} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{at} y dA = 0 \\
 I_{w_{dt}.x} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{dt} x dA \neq 0 & I_{w_{dt}.y} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{dt} y dA = 0
 \end{array}$$

Por lo que si se consideraran en el cálculo de las tensiones normales los términos en  $w_{at}$  y  $w_{dt}$ , habría momentos flectores de eje vertical.

### 6.3. DISTORSIÓN SEGÚN TEORÍA CLÁSICA

Como los valores obtenidos para el modo distorsión son diferentes a los que se tendrían con la teoría clásica de distorsión, en este apartado se va a tratar de explicar esta diferencia.

En la teoría clásica de distorsión de secciones cajón unicelulares, véase J. Schlaich [43] o J. Manterola [44], se hace la hipótesis de que la función de alabeo  $w_d$  es lineal ( $w'_d = constante$ ) en todo el ancho de la tabla superior de la sección, así como en el resto de paredes. Por otra parte, al calcular la deformada de la sección como pórtico con las fuerzas de distorsión se hace la hipótesis de despreciar las deformaciones por axil, lo que significa que a lo largo de cada pared el movimiento de distorsión en la dirección de la pared es constante ( $u_{ds} = constante$ ). En el modo de torsión uniforme se ha visto que la tensión tangencial viene dada por la ecuación (3.129), que se reproduce a continuación:

$$\tau_{sz} = G \cdot \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} = G \cdot t_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz}$$

En los voladizos de la sección cajón por condición de contorno en el extremo la tensión tangencial tiene que ser siempre nula ( $\tau_{sz} = 0$ ) independientemente del valor de los movimientos de distorsión  $\psi_d$ , por lo que es necesario que se cumpla que:

$$t_d = \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} \right) = 0$$

Por las hipótesis que se han indicado que se hacen en la teoría convencional ambos términos son constantes a lo largo de toda la tabla superior, por lo tanto se deduce que en

la tabla superior comprendida entre almas la tensión tangencial por distorsión uniforme es también nula. Y por el equilibrio de las tensiones tangenciales en los nudos de la sección, se deduce que en el resto de las paredes también son nulas.

En resumen, por las hipótesis utilizadas en la teoría clásica de distorsión en una sección cajón unicelular las tensiones tangenciales por distorsión uniforme son nulas en toda la sección ( $t_d = 0$ ). Es lo mismo que decir que se hace la hipótesis de despreciar la deformación transversal de la sección. Como consecuencia de que ( $t_d = 0$ ) las características mecánicas  $D_{t_d.t_d}$  y  $D_{t_d.t_a}$  son nulas.

$$D_{t_d.t_d} = 0$$

$$D_{t_d.t_a} = 0$$

## 6.4. PLANTEAMIENTO DEL CÁLCULO ANALÍTICO

Para resolver el problema analítico de torsión-distorsión, lo que se va a hacer es partiendo del campo de movimientos expresado en función de los modos, obtener la energía potencial total de la pieza, y minimizando esta se obtienen las ecuaciones diferenciales del problema. Por la complejidad de las ecuaciones no es posible obtener su solución analítica, por lo que se resolverán mediante métodos numéricos para el caso particular planteado.

### 6.4.1. TORSIÓN-DISTORSIÓN

El campo de movimientos definido por las expresiones (4.6), cuando sólo se considera el problema de torsión y distorsión, y si además se desprecia los términos en derivadas terceras, queda como:

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y, z) &= -(y - y_a) \cdot \theta_z + u_{dx} \cdot \psi_d \\ v_y(x, y, z) &= +(x - x_a) \cdot \theta_z + u_{dy} \cdot \psi_d \\ v_z(x, y, z) &= +w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} - w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} \end{aligned} \right\}$$

Y las deformaciones y tensiones, de acuerdo a las ecuaciones (4.7) y (4.8), son:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \cdot \epsilon_z = \\ &= E \left( +w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} - w_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \right) \\ \tau_{sz} &= G \cdot \gamma_{sz} = \\ &= G \left( + \left( \frac{\partial w_a}{\partial s} - h_a \right) \frac{d\theta_z}{dz} + \left( u_{ds} - \frac{\partial w_d}{\partial s} \right) \frac{d\psi_d}{dz} + \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \frac{d^3\theta_z}{dz^3} + \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \frac{d^3\psi_d}{dz^3} \right) = \\ &= G \left( t_a \frac{d\theta_z}{dz} + t_d \frac{d\psi_d}{dz} + w'_{at} \frac{d^3\theta_z}{dz^3} + w'_{dt} \frac{d^3\psi_d}{dz^3} \right) \end{aligned}$$

Las energías de deformación por tensiones normales, tensiones tangenciales, y de distorsión por flexión transversal, despreciando los términos con orden de derivación tres, y denotando las derivadas respecto de la coordenada  $z$  con el símbolo ( $'$ ), vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dU_\epsilon}{dz} &= \frac{1}{2} \{\epsilon_g\}^t E_o [I] \{\epsilon_g\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \theta_z'', \psi_d'' \right\} E_o \left[ \begin{array}{c|c} I_a & -I_{w_a \cdot w_d} \\ \hline -I_{w_a \cdot w_d} & I_d \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_z'' \\ \psi_d'' \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dU_\gamma}{dz} &= \frac{1}{2} \{\gamma_g\}^t G_o [D] \{\gamma_g\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \theta_z', \psi_d' \right\} G_o \left[ \begin{array}{c|c} I_t & D_{t_d \cdot t_a} \\ \hline D_{t_d \cdot t_a} & D_{t_d \cdot t_d} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_z' \\ \psi_d' \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\frac{dU_{K_d}}{dz} = \frac{1}{2} E_o K_d \psi_d^2$$

Para una pieza de longitud  $L$  la energía de deformación total se obtiene por integración de estas expresiones:

$$U = \int_0^L \left( dU_\epsilon + dU_\gamma + dU_{K_d} \right) dz$$

La energía potencial de la carga torsora  $m_t$  y distorsora  $m_d$ , a partir del trabajo dado por las ecuaciones (3.82) y (3.142), viene dada por:

$$V(m_t, m_d) = - \int_0^L \left( m_t \cdot \theta_z + m_d \cdot \psi_d \right) dz$$

### 6.4.2. ENERGÍA POTENCIAL DE LOS BIMOMENTOS

En apartados anteriores se ha visto que el trabajo realizado por los bimomentos cuando actuaban de forma aislada están dados por las ecuaciones (3.112) y (3.167). Se analiza a continuación que ocurre cuando actúan de forma conjunta.

Si en una sección hay aplicados un bimomento torsor  $B_w$ , y un bimomento distorsor  $B_d$ , la tensión normal de acuerdo con las ecuaciones (3.110) y (3.166) viene dada por:

$$\sigma_z = \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_w}{I_a} \cdot w_a + \frac{E}{E_o} \cdot \frac{B_d}{I_d} \cdot w_d$$

La energía potencial de estas tensiones es la integral en la sección del producto de las mismas por el movimiento longitudinal:

$$\begin{aligned} V(B_w, B_d) &= - \int_A \sigma_z \cdot v_z \cdot dA = \\ &= - \int_A \left( \frac{E}{E_o} \frac{B_w}{I_a} w_a + \frac{E}{E_o} \frac{B_d}{I_d} w_d \right) \left( w_a \frac{d\theta_z}{dz} - w_d \frac{d\psi_d}{dz} \right) dA = \\ &= - \left\{ \frac{B_w}{I_a}, \frac{B_d}{I_d} \right\} \int_A \frac{E}{E_o} \left\{ \begin{array}{c} w_a \\ w_d \end{array} \right\} \{w_a, -w_d\} dA \left\{ \begin{array}{c} \theta_z' \\ \psi_d' \end{array} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left\{ \frac{B_w}{I_a}, \frac{B_d}{I_d} \right\} \int_A \frac{E}{E_o} \begin{bmatrix} w_a^2 & -w_a w_d \\ w_a w_d & -w_d^2 \end{bmatrix} dA \begin{Bmatrix} \theta'_z \\ \psi'_d \end{Bmatrix} = \\
 &= - \left\{ \frac{B_w}{I_a}, \frac{B_d}{I_d} \right\} \begin{bmatrix} I_a & -I_{w_a \cdot w_d} \\ I_{w_a \cdot w_d} & -I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta'_z \\ \psi'_d \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

En el caso en que se produzca una variación diferencial de los movimientos, despreciando las variaciones de segundo orden, se obtiene:

$$\delta V(B_w, B_d) = - \left( B_w + B_d \frac{I_{w_a \cdot w_d}}{I_d} \right) \delta \theta'_z - \left( -B_w \frac{I_{w_a \cdot w_d}}{I_a} - B_d \right) \delta \psi'_d$$

En los casos particulares en que se cumpla que ( $I_{w_a \cdot w_d} = 0$ ), la expresión de la energía potencial se simplifica a la siguiente:

$$V(B_w, B_d) = - \left( B_w \cdot \theta'_z - B_d \cdot \psi'_d \right)$$

### 6.4.3. ENERGÍA POTENCIAL DE LOS MOMENTOS

El momento torsor y distorsor, cada uno de ellos suma de una componente uniforme y no uniforme, son equivalentes a una distribución de tensiones tangenciales sobre la sección, que si se multiplican por el movimiento en la dirección de dichas tensiones y se integran en la sección, se puede obtener la energía potencial correspondiente a dichos momentos.

Considerando que en una sección hay aplicados los momentos torsores uniforme  $M_{zu}$  y no uniforme  $M_{zw}$ , y los momentos distorsores uniforme  $M_{du}$  y no uniforme  $M_{dw}$ , la tensión tangencial de acuerdo con las ecuaciones (3.80), (3.106), (3.134) y (3.163) viene dada por:

$$\tau_{sz} = \frac{G}{G_o} \cdot \frac{M_{zu}}{I_t} \cdot t_a - \frac{G}{E_o} \cdot \frac{M_{zw}}{I_a} \cdot w'_{at} - \frac{G}{G_o} \cdot \frac{M_{du}}{D_{td.td}} \cdot t_d + \frac{G}{E_o} \cdot \frac{M_{dw}}{I_d} \cdot w'_{dt}$$

Para obtener el movimiento de la sección en la dirección de la tensión tangencial hay que proyectar los movimientos en ejes globales en la dirección de avance de las paredes de la sección, dada por el vector unitario  $(t_x, t_y)$ .

$$\begin{aligned}
 v_s &= v_x \cdot t_x + v_y \cdot t_y = \\
 &= \left( -(y - y_a) \cdot \theta_z + u_{dx} \cdot \psi_d \right) \cdot t_x + \left( +(x - x_a) \cdot \theta_z + u_{dy} \cdot \psi_d \right) \cdot t_y = \\
 &= - \left( +(y - y_a) \cdot t_x - (x - x_a) \cdot t_y \right) \cdot \theta_z + \left( u_{dx} \cdot t_x + u_{dy} \cdot t_y \right) \cdot \psi_d = \\
 &= - h_a \cdot \theta_z + u_{ds} \cdot \psi_d
 \end{aligned}$$

La energía potencial de las tensiones tangenciales es la integral en la sección, del producto de la tensión por el movimiento en su dirección.

$$V(M_z, M_d) = - \int_A \tau_{sz} \cdot v_s \cdot dA =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left\{ \frac{M_{zu}}{I_t}, \frac{M_{zw}}{I_a}, \frac{M_{du}}{D_{t_d \cdot t_d}}, \frac{M_{dw}}{I_d} \right\} \int_A \left\{ \begin{array}{c} \frac{G}{G_o} t_a \\ \frac{G}{E_o} w'_{at} \\ \frac{G}{G_o} t_d \\ \frac{G}{E_o} w'_{dt} \end{array} \right\} \{-h_a, u_{ds}\} dA \left\{ \begin{array}{c} \theta_z \\ \psi_d \end{array} \right\} \\
 &= - \left\{ \frac{M_{zu}}{I_t}, \frac{M_{zw}}{I_a}, \frac{M_{du}}{D_{t_d \cdot t_d}}, \frac{M_{dw}}{I_d} \right\} \int_A \left[ \begin{array}{c|c} -\frac{G}{G_o} t_a h_a & \frac{G}{G_o} t_a u_{ds} \\ \hline \frac{G}{E_o} w'_{at} h_a & -\frac{G}{E_o} w'_{at} u_{ds} \\ \hline \frac{G}{G_o} t_d h_a & -\frac{G}{G_o} t_d u_{ds} \\ \hline -\frac{G}{E_o} w'_{dt} h_a & \frac{G}{E_o} w'_{dt} u_{ds} \end{array} \right] dA \left\{ \begin{array}{c} \theta_z \\ \psi_d \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

De acuerdo con las identidades (C.1) a (C.8) que se demuestran en el apéndice C, la expresión anterior se puede escribir como:

$$V(M_z, M_d) = - \left\{ \frac{M_{zu}}{I_t}, \frac{M_{zw}}{I_a}, \frac{M_{du}}{D_{t_d \cdot t_d}}, \frac{M_{dw}}{I_d} \right\} \left[ \begin{array}{c|c} I_t & D_{t_d \cdot t_a} \\ \hline I_a & -I_{w_a \cdot w_d} \\ \hline -D_{t_d \cdot t_a} & -D_{t_d \cdot t_d} \\ \hline I_{w_a \cdot w_d} & -I_d \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_z \\ \psi_d \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

En el caso en que se produzca una variación diferencial de los movimientos, despreciando las variaciones de segundo orden, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \delta V(M_z, M_d) &= - \left( M_{zu} + M_{zw} - \frac{D_{t_d \cdot t_a}}{D_{t_d \cdot t_d}} M_{du} + \frac{I_{w_a \cdot w_d}}{I_d} M_{dw} \right) \delta \theta_z \\
 &\quad - \left( \frac{D_{t_d \cdot t_a}}{I_t} M_{zu} - \frac{I_{w_a \cdot w_d}}{I_a} M_{zw} - M_{du} - M_{dw} \right) \delta \psi_d \\
 &= - (M_z \cdot \delta \theta_z + M_d \cdot \delta \psi_d)
 \end{aligned}$$

En los casos particulares en que se cumpliera que ( $D_{t_d \cdot t_a} = 0$ ) y ( $I_{w_a \cdot w_d} = 0$ ), la expresión de la energía potencial se reduciría a la siguiente:

$$V(M_z, M_d) = - (M_{zu} + M_{zw}) \cdot \theta_z - (-M_{du} - M_{dw}) \cdot \psi_d = -M_z \cdot \theta_z - M_d \cdot \psi_d$$

$$\delta V(M_z, M_d) = - (M_z \cdot \delta \theta_z + M_d \cdot \delta \psi_d)$$

## 6.4.4. ECUACIONES DIFERENCIALES

La energía potencial total de una pieza de longitud  $L$  para el caso de un problema con torsión y distorsión, como suma entre la energía de deformación y la energía potencial de las fuerzas exteriores, se puede obtener con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^L (dU_\epsilon + dU_\gamma + dU_{K_d}) dz - \int_0^L (m_t \cdot \theta_z + m_d \cdot \psi_d) dz \\ & + V(B_w, B_d) \Big|_0^L + V(M_z, M_d) \Big|_0^L \end{aligned}$$

Estableciendo que las funciones solución son aquellas que hacen mínima esta energía potencial  $\Pi$ , ante cualquier pequeño incremento de las mismas, se tiene que cumplir:

$$\left. \begin{aligned} \Pi(\theta_z + \delta\theta_z) - \Pi(\theta_z) &= 0 \\ \Pi(\psi_d + \delta\psi_d) - \Pi(\psi_d) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Desarrollando estas ecuaciones queda el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} E_o I_a \theta_z^{IV} - E_o I_{w_d.w_a} \psi_d^{IV} - G_o I_t \theta_z^{II} - G_o D_{t_d.t_a} \psi_d^{II} &= m_t \\ E_o K_d \psi_d - E_o I_{w_d.w_a} \theta_z^{IV} + E_o I_d \psi_d^{IV} - G_o D_{t_d.t_a} \theta_z^{II} - G_o D_{t_d.t_d} \psi_d^{II} &= m_d \end{aligned} \quad (6.4)$$

La primera ecuación diferencial se corresponde con el problema de torsión, y la segunda con el problema de distorsión, apareciendo acopladas a través de dos características mecánicas:  $I_{w_d.w_a}$  y  $D_{t_d.t_a}$ .

Las condiciones de contorno que se obtienen junto con las ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{aligned} & \left( (-M_{zu} + G_o I_t \theta'_z) + (-M_{zw} - E_o I_a \theta_z''') + \right. \\ & \left. + (M_{du} \frac{D_{t_d.t_a}}{D_{t_d.t_d}} + G_o D_{t_d.t_a} \psi'_d) + (-M_{dw} \frac{I_{w_a.w_d}}{I_d} + E_o I_{w_a.w_d} \psi_d''') \right) \delta\theta_z \Big|_0^L = 0 \\ & \left( (-B_w + E_o I_a \theta'_z) + (-B_d \frac{I_{w_a.w_d}}{I_d} - E_o I_{w_a.w_d} \psi_d'') \right) \delta\theta'_z \Big|_0^L = 0 \\ & \left( (-M_{zu} \frac{D_{t_d.t_a}}{I_t} + G_o D_{t_d.t_a} \theta'_z) + (M_{zw} \frac{I_{w_a.w_d}}{I_a} + E_o I_{w_a.w_d} \theta'_z) + \right. \\ & \left. + (M_{du} + G_o D_{t_d.t_d} \psi'_d) + (M_{dw} - E_o I_d \psi_d''') \right) \delta\psi_d \Big|_0^L = 0 \\ & \left( (B_w \frac{I_{w_a.w_d}}{I_a} - E_o I_{w_a.w_d} \theta'_z) + (B_d + E_o I_d \psi_d'') \right) \delta\psi'_d \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Las condiciones de contorno revelan la definición de las *fuerzas generalizadas*. Se denominan *fuerzas generalizadas* porque están relacionadas de forma directa con una distribución de tensiones equivalente.

$$\begin{array}{l}
 M_{zu} = + G_o I_t \theta'_z \qquad M_{du} = - G_o D_{t_d.t_d} \psi'_d \\
 M_{zw} = - E_o I_a \theta'''_z \qquad M_{dw} = + E_o I_d \psi'''_d \\
 B_w = + E_o I_a \theta''_z \qquad B_d = - E_o I_d \psi''_d
 \end{array} \quad (6.6)$$

Sin embargo los momentos torsor  $M_z$  y distorsor  $M_d$ , se denominan *fuerzas no generalizadas*, por no tener una distribución equivalente de tensiones sin recurrir a su descomposición en componentes uniformes y no uniformes.

$$\begin{array}{l}
 M_z = M_{zu} + M_{zw} - \frac{D_{t_d.t_a}}{D_{t_d.t_d}} M_{du} + \frac{I_{w_a.w_d}}{I_d} M_{dw} \\
 M_d = \frac{D_{t_d.t_a}}{I_t} M_{zu} - \frac{I_{w_a.w_d}}{I_a} M_{zw} - M_{du} - M_{dw}
 \end{array} \quad (6.7)$$

El anterior sistema de ecuaciones diferenciales se puede representar en forma matricial como sigue:

$$\left[ \begin{array}{cc} E_o I_a & -E_o I_{w_a.w_d} \\ -E_o I_{w_a.w_d} & E_o I_d \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_z^{IV} \\ \psi_d^{IV} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} G_o I_t & 0 & G_o D_{t_d.t_a} \\ G_o D_{t_d.t_a} & -E_o K_d & G_o D_{t_d.t_d} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} m_t \\ m_d \end{array} \right\}$$

Para poder expresarlo como sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es necesario que el determinante de la primera matriz sea distinto de cero. El determinante se anula cuando se cumple que la función de alabeo de torsión  $w_a$  es proporcional a la función de alabeo de distorsión  $w_d$ , como ocurre con la sección del ejemplo que se incluye en el apéndice D.

Cuando dichas funciones de alabeo no son proporcionales, se puede ortogonalizar la función de alabeo  $w_d$  respecto de la función  $w_a$  por el procedimiento indicado en el apartado 3.11, resultando en ese caso:

$$I_{w_a.w_d} = 0$$

Cuando se cumple que ( $I_{w_a.w_d} = 0$ ) el sistema de ecuaciones diferenciales y sus condiciones de contorno quedan como sigue:

$$\begin{array}{l}
 E_o I_a \theta_z^{IV} - G_o I_t \theta_z^{II} - G_o D_{t_d.t_a} \psi_d^{II} = m_t \\
 E_o K_d \psi_d + E_o I_d \psi_d^{IV} - G_o D_{t_d.t_a} \theta_z^{II} - G_o D_{t_d.t_d} \psi_d^{II} = m_d
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( (-M_{zu} + G_o I_t \theta'_z) + (-M_{zw} - E_o I_a \theta'''_z) + \right. \\
 & \quad \left. + (M_{du} \frac{D_{t_d \cdot t_a}}{D_{t_d \cdot t_d}} + G_o D_{t_d \cdot t_a} \psi'_d) \right) \delta \theta_z \Big|_0^L = 0 \\
 & \quad \left( -B_w + E_o I_a \theta''_z \right) \delta \theta'_z \Big|_0^L = 0 \\
 & \quad \left( (-M_{zu} \frac{D_{t_d \cdot t_a}}{I_t} + G_o D_{t_d \cdot t_a} \theta'_z) + \right. \\
 & \quad \left. + (M_{du} + G_o D_{t_d \cdot t_d} \psi'_d) + (M_{dw} - E_o I_d \psi'''_d) \right) \delta \psi_d \Big|_0^L = 0 \\
 & \quad \left( B_d + E_o I_d \psi''_d \right) \delta \psi'_d \Big|_0^L = 0
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

El cual se puede expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

$$\{Y'\} = [A] \cdot \{Y\} + \{f\}$$

$$\{Y\}^t = \{ \theta_z, \theta_z^I, \theta_z^{II}, \theta_z^{III}, \psi_d, \psi_d^I, \psi_d^{II}, \psi_d^{III} \}$$

$$\{Y'\}^t = \{ \theta_z^I, \theta_z^{II}, \theta_z^{III}, \theta_z^{IV}, \psi_d^I, \psi_d^{II}, \psi_d^{III}, \psi_d^{IV} \}$$

$$\{f\}^t = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{m_t}{E_o I_a}, 0, 0, 0, 0, \frac{m_d}{E_o I_d} \right\}$$

Siendo:

$$[A] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{G_o I_t}{E_o I_a} & 0 & 0 & 0 & \frac{G_o D_{t_d \cdot t_a}}{E_o I_a} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & \frac{G_o D_{t_d \cdot t_a}}{E_o I_d} & 0 & -\frac{E_o K_d}{E_o I_d} & 0 & \frac{G_o D_{t_d \cdot t_d}}{E_o I_d} & 0
 \end{array} \right]$$

Probando con soluciones de la forma  $Y(z) = \{V\} \cdot \exp(\lambda \cdot z)$ , se llega a que los parámetros  $\lambda$  de las soluciones son los autovalores de la matriz  $[A]$ , y el vector  $\{V\}$  el autovector correspondiente. Para calcular los autovalores de la matriz  $[A]$  hay que resolver la ecuación característica siguiente:

$$\lambda^2 ( \lambda^6 - (a + e) \lambda^4 + (a \cdot e - b \cdot c - d) \lambda^2 + a \cdot d ) = 0$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{G_o I_t}{E_o I_a} & b &= \frac{G_o D_{t_d.t_a}}{E_o I_a} \\
 c &= \frac{G_o D_{t_d.t_a}}{E_o I_d} & d &= -\frac{E_o K_d}{E_o I_d} \\
 e &= \frac{G_o D_{t_d.t_d}}{E_o I_d}
 \end{aligned}$$

Esta ecuación tiene directamente una raíz real doble, de valor nulo ( $\lambda = \pm 0$ ). Y teniendo en cuenta que el resto de la ecuación es de sexto grado con todas las potencias pares, se puede resolver como una ecuación de tercer grado para la variable  $\lambda^2$ , y luego hacer las raíces de las soluciones encontradas para dicha ecuación de tercer grado. Normalmente se obtienen: la raíz nula doble ( $\lambda_o = \pm 0$ ), dos raíces reales simples ( $\pm \lambda_1$ ), y cuatro raíces complejas conjugadas ( $\pm \lambda_{2r} \pm \lambda_{2i} i$ ).

La solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales es la siguiente:

$$\{Y_p(z)\} = \left\{ \begin{array}{c} -z^2 \\ \frac{2G_o I_t}{2G_o I_t} \cdot m_t \\ \\ -z \\ \frac{G_o I_t}{G_o I_t} \cdot m_t \\ \\ -1 \\ \frac{G_o I_t}{G_o I_t} \cdot m_t \\ \\ 0 \\ \hline \frac{-1}{E_o K_d} \cdot \frac{G_o D_{t_d.t_a}}{G_o I_t} \cdot m_t + \frac{1}{E_o K_d} \cdot m_d \\ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

En los casos en que se cumpla simultáneamente que:

$$I_{w_d.w_a} = 0 \quad D_{t_d.t_d} = 0 \quad D_{t_d.t_a} = 0$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (6.4), se reduce a las siguientes ecuaciones desacopladas para torsión y distorsión, que son las ecuaciones clásicas para torsión mixta [1] [52] y distorsión [43] [44].

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 E_o I_a \theta_z^{IV} - G_o I_t \theta_z^{II} &= m_t \\
 E_o K_d \psi_d + E_o I_d \psi_d^{IV} &= m_d
 \end{aligned}
 } \quad (6.9)$$

Para que esas tres características mecánicas sean nulas:

- Cuando se puede ortogonalizar la función de alabeo de distorsión  $w_d$  respecto de la de torsión  $w_a$  se cumple que  $\{ I_{w_d.w_a} = 0 \}$ .
- En secciones abiertas por no haber flujo de tensiones tangenciales en circuitos cerrados, se cumple simultáneamente que  $\{ D_{t_d.t_d} = 0, D_{t_d.t_a} = 0 \}$ .
- Como se ha visto en el apartado 6.3, por las hipótesis utilizadas en la teoría clásica para secciones cajón unicelulares, la tensión tangencial por distorsión uniforme es nula ( $t_d = 0$ ), por lo que con dicha teoría resulta nula la característica mecánica  $\{ D_{t_d.t_d} = 0 \}$ .

En el presente apartado se ha llegado al sistema (6.4) de ecuaciones diferenciales acopladas para torsión y distorsión, y se han visto variantes del mismo. En la literatura sobre el tema se pueden encontrar sistemas semejantes de ecuaciones diferenciales acoplados para problemas de torsión y distorsión. Jeppe Jönsson en su trabajo sobre teoría de distorsión de secciones de paredes delgadas [31] presenta un sistema de ecuaciones diferenciales semejante al (6.4), con la diferencia de que no aparece el término con la característica  $I_{w_a.w_d}$ , y que incluye como acción exterior la posibilidad de la existencia de un sistema de bimomentos de torsión y distorsión distribuidos a lo largo de la pieza. Estos últimos por considerar que sólo tienen sentido matemático, pero no sentido físico real, no se han incluido en el presente trabajo.

Li Guohao en su libro [11] incluye también un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado para torsión-distorsión. En este caso si considera el término en  $I_{w_a.w_d}$ , pero no el término en  $D_{t_d.t_a}$ , y también considera la posible existencia de bimomentos distribuidos.

En conclusión el sistema de ecuaciones diferenciales presentado en este trabajo, es respecto a los posibles acoplamientos entre torsión y distorsión, más general que los otros revisados en la literatura sobre el tema.

#### 6.4.5. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Teniendo en cuenta las definiciones de los momentos torsores  $M_{zu}$ ,  $M_{zw}$  y distorsores  $M_{du}$ ,  $M_{dw}$ , véase las ecuaciones (4.30) o (6.6), las ecuaciones diferenciales (6.4) se convierten en las ecuaciones de equilibrio siguientes:

$$\begin{aligned} +M'_{zw} + \frac{I_{w_a.w_d}}{I_d} M'_{dw} + M'_{zu} - \frac{D_{t_d.t_a}}{D_{t_d.t_d}} M'_{du} + m_t &= 0 \\ -E_o K_d \psi_d - \frac{I_{w_a.w_d}}{I_a} M'_{zw} - M'_{dw} + \frac{D_{t_d.t_a}}{I_t} M'_{zu} - M'_{du} + m_d &= 0 \end{aligned}$$

Denominando:

$$M_{kd} = E_o K_d \psi_d$$

Y teniendo en cuenta la definición (6.7) de los torsores  $M_z$  y  $M_d$ , las ecuaciones de equilibrio se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{dz} + m_t &= 0 \\ \frac{dM_d}{dz} - M_{kd} + m_d &= 0 \end{aligned}$$

## 6.5. VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

### 6.5.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA Y APLICACIÓN NUMÉRICA

En este apartado se va a resolver el problema con los datos numéricos propuestos en la introducción del capítulo. Falta por determinar los valores numéricos de las cargas torsora y distorsora aplicadas en la viga.

El valor de las cargas exteriores que actúan sobre la viga son: para la carga torsora el producto del valor de los cuchillos de carga por el movimiento del punto de aplicación para giro unidad, y para la carga distorsora lo mismo, pero tomando el movimiento del modo de distorsión (ver figura (6.3)).

$$m_t = 2 \cdot \left( \frac{p_y}{2} \cdot \frac{B_o}{2} \right) = 2 \cdot \frac{100.0}{2} \cdot \frac{2.0}{2} = 100 \left( \frac{kN \cdot m}{m} \right)$$

$$m_d = 2 \cdot \left( \frac{p_y}{2} \cdot 1.0 \right) = 2 \cdot \frac{100.0}{2} \cdot 1.0 = 100 \left( \frac{kN \cdot m}{m} \right)$$

Para la viga con apoyos en horquilla propuesta al principio de este capítulo, las condiciones de contorno que hay que imponer a la solución general ya obtenida son:

- Giro de torsión  $\theta_z$  y movimiento transversal de distorsión  $\psi_d$  impedidos en ambos extremos.
- Alabeo libre por torsión y distorsión en ambos extremos. Que equivale a que no haya tensiones normales en los extremos, por lo que los bimomentos de torsión  $B_w$  y distorsión  $B_d$  deben ser nulos.

Estas condiciones matemáticamente se traducen en las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \theta_z(0) &= 0 \\ \psi_d(0) &= 0 \\ \theta_x''(0) &= 0 \\ \psi_d''(0) &= 0 \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \theta_z(L) &= 0 \\ \psi_d(L) &= 0 \\ \theta_x''(L) &= 0 \\ \psi_d''(L) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Por la complejidad de las ecuaciones diferenciales, el cálculo hay que hacerlo de forma numérica con la ayuda de un programa de ordenador. En concreto, para el cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz del sistema lineal de ecuaciones diferenciales se ha utilizado los procedimientos numéricos de la librería *Numerical recipes* [53].

La matriz del sistema de ecuaciones diferenciales, y los autovalores de la misma que se han obtenido son:

$$[A] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 6.10895 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.72518 \cdot 10^{-1} & 0.0 \\ \hline 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.84580 \cdot 10^{-2} & 0.0 & -9.51852 \cdot 10^{-2} & 0.0 & 2.16169 \cdot 10^{-3} & 0.0 \end{array} \right]$$

$$\lambda_o = \pm 0 \text{ (doble)}$$

$$\lambda_1 = \pm 2.4720$$

$$\lambda_2 = \pm 0.39272 \pm 0.39272 \cdot i$$

De lo que se deduce que las funciones solución dependen del siguiente tipo de funciones polinómicas y trascendentes:

$$f = f(x^0, x^1, e^{\lambda z}, \cos(\lambda z), \operatorname{seno}(\lambda z), \cos(\lambda_i z) e^{\lambda_r z}, \operatorname{seno}(\lambda_i z) e^{\lambda_r z})$$

Mediante cálculo numérico se han obtenido los coeficientes por los que hay que multiplicar cada autofunción para que se cumplan las condiciones de contorno. La solución general así obtenida se ha evaluado a lo largo de la viga, y se ha representado en los siguientes gráficos:

- Gráfico (6.8). Giro de torsión  $\theta_z$  y movimiento de distorsión  $\psi_d$ .
- Gráfico (6.9). Segunda derivada de dichos movimientos  $\theta_z''$  y  $\psi_d''$ , de las que dependen las tensiones normales por torsión y distorsión.
- Gráfico (6.10). Primera y tercera derivadas del giro de torsión  $\theta_z'$  y  $\theta_z'''$ , de las que dependen las tensiones tangenciales por torsión uniforme y no uniforme respectivamente.
- Gráfico (6.11). Primera y tercera derivadas del movimiento de distorsión  $\psi_d'$  y  $\psi_d'''$ , de las que dependen las tensiones tangenciales por distorsión uniforme y no uniforme.
- Gráfico (6.12). Comparación de la segunda derivada  $\theta_z''$  y cuarta derivada  $\theta_z^{IV}$  del giro de torsión.
- Gráfico (6.13). Comparación de la segunda derivada  $\psi_d''$  y cuarta derivada  $\psi_d^{IV}$  del movimiento de distorsión.

En posteriores apartados se estudiará la bondad de la solución comparándola con otras soluciones, como por ejemplo con una solución con elementos finitos tipo lámina. En el desarrollo teórico de las ecuaciones diferenciales se hicieron algunas simplificaciones, despreciando el valor de unos términos frente a otros, a continuación se va a revisar si son apropiadas estas simplificaciones realizadas o no.

En el planteamiento teórico del problema de torsión-distorsión, al obtener la energía de deformación por tensiones tangenciales se ha despreciado la energía debida a las componentes no uniformes que dependen de las derivadas terceras de las funciones incógnitas  $\theta_z'''$  y  $\psi_d'''$ , respecto de las componentes uniformes que dependen de las derivadas primeras  $\theta_z'$  y  $\psi_d'$ . Al respecto véase la ecuación (3.86) y siguientes, y la ecuación (3.146) y compárese con los términos que aparecen en la expresión (6.2) de la energía de deformación por tensiones tangenciales.

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} = & + t_a(x, y) \cdot \theta_z'(z) + w'_{at}(x, y) \cdot \theta_z'''(z) \\ & + t_d(x, y) \cdot \psi_d'(z) + w'_{dt}(x, y) \cdot \psi_d'''(z) \end{aligned}$$

Para comprobar la bondad de esta hipótesis, en los gráficos (6.10) y (6.11) se han confrontado dichas derivadas, viéndose que en los extremos de la viga, que es donde mayor valor tienen las derivadas terceras, estas son del orden de  $1/3$  del valor de la primera. En la comparación también hay que tener en cuenta que al obtener las deformaciones las derivadas aparecen multiplicadas por coeficientes, en el ejemplo en estudio en el caso de los coeficientes de las primeras derivadas  $t_a$  es mayor que  $w'_{at}$ , y para los de las segundas derivadas  $t_d$  es sensiblemente más pequeño que  $w'_{dt}$ , y en el caso de utilizar la teoría clásica de distorsión ( $t_d = 0$ ).

También en dicho planteamiento se desprecia las derivadas cuartas  $\theta_z^{IV}$  y  $\psi_d^{IV}$ , respecto de las segundas  $\theta_z''$  y  $\psi_d''$ , en la energía de deformación por tensiones normales. Véase la ecuación (3.90) y siguientes, y la ecuación (3.145) y siguientes, y compárese con los términos de la energía de deformación por tensiones normales (6.1).

$$\begin{aligned} \epsilon_z = & + w_a(x, y) \cdot \theta_z''(z) + w_{at}(x, y) \cdot \theta_z^{IV}(z) \\ & - w_d(x, y) \cdot \psi_d''(z) + w_{dt}(x, y) \cdot \psi_d^{IV}(z) \\ \approx & + w_a(x, y) \cdot \theta_z''(z) - w_d(x, y) \cdot \psi_d''(z) \end{aligned}$$

En los gráficos (6.12) y (6.13) se comparan dichas derivadas, viéndose que las segundas derivadas son nulas en los extremos por las condiciones de contorno impuestas, por lo que en esta zona no se puede hacer una comparación relativa respecto de la derivada cuarta que no es nula. Alejándose de los apoyos los valores de la derivada segunda crecen rápidamente, mientras los de la cuarta decrecen. En ambos casos para obtener la deformación los coeficientes que multiplican a la derivada segunda son algo mayores que los que multiplican a la derivada cuarta.

Como conclusión se puede decir que las derivadas despreciadas tienen en este caso valores más pequeños, pero tampoco se puede decir que sean mucho más pequeños.

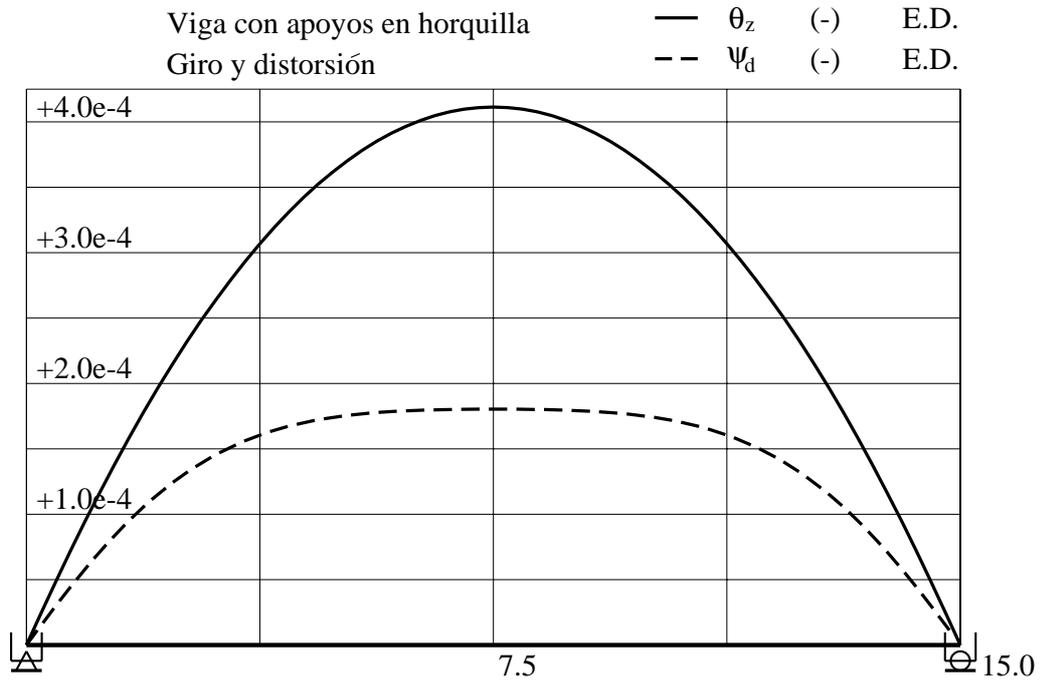


Figura 6.8: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (1).

$$v_x = -(y - y_a) \cdot \theta_z + u_{dx} \cdot \psi_d \quad ; \quad v_y = +(x - x_a) \cdot \theta_z + u_{dy} \cdot \psi_d$$

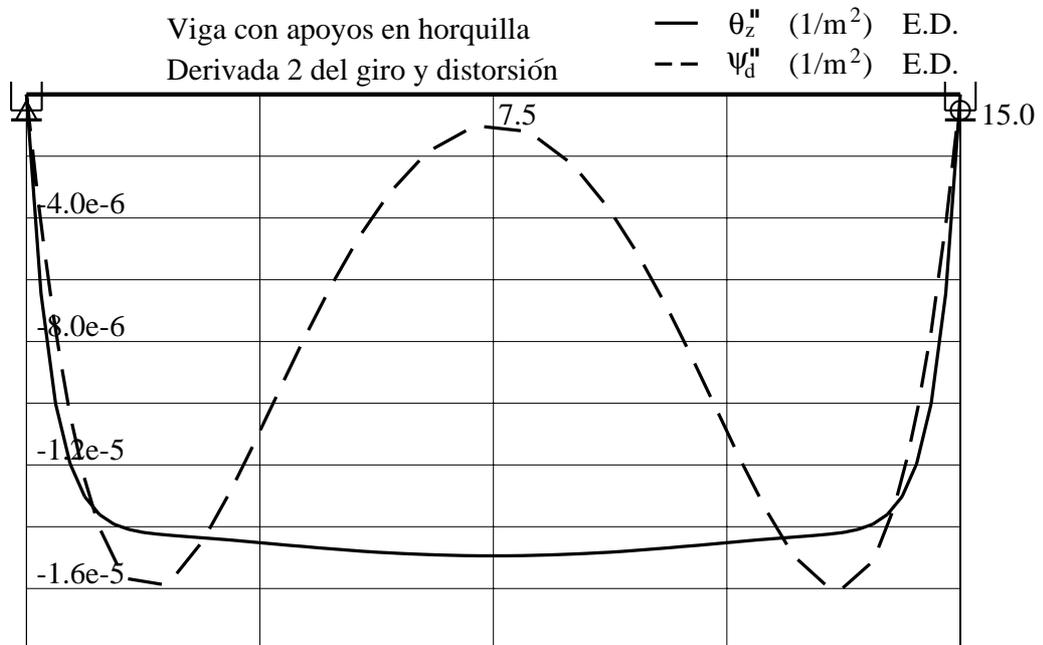


Figura 6.9: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (2).

$$B_w = E_o I_a \theta_z'' \quad ; \quad B_d = -E_o I_d \psi_d''$$

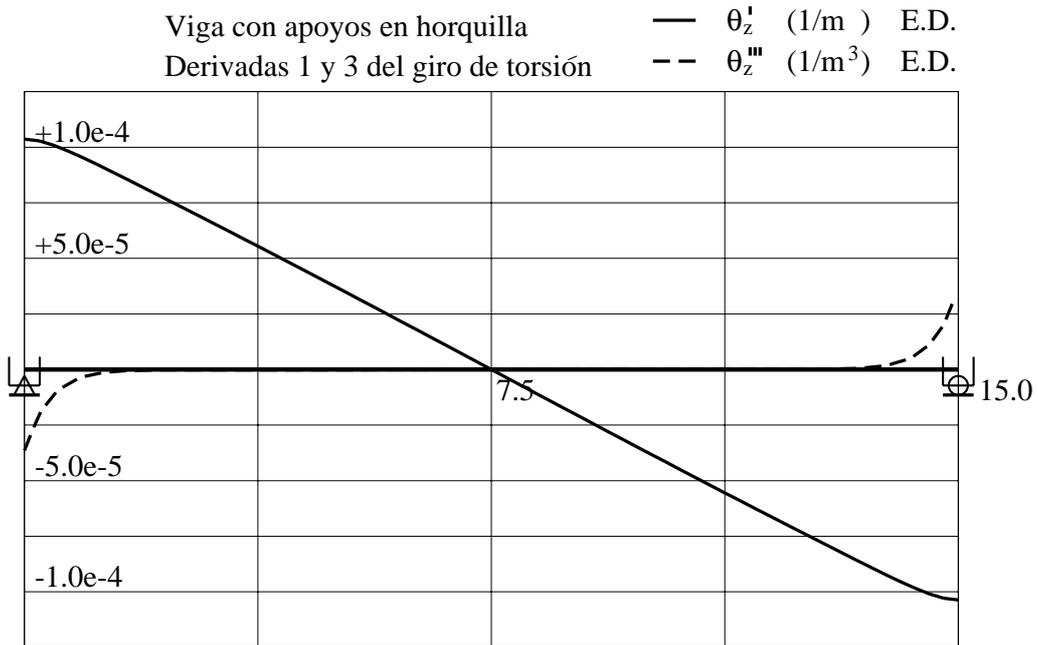


Figura 6.10: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (3).

$$\gamma_{sz} = t_a \cdot \theta'_z + w'_{at} \cdot \theta'''_z$$

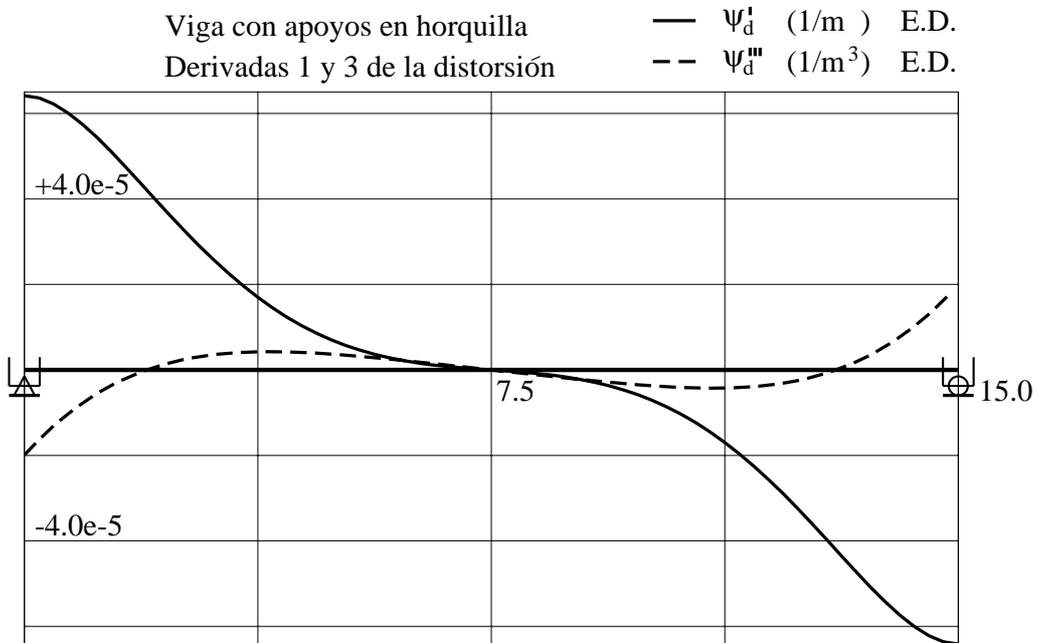


Figura 6.11: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (4).

$$\gamma_{sz} = t_d \cdot \psi'_d + w'_{dt} \cdot \psi'''_d$$

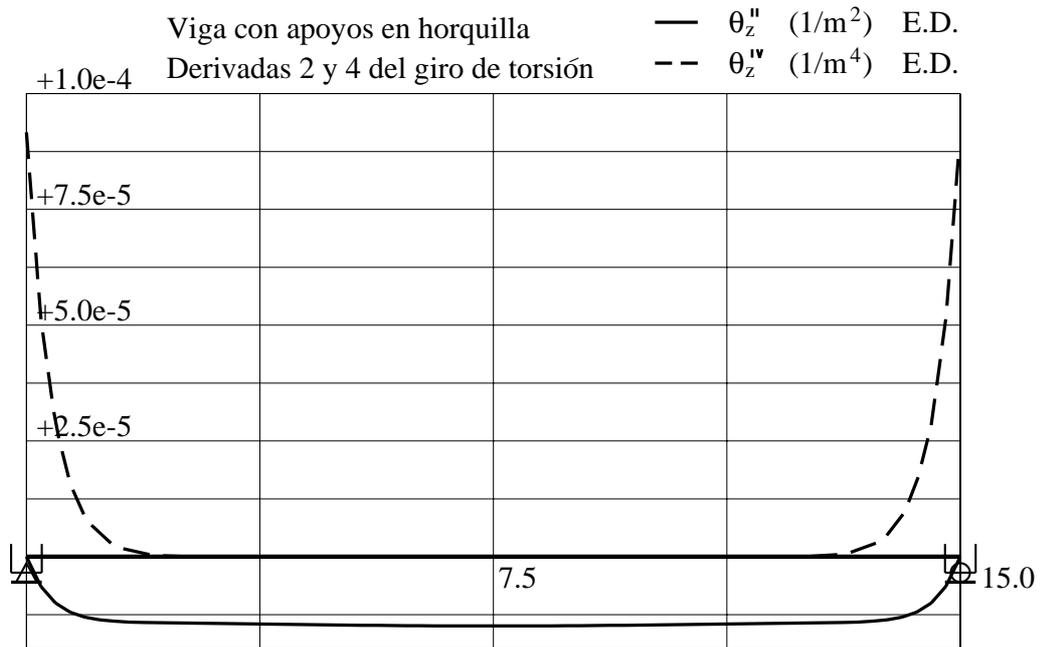


Figura 6.12: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (5).

$$\epsilon_z = w_a \cdot \theta_z'' + w_{at} \cdot \theta_z^{IV}$$

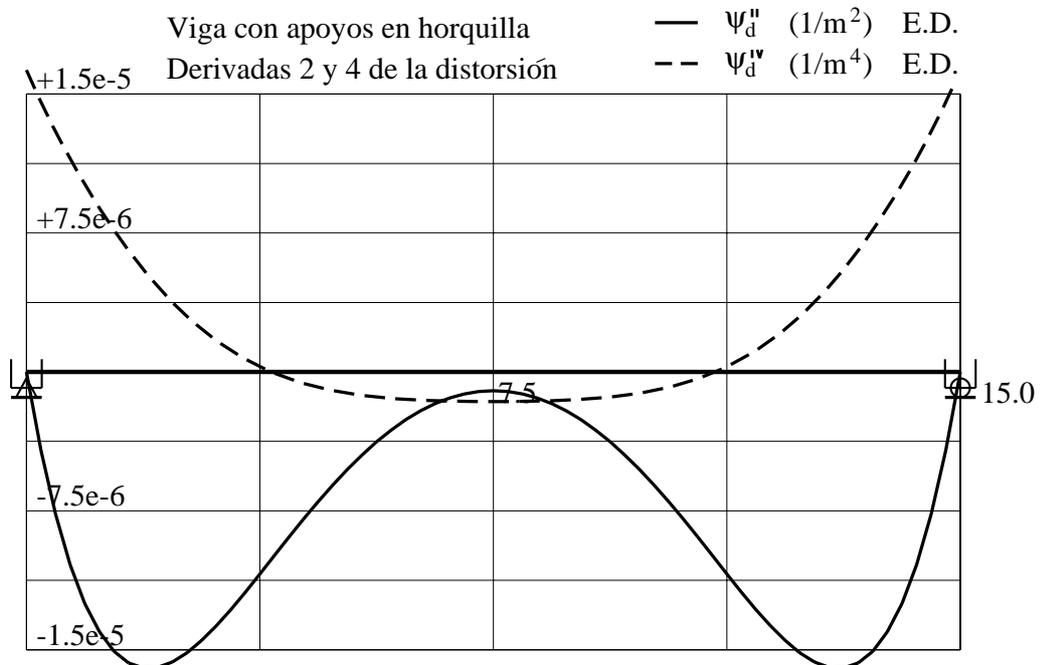


Figura 6.13: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (6).

$$\epsilon_z = -w_d \cdot \psi_d'' + w_{dt} \cdot \psi_d^{IV}$$

### 6.5.2. MODELOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Como se ha indicado al comienzo del capítulo, el mismo problema se resuelve por varios métodos. Además de la solución analítica de las ecuaciones diferenciales ya realizada, se va a resolver con: el elemento unidimensional desarrollado en el presente trabajo, con un modelo de elementos finitos tipo lámina, con el método de bandas finitas, y con elementos barra convencionales. A continuación se describe brevemente dichos modelos.

En la figura (6.14) se ha representado el modelo de elementos unidimensionales de tres nudos **B3N** con una discretización en dieciséis elementos. Los nudos que conectan las barras tienen asignado el grado de libertad  $\theta_{zi}$ , y los nudos auxiliares dispuestos en paralelo tienen asignados los grados de libertad  $\{\theta'_{zi}, \psi_{di}, \psi'_{di}\}$ . En los nudos coincidentes con los apoyos tipo horquilla se impide el giro ( $\theta_{zi} = 0$ ) y la distorsión ( $\psi_{di} = 0$ ).

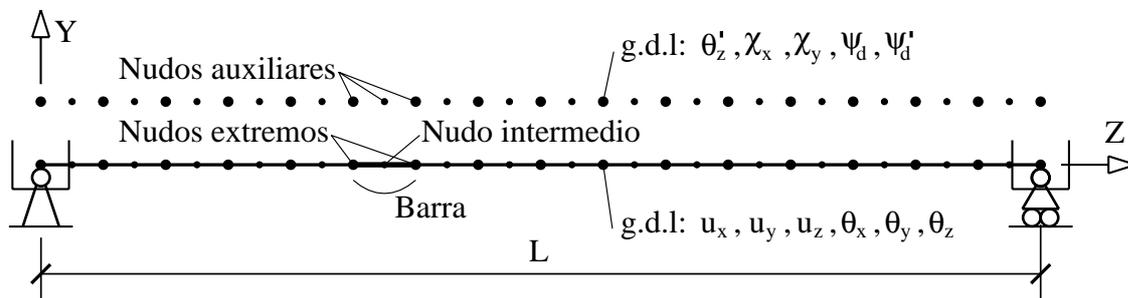


Figura 6.14: Viga de un vano: discretización en barras de 3 nudos **B3N**.

En la figura (6.15) se representa el modelo de elementos finitos tipo lámina de ocho nudos que se ha utilizado. Tiene la misma división en elementos en sentido transversal que la utilizada en la sección, y en sentido longitudinal la misma que el modelo de barras, para de esa forma poder comparar resultados en los mismos puntos. En las secciones de apoyo a modo de diafragma se han dispuesto elementos tipo membrana para evitar la distorsión de la sección en dichos puntos.

Respecto al modelo de bandas finitas que se ha hecho, la discretización es la misma que la utilizada para la sección, ver figura (6.3), y en sentido longitudinal se han utilizado 41 armónicos. El modelo con barras convencionales (**C**) tiene dieciséis barras igual que el modelo de elementos unidimensionales **B3N**, pero la mitad de nudos, al no tener las barras un nudo en el medio.

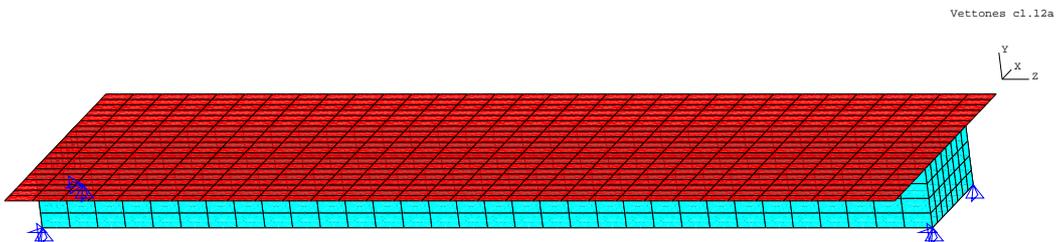


Figura 6.15: Viga de un vano: discretización en elementos finitos tipo lámina.

### 6.5.3. ESTUDIO DE CONVERGENCIA

Para analizar la convergencia del elemento finito unidimensional a la solución analítica de las ecuaciones diferenciales del problema que resuelve, se ha realizado el cálculo con discretizaciones crecientes.

Para el estudio se ha elegido como valores representativos: los movimientos en centro de luz, y las derivadas segundas (de las que depende las tensiones normales) a un octavo de luz desde el apoyo porque es donde se dan los valores máximos de las mismas. Los valores no indicados, son aquellos en los que con la discretización del modelo no hay un nudo en el punto donde se miran los resultados.

$N^\circ \text{Barras}$	$\theta_z(L/2)$ (-)	$\psi_d(L/2)$ (-)	$\theta_z''(L/8)$ ( $1/m^2$ )	$\psi_d''(L/8)$ ( $1/m^2$ )
1	$4.121 \cdot 10^{-4}$	$1.790 \cdot 10^{-4}$	—	—
2	$4.115 \cdot 10^{-4}$	$1.794 \cdot 10^{-4}$	—	—
4	$4.114 \cdot 10^{-4}$	$1.800 \cdot 10^{-4}$	$-1.392 \cdot 10^{-5}$	$-1.658 \cdot 10^{-5}$
8	$4.114 \cdot 10^{-4}$	$1.803 \cdot 10^{-4}$	$-1.435 \cdot 10^{-5}$	$-1.657 \cdot 10^{-5}$
16	$4.114 \cdot 10^{-4}$	$1.804 \cdot 10^{-4}$	$-1.420 \cdot 10^{-5}$	$-1.611 \cdot 10^{-5}$
32	$4.114 \cdot 10^{-4}$	$1.804 \cdot 10^{-4}$	$-1.419 \cdot 10^{-5}$	$-1.601 \cdot 10^{-5}$
<i>Ecu.Dif.</i>	$4.114 \cdot 10^{-4}$	$1.804 \cdot 10^{-4}$	$-1.418 \cdot 10^{-5}$	$-1.598 \cdot 10^{-5}$

Se observa una buena convergencia. Como es normal, las derivadas por encima del orden de continuidad del elemento finito presentan una convergencia más lenta, en este caso las derivadas de orden igual o superior a dos.

### 6.5.4. COMPARACIÓN DE MOVIMIENTOS

Para poder comparar los movimientos obtenidos con la ecuación diferencial y el elemento barra unidimensional, con los obtenidos del cálculo con el método de elementos finitos tipo lámina y bandas finitas es necesario hacer la descomposición de los resultados de estos dos últimos en modos. En el caso particular en que sólo existe torsión y distorsión, y si además se desprecia las derivadas terceras, el campo de movimientos definido en el apartado 4.4 con las ecuaciones (4.6), queda reducido a las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y, z) &= -(y - y_a) \cdot \theta_z + u_{dx} \cdot \psi_d \\ v_y(x, y, z) &= +(x - x_a) \cdot \theta_z + u_{dy} \cdot \psi_d \\ v_z(x, y, z) &= + w_a \cdot \theta'_z - w_d \cdot \psi'_d \end{aligned} \right\}$$

A la vista de estas ecuaciones, de la regresión estadística de los movimientos de cada sección se puede obtener el valor de las funciones  $\{\theta_z, \psi_d, \theta'_z, \psi'_d\}$  a lo largo de la viga. En la siguiente tabla se representa la comparación de los movimientos obtenidos según cinco métodos: ecuaciones diferenciales (**ED**), barra de tres nudos (**B3N**), elementos finitos tipo lámina (**MEF**), bandas finitas tipo lámina (**BF**) y barras convencionales (**C**) que sólo tienen torsión uniforme.

$z(m)$	Método	$\theta_z (-)$	$\theta'_z (1/m)$	$\psi_d (-)$	$\psi'_d (1/m)$
0.00	<i>ED</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.037 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$6.415 \cdot 10^{-5}$
	<b>B3N</b>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.037 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$6.412 \cdot 10^{-5}$
	<i>MEF</i>	$6.025 \cdot 10^{-5}$	$1.008 \cdot 10^{-4}$	$-9.363 \cdot 10^{-6}$	$6.144 \cdot 10^{-5}$
	<i>BF</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.981 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$5.638 \cdot 10^{-5}$
	<i>C</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	--	--	--
<i>L/4</i> 3.75	<i>ED</i>	$3.069 \cdot 10^{-4}$	$5.546 \cdot 10^{-5}$	$1.606 \cdot 10^{-4}$	$1.697 \cdot 10^{-5}$
	<b>B3N</b>	$3.069 \cdot 10^{-4}$	$5.546 \cdot 10^{-5}$	$1.605 \cdot 10^{-4}$	$1.697 \cdot 10^{-5}$
	<i>MEF</i>	$3.215 \cdot 10^{-4}$	$5.193 \cdot 10^{-5}$	$1.595 \cdot 10^{-4}$	$1.855 \cdot 10^{-5}$
	<i>BF</i>	$2.904 \cdot 10^{-4}$	$5.187 \cdot 10^{-5}$	$1.524 \cdot 10^{-4}$	$1.713 \cdot 10^{-5}$
	<i>C</i>	$3.164 \cdot 10^{-4}$	--	--	--
<i>L/2</i> 7.50	<i>ED</i>	$4.114 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.804 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<b>B3N</b>	$4.114 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.804 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<i>MEF</i>	$4.197 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.780 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<i>BF</i>	$3.893 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.688 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<i>C</i>	$4.219 \cdot 10^{-4}$	--	--	--

En las gráficas (6.16) a (6.19) se representa la comparación de los movimientos obtenidos mediante cuatro de los métodos. No se incluye los resultados de la resolución de la ecuación diferencial por coincidir con los de la barra **B3N**.

A la vista de los resultados numéricos y gráficos, se puede decir que:

- Todas las gráficas son semejantes en forma y valor, siendo por tanto buena la coincidencia entre ellas.
- En el modelo de elementos finitos, aunque se ha dispuesto un diafragma de 2.00 metros de espesor, la sección presenta un movimiento transversal de la tabla superior respecto de la inferior, que da una componente de giro de conjunto en los extremos de la sección.

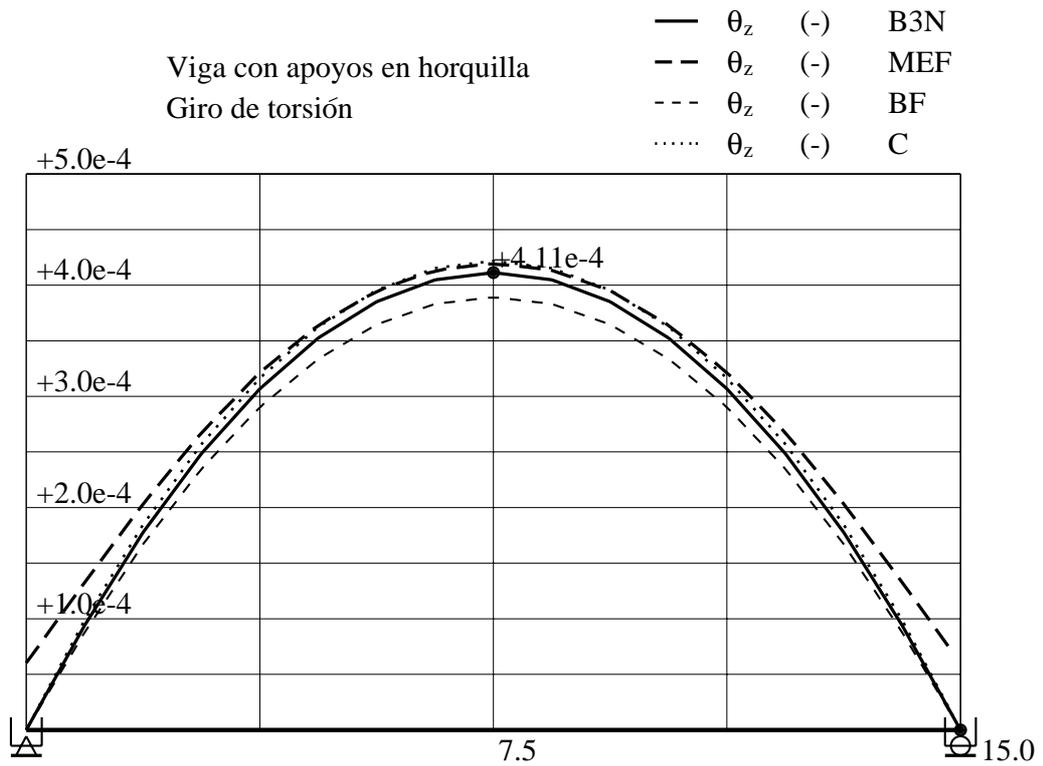


Figura 6.16: Viga de un vano. Giro de torsión  $\theta_z$  (-).

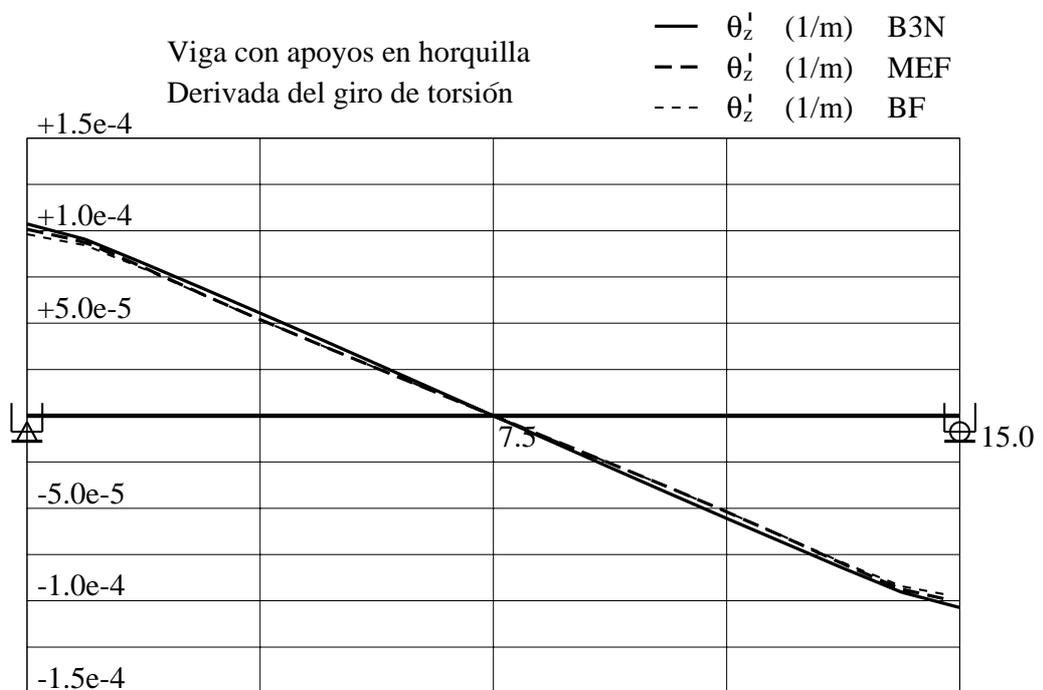


Figura 6.17: Viga de un vano. Derivada del giro de torsión  $\theta_z'$  (1/m).

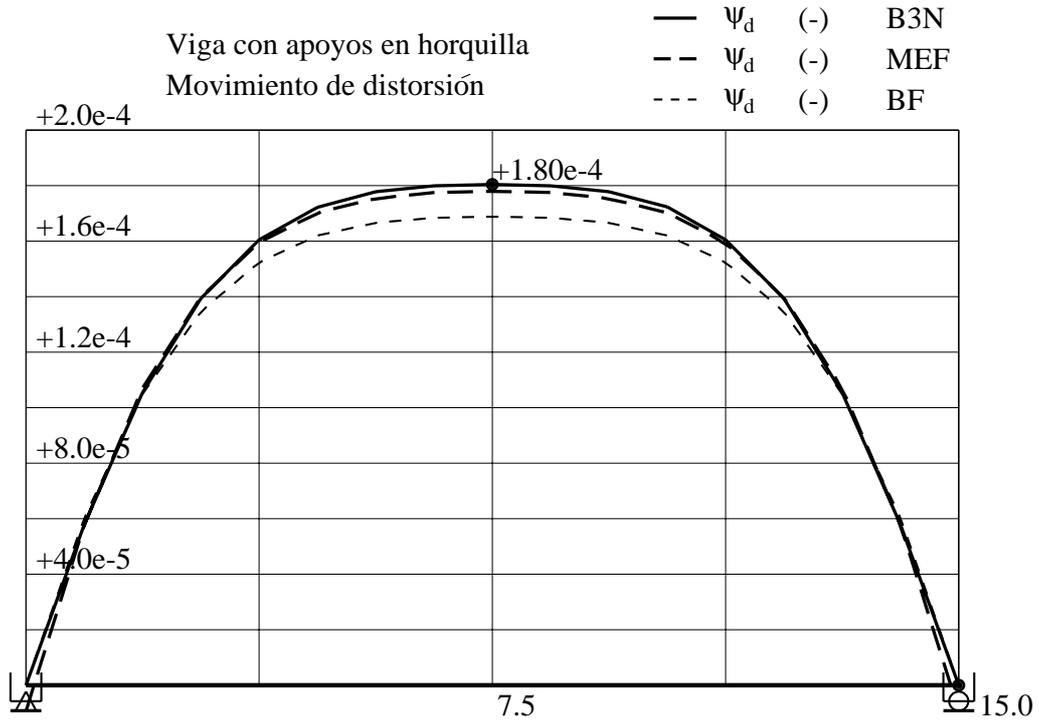


Figura 6.18: Viga de un vano. Movimiento de distorsión  $\psi_d$  (-).

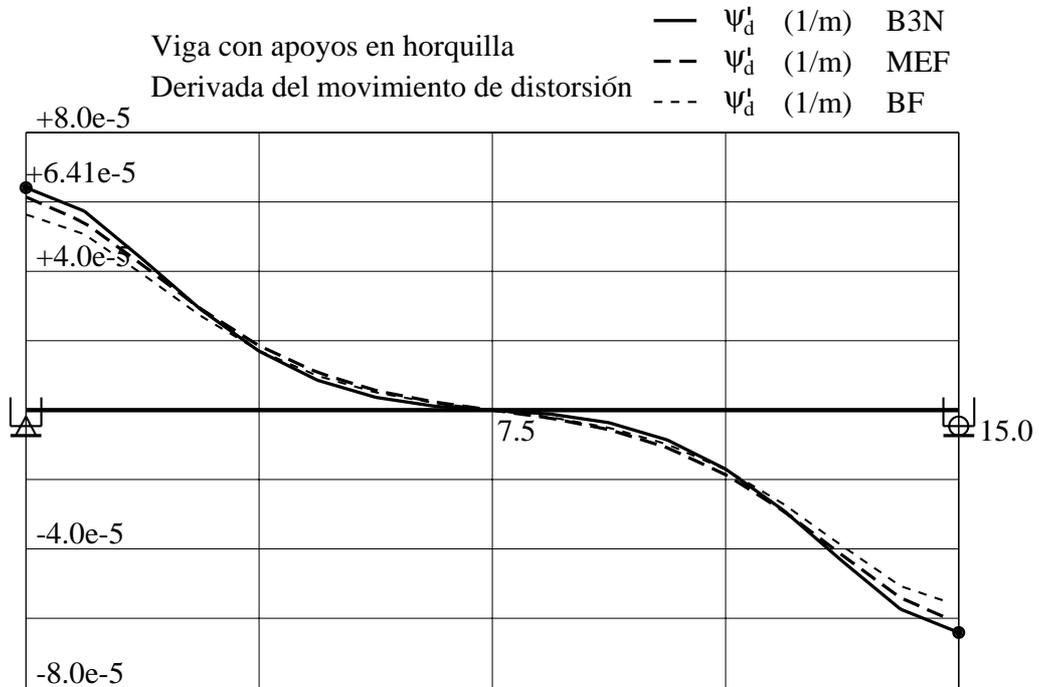


Figura 6.19: Viga de un vano. Derivada del movimiento de distorsión  $\psi'_d$  (1/m).

### 6.5.5. COMPARACIÓN DE TENSIONES

Para el caso particular de problemas de torsión-distorsión las ecuaciones (4.7), (4.8), (4.9) y (4.10) para las tensiones normales y tangenciales quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E \left( +w_a \theta_z'' - w_d \psi_d'' \right) \\ \tau_{sz} &= G \left( + \left( w_a' - h_a \right) \theta_z' + w_{at}' \theta_z''' + \left( u_{ds} - w_d' \right) \psi_d' + w_{dt}' \psi_d''' \right) \\ &= G \left( t_a \theta_z' + w_{at}' \theta_z''' + t_d \psi_d' + w_{dt}' \psi_d''' \right)\end{aligned}$$

Con estas ecuaciones, de la regresión estadística de las tensiones normales de los modelos de láminas se puede obtener las funciones  $\{ \theta_z'', \psi_d'' \}$ . Y de la regresión de las tensiones tangenciales, como en la sección de la viga en estudio se cumple que la distribución de tensiones tangenciales por torsión y distorsión uniforme son proporcionales  $t_d/t_a = C$ , las funciones que se pueden obtener son las siguientes  $\{ (\theta_z' + C \cdot \psi_d'), \theta_z''', \psi_d''' \}$ . En el apartado 6.5.6 se comparan los resultados que se obtienen de estas regresiones.

En las figuras (6.20) y (6.21) se presenta una vista inferior de la viga con las tensiones normales y tangenciales obtenidas con el modelo de elementos unidimensionales **B3N**.

En las figuras (6.22) y (6.23) se compara la forma de distribución de tensiones tangenciales y normales en la sección situada a  $1/8$  de luz del primer apoyo, apreciándose buena coincidencia. Se ha elegido esta sección, por corresponder con la zona en que las tensiones normales son máximas.

Para poder comparar los valores de las tensiones normales  $\sigma_z$  a lo largo de la viga, en las figuras (6.24) y (6.25) se ha dibujado la tensión en el extremo inferior y superior del alma izquierda. La forma de las gráficas es semejante, dando el elemento unidimensional tensiones algo superiores, del orden del 13.0% en el punto de tensión máxima. En la gráfica correspondiente al extremo inferior del alma, el modelo de elementos finitos presenta valores muy diferentes por la concentración de tensiones en los puntos de apoyo, que no reproducen los otros modelos de cálculo.

En la sección a  $L/8$  en el extremo inferior del alma izquierda, la descomposición de la tensión normal calculada con el elemento unidimensional **B3N** es la siguiente:

$$\sigma_z = (E w_a) \theta_z'' + (-E w_d) \psi_d'' = 26.2 + 404.3 = 430.5 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

En las figuras (6.26) y (6.27) se representa la variación a lo largo de la viga de las tensiones tangenciales  $\tau_{sz}$  en el centro de la tabla superior y en el centro del alma izquierda, encontrándose muy buena coincidencia de los valores entre los tres métodos de cálculo. Por ser una viga isostática el torsor total  $M_z$  tiene una ley lineal, pero la variación de tensiones tangenciales claramente no lo es, siendo el motivo la existencia del momento torsor no uniforme  $M_{zw}$  y del momento de distorsión  $M_d$ .

En la sección por el primer apoyo la descomposición de la tensión tangencial  $\tau_{sz}$  en el centro de la tabla inferior obtenida mediante el elemento unidimensional **B3N** es la siguiente:

$$\begin{aligned}\tau_{sz} &= \left( G t_a \theta_z' + G w_{at}' \theta_z''' \right) + \left( G t_d \psi_d' + G w_{dt}' \psi_d''' \right) = \\ &= ( 864.0 + 23.4 ) + ( 23.8 - 199.8 ) = 887.4 - 175.9 = 711.5 \text{ (kN/m}^2\text{)}\end{aligned}$$

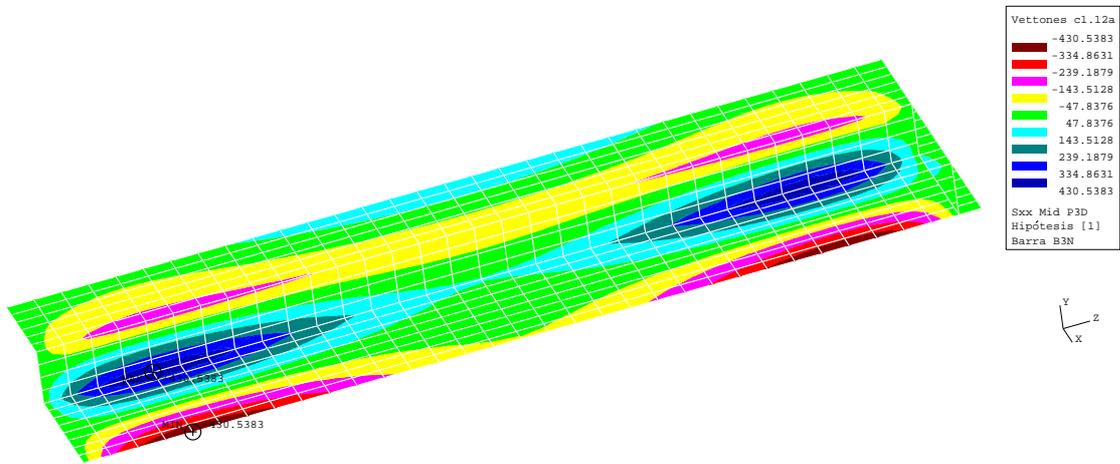


Figura 6.20: Viga biapoyada. Modelo de barras **B3N**. Tensiones  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ).

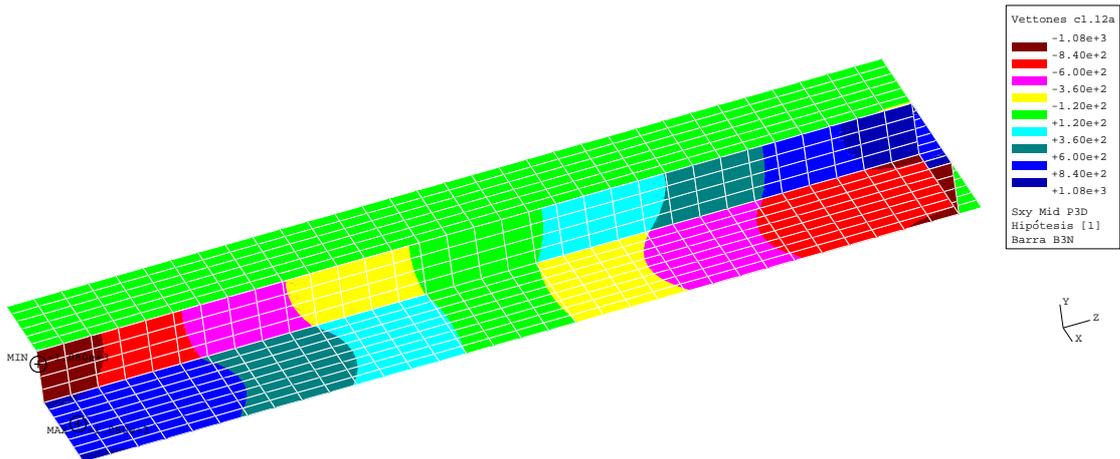


Figura 6.21: Viga biapoyada. Modelo de barras **B3N**. Tensiones  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ).

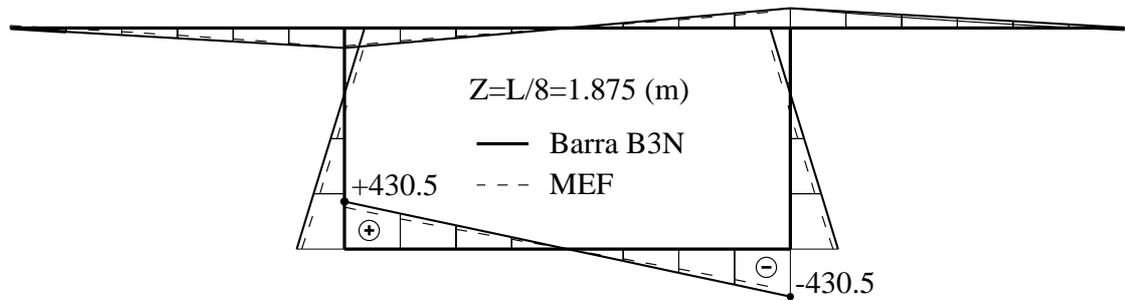


Figura 6.22: Viga de un vano. Tensiones  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en sección a  $L/8$ .

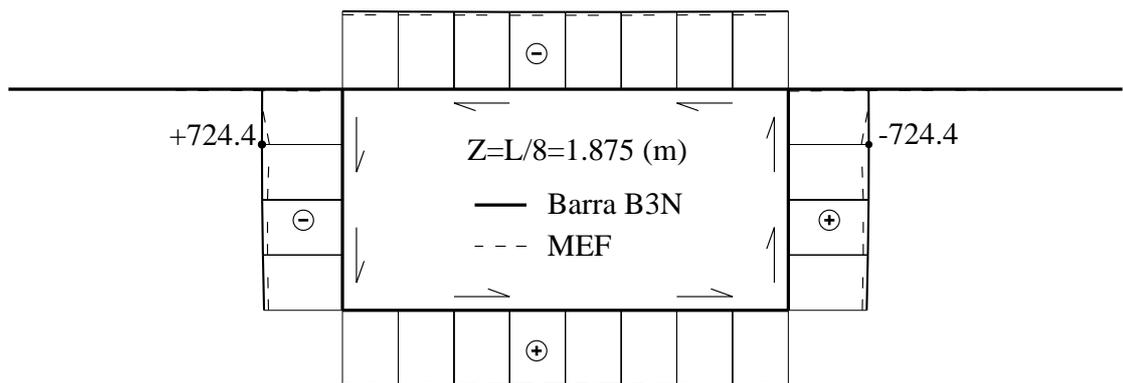


Figura 6.23: Viga biapoyada. Tensiones  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ) en sección a  $L/8$ .

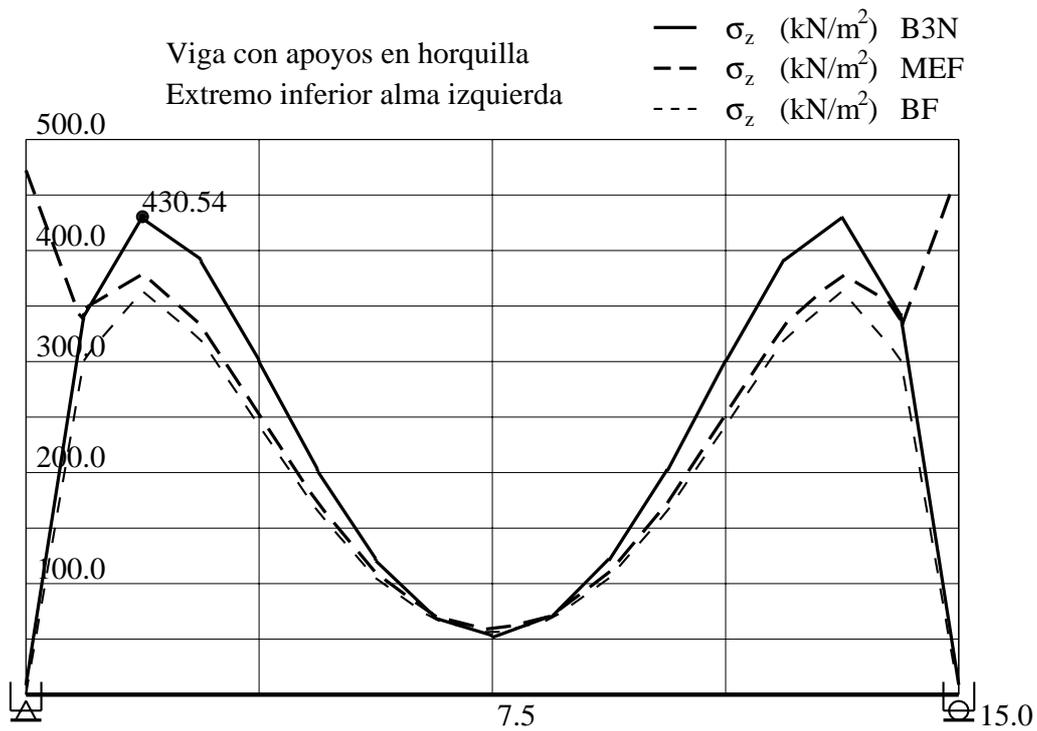


Figura 6.24: Tensión  $\sigma_z$  (kN/m<sup>2</sup>). Extremo inferior del alma izquierda.

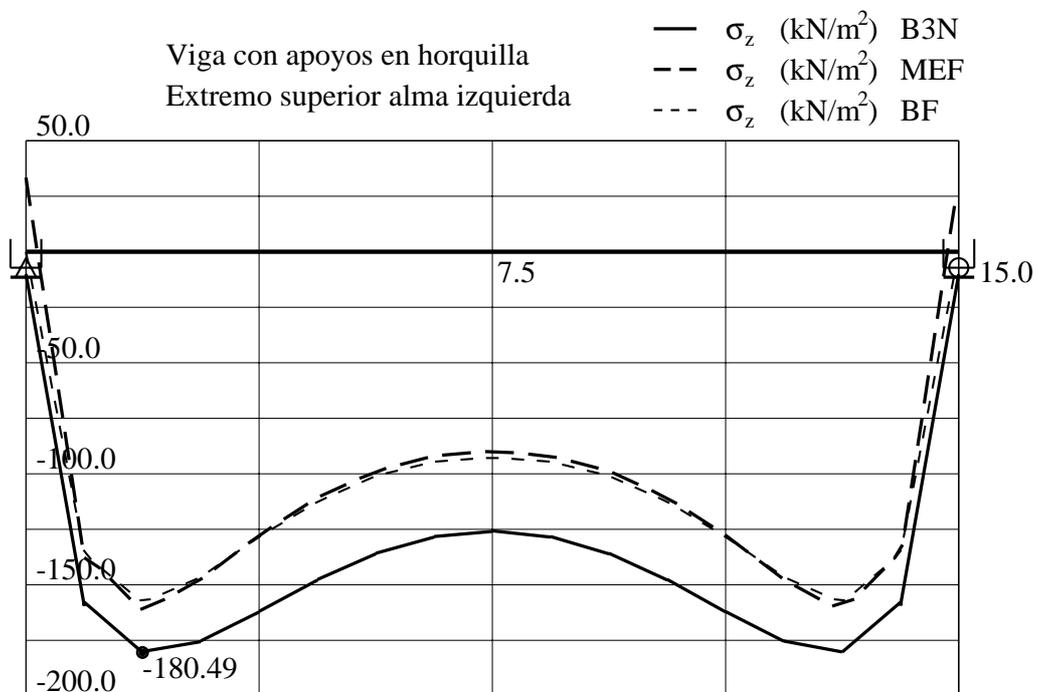


Figura 6.25: Tensión  $\sigma_z$  (kN/m<sup>2</sup>). Extremo superior del alma izquierda.

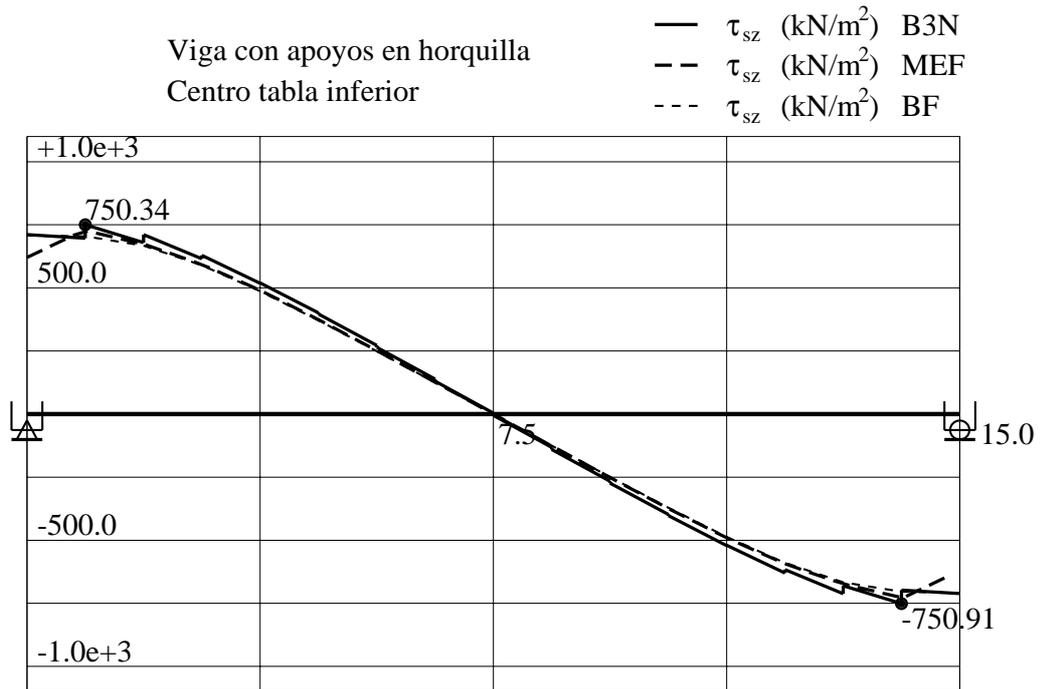


Figura 6.26: Tensión  $\tau_{sz}$  (kN/m<sup>2</sup>). Centro de la tabla inferior.

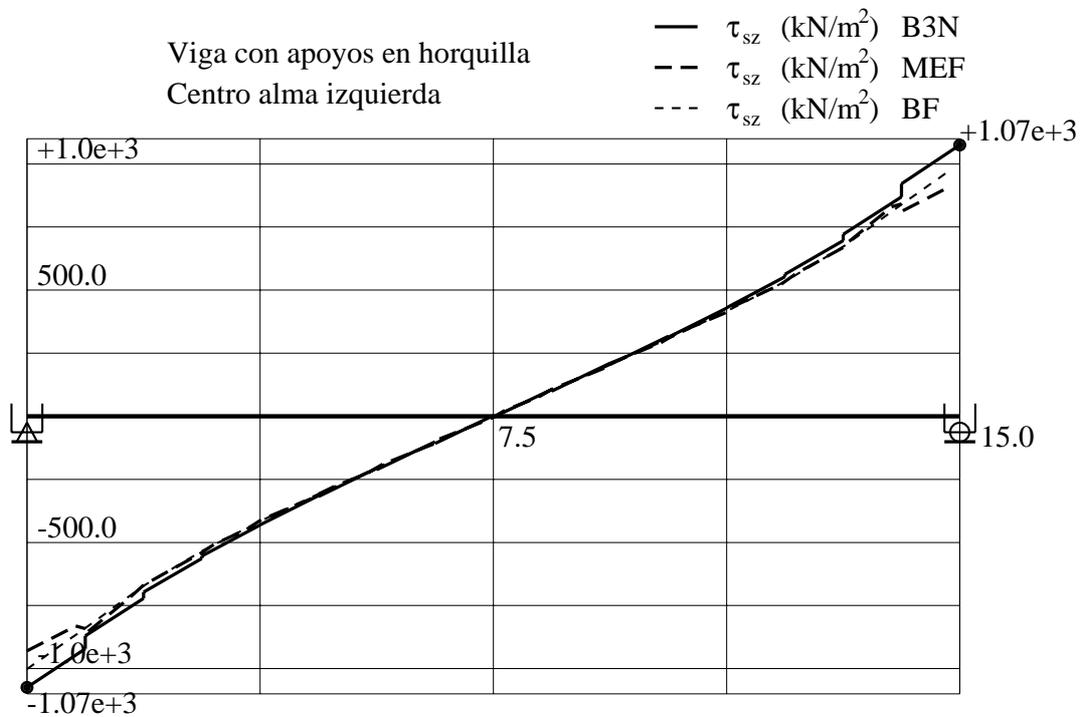


Figura 6.27: Tensión  $\tau_{sz}$  (kN/m<sup>2</sup>). Centro del alma izquierda.

### 6.5.6. COMPARACIÓN DE ESFUERZOS

Los esfuerzos equivalentes a las tensiones tangenciales son los momentos torsor y distorsor, ambos con componentes uniformes y no uniformes. Que como se ha visto, vienen dados por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} M_{zu} &= + G_o I_t \theta'_z \\ M_{zw} &= - E_o I_a \theta''' \\ M_{du} &= - G_o D_{t_d.t_d} \psi'_d \\ M_{dw} &= + E_o I_d \psi''' \end{aligned} \right\}$$

En la figura (6.28) se representa el momento torsor total  $M_z$  obtenido mediante tres métodos de cálculo, presentando plena coincidencia entre todos de ellos. En la figura (6.29) se reproduce el valor del momento torsor no uniforme  $M_{zw}$  obtenido con el elemento unidimensional, viéndose que su valor sólo aparece en los extremos de la viga. El momento torsor no uniforme  $M_{zw}$  es el 3.1 % del momento torsor total, un valor pequeño, pero como se vio anteriormente si influye en el valor de las tensiones tangenciales.

El comparar los momentos uniformes y no uniformes obtenidos con los distintos métodos de cálculo, como son el producto de una característica mecánica por una derivada, equivale a comparar las derivadas correspondientes. Por lo que las gráficas (6.17) y (6.19) en que se comparan las primeras derivadas, también representan la comparación de los valores de los momentos uniformes  $M_{zu}$  y  $M_{du}$  respectivamente. Los momentos torsos no uniformes  $M_{zw}$  y  $M_{dw}$  se comparan mediante las derivadas terceras en las gráficas (6.30) y (6.31). En todos los casos se aprecia buena coincidencia de los valores entre los diferentes métodos de cálculo.

Los bimomentos equivalen a la distribución de tensiones normales, y se ha visto que vienen dados por:

$$\left. \begin{aligned} B_w &= + E_o \cdot I_a \cdot \theta''_z \\ B_d &= - E_o \cdot I_d \cdot \psi''_d \end{aligned} \right\}$$

En las gráficas (6.32) y (6.33) se compara los valores de las segundas derivadas, que es lo mismo que comparar los valores de los bimomentos  $B_w$  y  $B_d$ . La forma de las funciones es semejante entre los diferentes métodos de cálculo, encontrándose en el bimomento distorsor la mayor diferencia, que es del 21.0 % para el valor máximo.

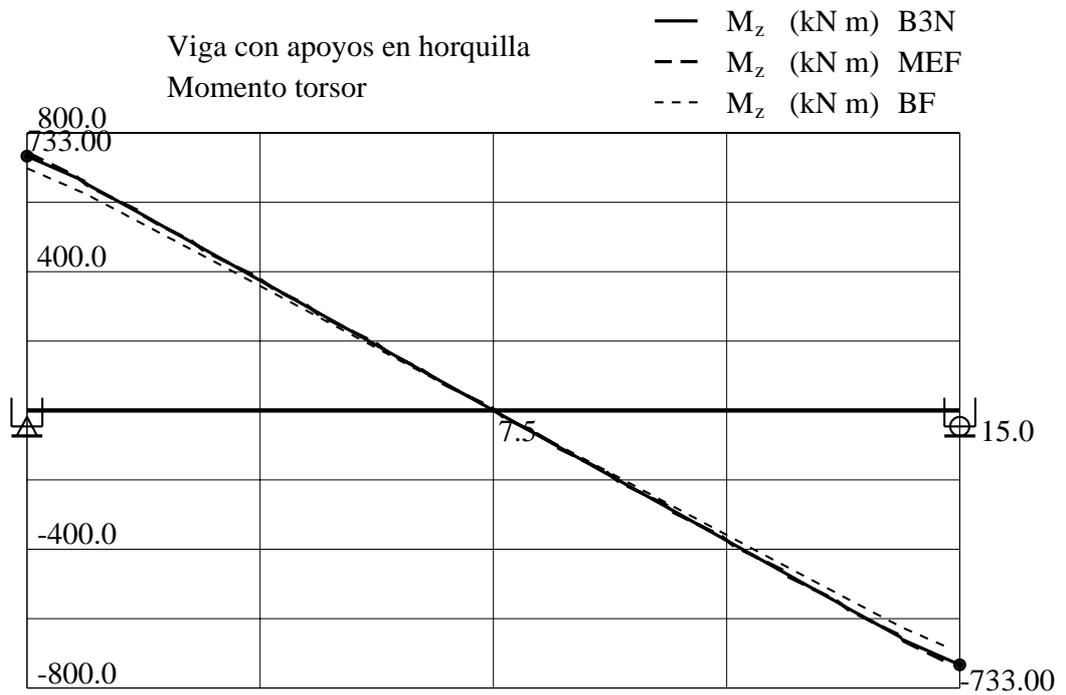


Figura 6.28: Momento torsor total  $M_z$  ( $kN \cdot m$ ).

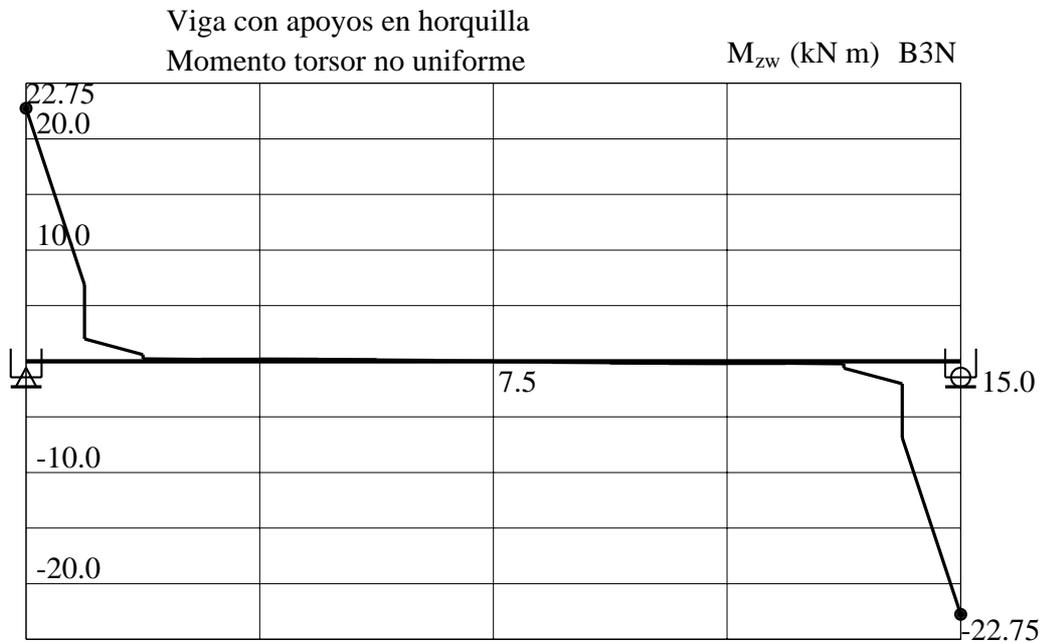


Figura 6.29: Momento torsor no uniforme  $M_{zw} = -E_o I_a \theta_z'''$  ( $kN \cdot m$ ).

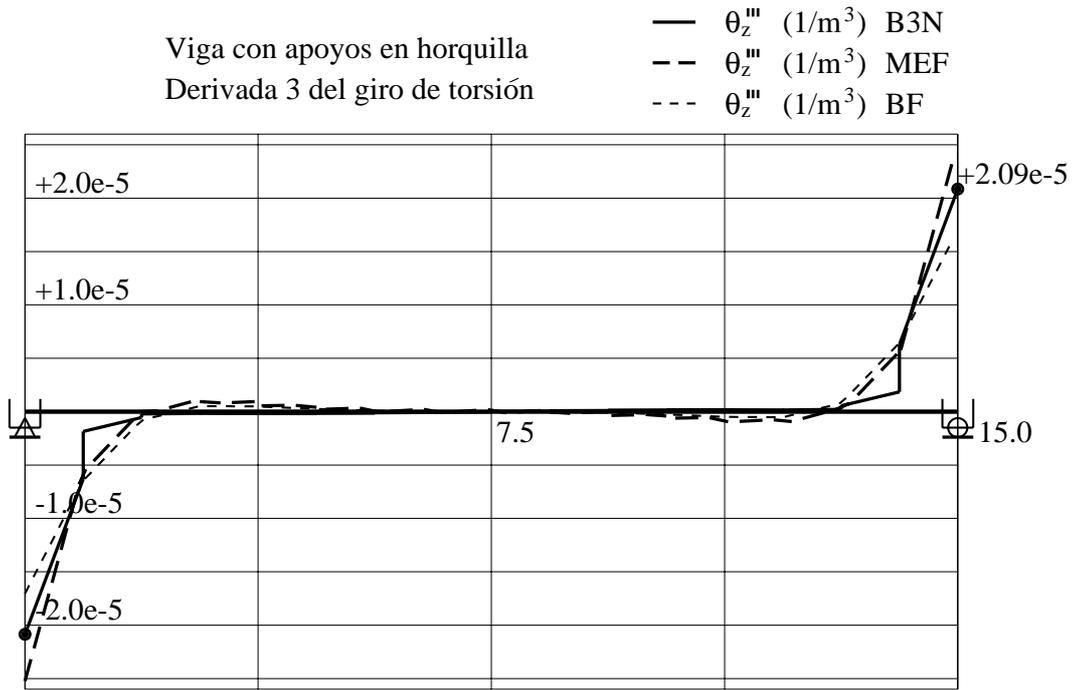


Figura 6.30: Momento torsor no uniforme. Comparación de  $\theta_z''' = -M_{zw}/(E_o \cdot I_a)$ .

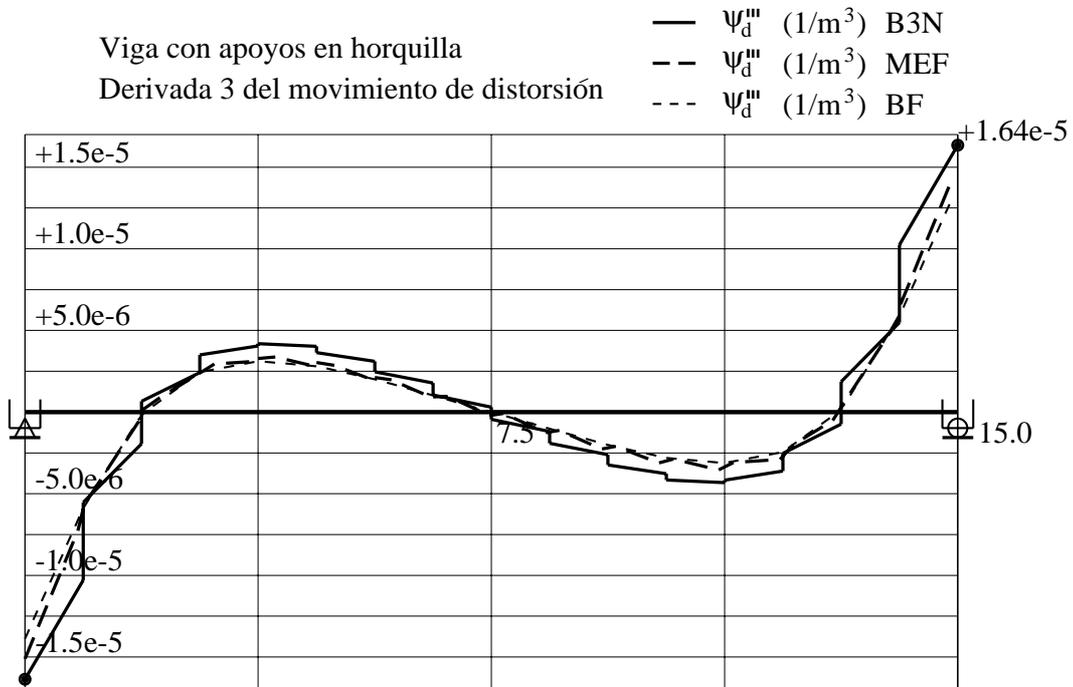


Figura 6.31: Momento distorsor no uniforme. Comparación de  $\psi_d''' = M_{dw}/(E_o \cdot I_d)$ .

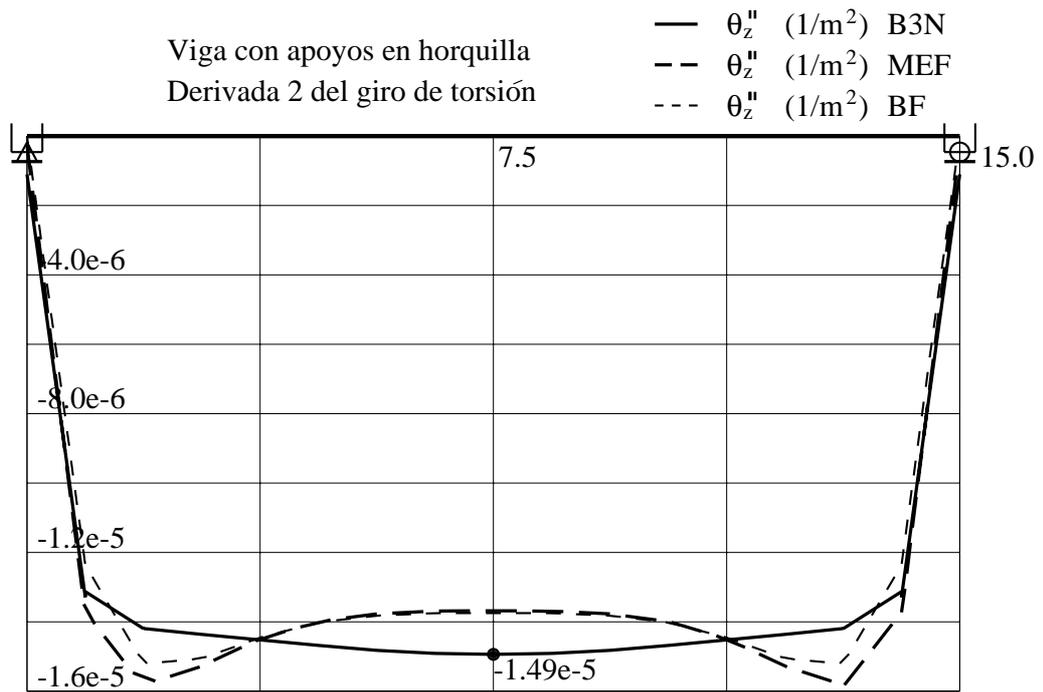


Figura 6.32: Viga biapoyada. Bimomento torsor  $\theta_z'' = \mathbf{B}_w / (E_o \cdot I_a)$ .

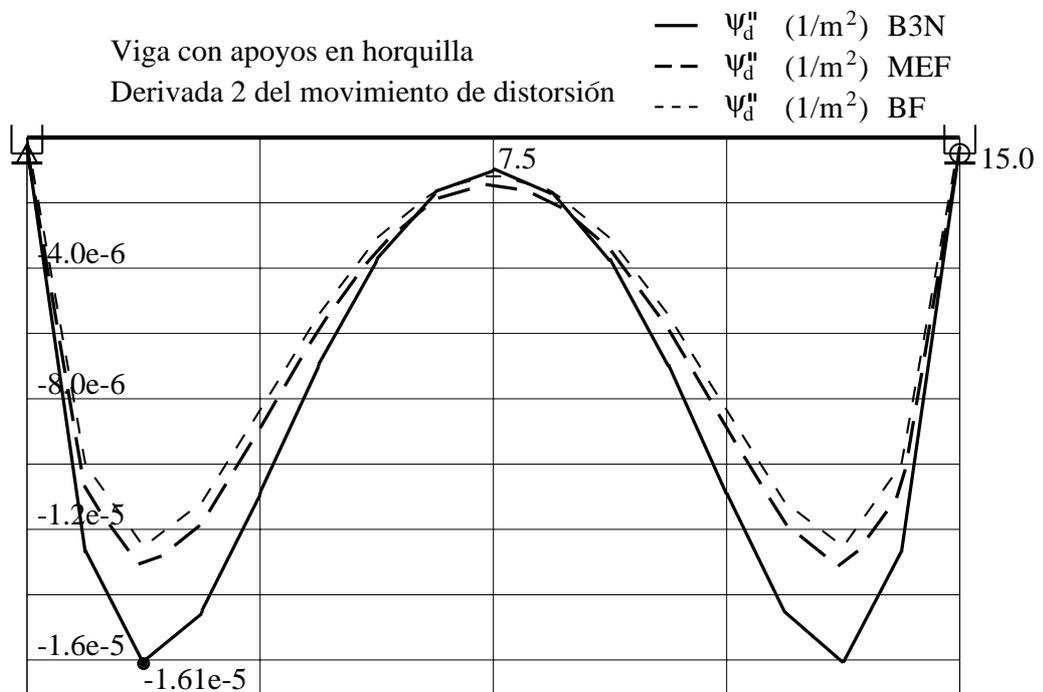


Figura 6.33: Viga biapoyada. Bimomento distorsor  $\psi_d'' = -\mathbf{B}_d / (E_o \cdot I_d)$ .

## 6.6. VIGA EMPOTRADA

### 6.6.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA Y APLICACIÓN NUMÉRICA

En la viga simplemente apoyada calculada en el apartado anterior, por no tener secciones en las que el alabeo esté impedido, las tensiones por torsión y distorsión alabeada no son muy importantes. Para estudiar un caso en que tengan más importancia, en el presente apartado se va a resolver la misma viga pero considerando que la vinculación es de empotramiento en los dos extremos. En la figura (6.34) se ha representado el problema que se pretende ahora resolver.

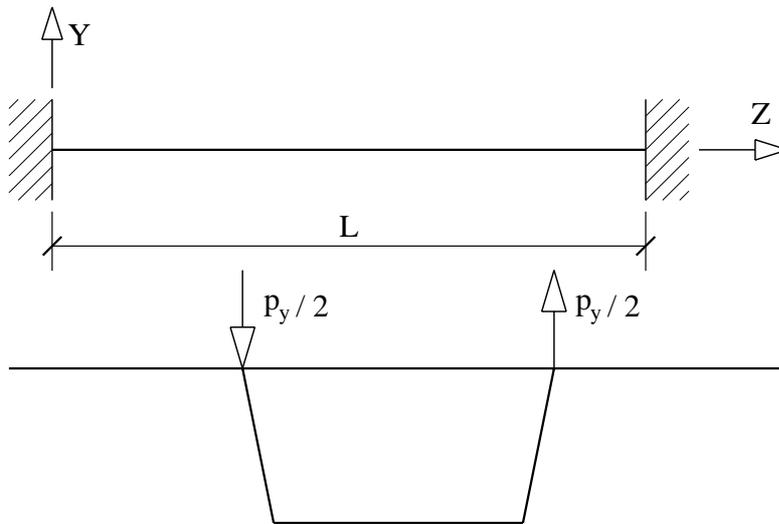


Figura 6.34: Viga biempotrada con sección cajón.

Como se ha hecho antes, se va a realizar el cálculo mediante varios métodos para poder comparar entre ellos los resultados. En este caso no se puede utilizar el método de las bandas finitas, ya que por las funciones hiperbólicas que hay que utilizar en el cálculo de los movimientos longitudinales, hacen que haya que utilizar simultáneamente números muy grandes y muy pequeños, los cuales no se pueden manejar adecuadamente por el redondeo de los números en los ordenadores.

### 6.6.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Para obtener la solución general de la ecuación diferencial en el caso en que los extremos estén empotrados, el único cambio que hay que realizar respecto de lo hecho en el apartado 6.5.1, es que las condiciones de contorno a imponer son otras, siendo ahora las siguientes:

- Giro de torsión  $\theta_z$  y movimiento transversal de distorsión  $\psi_d$  impedidos en ambos extremos.
- Alabeo por torsión y distorsión impedidos en ambos extremos.

Estas condiciones equivalen a las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \theta_z(0) &= 0 \\ \psi_d(0) &= 0 \\ \theta'_x(0) &= 0 \\ \psi'_d(0) &= 0 \\ \theta_z(L) &= 0 \\ \psi_d(L) &= 0 \\ \theta'_x(L) &= 0 \\ \psi'_d(L) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La solución analítica de la ecuación diferencial se ha obtenido mediante cálculo numérico, y se representa en los siguientes gráficos:

- Gráfico (6.35). Giro de torsión  $\theta_z$  y movimiento de distorsión  $\psi_d$ .
- Gráfico (6.36). Segunda derivada de dichos movimientos,  $\theta''_z$  y  $\psi''_d$ , de las que dependen las tensiones normales por torsión y distorsión.

Para poder comprobar si unas derivadas son despreciables frente a otras, se comparan en los siguientes gráficos:

- Gráfico (6.37). Primera y tercera derivadas del giro de torsión,  $\theta'_z$  y  $\theta'''_z$ , de las que dependen las tensiones tangenciales por torsión uniforme y no uniforme respectivamente.
- Gráfico (6.38). Primera y tercera derivadas del movimiento de distorsión,  $\psi'_d$  y  $\psi'''_d$ , de las que dependen las tensiones tangenciales por distorsión uniforme y no uniforme.
- Gráfico (6.39). Comparación de la segunda derivada  $\theta''_z$  y cuarta derivada  $\theta^{IV}_z$  del giro de torsión.
- Gráfico (6.40). Comparación de la segunda derivada  $\psi''_d$  y cuarta derivada  $\psi^{IV}_d$  del movimiento de distorsión.

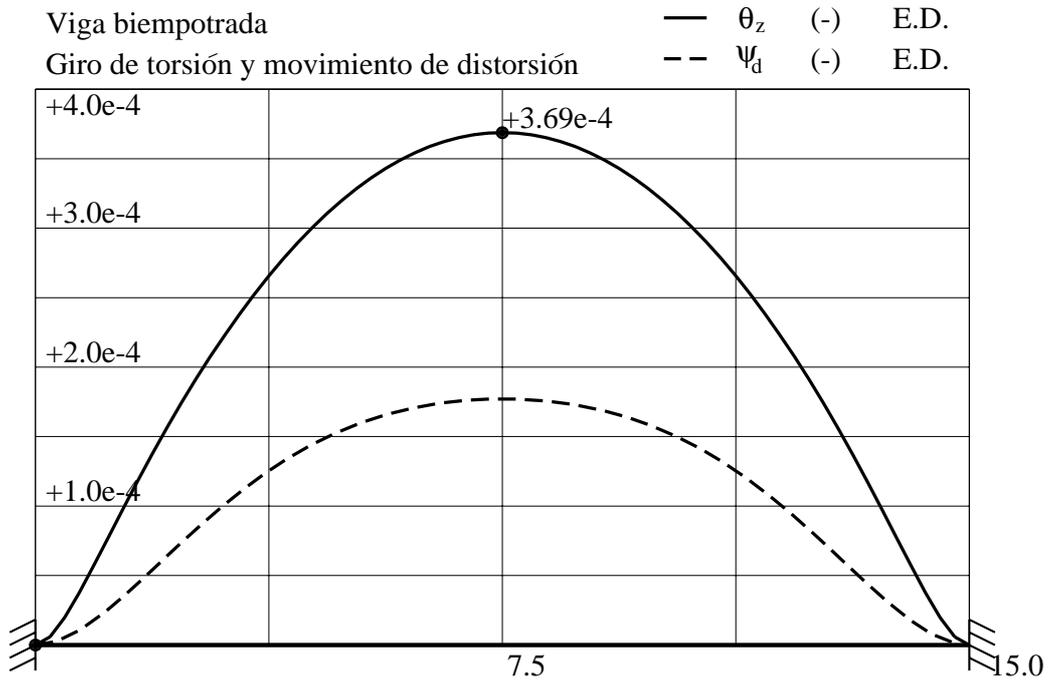


Figura 6.35: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (1).

$$v_x = -(y - y_a) \cdot \theta_z + u_{dx} \cdot \psi_d \quad ; \quad v_y = +(x - x_a) \cdot \theta_z + u_{dy} \cdot \psi_d$$

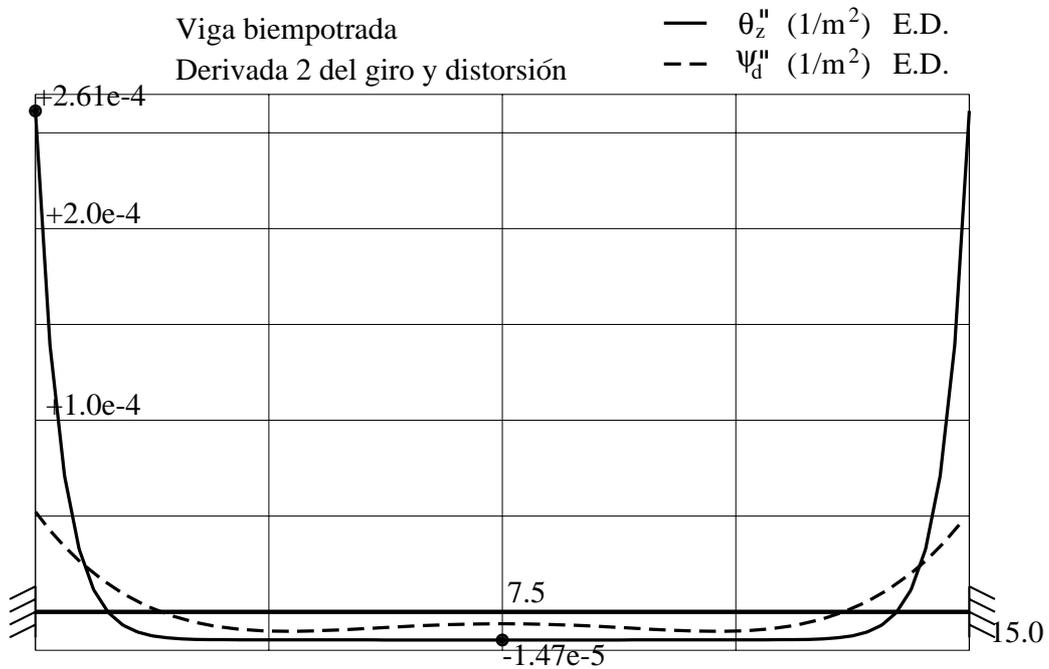


Figura 6.36: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (2).

$$B_w = E_o \cdot I_a \cdot \theta_z'' \quad ; \quad B_d = -E_o \cdot I_d \cdot \psi_d''$$

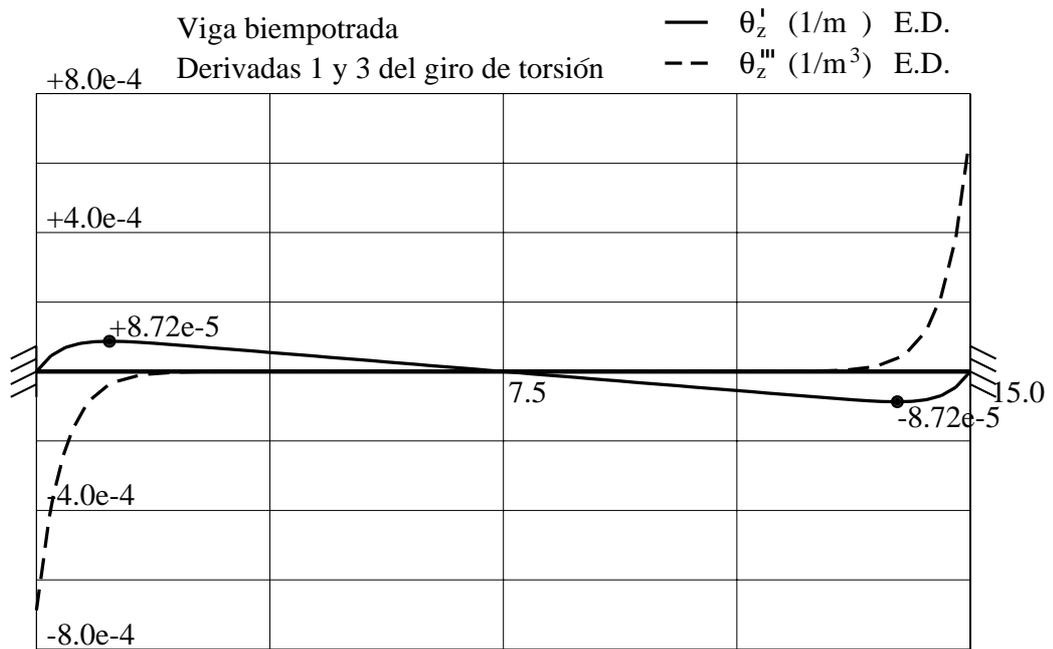


Figura 6.37: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (3).

$$\gamma_{sz} = t_a \cdot \theta'_z + w'_{at} \cdot \theta'''_z$$

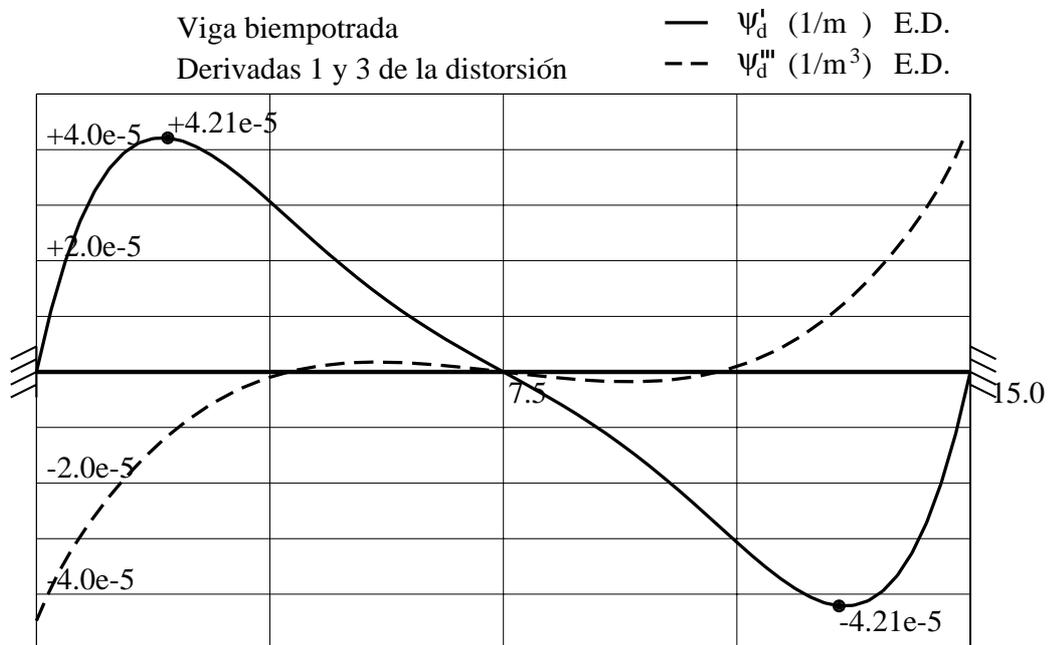


Figura 6.38: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (4).

$$\gamma_{sz} = t_d \cdot \psi'_d + w'_{dt} \cdot \psi'''_d$$

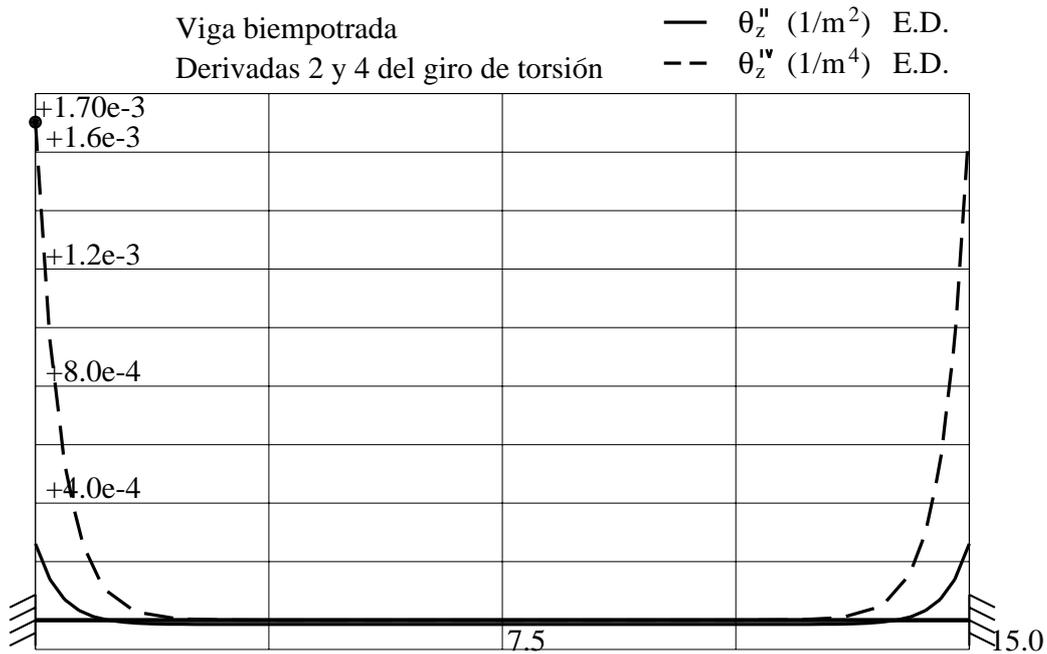


Figura 6.39: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (5).

$$\epsilon_z = w_a \cdot \theta_z'' + w_{at} \cdot \theta_z^{IV}$$

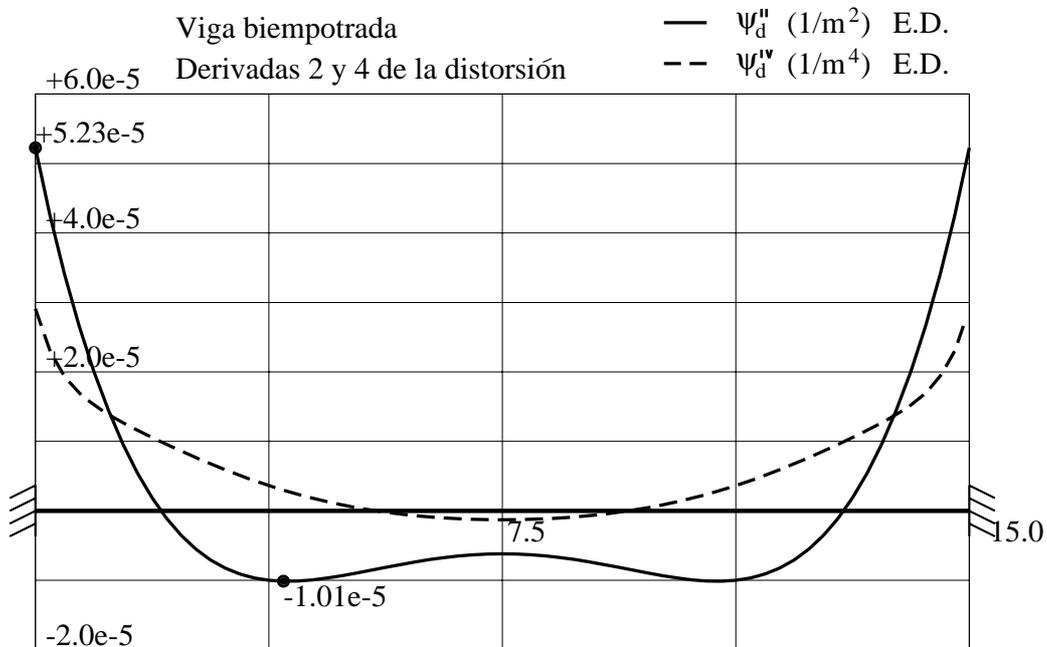


Figura 6.40: Torsión-distorsión. Resultados de la ecuación diferencial (6).

$$\epsilon_z = -w_d \cdot \psi_d'' + w_{dt} \cdot \psi_d^{IV}$$

### 6.6.3. MODELOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

El modelo de elementos unidimensionales **B3N** que se ha utilizado en cuanto al mallado es igual al de la figura (6.14), pero respecto de los apoyos en ambos extremos, se impide el giro de torsión, el movimiento de distorsión y la primera derivada de ambos.

El modelo de elementos finitos tipo lámina utilizado para verificar los resultados, en cuanto al mallado es el mismo que el de la figura (6.15) pero quitando los elementos para los diafragmas en los extremos, y que en las secciones extremas se impiden todos los movimientos y giros de todos los nudos.

### 6.6.4. ESTUDIO DE CONVERGENCIA

Para analizar la convergencia del elemento finito unidimensional a la solución analítica de las ecuaciones diferenciales del problema que resuelve, se ha realizado el cálculo con discretizaciones crecientes, observándose una buena convergencia, como se ve en la siguiente tabla. Como es normal, las derivadas por encima del orden de continuidad del elemento finito presentan una convergencia más lenta.

Para el estudio se ha elegido como valores representativos: los movimientos en centro de luz, y las derivadas segundas (de las que depende las tensiones normales) en el apoyo izquierdo que es donde se dan los valores máximos de las mismas.

$N^\circ$ Barras	$\theta_z(L/2)$ (-)	$\psi_d(L/2)$ (-)	$\theta_z''(0)$ ( $1/m^2$ )	$\psi_d''(0)$ ( $1/m^2$ )
1	$3.330 \cdot 10^{-4}$	$1.991 \cdot 10^{-4}$	$3.552 \cdot 10^{-5}$	$2.124 \cdot 10^{-5}$
2	$3.501 \cdot 10^{-4}$	$1.774 \cdot 10^{-4}$	$8.435 \cdot 10^{-5}$	$3.779 \cdot 10^{-5}$
4	$3.644 \cdot 10^{-4}$	$1.767 \cdot 10^{-4}$	$1.475 \cdot 10^{-4}$	$4.745 \cdot 10^{-5}$
8	$3.682 \cdot 10^{-4}$	$1.770 \cdot 10^{-4}$	$2.064 \cdot 10^{-4}$	$5.076 \cdot 10^{-5}$
16	$3.687 \cdot 10^{-4}$	$1.771 \cdot 10^{-4}$	$2.412 \cdot 10^{-4}$	$5.183 \cdot 10^{-5}$
32	$3.688 \cdot 10^{-4}$	$1.771 \cdot 10^{-4}$	$2.551 \cdot 10^{-4}$	$5.215 \cdot 10^{-5}$
64	$3.688 \cdot 10^{-4}$	$1.771 \cdot 10^{-4}$	$2.596 \cdot 10^{-4}$	$5.224 \cdot 10^{-5}$
<i>Ecu.Dif.</i>	$3.388 \cdot 10^{-4}$	$1.771 \cdot 10^{-4}$	$2.614 \cdot 10^{-4}$	$5.227 \cdot 10^{-5}$

### 6.6.5. COMPARACIÓN DE MOVIMIENTOS

En la siguiente tabla se compara en tres puntos a lo largo de media viga los movimientos obtenidos mediante cuatro métodos de cálculo.

$z(m)$	Método	$\theta_z (-)$	$\theta'_z (1/m)$	$\psi_d (-)$	$\psi'_d (1/m)$
0.00	<i>ED</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<b>B3N</b>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<i>MEF</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<i>C</i>	$0.000 \cdot 10^{+0}$	--	--	--
$L/4$	<i>ED</i>	$2.656 \cdot 10^{-4}$	$5.488 \cdot 10^{-5}$	$1.254 \cdot 10^{-4}$	$3.065 \cdot 10^{-5}$
	<b>B3N</b>	$2.656 \cdot 10^{-4}$	$5.488 \cdot 10^{-5}$	$1.254 \cdot 10^{-4}$	$3.064 \cdot 10^{-5}$
	<i>MEF.</i>	$2.657 \cdot 10^{-4}$	$5.167 \cdot 10^{-5}$	$1.331 \cdot 10^{-4}$	$2.579 \cdot 10^{-5}$
	<i>C</i>	$3.164 \cdot 10^{-4}$	--	--	--
$L/2$	<i>ED</i>	$3.688 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.771 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<b>B3N</b>	$3.687 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.771 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<i>MEF</i>	$3.679 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$	$1.730 \cdot 10^{-4}$	$0.000 \cdot 10^{+0}$
	<i>C</i>	$4.219 \cdot 10^{-4}$	--	--	--

En las figuras (6.41) a (6.44) se representa la comparación del giro de torsión  $\theta_z$  y del movimiento de distorsión  $\psi_d$  y de sus primeras derivadas, entre los resultados del elemento unidimensional (**B3N**) y de la regresión estadística de los resultados del modelo de elementos finitos (**MEF**). Para el caso del giro de torsión, se ha representado también los valores con un elemento barra convencional (**C**) que sólo tiene torsión uniforme.

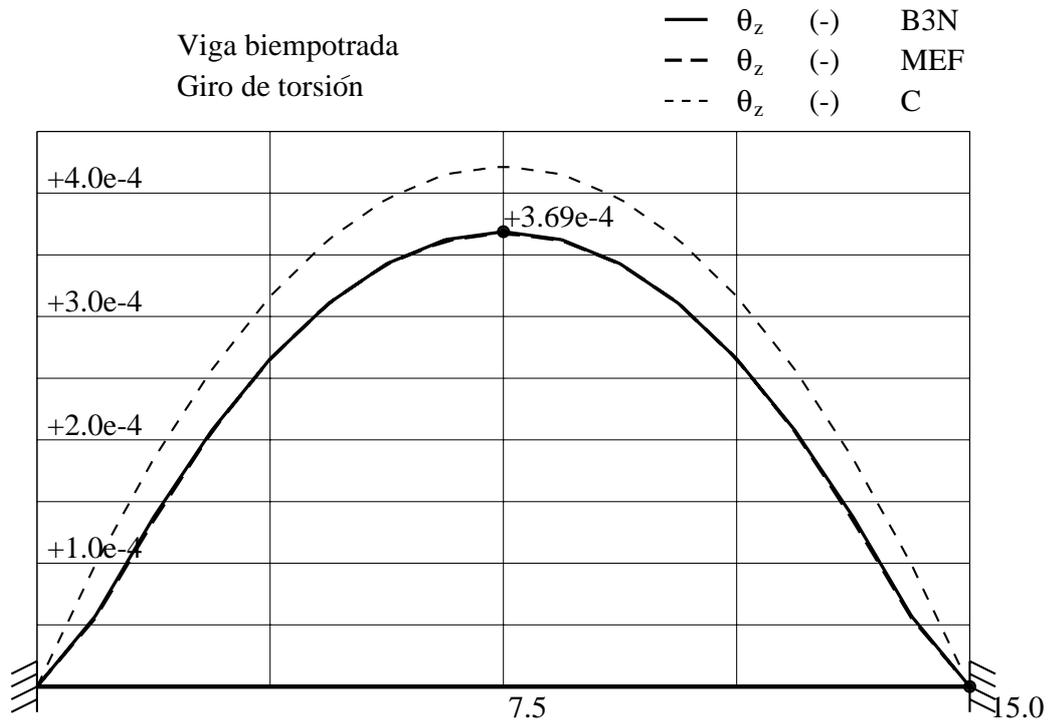


Figura 6.41: Viga biempotrada. Giro de torsión  $\theta_z$  (-).

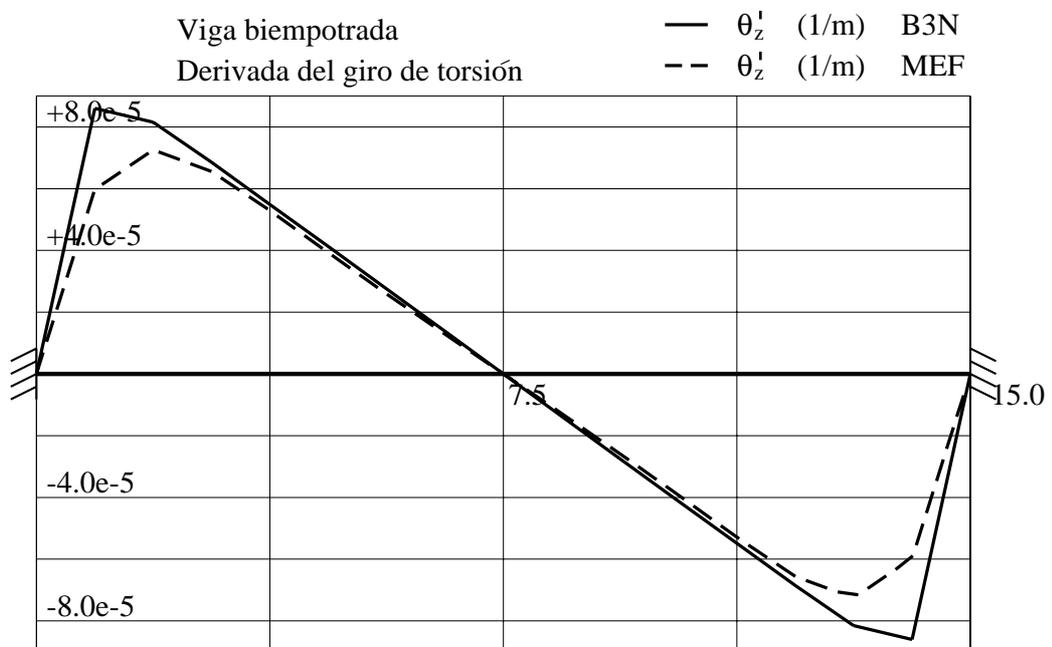


Figura 6.42: Viga biempotrada. Derivada del giro de torsión  $\theta_z'$  (1/m).

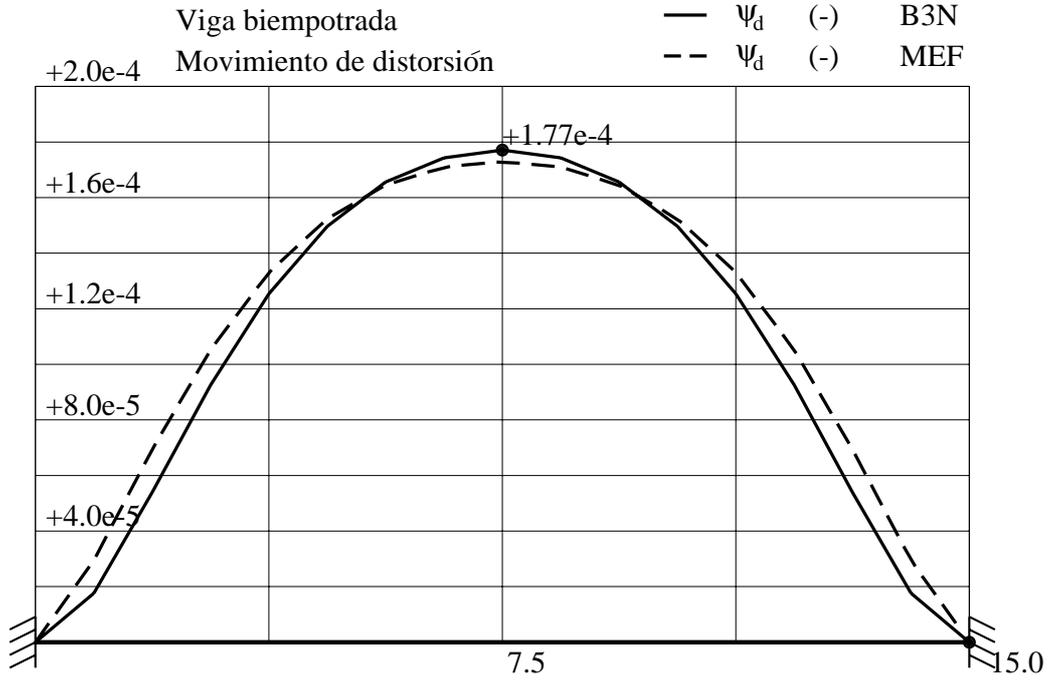


Figura 6.43: Viga biempotrada. Movimiento de distorsión  $\psi_d$  (-).

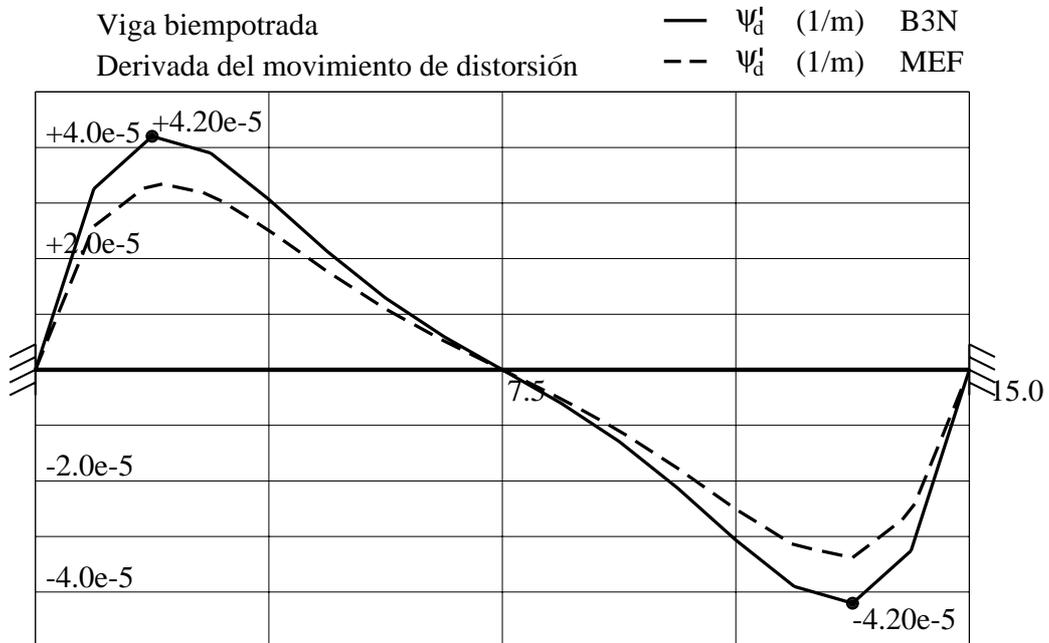


Figura 6.44: Viga biempotrada. Derivada del movimiento de distorsión  $\psi'_d$  (1/m).

### 6.6.6. COMPARACIÓN DE TENSIONES

Los valores de las tensiones que se obtienen con el modelo de elementos **B3N** se han representado en una vista inferior en tres dimensiones en las figuras (6.45) y (6.46). Se aprecia en especial, que las tensiones normales  $\sigma_z$  se concentran en las secciones próximas a los empotramientos, siendo muy pequeñas o nulas en el resto.

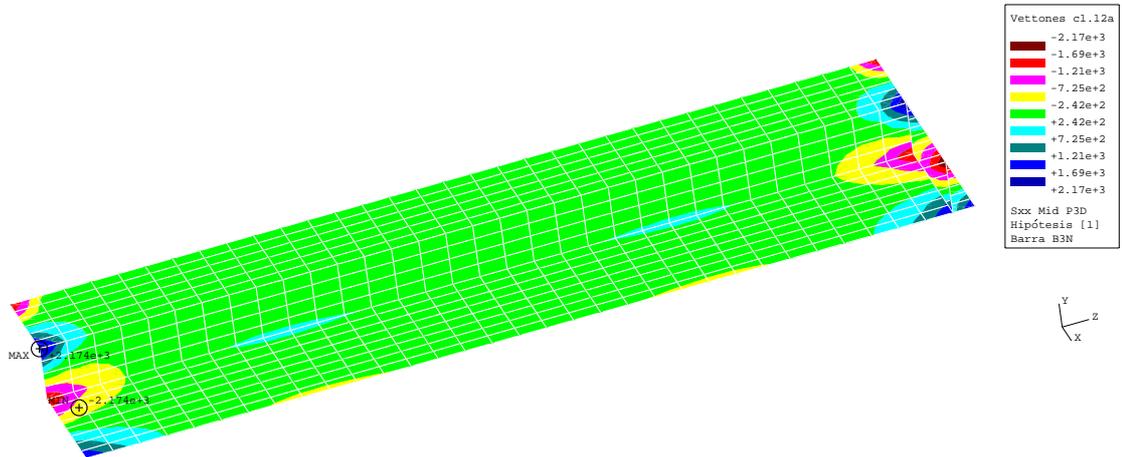


Figura 6.45: Viga biempotrada. Modelo de barras **B3N**. Tensión  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ).

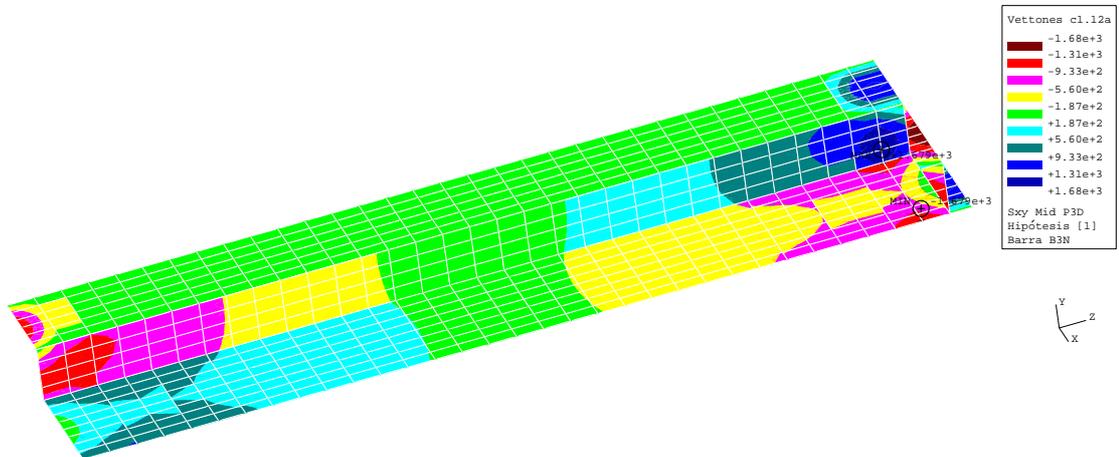


Figura 6.46: Viga biempotrada. Modelo de barras **B3N**. Tensión  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ).

Para la sección de empotramiento izquierda en las figuras (6.47) y (6.48) se ha representado la distribución de tensiones en la sección obtenida con el elemento unidimensional **B3N** y con elementos finitos **MEF**, apreciándose diferencias importantes.

En esta sección, el valor máximo de la tensión normal con el elemento barra es un 62.9% mayor que el valor obtenido con elementos finitos, y mientras que la distribución con el elemento barra es lineal en cada pared, al corresponderse con la distribución lineal

de la función de alabeo de torsión  $w_a$ , para el caso de los elementos finitos la distribución claramente no sigue una ley lineal. En el caso de las tensiones tangenciales se aprecia una gran discrepancia tanto en valores como incluso del signo, y en la forma general de la distribución.

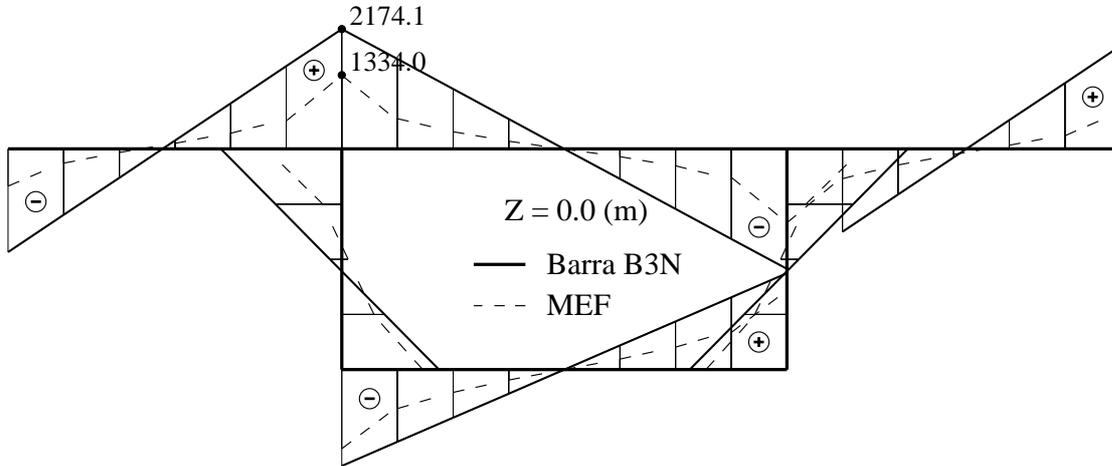


Figura 6.47: Viga biempotrada. Tensiones  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en empotramiento.

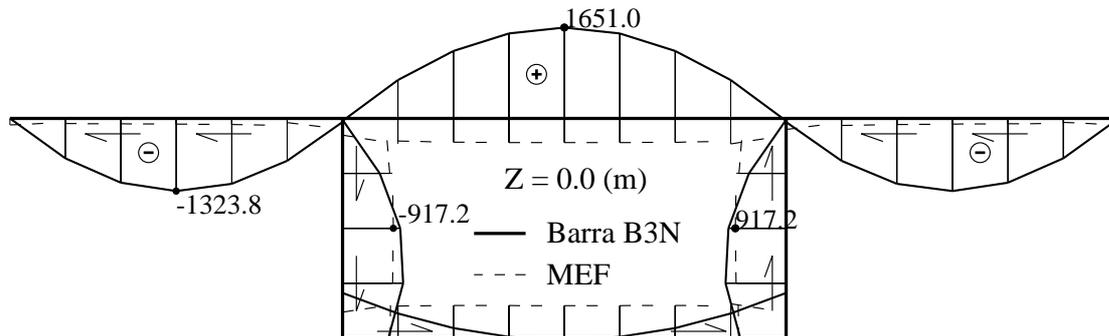


Figura 6.48: Viga biempotrada. Tensiones  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ) en empotramiento.

Para poder ver la diferencia en los valores a lo largo de toda la viga en los gráficos (6.49) a (6.52) se ha representado el valor de la tensión normal o tangencial en cuatro puntos de la sección. De ellos se deduce que los valores de tensiones entre los obtenidos con el elemento barra (**B3N**) y con elementos finitos (**MEF**) son muy semejantes a lo largo de toda la viga, excepto en las secciones de empotramiento y sus cercanías.

Para conocer un posible origen de estas discrepancias hay que revisar las hipótesis simplificadoras que se han hecho en el desarrollo de la teoría de comportamiento de las secciones de paredes delgadas. En el apartado 4.5 al obtener la deformación longitudinal se hizo la hipótesis de despreciar los valores que dependían de las derivadas cuartas, respecto de los que dependían de las derivadas segundas. En el caso de un problema de torsión-distorsión, si no se hace esa hipótesis las tensiones vendrían dadas por:

$$\sigma_z = E \cdot \left( \left( +w_a \cdot \theta_z'' + w_{at} \cdot \theta_z^{IV} \right) + \left( -w_d \cdot \psi_d'' + w_{dt} \cdot \psi_d^{IV} \right) \right)$$

Para comprobar si se cumple esta hipótesis en las figuras (6.39) y (6.40) se compara la segunda derivada con la cuarta, con los valores obtenidos de la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales, que son hacia los que converge la solución con elementos barra **B3N**. En el caso del giro de torsión la derivada cuarta  $\theta_z^{IV}$  es claramente mayor que la derivada segunda  $\theta_z^{II}$  en la sección de empotramiento, y como las funciones de alabeo  $w_a$  y  $w_{at}$  por las que se multiplica estas derivadas tienen el mismo orden de valores (véase las figuras (6.4) y (6.5)), se puede concluir que en las secciones de empotramiento no se puede despreciar la derivada cuarta del giro. En el caso del movimiento de distorsión el valor de la cuarta derivada es del orden de la mitad del valor de la segunda derivada, teniendo las funciones de alabeo  $w_d$  y  $w_{dt}$  valores del mismo orden (véase las figuras (6.6) y (6.7)), por lo que tampoco parece que se pueda despreciar un término respecto del otro.

A continuación se estudia con los valores de las derivadas de la solución analítica, el valor de la tensión normal en un punto concreto para que se vea mejor las magnitudes de cada término en que se descompone la tensión. Para el extremo superior del alma izquierda en el empotramiento izquierdo de la viga, si se desprecia las cuartas derivadas la tensión es:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E \cdot \left( +w_a \cdot \theta_z'' - w_d \cdot \psi_d'' \right) = \\ &= 2131.0 + 209.8 = 2340.8 \text{ (kN/m}^2\text{)}\end{aligned}$$

Si se considera los términos con las cuartas derivadas:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E \cdot \left( \left( +w_a \cdot \theta_z'' + w_{at} \cdot \theta_z^{IV} \right) + \left( -w_d \cdot \psi_d'' + w_{dt} \cdot \psi_d^{IV} \right) \right) = \\ &= ( 2131.0 + 11148.3 ) + ( 209.8 + 0.0 ) = \\ &= ( 13279.2 + 209.8 ) = 13489.1 \text{ (kN/m}^2\text{)}\end{aligned}$$

El valor de esta tensión normal obtenido con el modelo de elementos finitos es de  $\sigma_z = 1334.0 \text{ (kN/m}^2\text{)}$ . Quedando con este cálculo claramente constatado que no se puede despreciar en las secciones de empotramiento la derivadas cuartas del giro de torsión y del movimiento de distorsión.

Las tensiones tangenciales como se ha visto en varias ocasiones vienen dadas por la expresión:

$$\tau_{sz} = G \left( \left( t_a \theta_z' + w'_{at} \theta_z''' \right) + \left( t_d \psi_d' + w'_{dt} \psi_d''' \right) \right)$$

Como por condición de contorno en los empotramientos las primeras derivadas se ha impuesto que sean nulas, con la teoría de secciones de paredes delgadas sólo hay en la sección de empotramiento tensiones tangenciales por torsión y distorsión no uniforme que dependen de las terceras derivadas, pero en vista de la distribución de tensiones tangenciales en la sección de empotramiento obtenida con el método de los elementos finitos (ver figura (6.48)) no se cumple en la realidad. Se recuerda en este punto, que la hipótesis simplificadora que se ha hecho sobre las tensiones tangenciales, es despreciar la energía de deformación correspondiente a las componentes no uniformes, es decir, las que dependen de las derivadas terceras.

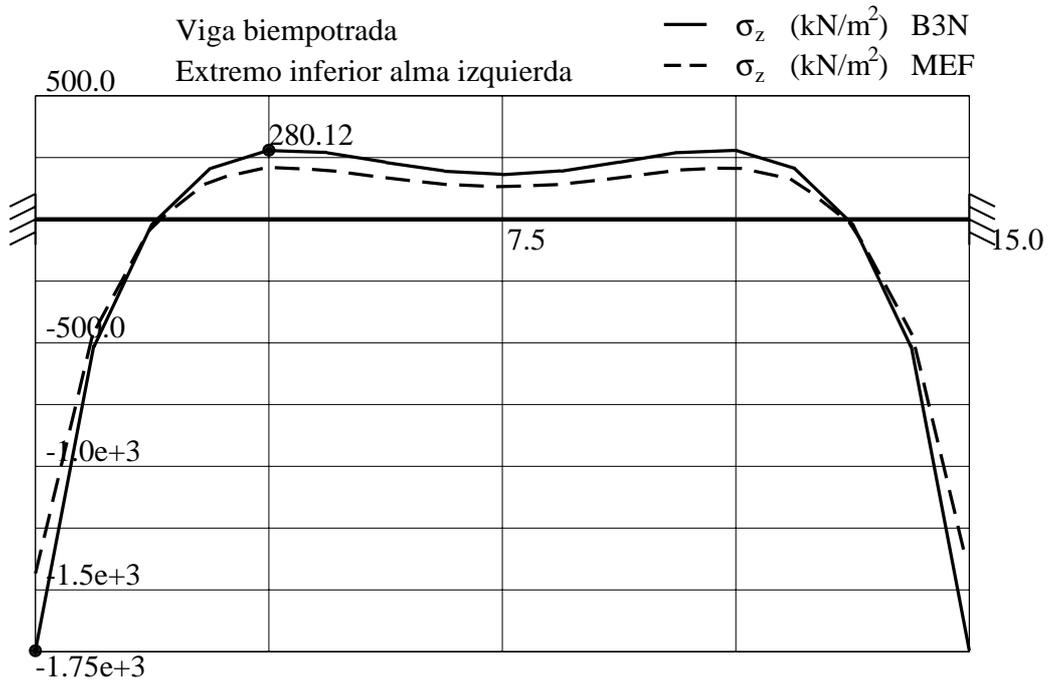


Figura 6.49: Viga biempotrada. Tensión  $\sigma_z$  (kN/m<sup>2</sup>). Extremo inferior del alma izquierda.

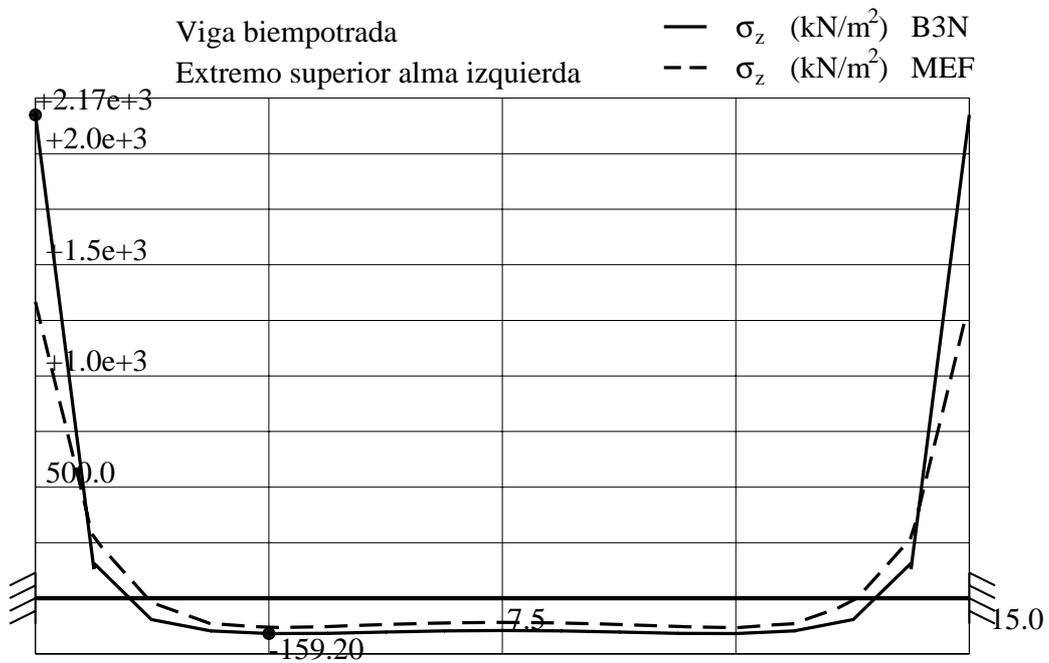


Figura 6.50: Viga biempotrada. Tensión  $\sigma_z$  (kN/m<sup>2</sup>). Extremo superior del alma izquierda.

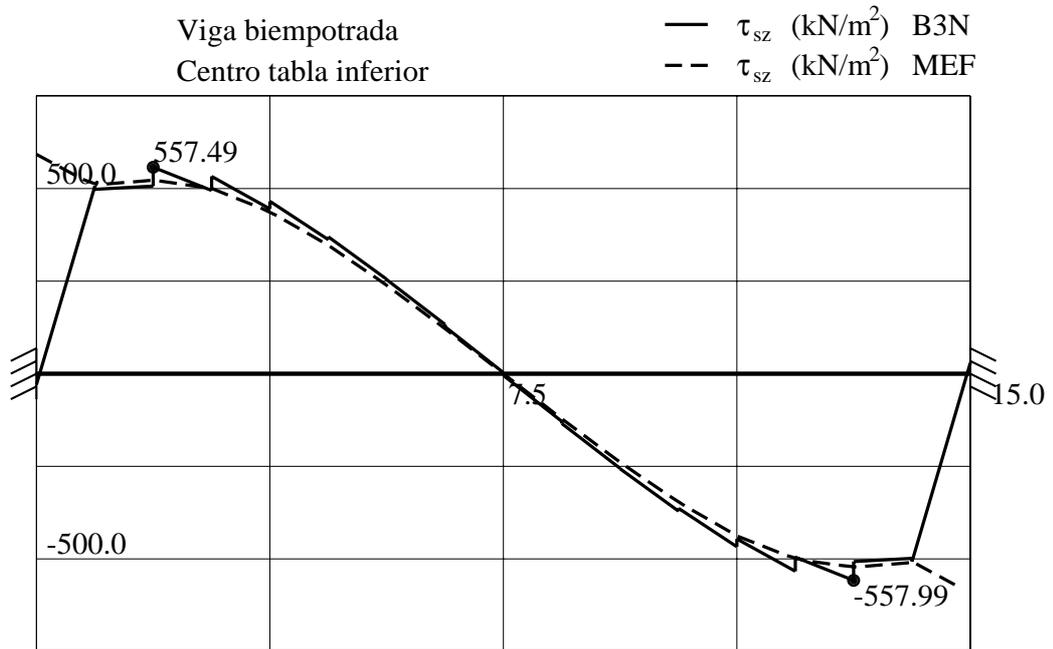


Figura 6.51: Viga biempotrada. Tensión  $\tau_{sz}$  (kN/m<sup>2</sup>). Centro de la tabla inferior.

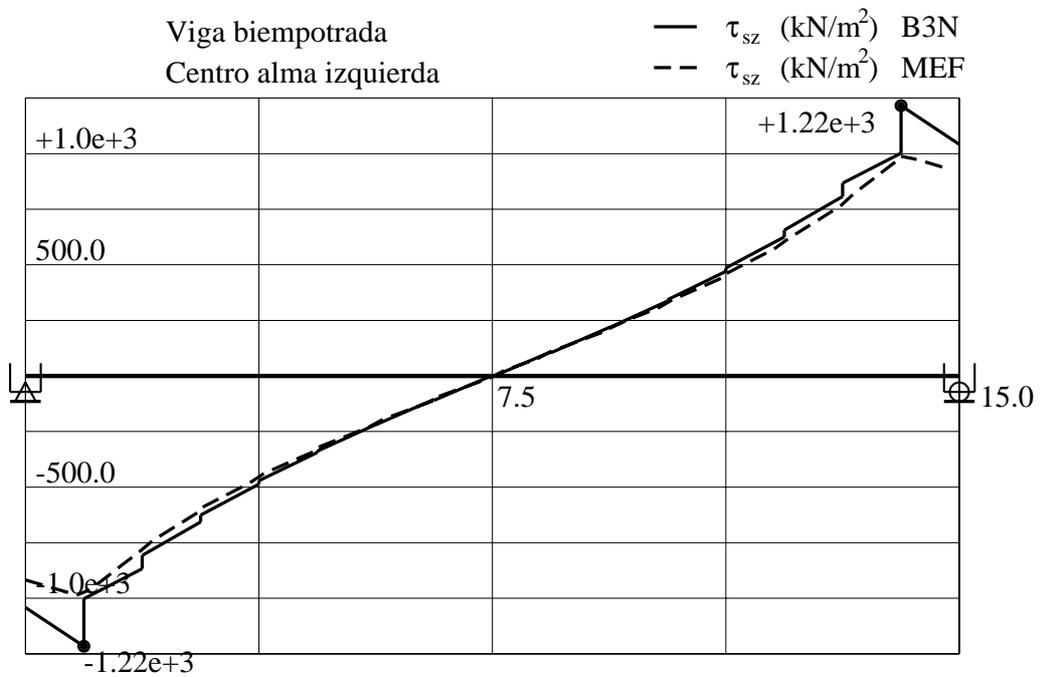


Figura 6.52: Viga biempotrada. Tensión  $\tau_{sz}$  (kN/m<sup>2</sup>). Centro del alma izquierda.

## 6.6.7. COMPARACIÓN DE ESFUERZOS

En la figura (6.53) se ha representado la comparación entre el momento torsor total  $M_z$  obtenido con una discretización de dieciséis elementos unidimensionales **B3N** y el obtenido por integración de tensiones en el modelo de elementos finitos **MEF**.

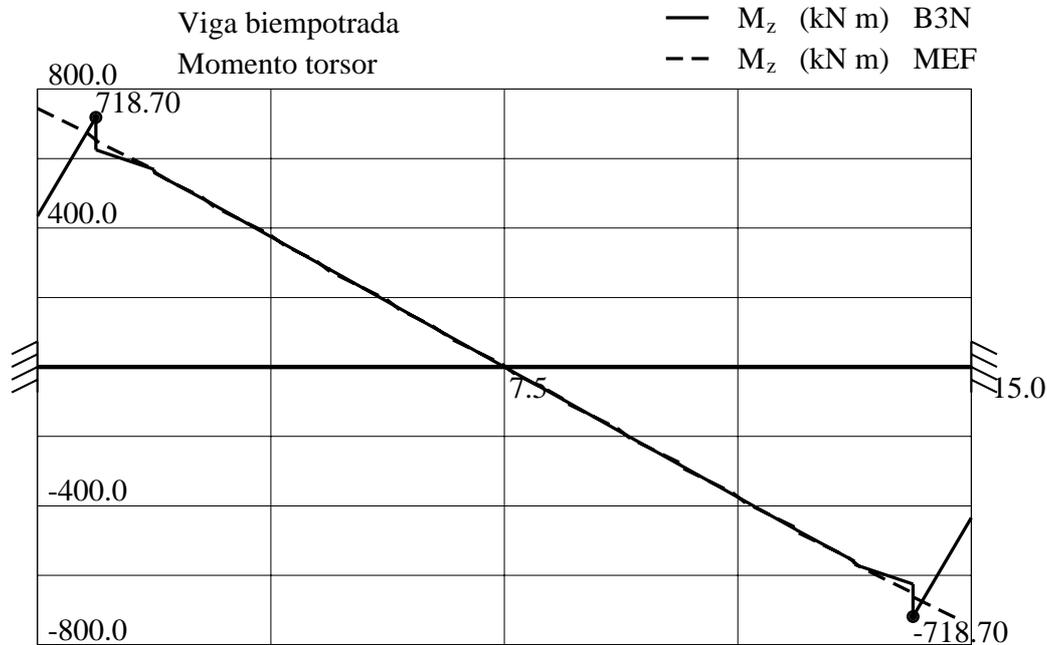


Figura 6.53: Momento torsor total  $M_z$  ( $kN \cdot m$ ).

Se observa buena concordancia, excepto en el empotramiento donde el error del torsor obtenido con el elemento **B3N** es del 42.1%. En la siguiente tabla se presenta un estudio de la convergencia del momento torsor total  $M_z$  en el empotramiento al aumentar la discretización:

<i>N° Barras</i>	$M_z(0)$ ( $kN \cdot m$ )
4	123.7
8	268.6
16	433.9
32	565.7
64	650.0
128	697.9
256	723.4
<i>Exacto</i>	750.0

Se aprecia una convergencia muy lenta. En el empotramiento  $\theta'_z = 0$  por lo que el torsor sólo depende de la derivada tercera, que es un orden de derivación dos veces superior al de los grados de libertad utilizados por el elemento unidimensional, por lo que la mala convergencia era esperable. Si en vez de obtener los torsos a partir de las deformaciones, se obtienen a partir de las fuerzas nodales de equilibrio con las matrices de rigidez, para

cualquier discretización el valor es el exacto, como es de esperar en el método de los elementos finitos

En las gráficas (6.54) y (6.55) se han comparado los bimomentos torsor y distorsor, que como son esfuerzos equivalentes a la distribución de tensiones normales, estando los resultados de los elementos finitos obtenidos por regresión estadística. Se reproducen las conclusiones obtenidas al analizar las tensiones normales, en el empotramiento especialmente para el esfuerzo de torsión los valores son diferentes de los reales, por los motivos ya indicados.

## 6.7. ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

A lo largo de este capítulo se ha estudiado el problema de torsión-distorsión desde un punto de vista teórico, y práctico mediante la aplicación a un caso de una viga con dos posibles vinculaciones en ambos extremos: apoyos en horquilla o empotramientos. Se ha encontrado que para la viga con apoyos en horquilla los resultados son buenos a lo largo de toda la viga, véase a modo de resumen la comparación de tensiones en la sección más solicitada en la figura (6.22). Mientras que como viga biempotrada, aunque los valores son buenos en la zona central de la viga, en los empotramientos y sus proximidades son malos, véase como ejemplo la comparación de tensiones en el empotramiento en la figura (6.47).

Del estudio de comprobación de las hipótesis simplificadoras utilizadas en la teoría, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- En las zonas próximas a los empotramientos las derivadas terceras no son despreciables frente a las derivadas primeras, por lo que no es despreciable la energía de deformación por tensiones tangenciales no uniformes.
- En las zonas próximas a los empotramientos las derivadas cuartas no son despreciables frente a las derivadas segundas, por lo que no son despreciables las tensiones normales que dependen de las funciones de alabeo no uniformes.

Como conclusión final, se puede decir que el elemento unidimensional desarrollado es capaz de reproducir adecuadamente el comportamiento de una viga con cargas de torsión y distorsión, excepto en las zonas de empotramiento, en las cuales el modelo teórico de modos resistentes no es capaz de reproducir la realidad, por ser zonas en que la rápida variación de las tensiones en muy poca longitud hace que se debiera tener en cuenta derivadas de orden superior, que en el resto de zonas si son despreciables. Por otra parte hay que indicar, que a la hora de la aplicación práctica en el análisis de tableros de puente, estas condiciones de secciones con empotramiento perfecto son poco habituales.

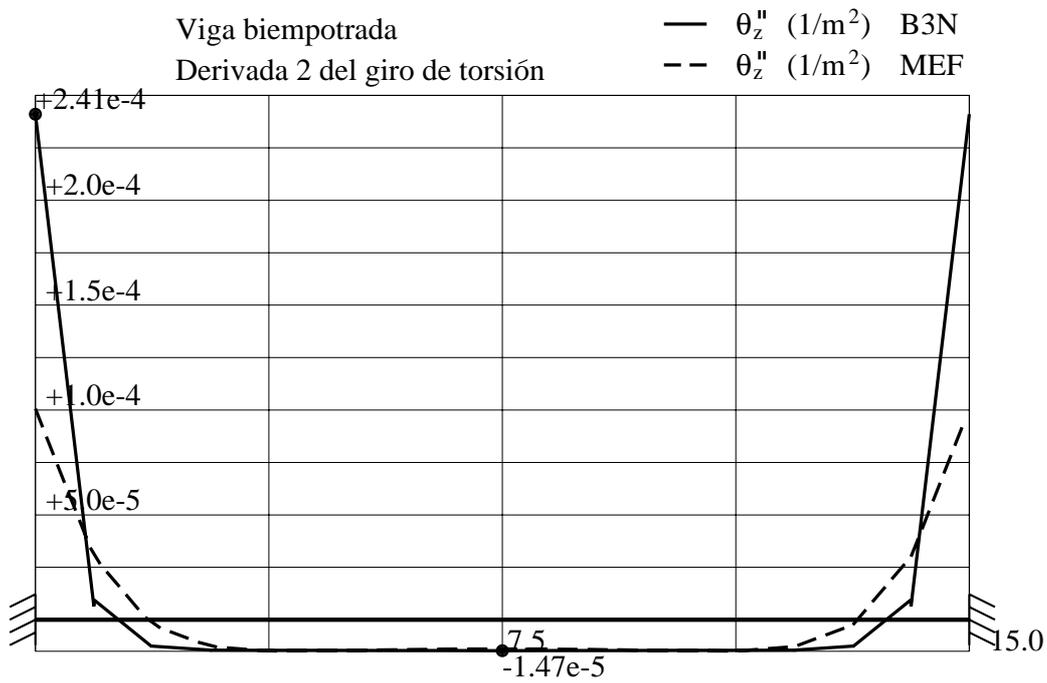


Figura 6.54: Viga biempotrada. Bimomento torsor  $\mathbf{B}_w = (E_o \cdot I_a \cdot \theta_z'')$ .

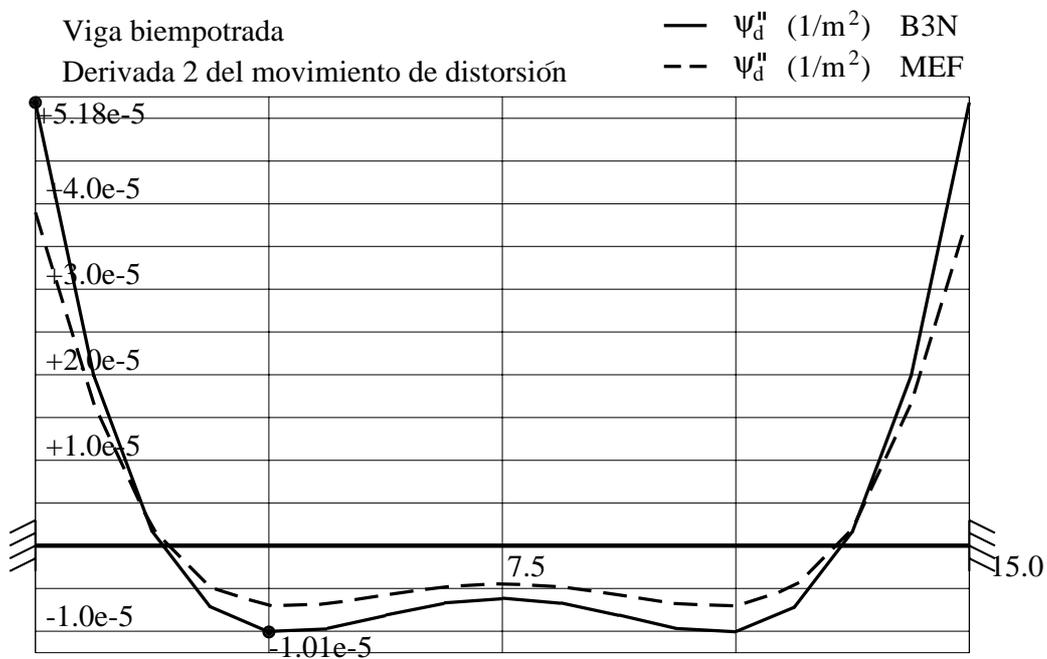


Figura 6.55: Viga biempotrada. Bimomento distorsor  $\mathbf{B}_d = -(E_o \cdot I_d \cdot \psi_d'')$ .

## Capítulo 7

# MODOS ADICIONALES DE TORSIÓN Y DISTORSIÓN

### 7.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se ha visto que en problemas de torsión y distorsión, en las secciones con el alabeo impedido no se obtienen buenos resultados con los modos considerados en el capítulo 3, porque algunas de las hipótesis simplificadoras utilizadas no se cumplen en estas secciones. En este apartado se pretende ampliar la teoría para torsión y distorsión mediante la no consideración de las simplificaciones que se han hecho, lo cual conduce a que haya que considerar modos adicionales de torsión y distorsión.

El concepto que subyace en la ampliación de los modos a considerar es el siguiente. Las expresiones utilizadas para el movimiento longitudinal  $v_z$  son una aproximación en forma de desarrollo en serie (semejante a un desarrollo en serie de Taylor de una función), en el que sólo se han considerado los dos primeros términos del desarrollo, correspondientes a la primera y tercera derivada del giro de torsión y del movimiento de distorsión, y que se han identificado con los modos resistentes denominados uniforme y no uniforme. Si el último término de la serie utilizada que se despreció no es despreciable, lo que se debe de hacer es considerar más términos de la serie, que es lo que se va a hacer en los siguientes apartados.

### 7.2. MODO ADICIONAL DE TORSIÓN

El campo de movimientos  $v_z$  de torsión no uniforme dado por la ecuación (3.85) se puede ampliar añadiendo una función de alabeo adicional  $w_{a4}$  multiplicada por una derivada de orden superior del giro de torsión  $d^5\theta_z/dz^5$ . Los movimientos en el plano de la sección  $(v_x, v_y)$  y longitudinal a la pared  $v_s$  siguen estando definidos por las mismas expresiones (3.46) y (3.48).

$$\begin{aligned} v_x &= -(y - y_a) \cdot \theta_z \\ v_y &= +(x - x_a) \cdot \theta_z \\ v_z &= w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + w_{at} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} + w_{a4} \cdot \frac{d^5\theta_z}{dz^5} \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$v_s = v_x \cdot t_x + v_y \cdot t_y$$

Por derivación se obtiene las deformaciones longitudinal y transversal, cuyas expresiones son como las obtenidas para el modo de torsión no uniforme (3.90) y (3.86) pero con la adición de un término adicional.

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} + w_{at} \cdot \frac{d^4\theta_z}{dz^4} + w_{a4} \cdot \frac{d^6\theta_z}{dz^6} \\ \gamma_{sz} &= \left( -h_a + \frac{\partial w_a}{\partial s} \right) \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} + \frac{\partial w_{a4}}{\partial s} \cdot \frac{d^5\theta_z}{dz^5} \end{aligned}$$

Despreciando en la deformación longitudinal el término con mayor grado de derivación, las tensiones normales y su derivada quedan como:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \cdot \left( w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} + w_{at} \cdot \frac{d^4\theta_z}{dz^4} \right) \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= E \cdot \left( w_a \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3} + w_{at} \cdot \frac{d^5\theta_z}{dz^5} \right) \end{aligned}$$

Considerando el caso particular en que estén impedidos el alabeo de torsión uniforme ( $d\theta_z/dz = 0$ ) y el de torsión no uniforme ( $d^3\theta_z/dz^3 = 0$ ), y sustituyendo los valores particularizados de las tensiones tangenciales y normales en la ecuación integral de equilibrio (3.5) queda lo siguiente:

$$\int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} G \frac{\partial w_{a4}}{\partial s} \frac{d^5\theta_z}{dz^5} dA = \int_A \delta \chi E w_{at} \frac{d^5\theta_z}{dz^5} dA$$

En esta ecuación se simplifican las derivadas de grado cinco, siendo precisamente este el motivo por el que se eligió que la nueva función de alabeo  $w_{a4}$  se multiplicara por la derivada quinta del giro de torsión.

$$\int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} G \frac{\partial w_{a4}}{\partial s} dA = \int_A \delta \chi E w_{at} dA$$

De la misma forma que se ha hecho anteriormente para otros modos, se plantea una interpolación de la función incógnita en función de los valores nodales  $w_{a4} = [N_i]\{w_{a4i}\}$ , y se considera para la función arbitraria el valor  $\delta \chi = \delta w_{a4i}$ . Quedando al final el sistema de ecuaciones:

$$[K] \{w_{a4i}\} = \{f_{a4i}\}$$

Donde:

$$[K] = \int_A [N_i]'^t G [N_i]' dA \quad \{f_{a4i}\} = \int_A [N_i]^t E w_{at} dA$$

Continuando con el caso particular en que los alabeos de torsión uniforme y no uniforme estén impedidos, sustituyendo las expresiones de las derivadas de las tensiones en la ecuación diferencial de equilibrio (3.6) queda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w_{a4}}{\partial s^2} = -\frac{E}{G} \cdot w_{at}}$$

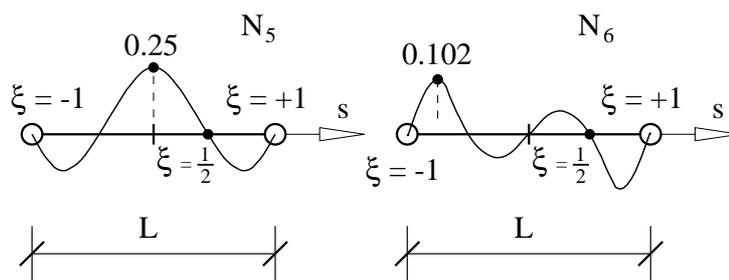


Figura 7.1: Funciones de forma adicionales.

En el apartado 3.10 se vio que la función de alabeo de torsión no uniforme  $w_{at}$  era una función cúbica de  $s$ , por lo que la función  $w_{a4}$  tiene que tener una variación quíntica de acuerdo con esta relación entre ellas. Por ello, a las cuatro funciones de forma de ecuaciones (3.30) y representadas en la figura (3.18)<sup>1</sup> hay que añadir dos nuevas funciones de forma, elegidas de forma que sea nula la integral del producto de sus derivadas con cada una de las derivadas de las cuatro primeras funciones de forma. La deducción de estas funciones se puede encontrar en el apéndice B, están representadas en la figura (7.1) y tienen por ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} N_5(\xi) &= (1 - \xi^2) \left( \frac{1}{4} - \xi^2 \right) \\ N_6(\xi) &= (\xi - \xi^3) \left( \frac{1}{4} - \xi^2 \right) \end{aligned} \right\}$$

Utilizando estas funciones de forma se obtiene la siguiente matriz de rigidez:

$$[K] = \frac{2 \cdot G \cdot t}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 0 & 2/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 & 0 & -2/7 \\ 0 & 0 & 2/15 & 0 & 31/42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/7 & 0 & 43/126 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (3.95) para la interpolación de la función de alabeo de torsión no uniforme  $w_{at}$ , se obtiene para el vector de fuerzas la siguiente expresión:

$$\{f_{a4i}\} = \frac{E t L}{2} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 & -2/15 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/15 \\ \hline 2/3 & 2/3 & 16/15 & 0 \\ -2/15 & 2/15 & 0 & 16/105 \\ 1/30 & 1/30 & 4/35 & 0 \\ 1/42 & -1/42 & 0 & -4/315 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{at1} \\ w_{at2} \\ w_{at3} \\ w_{at4} \end{Bmatrix}$$

Por la elección realizada de las funciones de forma, las cuatro variables anodales ( $w_{a4.3}$  a  $w_{a4.6}$ ) quedan desacopladas de las dos variables nodales ( $w_{a4.1}$  y  $w_{a4.2}$ ), por lo que las

<sup>1</sup>Página 49

internas se pueden calcular directamente sin tener que ensamblarlas en la matriz de rigidez de toda la sección. Además, los cuatro grados de libertad anodales quedan desacoplados dos a dos, por lo que premultiplicando el vector de fuerzas que les corresponde por la inversa de la parte correspondiente de la matriz de rigidez se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w_{a4.3} \\ w_{a4.5} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{G} \frac{L^2}{4} \begin{bmatrix} 775/2048 & -35/512 \\ -35/512 & 175/128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 16/15 & 0 \\ 1/30 & 1/30 & 4/35 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{at1} \\ w_{at2} \\ w_{at3} \\ w_{at4} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{E}{G} L^2 \begin{bmatrix} 1/16 & 1/16 & 19/192 & 0 \\ 0 & 0 & 1/48 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{at1} \\ w_{at2} \\ w_{at3} \\ w_{at4} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_{a4.4} \\ w_{a4.6} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{G} \frac{L^2}{4} \begin{bmatrix} 1505/2048 & 315/512 \\ 315/512 & 441/128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/15 & 2/15 & 0 & 16/105 \\ 1/42 & -1/42 & 0 & -4/315 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{at1} \\ w_{at2} \\ w_{at3} \\ w_{at4} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{E}{G} L^2 \begin{bmatrix} -1/48 & 1/48 & 0 & 5/192 \\ 0 & 0 & 0 & 1/80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{at1} \\ w_{at2} \\ w_{at3} \\ w_{at4} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Para poder resolver el sistema de ecuaciones planteado para la sección es necesario hacer nula la función de alabeo incógnita en un nodo cualquiera. La solución que se obtiene hay que ortogonalizarla respecto del axil, con el empleo de la siguiente ecuación:

$$w_{a4}^* = w_{a4} - \frac{1}{A} \int_A \frac{E}{E_o} w_{a4} dA$$

Teniendo en cuenta las expresiones de las funciones de forma, la integral necesaria se puede obtener de la siguiente forma:

$$\int_A \frac{E}{E_o} w_{a4} dA = \frac{E}{E_o} \frac{tL}{2} \left[ 1, 1, \frac{4}{3}, 0, \frac{1}{15}, 0 \right] \{w_{a4i}\}$$

Si la función de alabeo resultante de esta ortogonalización se ortogonalizara respecto de los giros de flexión, ocurre en general que no se cumple que ( $w'_{a4i} = 0$ ) en los extremos de las paredes libres, por lo que por incumplirse la condición de tensión tangencial nula en estos puntos, no se puede realizar dicha ortogonalización.

Si se desea obtener la primera derivada de la función de alabeo, teniendo en cuenta las funciones de forma, las ecuaciones a utilizar son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{a4}}{\partial s} &= [N'_i]^t \cdot \{w_{a4i}\} = \\ &= \frac{2}{L} \cdot \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2 \cdot \xi, 1 - 3 \cdot \xi^2, -\frac{5}{2} \cdot \xi + 4 \cdot \xi^3, \frac{1}{4} - \frac{15}{4} \cdot \xi^2 + 5 \cdot \xi^4 \right] \cdot \{w_{a4i}\} \end{aligned}$$

### 7.3. MODO ADICIONAL DE DISTORSIÓN

Para obtener el modo adicional de distorsión se procede de forma totalmente semejante a lo expuesto para el modo adicional de torsión. Los movimientos en el plano de la sección siguen teniendo la ecuación considerada anteriormente (3.114), y a la definición del movimiento fuera del plano de la sección según la ecuación (3.144), se le añade un término adicional con un orden de derivación superior.

$$v_z = -w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + w_{dt} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3} + w_{d4} \cdot \frac{d^5\psi_d}{dz^5} \quad (7.3)$$

Por derivación del campo de movimientos se obtienen las deformaciones:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= -w_d \frac{d^2\psi_d}{dz^2} + w_{dt} \frac{d^4\psi_d}{dz^4} + w_{d4} \cdot \frac{d^6\psi_d}{dz^6} \\ \gamma_{sz} &= \left( -\frac{\partial w_d}{\partial s} + u_{ds} - \frac{du_{dn}}{ds} \cdot y_s \right) \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3} + \frac{\partial w_{d4}}{\partial s} \cdot \frac{d^5\psi_d}{dz^5} \end{aligned}$$

Considerando el caso particular en que estén impedidos el alabeo de distorsión uniforme ( $d\psi_d/dz = 0$ ) y el de distorsión no uniforme ( $d^3\psi_d/dz^3 = 0$ ), despreciando el término de mayor orden de derivación en las tensiones normales, y sustituyendo los valores de las tensiones obtenidos a partir de las deformaciones en la ecuación integral de equilibrio (3.5) queda:

$$\int_A \frac{\partial \delta \chi}{\partial s} G \frac{\partial w_{d4}}{\partial s} dA = \int_A \delta \chi E w_{dt} dA$$

Para el desarrollo de esta expresión se procede igual que lo indicado en el apartado anterior para el modo adicional de torsión, cambiando  $w_{a4}$  por  $w_{d4}$ , y  $w_{at}$  por  $w_{dt}$ . Resultando la misma matriz de rigidez y vector de fuerzas, siendo la única diferencia el cambio de nombre de las variables.

### 7.4. EJEMPLO DE MODOS ADICIONALES

Para la sección del ejemplo del apartado 6.2 se han obtenido los modos adicionales de torsión y distorsión con las ecuaciones que se acaban de ver. Las funciones de alabeo resultantes y sus derivadas se han representado en las figuras (7.2) y (7.3).

Es de destacar en este ejemplo que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_{w_{at}.x} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{at} x dA \neq 0 \\ I_{w_{at}.y} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{at} y dA = 0 \\ I_{w_{dt}.x} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{dt} x dA \neq 0 \\ I_{w_{dt}.y} &= \int_A \frac{E}{E_o} w_{dt} y dA = 0 \end{aligned}$$

Que significa que las funciones de alabeo  $w_{at}$  y  $w_{dt}$  no originan momentos flectores de flexión en el plano vertical, pero si de flexión en el plano horizontal.

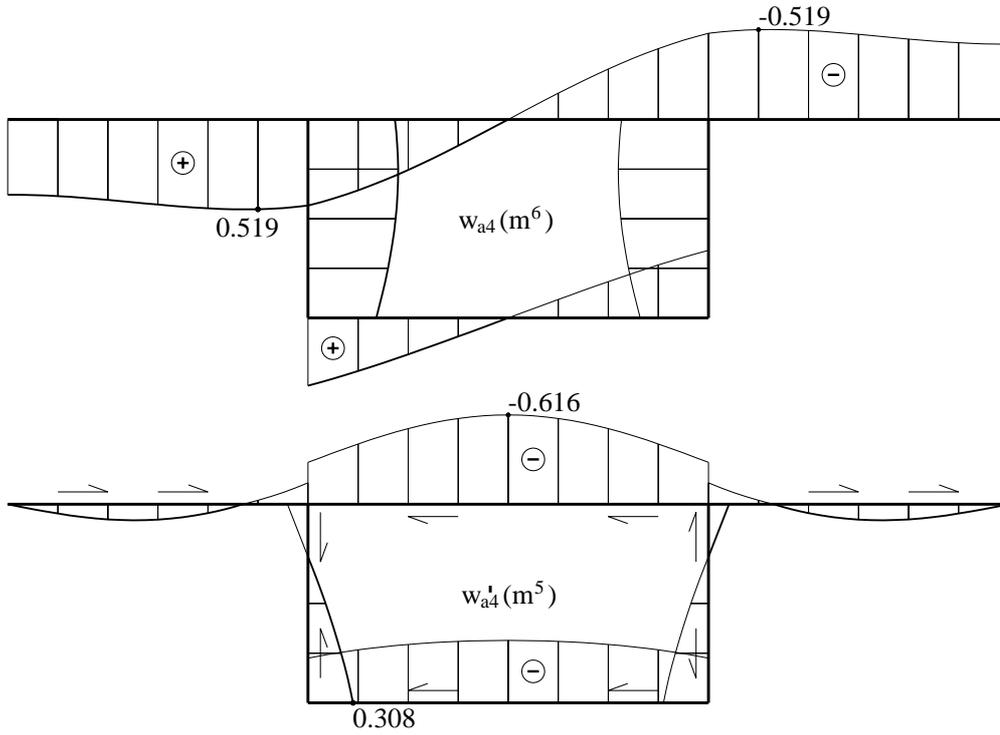


Figura 7.2: Modo adicional de torsión: alabeo  $w_{a4} (m^6)$  y su derivada  $w'_{a4} (m^5)$ .

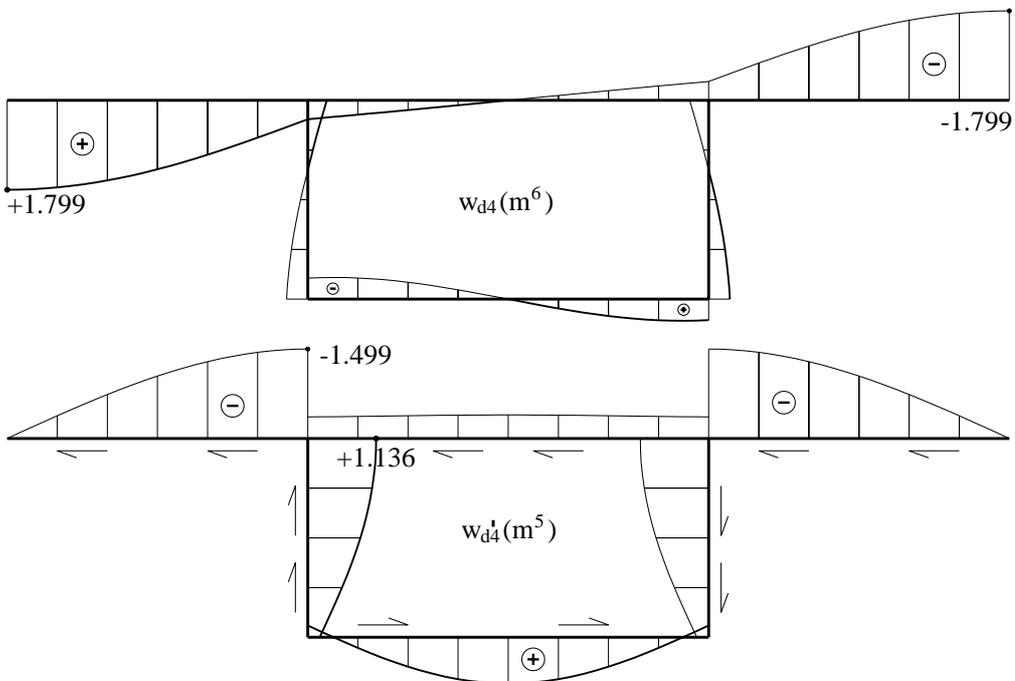


Figura 7.3: Modo adicional de distorsión: alabeo  $w_{d4} (m^6)$  y su derivada  $w'_{d4} (m^5)$ .

## 7.5. ECUACIÓN DIFERENCIAL FLEXIÓN - TORSIÓN - DISTORSIÓN

En este apartado se van a deducir las ecuaciones diferenciales para el problema de torsión y distorsión que incluyan los modos adicionales. A partir del campo de movimientos se va a obtener la energía potencial total, y minimizando esta se deducen las ecuaciones buscadas.

Las funciones de alabeo de torsión  $w_{at}$  y distorsión  $w_{dt}$  no uniformes no se ortogonalizan respecto de los giros de flexión, por lo que si se considera su influencia en las tensiones normales el problema de torsión y distorsión se acopla con el de flexión. Por lo que hay que considerar ambos problemas simultáneamente. Modificando las ecuaciones (4.6), el campo de movimientos en el que se incluyen los modos adicionales de torsión y distorsión será el siguiente:

Modo	$\mathbf{v}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$
<i>Axil</i>			$1 \cdot u_z$
<i>Flexión <math>y - z</math></i>		$1 \cdot u_y$	$y \cdot \theta_x$
<i>Cortante <math>y</math></i>			$w_{yo} \cdot A_y \cdot \chi_y$
<i>Flexión <math>x - z</math></i>	$1 \cdot u_x$		$-x \cdot \theta_y$
<i>Cortante <math>x</math></i>			$w_{xo} \cdot A_x \cdot \chi_x$
<i>Torsión</i>	$-(y - y_a) \cdot \theta_z$	$(x - x_a) \cdot \theta_z$	$+w_a \cdot \theta'_z + w_{at} \cdot \theta'''_z + w_{a4} \cdot \theta^V_z$
<i>Distorsión</i>	$u_{dx} \cdot \psi_d$	$u_{dy} \cdot \psi_d$	$-w_d \cdot \psi'_d + w_{dt} \cdot \psi'''_d + w_{d4} \cdot \psi^V_d$

(7.4)

Considerando la simplificación de no considerar el alabeo por cortante en flexión, el campo de movimientos queda como:

Modo	$\mathbf{v}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$
<i>Axil</i>			$1 \cdot u_z$
<i>Flexión <math>y - z</math></i>		$1 \cdot u_y$	$y \cdot \theta_x$
<i>Flexión <math>x - z</math></i>	$1 \cdot u_x$		$-x \cdot \theta_y$
<i>Torsión</i>	$-(y - y_a) \cdot \theta_z$	$(x - x_a) \cdot \theta_z$	$+w_a \cdot \theta'_z + w_{at} \cdot \theta'''_z + w_{a4} \cdot \theta^V_z$
<i>Distorsión</i>	$u_{dx} \cdot \psi_d$	$u_{dy} \cdot \psi_d$	$-w_d \cdot \psi'_d + w_{dt} \cdot \psi'''_d + w_{d4} \cdot \psi^V_d$

Por derivación del movimiento longitudinal  $v_z$  se obtiene la deformación correspondiente:

$$\epsilon_z = 1 \cdot u'_z - x \cdot \theta'_y + y \cdot \theta'_x + w_a \cdot \theta''_z + w_{at} \cdot \theta^{IV}_z + w_{a4} \cdot \theta^{VI}_z - w_d \cdot \psi''_d + w_{dt} \cdot \psi^{IV}_d + w_{d4} \cdot \psi^{VI}_d$$

Si se desprecian los términos en derivadas sextas, se reduce a la expresión:

$$\epsilon_z = 1 \cdot u'_z - x \cdot \theta'_y + y \cdot \theta'_x + w_a \cdot \theta''_z + w_{at} \cdot \theta^{IV}_z - w_d \cdot \psi''_d + w_{dt} \cdot \psi^{IV}_d$$

La energía de deformación por tensiones normales, teniendo en cuenta que se está en ejes principales de inercia, y las ortogonalizaciones realizadas al obtener los modos, se obtiene mediante la expresión:

$$\frac{dU_\epsilon}{dz} = \frac{1}{2} \int_A E \epsilon_z^2 dA = \frac{1}{2} \{\epsilon_g\}^t E_o [I] \{\epsilon_g\}$$

$$\{\epsilon_g\}^t = \left\{ u'_z, \theta'_y, \theta'_x, \theta''_z, \theta_z^{IV}, \psi''_d, \psi_d^{IV} \right\}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 & 0 & -I_{w_{at}.x} & 0 & -I_{w_{dt}.x} \\ 0 & 0 & I_x & 0 & I_{w_{at}.y} & 0 & I_{w_{dt}.y} \\ 0 & 0 & 0 & I_a & I_{w_a.w_{at}} & -I_{w_a.w_d} & I_{w_a.w_{dt}} \\ 0 & -I_{w_{at}.x} & I_{w_{at}.y} & I_{w_a.w_{at}} & I_{w_{at}.w_{at}} & -I_{w_{at}.w_d} & I_{w_{at}.w_{dt}} \\ 0 & 0 & 0 & -I_{w_a.w_d} & -I_{w_{at}.w_d} & I_d & -I_{w_d.w_{dt}} \\ 0 & -I_{w_{dt}.x} & I_{w_{dt}.y} & I_{w_a.w_{dt}} & I_{w_{at}.w_{dt}} & -I_{w_d.w_{dt}} & I_{w_{dt}.w_{dt}} \end{bmatrix}$$

Las nuevas características mecánicas que aparecen son:

$$\begin{array}{l} I_{w_{at}.x} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{at} x dA \\ I_{w_{dt}.x} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{dt} x dA \\ I_{w_a.w_{at}} = \int_A \frac{E}{E_o} w_a w_{at} dA \\ I_{w_{at}.w_{at}} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{at}^2 dA \\ I_{w_{at}.w_{dt}} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{at} w_{dt} dA \\ I_{w_{dt}.w_{dt}} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{dt}^2 dA \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} I_{w_{at}.y} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{at} y dA \\ I_{w_{dt}.y} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{dt} y dA \\ I_{w_a.w_{dt}} = \int_A \frac{E}{E_o} w_a w_{dt} dA \\ I_{w_{at}.w_d} = \int_A \frac{E}{E_o} w_{at} w_d dA \\ I_{w_d.w_{dt}} = \int_A \frac{E}{E_o} w_d w_{dt} dA \end{array} \right.$$

La deformación transversal que se deduce a partir del campo de movimientos que se ha definido es:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= t_x \cdot (u'_x - \theta_y) + t_y \cdot (u'_y + \theta_x) + \\ &+ t_a \cdot \theta'_z + w'_{at} \cdot \theta'''_z + w'_{a4} \cdot \theta_z^V + t_d \cdot \psi'_d + w'_{dt} \cdot \psi'''_d + w'_{d4} \cdot \psi_d^V \end{aligned}$$

Despreciando los términos en derivadas quintas, y teniendo en cuenta que son nulos los cortantes en torsión y distorsión, tanto uniformes como no uniformes (ver apéndice C, expresiones (C.9) a (C.16)), la energía de deformación por tensiones tangenciales se obtiene con la expresión:

$$\frac{dU_\gamma}{dz} = \frac{1}{2} \int_A G \gamma_{sz}^2 dA = \frac{1}{2} \{\gamma_g\}^t G_o [D] \{\gamma_g\}$$

$$\{\gamma_g\}^t = \left\{ u'_x, \theta_y, u'_y, \theta_x, \theta'_z, \theta_z''', \psi'_d, \psi_d'''' \right\}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{xx} & -D_{xx} & D_{xy} & D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_{xx} & D_{xx} & -D_{xy} & -D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{xy} & -D_{xy} & D_{yy} & D_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{xy} & -D_{xy} & D_{yy} & D_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_t & D_{t_a.w_{at}} & D_{t_d.t_a} & D_{t_a.w_{dt}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{t_a.w_{at}} & D_{w_{at}.w_{at}} & D_{t_d.w_{at}} & D_{w_{at}.w_{dt}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{t_d.t_a} & D_{t_d.w_{at}} & D_{t_d.t_d} & D_{t_d.w_{dt}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{t_a.w_{dt}} & D_{w_{at}.w_{dt}} & D_{t_d.w_{dt}} & D_{w_{dt}.w_{dt}} \end{bmatrix}$$

Algunas de estas integrales son nulas como se demuestra a continuación. Teniendo en cuenta que en las paredes abiertas por condición de contorno de tensiones tangenciales nulas se cumple que  $(t_a = 0)$  y  $(t_d = 0)$ , y que en las paredes cerradas las tensiones  $t_a$  y  $t_d$  se pueden descomponer en suma de componentes constantes en cada circuito cerrado, se pueden demostrar las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} D_{t_a.w_{at}} &= \int_A \frac{G}{G_o} t_a w'_{at} dA = 0 \\ D_{t_a.w_{dt}} &= \int_A \frac{G}{G_o} t_a w'_{dt} dA = 0 \\ D_{t_d.w_{at}} &= \int_A \frac{G}{G_o} t_d w'_{at} dA = 0 \\ D_{t_d.w_{dt}} &= \int_A \frac{G}{G_o} t_d w'_{dt} dA = 0 \end{aligned}$$

Quedando la matriz  $[D]$  como:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{xx} & -D_{xx} & D_{xy} & D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_{xx} & D_{xx} & -D_{xy} & -D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{xy} & -D_{xy} & D_{yy} & D_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{xy} & -D_{xy} & D_{yy} & D_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_t & 0 & D_{t_d.t_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{w_{at}.w_{at}} & 0 & D_{w_{at}.w_{dt}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{t_d.t_a} & 0 & D_{t_d.t_d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{w_{at}.w_{dt}} & 0 & D_{w_{dt}.w_{dt}} \end{bmatrix}$$

Siendo por tanto las nuevas características mecánicas que aparecen:

$$\begin{aligned} D_{w_{at}.w_{at}} &= \int_A \frac{G}{G_o} (w'_{at})^2 dA \\ D_{w_{at}.w_{dt}} &= \int_A \frac{G}{G_o} w'_{at} w'_{dt} dA \\ D_{w_{dt}.w_{dt}} &= \int_A \frac{G}{G_o} (w'_{dt})^2 dA \end{aligned}$$

La energía potencial total de la pieza viene dada por la suma entre la energía de deformación y la energía potencial de las acciones exteriores:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^L ( dU_\epsilon + dU_\gamma + dU_{K_d} ) dz \\ &\quad - \int_0^L ( m_t \cdot \theta_z + m_d \cdot \psi_d ) dz \\ &\quad - \int_0^L ( p_x \cdot u_x + p_y \cdot u_y ) dz \end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones diferenciales, hay que establecer que las funciones solución son aquellas que hacen mínima esta energía potencial total. No considerando el problema del axil por estar desacoplado del resto, las condiciones para minimizar son:

$$\left. \begin{aligned} \Pi(\theta_x + \delta\theta_x) - \Pi(\theta_x) &= 0 \\ \Pi(\theta_y + \delta\theta_y) - \Pi(\theta_y) &= 0 \\ \Pi(u_x + \delta u_x) - \Pi(u_x) &= 0 \\ \Pi(u_y + \delta u_y) - \Pi(u_y) &= 0 \\ \Pi(\theta_z + \delta\theta_z) - \Pi(\theta_z) &= 0 \\ \Pi(\psi_d + \delta\psi_d) - \Pi(\psi_d) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Al desarrollar estas ecuaciones se obtiene las siguientes seis ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} + E_o I_{w_{at}.y} \theta_z^V & - E_o I_{w_{dt}.y} \psi_d^V & - E_o I_x \theta_x'' & + G_o D_{xy} u_x' & & = 0 \\ & + G_o D_{yy} u_y' & - G_o D_{xy} \theta_y & + G_o D_{yy} \theta_x & & \\ + E_o I_{w_{at}.x} \theta_z^V & + E_o I_{w_{dt}.x} \psi_d^V & - E_o I_y \theta_y'' & - G_o D_{xx} u_x' & & = 0 \\ & - G_o D_{xy} u_y' & + G_o D_{xx} \theta_y & - G_o D_{xy} \theta_x & & \\ - G_o D_{xx} u_x'' & - G_o D_{xy} u_y'' & + G_o D_{xx} \theta_y' & - G_o D_{xy} \theta_x' & & = p_x \\ - G_o D_{yy} u_y'' & - G_o D_{xy} u_x'' & - G_o D_{yy} \theta_x' & + G_o D_{xy} \theta_y' & & = p_y \\ + E_o I_{w_{at}.w_{at}} \theta_z^{VIII} & + E_o I_{w_{dt}.w_{at}} \psi_d^{VIII} & & & & \\ + 2 E_o I_{w_{at}.w_a} \theta_z^{VI} & - E_o I_{w_{at}.w_d} \psi_d^{VI} & + E_o I_{w_{dt}.w_a} \psi_d^{VI} & & & \\ - G_o D_{w_{at}.w_{at}} \theta_z^{VI} & - G_o D_{w_{dt}.w_{at}} \psi_d^{VI} & & & & \\ - E_o I_{w_{at}.x} \theta_y^V & + E_o I_{w_{at}.y} \theta_x^V & + E_o I_a \theta_z^{IV} & - E_o I_{w_a.w_d} \psi_d^{IV} & & = m_t \\ & & - G_o I_t \theta_z^{II} & - G_o D_{t_d.t_a} \psi_d^{II} & & \\ + E_o I_{w_{dt}.w_{at}} \theta_z^{VIII} & + E_o I_{w_{dt}.w_{dt}} \psi_d^{VIII} & & & & \\ - 2 E_o I_{w_{dt}.w_d} \psi_d^{VI} & + E_o I_{w_{dt}.w_a} \theta_z^{VI} & - E_o I_{w_{at}.w_d} \theta_z^{VI} & & & \\ - G_o D_{w_{dt}.w_{at}} \theta_z^{VI} & - G_o D_{w_{dt}.w_{dt}} \psi_d^{VI} & & & & \\ - E_o I_{w_{dt}.x} \theta_y^V & + E_o I_{w_{dt}.y} \theta_x^V & - E_o I_{w_d.w_a} \theta_z^{IV} & + E_o I_d \psi_d^{IV} & & \\ & & - G_o D_{t_d.t_a} \theta_z^{II} & - G_o D_{t_d.t_d} \psi_d^{II} & & = m_d \\ & & & + E_o K_d \psi_d & & \end{aligned} \right\}$$

Es un sistema de ecuaciones con seis funciones incógnitas  $\{u_x, u_y, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \psi_d\}$ , en el que el grado de derivación más alto que aparece es de ocho. Las cuatro primeras ecuaciones son esencialmente las correspondientes a flexión (dos ecuaciones por cada plano de flexión), y las dos últimas ecuaciones las correspondientes a los problemas de torsión y distorsión respectivamente.

Los problemas de torsión-distorsión y flexión quedan acoplados a través de las características mecánicas  $\{I_{w_{at}.y}, I_{w_{dt}.y}, I_{w_{at}.x}, I_{w_{dt}.x}\}$ , que representan los momentos flectores que aparecen en cada dirección por los alabeos de torsión y distorsión no uniformes.

Si se quitan las características mecánicas que han aparecido al considerar términos adicionales en la energía de deformación, tanto por tensiones longitudinales como transversales, las ecuaciones se reducen a las vistas en capítulos anteriores.

Aunque se hizo la simplificación de no considerar los alabeos por cortante, el sistema resultante es muy complejo, de difícil resolución, y por tanto de poca utilidad para su aplicación práctica. Para comprobar la existencia de los modos adicionales, se va a realizar la descomposición en modos incluyendo los adicionales, de un ejemplo de un modelo de elementos finitos.

## 7.6. EJEMPLO DE VIGA BIEMPOTRADA

En el apartado 6.6 se había estudiado una viga empotrada en ambos extremos con carga torsora, utilizándose para ello varios métodos de cálculo. En este apartado los resultados del modelo de elementos finitos se van a descomponer en modos incluyendo los adicionales que se acaban de ver, mediante la metodología incluida en el apéndice G.

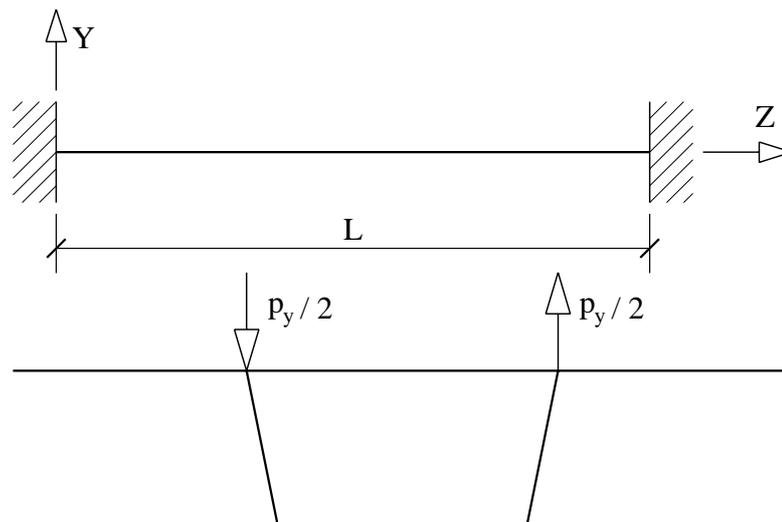


Figura 7.4: Viga biempotrada con sección cajón.

### 7.6.1. MOVIMIENTOS

La descomposición de los movimientos  $\{v_x, v_y\}$  del modelo de elementos finitos tipo lámina se hace de acuerdo con las ecuaciones (7.4). Al realizarla se obtiene el giro de torsión  $\theta_z$  y el movimiento de distorsión  $\psi_d$ , cuyos valores se han representado en la gráfica (7.7). Los valores obtenidos coinciden prácticamente con lo que se tenían anteriormente (véase la gráfica (6.35)).

Los valores que se obtienen para el movimiento de conjunto de la sección  $u_y$  son nulos, como era de esperar por la simetría de la estructura y la antimetría de las acciones respecto del eje  $y$ . Pero no así los valores para el movimiento de conjunto  $u_x$  de la sección,

la tabla superior se desplaza horizontalmente en un sentido, como se puede ver en la figura (7.9) que reproduce una planta de la deformada de la tabla superior de la sección, y la tabla inferior tiene movimientos horizontales en sentido contrario, y en conjunto la sección tiene un movimiento horizontal de conjunto. En la figura (7.10) se pueden ver los valores del movimiento horizontal de conjunto  $u_x$  de la sección. Su existencia es acorde con el acoplamiento que se ha indicado que existe entre torsión-distorsión y flexión.

La descomposición en modos del movimiento longitudinal  $v_z$  obtenido con elementos finitos se hace de acuerdo con las ecuaciones (7.4), pero despreciando los términos en derivadas quintas.

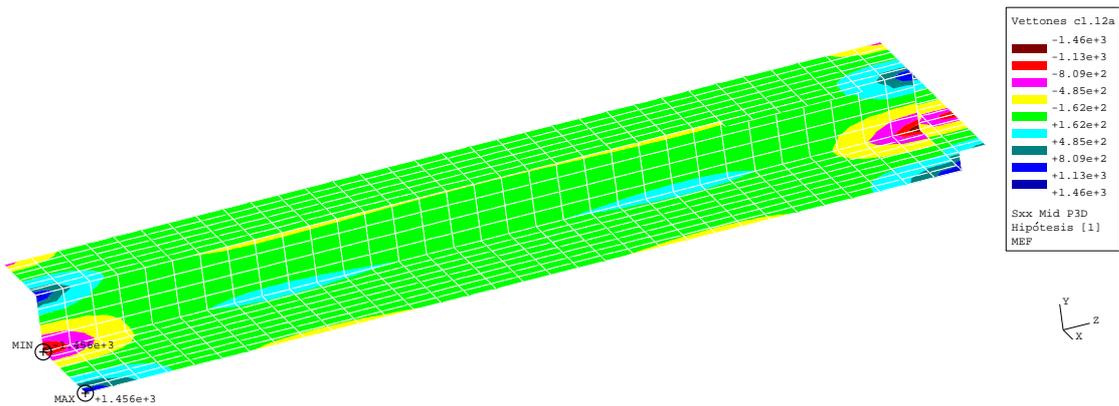


Figura 7.5: Modelo de elementos finitos **MEF** de la viga biempotrada. Tensión longitudinal  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ).

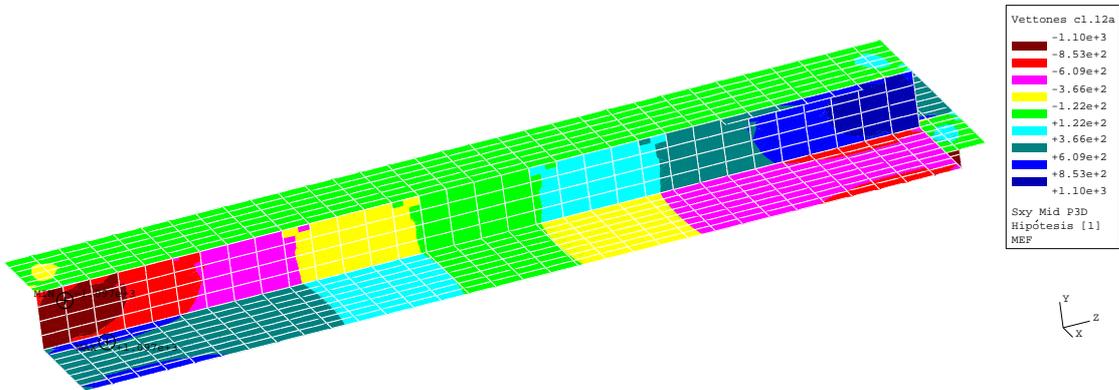


Figura 7.6: Modelo de elementos finitos **MEF** de la viga biempotrada. Tensión tangencial  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ).

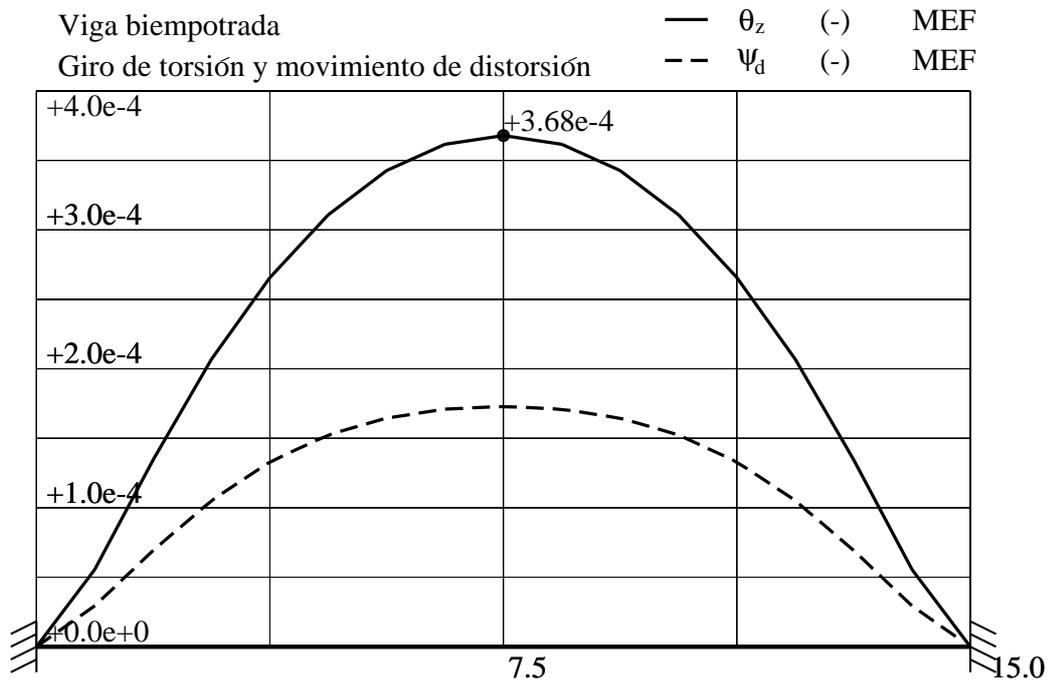


Figura 7.7: Viga biempotrada con sección cajón:  $\theta_z$  (-) y  $\psi_d$  (-) .

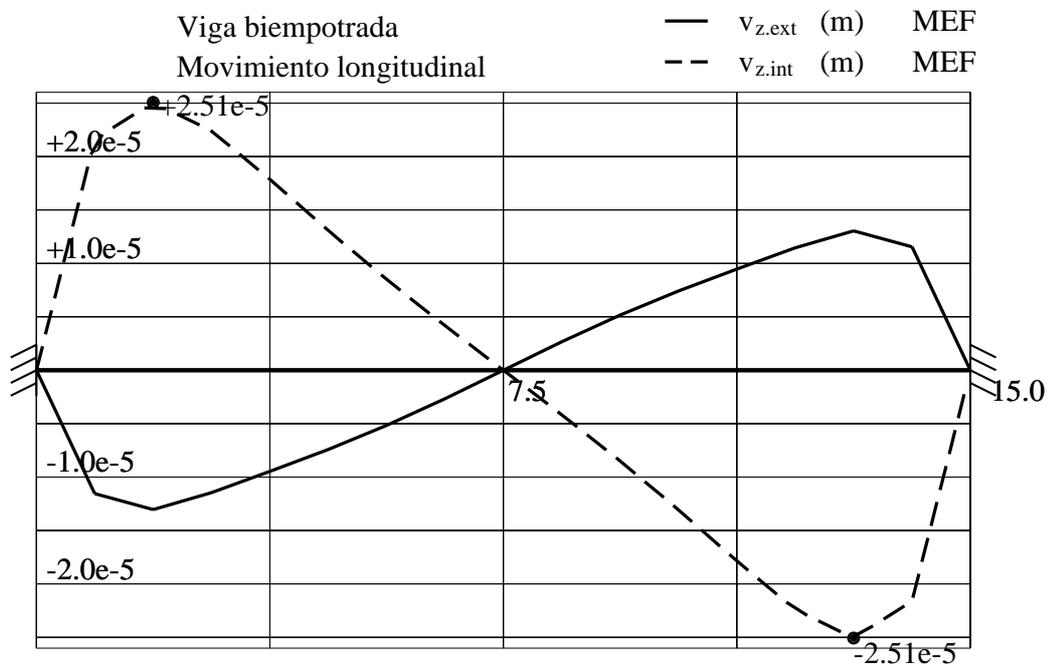


Figura 7.8: Viga biempotrada con sección cajón:  $v_{z.ext}$  (m) = movimiento longitudinal del extremo exterior del ala;  $v_{z.int}$  (m) = ídem del extremo interior del ala.

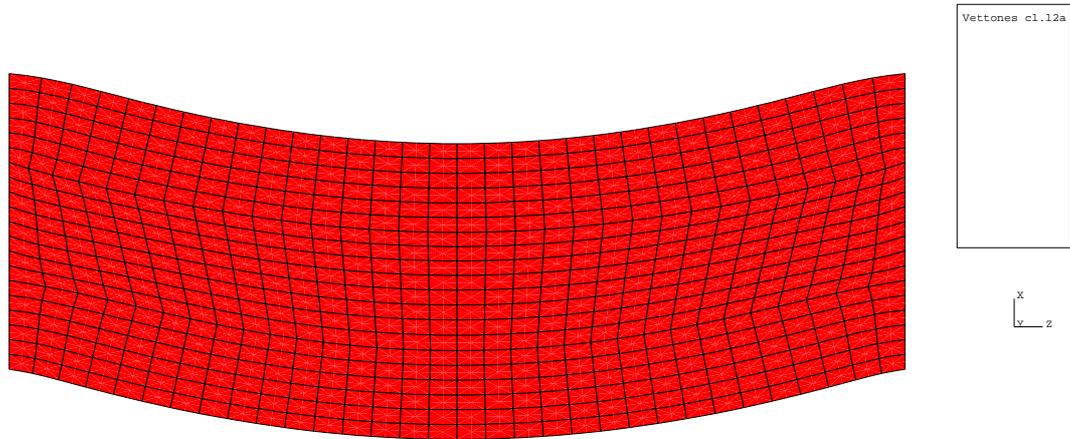


Figura 7.9: Viga biempotrada con sección cajón. Planta deformada de la tabla superior (ampliada por  $10^4$ ) del modelo **MEF**.

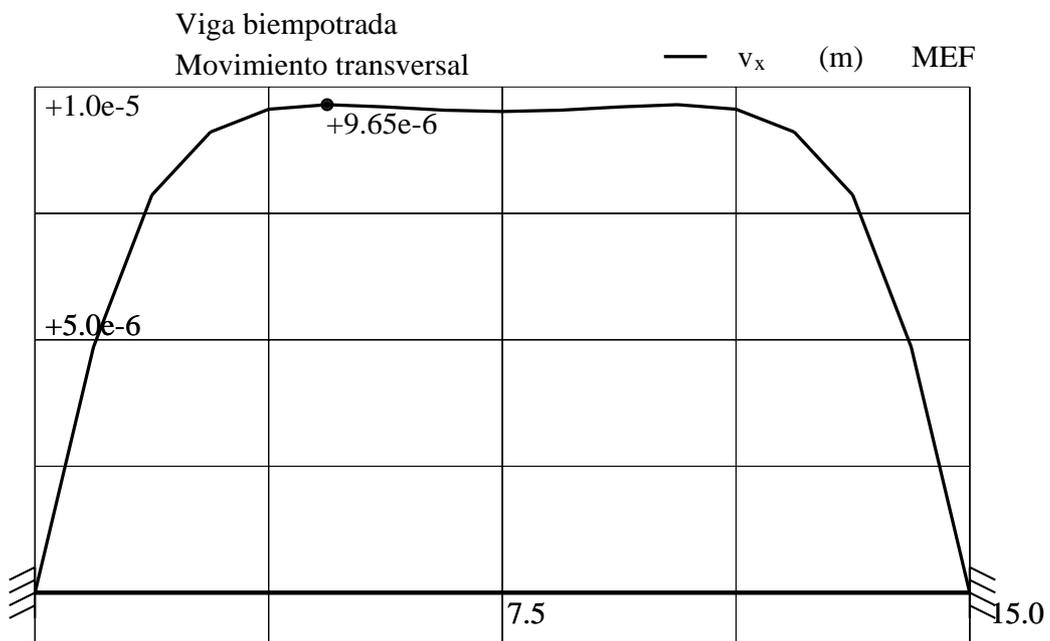


Figura 7.10: Viga biempotrada con sección cajón. Movimiento horizontal de conjunto  $u_x$  (m) de la sección con el modelo de elementos finitos **MEF**.

El máximo movimiento longitudinal  $v_z$  se produce a una distancia de  $L/8$  del apoyo en el extremo interior del ala. El detalle de la descomposición de este movimiento en modos es el siguiente:

$v_z$				$u_{z,i}(m)$		
$1 \cdot u_z$	=	1.0000	·	$-5.369 \cdot 10^{-20}$	=	$-5.369 \cdot 10^{-20}$
$y \cdot \theta_x$	=	0.3333	·	$+2.817 \cdot 10^{-17}$	=	$+9.389 \cdot 10^{-18}$
$(A_y \cdot w_{yo}) \cdot \chi_y$	=	-0.1497	·	$-3.000 \cdot 10^{-17}$	=	$+4.490 \cdot 10^{-18}$
$-x \cdot \theta_y$	=	1.0000	·	$+1.759 \cdot 10^{-6}$	=	$+1.759 \cdot 10^{-6}$
$(A_x \cdot w_{xo}) \cdot \chi_x$	=	-0.1471	·	$-8.377 \cdot 10^{-7}$	=	$+1.232 \cdot 10^{-7}$
$w_a \cdot \theta'_z$	=	0.2718	·	$+7.827 \cdot 10^{-5}$	=	$+2.127 \cdot 10^{-5}$
$w_{at} \cdot \theta''_z$	=	0.2183	·	$-1.645 \cdot 10^{-5}$	=	$-3.591 \cdot 10^{-6}$
$-w_d \cdot \psi'_d$	=	0.1338	·	$+4.118 \cdot 10^{-5}$	=	$+5.510 \cdot 10^{-6}$
$w_{dt} \cdot \psi''_d$	=	0.0000	·	$-9.126 \cdot 10^{-6}$	=	+0.000
				$\Sigma$		$+2.507 \cdot 10^{-5}$

A la vista de estos valores, surgen los siguientes comentarios:

- Se observa la no existencia de movimientos por axil ( $u_z \approx 0$ ), y por giro de flexión contenido en el plano  $y - z$  ( $\theta_x \approx 0$  y  $\chi_y \approx 0$ ).
- Se produce un giro de flexión en el plano  $x - z$  ( $\theta_y \neq 0$ ), que es necesario para anular los momentos de flexión que se producen por los alabeos dados por las funciones  $w_{at}$  y  $w_{dt}$  en este plano, ya que como se indicó las inercias  $I_{w_{at}.x}$  y  $I_{w_{dt}.x}$  no son nulas.
- En el valor total del movimiento de alabeo el 71 % del total es por las dos componentes de torsión, el 22 % por las de distorsión, y el 8 % restante por las componentes por flexión horizontal. Las componentes por los alabeos de torsión  $w_{at}$  y distorsión  $w_{dt}$  no uniformes, son más pequeñas que las debidas a los alabeos de torsión  $w_a$  y distorsión  $w_d$  uniformes.

### 7.6.2. TENSIONES NORMALES

Las tensiones normales  $\sigma_z$  teniendo en cuenta los modos adicionales de torsión y distorsión vienen dadas por la ecuación:

$$\sigma_z = E \left( \begin{array}{l} + u'_z \\ + y \cdot \theta'_x + (w_{yo} A_y) \cdot \chi'_y \\ - x \cdot \theta'_y + (w_{xo} A_x) \cdot \chi'_x \\ + w_a \cdot \theta''_z + w_{at} \cdot \theta^{IV}_z \\ - w_d \cdot \psi''_d + w_{dt} \cdot \psi^{IV}_d \end{array} \right)$$

En la figura (7.11) se han representado las tensiones del modelo de elementos finitos en la sección de empotramiento, y el resultado de la descomposición según la ecuación anterior. Apreciándose un buen ajuste, tanto en la forma general de la distribución como en los valores de las tensiones. Compárese con la figura (6.47)<sup>2</sup> en la que están dibujadas las tensiones que se obtienen sin los modos adicionales.

<sup>2</sup>Página 194

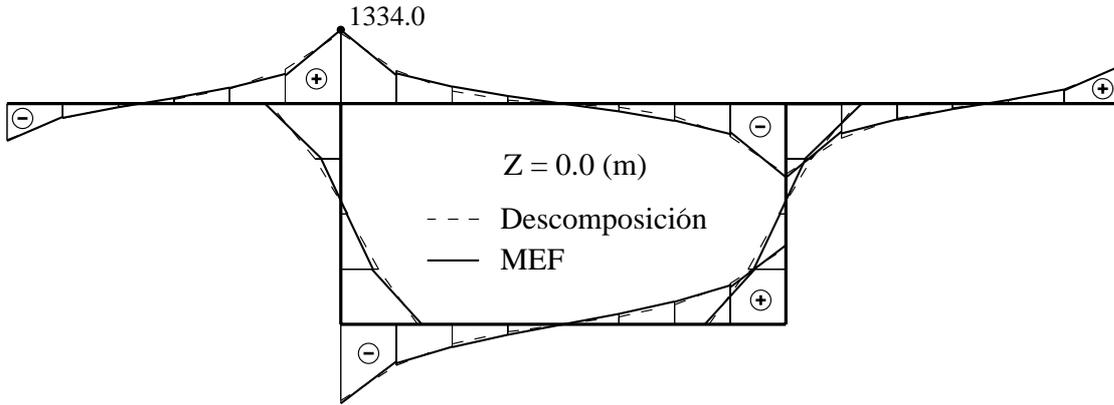


Figura 7.11: Viga biempotrada. Tensiones  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en empotramiento.

La descomposición de la tensión en el extremo superior del alma izquierda en la sección de empotramiento, proporciona los siguientes valores numéricos.

$\sigma_z$	$\sigma_{z,i}(kN/m^2)$
$1 \cdot w'_z \cdot E = 1.0000 \cdot -8.444 \cdot 10^{-20} \cdot E =$	0.00
$y \cdot \theta'_x \cdot E = 0.3333 \cdot +2.943 \cdot 10^{-17} \cdot E =$	0.00
$(A_y \cdot w_{yo}) \cdot \chi'_y \cdot E = -0.1497 \cdot -5.735 \cdot 10^{-17} \cdot E =$	0.00
$-x \cdot \theta'_y \cdot E = 1.0000 \cdot +2.139 \cdot 10^{-5} \cdot E =$	641.82
$(A_x \cdot w_{xo}) \cdot \chi'_x \cdot E = -0.1471 \cdot +1.178 \cdot 10^{-5} \cdot E =$	-51.96
$w_a \cdot \theta''_z \cdot E = 0.2718 \cdot +2.812 \cdot 10^{-4} \cdot E =$	2292.32
$w_{at} \cdot \theta^{IV}_z \cdot E = 0.2183 \cdot -2.925 \cdot 10^{-4} \cdot E =$	-1915.30
$-w_d \cdot \psi''_d \cdot E = 0.1338 \cdot +7.746 \cdot 10^{-5} \cdot E =$	310.93
$w_{dt} \cdot \psi^{IV}_d \cdot E = 0.0000 \cdot -7.036 \cdot 10^{-5} \cdot E =$	0.00
$\Sigma$	1277.81

El valor obtenido de la tensión tiene una diferencia del  $-4\%$  respecto del valor del modelo de elementos finitos. Igualmente que para los movimientos, no aparecen tensiones por el modo de flexión en el plano vertical, pero si para el del plano horizontal. En el valor total las componentes por el modo de flexión horizontal representan el  $46\%$ , y las componentes por los modos de torsión y distorsión representan el  $30\%$  y el  $24\%$  respectivamente.

En las figuras (7.12) y (7.13) se ha representado las derivadas cuartas del giro de torsión  $\theta^{IV}_z$  y del movimiento de distorsión  $\psi^{IV}_d$ , que son las funciones por la que se multiplican las funciones de alabeo de torsión  $w_{at}$  y distorsión  $w_{dt}$  no uniformes al obtener las tensiones normales. Por ser derivadas de alto grado sería necesario una malla de elementos finitos mucho más fina para obtener unas curvas más suaves, siendo de todos modos las obtenidas suficientes para obtener conclusiones. Se ve que los valores son altos en las cercanías de los empotramientos, y que rápidamente disminuyen al alejarse de ellos. Lo que lleva a la conclusión de que las componentes en derivadas cuartas de las tensiones normales sólo son importantes en zonas muy próximas a los empotramientos.

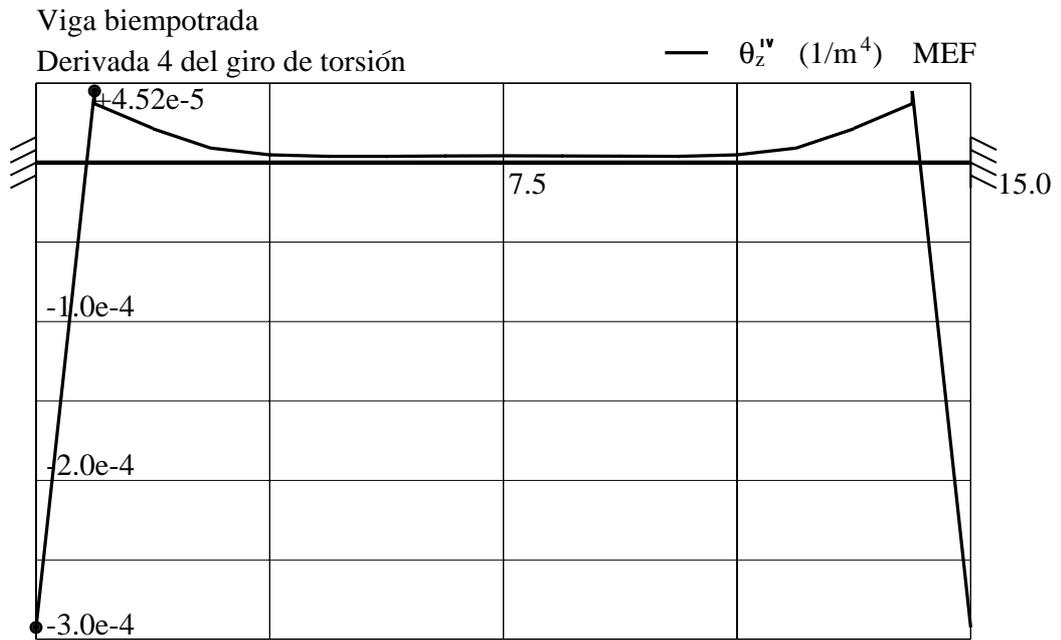


Figura 7.12: Viga biempotrada. Derivada cuarta del giro de torsión  $\theta_z^{IV}$  (1/m<sup>4</sup>).

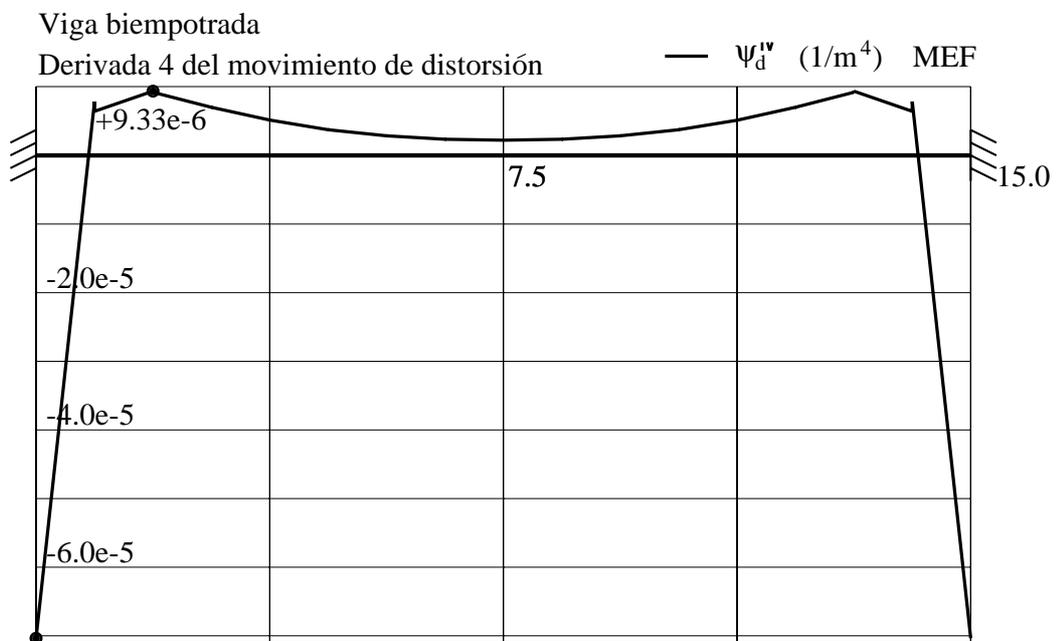


Figura 7.13: Viga biempotrada. Derivada cuarta del movimiento de distorsión  $\psi_d^{IV}$  (1/m<sup>4</sup>).

7.6.3. TENSIONES TANGENCIALES

A partir del campo de movimientos con modos adicionales, las tensiones tangenciales vienen dadas por la ecuación:

$$\tau_{sz} = G \left( \begin{array}{lll} + t_x (u'_x - \theta_y) & + (w'_{xo} A_x) \chi_x & \\ + t_y (u'_y + \theta_x) & + (w'_{yo} A_y) \chi_y & \\ + (w'_a - h_a) \theta'_z & + w'_{at} \theta'''_z & + w'_{a4} \theta^V_z \\ + (u_{ds} - w'_d) \psi'_d & + w'_{dt} \psi'''_d & + w'_{d4} \psi^V_d \end{array} \right)$$

Para la sección de empotramiento en la figura (7.14) se han representado las tensiones tangenciales del modelo de elementos finitos, y las que se obtienen de la descomposición en modos, encontrándose un buen ajuste. En el extremo del voladizo aparecen tensiones tangenciales en el modelo de elementos finitos, las cuales se anulan rápidamente al alejarse del empotramiento. En la ecuación anterior para las tensiones tangenciales, son los términos en  $t_x$  y  $t_y$  los que proporcionan valores no nulos en el extremo de los voladizos.

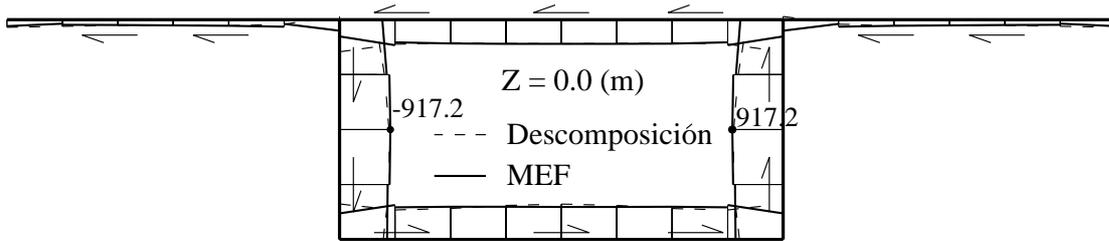


Figura 7.14: Viga biempotrada. Tensiones  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ) en empotramiento.

Por ser los valores de  $t_a = (w'_a - h_a)$  y  $t_d = (u_{ds} - w'_d)$  proporcionales en toda la sección, al hacer la regresión se obtiene el valor conjunto  $(\theta'_z + C \cdot \psi'_d)$  donde  $C$  es una constante. El detalle de la descomposición que proporciona la regresión de tensiones tangenciales en el centro del alma izquierda es el siguiente:

$\tau_{sz}$	$\tau_{sz,i}(kN/m^2)$
$t_x \cdot (u'_x - \theta'_y) \cdot G = 0.0000 \cdot +1.615 \cdot 10^{-4} \cdot G =$	0.00
$(A_x \cdot w'_{xo}) \cdot \chi_x \cdot G = -0.3885 \cdot +1.727 \cdot 10^{-4} \cdot G =$	-838.43
$t_y \cdot (u'_y + \theta'_x) \cdot G = 1.0000 \cdot -3.130 \cdot 10^{-17} \cdot G =$	0.00
$(A_y \cdot w'_{yo}) \cdot \chi_y \cdot G = -0.2769 \cdot -1.300 \cdot 10^{-17} \cdot G =$	0.00
$(w'_a - h_a) \cdot (\theta'_z + C \cdot \psi'_d) \cdot G = -0.6667 \cdot +7.512 \cdot 10^{-5} \cdot G =$	-626.03
$w'_{at} \cdot \theta'''_z \cdot G = 0.1374 \cdot -1.730 \cdot 10^{-4} \cdot G =$	-297.13
$w'_{a4} \cdot \theta^V_z \cdot G = 0.1196 \cdot +3.063 \cdot 10^{-4} \cdot G =$	457.93
$w'_{dt} \cdot \psi'''_d \cdot G = 0.7394 \cdot -1.358 \cdot 10^{-4} \cdot G =$	-1255.41
$w'_{d4} \cdot \psi^V_d \cdot G = 0.8744 \cdot +1.525 \cdot 10^{-4} \cdot G =$	1666.61
$\Sigma$	-892.46

La diferencia respecto de la tensión que se obtiene del modelo de elementos finitos es del  $-3\%$ . Se aprecia la importancia de las componentes de los valores por los modos adicionales de torsión  $w'_{a4}$  y distorsión  $w'_{d4}$  respecto de los modos no uniformes  $w'_{at}$  y  $w'_{dt}$ .

En las figuras (7.15) y (7.16) se han representado las derivadas quintas del giro de torsión  $\theta_z^V$  y del movimiento de distorsión  $\psi_d^V$ , que son las funciones por la que se multiplican las derivadas de las funciones de alabeo adicionales de torsión  $w'_{a4}$  y distorsión  $w'_{d4}$  al calcular las tensiones tangenciales. Por ser un grado de derivación todavía mayor, las curvas obtenidas son más irregulares que las que se obtuvieron para las derivadas cuartas. Pero igualmente, se ve que los valores más altos son en los empotramientos decreciendo rápidamente al alejarse de ellos.

## 7.7. CONCLUSIONES

En el capítulo anterior se vio que en las zonas de empotramiento, con la teoría basada en los modos de torsión y distorsión uniformes y no uniformes, no era posible reproducir los resultados que en estas secciones se obtienen con los elementos finitos tipo lámina, y que el motivo era porque en el desarrollo teórico para las secciones de paredes delgadas se despreciaban términos, que en estas zonas no serían despreciables.

En el presente capítulo se ha visto que el no despreciar dichos términos, conduce a la existencia de modos adicionales de torsión y distorsión, para los cuales se ha desarrollado el proceso de cálculo necesario para su obtención. Dichos modos adicionales resultan en general acoplados con los modos de flexión, y se multiplican a lo largo de la pieza por derivadas de orden mayor del giro de torsión y movimiento de distorsión, que conduce como se ha visto a un sistema de ecuaciones diferenciales muy complejo con grados de derivación altos. Estos sistemas tienen soluciones con funciones exponenciales de exponentes muy grandes o pequeños, que harán muy difícil su resolución en un ordenador con una representación limitada de decimales de los números.

Para comprobar la validez de estos modos adicionales, se ha realizado mediante métodos estadísticos la descomposición en modos incluyendo los adicionales, de los resultados de un modelo de elementos finitos tipo lámina, verificándose que con el uso de los modos adicionales se obtiene un buen ajuste tanto en la forma general, como en valores puntuales. Se ha visto que los modos adicionales sólo tienen importancia en las zonas próximas a los empotramientos, perdiendo rápidamente importancia al alejarse de estas zonas.

Por la complejidad de las ecuaciones diferenciales con modos adicionales, no parece práctico o adecuado su inclusión para el cálculo de piezas lineales de forma habitual en la redacción de proyectos de construcción. No obstante su uso tiene interés, cuando las tensiones totales proporcionadas por un modelo de elementos finitos, se quieren separar como suma de tensiones según modos resistentes de forma más precisa.

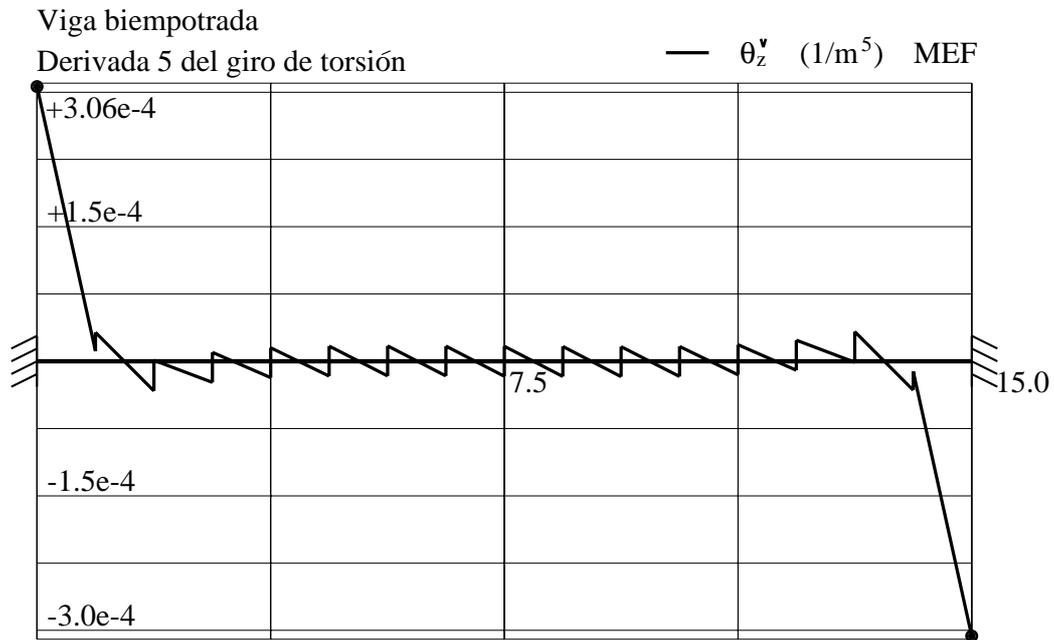


Figura 7.15: Viga biempotrada. Derivada quinta del giro de torsión  $\theta_z^V$  (1/m<sup>5</sup>).

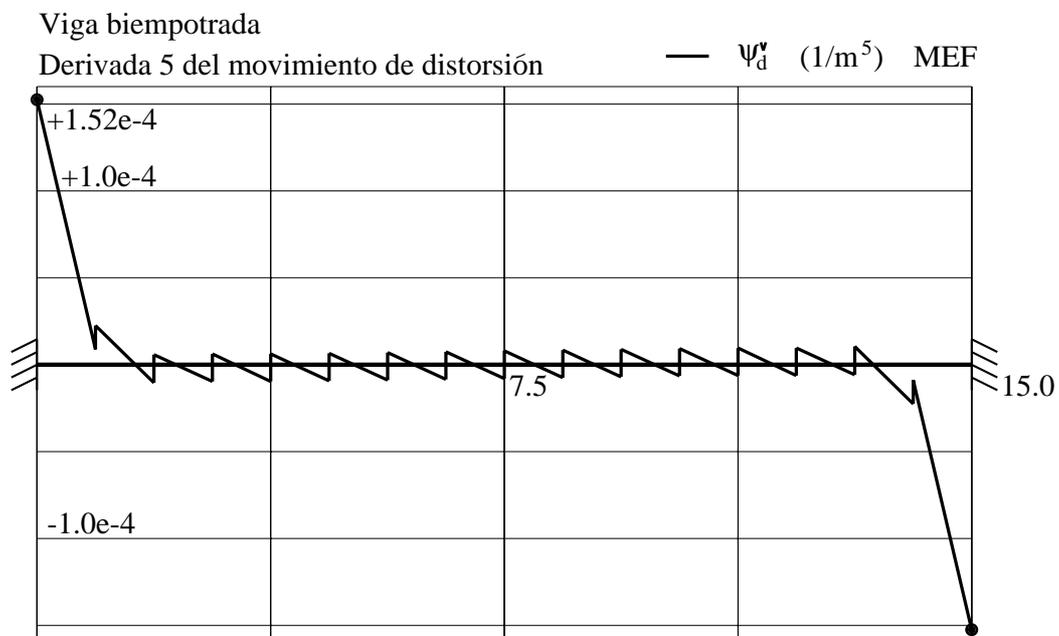


Figura 7.16: Viga biempotrada. Derivada quinta del movimiento de distorsión  $\psi_d^V$  (1/m<sup>5</sup>).

## Capítulo 8

# APLICACIONES Y ESTUDIOS PRÁCTICOS

### 8.1. INTRODUCCIÓN

Siendo el objetivo final del presente trabajo de investigación su aplicación al estudio y proyecto de tableros de puente, en este capítulo se van a realizar ejemplos y estudios al respecto. En concreto son los siguientes:

- **Ejemplo práctico de un puente real.** Para completar los ejemplos de verificación del elemento desarrollado, se analiza las tensiones en un puente real para un estado general de cargas, en el que la sección responda con todos los modos resistentes.
- **Ejemplo de sección tritelular con canto variable.** Se desarrolla un ejemplo que cubre los aspectos indicados en su título.
- **Coefficiente de excentricidad de un puente de vigas.** Se analiza la respuesta frente a un vehículo excepcional de un tablero de vigas prefabricadas, mostrándose como se puede aplicar la teoría desarrollada a este tipo de tablero de sección abierta.
- **Importancia de las tensiones por coacción al alabeo en puentes cajón de hormigón.** Como la normativa prescribe que hay que tener en cuenta las tensiones longitudinales que aparecen en los tableros por torsión y distorsión, pero no da indicaciones de cuando se pueden despreciar, se va a tratar de buscar una propuesta para las indicaciones que se podrían dar.
- **Revisión de los coeficientes de ancho eficaz de la normativa.** Para tener en cuenta de forma simplificada el fenómeno del arrastre de cortante las normas prescriben el uso de anchos eficaces. En este apartado se tratará de comprobar las fórmulas de la normativa, y en caso necesario proponer una alternativa de las mismas.
- **Comparación entre diferentes ecuaciones para torsión y distorsión.** Se ha visto que hay ecuaciones diferenciales alternativas para el problema de torsión y distorsión. En este apartado mediante ejemplos se van a comparar los resultados entre las diferentes alternativas, para determinar cuales son las más adecuadas.

## 8.2. EJEMPLO PRÁCTICO DE UN PUENTE REAL

### 8.2.1. INTRODUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

El presente ejemplo se realiza con el objeto de verificar el elemento unidimensional en un estado de carga que combine todos los modos resistentes, y como ejemplo demostrativo de aplicación en el análisis tensional de un puente real. Se ha elegido el puente sobre el río Voltoya de la línea de ferrocarril entre Segovia y Valladolid. Concretamente se sitúa entre los puntos kilométricos 400 + 127 y 400 + 303 al Sur de Coca (Segovia).<sup>1</sup>

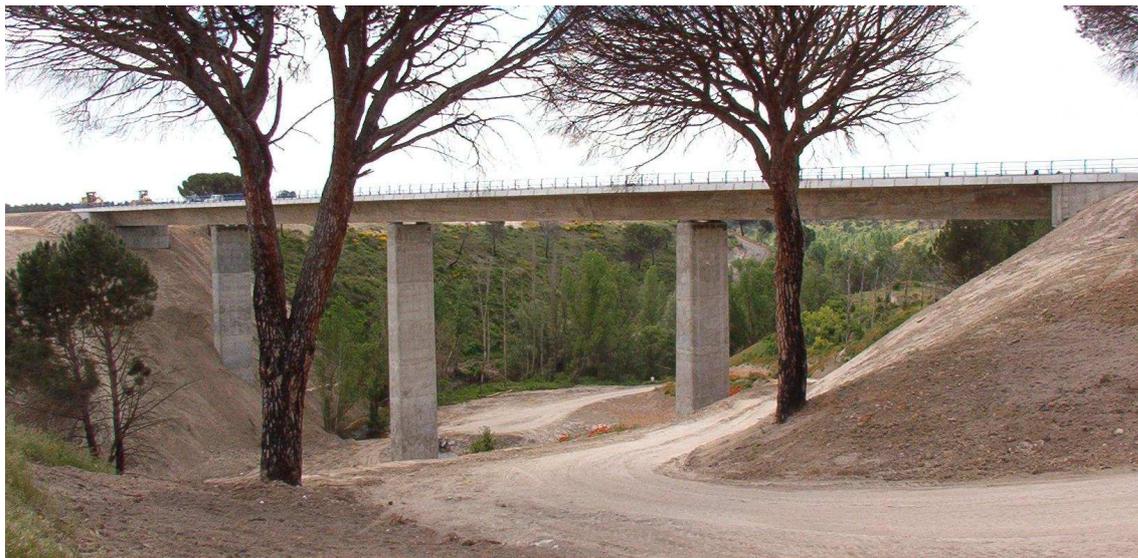


Figura 8.1: Puente sobre el río Voltoya. Mayo de 2003.

El trazado en planta es recto, siendo una estructura pretensada de cuatro vanos de luces 40.0 + 48.0 + 48.0 + 40.0 (m), alcanzando una longitud total de 176.0 metros. El tablero es de canto constante con un valor 3.20 metros, que es el quinceavo de la luz de los vanos principales. La sección es de tipo cajón, con un ancho total de 16.0 metros.

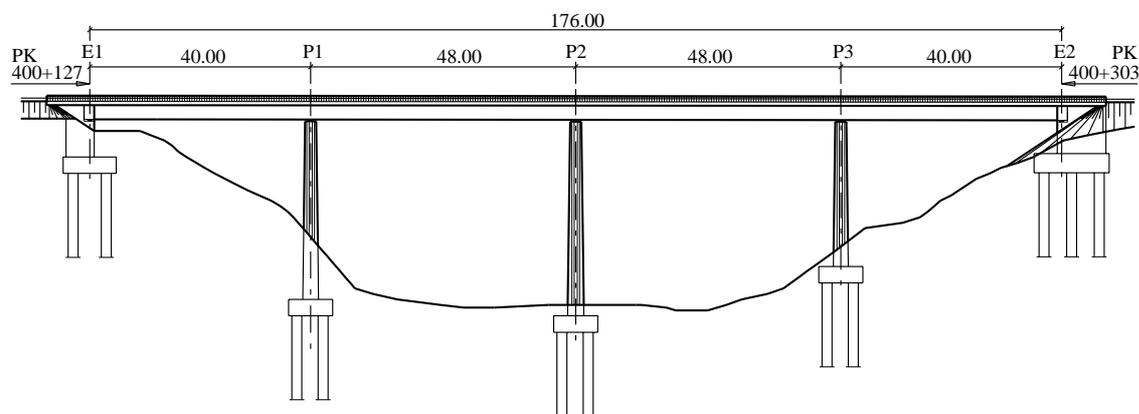


Figura 8.2: Puente sobre el río Voltoya. Alzado. Cotas en (m).

<sup>1</sup>Se agradece a los ingenieros de Apia XXI S.A. que hicieron el proyecto la información facilitada.

En la figura (8.3) se puede ver la sección tipo del tablero acotada, la cual es de hormigón de resistencia característica  $f_{ck} = 45 \text{ N/mm}^2$ . El pretensado está formado por 20 tendones de 24 cables de 0.60 de pulgada de acero  $Y - 1860 - S7$ . Los cables se dividen en cinco familias de cuatro cables, que permanecen equidistantes en altura a lo largo de todo el puente. En la figura (8.4) se ha representado el trazado de la familia situada en posición central en altura, y que se corresponde con el trazado del cable medio.

Para un estado de cargas en servicio, se va a realizar el cálculo del estado tensional mediante tres métodos, para poder comparar entre ellos y sacar conclusiones. Estos tres métodos son los siguientes:

- Con la barra convencional de dos nudos (**C**) con flexión y torsión uniforme. La deformación por cortante se incluye mediante el uso del área de cortante.
- Con el elemento unidimensional (**B3N**) de tres nudos desarrollado en el presente trabajo.
- Con elementos finitos (**MEF**) tipo lámina de ocho nudos.

### 8.2.2. ACCIONES CONSIDERADAS

Se considera la hipótesis de servicio formada por las siguientes acciones:

- Peso propio de la estructura, determinado por el producto del área de la sección por la densidad del hormigón armado  $25.0 \text{ (kN/m}^3\text{)}$ .
- Carga permanente de valor  $122.0 \text{ (kN/m)}$ , que es suma de: peso del balasto y sus protecciones laterales, carriles, traviesas, conductos de cableados, soporte de catenarias, aceras e impostas.
- Pretensado formado por 20 tendones de  $3360 \text{ (mm}^2\text{)}$  cada uno, para los que se considera una tensión media a lo largo de todo el puente de  $1050 \text{ (N/mm}^2\text{)}$ . El trazado de los cables se considera que es una poligonal con puntos de paso los nudos del modelo, aplicándose la fuerza de desviación necesaria por equilibrio estático.
- La sobrecarga de uso de tráfico de ferrocarril considerada es el tren UIC71 incluido en la norma española IAP-2010 [54], formado por una locomotora de cuatro ejes de  $1000 \text{ kN}$  de peso total y  $6.4 \text{ (m)}$  de longitud, y una sobrecarga indefinida de  $80 \text{ (kN/m)}$  por el peso de los vagones. Dichos valores se multiplican por un coeficiente de clasificación para vía de ancho internacional de valor  $\alpha = 1.21$ , y un coeficiente de impacto para vía con mantenimiento normal de valor  $\phi = 1.01$ . Sobre el modelo de cálculo se ha dispuesto una carga repartida por el peso de los vagones de valor  $p_v = 97.8 \text{ (kN/m)}$ , y una sobrecarga repartida  $p_l = 172.3 \text{ (kN/m)}$  en  $8.0 \text{ (m)}$  de longitud, equivalente a toda la sobrecarga que afecta a los elementos barra en los que queda la locomotora.

Para obtener con la sobrecarga de uso el máximo momento en la sección por el apoyo en la pila P2, se dispone la carga de la locomotora en el centro del vano dos, y la carga de los vagones en el resto del vano dos, y en todo el vano tres, tal como se representa en la figura (8.5).

## 8.2. EJEMPLO PRÁCTICO DE UN PUENTE REAL

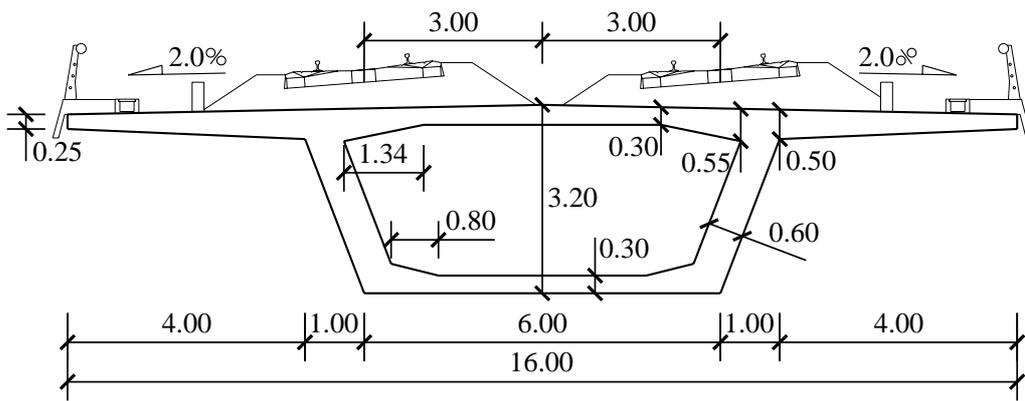


Figura 8.3: Puente sobre el río Voltoya. Sección tipo. Cotas en (m).

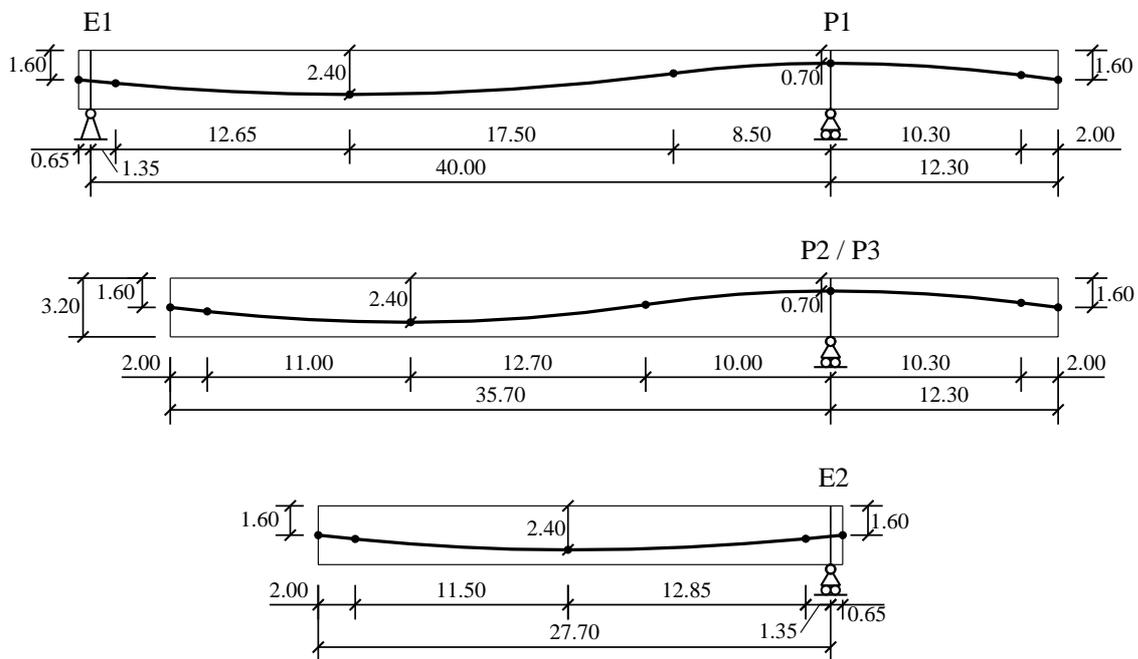


Figura 8.4: Puente sobre el río Voltoya. Trazado de pretensado. Cotas en (m).

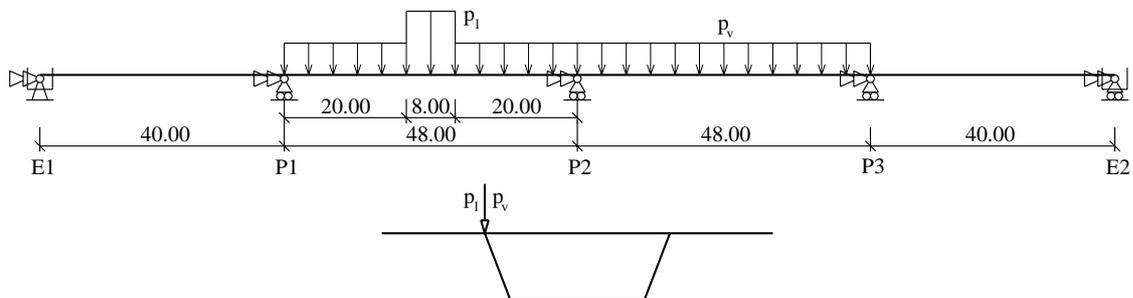


Figura 8.5: Puente sobre el río Voltoya. Acción de sobrecarga de uso. Cotas en (m).

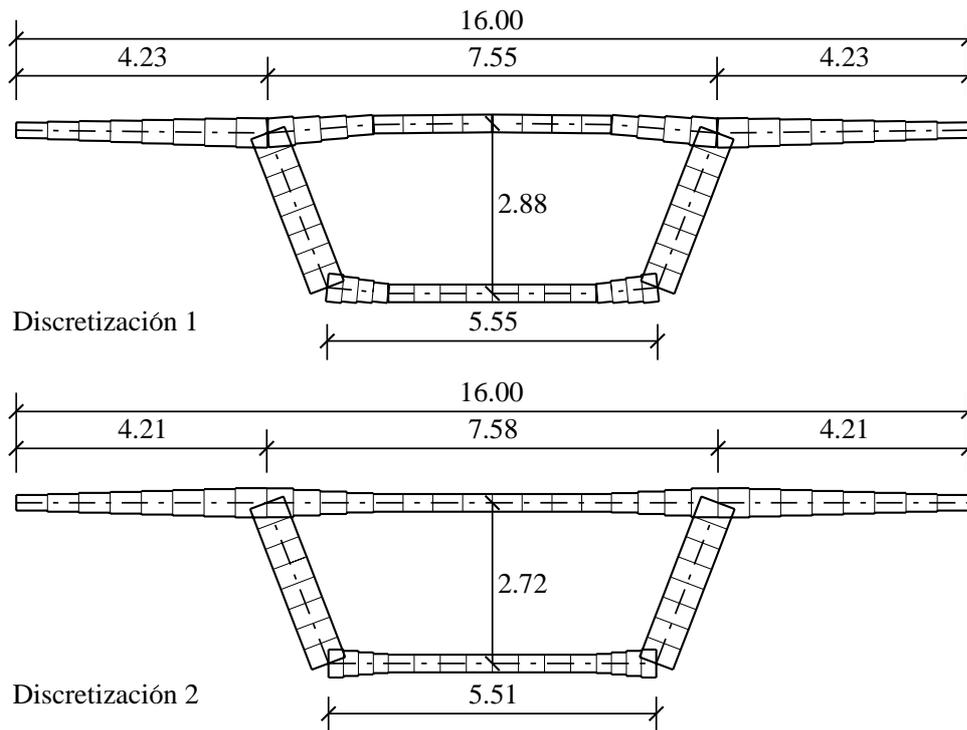


Figura 8.6: Puente sobre el río Voltoya. Posibles discretizaciones de la sección. Cotas en (m).

### 8.2.3. MODELOS DE CÁLCULO

La sección del tablero es necesario discretizarla teniendo en cuenta el espesor variable de algunas de las paredes. En la figura (8.6) se han representado dos posibles discretizaciones: en la primera el eje sigue la línea del centro de gravedad de las paredes, y en la segunda el eje de todas las paredes de la tabla superior e inferior se ha puesto a la altura del centro de gravedad de cada tabla. Siendo la primera discretización más real, se ha optado por utilizar la segunda, porque con ella son más claros los dibujos de representación de resultados. La presencia de quiebros en la dirección de las paredes en la primera discretización, hace que los dibujos no sean continuos, y que se crucen entre si partes del dibujo.

Los valores de las características mecánicas que se obtienen son:

$$\begin{array}{l}
 A = 1.1230 \cdot 10^{+1} \quad (m^2) \\
 A_y = 2.0511 \cdot 10^{+0} \quad (m^2) \\
 I_{wyo.wyo} = 2.0241 \cdot 10^{-1} \quad (-) \\
 D_{wyo.y} = -4.9096 \cdot 10^{-1} \quad (-) \\
 y_c = -1.1542 \cdot 10^{+0} \quad (m) \\
 I_t = 2.6106 \cdot 10^{+1} \quad (m^4) \\
 D_{t_d.t_d} = 2.9794 \cdot 10^{-1} \quad (m^4) \\
 D_{t_d.t_a} = -2.7889 \cdot 10^{+0} \quad (m^4) \\
 K_d = 1.1429 \cdot 10^{-3} \quad (m^2)
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 I_x = 1.3865 \cdot 10^{+1} \quad (m^4) \\
 D_{yy} = 3.0580 \cdot 10^{+0} \quad (m^2) \\
 D_{wyo.wyo} = 2.3937 \cdot 10^{-1} \quad (m^{-2}) \\
 y_a = -1.7370 \cdot 10^{+0} \quad (m) \\
 I_a = 3.4497 \cdot 10^{+1} \quad (m^6) \\
 I_d = 1.1913 \cdot 10^{+0} \quad (m^6) \\
 I_{w_d.w_a} = 0.0000 \cdot 10^{+0} \quad (m^6)
 \end{array}
 \right.$$

Estando la posición del centro de gravedad  $y_c$  y del centro de esfuerzos cortantes  $y_a$ ,

referidos al extremo superior de la sección real.

La discretización en sesenta y cuatro elementos de la sección transversal utilizada para obtener las características de los modos resistentes de la sección, también se utiliza para el mallado en elementos finitos tipo lámina. En sentido longitudinal, tanto en los dos modelos de barras, como en el modelo de elementos finitos, la discretización en elementos se ha realizado de forma que todos tienen 2.0 (m) de longitud. En la siguiente tabla se comparan los diferentes modelos.

<i>Modelo</i>	<i>Nº de nudos</i>	<i>Nº de elementos</i>	<i>Nº de grados de libertad</i>
<b>C</b>	89	88	$89 \times 6 = 534$
<b>B3N</b>	177	88	$177 \times 11 = 1\,947$
<b>MEF</b>	18\,709	6\,272	$6\,272 \times 6 = 112\,254$

En todos los apoyos está impedido el giro de torsión por tener el tablero un aparato de apoyo bajo cada alma, e impedido también en todos la distorsión por la presencia de diafragmas. En los modelos de barras se han puesto las vinculaciones apropiadas en los nudos de apoyo, y en el modelo de elementos finitos se ha puesto elementos tipo membrana que representan los diafragmas.

Para terminar con la descripción de los modelos, resta indicar que las propiedades del material que se han tomado son: módulo de elasticidad  $E = 3.20 \cdot 10^7$  (kN/m<sup>2</sup>), y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.20$ .

#### 8.2.4. ESFUERZOS

Los esfuerzos obtenidos mediante los tres métodos de cálculo son prácticamente iguales, de forma que si se dibujan juntos en una gráfica para compararlos, todos ellos se superponen. En las figuras (8.7), (8.8) y (8.9) están dibujados los esfuerzos cortante  $Q_y$ , flector  $M_x$  y torsor  $M_z$  respectivamente, obtenidos con el elemento unidimensional **B3N**. El axil  $N_z$  es constante y de valor igual a la fuerza de tesado  $N_z = -7.056 \cdot 10^4$  (kN).

#### 8.2.5. ANÁLISIS DE LAS TENSIONES

Para analizar las tensiones normales en la figura (8.10) se han representado los valores obtenidos en la sección por el centro del vano dos, y en la sección coincidente con el apoyo en la pila dos. A la vista de la figura se puede concluir que:

- En la sección por centro de vano prácticamente coinciden los valores que se obtienen por los tres métodos. El efecto en las tensiones de las coacciones al alabeo son mínimas, siendo prácticamente constantes los valores en la tabla superior e inferior.
- Sin embargo en la sección por apoyo en pila dos, son muy importantes las tensiones que aparecen por las coacciones al alabeo. Los valores que se obtienen con la barra convencional (**C**) son muy diferentes a los obtenidos con los otros métodos. En las esquinas inferiores de la tabla inferior por haber dos apoyos con reacciones puntuales, se produce concentración de tensiones que se ven en los valores obtenidos con elementos finitos. Sin considerar estas esquinas, los resultados obtenidos con el elemento unidimensional (**B3N**) son bastantes parecidos a los de los elementos finitos.

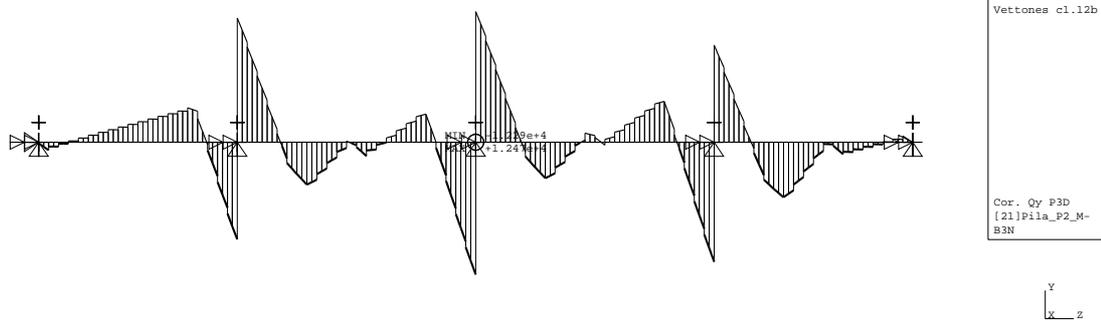


Figura 8.7: Puente sobre el río Voltoya. Esfuerzo cortante  $Q_y$  ( $kN$ ).

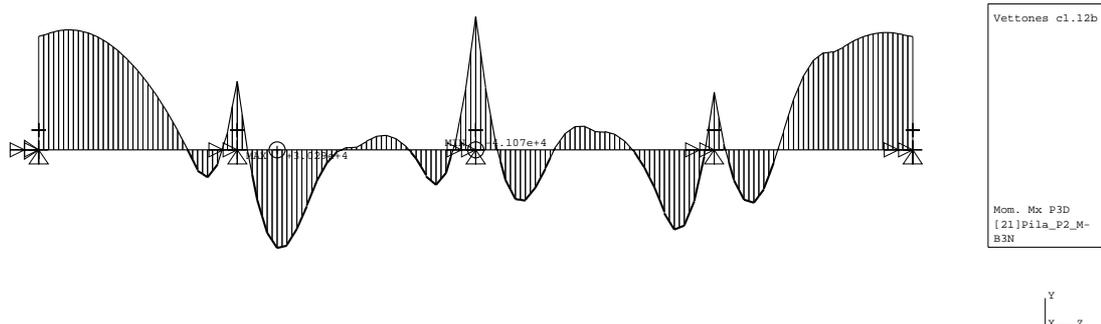


Figura 8.8: Puente sobre el río Voltoya. Esfuerzo flector  $M_x$  ( $kN \cdot m$ ).

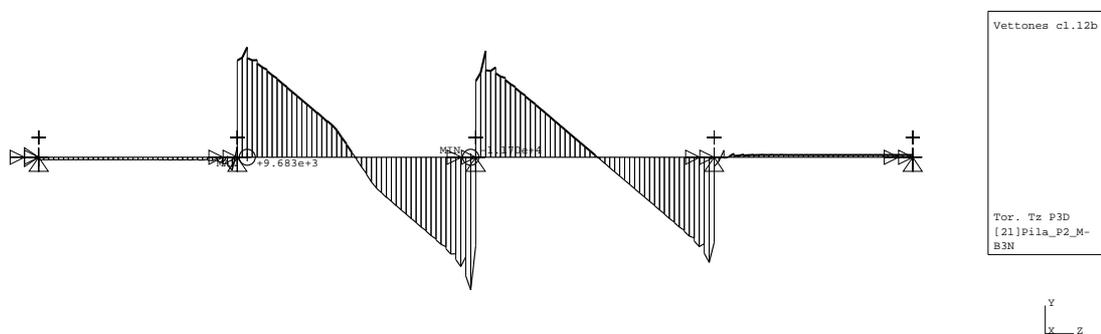


Figura 8.9: Puente sobre el río Voltoya. Esfuerzo torsor  $M_z$  ( $kN \cdot m$ ).

En la figura (8.11) se ha representado la comparación de tensiones tangenciales en una sección en el vano dos a 4.0 ( $m$ ) de la pila P2, y en una sección en el mismo vano inmediatamente anterior al apoyo en la pila P2. Se deduce que:

- En los resultados con elementos finitos para la sección por apoyo en la pila P2, la existencia de fuerzas puntuales en los puntos de apoyo, y la existencia del diafragma para evitar la distorsión, modifican de forma muy importante la distribución de tensiones tangenciales, siendo claramente diferente a la obtenida por los otros métodos de cálculo, los cuales no pueden reproducir esos efectos locales.
- En la sección del vano dos cercana al apoyo en la pila dos, ya han desaparecido dichos efectos y coinciden bastante bien los diferentes resultados.

Con el elemento unidimensional **B3N** se obtiene directamente la descomposición de los resultados en modos resistentes. Para la sección por pila dos en la figura (8.12) se ha dibujado la descomposición de las tensiones normales, y en la figura (8.13) la de las tensiones tangenciales. En la influencia de las deformaciones por tensiones tangenciales en las tensiones normales, se constata la gran importancia del fenómeno de arrastre de cortante, seguido en importancia por la torsión alabeada, y la prácticamente nula influencia de la distorsión. En las tensiones tangenciales siendo la componente por cortante la de mayor valor, por ser una sección con el giro impedido las componentes por torsión y distorsión uniforme son casi nulas, teniendo las componentes no uniformes valores apreciables.

Para ver la influencia a lo largo de la pieza de la coacción al alabeo en las tensiones normales, en las siguientes figuras (8.14) a (8.16) se muestra el valor de los bimomentos torsor  $B_w$ , distorsor  $B_d$  y de cortante  $B_{wy0}$ . Se ve que las variaciones de las tensiones normales por arrastre de cortante y torsión no uniforme se concentran alrededor de las secciones por apoyo en pila, mientras que las debidas a la distorsión aparecen a lo largo de todo el vano con valores reducidos en las mismas secciones por apoyo en pila.

Se ha realizado una comparación de los movimientos principales  $\{ u_y, \theta_x, \theta_z \}$ , resultando ser los dos primeros parecidos entre los tres métodos de cálculo, y para el giro de torsión la barra convencional sólo con torsión uniforme, da valores del orden del 20 % inferiores para los valores máximos en centro de vano.

### 8.2.6. CONCLUSIONES

Con el estudio de estado tensional para un estado de carga en servicio del puente del Río Voltoya, se ha visto que con el elemento **B3N** para el estudio conjunto de todos los modos resistentes se consigue resultados semejantes a los proporcionados por el método de elementos finitos **MEF**, y además con la información de la descomposición de las tensiones en modos resistentes.

La eficiencia numérica del elemento **B3N** es mucho mayor que la de los elementos finitos lámina, ya que se necesita del orden de sesenta veces menos de grados de libertad (57.7 veces concretamente). En tiempo de cálculo, mientras que con el elemento **B3N** se ha realizado en ocho segundos<sup>2</sup>, el modelo de elementos finitos lámina ha necesitado un tiempo 230 veces superior.

<sup>2</sup>En un ordenador del año 2007 con el microprocesador Intel(R) Core(TM)2 Quad Q600 2.40GHz.

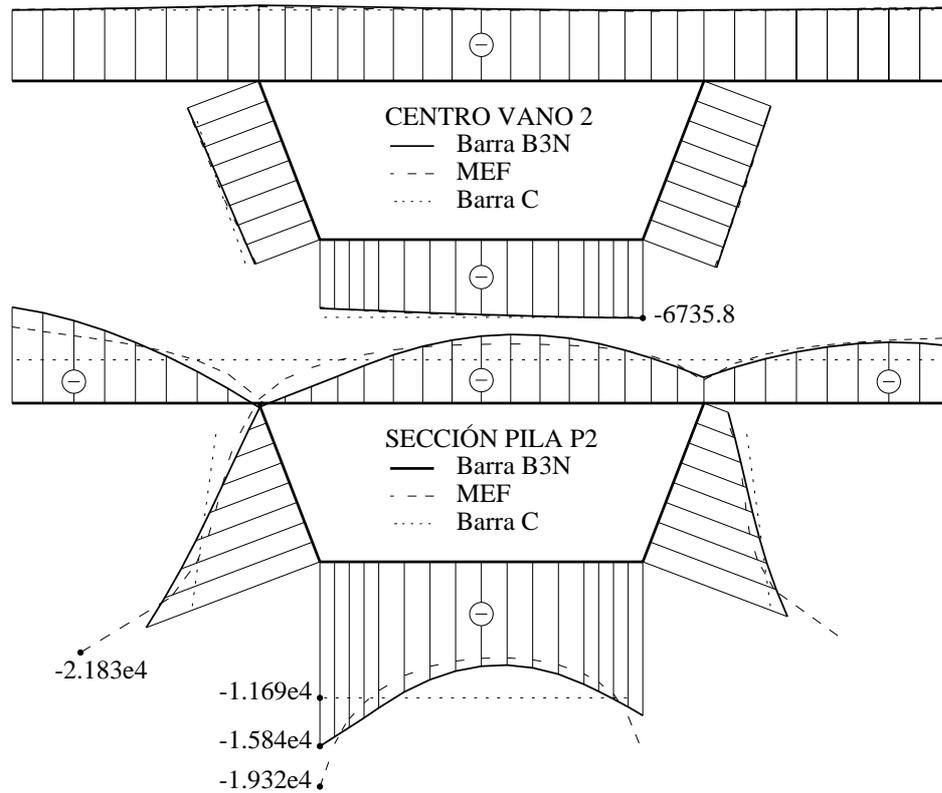


Figura 8.10: Puente sobre el río Voltoya. Tensiones normales totales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en secciones por centro de vano 2 y por pila P2.

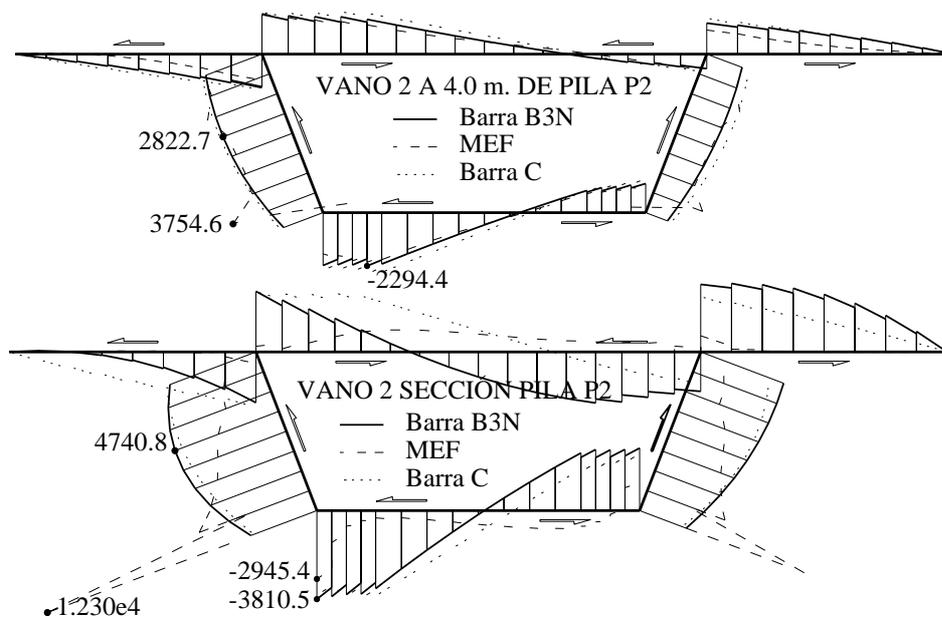


Figura 8.11: Puente sobre el río Voltoya. Tensiones tangenciales totales  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ) en secciones en vano 2 a 4.0 (m) de pila P2, y en vano 2 por pila P2.

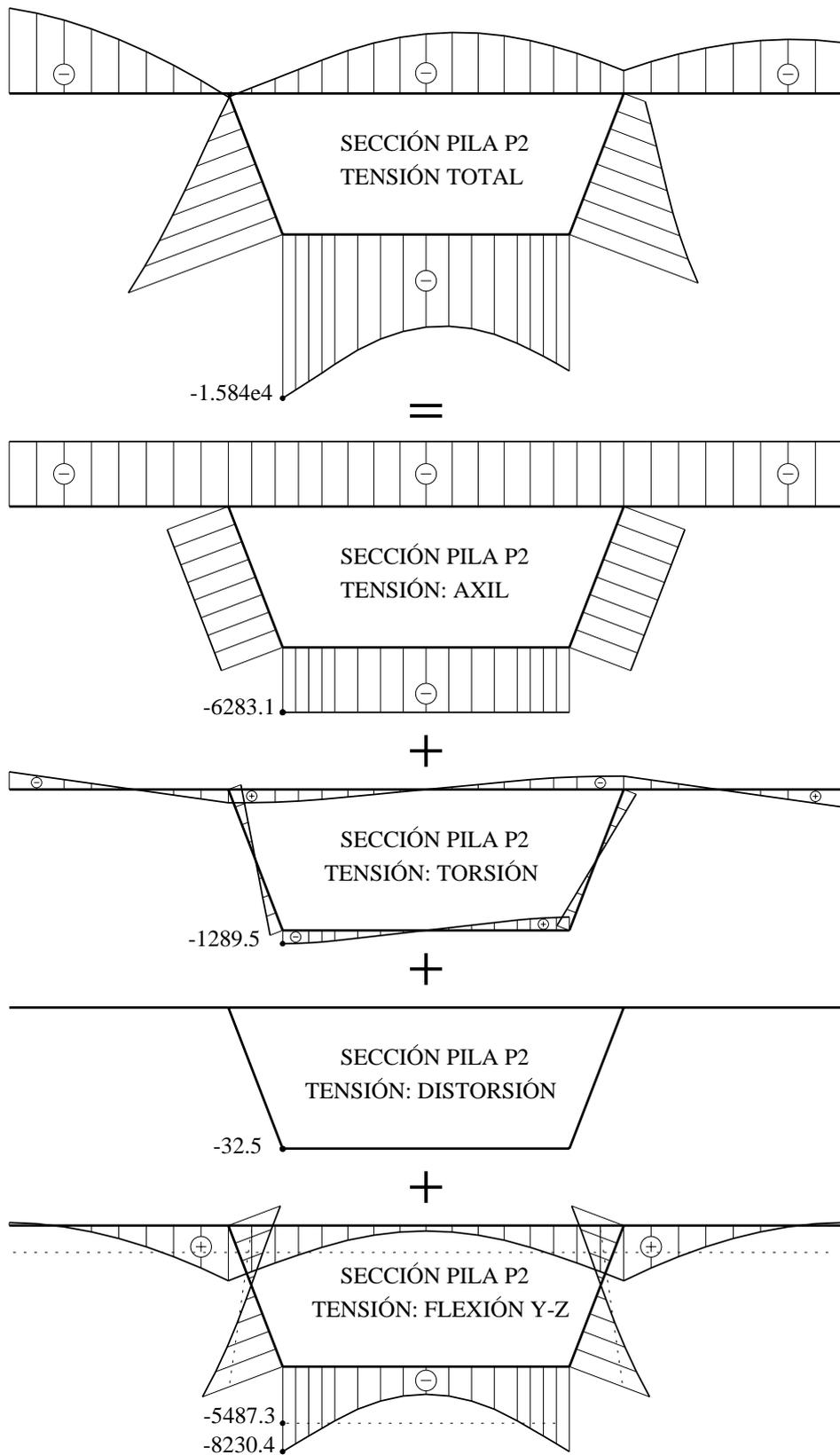


Figura 8.12: Puente sobre el río Voltoya. Descomposición en modos resistentes de las tensiones normales totales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en sección por pila P2.

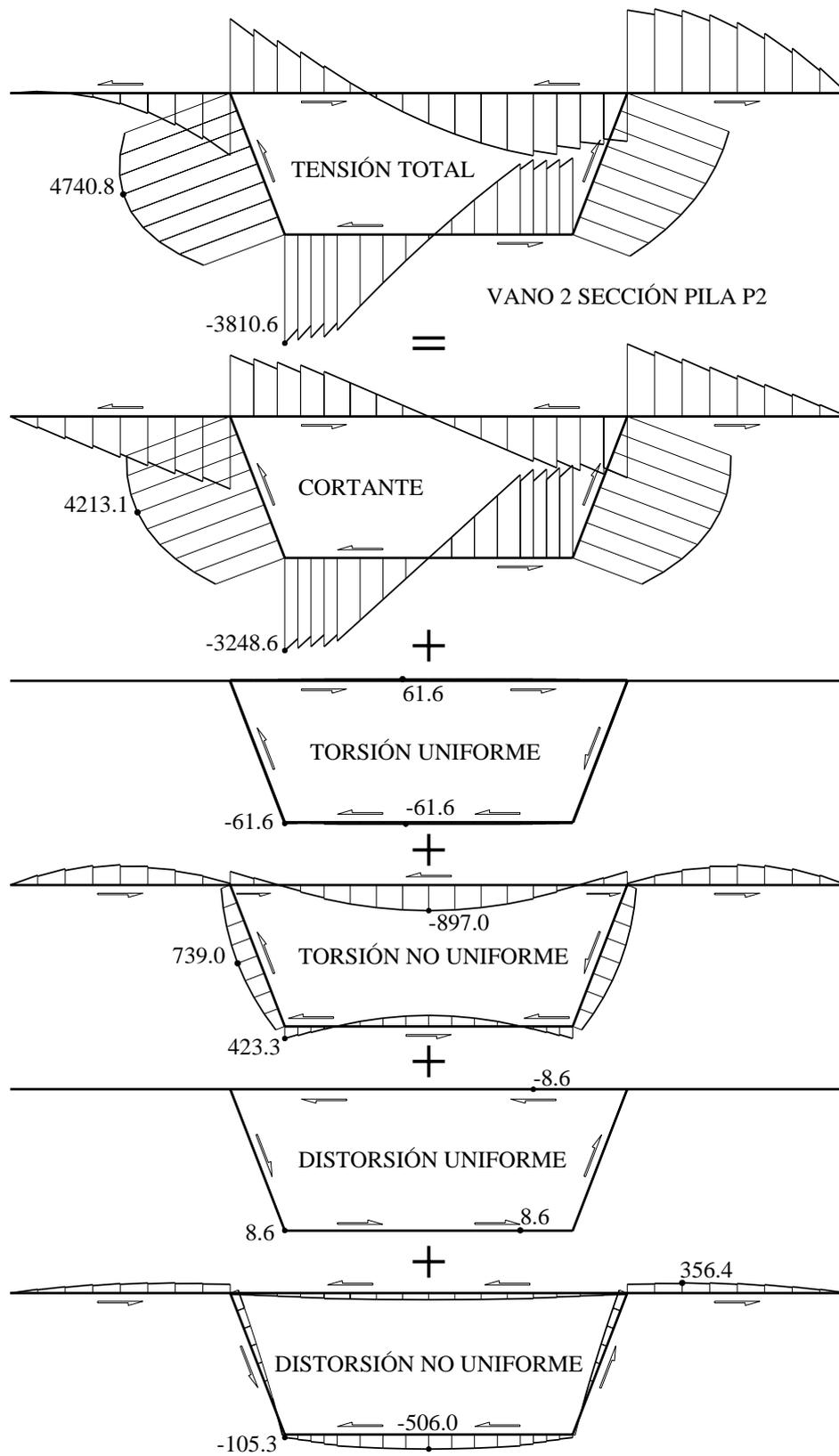


Figura 8.13: Puente sobre el río Voltoya. Descomposición en modos resistentes de las tensiones tangenciales totales  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ) en sección en vano 2 por pila P2.

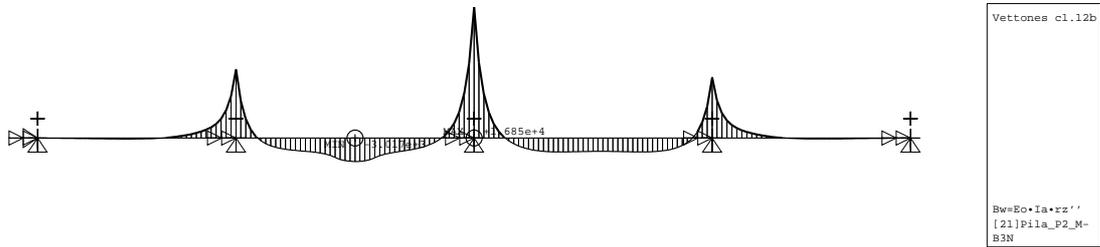


Figura 8.14: Puente sobre el río Voltoya. Bimomento torsor  $B_w$  ( $kN \cdot m^2$ )

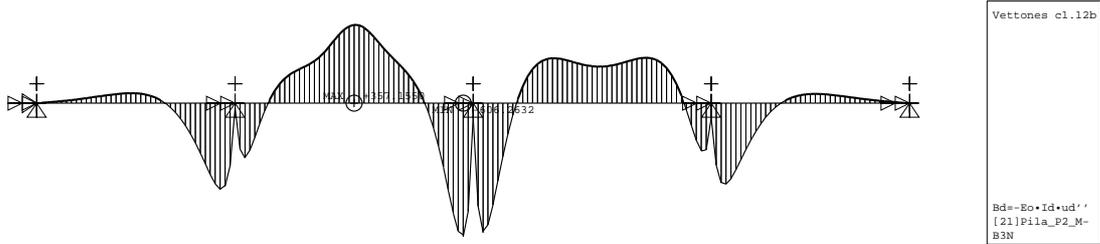


Figura 8.15: Puente sobre el río Voltoya. Bimomento distorsor  $B_d$  ( $kN \cdot m^2$ ).

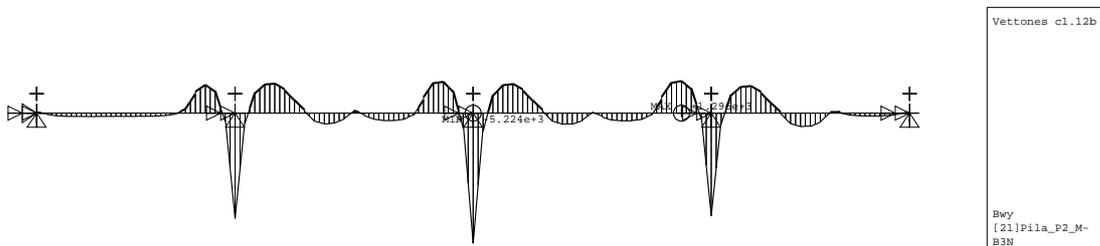


Figura 8.16: Puente sobre el río Voltoya. Bimomento de cortante  $B_{wyo}$  ( $kN \cdot m^2$ ).

Para cerrar este apartado se incluye una comparación gráfica de resultados de tensiones normales entre **MEF** y **B3N**. Como el elemento barra **B3N** tiene asociada la geometría de la sección, se pueden hacer representaciones tridimensionales de los resultados.

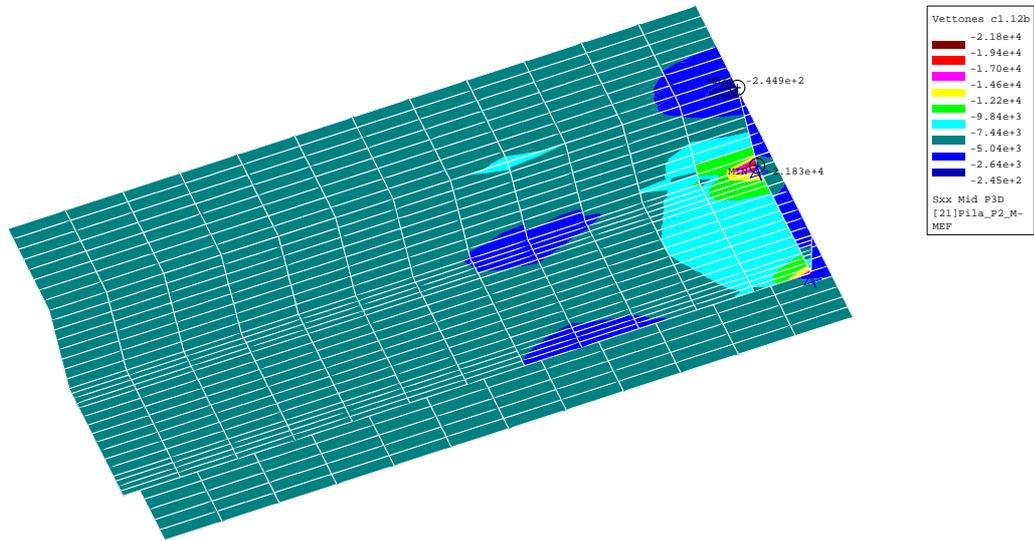


Figura 8.17: Puente sobre el río Voltoya. Tensiones  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en medio vano 2 antes de pila P2 obtenidas con elementos finitos lámina (**MEF**).

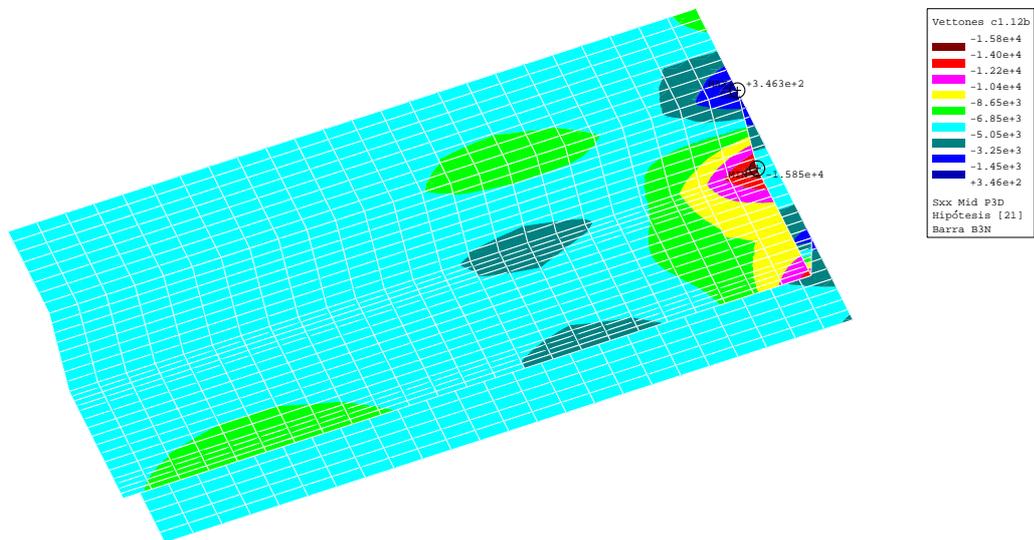


Figura 8.18: Puente sobre el río Voltoya. Tensiones  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en medio vano 2 antes de pila P2 obtenidas con el elemento (**B3N**) representadas tridimensionalmente.

### 8.3. EJEMPLO DE SECCIÓN TRICELULAR CON CANTO VARIABLE

#### 8.3.1. INTRODUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

Como todos los ejemplos que se han presentado son de piezas de sección constante unicelular, con este ejemplo se pretende probar el uso del elemento barra desarrollado en piezas de canto variable y con sección pluricelular. La estructura propuesta no se corresponde con ninguna real, habiéndose dado unas dimensiones alejadas de las habituales con el objeto de que fuera ancha para la luz, y poco rígida transversalmente. Es de dos vanos de luces de valor  $L = 24.0$  (m), en la que la mitad de la longitud de los vanos tiene canto variable con variación lineal tal como se ve en la figura (8.19). En todos los apoyos se consideran impedidos el giro de torsión y la deformación transversal por distorsión.

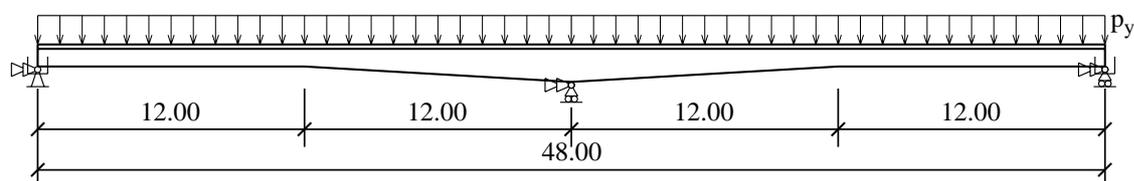


Figura 8.19: Alzado de la estructura. Cotas en (m).

La sección representada en la figura (8.20) tiene un ancho total de  $b = 11.5$  (m), por lo que es ancha en relación a la luz  $L/b = 2.1$ . La sección es tricelular con canto variable entre  $h = 1.0$  (m) y  $h = 1.7$  (m), siendo por tanto las relaciones entre la luz y el canto de  $L/h = 24.0$  y  $L/h = 14.1$  respectivamente. Para el hormigón de la sección se ha tomado un módulo de elasticidad  $E = 3.00 \cdot 10^7$  ( $kN/m^2$ ) y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.20$ .

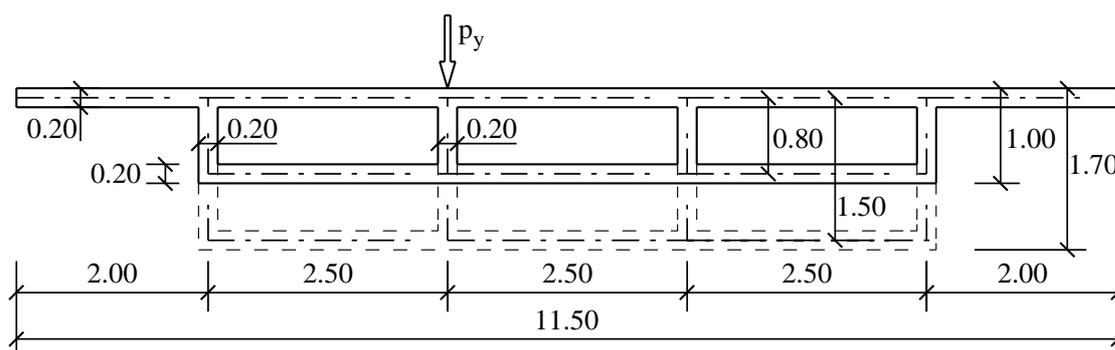


Figura 8.20: Sección tipo del tablero. Cotas en (m).

La acción exterior considerada consiste en un cuchillo de carga de valor constante de  $p_y = 100.0$  ( $kN/m$ ), aplicado en toda la longitud de la estructura, sobre una de las almas intermedias de la sección. Se ha aplicado en esta posición, para que en la deformada de la estructura se vea claramente la influencia del modo de distorsión.

### 8.3.2. CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LA SECCIÓN

Para poder comparar fácilmente los resultados entre el modelo de barras y un modelo de elementos finitos con láminas, se ha hecho la misma división en elementos de la sección transversal en ambos casos. Se puede ver en la siguiente figura (8.21):

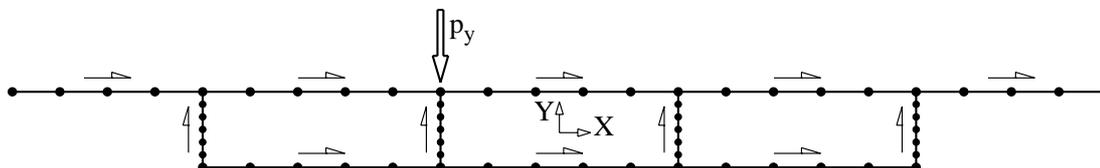


Figura 8.21: Discretización de la sección.

Por ser una sección tricelular se pueden definir tres modos independientes de distorsión de las células. En la figura (8.22) se han representado tres de los posibles modos para la sección tipo con canto menor.

Como el elemento desarrollado sólo permite el cálculo con único modo de distorsión hay que elegir uno. Para el estado de carga que se ha considerado el modo de distorsión predominante será el indicado con el índice (0), en el cual para la segunda alma contando desde la izquierda (que es sobre la que se aplica la acción exterior  $p_y$ ), las fuerzas autoequilibradas de las células adyacentes al componerse crean una fuerza vertical descendente.

En la figura (8.23) se han dibujado los resultados más representativos para los modos de torsión y distorsión para la sección tipo con canto menor. En el modo de cortante se ha dibujado la función de alabeo sin ortogonalizar  $w_y$ , y ortogonalizada  $w_{y0}$  respecto del giro, siendo esta última la que proporciona la variación de las tensiones normales por el efecto de arrastre de cortante.

Los valores de las características mecánicas para la sección tipo con canto menor son:

$$\begin{array}{l}
 A = 4.4400 \cdot 10^{+0} \quad (m^2) \\
 A_y = 3.6048 \cdot 10^{-1} \quad (m^2) \\
 I_{w_{y0}.w_{y0}} = 1.0143 \cdot 10^{+0} \quad (-) \\
 D_{w_{y0}.y} = -7.7539 \cdot 10^{-1} \quad (-) \\
 y_c = -3.2793 \cdot 10^{-1} \quad (m)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 I_x = 6.1907 \cdot 10^{-1} \quad (m^4) \\
 D_{yy} = 6.4000 \cdot 10^{-1} \quad (m^2) \\
 D_{w_{y0}.w_{y0}} = 2.1510 \cdot 10^{+0} \quad (m^{-2}) \\
 y_a = -4.8050 \cdot 10^{-1} \quad (m)
 \end{array} \right.$$
  

$$\begin{array}{l}
 I_t = 1.7408 \cdot 10^{+0} \quad (m^4) \\
 D_{t_d.t_d} = 1.0495 \cdot 10^{+0} \quad (m^4) \\
 D_{t_d.t_a} = -8.9486 \cdot 10^{-1} \quad (m^4) \\
 K_d = 2.9319 \cdot 10^{-2} \quad (m^2)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 I_a = 2.1155 \cdot 10^{+0} \quad (m^6) \\
 I_d = 7.9028 \cdot 10^{-1} \quad (m^6) \\
 I_{w_d.w_a} = 0.0000 \cdot 10^{+0} \quad (m^6)
 \end{array} \right.$$

La posición del centro de gravedad  $y_c$  y del centro de esfuerzos cortantes  $y_a$ , están referidas al borde superior de la sección.

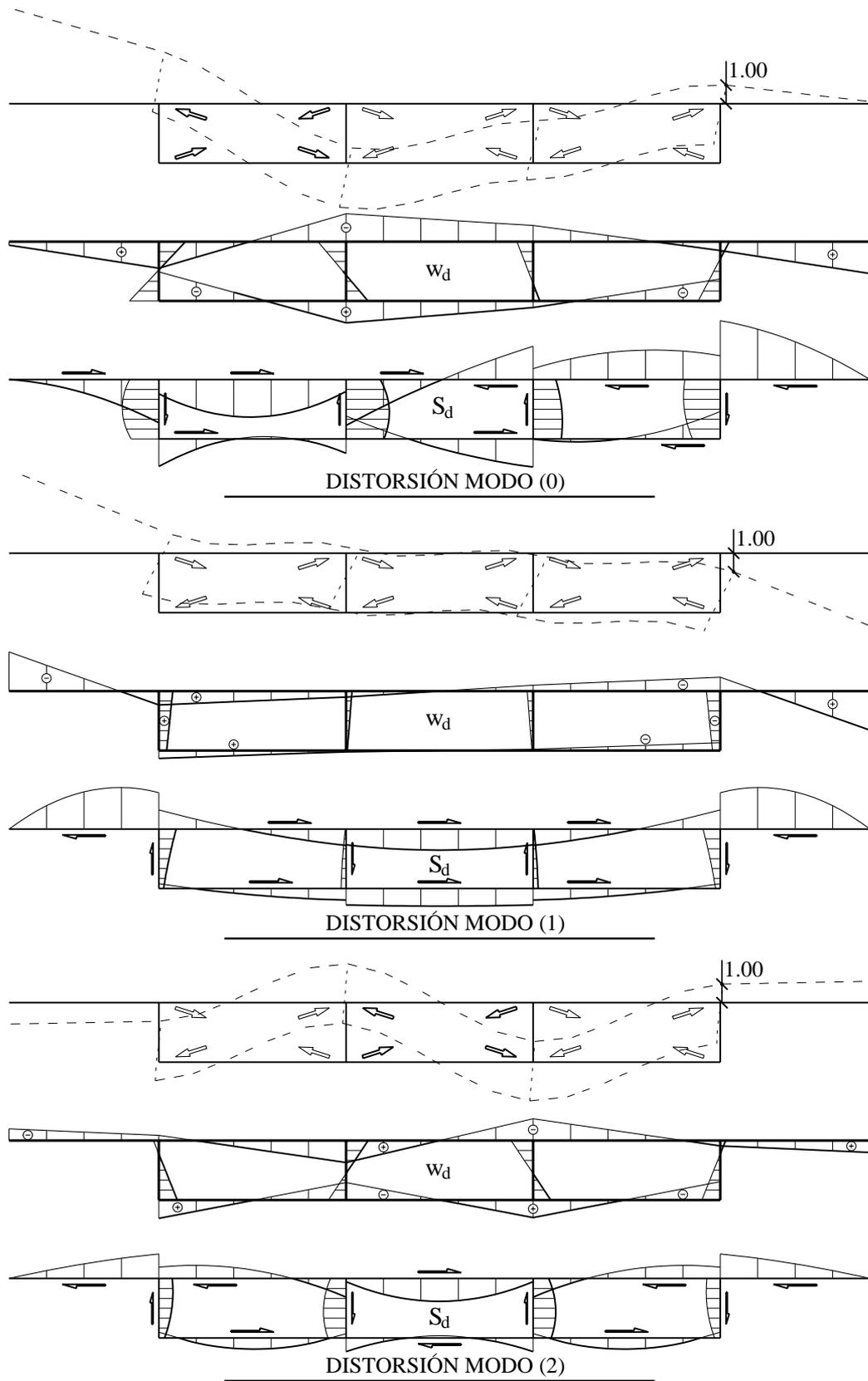


Figura 8.22: Características de la sección tipo. **Modos de distorsión:** deformada con esquema de fuerzas autoequilibradas de distorsión, función de alabeo  $w_d$  y tensiones tangenciales  $S_d$  por distorsión no uniforme.

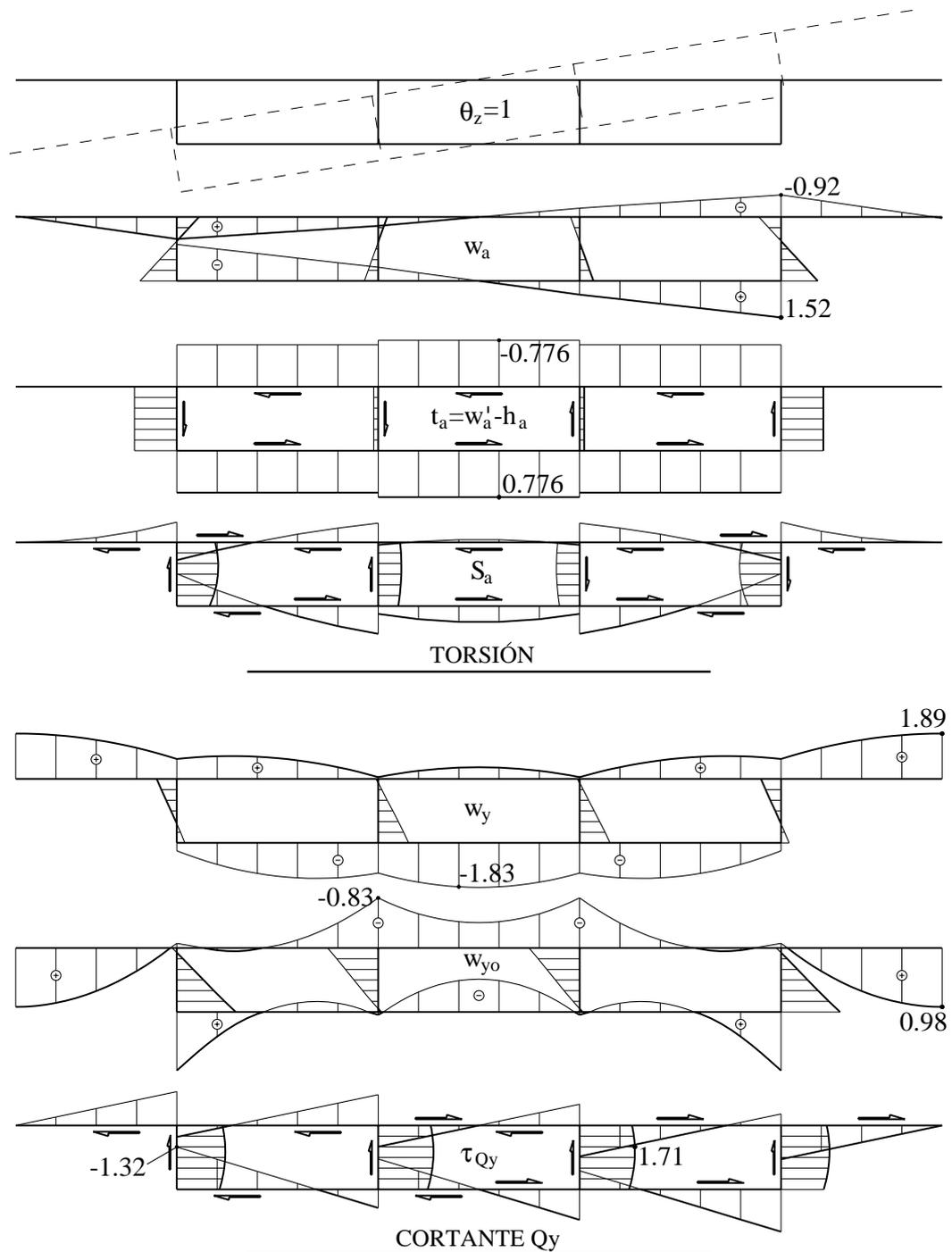


Figura 8.23: Características de la sección tipo. **Torsión:** deformada, función de alabeo  $w_a$ , tensión tangencial por torsión uniforme  $t_a$ , y tensión tangencial por torsión no uniforme  $S_a$ . **Cortante  $Q_y$ :** función de alabeo  $w_y$ , función de alabeo ortogonalizada respecto del giro  $w_{y0}$ , y tensiones tangenciales por cortante  $\tau_{Q_y}$ .

### 8.3.3. MODELOS DE CÁLCULO

Igual que en el ejemplo del apartado 8.2 se ha realizado el cálculo de la estructura mediante tres métodos: barras convencionales (**C**), el elemento especial para barras con sección de paredes delgadas (**B3N**) figura (8.29), y con elementos finitos finitos tipo lámina (**MEF**) figura (8.30).

En los tres modelos la discretización longitudinal es en elementos de 1.0 (*m*) de longitud. En los modelos de barras, a las que se corresponden con los tramos de canto variable se las ha asignado la sección correspondiente al canto en el centro del elemento. Habiéndose definido por tanto 13 secciones diferentes, una para los tramos de canto constante, y 12 para las zonas de canto variable.

El número de nudos, elementos y grados de libertad de cada uno de los modelos se recoge en la siguiente tabla.

Modelo	Nº de nudos	Nº de elementos	Nº de grados de libertad
<b>C</b>	49	48	$49 \times 6 = 294$
<b>B3N</b>	97	48	$97 \times 11 = 1\ 067$
<b>MEF</b>	9\ 479	3\ 249	$9\ 479 \times 6 = 56\ 874$

### 8.3.4. ANÁLISIS DE MOVIMIENTOS

Para la sección situada a la distancia de  $z = 8.0$  (*m*) del apoyo izquierdo, correspondiente a la zona donde los movimientos verticales son máximos, se ha dibujado en la figura (8.24) la comparación de la deformada transversal obtenida con los tres métodos de cálculo. Los valores numéricos para el movimiento vertical del alma bajo el que se aplica la carga son:

Modelo	$u_y$ ( <i>m</i> )
<b>C</b>	$-7.7355 \cdot 10^{-3}$
<b>B3N</b>	$-8.5865 \cdot 10^{-3}$
<b>MEF</b>	$-8.6917 \cdot 10^{-3}$

Tomando como referencia el valor obtenido con el método de los elementos finitos, el obtenido con la barra convencional **C** es un 11.0% inferior, y el obtenido con la barra **B3N** es un 1.2% inferior. Por lo tanto, a la vista de los resultados se puede concluir que el elemento unidimensional desarrollado proporciona valores de movimientos prácticamente iguales a los obtenidos con un modelo de elementos finitos.

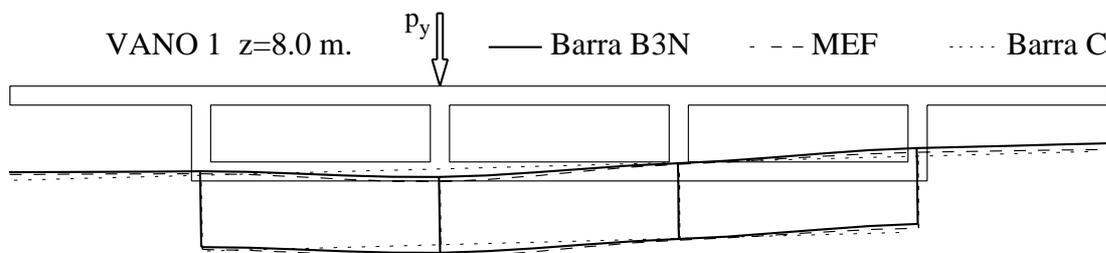


Figura 8.24: Deformada ampliada 100 veces de la sección a  $z = 8.0$  (*m*) del apoyo extremo.

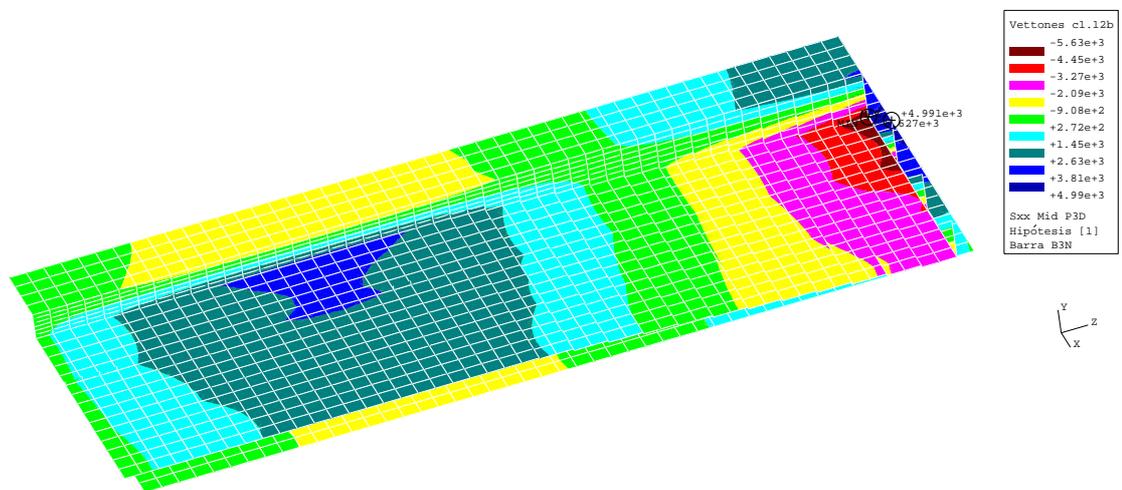


Figura 8.25: Representación tridimensional del modelo de barras **B3N**. Tensiones normales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en el vano 1.

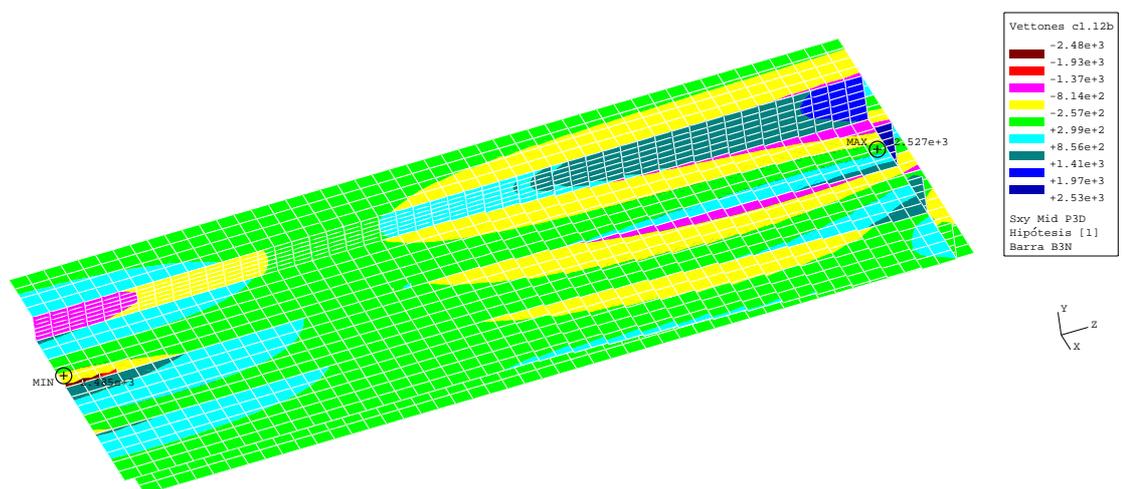


Figura 8.26: Representación tridimensional del modelo de barras **B3N**. Tensiones tangenciales  $\tau_{sz}$  ( $kN/m^2$ ) en el vano 1.

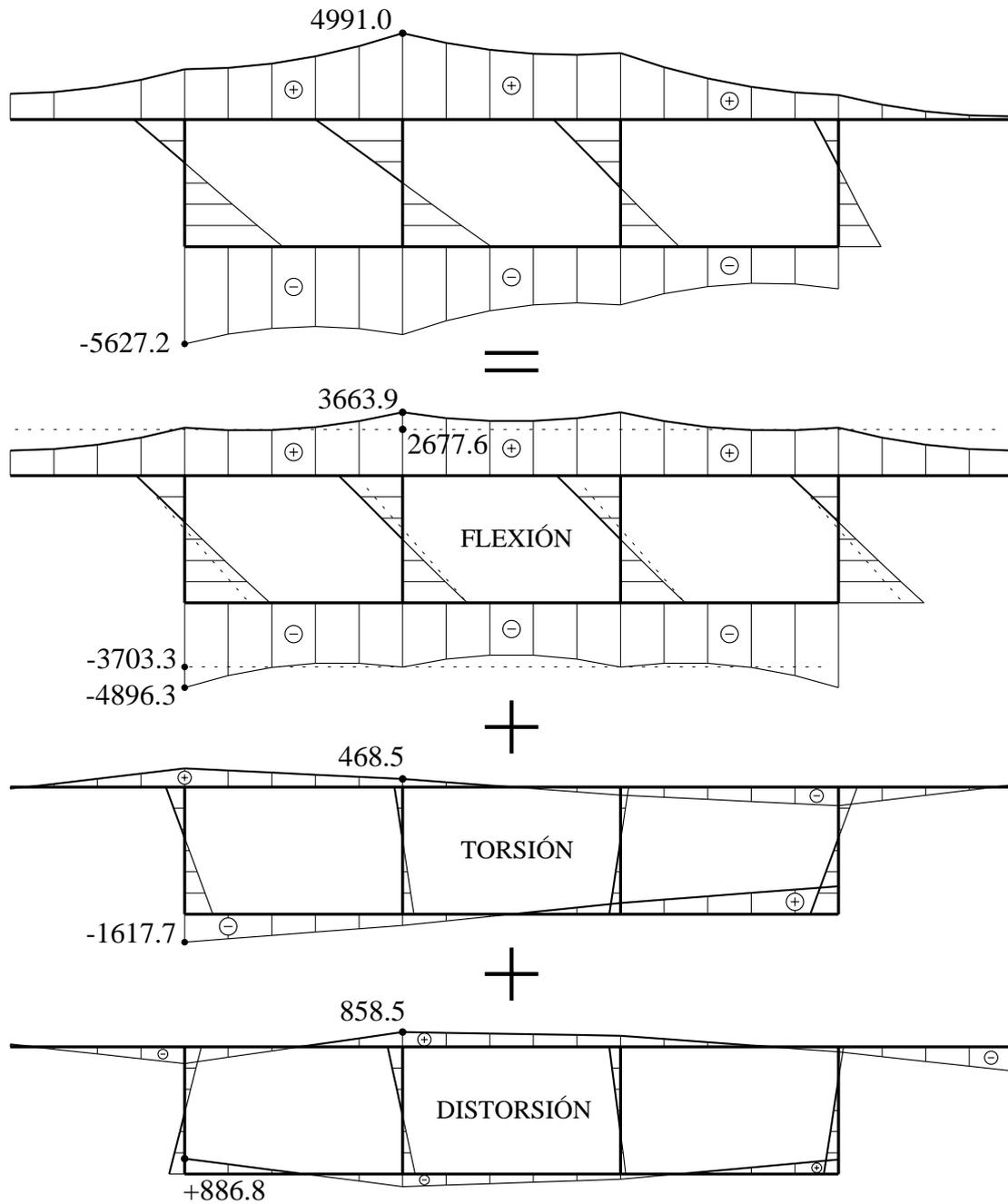
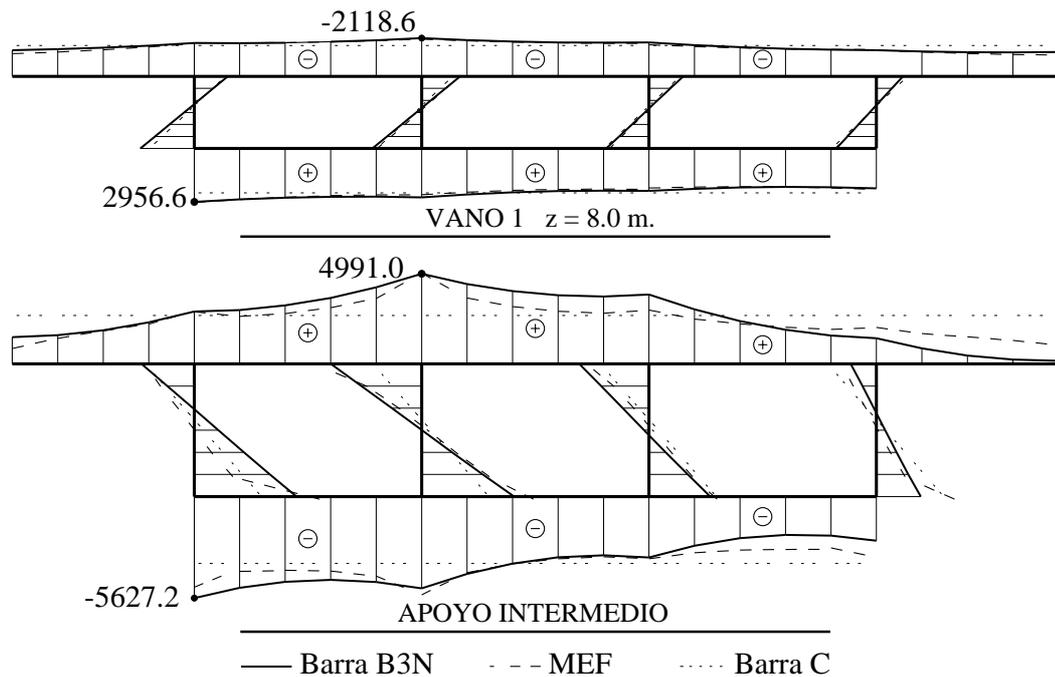


Figura 8.27: Descomposición de las tensiones normales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en la sección por el apoyo intermedio.


 Figura 8.28: Tensiones normales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en el vano primero, y por apoyo intermedio.

### 8.3.5. ANÁLISIS DE LAS TENSIONES

En las figuras (8.28) se compara las tensiones normales obtenidas por los tres métodos de cálculo, en la sección a  $z = 8.0$  (m) del apoyo izquierdo que tiene el máximo momento en el vano primero, y en la sección por el apoyo intermedio. Los valores numéricos para las tensiones máximas negativa y positiva se recogen en la siguiente tabla:

Sección	Modelo	Mín. $\sigma_z$ ( $kN/m^2$ )	Máx. $\sigma_z$ ( $kN/m^2$ )
Vano 1 $z = 8.0$ (m)	C	-1706.3 (-17.1%)	+2299.7 (-23.2%)
	<b>B3N</b>	<b>-2118.6</b> (+2.9%)	<b>+2956.6</b> (-1.3%)
	MEF	-2058.4	+2994.1
Pila 1 $z = 24.0$ (m)	C	-3704.2 (-24.0%)	+2678.2 (-46.8%)
	<b>B3N</b>	<b>-5627.2</b> (+15.4%)	<b>+4991.1</b> (-0.8%)
	MEF	-4874.5	+5033.7

Entre paréntesis se ha indicado la diferencia relativa respecto de la tensión del modelo de elementos finitos. Se observa que:

- Las tensiones con el modelo de barras convencionales en todos los casos tienen bastante error por defecto.
- Con el elemento barra específico para secciones de paredes delgadas, los errores en la sección por vano son pequeños. En la sección por apoyo en pila, la tensión máxima en la tabla superior tiene error pequeño, siendo mayor el error en la tabla inferior, pero en un punto en que en el modelo de elementos finitos hay concentración localizada de tensiones por haber un apoyo puntual.

Con la barra **B3N** desarrollada se consigue la descomposición de las tensiones por modos resistentes. La descomposición para la sección por el apoyo intermedio se ha representado en la figura (8.27).

### 8.3.6. CONCLUSIONES

En vista de los resultados las conclusiones son iguales que en ejemplos precedentes. El elemento desarrollado en el presente trabajo es capaz de obtener resultados parecidos a los de un modelo de elementos finitos de láminas, con un esfuerzo numérico mucho menor, en este caso con cincuenta y tres veces menos de grados de libertad. A parte de como ya se ha indicado repetidamente, se consigue la descomposición de resultados en modos resistentes. Los resultados a lo largo de los vanos son prácticamente iguales, presentando más diferencia en las secciones por los apoyos, donde las coacciones al alabeo son mayores, y donde hay otros efectos locales que el modelo de barras no incluye.

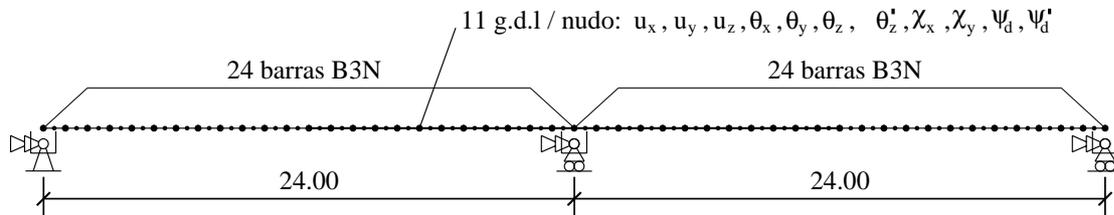


Figura 8.29: Modelo de elementos unidimensionales de tres nudos **B3N** con 1.067 g.d.l.

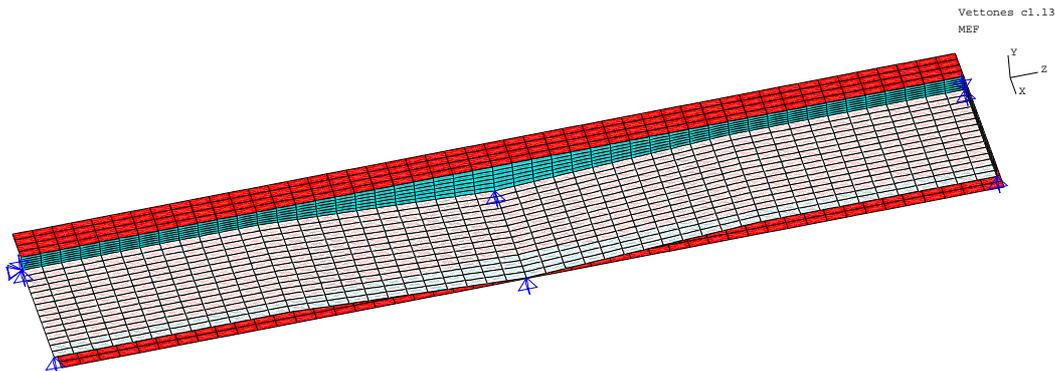


Figura 8.30: Modelo de elementos finitos **MEF** tipo lámina con 56.874 g.d.l.

## 8.4. COEFICIENTE DE EXCENRICIDAD EN UN PUENTE DE VIGAS

### 8.4.1. INTRODUCCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

Como ejemplo de aplicación de la teoría desarrollada a secciones abiertas de paredes delgadas, se ha elegido un caso real de un tablero de vigas prefabricadas con sección doble T, por ser la tipología más común de tablero con sección abierta. Como este tipo de tablero para las cargas aplicadas en todo el ancho (peso propio, carga permanente y sobrecarga de uso), esencialmente cada viga se comporta como biapoyada con la carga para el ancho de tablero que le corresponde, y sólo para la sobrecarga por vehículo excepcional es donde tiene importancia el trabajo conjunto de todas las vigas, el presente ejemplo se va a centrar en estudiar el tablero con este último tipo de carga.

El tablero elegido para su estudio se encuentra en la Autovía Valladolid-Segovia, que se corresponde con la carretera autonómica CL-601, y dentro de ella en el tramo comprendido entre el Acceso Sur a Cuéllar (enlace con SG-205) y la intersección con la carretera CL-603. Al construir la autovía, para salvar el paso sobre el Río Cega se aprovechó un puente existente para una calzada, y se construyeron dos nuevos, uno para la otra calzada, y otro para una vía de servicio. Entre los dos nuevos se ha escogido el último, que es un puente de longitud total de 88.00 metros, dividido en tres vanos isostáticos de luces  $24.50 + 32.00 + 31.50$  en metros como se ve en la figura (8.33), teniendo el tablero un ancho total de 9.10 metros, y estando formado por cuatro vigas doble T de canto 1.50 ( $m$ ) y con losa de hormigón *in situ* de 0.25 ( $m$ ) de espesor, tal como se aprecia en la figura (8.34). Entre los tres vanos, se ha escogido el primero con luz de 24.0 ( $m$ ) entre puntos de apoyo, ya que por ser el más corto, es en el que es mayor la diferencia de respuesta entre las diferentes vigas.

En la imagen (8.31) se puede ver el puente ya terminado, siendo el puente de la vía de servicio el situado al fondo. La imagen (8.32) se corresponde a un momento durante su construcción, en el que se ven todas las vigas ya colocadas, y los encofrados perdidos para la losa del tercer vano.<sup>3</sup>

### 8.4.2. CÁLCULO DE LA ESTRUCTURA

Para realizar el cálculo la sección del tablero se ha idealizado como si fueran paredes de espesor constante, tal como se refleja en la figura (8.35). Las características del material consideradas para toda la sección son las siguientes: módulo de elasticidad longitudinal  $E = 3.00 \cdot 10^7$  ( $kN/m^2$ ), coeficiente de Poisson  $\nu = 0.20$  y módulo de elasticidad transversal  $G = 1.25 \cdot 10^7$  ( $kN/m^2$ ). En la misma figura se ha representado la posición del vehículo excepcional dentro del ancho del tablero, que se corresponde con la de la máxima excentricidad posible de acuerdo con la normativa, y que tiene un valor de  $e = 2.50$  ( $m$ ) respecto del centro del tablero.

Para obtener el modo de distorsión, hay que elegir un sistema de fuerzas autoequilibrado que represente la esencia de la respuesta de la estructura, que en este caso es que las cargas se repartan estáticamente entre las vigas adyacentes. El esquema elegido se ha

---

<sup>3</sup>Se agradece a los ingenieros de MBG Ingeniería y Arquitectura S.L. la información facilitada del mismo.



Figura 8.31: Puente sobre el río Cega. Foto aérea.



Figura 8.32: Puente sobre el río Cega. Foto en construcción en Octubre de 2007.

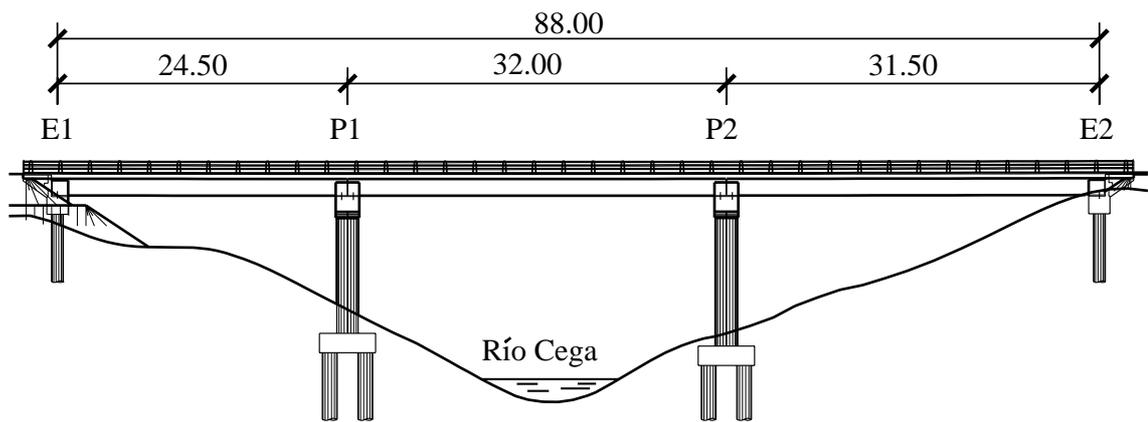


Figura 8.33: Puente sobre el río Cega. Alzado longitudinal. Cotas en (m).

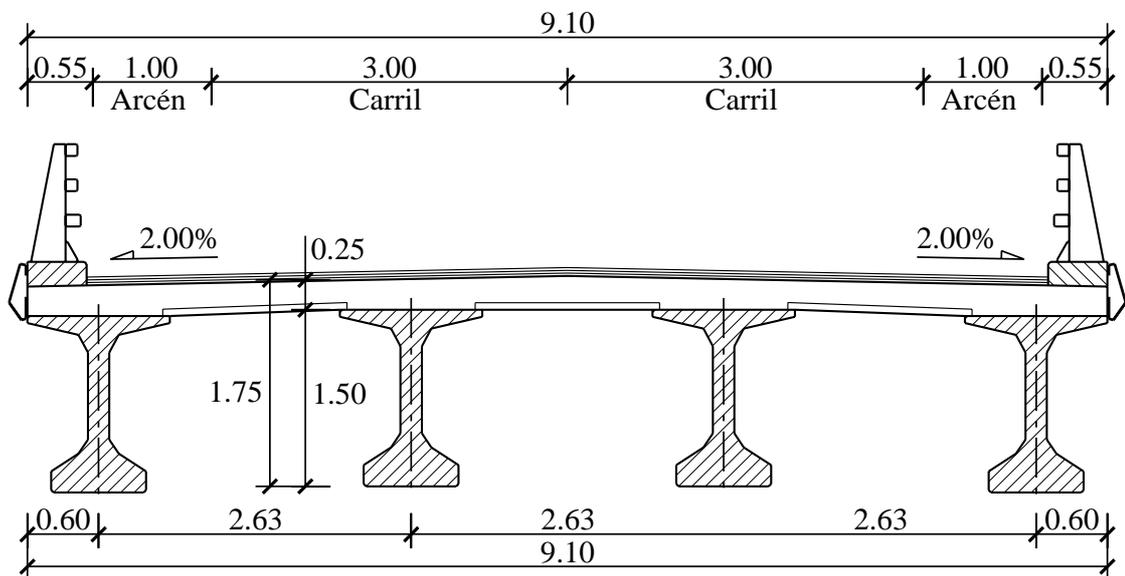


Figura 8.34: Puente sobre el río Cega. Sección tipo. Cotas en (m).

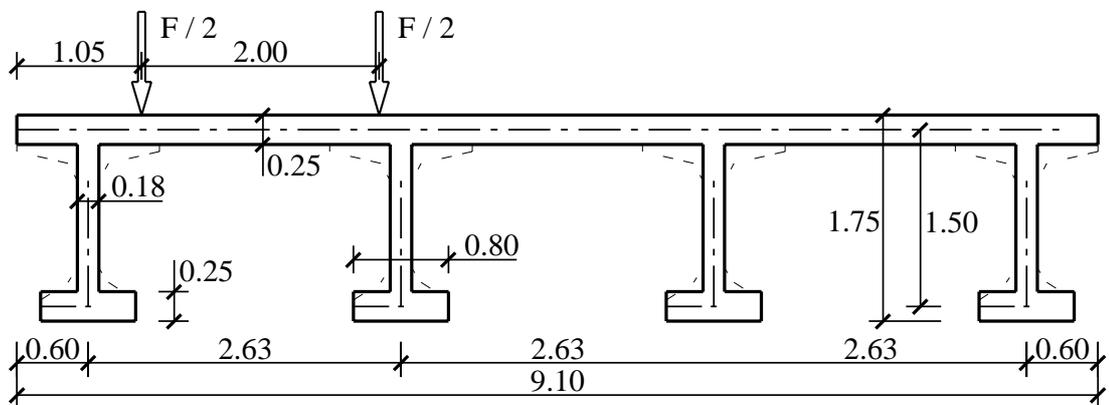


Figura 8.35: Puente sobre el río Cega. Sección de cálculo. Cotas en (m).

representado en la figura (8.37). Calculados los modos resistentes con la metodología del capítulo 3 se obtienen las siguientes características mecánicas:

$$\begin{array}{l|l} I_x = 1.6377 \cdot 10^{+0} & (m^4) & A_y = 9.3631 \cdot 10^{-1} & (m^2) \\ I_t = 7.5726 \cdot 10^{-2} & (m^4) & I_a = 1.3314 \cdot 10^{+1} & (m^6) \\ D_{t_d.t_d} = 0.0000 \cdot 10^{+0} & (m^4) & I_d = 4.4182 \cdot 10^{-1} & (m^6) \\ D_{t_d.t_a} = 0.0000 \cdot 10^{+0} & (m^4) & I_{w_d.w_a} = 0.0000 \cdot 10^{+0} & (m^6) \\ K_d = 7.2263 \cdot 10^{-4} & (m^2) & & \end{array}$$

Al ser nulas las características mecánicas  $D_{t_d.t_d}$ ,  $D_{t_d.t_a}$  y  $I_{w_d.w_a}$ , las ecuaciones diferenciales para los problemas de torsión y distorsión quedan desacopladas, siendo por tanto las ecuaciones (6.9) las que hay que utilizar.

Las principales funciones que dan las distribuciones de tensiones normales y tangenciales se han representado en las siguientes figuras:

- Figura (8.36). Características de flexión: función de alabeo ortogonalizada de cortante  $w_{y_0}$  y distribución de tensiones tangenciales.
- Figura (8.37). Características de torsión: función de alabeo  $w_a$  y distribución de tensiones tangenciales de torsión no uniforme.
- Figura (8.38). Características de distorsión: deformada, función de alabeo  $w_d$  y distribución de tensiones tangenciales de distorsión no uniforme.

El vano de luz  $L = 24.00$  ( $m$ ) entre puntos de apoyos se ha modelizado con dieciséis elementos barra de tres nudos **B3N**, y dispuesto apoyos simples en sus extremos, tal como se representa en la figura (8.39). El vehículo excepcional considerado tiene un peso total de  $F = 600.0$  ( $kN$ ), con una longitud de  $b = 3.0$  ( $m$ ) y una excentricidad respecto del centro de la sección de  $e = 2.50$  ( $m$ ).

Del cálculo del modelo de barras **B3N** se obtienen los siguientes resultados gráficos para las tensiones:

- Figura (8.40). Dibujo tridimensional de la deformada de la estructura, con las tensiones normales en las almas de las vigas.
- Figura (8.41). Dibujo tridimensional de la deformada de la estructura, con las tensiones normales en la losa y en la cabeza inferior de las vigas.
- Figura (8.42). Tensiones normales en la sección por centro luz comparadas con las obtenidas de un modelo **MEF**. Como se puede ver, los resultados obtenidos con el elemento barra **B3N** son muy semejantes en forma y valores a los obtenidos con un modelo de elementos finitos con elementos tipo lámina.
- Figura (8.43). Descomposición de las tensiones normales en sección por centro de luz. Se aprecia que la componente de tensiones por flexión es prácticamente lineal en la losa, lo que indica que el efecto por arrastre de cortante en la distribución de tensiones normales es muy pequeño. La componente por distorsión es pequeña respecto de las de flexión y torsión.

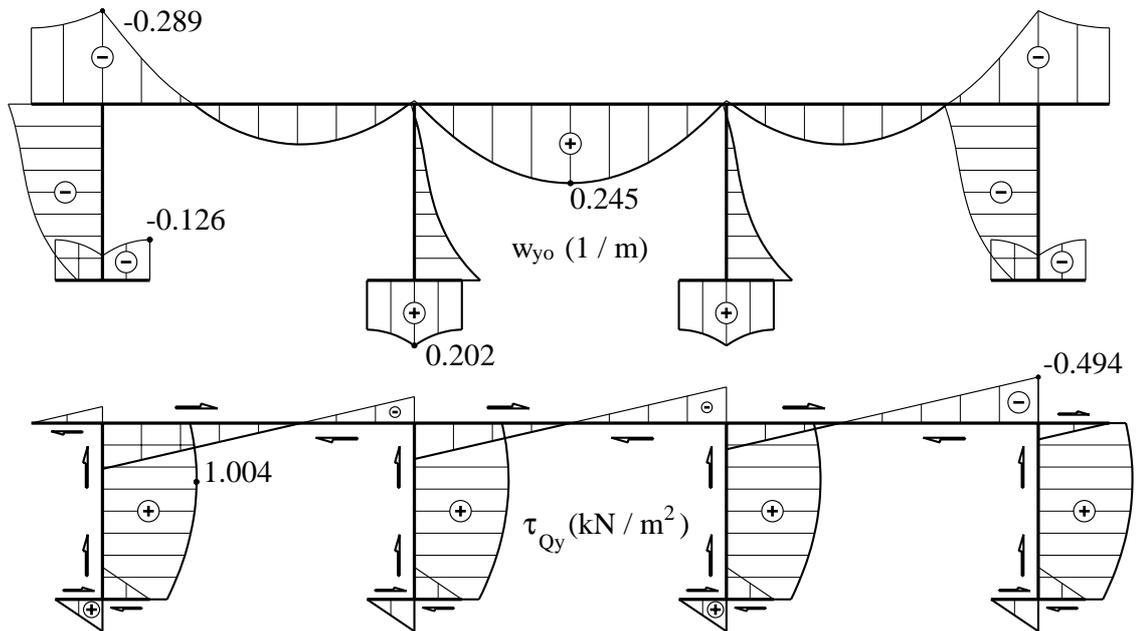


Figura 8.36: Cortante.  $w_{yo}$  ( $1/m$ ) función de alabeo ortogonalizada.  $\tau_{Q_y}$  ( $kN/m^2$ ) tensiones tangenciales para cortante unidad.

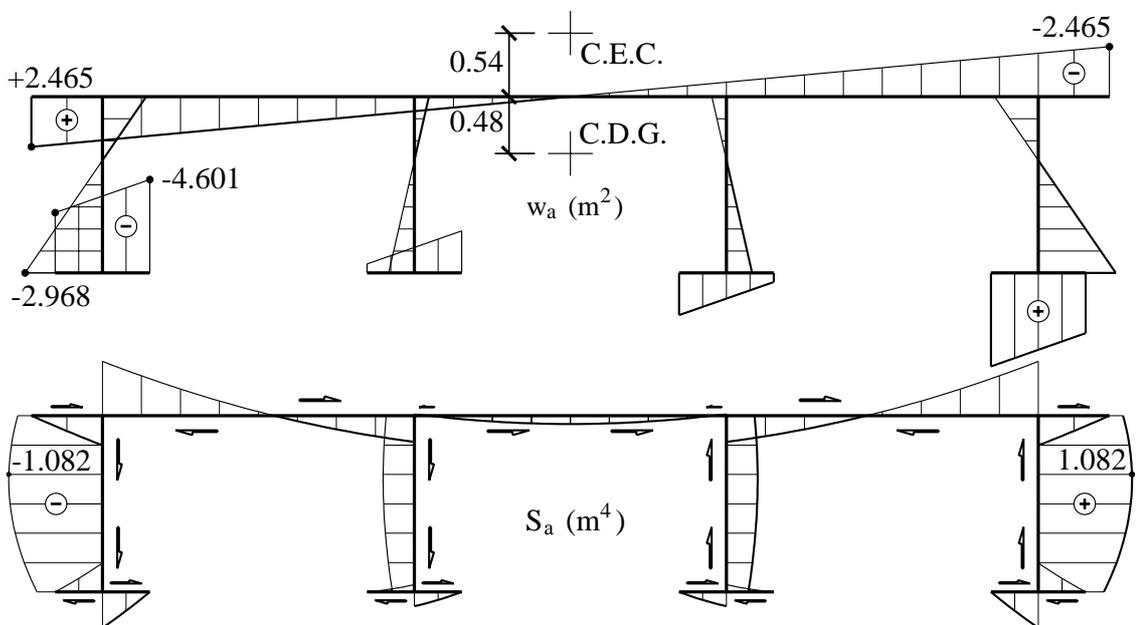


Figura 8.37: Torsión.  $w_a$  ( $m^2$ ) función de alabeo de torsión uniforme.  $S_a$  ( $m^4$ ) tensiones tangenciales por torsión no uniforme  $\tau_{sz} = (M_{zw} \cdot S_a)/(I_a \cdot t)$ . C.D.G. centro de gravedad y C.E.C. centro de esfuerzos cortantes.

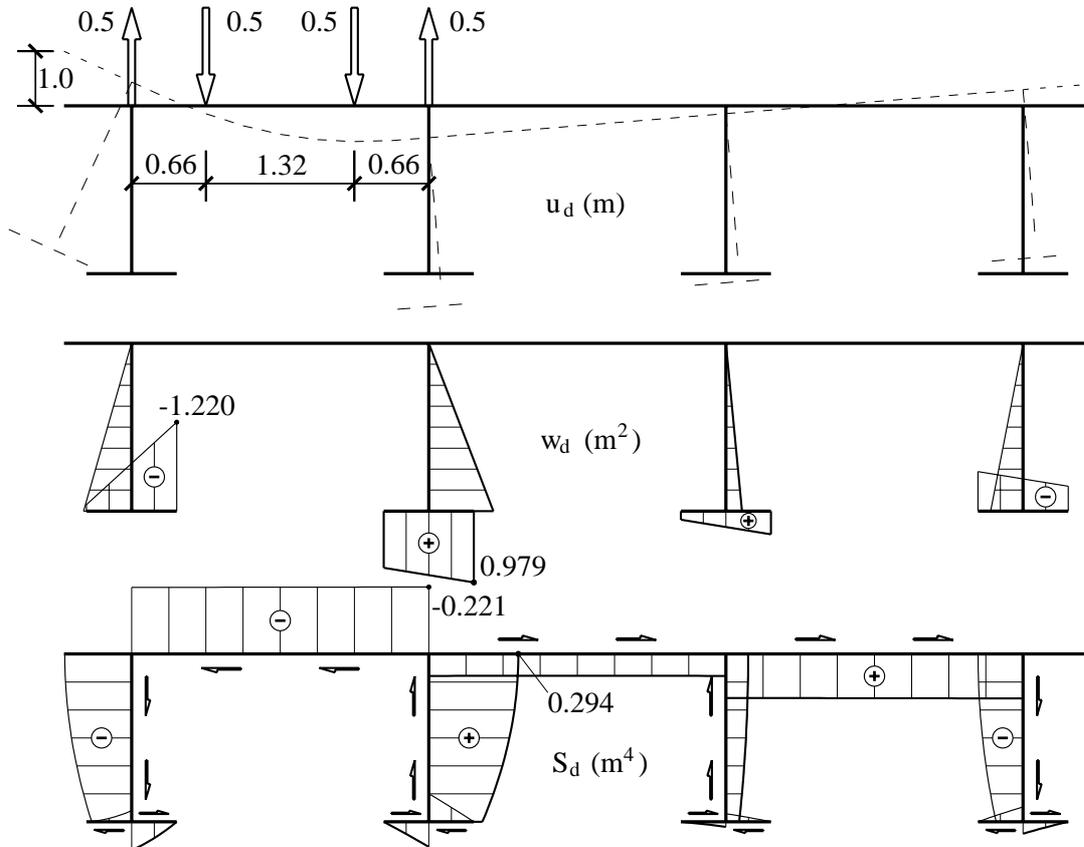


Figura 8.38: Distorsión.  $u_d$  (m) deformada de distorsión y sistema de fuerzas.  $w_d$  ( $m^2$ ) función de alabeo de distorsión uniforme.  $S_d$  ( $m^4$ ) tensiones tangenciales por distorsión no uniforme  $\tau_{sz} = (M_{dw} \cdot S_d)/(I_d \cdot t)$ .

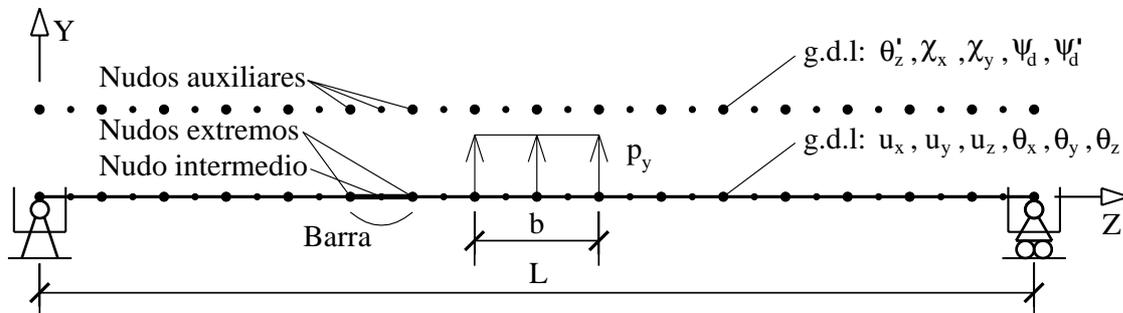


Figura 8.39: Puente de vigas. Modelo de barras **B3N**.

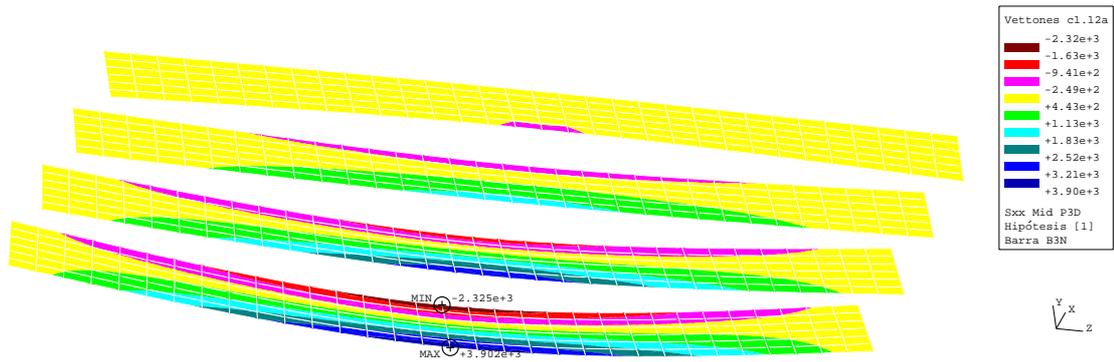


Figura 8.40: Modelo de barras **B3N**. Tensiones normales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en las almas.

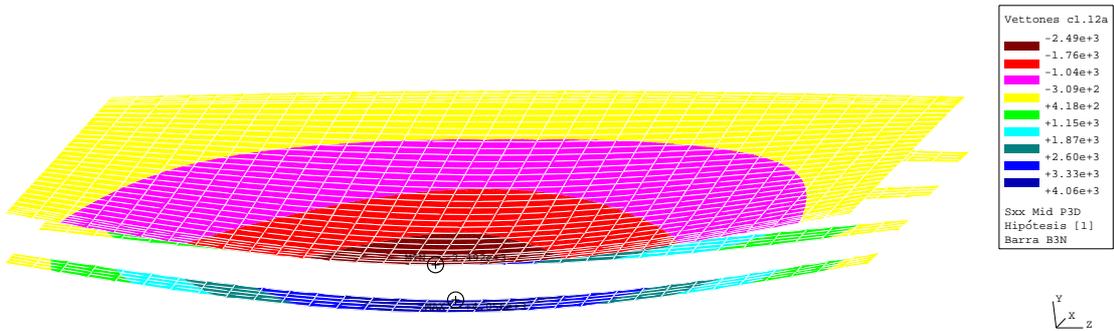


Figura 8.41: Modelo de barras **B3N**. Tensiones normales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en la losa y en la cabeza inferior de las vigas.

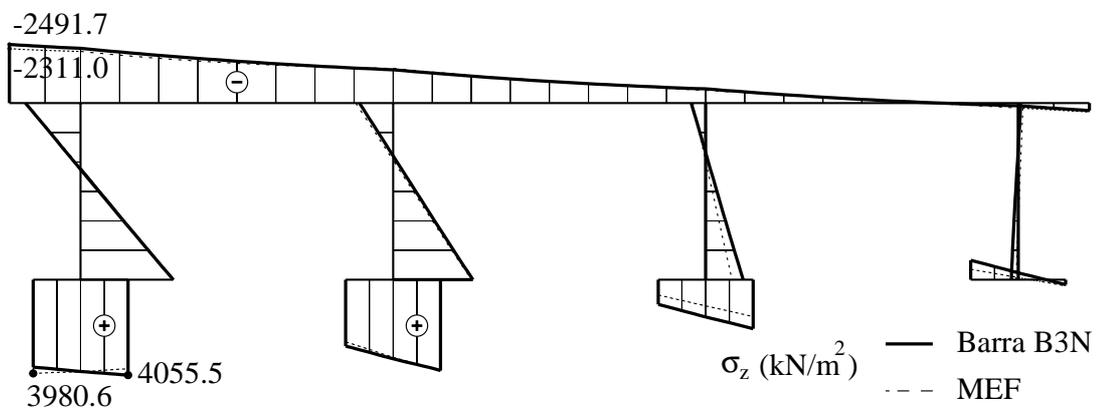


Figura 8.42: Tensiones normales  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en la sección por centro de luz.

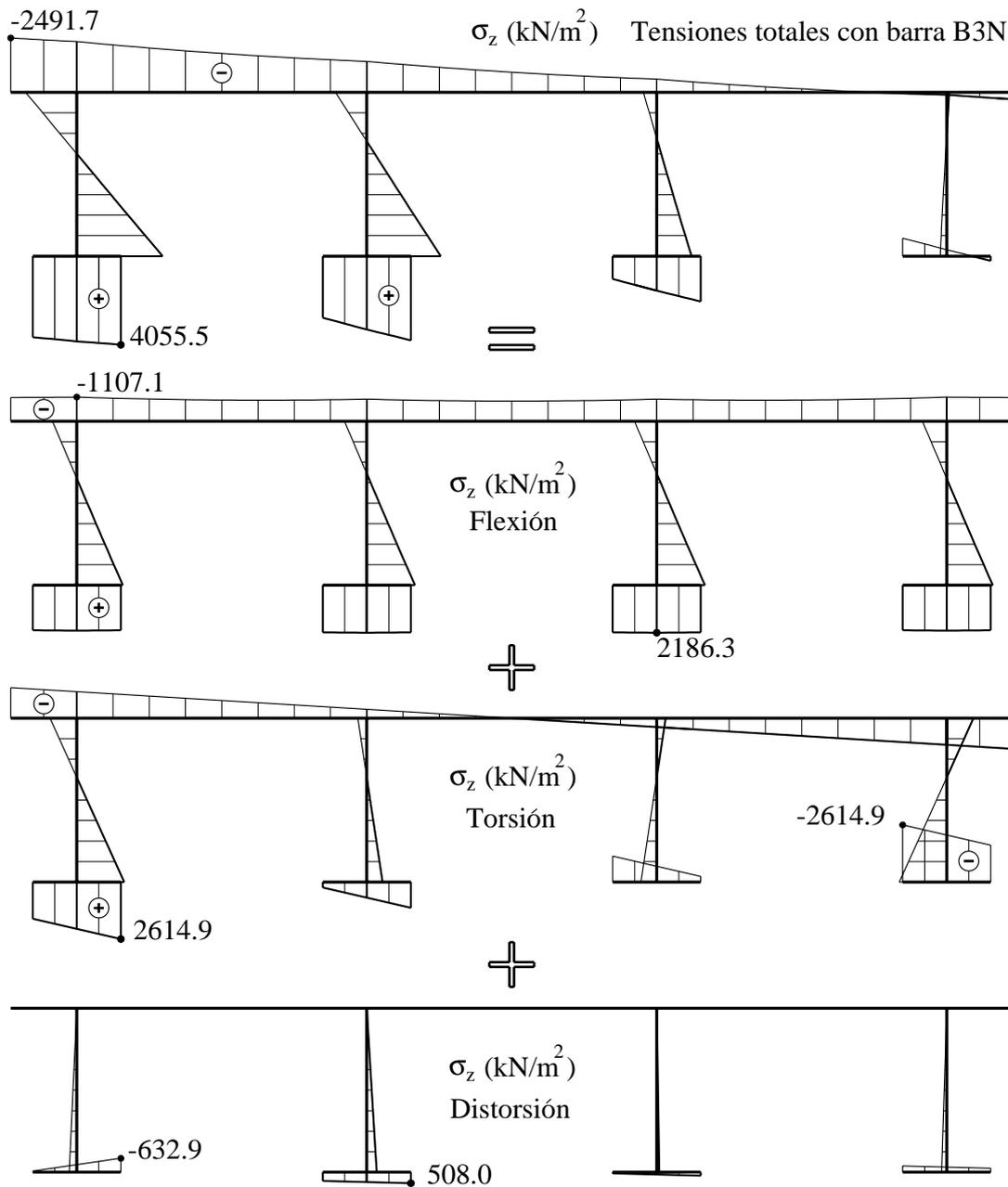


Figura 8.43: Modelo de barras **B3N**. Descomposición de las tensiones normales  $\sigma_z$  ( $\text{kN/m}^2$ ) en centro de luz.

En el gráfico (8.44) se hace una comparación de las flechas obtenidas en las dos vigas más cargadas, entre los modelos de barras **B3N** y el modelo de elementos finitos **MEF**. La diferencia de valores para las dos primeras vigas sólo es del 3.6 % y 4.6 %. En la figura (8.45) se compara la deformada de la sección por centro de luz, observándose buena coincidencia en la forma.

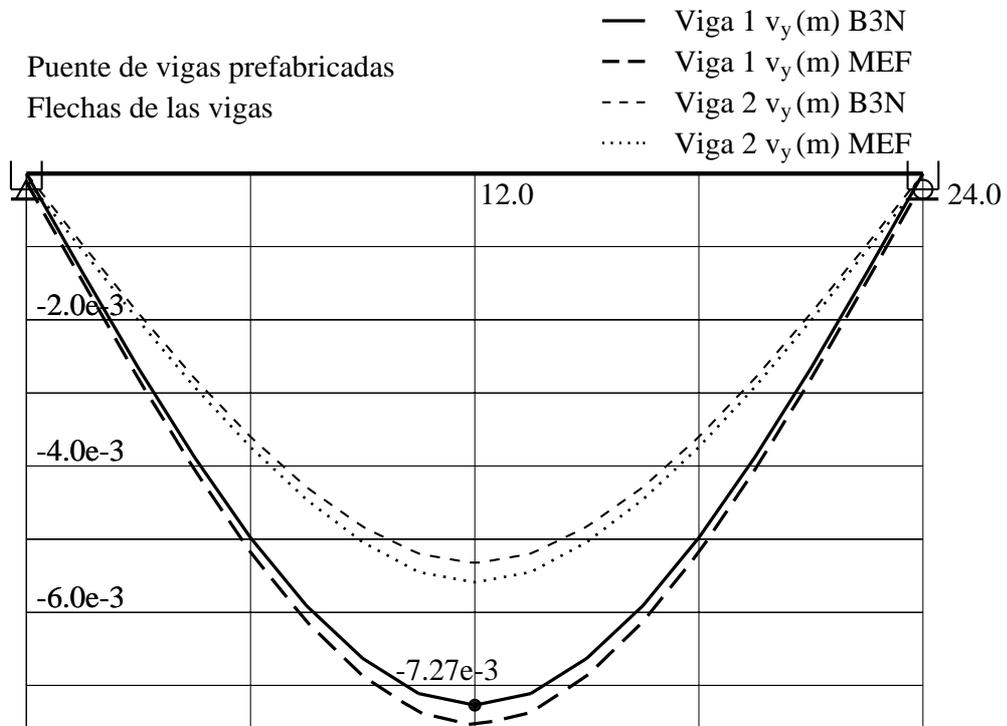


Figura 8.44: Comparación de flechas ( $m$ ) en las vigas 1 ( $x = -3.95(m)$ ) y 2 ( $x = -1.32(m)$ ) entre los resultados de la barra **B3N** y de elementos finitos **MEF**.

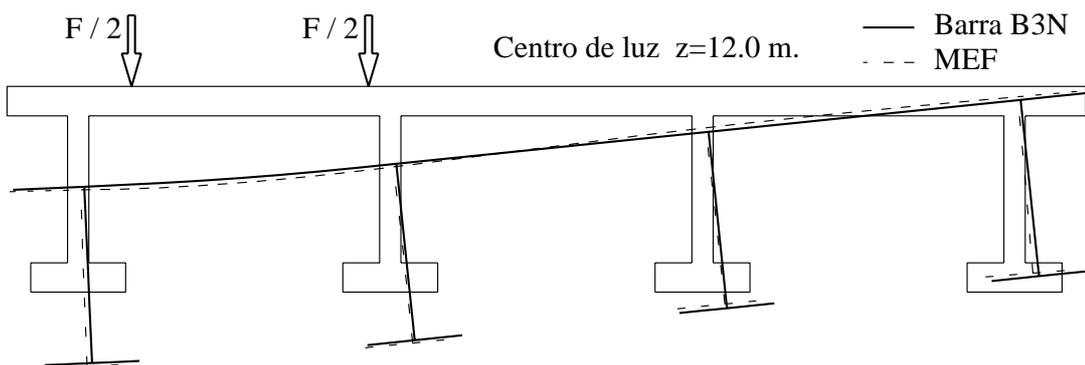


Figura 8.45: Comparación de la deformada ampliada 100 veces en la sección por centro de luz ( $z = 12.0(m)$ ) entre los resultados de la barra **B3N** y de elementos finitos **MEF**.

### 8.4.3. COEFICIENTES DE EXCENRICIDAD

De acuerdo con las expresiones (4.7) (4.8) (4.9) (4.10) y considerando solamente las tensiones por flexión en el plano vertical, y por torsión y distorsión, las tensiones normales y tangenciales vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E \cdot \left( +y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} + w_{yo} \cdot A_y \cdot \frac{d\chi_y}{dz} + w_a \cdot \frac{d^2\theta_z}{dz^2} - w_d \cdot \frac{d^2\psi_d}{dz^2} \right) \\ \tau_{sz} &= G \cdot \left( + \left( t_y \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) + \frac{\partial w_{yo}}{\partial s} A_y \chi_y \right) \right. \\ &\quad + \left( \frac{\partial w_a}{\partial s} - h_a \right) \frac{d\theta_z}{dz} + \frac{\partial w_{at}}{\partial s} \frac{d^3\theta_z}{dz^3} \\ &\quad \left. + \left( u_{ds} - \frac{\partial w_d}{\partial s} \right) \frac{d\psi_d}{dz} + \frac{\partial w_{dt}}{\partial s} \frac{d^3\psi_d}{dz^3} \right)\end{aligned}$$

Si se integra el momento que originan las tensiones normales sólo en el área correspondiente a una viga y la parte de losa que le corresponde, se puede obtener el momento flector que corresponde a cada viga. Realizando la integración respecto del centro de gravedad de la sección, e indicando con el símbolo ( $\hat{\quad}$ ) que la variable o expresión se refiere a una viga, queda:

$$\begin{aligned}\hat{M}_x &= - \int_{\hat{A}} \sigma_z y d\hat{A} = \\ &= - E_o \hat{I}_x \theta'_x - E_o \hat{I}_{w_{yo}.y} A_y \chi'_y - E_o \hat{I}_{w_a.y} \theta''_z + E_o \hat{I}_{w_d.y} \psi''_d = \\ &= \hat{M}_{x.\theta_x} + \hat{M}_{x.\chi_y} + \hat{M}_{x.\theta_z} + \hat{M}_{x.\psi_d}\end{aligned}$$

$$\hat{I}_x = \int_{\hat{A}} \frac{E}{E_o} y^2 d\hat{A} \quad \hat{I}_{w_{yo}.y} = \int_{\hat{A}} \frac{E}{E_o} w_{yo} y d\hat{A}$$

$$\hat{I}_{w_a.y} = \int_{\hat{A}} \frac{E}{E_o} w_a y d\hat{A} \quad \hat{I}_{w_d.y} = \int_{\hat{A}} \frac{E}{E_o} w_d y d\hat{A}$$

Si las integrales se extendieran a toda la sección, las tres integrales sobre las funciones de alabeo serían nulas, ya que las funciones de alabeo están ortogonalizadas respecto de los giros de flexión.

Para cada viga con su losa de la sección en estudio, se obtienen los siguientes valores de inercias para el cálculo de los momentos flectores:

Viga	$x$ (m)	$\hat{I}_x$ ( $m^4$ )	$\hat{I}_{w_{yo}.y}$ ( $m^2$ )	$\hat{I}_{w_a.y}$ ( $m^5$ )	$\hat{I}_{w_d.y}$ ( $m^5$ )
1	-3.95	0.38845	0.00530	1.47943	0.17802
2	-1.32	0.43038	-0.00530	0.56998	-0.24007
3	+1.32	0.43038	-0.00530	-0.56998	-0.05923
4	+3.95	0.38845	0.00530	-1.47943	0.12128
$\Sigma$		1.63765	0.00000	0.00000	0.00000

Del cálculo del modelo de barras **B3N** se obtienen las siguientes deformaciones en la sección por centro de luz:

$$\begin{aligned} \theta'_x(L/2) &= -6.9433 \cdot 10^{-5} \text{ (1/m)} & \chi'_y(L/2) &= +1.2226 \cdot 10^{-5} \text{ (1/m)} \\ \theta''_z(L/2) &= -1.8942 \cdot 10^{-5} \text{ (1/m}^2\text{)} & \psi''_d(L/2) &= -1.7293 \cdot 10^{-5} \text{ (1/m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Que proporcionan los siguientes momentos flectores parciales y totales:

Viga	$\hat{M}_{x.\theta_x}$	$\hat{M}_{x.\chi_y}$	$\hat{M}_{x.\theta_z}$	$\hat{M}_{x.\psi_d}$	$\hat{M}_x \text{ (kN} \cdot \text{m)}$
1	809.13	-1.81	840.71	-92.35	1555.67
2	896.47	+1.81	323.89	124.54	1346.73
3	896.47	+1.81	-323.89	30.72	605.12
4	809.13	-1.81	-840.71	-62.91	-96.30
$\Sigma$	3411.22	0.00	0.00	0.00	3411.22

El coeficiente de excentricidad se puede definir de varias formas. Una forma es como cociente entre el momento total en una viga  $\hat{M}_x$  y el momento de la viga para el caso de flexión del tablero como sólido rígido  $\hat{M}_{x.\theta_x}$ . Con esta definición se obtienen los siguientes valores:

Viga	$\hat{M}_x/\hat{M}_{x.\theta_x}$
1	<b>1.9226</b>
2	1.5023
3	0.6750
4	-0.1190

Se han calculado los coeficientes de excentricidad para todas las vigas, aunque sólo tiene sentido para la primera viga. Para el resto de vigas habría que posicionar el vehículo excepcional en la posición más desfavorable para cada una de ellas.

Otra forma de definir el coeficiente de excentricidad, es como el cociente entre momento total de la viga  $\hat{M}_x$  y el momento medio en las vigas, que es el momento total del tablero  $M_x = \Sigma \hat{M}_x$  dividido por el número de vigas. Para verificar los resultados obtenidos con el elemento barra, se ha realizado también el cálculo con los resultados de un modelo de elementos finitos tipo lámina, obteniendo los momentos en cada viga por integración de los esfuerzos en los elementos lámina que le corresponden. Los valores numéricos obtenidos por ambos métodos son prácticamente idénticos como se puede comprobar en la siguiente tabla. La diferencia entre ambos métodos para la viga más cargada es del 2.1 %.

Viga	Barra B3N	M.E.F.	Barra B3N	M.E.F.
	$\hat{M}_x/M_x$	$\hat{M}_x/M_x$	$\hat{M}_x/(M_x/n^\circ \text{ vigas})$	$\hat{M}_x/(M_x/n^\circ \text{ vigas})$
1	0.4560	0.4657	<b>1.8242</b>	<b>1.8628</b>
2	0.3948	0.4061	1.5792	1.6244
3	0.1774	0.1432	0.7096	0.5728
4	-0.0282	-0.0150	-0.1129	-0.0598

Si se quiere estudiar el reparto de los cortantes entre las vigas, el primer paso es calcular los mismos. Si en el área correspondiente a una viga, se integran la proyección sobre el eje vertical de las tensiones tangenciales se obtiene el cortante vertical  $Q_y$ . Teniendo en

cuenta que en una sección abierta son nulas las tensiones tangenciales uniformes de torsión ( $t_a = w'_a - h_a = 0$ ) y distorsión ( $t_d = u_{ds} - w'_d = 0$ ), queda la siguiente expresión para el cortante.

$$\begin{aligned}\hat{Q}_y &= \int_{\hat{A}} \tau_{sz} \cdot t_y \cdot d\hat{A} = \\ &= G_o \hat{D}_{yy} (u'_y + \theta_x) + G_o A_y \hat{D}_{w_{yo}.y} \chi_y + G_o \hat{D}_{w_{at}.y} \theta_z''' + G_o \hat{D}_{w_{dt}.y} \psi_d''' = \\ &= \hat{Q}_{y.u_y.\theta_x} + \hat{Q}_{y.\chi_y} + \hat{Q}_{y.\theta_z} + \hat{Q}_{y.\psi_d}\end{aligned}$$

$$\hat{D}_{yy} = \int_{\hat{A}} \frac{G}{G_o} t_y^2 d\hat{A} \quad \hat{D}_{w_{yo}.y} = \int_{\hat{A}} \frac{G}{G_o} w'_{yo} t_y d\hat{A}$$

$$\hat{D}_{w_{at}.y} = \int_{\hat{A}} \frac{G}{G_o} w'_{at} t_y d\hat{A} \quad \hat{D}_{w_{dt}.y} = \int_{\hat{A}} \frac{G}{G_o} w'_{dt} t_y d\hat{A}$$

Las dos últimas integrales son nulas si se extienden a toda la sección, tal como se demuestra en el apéndice C, ecuaciones (C.14) y (C.16).

Los coeficientes de excentricidad de cortantes se definen de la misma forma que los de momentos. Para poder obtener los cortantes las características mecánicas necesarias son las siguientes:

Viga	$\hat{D}_{yy} (m^2)$	$\hat{D}_{w_{yo}.y} (-)$	$\hat{D}_{w_{at}.y} (m^5)$	$\hat{D}_{w_{dt}.y} (m^5)$
1	0.27000	-0.03837	3.60464	-0.68402
2	0.27000	-0.03837	1.20155	0.91681
3	0.27000	-0.03837	-1.20155	0.22801
4	0.27000	-0.03837	-3.60464	-0.46080
$\Sigma$	1.08000	-0.15346	0.00000	0.00000

Y las deformaciones que se han obtenido en el nudo correspondiente al apoyo del modelo de elementos barra son:

$$\begin{aligned}(u'_y + \theta_x)(0) &= -2.6765 \cdot 10^{-5} (-) & \chi_y(0) &= -2.5653 \cdot 10^{-5} (-) \\ \theta_z'''(0) &= -1.5990 \cdot 10^{-6} (1/m^3) & \psi_d'''(0) &= 2.7038 \cdot 10^{-7} (1/m^3)\end{aligned}$$

Con todo ello, se obtienen los siguientes cortantes parciales y totales:

Viga	$\hat{Q}_{y.u_y.\theta_x}$	$\hat{Q}_{y.\chi_y}$	$\hat{Q}_{y.\theta_z}$	$\hat{Q}_{y.\psi_d}$	$\hat{Q}_y (kN)$
1	-90.33	11.51	-72.04	-2.31	-153.17
2	-90.33	11.51	-24.01	3.09	-99.73
3	-90.33	11.51	24.01	0.77	-54.02
4	-90.33	11.51	72.04	-1.55	-8.32
$\Sigma$	-361.32	46.07	0.00	0.00	-315.25

Con estos valores se deducen los siguientes coeficientes de excentricidad, que se comparan con los deducidos de un modelo de elementos finitos con láminas:

Viga	Barra B3N	M.E.F.	Barra B3N	M.E.F.
	$\hat{Q}_y/Q_y$	$\hat{Q}_y/Q_y$	$\hat{Q}_y/(Q_y/n^\circ \text{ vigas})$	$\hat{Q}_y/(Q_y/n^\circ \text{ vigas})$
1	0.4859	0.4999	<b>1.9435</b>	<b>1.9997</b>
2	0.3164	0.3398	1.2654	1.3591
3	0.1714	0.1918	0.6855	0.7673
4	0.0264	-0.0315	0.1056	-0.1261

#### 8.4.4. CÁLCULO APROXIMADO

Como se ve en la figura (8.43) en la que para la sección por centro de luz están representadas la distribución de tensiones normales y su descomposición en modos resistentes, casi todas las tensiones por la carga excéntrica son producidas por la torsión y en menor medida por la distorsión. Lo que está de acuerdo con lo indicado por J. Manterola [44] de que en este tipo de puentes casi toda la flexión antimétrica la resiste la torsión alabeada.

En base a lo indicado en el párrafo anterior, si para la carga  $F$  aplicada en una longitud dada y dispuesta a la distancia  $e$  del eje, se simplifica el problema considerando un torsor concentrado ( $M_z = F \cdot e$ ) en la sección en el centro de una viga de longitud  $L$  con apoyos en horquilla en los extremos, la solución de las ecuaciones de la torsión mixta proporciona el bimomento  $B_w$  en el centro de la viga siguiente:

$$\lambda = \sqrt{\frac{G_o I_t}{E_o I_a}}$$

$$B_w(L/2) = -\frac{F \cdot e \tanh\left(\frac{\lambda L}{2}\right)}{2 \lambda}$$

Las tensiones normales por torsión alabeada en función del bimomento vienen dadas por:

$$\sigma_z = \frac{E}{E_o} \frac{B_w}{I_a} w_a$$

Y si se integran en el área de una viga, se puede obtener el momento flector que producen estas tensiones:

$$\hat{M}_{x.\theta_z} = -\int_{\hat{A}} \sigma_z y d\hat{A} = -\frac{\hat{I}_{w_a.y}}{I_a} B_w$$

El momento por flexión centrada que le corresponde a cada viga, es la parte proporcional de la inercia de la viga respecto de la inercia del tablero completo, del momento de flexión que actúa sobre toda la sección.

$$\hat{M}_{x.\theta_x} = \frac{\hat{I}_x}{I_x} M_x = \frac{\hat{I}_x}{I_x} \frac{F \cdot L}{4}$$

Para el caso en estudio, con estas expresiones se obtienen los siguientes valores:

$$M_x(L/2) = 3600.0 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

$$M_z(L/2) = 1500.0 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

$$B_w(L/2) = -8099.0 \text{ (kN} \cdot \text{m}^2)$$

Viga	$\hat{M}_{x.\theta_x}$	$\hat{M}_{x.\theta_z}$	$\hat{M}_x \text{ (kN} \cdot \text{m)}$
1	853.91	899.92	1753.84
2	946.08	346.71	1292.79
3	946.08	-346.71	599.37
4	853.91	-899.92	-46.01
$\Sigma$	3600.00	0.00	3600.00

Que proporcionan los siguientes coeficientes de excentricidad:

Viga	$\hat{M}_x/\hat{M}_{x.\theta_x}$	$\hat{M}_x/M_x$	$\hat{M}_x/(M_x/n^\circ \text{ vigas})$
1	2.0539	0.4872	<b>1.9487</b>
2	1.3665	0.3591	1.4364
3	0.6335	0.1665	0.6660
4	-0.0539	-0.0128	-0.0511

Los valores obtenidos tienen un error del 7.0 % por exceso, quedando por lo tanto del lado de la seguridad.

Si se hace la hipótesis adicional de que toda la torsión se resiste con torsión alabeada, las expresiones se simplifican a las siguientes:

$$B_w = -\frac{F \cdot e \cdot L}{4}$$

$$\frac{\hat{M}_x}{\hat{M}_{x.\theta_x}} = 1 + \frac{\hat{I}_{w_a.y}}{I_a} \frac{I_x}{\hat{I}_x} e$$

$$\boxed{\frac{\hat{M}_x}{M_x} = \frac{\hat{I}_x}{I_x} + \frac{\hat{I}_{w_a.y}}{I_a} e}$$

Esta última expresión para el coeficiente de excentricidad sólo depende de las características mecánicas de la sección, y con la misma se obtienen los siguientes resultados:

Viga	$\hat{M}_x/\hat{M}_{x.\theta_x}$	$\hat{M}_x/M_x$	$\hat{M}_x/(M_x/n^\circ \text{ vigas})$
1	2.1711	0.5150	<b>2.0600</b>
2	1.4072	0.3698	1.4793
3	0.5928	0.1558	0.6231
4	-0.1711	-0.0406	-0.1624

Ahora el error es del orden del 13.0 % por exceso.

Se puede buscar también una solución aproximada para los cortantes, y el coeficiente de excentricidad de los mismos. De la solución para la viga con apoyos en horquilla con torsor aplicado en su centro, para el momento torsor no uniforme  $M_{zw}$  en el apoyo y las tensiones tangenciales  $\tau_{sz.w}$  correspondientes, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$M_{zw}(0) = -E_o \cdot I_a \cdot \theta_z'''(0) = \frac{F \cdot e}{2} \frac{1}{\cosh(\lambda \cdot L/2)}$$

$$\tau_{sz.w} = G w'_{at} \theta'''_z = \frac{M_{zw}}{I_a} \frac{S_a}{t} = \frac{M_{zw}}{I_a} \left( -\frac{G}{E_o} w'_{at} \right)$$

Y por integración de la proyección vertical de las tensiones tangenciales de torsión no uniforme en el área de una viga, se calcula el cortante en la misma.

$$\hat{Q}_{y.\theta_z} = \int_{\hat{A}} \tau_{sz.w} t_y d\hat{A} = G_o \hat{D}_{w_{at.y}} \theta'''_z = -\frac{G_o}{E_o} \frac{\hat{D}_{w_{at.y}}}{I_a} M_{zw}$$

Para determinar el cortante por flexión en cada viga, se supone que este se reparte entre las vigas en la misma proporción que los momentos flectores.

$$\hat{Q}_{y.u_y.\theta_x} = \frac{\hat{I}_x}{I_x} Q_y$$

Aplicando estas ecuaciones al caso en estudio:

$$Q_y(0) = -\frac{F}{2} = -300.00 \text{ (kN)}$$

$$M_{zw}(0) = -638.00 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

Viga	$\hat{Q}_{y.u_y.\theta_x}$	$\hat{Q}_{y.\theta_z}$	$\hat{Q}_y \text{ (kN)}$
1	-71.15	-71.97	-143.13
2	-78.84	-23.99	-102.83
3	-78.84	23.99	-54.85
4	-71.15	71.97	0.81
$\Sigma$	-300.00	0.00	-300.00

Resultando los siguientes coeficientes de excentricidad:

Viga	$\hat{Q}_y/Q_y$	$\hat{Q}_y/(Q_y/n^o \text{ vigas})$
1	0.4771	<b>1.9084</b>
2	0.3428	1.3711
3	0.1828	0.7313
4	-0.0027	-0.0108

Si se considera adicionalmente que toda la torsión se resiste por torsión no uniforme, las ecuaciones se simplifican a las siguientes:

$$M_{zw}(0) = \frac{F \cdot e}{2}$$

$$\hat{Q}_{y.\theta_z} = -\frac{G_o}{E_o} \frac{\hat{D}_{w_{at.y}}}{I_a} \frac{F \cdot e}{2}$$

Quedando para el coeficiente de excentricidad de cortante una ecuación que sólo depende de las características mecánicas de la sección.

$$\boxed{\frac{\hat{Q}_y}{Q_y} = \frac{\hat{I}_x}{I_x} + \frac{G_o}{E_o} \frac{\hat{D}_{w_{at.y}}}{I_a} \cdot e}$$

Que proporciona los siguientes valores para el tablero en estudio:

Viga	$\hat{Q}_y/Q_y$	$\hat{Q}_y/(Q_y/n^\circ \text{ vigas})$
1	0.5192	<b>2.0769</b>
2	0.3568	1.4272
3	0.1688	0.6752
4	-0.0448	-0.1793

Resultando que por todos los métodos el orden de magnitud del coeficiente de excentricidad de cortante es el mismo.

#### 8.4.5. ESTUDIO PARAMÉTRICO

Todos los cálculos de los apartados anteriores se ha hecho para un tablero de dimensiones concretas. Para ver la influencia al variar las dimensiones del mismo, se ha realizado un estudio paramétrico del valor del coeficiente de excentricidad de momentos (  $C.E. = \hat{M}_x/(M_x/n^\circ \text{ vigas})$  ) en función de la separación entre los ejes de las vigas  $s$  (m) y de la luz del vano  $L$  (m), obteniéndose los resultados de la gráfica (8.46). A la vista de la gráfica, se puede concluir que la luz influye poco en el valor del coeficiente de excentricidad, teniendo más importancia la separación entre vigas.

Para comprobar la primera fórmula aproximada propuesta para el coeficiente de excentricidad de momentos, para un vano de luz  $L = 24.0$  (m) con distintas separaciones entre vigas, se ha representado en la figura (8.47) los valores obtenidos con el modelo de barras **B3N** y con la fórmula aproximada. Encontrándose en todos los casos que el valor aproximado es el mayor, por lo que queda del lado de la seguridad, siendo la diferencia máxima del 11.7%.

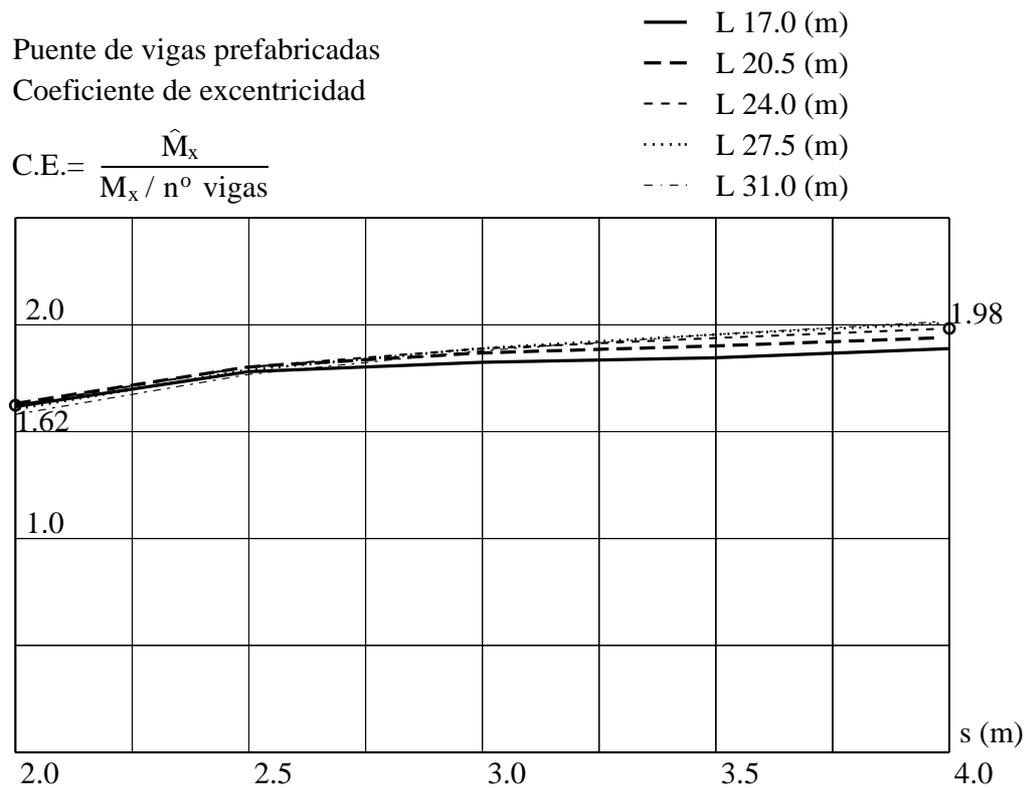


Figura 8.46: Coeficiente de excentricidad de momentos (  $C.E. = \hat{M}_x / (M_x / n^{\circ} \text{ vigas})$  ) en función de la separación entre vigas  $s$  (m) y la luz del vano en  $L$  (m).

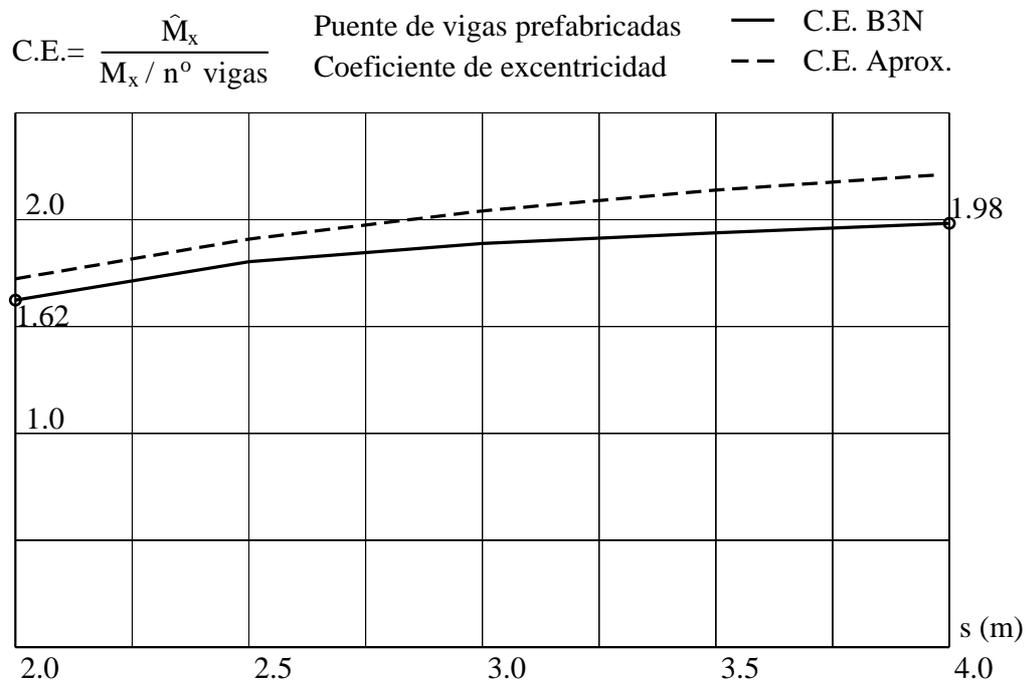


Figura 8.47: Coeficientes de excentricidad de momentos (  $C.E. = \hat{M}_x / (M_x / n^{\circ} \text{ vigas})$  ) en función de la separación entre vigas para un vano de  $L = 24.0$  (m).

## 8.5. IMPORTANCIA DE LAS TENSIONES POR COACCIÓN AL ALABEO

### 8.5.1. INTRODUCCIÓN

En secciones cerradas como es conocido que la torsión predominante es la uniforme, la normativa aplicable al proyecto de estructuras no dedica atención a la torsión no uniforme de estas secciones. Respecto a la distorsión, la normativa o no hace referencia o esta es escasa. Por ejemplo, el Eurocódigo para puentes metálicos [55] indica:

*«Los efectos de la distorsión en las piezas pueden despreciarse cuando los efectos de la distorsión, debidos a la rigidez transversal a flexión de la sección transversal y/o la acción del diafragma, no superen el 10 % de los efectos de la flexión.»<sup>4</sup>*

Y la norma española de estructuras metálicas [56] indica:

*«Pueden despreciarse los efectos de la distorsión cuando la propia rigidez o dimensiones de la sección transversal, y/o de los eventuales diafragmas dispuestos, limiten los efectos de la distorsión, una vez mayorados, por debajo del 10 % del límite elástico minorado del material, en el elemento considerado, bajo las acciones localizadas o excéntricas correspondientes.»<sup>5</sup>*

En la normativa referente a estructuras de hormigón armado no hay ninguna referencia a la distorsión. En los dos casos expuestos, al no indicarse ninguna condición, por ejemplo geométrica, que garantice que los efectos de la distorsión cumplen los límites indicados, obligan a que siempre se deba de realizar el cálculo de distorsión, por lo que las indicaciones de cuando se puede despreciar la distorsión no tienen utilidad práctica.

En el presente apartado se pretende ver cual es la importancia del incremento de tensiones por el alabeo de las secciones (que comprende las originadas por torsión, distorsión y arrastre de cortante), y de establecer que condiciones geométricas se habrían de cumplir para que queden limitadas. Habiendo más estudios sobre puentes metálicos, por ejemplo H. Nakai 1988 [57] o J. Pascual 2004 [58], se va a tratar la tipología de puentes de hormigón con sección cajón unicelular.

El número de parámetros que influyen son muchos, y si se consideran todos como independientes los resultados van a tener gran dispersión por lo que no se podría obtener ninguna conclusión. Utilizando la experiencia acumulada en el proyecto de puentes reales, se pueden establecer valores habituales de parámetros o relaciones entre los mismos, que permitan reducir su número. Por ello se empieza estableciendo una sección tipo con el mínimo número de variables geométricas posible.

### 8.5.2. SECCIÓN TIPO DE CAJÓN UNICELULAR

La geometría tipo considerada para la sección cajón depende de siete parámetros independientes, tal como se ve en la figura (8.48). Aunque en teoría son parámetros inde-

<sup>4</sup> § 6.2.7.1.(3) Torsión. Generalidades.

<sup>5</sup> § 18.2.3 Consideración de los efectos de la distorsión en elementos de sección cerrada.

pendientes, de la experiencia de puentes construidos recogida en la bibliografía sobre el tema, se puede obtener proporciones habituales entre los mismos que permiten reducir el número de ellos a considerar.

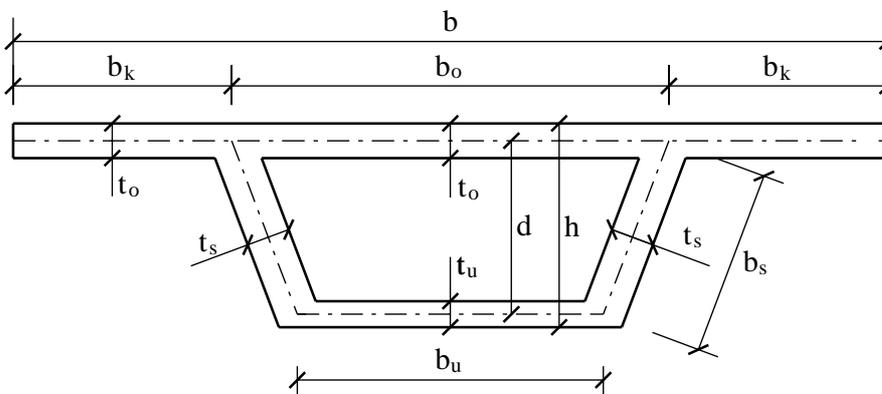


Figura 8.48: Sección cajón. Geometría tipo.

Rango de luces  $L$ . El rango habitual de luces para puentes continuos de canto constante con sección cajón está entre 35.0 (m) y 80.0 (m) [59], a partir de luces 50.0 (m) se aumenta hacia el interior el espesor de la tabla inferior en una distancia de  $L/4$  a  $L/5$  de las secciones por apoyo en pilas [43]. Para luces mayores 80.0 (m) es más efectivo el uso de canto variable.

$$35.0 (m) \leq L \leq 80.0 (m)$$

Como la importancia de las tensiones por alabeo es mayor con luces pequeñas, y despreciable para luces grandes, el estudio paramétrico se va a realizar para el rango de luces 25.0 (m) a 70.0 (m). Siendo el valor más pequeño el límite inferior de la posible utilización de esta tipología [59].

Rango de anchos  $b$ . Se adopta un rango entre 9.0 (m) y 13.0 (m). Para anchos superiores a 13.0 (m) por el aumento de la flexión transversal es necesario modificar la forma de la sección, como aumentar el número de células o reforzar la losa superior con vigas transversales [60] [61].

$$9.0 (m) \leq b \leq 13.0 (m)$$

Canto total  $h$ . Para puentes continuos de canto constante con luz  $L$  en los vanos intermedios, el canto suele variar entre  $h/L = 1/18$  a  $1/22$  [59], siendo el valor típico de  $h/L = 1/20$  [44] [61].

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{20}$$

Para puentes biapoyados de luz  $l$ , teniendo en cuenta que equivalen a un puente continuo con luz para los vanos intermedios  $L = 1.4 \cdot l$  [59], el canto obtenido por la relación anterior para la luz del biapoyado  $l$  hay que multiplicarlo por 1.40.

Separación entre almas  $b_o$ . Si se establece la condición estática, de que para carga continua en todo el ancho de la sección, el momento negativo en el arranque del voladizo sea igual al negativo de la losa entre almas considerándola como viga biempotrada, se deduce

la relación  $b/b_o = 1.82$ . Los valores indicados en la bibliografía varían entre  $b/b_o = 1.80$  [44], [61] y  $b/b_o = 1.90$  [43], con un máximo de  $b/b_o = 2.00$  [61]. Obteniendo la relación a partir de dimensiones para puentes construidos recogidos en dichas referencias, predomina la relación  $b/b_o = 2.00$ , la cual es la que se elige porque además para esta relación, con carga repartida en media sección la fuerza estática equivalente coincide en posición directamente sobre el alma.

$$\frac{b}{b_o} = 2.00$$

La longitud del voladizo  $b_k$  queda determinada por el valor de  $b$  y de  $b_o$ , siendo su valor máximo recomendado de 3.50 (m) [59], [43], y en general, coincidiendo con la existencia de aceras peatonales.

$$b_k = \frac{b - b_o}{2} \leq 3.50 \text{ (m)}$$

Combinando las dos últimas relaciones se obtiene:

$$b \leq 14.00 \text{ (m)}$$

Espesor de los voladizos  $t_o$ . Los voladizos suelen ser de espesor variable entre un valor mínimo en el extremo de 0.20 (m) y un valor máximo en el arranque comprendido entre  $t_o = b_k/7$  [59] y  $t_o = b_k/10$  [44]. Se considera un voladizo de espesor constante con un espesor medio entre los indicados:

$$t_o = \frac{0.20 + \frac{b_k \text{ (m)}}{8}}{2} = 0.10 + \frac{(b - b_o) \text{ (m)}}{32} \geq 0.25 \text{ (m)}$$

Espesor de losa inferior  $t_u$ . Sus dimensiones suelen venir dadas por condicionantes geométricos, teniendo un valor mínimo de 0.20 (m) [59] [44]. Suelen tener cartelas en los extremos, y a partir de luces entorno a los  $L \geq 50.0 \text{ (m)}$  se aumenta su valor en una distancia desde los apoyos en pilas entre  $L/5$  y  $L/4$  para aumentar la resistencia a momentos negativos [43]. Se considera un valor medio algo superior al mínimo:

$$t_u = 0.22 \text{ (m)}$$

Espesor de las almas  $t_s$ . Desde el punto de vista resistente, el espesor del alma no depende de la luz y solamente depende del ancho total  $b$  [44] [61], siendo la relación entorno a  $t_s = 3 \cdot b/100$  [59]. Por condicionantes geométricos para un correcto hormigonado, el espesor mínimo está entre 0.25 (m) [44] [61] y 0.30 (m) [59] [43] aumentándose este valor mínimo en función del canto  $t_s = (2.0 + h)/24$  con  $h$  en metros [44] [61]. Se consideran estos valores mínimos, y un valor en función del ancho algo superior al de la bibliografía:

$$t_s = \frac{b}{25}$$

$$t_s \geq \frac{2.00 + h \text{ (m)}}{24} \geq 0.30 \text{ (m)}$$

Ancho de la losa inferior  $\mathbf{b}_u$ . El ancho de la losa inferior viene dado por el ancho superior entre almas y la pendiente de las almas con la vertical, que suele variar entre 1/4 a 1/5 [60] [61]. Adoptando la pendiente menor:

$$b_u = b_o - \frac{2}{5} d$$

$$d = h - \frac{t_o}{2} - \frac{t_u}{2}$$

En conclusión, la geometría de la sección sólo depende de dos variables: la luz  $\mathbf{L}$  de un vano intermedio del puente, y el ancho total  $\mathbf{b}$  de la sección.

Como propiedades del material de la sección se ha considerado los valores de  $E_o = 3.00 \cdot 10^7$  ( $kN/m^2$ ) para el módulo de elasticidad longitudinal, y  $G_o = 1.25 \cdot 10^7$  ( $kN/m^2$ ) para el módulo de elasticidad transversal.

### 8.5.3. TENSIONES ADIMENSIONALES

Para poder establecer la importancia de los incrementos de tensiones debido a las coacciones al alabeo, hay que compararlos con los valores que se darían cuando no hay dichas coacciones, que se corresponden con las tensiones de flexión sin el efecto de arrastre por cortante. De acuerdo con la ecuación general para las tensiones (4.7) y (4.9), y considerando que sólo existe flexión en el plano  $y - z$ , las tensiones vienen dadas por:

$$\sigma_z = E \cdot \left( +u'_z + y \cdot \theta'_x + w_{yo} \cdot A_y \cdot \chi'_y + w_a \cdot \theta''_z - w_d \cdot \psi''_d \right) =$$

$$= \sigma_{N_z} + \sigma_{M_x} + \sigma_{Q_y} + \sigma_{B_w} + \sigma_{B_d}$$

El primer término  $\sigma_{N_z}$  se corresponde con la tensión por axil, el segundo  $\sigma_{M_x}$  por flexión sin efecto por arrastre de cortante, el tercero  $\sigma_{Q_y}$  el incremento por dicho efecto, y los dos últimos los debidos a la torsión  $\sigma_{B_w}$  y distorsión  $\sigma_{B_d}$ . Como se puede ver, de subíndice se ha puesto el esfuerzo con el que se relaciona la tensión.

H. Nakai [57] en su estudio sobre la importancia de las tensiones por coacción al alabeo en puentes metálicos, divide la tensión total por la tensión de flexión para adimensionalizar las tensiones. En el presente caso en estudio, las componentes de tensiones por axil y por flexión se distribuyen uniformemente sobre la tabla superior e inferior, por lo que son por las que hay que dividir la tensión total para adimensionalizarla, y poder valorar la importancia de las tensiones por coacción por alabeo. Por lo tanto:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_{N_z} + \sigma_{M_x}} = 1.0 + \frac{\sigma_{Q_y}}{\sigma_{N_z} + \sigma_{M_x}} + \frac{\sigma_{B_w} + \sigma_{B_d}}{\sigma_{N_z} + \sigma_{M_x}}$$

Los sumandos de esta ecuación son tensiones relativas, y son denominadas manteniendo el mismo orden como:

$$R_z = 1.0 + R_{Q_y} + R_{B_w.B_d}$$

Como según el estado de carga que se considere las tensiones por coacción al alabeo pueden tener importancia muy diferente, para poder obtener conclusiones de aplicación lo más generales posibles, hay que elegir un estado de carga lo más representativo posible. Se ha considerado el siguiente:

- Peso propio. Se obtiene como producto del área de la sección tipo por el peso específico del hormigón 25.0 ( $kN/m^3$ ).
- Carga permanente. Se considera como valor representativo el peso de dos pretilas de 10.0 ( $kN/m$ ) cada una, y una capa de pavimento asfáltico de 0.08 ( $m$ ) de espesor con 23.0 ( $kN/m^3$ ) de peso específico, situada en todo el ancho del tablero.
- Sobrecarga repartida de uso. De valor 9.0 ( $kN/m^2$ ) en un ancho de 3.0 ( $m$ ) desde el borde del tablero, y de 2.5 ( $kN/m^2$ ) hasta completar medio ancho del tablero, y aplicadas en toda la longitud del puente. Como simplificación se ha considerado un valor constante en medio ancho, de forma que sume la carga vertical total consignada.
- Sobrecarga concentrada de uso. Un vehículo excepcional de 600.0 ( $kN$ ) y 3.0 ( $m$ ) de longitud situado en el centro del puente y a 2.0 ( $m$ ) del borde exterior del tablero.
- Pretensado. Se considera el mismo mediante un sistema de fuerzas equivalentes. En el siguiente apartado se indica como se define.

#### 8.5.4. LUCES DE LOS VANOS Y PRETENSADO

Elegido el rango de luces del vano principal a estudiar, queda por definir la configuración del número de vanos y la distribución de luces. Se ha escogido puentes de tres vanos, porque permite el estudio de las tensiones en secciones con distinto comportamiento como son las de centro de vano y las coincidentes con apoyos intermedios, lo cual no se podría hacer con el estudio de puentes de un sólo vano. Respecto de las condiciones de apoyo, en los apoyos extremos se considera apoyos en horquilla, y en los apoyos intermedios se considera la existencia de empotramiento a torsión. En todos los apoyos, se considera que por la existencia de diafragmas los movimientos de distorsión están impedidos.

Para que las conclusiones sobre puentes de tres vanos puedan ser extrapolables a puentes de mayor número de vanos, la relación entre la luz de los vanos laterales respecto del vano principal tiene que estar en el rango habitual en puentes denominados compensados, en los que no se produzca para ningún estado de cargas reacciones negativas en apoyos extremos, y que los momentos flectores del vano central y del vano lateral sean del mismo orden. Dentro del rango habitual, se ha elegido un valor bajo de 0.60 de luz del vano lateral respecto de la luz del vano principal, para maximizar las coacciones al alabeo, y por tanto las tensiones originadas por dichas coacciones.

En la figura (8.49) se ha representado el trazado de los cables de pretensado que se va a considerar. Para completar su definición geométrica, hay que tener en cuenta que todas las parábolas tienen su vértice en su punto más alto o más bajo, quedando definidas las dimensiones geométricas que faltan en el dibujo, mediante el establecimiento de la continuidad de tangentes en los puntos de cambio de curvatura.

Para predimensionar el valor de la fuerza de pretensado se ha utilizado el método propuesto por C. Menn [62], consistente en igualar el momento flector de cálculo  $M_{d,o}$  de una viga biapoyada de luz igual a la del vano central, con la suma de los momentos últimos de la sección por centro de vano  $M_{u,c}$  y de la sección por apoyo en pila  $M_{u,p}$ .

$$M_{d,o} = M_{u,c} + M_{u,p}$$

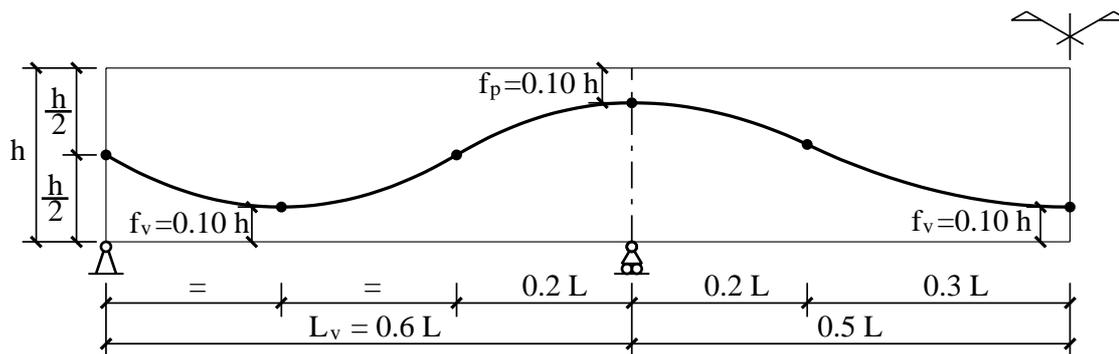


Figura 8.49: Puente de 3 vanos. Definición del trazado de los cables de pretensado.

Para obtener el momento de cálculo de la viga biapoyada  $M_{d,o}$  se utiliza las acciones anteriormente indicadas, con la salvedad de que la sobrecarga de uso repartida se extiende en todo el ancho del tablero. Las acciones de carácter permanente se ponderan con un coeficiente de 1.35, y las acciones de carácter variable por un coeficiente de 1.50.

Siguiendo la misma referencia, sin considerar la colaboración del acero pasivo, siendo  $A_p$  el área total de acero activo,  $f_{pd}$  la resistencia de cálculo del acero, y  $z$  el brazo mecánico, se utiliza las expresiones siguientes para obtener el momento último de una sección:

$$M_u = A_p \cdot f_{pd} \cdot z$$

$$z \approx h - 0.75 \cdot (t_o + t_u)$$

Considerando que el área de acero activo es constante en todo el puente, al despejarla de las ecuaciones anteriores se obtiene la expresión:

$$A_p = \frac{M_{d,o}}{2 \cdot z \cdot f_{pd}}$$

Para el acero activo se toma una resistencia de cálculo de valor  $f_{pd} = f_{pk}/\gamma_s = 1700/1.15 = 1478 \text{ (N/mm}^2\text{)}$ , y para la tensión del acero en servicio después de pérdidas de pretensado se considera un valor constante en toda la longitud de valor  $\sigma_p = 1100 \text{ (N/mm}^2\text{)}$ . Con el área de acero y la tensión de servicio se obtiene la fuerza de pretensado, que considerada constante en todo el puente, es utilizada para definir la acción del pretensado mediante un sistema de fuerzas equivalentes, que se aplica sobre el modelo de cálculo.

### 8.5.5. SECCIÓN POR CENTRO DEL VANO CENTRAL

Para la serie de puentes definida en los apartados anteriores, se han calculado un total de treinta de ellos, correspondientes a diez luces y tres anchos diferentes. Para realizar el cálculo se ha utilizado el programa de cálculo de estructuras *Vettones* [49], en el que se ha implementado el elemento unidimensional **B3N** desarrollado. Se ha hecho un modelo paramétrico poniendo todos los datos en función de la luz del vano principal y del ancho del tablero, ejecutando el modelo dentro de dos bucles anidados para dichas dos variables,

y mediante las ordenes de postproceso del programa se van recopilando los resultados necesarios para el estudio.

En la sección por el centro del vano principal, para estudiar las tensiones se ha elegido como punto de referencia el extremo superior del alma izquierda, por ser el punto donde la tensión es máxima. En la figura (8.51) se ha representado la forma de la distribución de tensiones, con y sin las componentes por coacción del alabeo, para dos puentes con luces en los extremos superior e inferior del rango utilizado, y con el ancho intermedio de los considerados.

Los resultados obtenidos para las tensiones en el punto de estudio se han representado en tres gráficas:

- Gráfico (8.52) con la tensión adimensional total  $R_z$  (-).
- Gráfico (8.53) con la componente adimensional correspondiente al incremento por arrastre de cortante  $R_{Q_y}$  (-).
- Gráfico (8.54) con la componente adimensional por torsión y distorsión  $R_{B_w.B_d}$  (-).

En base a las indicaciones ya citadas de las normas, considerando que las tensiones por coacción al alabeo se puedan tomar como despreciables cuando sean menores del 10.0% del resto de la tensión total, a partir del gráfico (8.52) se puede definir la luz mínima del vano principal para que se cumpla dicha condición. El valor obtenido con  $b$  en metros es:

$$L_{R_{Q_y}+R_{B_w.B_d}}(10\%) = \frac{b + 1.723}{0.308}$$

El incremento de tensión por arrastre de cortante representa de media el 28.7% del incremento total por coacción del alabeo. Como en un modelo de barras convencionales, mediante la utilización de anchos eficaces se puede tener en cuenta el efecto del arrastre de cortante en las tensiones, también es interesante conocer cual es la luz mínima para la cual están limitadas las tensiones por torsión y distorsión. A partir de la gráfica (8.54) se ha obtenido el valor siguiente, donde  $b$  está en metros:

$$L_{R_{B_w.B_d}}(10\%) = \frac{b + 6.968}{0.541}$$

Otra forma de análisis de los resultados, es representar las tensiones relativas en función de la longitud característica relativa de torsión  $\kappa_t$  o de distorsión  $\kappa_d$ , que son el cociente de la luz del vano principal  $L$  entre las longitudes características a torsión  $L_t$  y distorsión  $L_d$  respectivamente.

$$\begin{aligned} L_t &= \sqrt{\frac{E_o \cdot I_a}{G_o \cdot I_t}} & \kappa_t &= \frac{L}{L_t} \\ L_d &= \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E_o \cdot I_d}{E_o \cdot K_d}} & \kappa_d &= \frac{L}{L_d} \end{aligned} \tag{8.1}$$

En la gráfica (8.50) se han representado los incrementos relativos de tensiones por torsión y distorsión  $R_{B_w.B_d}$  en función de la longitud característica relativa a distorsión

$\kappa_d$ . Del análisis de los resultados se deduce que las longitudes características relativas para las que las tensiones por torsión y distorsión queden limitadas al 10.0% deben de cumplir:

$$\kappa_d \geq 7.25 \qquad \kappa_t \geq 30.0$$

Como referencia de comparación sobre estos valores, S. Monleón [63] indica que el efecto de distorsión puede prácticamente despreciarse para una longitud característica relativa de distorsión  $\kappa_d \geq 6$ .

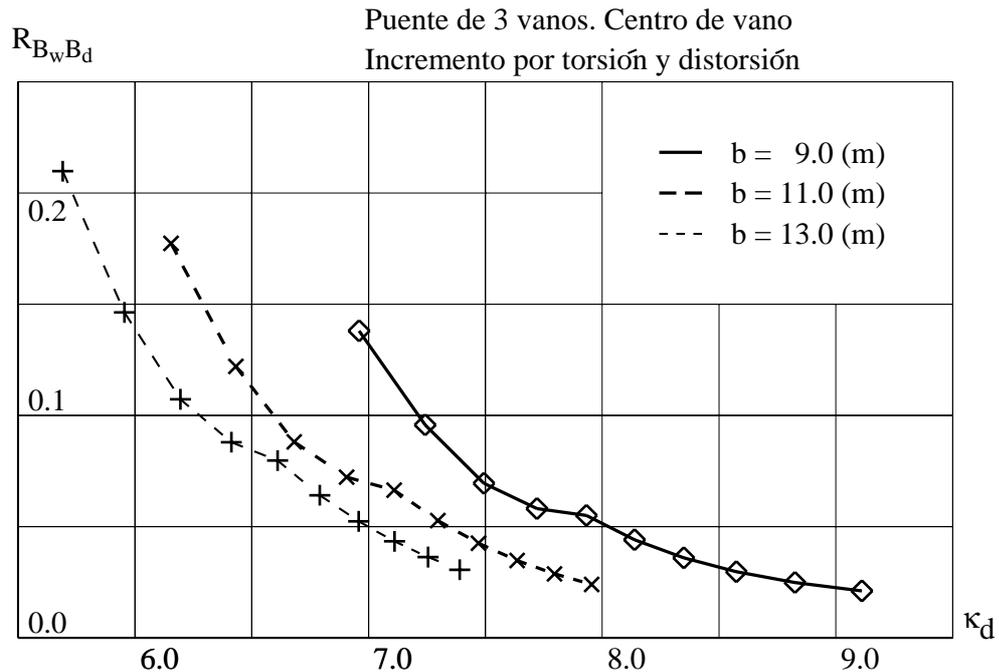


Figura 8.50: Puente de 3 vanos. Incremento relativo de tensión por torsión-distorsión  $R_{B_w B_d}$  (-) para la sección por centro del vano central, en función de la longitud característica relativa de distorsión  $\kappa_d$ .

### 8.5.6. SECCIÓN POR APOYO EN PILA

Para el estudio de la sección por apoyo en pila, se ha elegido como punto de referencia el extremo inferior del alma izquierda, por ser donde la tensión es mayor en esta sección. Si el cálculo se hiciera con las tensiones del extremo superior del alma, como en este punto las tensiones son pequeñas (por ser ese el objetivo en el dimensionamiento óptimo del pretensado), al comparar números pequeños se obtienen tensiones relativas muy bajas o muy altas en cada caso, sin que sirvan para poder establecer conclusiones.

Se han representado los mismos resultados que el caso anterior: figura (8.56) y gráficos (8.57), (8.58) y (8.59). Lo primero que se observa es que la importancia de los incrementos de tensión por coacción al alabeo son mucho más importantes que en la sección por centro de vano, por el hecho bien conocido de que en las cercanías de la sección por pila, es mucho más rápida la variación de deformaciones y esfuerzos, mucho mayor la coacción al alabeo, y por tanto sus efectos.

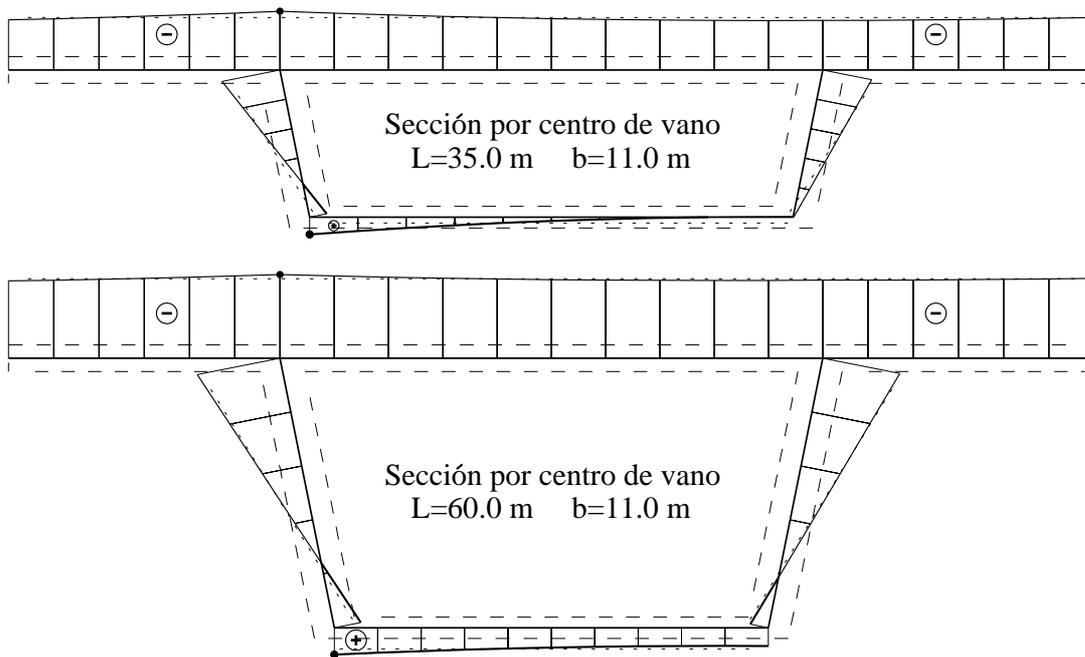


Figura 8.51: Puente de 3 vanos. Diagrama de tensiones en secciones por centro del vano central. En línea de puntos las tensiones sin las componentes por coacción al alabeo.

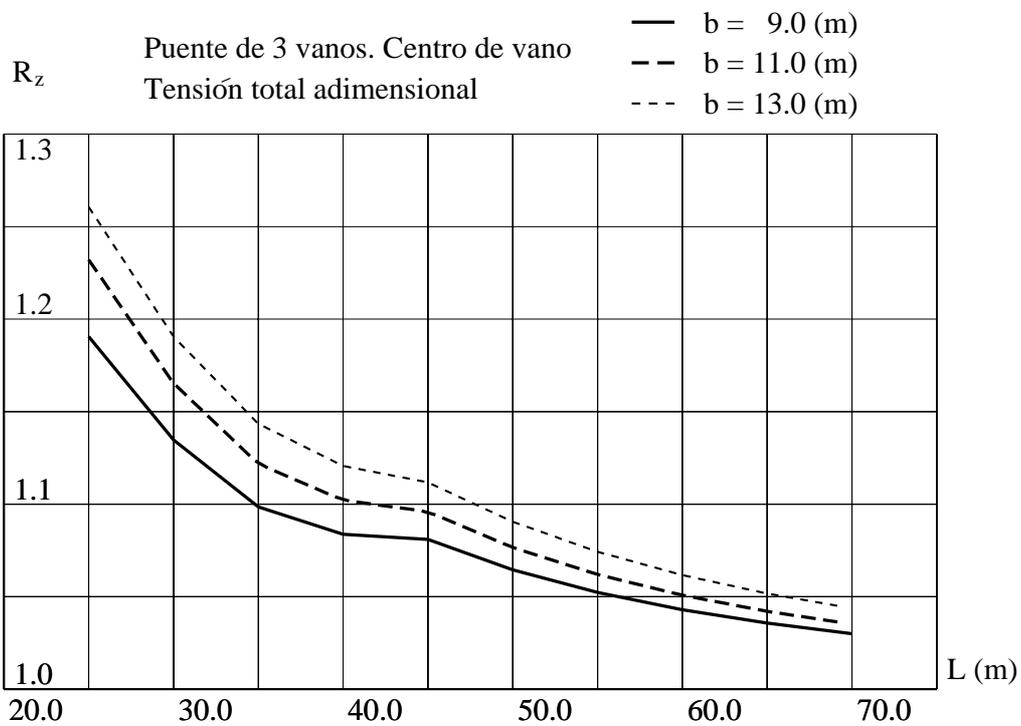


Figura 8.52: Puente de 3 vanos. Tensión total adimensional  $R_z$  (—) en sección por centro del vano central, en función de la luz  $L$  (m) y el ancho del tablero  $b$  (m).

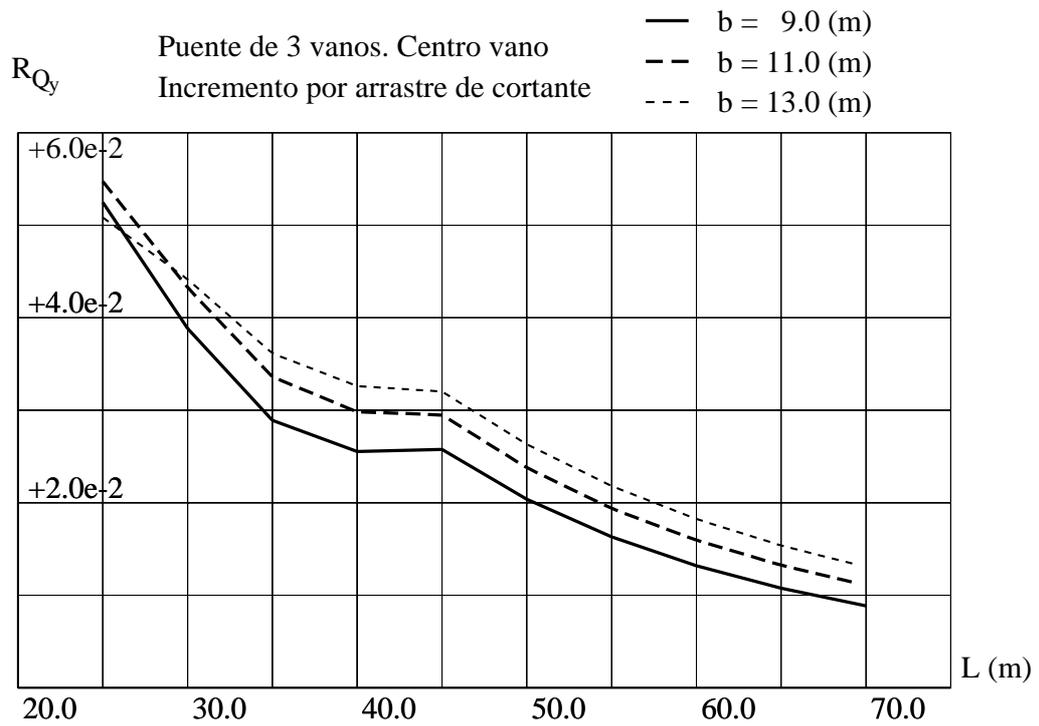


Figura 8.53: Puente de 3 vanos. Incremento por arrastre de cortante  $R_{Q_y}$  (—) en sección por centro del vano central, en función de la luz  $L$  (m) y el ancho del tablero  $b$  (m).

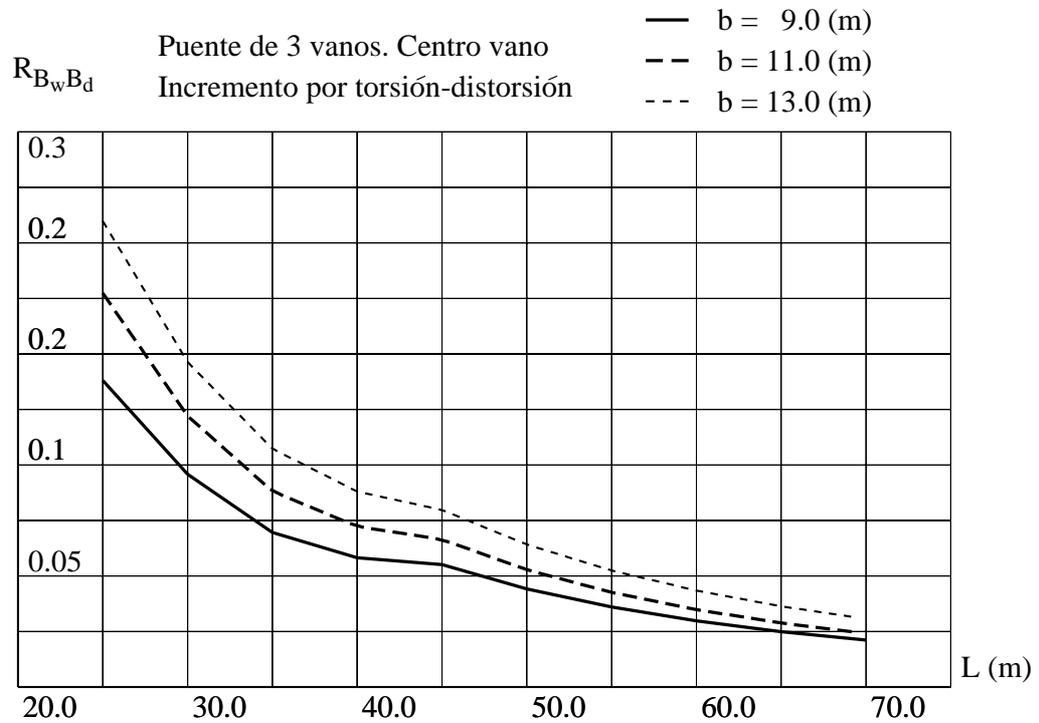


Figura 8.54: Puente de 3 vanos. Incremento por torsión-distorsión  $R_{B_w.B_d}$  (—) en sección por centro del vano central, en función de la luz  $L$  (m) y el ancho del tablero  $b$  (m).

En todos los casos el incremento total de la tensión es mayor del 20.0 %, por lo que no se puede establecer una luz mínima para la limitación del 10.0 %. Con el gráfico (8.57) sólo se puede obtener la longitud mínima para limitar los incrementos de tensiones al 30.0 %, resultando:

$$L_{R_{Q_y}+R_{B_w.B_d}}(30\%) = \frac{b + 2.504}{0.222}$$

En este caso, el incremento de tensión por arrastre de cortante representa de media el 77.0 % del incremento total por coacción del alabeo.

De la misma forma que se ha hecho para la sección por centro del vano central, si el fenómeno de arrastre de cortante se tuviera en cuenta mediante el uso de anchos eficaces, sería necesario sólo conocer cual es la luz mínima para limitar las tensiones por torsión y distorsión. Con el gráfico (8.59) se obtiene que para el límite del 10.0 % sería:

$$L_{R_{B_w.B_d}}(10\%) = \frac{b + 2.779}{0.297}$$

Si el análisis se hace en función de las longitudes características relativas a torsión y distorsión, véase la gráfica (8.55), se obtiene que para limitar las tensiones por torsión y distorsión al 10 % se tiene que cumplir:

$$\kappa_d \geq 7.75 \qquad \kappa_t \geq 45.0$$

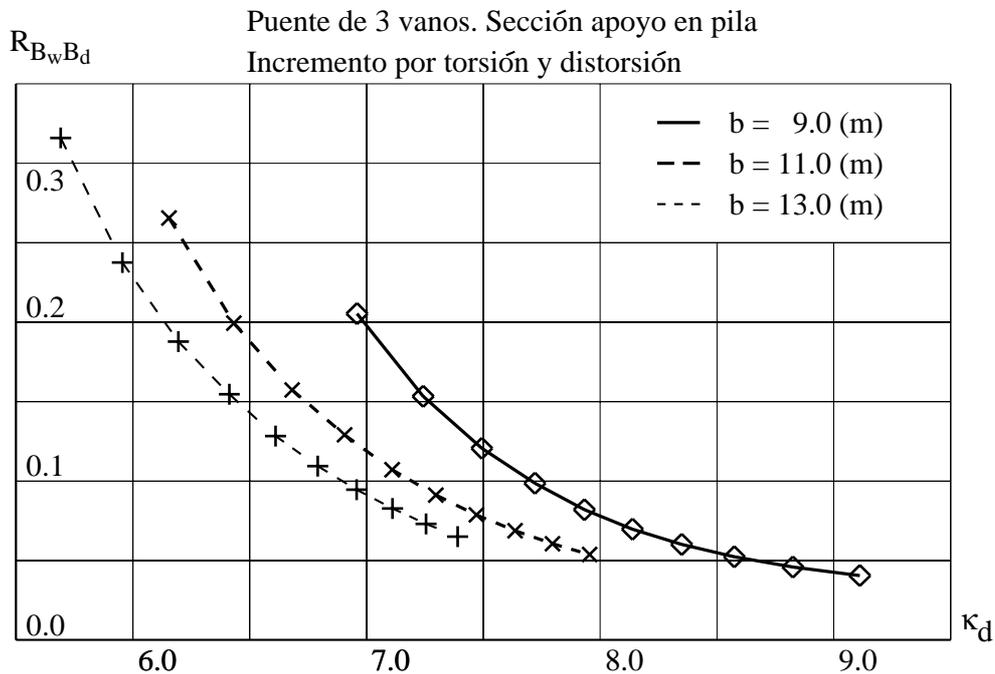


Figura 8.55: Puente de 3 vanos. Incremento relativo de tensión por torsión-distorsión  $R_{B_w.B_d}$  (—) para la sección por apoyo en pila, en función de la longitud característica relativa de distorsión  $\kappa_d$ .

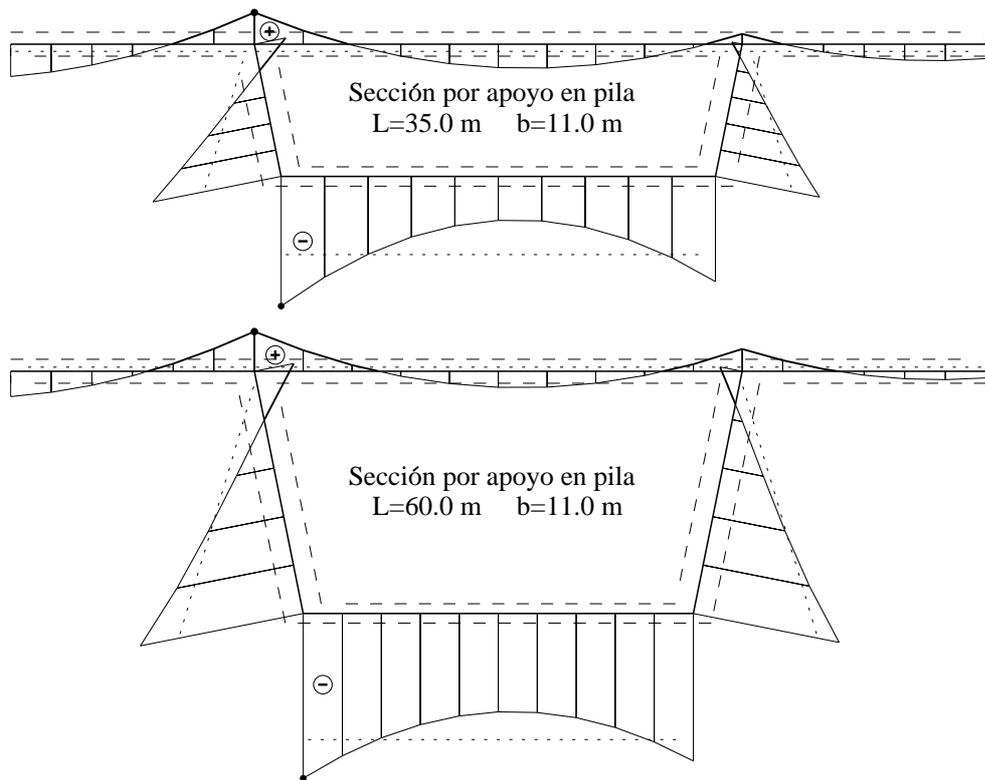


Figura 8.56: Puente de 3 vanos. Diagrama de tensiones en secciones por apoyo en pila. En línea de puntos las tensiones sin las componentes por coacción al alabeo.

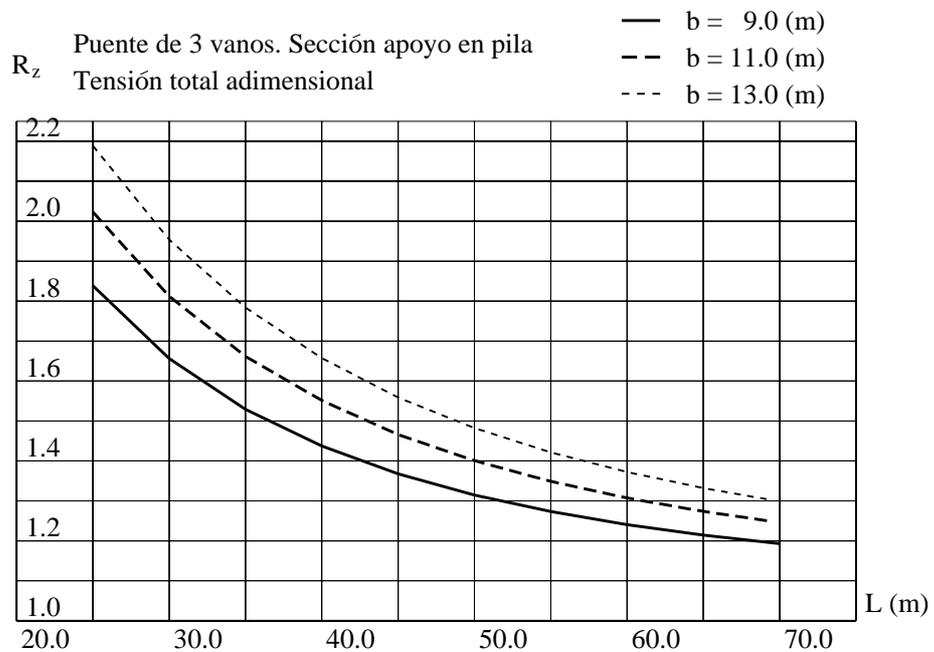


Figura 8.57: Puente de 3 vanos. Tensión total adimensional  $R_z$  (—) en sección por apoyo en pila, en función de la luz  $L$  (m) y el ancho del tablero  $b$  (m).

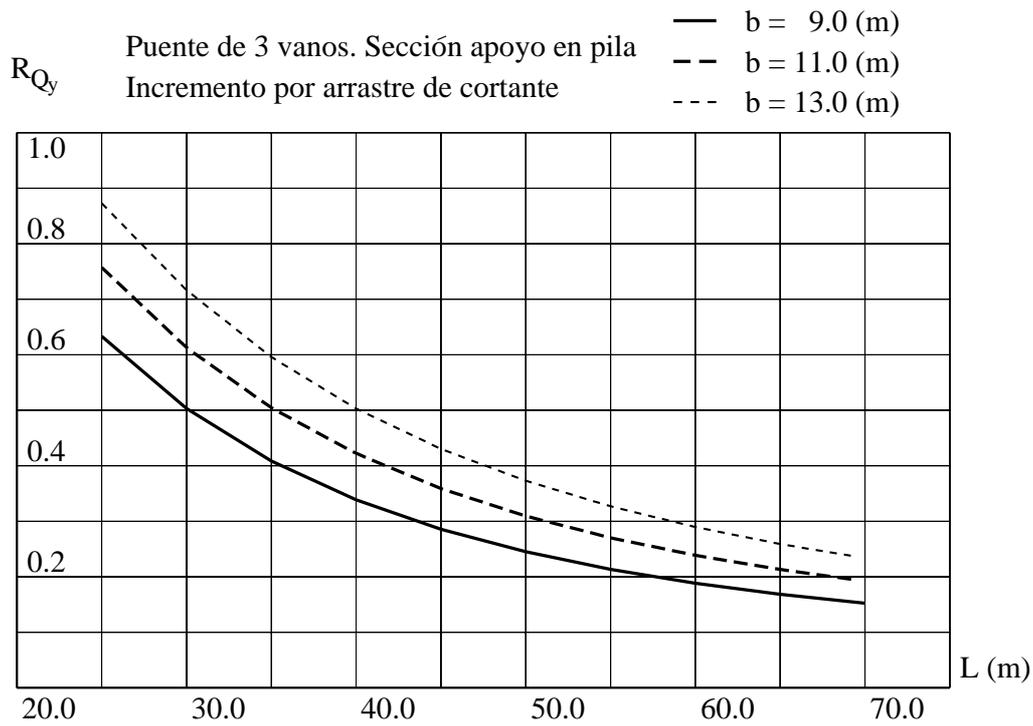


Figura 8.58: Puente de 3 vanos. Incremento por arrastre de cortante  $R_{Q_y}$  (—) en sección por apoyo en pila, en función de la luz  $L$  (m) y el ancho del tablero  $b$  (m).

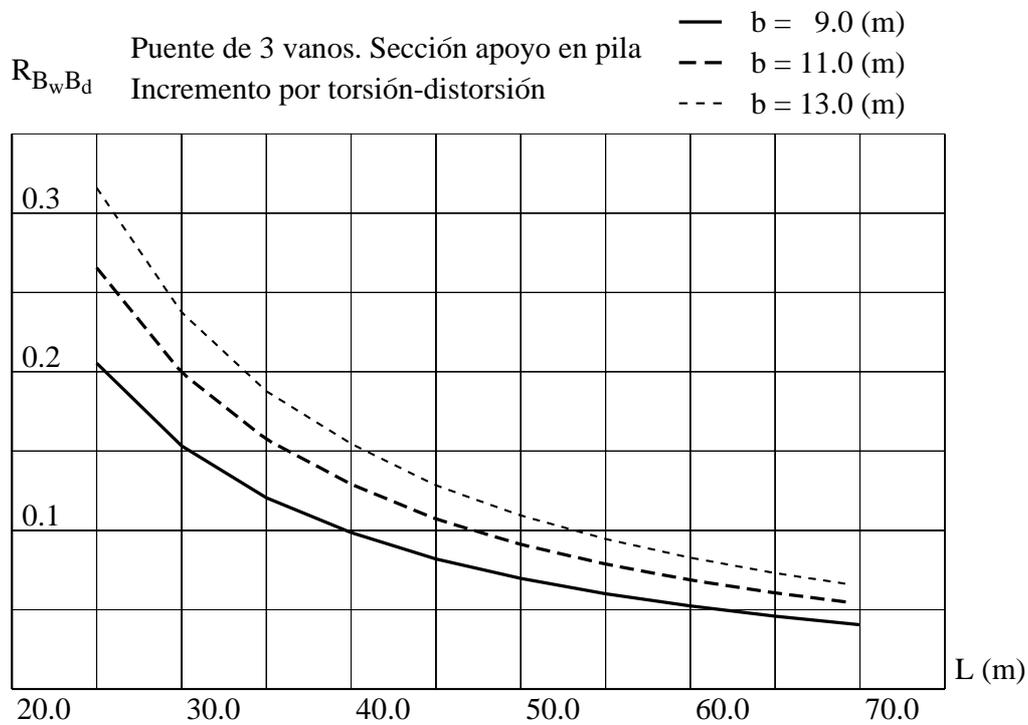


Figura 8.59: Puente de 3 vanos. Incremento por torsión-distorsión  $R_{B_w.B_d}$  (—) en sección por apoyo en pila, en función de la luz  $L$  (m) y el ancho del tablero  $b$  (m).

### 8.5.7. CONCLUSIONES

No se ha pretendido hacer un estudio exhaustivo del problema, para el que sería necesario considerar la variación de mayor número de parámetros que los que se han considerado, para poder claramente constatar su influencia o no. Un estudio exhaustivo podría ser un trabajo completo de investigación por sí sólo. El objetivo que se ha buscado, es mostrar que el trabajo desarrollado puede constituirse como una herramienta de investigación sobre el comportamiento genérico de este tipo de estructuras.

Como era de esperar, en cuanto la luz del vano principal es menor, y el ancho del tablero es mayor, crece la importancia de las tensiones normales que aparecen por las coacciones al alabeo. Si se calcula la estructura sólo con cargas excéntricas (como sobrecargas de uso en medio ancho del tablero) las tensiones por alabeo pueden tener una importancia relativa muy importante, pero al combinarse con acciones centradas (como peso propio, carga permanente y pretensado) su importancia relativa decrece. Con el aumento de luz crece especialmente el peso propio respecto de las sobrecargas de uso, lo que contribuye también a que decrezca rápidamente la importancia de las tensiones por coacción al alabeo. Todo esto queda reflejado en la forma de las gráficas con las que se han analizado los resultados.

Como conclusión práctica, en puentes de sección cajón unicelular de hormigón armado, con empotramiento a torsión en todos los apoyos, en el caso en que el fenómeno de arrastre de cortante se tenga en cuenta mediante el uso de anchos eficaces, se puede establecer que la luz del vano principal  $L$  ( $m$ ) debe tener la siguiente longitud mínima en función del ancho del tablero  $b$  ( $m$ ), para que las tensiones por torsión y distorsión supongan menos de un 10.0 % de incremento de tensión.

$$L \geq \frac{b + 2.779}{0.297}$$

O de forma alternativa, se puede expresar como una condición sobre el valor de la longitud característica relativa de distorsión:

$$\kappa_d \geq 7.75$$

## 8.6. REVISIÓN DE LOS COEFICIENTES DE ANCHO EFICAZ

### 8.6.1. INTRODUCCIÓN

Al realizar el cálculo elástico de una estructura, para tener en cuenta el efecto en las tensiones normales de las deformaciones por cortante, la normativa contempla la posibilidad de usar anchos eficaces. El ancho eficaz de una pared de una sección es aquel en que aplicada la tensión máxima, la fuerza total es igual a la de la distribución real de tensiones. En la figura (8.60) se representa gráficamente este concepto.

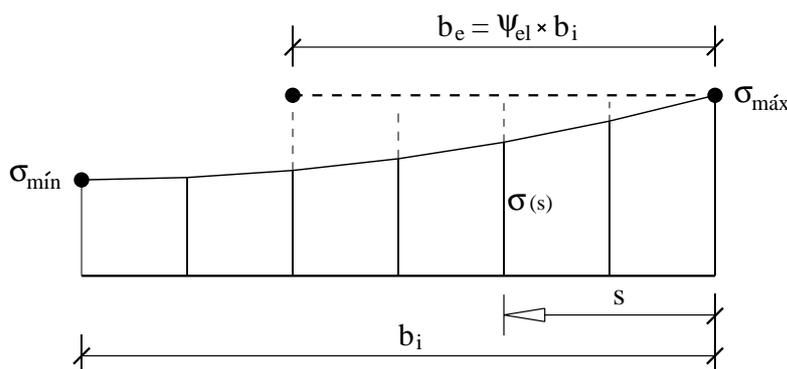


Figura 8.60: Definición de ancho eficaz  $b_e$  en un ala de una sección.

El Eurocódigo define los anchos eficaces con fórmulas distintas según que la estructura sea de acero [64] o de hormigón [65]. Las fórmulas que se indican para estructuras de hormigón son más simples, por tener en estas estructuras menos importancia este fenómeno. Pero normas como la española de hormigón [66] indican que en puentes para un cálculo más preciso, se pueden utilizar las de la norma de estructuras de acero.

Los coeficientes del Eurocódigo para estructuras de acero están basados [67] en cálculos analíticos de vigas biapoyadas con sección doble T, en las que se considera una forma predefinida del alabeo por cortante en las alas superiores de la sección.

Para comprobar la aplicabilidad de dichos coeficientes de ancho eficaz en puentes con sección cajón, se va a calcular para la serie de puentes definida en el apartado 8.5 la distribución de tensiones, y con esta el ancho eficaz que correspondería, y se va a comparar con los valores de las fórmulas de la normativa.

### 8.6.2. CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE ANCHO EFICAZ

De acuerdo con el apartado 3.7 referente al modo de cortante, la forma de variación de las tensiones normales de flexión incluyendo el efecto de arrastre de cortante es un polinomio cúbico. Pero en el caso particular de una pared situada en perpendicular al plano de flexión, la forma de las tensiones es un polinomio cuadrático por ser la coordenada  $y$  de valor constante. Considerando la pared de la figura (8.60), en la cual el punto de tensión mínima coincide con un punto de tensión tangencial nula (por lo tanto  $d\sigma_z/ds = 0$  en este punto), las tensiones longitudinales tienen por ecuación:

$$\sigma(s) = \sigma_{\text{mín}} + (\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}) \cdot \left(1 - \frac{s}{b_i}\right)^2$$

En el articulado del Eurocódigo [64]<sup>6</sup> aparece una ecuación semejante, pero con exponente cuatro en vez de dos.

Siendo  $t_i$  el espesor de la pared, mediante integración de las tensiones se obtiene el axil:

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{b_i} \sigma(s) \cdot t_i \cdot ds = \\ &= \left(\frac{2}{3} \sigma_{\text{mín}} + \frac{1}{2} \sigma_{\text{máx}}\right) \cdot t_i \cdot b_i \end{aligned}$$

Denominando coeficiente de ancho eficaz elástico  $\psi_{el}$  a la relación entre el ancho eficaz  $b_e$  y el ancho total  $b_i$ , y teniendo en cuenta el concepto de ancho eficaz se puede escribir:

$$b_e = \psi_{el} \cdot b_i$$

$$N = b_e \cdot t_i \cdot \sigma_{\text{máx}}$$

Operando y despejando, se obtiene:

$$\boxed{\psi_{el} = \frac{b_e}{b_i} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{\text{mín}}}{\sigma_{\text{máx}}} + \frac{1}{3}}$$

Expresión que coincide con la indicada en la mencionada referencia [67]<sup>7</sup> sobre las bases de los coeficientes de ancho eficaz del Eurocódigo.

La serie de puentes de tres vanos de sección cajón definida en el apartado 8.5, con relación entre el vano lateral al central de  $L_v/L = 0.6$ , se ha calculado con el elemento unidimensional **B3N**, con una carga continua centrada en la sección, y aplicada en toda su longitud. En la sección por centro de luz y para el voladizo, a partir de las tensiones obtenidas se ha determinado el coeficiente de ancho eficaz  $\psi_{1,B3N}$ . Y en la siguiente tabla se compara con el de las fórmulas del Eurocódigo  $\psi_{1,EC}$ , para distintas luces del vano principal  $L$  y de ancho total del tablero  $b$ , calculados con las longitudes de vano equivalente  $L_e$  que indica esta norma.

$$\kappa = \frac{b_i}{L_e} = \frac{b/4}{0.7 \cdot L} \qquad \psi_{1,EC} = (1 + 6.4 \cdot \kappa^2)^{-1}$$

---

<sup>6</sup> § 3.2.2 Distribución de tensiones debidas al arrastre de cortante. Figura 3.3.

<sup>7</sup> § 3.3 Effective width approaches in design. Basic situations. Fórmula (3.15).

$b$ (m)	9.0	11.00	13.00	9.0	11.00	13.00
$L$ (m)	$\psi_{1,B3N}$	$\psi_{1,B3N}$	$\psi_{1,B3N}$	$\psi_{1,EC}$	$\psi_{1,EC}$	$\psi_{1,EC}$
25.0	0.89	0.85	0.80	0.90	0.86	0.82
30.0	0.92	0.89	0.85	0.93	0.90	0.87
35.0	0.94	0.92	0.89	0.95	0.93	0.90
40.0	0.95	0.93	0.91	0.96	0.94	0.92
45.0	0.96	0.95	0.93	0.97	0.95	0.94
50.0	0.97	0.96	0.94	0.97	0.96	0.95
55.0	0.98	0.96	0.95	0.98	0.97	0.96
60.0	0.98	0.97	0.96	0.98	0.97	0.96
65.0	0.98	0.97	0.96	1.00	0.98	0.97
70.0	0.98	0.98	0.97	1.00	0.98	0.97

Como se puede ver, hay muy buena coincidencia en los valores del coeficiente  $\psi_1$ , siendo del 0.9% la media de las diferencias entre valores, y la diferencia máxima del 2.2%.

En la tabla siguiente, se reflejan los valores correspondientes a la sección coincidente por apoyo en pila:

$$\kappa = \frac{b_i}{L_e} = \frac{b/4}{(L + L_v)/4} \quad \psi_{2,EC} = \left( 1 + 6 \left( \kappa - \frac{1}{2500 \cdot \kappa} \right) + 1.6 \cdot \kappa^2 \right)^{-1}$$

$b$ (m)	9.0	11.00	13.00	9.0	11.00	13.00
$L$ (m)	$\psi_{2,B3N}$	$\psi_{2,B3N}$	$\psi_{2,B3N}$	$\psi_{2,EC}$	$\psi_{2,EC}$	$\psi_{2,EC}$
25.0	0.52	0.48	0.44	0.41	0.36	0.32
30.0	0.56	0.52	0.49	0.46	0.41	0.37
35.0	0.60	0.56	0.52	0.50	0.45	0.41
40.0	0.64	0.59	0.56	0.54	0.48	0.44
45.0	0.66	0.62	0.58	0.57	0.52	0.47
50.0	0.69	0.65	0.61	0.60	0.54	0.50
55.0	0.71	0.67	0.63	0.62	0.57	0.52
60.0	0.73	0.69	0.65	0.64	0.59	0.55
65.0	0.75	0.71	0.67	0.67	0.61	0.57
70.0	0.77	0.72	0.69	0.68	0.63	0.59

En este caso la diferencia es mayor, siendo la media de las diferencias del 17.0%, y la diferencia máxima del 27.6%.

### 8.6.3. REVISIÓN DE LA LUZ EQUIVALENTE

En el cálculo de los coeficientes de ancho eficaz con las fórmulas del Eurocódigo, interviene la luz equivalente  $L_e$  para una viga simple, para la cual están obtenidas las fórmulas. Siendo  $L$  la luz de un vano interior y  $L_v$  de un vano lateral, para el caso de la sección por centro de luz de un vano interior la longitud equivalente es  $L_{e1} = 0.70 \cdot L$  para obtener  $\psi_1$ , y para la sección por apoyo en pila  $L_{e2} = 0.25 (L + L_v)$  para obtener  $\psi_2$ .

El cálculo del apartado anterior se ha realizado para una relación entre la luz del vano lateral al vano central de  $L_v/L = 0.60$ . Se ha repetido el mismo cálculo para otras

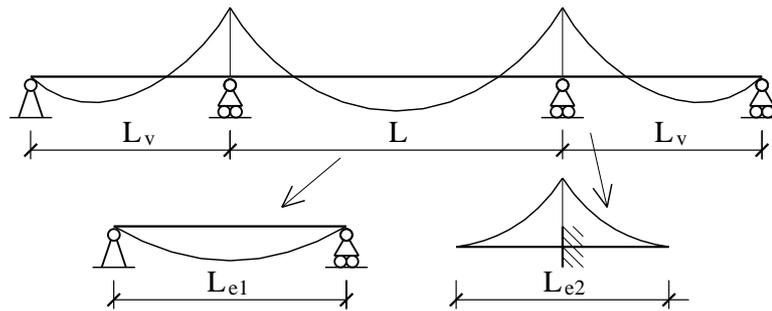


Figura 8.61: Definición de la longitud equivalente  $L_e$ .

relaciones de luces, y para cada viga se ha determinado cual sería la luz equivalente para que las fórmulas de la norma proporcionen el mismo coeficiente de ancho eficaz que el obtenido con los modelos de elementos unidimensionales **B3N**. Para cada serie de vigas para una relación dada  $L_v/L$  los valores de los coeficientes de las expresiones de la luz equivalente tienen poca dispersión, siendo los valores medios obtenidos los de la siguiente tabla, que también están representados en la figura (8.62).

Método	$L_v/L$ (-)	$L_{e1}/L$ (-)	$L_{e2}/(L + L_v)$ (-)
<i>Barra B3N</i>	0.30	0.665	0.461
	0.40	0.670	0.438
	0.50	0.667	0.417
	0.60	0.653	0.389
	0.70	0.628	0.370
	0.80	0.589	0.360
	0.90	0.532	0.356
	1.00	0.452	0.368
<i>Eurocódigo</i>	—	<b>0.700</b>	<b>0.250</b>

Realizando una regresión lineal de los coeficientes de la tabla, se obtiene las siguientes expresiones para las longitudes equivalentes:

$$\frac{L_{e1}}{L} = 0.796 - 0.290 \cdot \frac{L_v}{L}$$

$$\frac{L_{e2}}{L + L_v} = 0.492 - 0.149 \cdot \frac{L_v}{L}$$

Utilizando las mismas fórmulas del Eurocódigo para los coeficientes de ancho eficaz  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , con el uso de estas longitudes equivalentes en vez de las del Eurocódigo que son:

$$\frac{L_{e1}}{L} = 0.70$$

$$\frac{L_{e2}}{L + L_v} = 0.25$$

Se consigue un mayor ajuste con la realidad en los valores de los coeficientes de ancho eficaz.

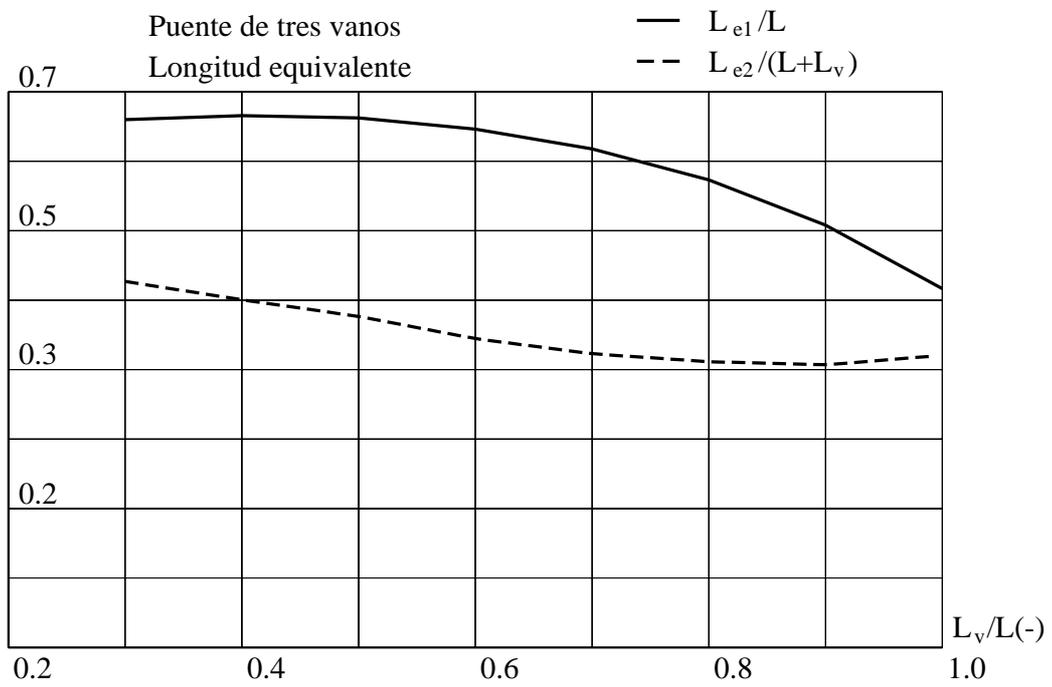


Figura 8.62: Coeficientes para longitud equivalente.

## 8.7. COMPARATIVA ENTRE ECUACIONES DE TORSIÓN Y DISTORSIÓN

### 8.7.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 6 dedicado a los problemas de torsión y distorsión, se obtuvo que para el caso habitual en que la función de alabeo de distorsión  $w_d$  se pueda ortogonalizar respecto de la función de alabeo de torsión  $w_a$ , se cumple que la inercia cruzada entre ellas es nula ( $I_{w_a.w_d} = 0$ ), por lo que el sistema de ecuaciones diferenciales que resuelve el problema es:

$$\begin{bmatrix} E_o I_a & 0 \\ 0 & E_o I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_z^{IV} \\ \psi_d^{IV} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o I_t & 0 & G_o D_{t.d} \\ G_o D_{t.d} & -E_o K_d & G_o D_{t.d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_t \\ m_d \end{Bmatrix} \quad (8.2)$$

Este sistema es el que resuelve el elemento unidimensional **B3N** desarrollado en el capítulo 4. Por las simplificaciones que se introducen en la teoría convencional de *Resistencia de Materiales*, el sistema de ecuaciones anterior se simplifica al que se indica a continuación. Es un sistema en el cual las funciones incógnitas están desacopladas, por lo que su resolución es más sencilla.

$$\begin{bmatrix} E_o I_a & 0 \\ 0 & E_o I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_z^{IV} \\ \psi_d^{IV} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_o I_t & 0 & 0 \\ 0 & -E_o K_d & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_z^{II} \\ \psi_d \\ \psi_d^{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_t \\ m_d \end{Bmatrix} \quad (8.3)$$

A parte de la diferencia en las ecuaciones diferenciales, se encuentra una diferencia llamativa en la forma de la función de alabeo  $w_d$  para distorsión, que se corresponde con la forma de distribución de las tensiones longitudinales por distorsión. En la teoría clásica en una sección cajón unicelular se hace la hipótesis de que la función de alabeo es lineal en toda la tabla superior (véase el apartado H.6), que se enfrenta con el hecho de que mediante el método de elementos finitos descrito en el apartado 3.11 se obtienen distribuciones con líneas quebradas. En la figura (8.64) para dos secciones de la serie definida en el apartado 8.5 se pueden ver las diferencias en la forma de la función de alabeo de distorsión obtenidas con cada teoría.

Para que se puedan apreciar mejor las diferencias, se han representado en la figura (8.65) más resultados para una sección:

- En la parte superior de la figura (8.65) se ha representado la función de alabeo de torsión  $w_a$ , que es siempre la misma independientemente del método de cálculo.
- Por debajo de la anterior, se ha representado la función de alabeo de distorsión  $w_d$  antes de ortogonalizarla respecto de la función de alabeo de torsión  $w_a$ , y en la deformada que la acompaña se puede apreciar que esta incluye un giro de conjunto.

- La siguiente figura representa la función de alabeo de distorsión  $w_d$  después de realizada dicha ortogonalización. Se observa que en la deformada correspondiente ya no existe un giro de conjunto.
- En el extremo inferior de la figura (8.65), se ha representado la función de alabeo de distorsión y la deformada obtenidas mediante la teoría clásica. Como se puede observar, las formas son más parecidas a las obtenidas con **MEF** antes de ortogonalizar respecto el modo de torsión.

Para encontrar las diferencias entre las diferentes ecuaciones y características reseñadas, se va a calcular mediante tres formas distintas el caso de una viga biapoyada con apoyos en horquilla y carga torsora (véase la figura (8.63)). Y adicionalmente para poder saber cual es el resultado más correcto, se va a calcular también mediante el método de las bandas finitas tipo lámina. Por lo tanto los cuatro cálculos a realizar son:

- Cálculo **A.E.** Ecuación diferencial **A**coplada (8.2) con características mecánicas calculadas mediante **E**lementos finitos según capítulo 3.
- Cálculo **D.E.** Ecuación diferencial **D**esacoplada (8.3) con características mecánicas calculadas mediante **E**lementos finitos según capítulo 3.
- Cálculo **D.C.** Ecuación diferencial **D**esacoplada (8.3) con características mecánicas mediante teoría **C**lásica según apéndice H.
- Cálculo **B.F.** Cálculo mediante el método de las **B**andas **F**initas [51].

La combinación de ecuación diferencial acoplada (8.2) con características mediante teoría clásica no es posible, por ser nulas las características mecánicas ( $D_{t_d.t_d} = 0$ ) y ( $D_{t_d.t_a} = 0$ ), y porque en este caso por no ortogonalizarse entre si las funciones de alabeo de torsión y distorsión en general la inercia cruzada es no nula ( $I_{w_a.w_d} \neq 0$ ).

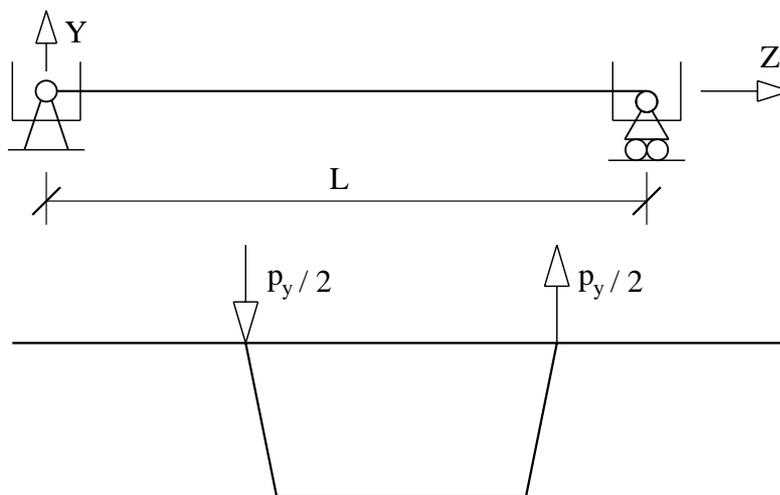


Figura 8.63: Viga cajón con apoyos en horquilla.

Los cálculos se van a hacer para la serie de vigas definida en el apartado 8.5, manteniendo constante el ancho del tablero  $b = 11.0$  ( $m$ ), y variando la luz del vano  $L$  entre  $15.0$  ( $m$ ) y  $50.0$  ( $m$ ). El valor de la carga aplicada sobre cada alma es de  $p_y = 100.0$  ( $kN/m$ ).

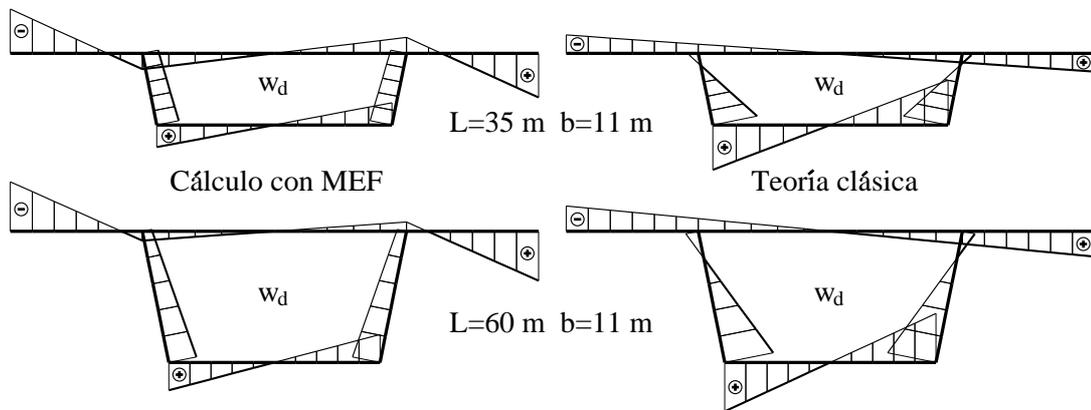


Figura 8.64: Función de alabeo de distorsión  $w_d$ . Comparación entre la teoría clásica y el cálculo con elementos finitos.

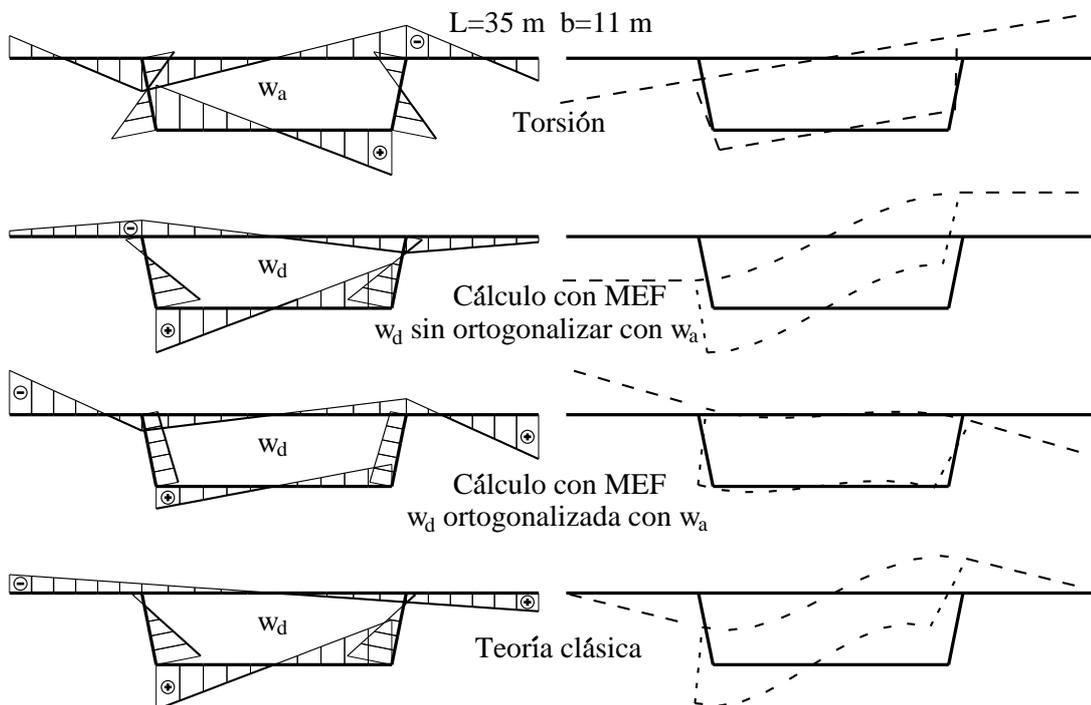


Figura 8.65: Funciones de alabeo y deformada: de torsión  $w_a$ , de distorsión  $w_d$  sin ortogonalizar respecto a  $w_a$ , de distorsión ortogonalizada respecto  $w_a$ , y de distorsión con la teoría clásica.

8.7.2. VIGA BIAPOYADA: COMPARACIÓN DE MOVIMIENTOS

La viga viapoyada de la figura (8.63) se ha calculado para ocho luces comprendidas entre 15.0 (m) y 50.0 (m) para la serie de vigas del apartado 8.5, con los cuatro tipos de cálculos indicados. Los tres primeros cálculos en los que se resuelven las ecuaciones diferenciales, se han hecho obteniendo numéricamente las autofunciones de la matriz del sistema lineal de ecuaciones diferenciales, e imponiendo las condiciones de contorno para obtener los coeficientes de cada solución.

En la figura (8.66) se ha representado el movimiento vertical  $u_y$  (m) en centro de luz del extremo superior del alma izquierda, observándose que el cálculo **A.E.** es el que más se aproxima a la solución con bandas finitas **B.F.**, que se toma como la solución correcta de referencia. De forma clara los resultados del cálculo **D.E.** son incorrectos, lo cual indica que si se utilizan los modos de torsión y distorsión calculados por elementos finitos con la metodología del capítulo 3, es necesario utilizar las ecuaciones diferenciales acopladas por las características  $D_{t_d.t_d}$  y  $D_{t_d.t_a}$ .

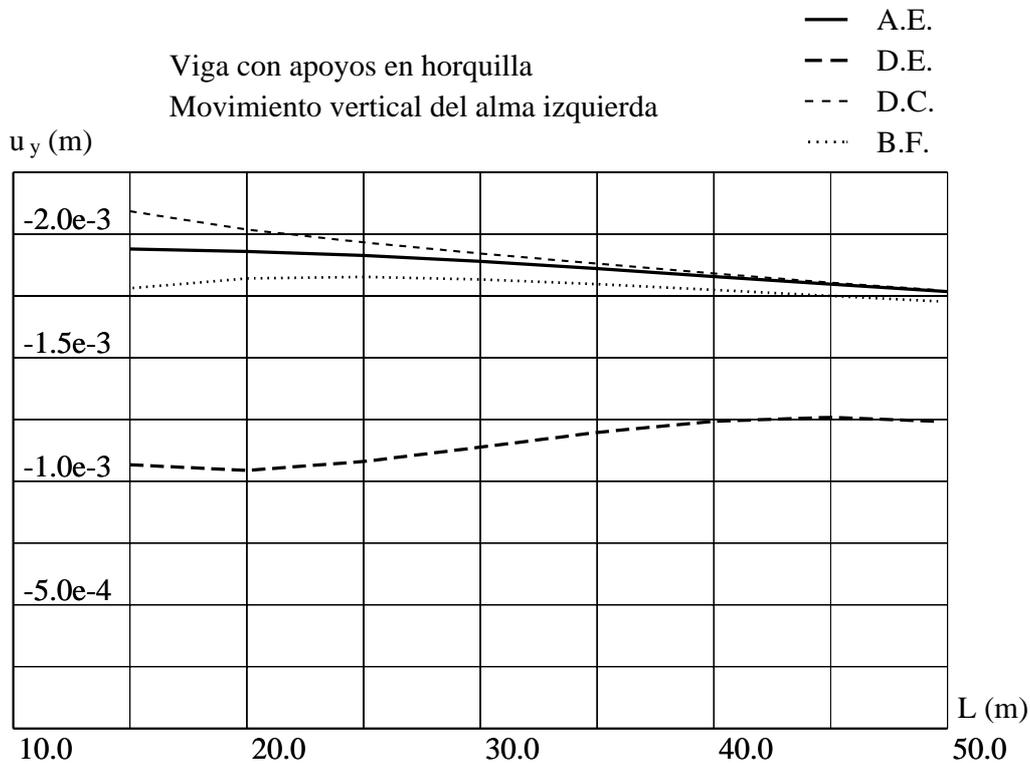


Figura 8.66: Viga biapoyada. Movimiento vertical  $u_y$  (m) del alma izquierda en centro luz, en función de la luz  $L$  (m) por diferentes métodos de cálculo.

En las figuras (8.67) y (8.68) se representan para el centro de la viga, el giro de torsión  $\theta_z$  y el movimiento de distorsión  $\psi_d$ . Del análisis de las mismas surgen los siguientes comentarios:

- Respecto del giro de torsión, como son iguales las características mecánicas de torsión calculadas por el método de los elementos finitos y por el cálculo clásico, las soluciones **D.E.** y **D.C.** dan idéntico giro de torsión, ya que resuelven exactamente el mismo

problema.

- Como se había ya apreciado con las deformadas de la figura (8.65), la deformada transversal de distorsión de cálculo clásico incluye un giro de conjunto, que no tiene la deformada en el cálculo por elementos finitos, y por ello no coinciden el giro de torsión  $\theta_z$ , y tampoco el movimiento de distorsión  $\psi_d$  entre los métodos **A.E.** y **D.C.**, aunque luego al componerlos los movimientos totales que se obtengan sean muy parecidos, como ya se ha visto.
- El movimiento de distorsión  $\psi_d$  tiene valores e incluso signos distintos, por ser las deformadas transversales de distorsión distintas, como se ve en la figura (8.65) al comparar las dos deformadas del extremo inferior de dicha figura.

### 8.7.3. VIGA BIAPOYADA: COMPARACIÓN DE TENSIONES

Para realizar el estudio de tensiones se han considerado los valores en los extremos interior y exterior del voladizo izquierdo en la sección por centro de luz, pudiéndose ver los valores obtenidos en las figuras (8.69) y (8.70). A la vista de las mismas, se puede concluir lo siguiente respecto de las tensiones:

- Con el cálculo **D.E.** se había visto que los movimientos que se obtienen no son correctos, y ahora especialmente para las tensiones en el extremo exterior del voladizo los valores son muy incorrectos, como era de esperar por obtenerse las tensiones por derivación de los movimientos.
- Los valores de los cálculos **A.E.** y **D.C.** son muy parecidos entre si. El valor máximo de la tensión que predicen, máximo que se localiza en el extremo interior del voladizo, tiene menor diferencia respecto del valor por bandas finitas a medida que aumenta la luz del vano. Para la tensión en el extremo del voladizo, el error disminuye rápidamente al aumentar la luz
- Las mayores diferencias respecto de la solución de bandas finitas considerada como la correcta, se producen para los valores más bajos de las luces, los cuales quedan fuera del rango habitual de uso de esta tipología de puente.

8.7. COMPARATIVA ENTRE ECUACIONES DE TORSIÓN Y DISTORSIÓN

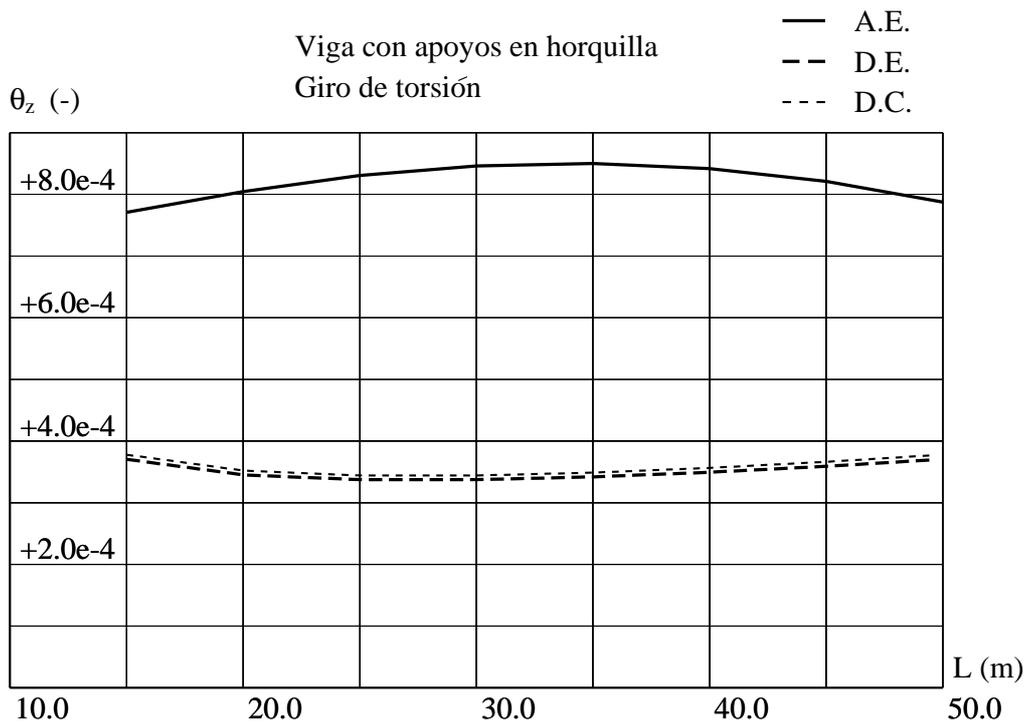


Figura 8.67: Viga biapoyada. Giro de torsión  $\theta_z$  (-) en centro luz, en función de la luz  $L$  (m) por diferentes métodos de cálculo.

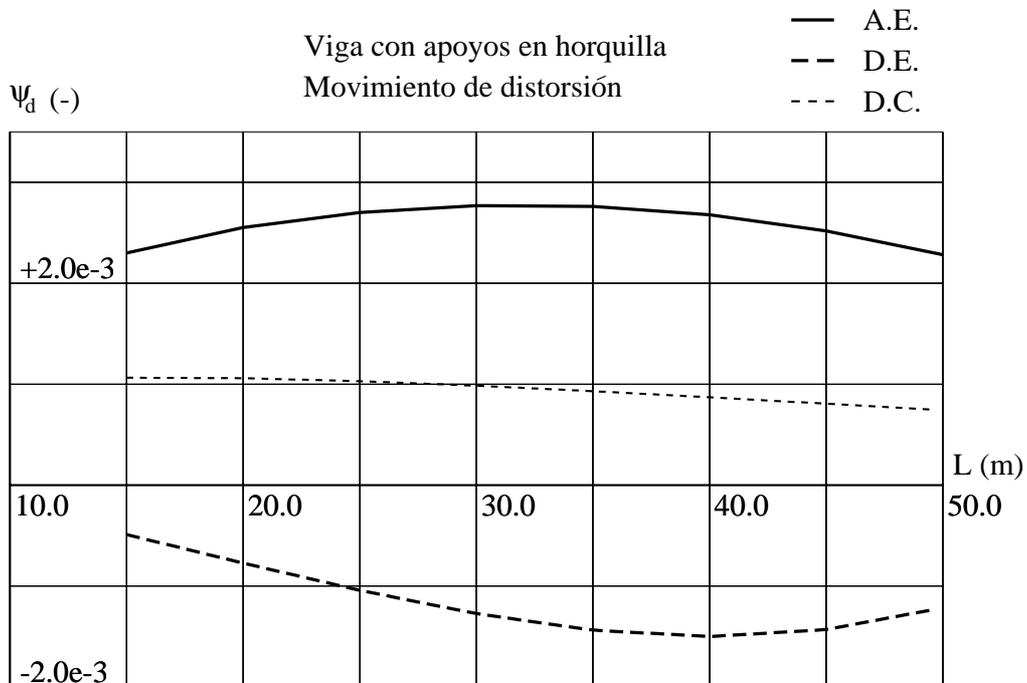


Figura 8.68: Viga biapoyada. Movimiento de distorsión  $\psi_d$  (-) en centro luz, en función de la luz  $L$  (m) por diferentes métodos de cálculo.

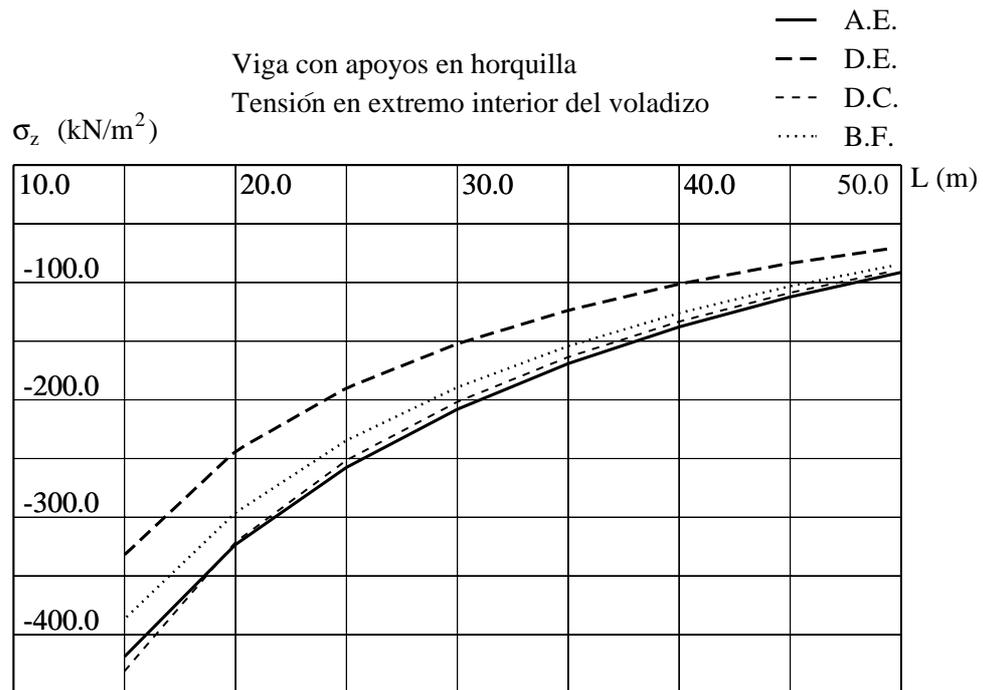


Figura 8.69: Viga biapoyada. Tensión longitudinal  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en extremo interior del voladizo izquierdo en centro luz, en función de la luz  $L$  ( $m$ ) por diferentes métodos de cálculo.

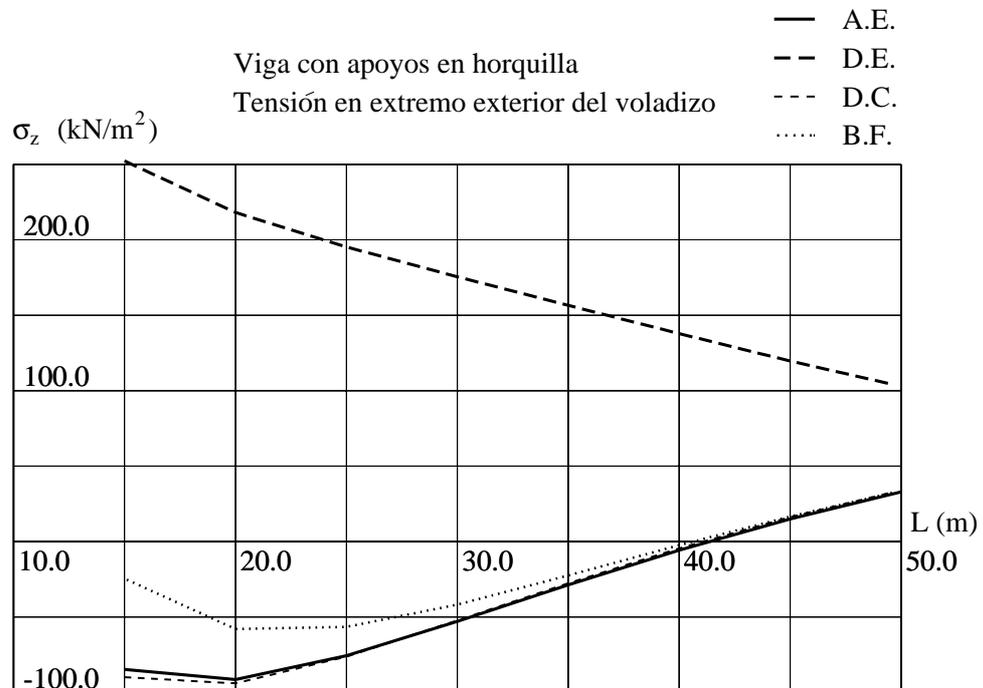


Figura 8.70: Viga biapoyada. Tensión longitudinal  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en extremo exterior del voladizo izquierdo en centro luz, en función de la luz  $L$  ( $m$ ) por diferentes métodos de cálculo.

## 8.7.4. VIGA BIEMPOTRADA

Se han calculado las mismas vigas, pero poniendo empotramientos en ambos extremos, tal como se puede ver en la figura (6.34)<sup>8</sup>. En este caso se toma como referencia los resultados de modelos de elementos finitos con elementos lámina **M.E.F.**, ya que no es posible utilizar bandas finitas por problemas numéricos de representación de los números en los ordenadores.

La tensión máxima se produce en el extremo interior del voladizo, punto para el cual se han representado los resultados en la figura (8.71). Como ya se había visto en apartados anteriores (6.6 y 7), en las secciones de empotramiento por no cumplirse las hipótesis con las que se obtienen las propiedades de la sección, los resultados no son buenos. En este caso el error para los tres métodos de cálculo (**A.E.**, **D.E.** y **D.C.**) aumenta al aumentar la luz, coincidente con en el rango usual de esta tipología de puentes.

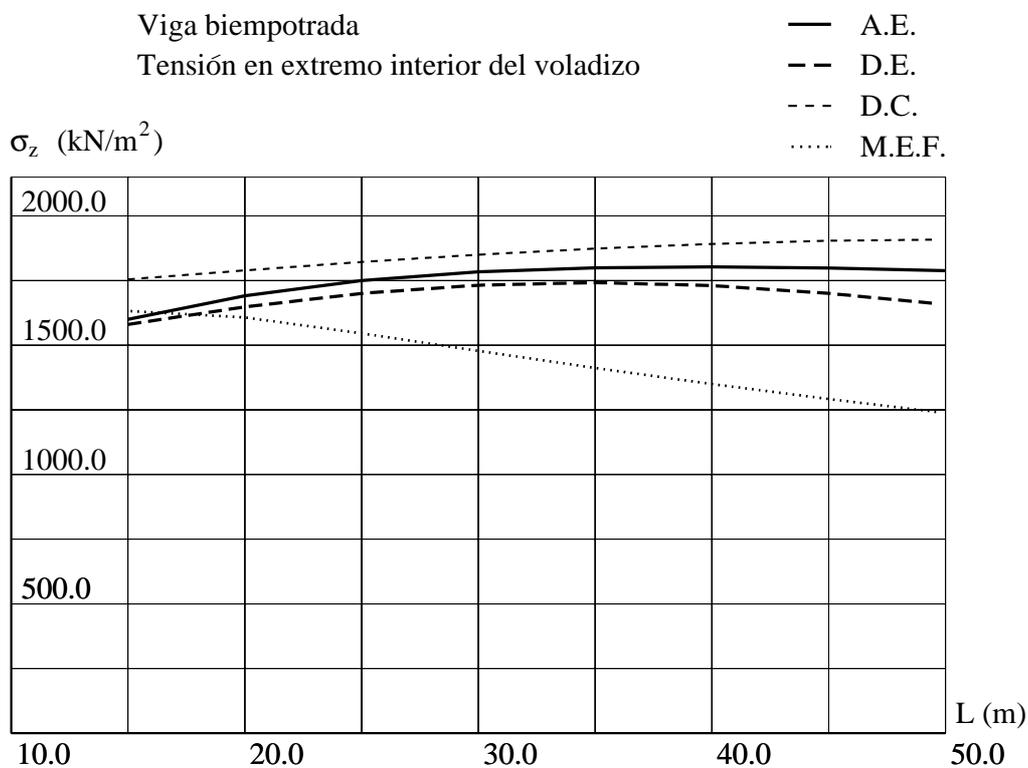


Figura 8.71: Viga biempotrada. Tensión longitudinal  $\sigma_z$  (kN/m<sup>2</sup>) en extremo interior del voladizo izquierdo en centro luz, en función de la luz  $L$  (m) por diferentes métodos de cálculo.

<sup>8</sup>Página 184

### 8.7.5. CONCLUSIONES

En este apartado se ha analizado el uso de diferentes ecuaciones y características mecánicas en problemas de torsión y distorsión, con una serie de vigas de un vano con sección cajón. A partir del análisis que se ha hecho de los resultados, se puede concluir lo siguiente:

- Se han obtenido resultados semejantes utilizando las ecuaciones diferenciales acopladas (8.2) con los modos resistentes obtenidos con elementos finitos (cálculo **A.E.**), que utilizando las ecuaciones desacopladas (8.3) con las características obtenidas por la teoría clásica (cálculo **D.C.**).
- De los malos resultados del cálculo **D.E.**, se concluye que si se utilizan los modos calculados con elementos finitos, hay que utilizar las ecuaciones diferenciales que tienen la torsión y la distorsión acopladas.
- Por la dificultad de obtener las características mecánicas de torsión y distorsión mediante los métodos clásicos de *Resistencia de Materiales* para cualquier forma de sección, es de aplicación más general el cálculo **A.E.**, con ecuaciones acopladas y modos resistentes calculados con elementos finitos.



## Capítulo 9

# RESUMEN Y CONCLUSIONES

### 9.1. RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se ha estudiado para piezas lineales con sección de paredes delgadas, como poder analizar de forma conjunta todos los modos resistentes, tanto de forma analítica con ecuaciones diferenciales, como numérica mediante el elemento finito unidimensional desarrollado. Ya que el trabajo se realiza con el fin de poderlo aplicar en el proyecto de puentes, los estudios de verificación de resultados o de aplicación práctica se hacen con ejemplos de este tipo de estructuras. En todos los casos se han elegido puentes de hormigón, por ser este material más utilizado en puentes que el acero, sin que ello signifique que no se pueda aplicar a los puentes de acero.

Con el fin de alcanzar el objetivo propuesto, se han realizado los siguientes pasos:

- Revisar las diferentes metodologías existentes para obtener las características mecánicas de las secciones de paredes delgadas frente a todos los tipos posibles de sollicitación: axil, flexión y cortante, torsión y distorsión. Fijando especial atención en aquellas que son de aplicación general, esencialmente por que no tengan restricciones en la geometría de la sección. Se ha encontrado que la metodología propuesta por Steen Krenk, Bo Jeppensen [2] y Jeppe Jönsson [3] es la de aplicación más general, y que por estar basada en el método de los elementos finitos es la de más fácil implementación en un programa informático.
- Revisar los diferentes elementos finitos unidimensionales que se hayan propuesto, y que incorporen capacidades de cálculo adicionales a la barra convencional tridimensional de seis grados de libertad por nudo, que sólo permite axil, flexión según la teoría de Euler-Bernoulli, y de torsión uniforme según la teoría de Saint-Venant. No encontrando ninguno que no tenga alguna carencia o defecto: ya sea frente algún tipo de sollicitación, por falta de generalidad para cualquier forma de sección, o excesivo número de grados de libertad. Siendo la no inclusión del fenómeno de arrastre de cortante la carencia más generalizada en cuanto a los fenómenos resistentes no incluidos, y en segundo lugar la no inclusión de la distorsión de la sección.
- Siendo el fenómeno de arrastre de tensiones por cortante, el que más dificultad tiene de incluirse en el cálculo, se ha estudiado mediante ejemplos resueltos de forma

analítica la problemática de su inclusión, para comprenderla en la búsqueda de una solución a la misma.

- Partiendo de la suma de los campos de movimientos con los que se obtienen los modos resistentes, e introduciendo modificaciones para poder incluir el fenómeno de arrastre de cortante, se desarrolla un elemento finito unidimensional.
- Mediante ejemplos en que se comparan los resultados del elemento unidimensional, con soluciones de elementos finitos tipo lámina o con bandas finitas tipo lámina, se verifica la bondad de los resultados del elemento propuesto. En el caso de haber discrepancia, se ha tratado de buscar el origen de la misma, y se ha intentado buscar una solución.
- Con el objeto de ver la utilidad de aplicación práctica de los trabajos y desarrollos realizados, se hacen estudios sobre tipologías de puentes concretas, tratando siempre de obtener conclusiones generales sobre el comportamiento estructural de la tipología en estudio.

## 9.2. CONCLUSIONES

Las principales conclusiones y aportaciones originales de este trabajo de investigación, se presentan a continuación divididas en varios bloques.

Para la obtención de los modos resistentes se utiliza la metodología de Steen Krenk, Bo Jeppensen y Jeppe Jönsson. Sobre la misma se han hecho las siguientes modificaciones con el fin de mejorarla:

- Steen Krenk y Bo Jeppensen utilizan para el modo de cortante y torsión uniforme, un elemento finito con funciones de forma con interpolación cúbica con dos variables nodales y dos anodales por elemento, que dan la solución exacta. Y Jeppe Jönsson para el resto de modos utiliza funciones de forma con interpolación lineal, proponiendo para mejorar la precisión, utilizar la técnica de las subestructuras mediante la división de cada elemento inicial en varios. En el presente trabajo para todos los modos resistentes se ha buscado cual es el grado del polinomio de la solución exacta, para poder utilizar elementos con funciones de forma que permitan obtener dicha solución exacta.
- Se ha buscado funciones de forma asociadas a grados de libertad anodales, elegidas de forma que por ortogonalidad de ellas con las funciones lineales de los nodos, los grados de libertad anodales queden desacoplados de los nodales, con lo que sólo es necesario resolver un sistema cuyas incógnitas son las variables nodales, cuyo número de grados de libertad es el mismo que se tenía con el elemento lineal de partida, calculándose luego los grados de libertad anodales a nivel de cada elemento.
- Por lo tanto, con las funciones de forma propuestas, se consigue para todos los modos que independientemente de la división de la sección en elementos, que sean siempre exactos los valores obtenidos para: funciones de alabeo, características mecánicas, distribuciones de tensiones etc.

Respecto al elemento unidimensional para el cálculo de vigas con secciones de paredes delgadas:

- El elemento desarrollado incluye todos los modos resistentes, con un número bajo de grados de libertad (once por nudo), estando asociado a una metodología para la obtención de los modos válida para cualquier geometría de sección.
- Para incluir la influencia en las tensiones normales de las deformaciones por cortante, frente a soluciones en que se utilizan funciones de alabeo predefinidas para secciones dadas, se ha propuesto usar la función de alabeo del modo de cortante ortogonalizada respecto de los giros de flexión.
- Los resultados del elemento además de deformaciones y esfuerzos totales de la sección, y de tensiones en cualquier punto de la sección, también incluyen la descomposición de todos estos resultados como suma de la participación de cada modo resistente.
- Los resultados que se obtienen son equivalentes a los obtenidos con modelos de elementos finitos con láminas o de bandas finitas tipo lámina, teniendo la ventaja frente a ellos, de un tiempo de cálculo mucho más pequeño por ser necesarios un número total de grados de libertad mucho menor.
- La programación del cálculo de los modos resistentes y del elemento unidimensional aquí desarrollado, se ha realizado dentro de un programa comercial de cálculo de estructuras por elementos finitos. Y por lo tanto no restringido su uso a un número reducido de investigadores.

En relación a la verificación de los resultados que se obtienen con el elemento unidimensional:

- Se han calculado diversos ejemplos representativos de distintos estados de carga, para comprobar la bondad de los resultados del elemento unidimensional desarrollado. Encontrándose siempre buena coincidencia, excepto en las secciones de empotramiento.
- Se ha estudiado la convergencia de los resultados hacia la solución exacta de las ecuaciones diferenciales, en función del número de elementos de la discretización. Siendo la convergencia rápida para los movimientos, y para las derivadas de los movimientos es más lenta a medida que se aumenta el orden de derivación.
- Se propone el uso de modelos de regresión estadística, para conseguir descomponer los resultados totales que proporciona un modelo de elementos finitos con elementos tipo lámina, en suma de resultados parciales correspondientes a los modos resistentes. Aunque pensado inicialmente para ser utilizado en la verificación de los resultados del elemento unidimensional, por si sólo es un método que sirve para analizar los resultados de los modelos de elementos finitos.

A partir del análisis de los ejemplos de vigas con secciones de empotramiento, que son en los que hay mayor error en los resultados:

- Se concluye que el motivo por el cual en las secciones de empotramiento los resultados no sean muy correctos, no está en el desarrollo del elemento unidimensional, si no en el desarrollo teórico al obtener los modos resistentes. Ya que en las cercanías de estas secciones, no se cumplen las hipótesis de que determinadas derivadas de las funciones incógnitas sean despreciables.
- Para buscar mejorar los resultados, se propone en el presente trabajo el uso de modos adicionales para torsión y distorsión, los cuales surgen al considerar funciones de alabeo adicionales, y no despreciar las derivadas que se habían despreciado. En este caso se siguen despreciando derivadas, pero de orden mayor.
- Se han desarrollado las ecuaciones diferenciales para el problema de torsión y distorsión que incluyan los modos adicionales. Las ecuaciones son muy complejas de cara a su resolución, por estar la torsión y distorsión acopladas con la flexión. Mediante el uso de la estadística, lo que se ha hecho es descomponer los resultados de modelos de elementos finitos, en modos resistentes en los que se incluyen los adicionales, encontrándose un buen ajuste estadístico de los resultados, lo cual indica que dichos modos adicionales si existen.
- No consideramos que los modos adicionales tenga mucho interés tratar de incluirlos en un elemento unidimensional, ya que en la práctica no se dan secciones de un puente perfectamente empotradas. Los modos adicionales, a parte de su interés teórico, tienen interés en la descomposición de resultados de elementos finitos en modos, porque se mejora el ajuste que se consigue.

En relación a las aplicaciones prácticas desarrolladas:

- Se puede concluir que la metodología utilizada de análisis conjunto es aplicable a cualquier tipo de sección, ya sea abierta o cerrada. Permitiendo obtener tanto esfuerzos a nivel de sección, como la distribución de tensiones en la misma, y la descomposición de las tensiones según su origen resistente. Y que también es posible obtener esfuerzos sobre partes de la sección, como en el ejemplo del tablero de vigas, mediante integración de características mecánicas sólo en parte de la sección.
- Con el ejemplo de cálculo con una serie de vigas cajón de las relaciones geométricas que se deben de cumplir para que queden limitados los incrementos de tensiones por coacción al alabeo, o con el ejemplo de obtención de anchos eficaces para la misma serie, se ha visto que el elemento unidimensional desarrollado se constituye como una herramienta muy adecuada para el estudio teórico del comportamiento de tipologías de estructuras con secciones de paredes delgadas.

### 9.3. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Finalizado este trabajo, partes del mismo son susceptibles de ser mejoradas o ampliadas mediante futuras líneas de investigación. A continuación se enumeran algunas, dividiéndolas en dos grandes grupos.

Respecto a futuras líneas de investigación en aspectos teóricos sobre los modos resistentes y sobre el elemento unidimensional para su análisis conjunto:

- Como la formulación del elemento unidimensional desarrollado es de directriz recta, la primera ampliación del trabajo más interesante para mejorar la utilidad de aplicación práctica, sería desarrollar un elemento curvo en el espacio, por lo menos con curvatura en planta grande respecto de las dimensiones de la sección.
- Estudiar la definición de todos los movimientos respecto del mismo eje como origen. Si se toma como eje de la pieza el que pasa por el centro de gravedad, sería el referir el giro respecto al mismo en vez de respecto al centro de esfuerzos cortantes, quedando la torsión acoplada con la flexión. Pensamos que puede ser un aspecto importante a tener en cuenta en el desarrollo de un elemento para piezas curvas.
- Ampliación del elemento para que se puedan incluir varios modos de distorsión. Ya que como es conocido, en secciones pluricelulares hay por lo menos tantos modos de distorsión como células.
- Extender la formulación del elemento a problemas de cálculo dinámico, y cálculo no lineal por geometría.
- Profundizar en el conocimiento de los modos adicionales. Las ecuaciones diferenciales que se han presentado son susceptibles de mejora, por una parte teniendo en cuenta el fenómeno de arrastre de cortante no contemplado en el presente trabajo, y también desarrollando las expresiones para las condiciones de contorno y dándoles significado. Habría que tratar de resolver las ecuaciones diferenciales que se han obtenido, aunque posiblemente por aparecer las funciones incógnitas con orden de derivación alto, haya problemas numéricos con la representación de los números en el ordenador con un número finito de decimales.

En relación a los estudios prácticos de aplicación a tableros de puente que se han hecho:

- En el presente trabajo se ha estudiado para una tipología de puente dada, cuales son las condiciones geométricas que se deben de cumplir para que se puedan despreciar los incrementos de tensiones por coacción al alabeo. Se podría hacer un estudio más amplio, que incluyera más tipologías, y que profundizara en la importancia o no de mayor número de variables geométricas o de acciones exteriores, para buscar una serie de recomendaciones susceptibles de ser incorporadas en la normativa que indicaran cuando son despreciables dichos incrementos de tensiones, ya que con la normativa actual hay que hacer de todos modos el cálculo para saber si son despreciables o no.
- En la misma línea, se puede profundizar en el estudio de los coeficientes de ancho eficaz, revisando las fórmulas mismas, y las luces equivalentes que hay que definir para puentes continuos para utilizar las fórmulas de la normativa pensadas para vigas simples.



## Apéndice A

# TABLA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Unidades / Significado / Ecuación
$\chi_x, \chi_y$	(–) Intensidad de alabeo de cortante. (4.5)
$\delta\chi$	(–) Función arbitraria.
$\epsilon_z$	(–) Deformación longitudinal. (4.7)
$\gamma_{sz}$	(–) Deformación tangencial en la dirección de una pared. (4.8)
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	(–) Deformación tangencial en ejes globales.
$\kappa_d$	(–) Esbeltez a distorsión de una viga. (8.1)
$\kappa_t$	(–) Esbeltez a torsión de una viga. (8.1)
$\nu$	(–) Coeficiente de Poisson.
$\Pi$	( $kN \cdot m$ ) Energía potencial total. (4.22)
$\theta_x, \theta_y$	(–) Giro de flexión. (4.5)
$\theta_z$	(–) Giro de torsión. (3.46)
$\sigma_z$	( $kN/m^2$ ) Tensión longitudinal. (4.9)
$\tau_{sz}$	( $kN/m^2$ ) Tensión tangencial en la dirección de una pared. (4.10)
$\tau_{xz}, \tau_{yz}$	( $kN/m^2$ ) Tensión tangencial en ejes globales. (3.2)
$\xi$	(–) Coordenada adimensional en una pared.
$\psi_d$	(–) Intensidad del movimiento de distorsión. (3.114)
$A$	( $m^2$ ) Área de la sección. (3.9)
$A_x, A_y, A_{xy}$	( $m^2$ ) Áreas de cortante. (3.41)
$B_d$	( $kN \cdot m^2$ ) Bimomento de distorsión. (3.165)
$B_w$	( $kN \cdot m^2$ ) Bimomento de torsión no uniforme. (3.109)
$B_{wyo}$	( $kN \cdot m^2$ ) Bimomento de cortante. (5.2)
$D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}$	( $m^2$ ) Áreas de cortante. (3.45)
$D_{t_d.t_d}$	( $m^4$ ) Rigidez de distorsión uniforme. (3.131)
$D_{t_a.t_d}$	( $m^4$ ) Rigidez cruzada de torsión y distorsión uniformes. (4.15)
$E$	( $kN/m^2$ ) Módulo de elasticidad longitudinal.
$E_o$	( $kN/m^2$ ) Módulo en que se homogeneiza la sección.
$G$	( $kN/m^2$ ) Módulo de elasticidad transversal.

<b>Símbolo</b>	<b>Unidades / Significado / Ecuación</b>
$G_o$	$(kN/m^2)$ Módulo en que se homogeneiza la sección.
$h_a$	$(m)$ Distancia de una pared al centro de esfuerzos cortantes. (3.49)
$h_b$	$(m)$ Distancia de una pared a un centro de giro cualquiera.
$I_a$	$(m^6)$ Inercia de alabeo de torsión. (3.105)
$I_d$	$(m^6)$ Inercia de alabeo de distorsión. (3.162)
$I_t$	$(m^4)$ Inercia de torsión uniforme. (3.77)
$I_x, I_y, I_{xy}$	$(m^4)$ Inercias de flexión. (3.12)
$I_{w_a.w_d}$	$(m^6)$ Inercia cruzada de alabeos de torsión y distorsión. (4.12)
$K_d$	$(m^2)$ Rigidez transversal de distorsión. (3.141)
$L$	$(m)$ Longitud de una pared. Luz de un vano de una viga.
$L_i$	$(m)$ Longitud de una pared de una sección.
$L_d$	$(m)$ Longitud característica de distorsión. (8.1)
$L_t$	$(m)$ Longitud característica de torsión. (8.1)
$m_d$	$(kN \cdot m/m)$ Carga distorsora. (3.143)
$M_d$	$(kN \cdot m)$ Momento distorsor. (4.31)
$M_{ds}$	$(kN \cdot m/m)$ Momento transversal de distorsión. (3.139)
$M_{du}$	$(kN \cdot m)$ Momento distorsor uniforme. (3.130)
$M_{dw}$	$(kN \cdot m)$ Momento distorsor no uniforme. (3.161)
$m_t$	$(kN \cdot m/m)$ Carga torsora. (3.83)
$m_x, m_y$	$(kN \cdot m/m)$ Carga flectora.
$M_x, M_y$	$(kN \cdot m)$ Esfuerzo flector alrededor del eje correspondiente. (4.28)
$M_z$	$(kN \cdot m)$ Momento torsor. (4.29)
$M_{zu}$	$(kN \cdot m)$ Momento torsor uniforme. (3.76)
$M_{zw}$	$(kN \cdot m)$ Momento torsor no uniforme. (3.111)
$N_{ds}$	$(kN/m)$ Axil transversal de distorsión. (3.138)
$N_i$	$(-)$ Función de forma.
$n_x, n_y$	$(-)$ Vector unitario perpendicular a una pared.
$N_z$	$(kN)$ Axil de una sección. (4.23)
$p_x, p_y, p_z$	$(kN/m)$ Carga repartida según el eje correspondiente.
$P_i$	$(-)$ Función de forma.
$Q_{ds}$	$(kN/m)$ Cortante transversal de distorsión. (3.135)
$Q_x, Q_y$	$(kN)$ Esfuerzo cortante. (4.24) (4.25)
$s$	$(m)$ Coordenada a lo largo de una pared.
$S_a$	$(m^4)$ Tensión tangencial por torsión no uniforme. (3.108)
$S_d$	$(m^4)$ Tensión tangencial por distorsión no uniforme. (3.164)
$S_x, S_y$	$(m^3)$ Momento estático. (B.1)
$t, t_i$	$(m)$ Espesor de una pared de una sección.
$t_a$	$(m)$ Tensión tangencial por torsión uniforme. (3.79)
$t_d$	$(m)$ Tensión tangencial por distorsión uniforme. (3.133)
$t_x, t_y$	$(-)$ Vector unitario con la dirección de una pared.
$U$	$(kN \cdot m)$ Energía de deformación.
$U_\epsilon$	$(kN \cdot m)$ Energía de deformación por tensiones normales. (4.11)
$U_\gamma$	$(kN \cdot m)$ Energía de deformación por tensiones tangenciales. (4.14)
$U_{K_d}$	$(kN \cdot m)$ Energía por deformación transversal de distorsión. (4.13)

APÉNDICE A. TABLA DE SÍMBOLOS

---

<b>Símbolo</b>	<b>Unidades / Significado / Ecuación</b>
$u_{dx}, u_{dy}$	( $m$ ) Movimientos de distorsión en ejes globales.
$u_{ds}, u_{dn}$	( $m$ ) Movimientos de distorsión en ejes locales.
$u_x, u_y, u_z$	( $m$ ) Movimientos de conjunto de la sección en ejes globales.
$V$	( $kN \cdot m$ ) Energía potencial de las acciones exteriores.
$v_s$	( $m$ ) Movimiento en dirección longitudinal de una pared.
$v_x, v_y, v_z$	( $m$ ) Movimientos de un punto de la sección en ejes globales.
$W$	( $kN \cdot m$ ) Trabajo de acciones exteriores.
$w_a$	( $m^2$ ) Función de alabeo de torsión uniforme. (3.47)
$w_{at}$	( $m^4$ ) Función de alabeo de torsión no uniforme. (3.85)
$w_{a4}$	( $m^6$ ) Función de alabeo adicional de torsión. (7.1)
$w_d$	( $m^2$ ) Función de alabeo de distorsión uniforme. (3.116)
$w_{dt}$	( $m^4$ ) Función de alabeo de distorsión no uniforme. (3.144)
$w_{d4}$	( $m^6$ ) Función de alabeo adicional de distorsión. (7.3)
$w_x, w_y$	( $1/m$ ) Funciones de alabeo de cortante. (3.37) (3.20)
$w_{xo}, w_{yo}$	( $1/m$ ) Funciones ortogonalizadas de alabeo de cortante. (4.2)
$x_a, y_a$	( $m$ ) Coordenadas del centro de cortantes o de giro. (3.67) (3.68)
$x_b, y_b$	( $m$ ) Coordenadas de un centro de giro cualquiera.
$x_c, y_c$	( $m$ ) Coordenadas del centro de gravedad.
$x_i, y_i$	( $m$ ) Coordenadas de un nudo.



## Apéndice B

# MODOS RESISTENTES: FUNCIONES DE FORMA

### B.1. OBTENCIÓN DE LAS FUNCIONES DE FORMA

En este apéndice se incluye la deducción de las funciones de forma  $N_i(\xi)$  necesarias en el cálculo de los modos resistentes de las secciones de paredes delgadas. La forma genérica de la matriz de rigidez en la que son utilizadas es la siguiente, donde  $C$  es una constante y se indica con el símbolo ( $'$ ) la derivación respecto de la coordenada  $\xi$ :

$$[N'_i] = \left[ \frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi}, \dots \right]$$

$$[K] = C \int_{-1}^{+1} [N'_i]^t [N'_i] d\xi$$

Tomando como grados de libertad los valores de la función buscada en los extremos de un elemento de dos nudos, las funciones de forma son polinomios lineales, siendo sus ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \\ N_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} \end{aligned} \right\}$$

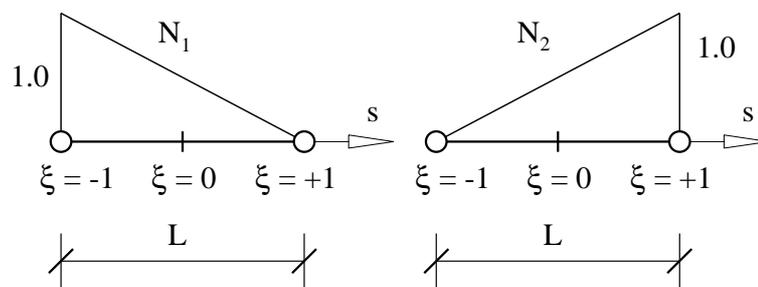


Figura B.1: Funciones de forma  $N_1$  a  $N_2$ .

Si se quiere ampliar el número de grados de libertad del elemento, al siguiente le correspondería una función de forma  $N_3(\xi)$  que sería un polinomio cuadrático. Si además se quiere que este grado de libertad quede desacoplado en la matriz de rigidez de los grados de libertad nodales, hay que imponer la condición de que la integral del producto de las derivadas de las funciones de forma sea nulo.

Para la función de forma  $N_3(\xi)$ , que será un polinomio cuadrático, y por tanto con tres parámetros, hay que imponer las siguientes condiciones: valores nulos en los extremos, y función ortogonal respecto  $N_1$  y  $N_2$ .

$$N_3(\xi) = c_{30} + c_{31} \xi + c_{32} \xi^2$$

$$\left. \begin{aligned} N_3(-1) &= 0 \\ N_3(+1) &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_1' N_3' d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_2' N_3' d\xi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Operando, queda el sistema:

$$\left. \begin{aligned} c_{30} - c_{31} + c_{32} &= 0 \\ c_{30} + c_{31} + c_{32} &= 0 \\ c_{31} &= 0 \\ c_{31} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Como se cumple que ( $N_1' = -N_2'$ ), es por lo que las dos últimas expresiones integrales han proporcionado la misma ecuación. Queda un sistema indeterminado, que para que sea resoluble hay que imponer una condición adicional. Se elige:

$$N_3(0) = 1$$

Que proporciona la ecuación adicional:

$$c_{30} = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, la función de forma  $N_3(\xi)$  queda como:

$$N_3(\xi) = 1 - \xi^2$$

Las siguientes tres funciones de forma de la familia, son polinomios de grado tres, cuatro y cinco, siendo sus expresiones genéricas y las condiciones para obtenerlas:

$$\left. \begin{aligned} N_4(\xi) &= c_{40} + c_{41} \xi + c_{42} \xi^2 + c_{43} \xi^3 \\ N_5(\xi) &= c_{50} + c_{51} \xi + c_{52} \xi^2 + c_{53} \xi^3 + c_{54} \xi^4 \\ N_6(\xi) &= c_{60} + c_{61} \xi + c_{62} \xi^2 + c_{63} \xi^3 + c_{64} \xi^4 + c_{65} \xi^5 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N_4(-1) &= 0 \\ N_4(+1) &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_1' N_4' d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_3' N_4' d\xi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N_5(-1) &= 0 \\ N_5(+1) &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_1' N_5' d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_3' N_5' d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_4' N_5' d\xi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N_6(-1) &= 0 \\ N_6(+1) &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_1' N_6' d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_3' N_6' d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_4' N_6' d\xi &= 0 \\ \int_{-1}^{+1} N_5' N_6' d\xi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Igual que para la función  $N_3$ , para estas tres nuevas funciones de forma, quedan sistemas indeterminados, ya que cualquier función que las cumpla multiplicada por una constante, también cumple todas las ecuaciones. Se ha elegido la constante indeterminada de forma que las funciones queden con una expresión sencilla, obteniéndose las funciones de forma siguientes:

$$\left. \begin{aligned} N_4(\xi) &= \xi (1 - \xi^2) \\ N_5(\xi) &= (1 - \xi^2) \left( \frac{1}{4} - \xi^2 \right) \\ N_6(\xi) &= \xi (1 - \xi^2) \left( \frac{1}{4} - \xi^2 \right) \end{aligned} \right\}$$

Las funciones de forma  $N_4(\xi)$  a  $N_6(\xi)$  se representan en la siguiente figura (B.2):

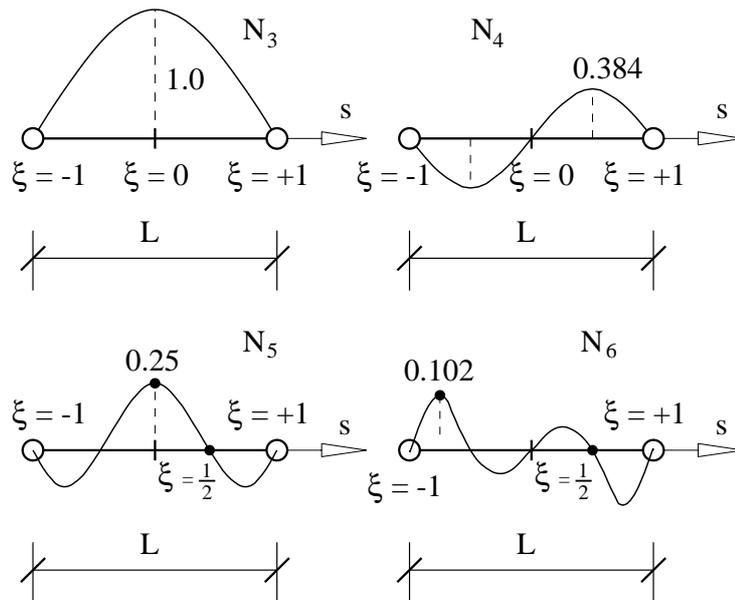


Figura B.2: Funciones de forma  $N_3$  a  $N_6$ .

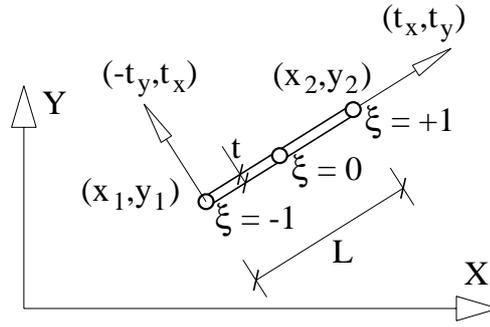


Figura B.3: Elemento de una sección de paredes delgadas.

## B.2. INTEGRALES DE LAS FUNCIONES DE FORMA

Una vez obtenida la función de alabeo de un modo resistente, es necesario obtener mediante integración diversas características mecánicas. En este apartado, para un elemento de espesor  $t$ , longitud  $L$  entre dos nudos de coordenadas  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , con dirección dada por el vector unitario  $(t_x, t_y)$ , para una función de alabeo  $w$  definida en función de seis grados de libertad  $w_i$  a través de las funciones de forma  $N_1$  a  $N_6$ , las integrales exactas para distintas propiedades son las siguientes:

$$w = [N_i] \{w_i\}$$

$$\int_{\mathbf{A}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{A} = \int_{-1}^1 [N_i] \{w_i\} \frac{t \cdot L}{2} d\xi = [M_1] \{w_i\} \frac{t \cdot L}{2}$$

$$[M_1] = \left[ 1, 1, \frac{4}{3}, 0, \frac{1}{15}, 0 \right]$$

$$\int_{\mathbf{A}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{y} \cdot d\mathbf{A} = \int_A [N_i] \{w_i\} [N_1, N_2] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} dA = \{w_i\}^t [M_2] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \frac{t \cdot L}{2}$$

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ -2/15 & 2/15 \\ 1/30 & 1/30 \\ 1/42 & -1/42 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\mathbf{A}} \frac{d\mathbf{w}}{ds} d\mathbf{A} = \int_{-1}^1 \frac{dw}{d\xi} t d\xi = \int_{-1}^1 [N'_i] \{w_i\} t d\xi = [M_3] \{w_i\} \cdot t$$

$$[M_3] = [-1, 1, 0, 0, 0, 0]$$

$$\int_{\mathbf{A}} \left( \frac{d\mathbf{w}}{ds} \right)^2 d\mathbf{A} = \int_{-1}^1 \left( \frac{dw}{d\xi} \right)^2 \frac{2 \cdot t}{L} d\xi =$$

$$= \int_{-1}^1 \{w_i\}^t [N'_i]^t [N'_i] \{w_i\} \frac{2 \cdot t}{L} d\xi = \{w_i\}^t [M_4] \{w_i\} \frac{2 \cdot t}{L}$$

$$[M_4] = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8/3 & 0 & 2/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/5 & 0 & -2/7 \\ 0 & 0 & 2/15 & 0 & 31/42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/7 & 0 & 43/126 \end{array} \right]$$

$$\int_{\mathbf{A}} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{w}_b \cdot d\mathbf{A} = \int_{-1}^1 \{w_{ai}\}^t [N_i]^t [N_i] \{w_{bi}\} \frac{t \cdot L}{2} d\xi = \{w_{ai}\}^t [M_5] \{w_{bi}\} \frac{t \cdot L}{2}$$

$$[M_5] = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 2/3 & 1/3 & 2/3 & -2/15 & 1/30 & 1/42 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/15 & 1/30 & -1/42 \\ \hline 2/3 & 2/3 & 16/5 & 0 & 4/35 & 0 \\ -2/15 & 2/15 & 0 & 16/105 & 0 & -4/315 \\ 1/30 & 1/30 & 4/35 & 0 & 13/315 & 0 \\ 1/42 & -1/42 & 0 & -4/315 & 0 & 5/693 \end{array} \right]$$

Otras integrales que es necesario hacer sobre la geometría de una pared de la sección son las siguientes:

Área:

$$A = t \cdot L$$

Momentos estáticos:

$$S_x = \int_A y dA = \frac{y_1 + y_2}{2} t L$$

$$S_y = \int_A x dA = \frac{x_1 + x_2}{2} t L$$

Inercias:

$$I_x = \int_A y^2 dA = (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) \frac{t L}{3}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \frac{t L}{3}$$

$$I_{xy} = \int_A x y dA = \left( x_1 y_1 + \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{2} + x_2 y_2 \right) \frac{t L}{3}$$



## Apéndice C

# EXPRESIONES DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS MODOS

A lo largo de los desarrollos teóricos de los modos resistentes aparecen diferentes expresiones para una misma característica mecánica. En este apéndice, además de mostrar las diferentes expresiones que han aparecido de la misma característica mecánica, se demuestra la igualdad entre ellas en los casos en que no se haya hecho anteriormente.

**Inercia de torsión uniforme  $I_t$ .** Identidad ya demostrada en el apartado 3.9.

$$t_a = (w'_a - h_a)$$

$$I_t = \int_A \frac{G}{G_o} t_a^2 dA = - \int_A \frac{G}{G_o} t_a h_a dA \quad (C.1)$$

**Inercia de alabeo de torsión  $I_a$ .** Identidad ya demostrada en el apartado 3.10.

$$I_a = \int_A \frac{E}{E_o} \cdot w_a^2 \cdot dA = \int_A \frac{G}{E_o} w'_{at} h_a dA \quad (C.2)$$

**Inercia de alabeo de distorsión  $I_d$ .**

$$I_d = \int_A \frac{E}{E_o} (w_d)^2 dA = - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} u_{ds} dA \quad (C.3)$$

Teniendo en cuenta la definición de  $t_d = (u_{ds} - w'_d)$  la segunda integral se puede escribir como:

$$- \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} u_{ds} dA = - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} (w'_d + t_d) dA =$$

$$= - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} w'_d dA - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} t_d dA =$$

Por condición de contorno de tensiones tangenciales nulas en las paredes con extremo libre, en ellas se cumple ( $t_d = 0$ ), por lo que la última integral debe de hacerse sólo en los contornos cerrados. Como en un contorno cerrado  $t_d$  es constante, queda la integral en un contorno cerrado de la derivada  $w'_{dt}$ , la cual se anula. Luego sólo queda la primera integral.

$$= - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} w'_d dA =$$

En contornos multicelulares la tensión tangencial ( $\tau_{sz} = G \cdot t_d$ ) se descompone en suma de un valor constante que recorre cada circuito cerrado, siendo en las paredes comunes la suma con los signos adecuados de los valores en los circuitos adyacentes. La integral sobre todos los contornos cerrados se puede descomponer como suma de la de cada contorno, siendo en cada contorno la integral de un valor constante por la derivada de una función, por lo que se anula la integral de cada contorno, y por tanto la integral sobre todos ellos.

En la última expresión, integrando por partes y teniendo en cuenta la relación (3.156) queda:

$$= - \left. \frac{G}{E_o} w'_{dt} \cdot w_d \cdot t \right]_0^L + \int_A \frac{E}{E_o} w_d^2 \cdot dA = 0 + I_d$$

En secciones abiertas por condición de contorno de tensiones tangenciales nulas se cumple ( $w'_{dt} = 0$ ) en los extremos, por lo que el primer término se anula, y en secciones cerradas por coincidir el inicio con el final también se anula. Luego sólo queda el segundo término, que es la inercia de alabeo de distorsión, por lo que queda demostrada la identidad que se buscaba.

**Inercia de alabeo cruzada entre torsión-distorsión**  $I_{w_a \cdot w_d}$ . (Identidad 1).

$$\boxed{I_{w_a \cdot w_d} = \int_A \frac{E}{E_o} w_a w_d dA = \int_A \frac{G}{E_o} w'_{at} u_{ds} dA} \quad (C.4)$$

Partiendo de la segunda integral, la demostración sigue los mismos pasos que la anterior demostración realizada para  $I_d$ , con la diferencia de aparecer  $w'_{at}$  en vez de  $w'_{dt}$ , y que al integrar por partes la relación a utilizar es la (3.97).

**Inercia de alabeo cruzada entre torsión-distorsión**  $I_{w_a \cdot w_d}$ . (Identidad 2).

$$\boxed{I_{w_a \cdot w_d} = \int_A \frac{E}{E_o} w_a w_d dA = - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} h_a dA} \quad (C.5)$$

En la segunda integral teniendo en cuenta la relación  $t_a = (w'_a - h_a)$  queda:

$$\begin{aligned} - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} h_a dA &= - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} (w'_a - t_a) dA = \\ &= - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} w'_a dA + \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} t_a dA = \end{aligned}$$

Usando razonamientos semejantes a los otros ya expuestos, por anularse  $w'_{dt}$  en las paredes con extremos libres, y por poder descomponerse  $t_a$  como suma de valores constantes en cada circuito cerrado, se concluye que la última integral es nula. Integrando por partes en la penúltima integral y teniendo en cuenta la relación (3.156) queda:

$$= - \int_A \frac{G}{E_o} w'_{dt} w'_a dA = - \frac{G}{E_o} w'_{dt} \cdot w_a \cdot t \Big|_0^L + \int_A \frac{E}{E_o} w_d \cdot w_a \cdot dA = 0 + I_{w_a \cdot w_d}$$

**Rigidez de distorsión uniforme**  $D_{t_d \cdot t_d}$ .

$$\boxed{D_{t_d \cdot t_d} = \int_A \frac{G}{G_o} (t_d)^2 dA = \int_A \frac{G}{G_o} t_d u_{ds} dA} \quad (C.6)$$

En la segunda integral, sumando y restando  $w'_d$  al segundo término, y teniendo en cuenta que  $t_d = (u_{ds} - w'_d)$  queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{G}{G_o} t_d u_{ds} dA &= \int_A \frac{G}{G_o} t_d (u_{ds} - w'_d + w'_d) dA = \\ &= \int_A \frac{G}{G_o} t_d^2 dA + \int_A \frac{G}{G_o} t_d w'_d dA = \end{aligned}$$

La segunda integral es nula por los mismos razonamientos ya utilizados, por ser ( $t_d = 0$ ) en las paredes con extremos libres, y en las partes cerradas poder descomponerse  $t_d$  en suma de valores constantes dentro de cada circuito. Luego queda:

$$= D_{t_d \cdot t_d} + 0 = D_{t_d \cdot t_d}$$

**Rigidez cruzada entre torsión-distorsión**  $D_{t_d \cdot t_a}$ . (Identidad 1).

$$\boxed{D_{t_d \cdot t_a} = \int_A \frac{G}{G_o} t_a t_d dA = \int_A \frac{G}{G_o} t_a u_{ds} dA} \quad (C.7)$$

En la segunda integral sustituyendo  $t_d = (u_{ds} - w'_d)$  queda:

$$\begin{aligned} \int_A \frac{G}{G_o} t_a u_{ds} dA &= \int_A \frac{G}{G_o} t_a (t_d + w'_d) dA = \\ &= \int_A \frac{G}{G_o} t_a t_d dA + \int_A \frac{G}{G_o} t_a w'_d dA = \end{aligned}$$

La última integral se anula por ser ( $t_a = 0$ ) en paredes con extremos libres, y en las paredes de circuitos cerrados por poder  $t_a$  descomponerse en valores constantes dentro de cada circuito cerrado. Luego:

$$= D_{t_d \cdot t_a} + 0 = D_{t_d \cdot t_a}$$

**Rigidez cruzada entre torsión-distorsión**  $D_{t_d.t_a}$ . (Identidad 2).

$$\boxed{D_{t_d.t_a} = \int_A \frac{G}{G_o} t_a t_d dA = - \int_A \frac{G}{G_o} t_d h_a dA} \quad (C.8)$$

En la segunda integral sustituyendo  $t_a = (w'_a - h_a)$  queda:

$$\begin{aligned} - \int_A \frac{G}{G_o} t_d h_a dA &= - \int_A \frac{G}{G_o} t_d (w'_a - t_a) dA = \\ &= - \int_A \frac{G}{G_o} t_d w'_a dA + \int_A \frac{G}{G_o} t_d t_a dA = \end{aligned}$$

Con los mismos razonamientos de demostraciones anteriores, la penúltima integral se anula, por lo que queda:

$$= 0 + D_{t_d.t_a} = D_{t_d.t_a}$$

**Esfuerzo cortante en torsión uniforme**  $D_{t_a.x}$  y  $D_{t_a.y}$

$$\boxed{D_{t_a.x} = \int_A \frac{G}{G_o} (w'_a - h_a) t_x dA = 0} \quad (C.9)$$

$$\boxed{D_{t_a.y} = \int_A \frac{G}{G_o} (w'_a - h_a) t_y dA = 0} \quad (C.10)$$

Si en toda la sección se integra la proyección según una dirección de las tensiones tangenciales se obtiene el esfuerzo cortante en dicha dirección. Siendo  $(t_x, t_y) = (dx/ds, dy/ds)$  el vector director de una pared, los cortantes vienen dados por:

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_A \tau_{sz} \cdot t_x \cdot dA \\ Q_y &= \int_A \tau_{sz} \cdot t_y \cdot dA \end{aligned}$$

Para el caso de torsión uniforme, teniendo en cuenta la expresión de las tensiones tangenciales (3.54) el cortante  $Q_y$  vendría dado por:

$$Q_y = \int_A G \cdot (w'_a - h_a) \cdot \theta'_z \cdot t_y \cdot dA = G_o \left( \int_A \frac{G}{G_o} (w'_a - h_a) t_y dA \right) \cdot \theta'_z = G_o \cdot D_{t_a.y} \cdot \theta'_z$$

Su valor en teoría tiene que ser nulo. Para demostrarlo, primero se integra por partes en la expresión de  $D_{t_a.y}$ , obteniéndose:

$$D_{t_a.y} = \int_A \frac{G}{G_o} (w'_a - h_a) t_y dA = \frac{G}{G_o} t_a y \Big|_0^L - \int_A \frac{G}{G_o} (w''_a - h''_a) y dA$$

Tanto en secciones cerradas como abiertas el primer término se anula. El segundo término se anula ya que por la ecuación (3.69) la segunda derivada de la función de alabeo  $w_a$  es nula, y que por estar considerando paredes de directriz recta, la distancia al centro

de giro es constante, y por lo tanto ( $h'_a = 0$ ). Luego queda demostrado que ( $D_{t_a.y} = 0$ ) y por consiguiente que ( $Q_y = 0$ ) en torsión uniforme. Procediendo de la misma forma se demuestra lo mismo para la otra dirección.

**Esfuerzo cortante en distorsión uniforme  $D_{t_d.x}$  y  $D_{t_d.y}$**

$$D_{t_d.x} = \int_A \frac{G}{G_o} (u_{ds} - w'_d) t_x dA = 0 \quad (C.11)$$

$$D_{t_d.y} = \int_A \frac{G}{G_o} (u_{ds} - w'_d) t_y dA = 0 \quad (C.12)$$

La demostración es idéntica a la anterior. En este caso, hay que tener en cuenta la ecuación (3.122) por la que es nula la derivada segunda de la función de alabeo  $w_d$ , y que por despreciarse las deformaciones de axil en el estudio de la sección como pórtico con las fuerzas de distorsión, el movimiento en la dirección de la pared  $u_{ds}$  es constante dentro de cada pared, luego su derivada es nula.

**Esfuerzo cortante en torsión no uniforme  $D_{w_{at}.x}$  y  $D_{w_{at}.y}$**

$$D_{w_{at}.x} = \int_A \frac{G}{G_o} w'_{at} t_x dA = 0 \quad (C.13)$$

$$D_{w_{at}.y} = \int_A \frac{G}{G_o} w'_{at} t_y dA = 0 \quad (C.14)$$

Para el caso de torsión no uniforme, teniendo en cuenta la expresión de las tensiones tangenciales (3.88) el cortante  $Q_y$  será:

$$Q_y = \int_A G \cdot w'_{at} \cdot \theta'''_z \cdot t_y \cdot dA = G_o \left( \int_A \frac{G}{G_o} w'_{at} t_y dA \right) \cdot \theta'''_z = G_o \cdot D_{w_{at}.y} \cdot \theta'''_z$$

Integrando por partes en la expresión de  $D_{w_{at}.y}$ , y teniendo en cuenta la relación (3.97) entre  $w''_{at}$  y  $w_a$  queda:

$$\begin{aligned} D_{w_{at}.y} &= \int_A \frac{G}{G_o} w'_{at} t_y dA = \left[ \frac{G}{G_o} w'_{at} y \right]_0^L - \int_A \frac{G}{G_o} w''_{at} y dA = \\ &= \left[ \frac{G}{G_o} w'_{at} y \right]_0^L + \frac{E_o}{G_o} \int_A \frac{E}{E_o} w_a y dA \end{aligned}$$

El primer término se anula tanto en secciones abiertas como cerradas, y el segundo término también se anula por la ortogonalización de la función de alabeo  $w_a$  respecto de la flexión ( $I_{w_a.y} = 0$ ), por lo que queda demostrado que:

$$D_{w_{at}.y} = 0$$

Y de idéntica forma se demuestra que:

$$D_{w_{at}.x} = 0$$

---

Resultando por tanto ( $Q_y = 0$ ) y ( $Q_x = 0$ ) en torsión no uniforme.

**Esfuerzo cortante en distorsión no uniforme**  $D_{w_{dt}.x}$  y  $D_{w_{dt}.y}$

$$D_{w_{dt}.x} = \int_A \frac{G}{G_o} w'_{dt} t_x dA = 0 \quad (C.15)$$

$$D_{w_{dt}.y} = \int_A \frac{G}{G_o} w'_{dt} t_y dA = 0 \quad (C.16)$$

La demostración sigue los mismos pasos que la anterior. En este caso hay que tener en cuenta la relación (3.156) entre  $w''_{dt}$  y  $w_d$ , y que la función de alabeo  $w_d$  se ortogonaliza respecto de la flexión ( $I_{w_d.x} = 0$ ) y ( $I_{w_d.y} = 0$ ).

**Nota:** Como comprobación práctica de todas estas identidades, se han evaluado de forma exacta todas las integrales para la sección del ejemplo del apartado 6.2, verificándose perfectamente todas las identidades.

## Apéndice D

# EJEMPLO DE OBTENCIÓN DE MODOS RESISTENTES

### D.1. INTRODUCCIÓN

En este apéndice se aborda a modo de ejemplo el cálculo de forma analítica de los modos resistentes de una sección con la metodología de cálculo expuesta en el capítulo 3 . Este apéndice puede saltarse en una primera lectura, por ser el objeto del mismo el mejorar la comprensión del método de cálculo de los modos resistentes, y para que los resultados puedan ser utilizados en otros ejemplos.

El ejemplo consiste en una sección rectangular de paredes delgadas de canto  $h$ , ancho  $b = 2 \cdot h$  y espesor de todas las paredes  $t$ , tal como se ve en la figura (D.1). El módulo de elasticidad longitudinal  $E$  y transversal  $G$  es el mismo para todas las paredes, siendo por tanto las propiedades del material en que se homogeneiza la sección  $E_o = E$  y  $G_o = G$ .

Para calcular las características de la sección se discretiza en cuatro nudos y elementos como se puede ver en la figura (D.2). Las flechas en las paredes indican la orientación de los nudos de cada elemento, o lo que es lo mismo, definen el sentido de recorrido de la coordenada local  $s$ .

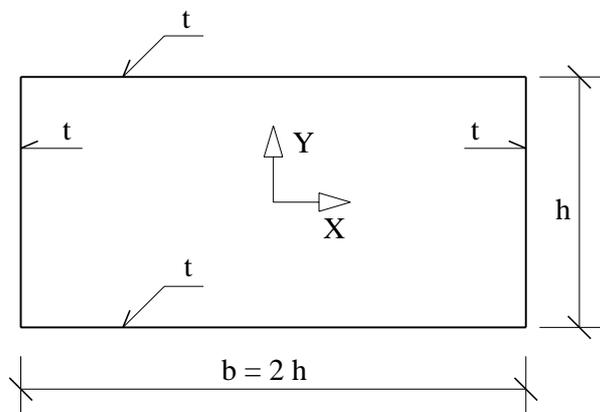


Figura D.1: Sección rectangular.

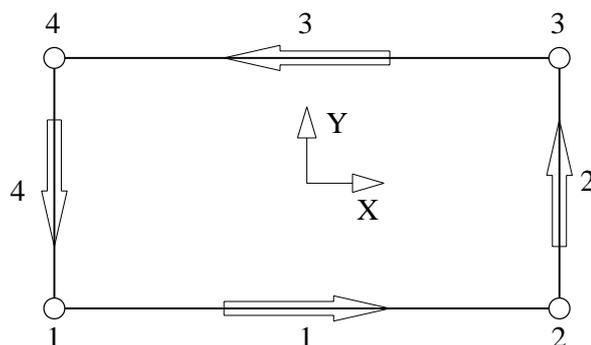


Figura D.2: Modelo de nudos y elementos.

Las coordenadas de los nodos del modelo son:

<b>n</b>	<b>x<sub>i</sub></b>	<b>y<sub>i</sub></b>
1	$-h$	$-h/2$
2	$+h$	$-h/2$
3	$+h$	$+h/2$
4	$-h$	$-h/2$

Y la conectividad de los elementos es:

<b>e</b>	<b>n<sub>1</sub></b>	<b>n<sub>2</sub></b>
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	1

## D.2. AXIL Y FLEXIÓN

Área de la sección:

$$A = 6 \cdot h \cdot t$$

En el cálculo de las inercias a flexión se desprecia la inercia de la pared respecto de su eje longitudinal, que es lo mismo que no considerar los términos en el cubo del espesor  $t^3$ .

$$I_x = \frac{7}{6} \cdot t \cdot h^3$$

$$I_y = \frac{10}{3} \cdot t \cdot h^3$$

### D.3. CORTANTE $Q_y$

Las matrices de rigidez de los elementos se obtienen con la ecuación (3.32). No considerando la parte correspondiente a las variables internas por quedar desacopladas, se obtiene:

$$[K_1] = [K_3] = \frac{G t}{2 h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [K_4] = \frac{G t}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector de fuerzas de cada elemento de acuerdo con la ecuación (3.33), son:

$$\{f_1\} = -\{f_3\} = \begin{Bmatrix} -3/7 \\ -3/7 \end{Bmatrix} \frac{G}{h}$$

$$\{f_2\} = -\{f_4\} = \begin{Bmatrix} -1/14 \\ +1/14 \end{Bmatrix} \frac{G}{h}$$

Ensamblando los elementos se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\frac{G t}{h} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{y1} \\ w_{y2} \\ w_{y3} \\ w_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \frac{G}{h}$$

Y resolviendo el sistema de ecuaciones imponiendo la condición ( $w_{y1} = 0$ ) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} w_{y1} \\ w_{y2} \\ w_{y3} \\ w_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \frac{1}{t}$$

Las variables internas de cada elemento se determinan con las ecuaciones (3.34), obteniéndose los valores:

$e$	$w_{y3}$	$w_{y4}$
1	$-3/(14 t)$	0
2	0	$1/(56 t)$
3	$+3/(14 t)$	0
4	0	$-1/(56 t)$

La constante de normalización respecto del axil se obtiene con la ecuación (3.28):

$$w_{yo} = -\frac{3 h}{6 h t} = -\frac{1}{4 t}$$

Sumando a la función de alabeo esta constante se obtienen los siguientes valores, que teniendo en cuenta los valores de las variables internas se han representado en la figura (D.3):

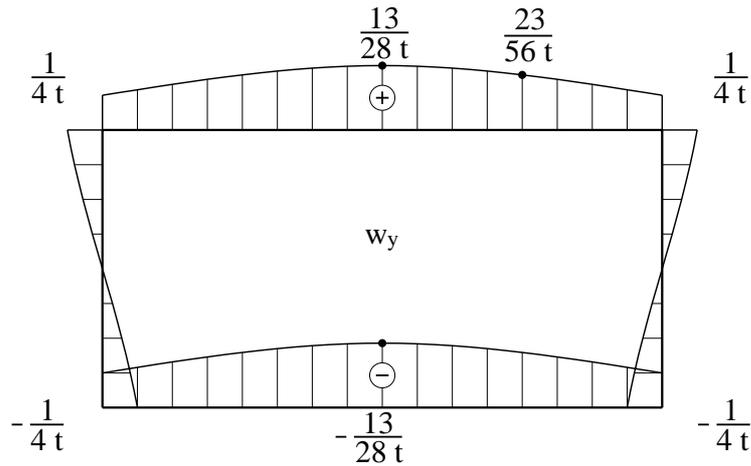


Figura D.3: Función de alabeo  $w_y$  por cortante  $Q_y$ .

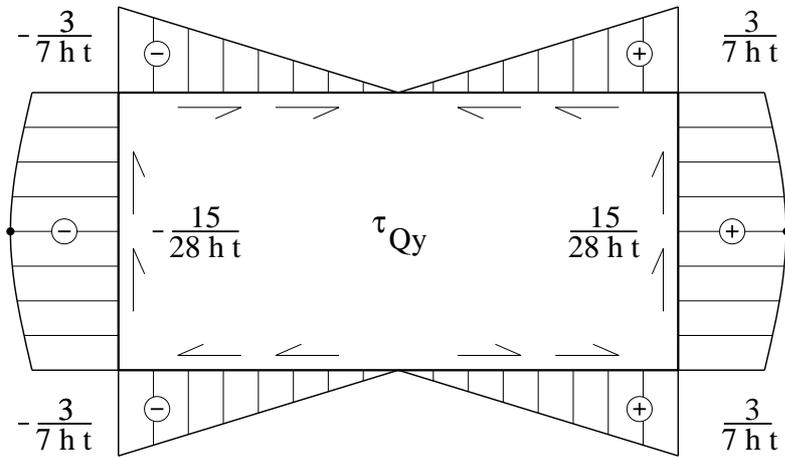


Figura D.4: Tensiones tangenciales por cortante  $Q_y$ .

$$\begin{pmatrix} w_{y1} \\ w_{y2} \\ w_{y3} \\ w_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \frac{1}{t}$$

Las tensiones tangenciales se obtienen con la ecuación (3.35). Sus valores en los extremos y centros de los elementos son los siguientes, estando representados en la figura (D.4).

$e$	$\tau(-L/2)$	$\tau(0)$	$\tau(L/2)$
1	$-3/(7 h t)$	0	$3/(7 h t)$
2	$3/(7 h t)$	$15/(28 h t)$	$3/(7 h t)$
3	$3/(7 h t)$	0	$-3/(7 h t)$
4	$-3/(7 h t)$	$-15/(28 h t)$	$-3/(7 h t)$

El área de cortante  $A_y$  obtenida por igualdad entre energía de deformación y trabajo del esfuerzo cortante de acuerdo con las ecuaciones (3.39) y (3.42) viene dada por:

$$D_{w_y \cdot w_y} = \frac{183}{245} \frac{1}{t h}$$

$$A_y = \frac{1}{D_{w_y \cdot w_y}} = \frac{245}{183} t h = 1.3388 t h \quad (\text{D.1})$$

El área de cortante  $D_{yy}$  mediante las ecuaciones (3.45) para la hipótesis de deformación transversal constante es:

$$D_{yy} = 2 t h$$

El valor de otras características mecánicas son:

$$I_{w_y \cdot w_y} = \int_A \frac{E}{E_0} w_y^2 dA = \frac{9299}{13720} \frac{h}{t}$$

$$I_{w_y \cdot y} = \int_A \frac{E}{E_0} w_y y dA = \frac{61}{70} h^2$$

$$D_{w_y \cdot w_y} = \int_A \frac{G}{G_0} \left( \frac{\partial w_y}{\partial s} \right)^2 dA = \frac{183}{245} \frac{1}{t h}$$

$$D_{w_y \cdot y} = \int_A \frac{G}{G_0} \frac{\partial w_y}{\partial s} t_y dA = 1 \quad (\text{D.2})$$

#### D.4. CORTANTE $Q_x$

Se resuelve igual que el cortante en la otra dirección. La función de alabeo  $w_x$  y las tensiones tangenciales que se obtienen están representadas en las figuras (D.5) y (D.6).

$$\begin{Bmatrix} w_{x1} \\ w_{x2} \\ w_{x3} \\ w_{x4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \frac{1}{t}$$

$e$	$w_{x3}$	$w_{x4}$
1	0	$1/(20 t)$
2	$3/(80 t)$	0
3	0	$-1/(20 t)$
4	$-3/(80 t)$	0

El área de cortante  $A_x$  obtenida por igualdad entre energía de deformación y trabajo del esfuerzo cortante de acuerdo con las ecuaciones (3.39) y (3.42) viene dada por:

$$D_{w_x \cdot w_x} = \frac{273}{1000} \frac{1}{t h}$$

$$A_x = \frac{1}{D_{w_x \cdot w_x}} = \frac{1000}{273} t h = 3.6630 t h$$

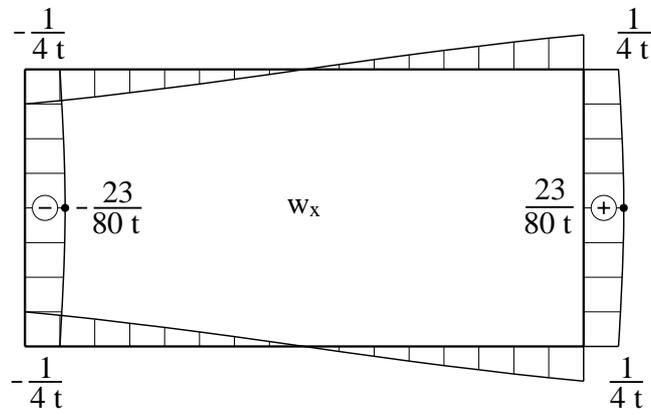


Figura D.5: Función de alabeo  $w_x$  por cortante  $Q_x$ .

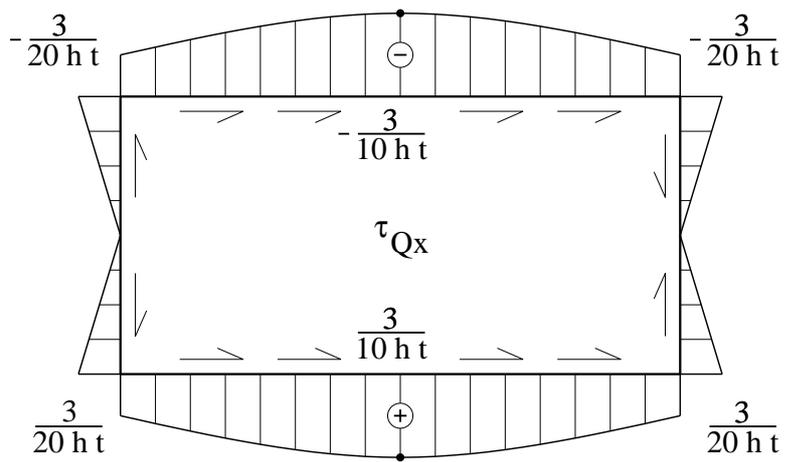


Figura D.6: Tensiones tangenciales por cortante  $Q_x$ .

El área de cortante  $D_{xx}$  mediante las ecuaciones (3.45) para la hipótesis de deformación transversal constante es:

$$D_{xx} = 4 t h$$

El área de cortante cruzada, en cualquiera de los dos casos, resulta ser nula.

$$A_{xy} = 0$$

$$D_{xy} = 0$$

## D.5. TORSIÓN UNIFORME

Las matrices de rigidez de los elementos vienen dadas por las expresiones (3.72), obteniéndose.

$$[K_1] = [K_3] = \frac{G t}{2 h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [K_4] = \frac{G t}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se elige como centro de giro un punto cualquiera, en este caso se ha elegido:

$$(x_b, y_b) = (-h, -h/2)$$

Las distancias de las paredes al centro de giro según (3.73) son:

$$\begin{aligned} h_{b1} = h_{b4} &= 0 \\ h_{b2} &= -2 h \\ h_{b3} &= -h \end{aligned}$$

Los vectores de fuerzas de cada elemento según (3.74) resultan ser:

$$\{f_1\} = \{f_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

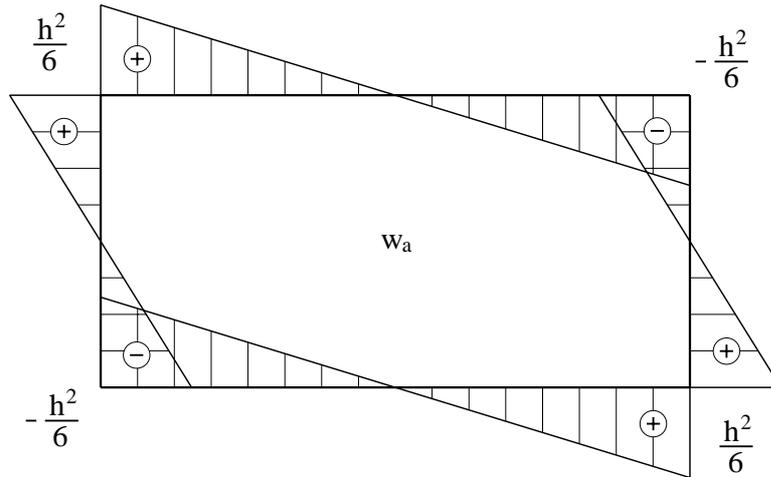
$$\{f_2\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \end{Bmatrix} h$$

$$\{f_3\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} h$$

Ensamblando los elementos se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\frac{G t}{h} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{b1} \\ w_{b2} \\ w_{b3} \\ w_{b4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} h$$

Imponiendo la condición ( $w_{b1} = 0$ ) y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:


 Figura D.7: Función de alabeo de torsión uniforme  $w_a$ .

$$\begin{Bmatrix} w_{b1} \\ w_{b2} \\ w_{b3} \\ w_{b4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 0 \\ -2/3 \end{Bmatrix} h^2$$

La constante de normalización respecto del eje se obtiene con la ecuación (3.65):

$$c = -\frac{h^3 t}{6 h t} = -\frac{h^2}{6}$$

El centro de esfuerzos cortantes según las ecuaciones (3.67) y (3.68):

$$x_a = -h - \frac{-\frac{7}{6} t h^4}{\frac{7}{6} t h^3} = -h + h = 0$$

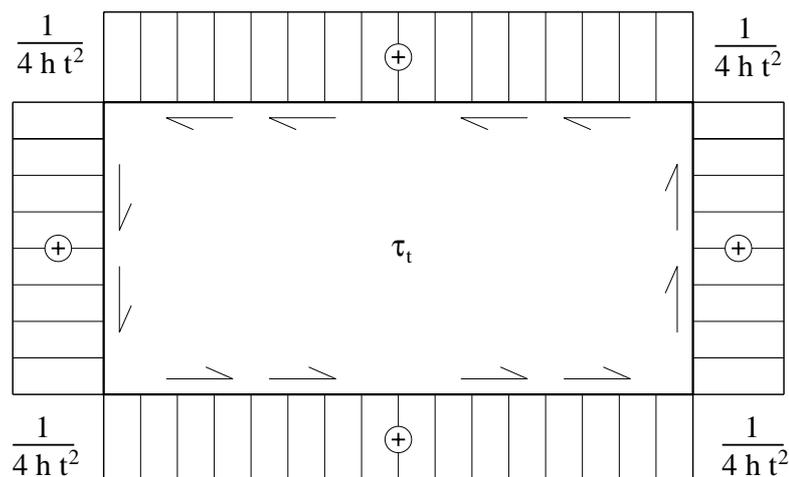
$$y_a = -\frac{h}{2} + \frac{\frac{5}{3} t h^4}{\frac{10}{6} t h^3} = -\frac{h}{2} + \frac{h}{2} = 0$$

La función de alabeo se ortogonaliza con la ecuación (3.64). La función de alabeo resultante se puede ver en la figura (D.7) siendo los valores:

$$\begin{Bmatrix} w_{a1} \\ w_{a2} \\ w_{a3} \\ w_{a4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{Bmatrix} h^2$$

La inercia a torsión  $I_t$  se obtiene con la expresión (3.77):

$$I_t = \frac{8}{3} t h^3$$


 Figura D.8: Tensiones tangenciales  $\tau_t$  por torsión uniforme.

Las tensiones tangenciales para un momento torsor uniforme unidad ( $M_{zu} = 1$ ) se obtienen con la ecuación (3.78). Se han representado en la figura (D.8). El valor es el mismo en todas las paredes, siendo el siguiente:

$$\tau_t = -\frac{-\frac{4}{6}h}{\frac{8}{3}t h^3} = \frac{1}{4 t h^2}$$

## D.6. TORSIÓN NO UNIFORME

Las matrices de rigidez de los elementos son las mismas que para el caso de torsión uniforme. El vector de fuerzas de cada elemento de acuerdo con la ecuación (3.99) son:

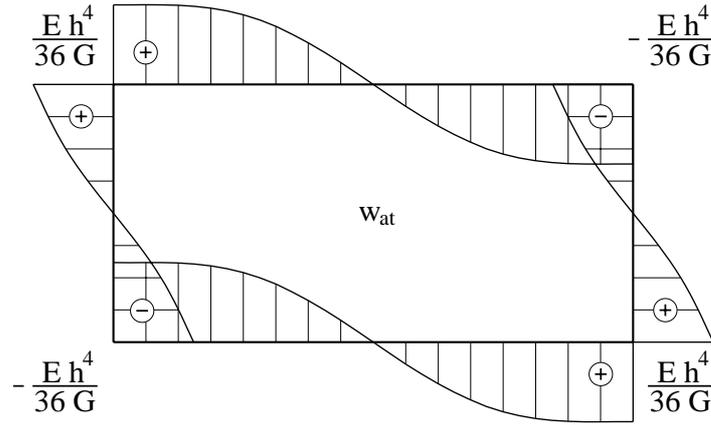
$$\{f_1\} = \{f_3\} = \begin{Bmatrix} -1/18 \\ 1/18 \end{Bmatrix} E t h^3$$

$$\{f_2\} = \{f_4\} = \begin{Bmatrix} 1/36 \\ -1/36 \end{Bmatrix} E t h^3$$

Ensamblando los elementos se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\frac{G t}{h} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{at1} \\ w_{at2} \\ w_{at3} \\ w_{at4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/12 \\ 1/12 \\ -1/12 \\ 1/12 \end{Bmatrix} E t h^3$$

Imponiendo la condición ( $w_{at1} = 0$ ) y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:


 Figura D.9: Función de alabeo  $w_{at}$  de torsión no uniforme.

$$\begin{Bmatrix} w_{at1} \\ w_{at2} \\ w_{at3} \\ w_{at4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/18 \\ 0 \\ 1/18 \end{Bmatrix} \frac{E h^4}{G}$$

Las variables internas de cada elemento se determinan con las ecuaciones (3.100), obteniéndose los valores siguientes:

$e$	$w_{at3}$	$w_{at4}$
1	0	$(E h^4)/(36 G)$
2	0	$-(E h^4)/(144 G)$
3	0	$(E h^4)/(36 G)$
4	0	$-(E h^4)/(144 G)$

La constante de normalización respecto del axil se obtiene con la ecuación (3.101):

$$w_{ato} = -\frac{E t h^5}{6 G} = -\frac{E h^4}{36 G}$$

Sumando a la función de alabeo esta constante se obtiene los siguientes valores, que teniendo en cuenta los valores de las variables internas se han representado en la figura (D.9):

$$\begin{Bmatrix} w_{at1} \\ w_{at2} \\ w_{at3} \\ w_{at4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/36 \\ 1/36 \\ -1/36 \\ 1/36 \end{Bmatrix} \frac{E h^4}{G}$$

El módulo de alabeo  $I_a$  obtenido con la ecuación (3.104) es <sup>1</sup>:

$$I_a = \frac{1}{18} t h^5$$

<sup>1</sup>Coincide con el resultado para este mismo ejemplo resuelto mediante otro método por A. Samartín [68] apéndice A.

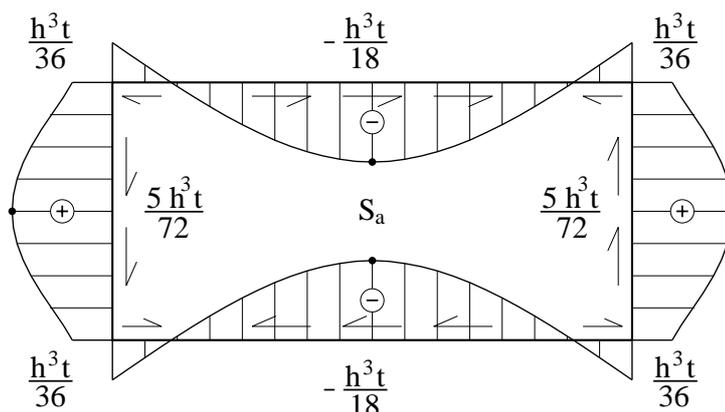


Figura D.10: Tensiones tangenciales  $S_a$  por torsión no uniforme.  $\tau_{sz} = (M_{zw} \cdot S_a)/(I_a \cdot t)$ .

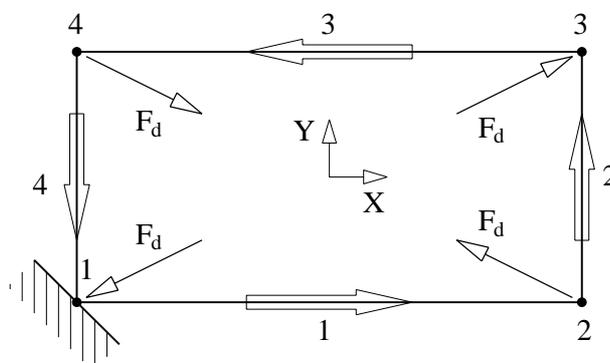


Figura D.11: Modelo de pórtico para distorsión.

Las tensiones tangenciales se obtienen con la ecuación (3.108), sus valores en los extremos y centro de los elementos son los siguientes, estando representados en la figura (D.10).

$e$	$S_a(-L/2)$	$S_a(0)$	$S_a(L/2)$
1	$h^3 t/36$	$-h^3 t/18$	$h^3 t/36$
2	$h^3 t/36$	$5 h^3 t/72$	$h^3 t/36$
3	$h^3 t/36$	$-h^3 t/18$	$h^3 t/36$
4	$h^3 t/36$	$5 h^3 t/72$	$h^3 t/36$

## D.7. DISTORSIÓN UNIFORME

A la sección considerada como una estructura reticulada plana, se le aplica un sistema de fuerzas autoequilibrado que produce la distorsión de la sección tal como se ve en la figura (D.11). Como la estructura es un mecanismo frente a movimientos de sólido rígido es necesario empotrar un nudo cualquiera del modelo. Calculando este pórtico despreciando las deformaciones por axil de las barras, se obtiene la solución siguiente:

$$I = \frac{t^3}{12}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_{z2} = \theta_{z3} = \theta_{z4} &= 0 \\ u_{x3} = u_{x4} &= \frac{h^3}{6 E I} \frac{F_d}{\sqrt{5}} \\ u_{y2} = u_{y3} &= \frac{2 h^3}{3 E I} \frac{F_d}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\}$$

Para que el movimiento máximo sea la unidad se elige:

$$F_d = \frac{3 E I}{2 h^3} \sqrt{5}$$

Quedando:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{z2} = \theta_{z3} = \theta_{z4} &= 0 \\ u_{x3} = u_{x4} &= \frac{1}{4} \\ u_{y2} = u_{y3} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Las matrices de rigidez de los elementos son las mismas que para el caso de torsión uniforme.

$$[K_1] = [K_3] = \frac{G t}{2 h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = [K_4] = \frac{G t}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Los movimientos locales en dirección de los elementos son constantes dentro de cada uno ( $u_{ds1} = u_{ds2}$ ), y de valor:

$e$	$u_{ds}$
1	0
2	1
3	-1/4
4	0

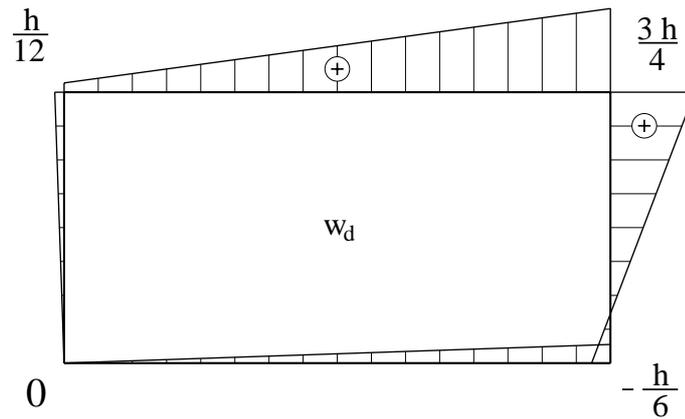
El vector de fuerzas de cada elemento de acuerdo con la ecuación (3.124) son:

$$\{f_1\} = \{f_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_2\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} G t$$

$$\{f_3\} = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{Bmatrix} G t$$

Ensamblando los elementos se obtiene el sistema de ecuaciones:


 Figura D.12: Función de alabeo de distorsión  $w_d$ . Solución 1.

$$\frac{G t}{h} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{d1} \\ w_{d2} \\ w_{d3} \\ w_{d4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5/4 \\ -1/4 \end{Bmatrix} G t$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones imponiendo la condición ( $w_{d1} = 0$ ) se obtiene la siguiente solución, que se ha representado en la figura (D.12):

$$\begin{Bmatrix} w_{d1} \\ w_{d2} \\ w_{d3} \\ w_{d4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1/6 \\ 3/4 \\ 1/12 \end{Bmatrix} h$$

La constante de normalización respecto del axil se obtiene con la ecuación (3.125):

$$w_{wdo} = -\frac{1 t h^2}{6 h t} = -\frac{h}{6}$$

Sumando a la función de alabeo esta constante, se obtienen los siguientes valores, que se han representado en la figura (D.13):

$$\begin{Bmatrix} w_{d1} \\ w_{d2} \\ w_{d3} \\ w_{d4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1/6 \\ -1/3 \\ 7/12 \\ -1/12 \end{Bmatrix} h$$

Para ortogonalizar la función de alabeo  $w_d$  respecto de la flexión por el momento  $M_x$  se aplican las ecuaciones (3.126) utilizando la función de alabeo anterior. Obteniéndose la siguiente función de alabeo representada en la figura (D.14).

$$C_y = -\frac{7 t h^3}{12} = -\frac{1}{2}$$

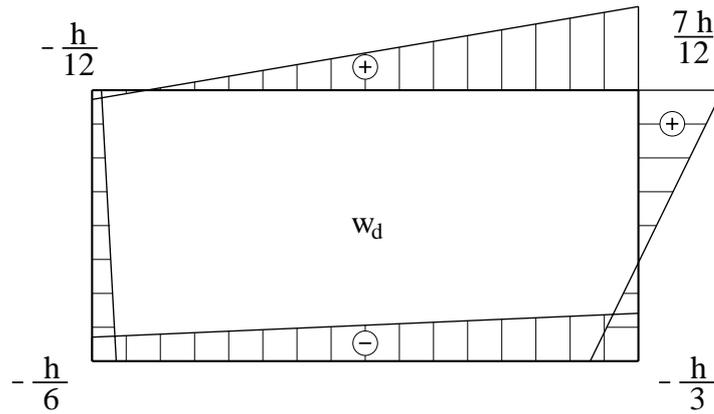


Figura D.13: Función de alabeo de distorsión  $w_d$ . Solución 2.

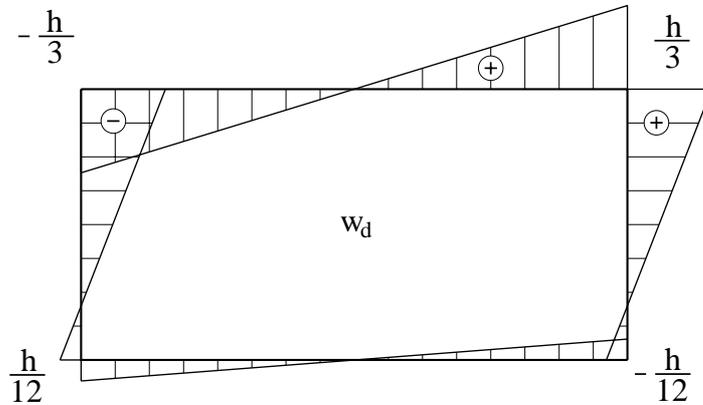


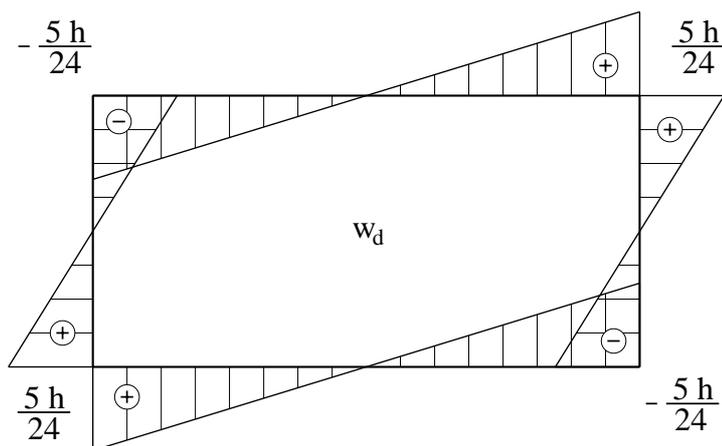
Figura D.14: Función de alabeo de distorsión  $w_d$ . Solución 3.

$$\begin{Bmatrix} w_{d1} \\ w_{d2} \\ w_{d3} \\ w_{d4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ -1/12 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{Bmatrix} h$$

Y para ortogonalizar respecto de la flexión por el momento  $M_y$  se aplican las ecuaciones (3.127) utilizando la función de alabeo anterior. Obteniéndose la siguiente función de alabeo, que se puede ver representada en la figura (D.15).

$$C_x = \frac{\frac{5 t h^3}{12}}{\frac{10 t h^3}{3}} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{Bmatrix} w_{d1} \\ w_{d2} \\ w_{d3} \\ w_{d4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5/24 \\ -5/24 \\ 5/24 \\ -5/24 \end{Bmatrix} h$$


 Figura D.15: Función de alabeo de distorsión  $w_d$ . Solución 4.

Los movimientos en el plano de la sección también se modifican por las ortogonalizaciones respecto de flexión, obteniéndose los siguientes valores.

$$u_{dx}^* = u_{dx} - 1 \cdot C_x$$

$$u_{dy}^* = u_{dy} + 1 \cdot C_y$$

$n$	$u_{dx}$	$u_{dy}$	$u_{dx}^*$	$u_{dy}^*$
1	0	0	-1/8	-1/2
2	0	1	-1/8	1/2
3	1/4	1	1/8	1/2
4	1/4	0	1/8	-1/2

Como las funciones de alabeo de torsión uniforme  $w_a$  y  $w_d$  son proporcionales no es posible ortogonalizarlas. Se vuelven a normalizar los movimientos en el plano de la sección multiplicando por 2, para que el movimiento máximo vertical sea la unidad. También es necesario multiplicar la función de alabeo  $w_d$  por el mismo coeficiente. Siendo la solución definitiva la siguiente, y que está representada en las figuras (D.16) y (D.17):

$n$	$w_d$	$u_{dx}$	$u_{dy}$	$\theta_{dz}$
1	$5h/12$	-1/4	-1	0
2	$-5h/12$	-1/4	1	0
3	$5h/12$	1/4	1	0
4	$-5h/12$	1/4	-1	0

A partir de los movimientos se obtienen los axiles, cortantes y momentos en la sección transversal. Los valores están representados en las figuras (D.18) y (D.19).

$e$	$N_{ds}$	$Q_{ds}$	$M_{ds1}$	$M_{ds2}$
1	0	$(E t^3)/(4 h^3)$	$(E t^3)/(4 h^2)$	$-(E t^3)/(4 h^2)$
2	0	$-(E t^3)/(2 h^3)$	$-(E t^3)/(4 h^2)$	$(E t^3)/(4 h^2)$
3	0	$(E t^3)/(4 h^3)$	$(E t^3)/(4 h^2)$	$-(E t^3)/(4 h^2)$
4	0	$-(E t^3)/(2 h^3)$	$-(E t^3)/(4 h^2)$	$(E t^3)/(4 h^2)$

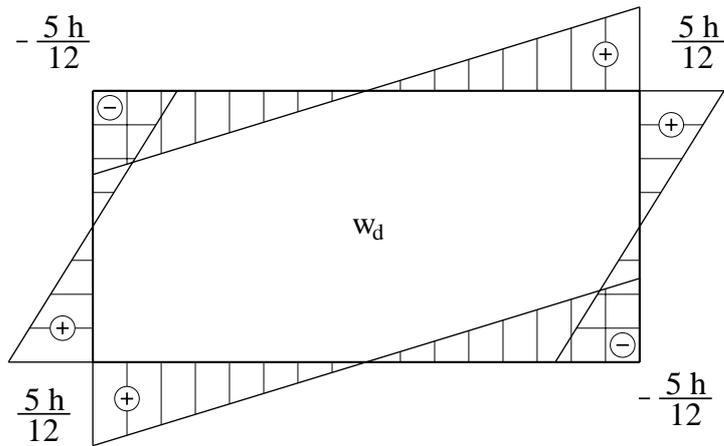


Figura D.16: Función de alabeo de distorsión  $w_d$ . Solución final.

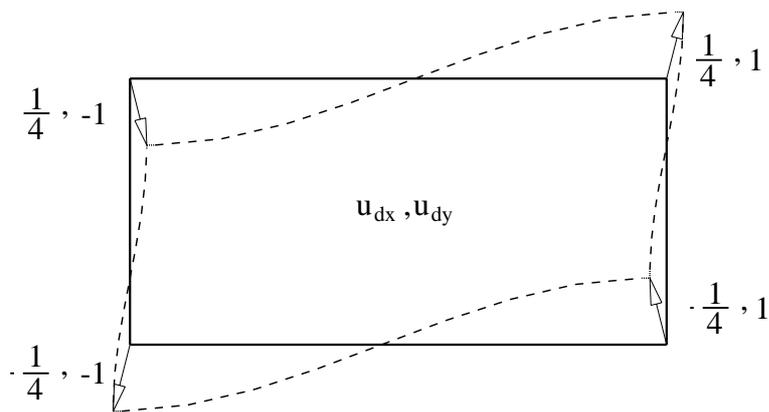


Figura D.17: Deformada de distorsión. Solución final.

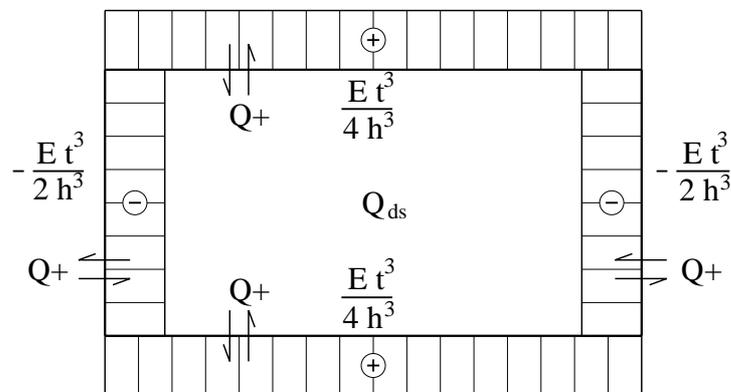
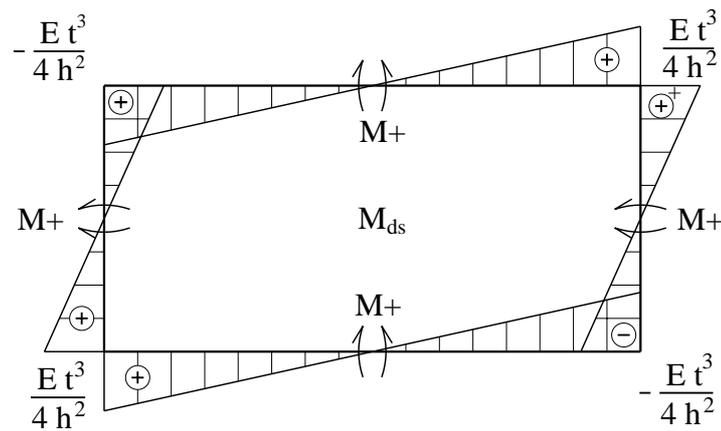
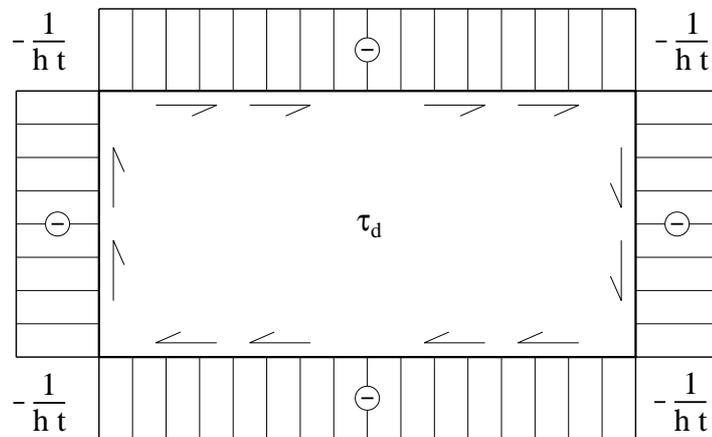


Figura D.18: Cortantes transversales de distorsión  $Q_{ds}$ .


 Figura D.19: Momentos transversales de distorsión  $M_{ds}$ .

 Figura D.20: Tensiones tangenciales  $\tau_d$  por momento de distorsión uniforme  $M_{du}$ .

Las tensiones tangenciales que crea el momento distorsor uniforme  $M_{du}$  se calculan con las ecuaciones (3.131) y (3.132). Las tensiones tangenciales que se han representado en la figura (D.20), resultan tener un valor constante para todos los elementos con el valor siguiente:

$$D_{td.td} = \frac{t h}{6}$$

$$\tau_d = -\frac{1}{t h}$$

La rigidez  $K_d$  de la sección como marco se obtiene con las expresiones (3.141).

$$K_d = \frac{3}{2} \frac{t^3}{h^3}$$

Otras características que es necesario determinar son las inercias de acoplamiento entre torsión y distorsión.

$$I_{w_a.w_d} = \int_A \frac{E}{E_o} w_d w_a dA = -\frac{5}{36} t h^4$$

$$D_{t_d.t_a} = \int_A \frac{G}{G_o} \left( \frac{\partial w_a}{\partial s} - h_a \right) \left( u_{ds} - \frac{\partial w_d}{\partial s} \right) dA = \int_A \frac{G}{G_o} t_a t_d dA = \frac{2}{3} t h^2$$

## D.8. DISTORSIÓN NO UNIFORME

Las matrices de rigidez de los elementos son las mismas que para el caso de torsión no uniforme. El término de fuerzas de cada elemento de acuerdo con la ecuación (3.158) son:

$$\{f_1\} = \{f_3\} = \begin{Bmatrix} -5/36 \\ 5/36 \end{Bmatrix} E t h^2$$

$$\{f_2\} = \{f_4\} = \begin{Bmatrix} 5/72 \\ -5/72 \end{Bmatrix} E t h^2$$

Ensamblando los elementos se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\frac{G t}{h} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{dt1} \\ w_{dt2} \\ w_{dt3} \\ w_{dt4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5/24 \\ 5/24 \\ -5/24 \\ 5/24 \end{Bmatrix} E t h^2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones imponiendo la condición ( $w_{dt1} = 0$ ) se obtiene la siguiente solución:

$$\begin{Bmatrix} w_{dt1} \\ w_{dt2} \\ w_{dt3} \\ w_{dt4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10/72 \\ 0 \\ 10/72 \end{Bmatrix} \frac{E h^3}{G}$$

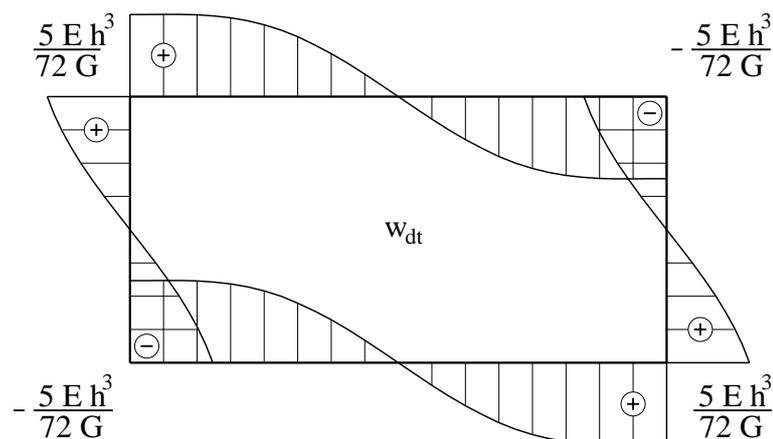
Las variables internas de cada elemento se determinan con las ecuaciones (3.159), obteniéndose los valores:

$e$	$w_{dt3}$	$w_{dt4}$
1	0	$(5 E h^3)/(72 G)$
2	0	$-(5 E h^3)/(288 G)$
3	0	$(5 E h^3)/(72 G)$
4	0	$-(5 E h^3)/(288 G)$

La constante de normalización respecto del axil se obtiene con la ecuación (3.160):

$$w_{dto} = -\frac{5 E t h^4}{12 G} = -\frac{5 E h^3}{72 G}$$

Sumando a la función de alabeo esta constante se obtienen los siguientes valores, que teniendo en cuenta los valores de las variables internas se han representado en la figura (D.21):


 Figura D.21: Función de alabeo  $w_{dt}$  de distorsión no uniforme.

$$\begin{Bmatrix} w_{dt1} \\ w_{dt2} \\ w_{dt3} \\ w_{dt4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5/72 \\ 5/72 \\ -5/72 \\ 5/72 \end{Bmatrix} \frac{E h^3}{G}$$

El módulo de distorsión  $I_d$  viene dado por la ecuación (3.162).

$$I_d = \frac{25}{72} t h^3$$

Las tensiones tangenciales por distorsión no uniforme vienen dadas por la ecuación (3.164) y se han representado en la figura(D.22).

$e$	$S_d(-L/2)$	$S_d(0)$	$S_d(L/2)$
1	$-5 h^2 t/72$	$5 h^2 t/36$	$-5 h^2 t/72$
2	$-5 h^2 t/72$	$-25 h^2 t/144$	$-5 h^2 t/72$
3	$-5 h^2 t/72$	$5 h^2 t/36$	$-5 h^2 t/72$
4	$-5 h^2 t/72$	$-25 h^2 t/144$	$-5 h^2 t/72$

Como la deformada de la sección transversal de distorsión se ha escalado para que el movimiento máximo vertical sea la unidad, todas las funciones de alabeo y sus derivadas quedan multiplicadas por ese factor de escala. Por ello las unidades en las que están  $w_d$ ,  $w_{dt}$  y  $S_d$  son  $(m^2)$ ,  $(m^4)$  y  $(m^4)$  respectivamente, que son las que se corresponden con las unidades del campo de movimientos, y no las que se deducen del análisis de unidades de las expresiones obtenidas para el valor de dichas funciones de alabeo.

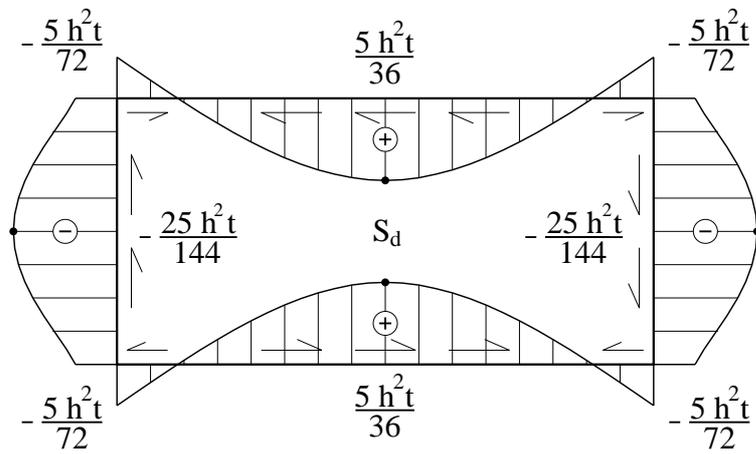


Figura D.22: Tensiones tangenciales  $S_d$  por distorsión no uniforme.  $\tau_{sz} = (M_{dw} \cdot S_d) / (I_d \cdot t)$ .

## Apéndice E

# EL PROBLEMA DE LA DEFORMACIÓN DE CORTANTE

### E.1. INTRODUCCIÓN

En el cálculo de vigas con las hipótesis de Euler-Bernoulli se considera que las secciones permanecen planas y perpendiculares al eje de la viga deformada, lo que conduce a que la distribución de tensiones longitudinales sea lineal en la dirección de la flexión. Si se utiliza la teoría de Timoshenko [69], las secciones permanecen planas pero no perpendiculares al eje de la viga deformada al tener en cuenta la deformación por cortante, teniendo la distribución de tensiones normales la misma forma lineal.

Sin embargo, se observa que en vigas en flexión con secciones de paredes delgadas se produce el denominado *efecto de arrastre de cortante*, que consiste en que las tensiones longitudinales de flexión se ven influenciadas por las deformaciones de las tensiones tangenciales de cortante, dejando de tener la distribución lineal que se deduce de las teorías mencionadas. En cuanto sean más delgados los espesores de las paredes, las deformaciones por tensiones tangenciales son mayores, y por tanto mayor es la influencia que se produce en la distribución de tensiones normales.

Con el objeto de comprender bien este fenómeno, y de como se puede introducir en el cálculo de las vigas, en el presente apéndice se aborda la resolución de un ejemplo concreto, consistente en una viga biapoyada con dos posibles estados de carga: carga repartida en toda su longitud, y carga puntual en centro de luz. Se estudia para dos estados de carga distintos para poder ver las diferencias que puedan existir entre dichos estados.

En el cálculo de la viga de ejemplo, se pretende obtener los movimientos que incluyan la deformación por cortante. Se realiza por varios métodos que son los siguientes:

- Solución 1. Se utiliza la teoría de Timoshenko, en la que la deformación por cortante se introduce mediante el área de cortante.
- Solución 2. Integrando a partir de la expresión del movimiento longitudinal  $v_z$  que incluye la función de alabeo de cortante. Esta solución es posible hacerla porque se conocen los esfuerzos por ser una estructura isostática.

- Solución 3. Se generaliza la solución anterior planteando el sistema de ecuaciones diferenciales que resuelve el problema.

## E.2. VIGA BIAPOYADA CON CARGA CONTINUA

### E.2.1. SOLUCIÓN 0: ESTÁTICA

Al ser una estructura isostática, en la viga biapoyada con carga repartida los esfuerzos se obtienen por equilibrio estático, los cuales están representados en la figura (E.1) junto con el convenio de signos de esfuerzos utilizado.

$$M_x(z) = -\frac{p_y \cdot z^2}{2} + \frac{p_y \cdot L \cdot z}{2} \quad (\text{E.1})$$

$$Q_y(z) = -p_y \cdot z + \frac{p_y \cdot L}{2} \quad (\text{E.2})$$

El momento en centro luz y las tensiones normales en el caso de no considerar las deformaciones por cortante vienen dadas por las conocidas expresiones:

$$M_x\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{p_y L^2}{8}$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

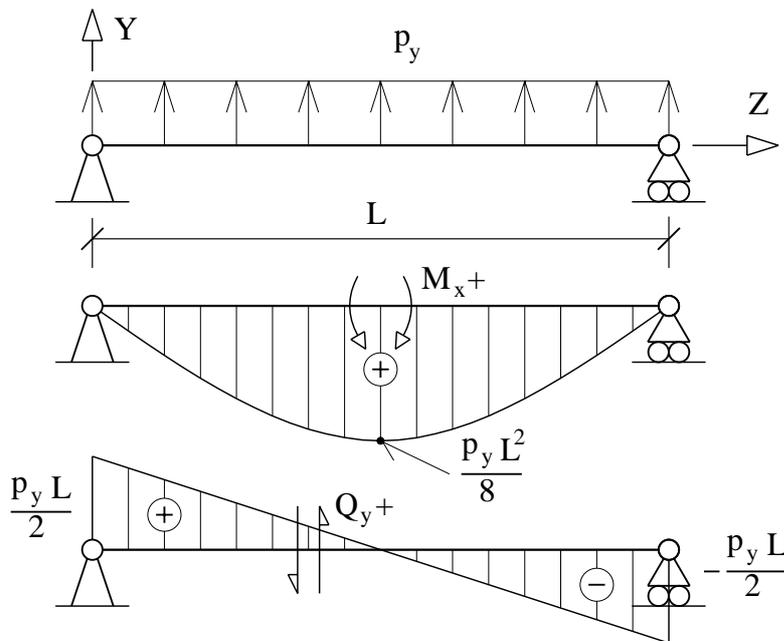


Figura E.1: Viga biapoyada con carga continua.

### E.2.2. SOLUCIÓN 1: TEORÍA CLÁSICA

Se considera que la deformación por cortante  $\gamma_{yz}$  en la sección es constante lo que significa que la sección permanece plana. La deformación se obtiene a partir del cortante  $Q_y$  mediante el área de cortante  $A_y$  con la siguiente expresión:

$$\gamma_{yz} = \frac{du_y}{dz} + \theta_x = \frac{Q_y}{G_o \cdot A_y} \quad (\text{E.3})$$

La energía potencial total para una pieza de longitud  $L$ , que es la suma entre la energía de deformación por flexión y cortante, y la energía potencial de las fuerzas exteriores (momentos  $M_x$  y cortantes  $Q_y$  en extremos de pieza, carga repartida  $p_y$  y carga flectora  $m_x$ ), viene dada por:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L E_o I_x \left( \frac{d\theta_x}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L G_o A_y \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right)^2 dz - \int_0^L p_y u_y dz \\ & - \int_0^L m_x \theta_x dz - ( Q_y(L) u_y(L) - Q_y(0) u_y(0) ) - ( M_x(L) \theta_x(L) - M_x(0) \theta_x(0) ) \end{aligned}$$

Las funciones solución son aquellas que hacen mínima esta energía potencial  $\Pi$ . Derivando respecto de la función incógnita  $u_y$  se obtiene lo siguiente, donde se ha denotado con el símbolo  $(\prime)$  las derivadas respecto de  $z$ :

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \Pi(u_y + \delta u_y) - \Pi(u_y) = \\ = & \int_0^L G_o A_y (u'_y + \theta_x) \delta u'_y dz - \int_0^L p_y \delta u_y dz \\ & - ( Q_y(L) \delta u_y(L) - Q_y(0) \delta u_y(0) ) \end{aligned}$$

Integrando por partes los dos primeros términos:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & G_o A_y u'_y \delta u_y \Big|_0^L - \int_0^L G_o A_y u''_y dz \delta u_y + G_o A_y \theta_x \delta u_y \Big|_0^L - \int_0^L G_o A_y \theta'_x dz \delta u_y \\ & - \int_0^L p_y dz \delta u_y - ( Q_y(L) \delta u_y(L) - Q_y(0) \delta u_y(0) ) \end{aligned}$$

Estableciendo la condición  $\delta\Pi = 0$  para cualquier variación  $\delta u_y$  queda la siguiente ecuación diferencial y condición de contorno.

$$\boxed{\begin{aligned} -G_o A_y ( u''_y + \theta'_x ) &= p_y \\ \left( G_o A_y ( u'_y + \theta_x ) - Q_y \right) \delta u_y \Big|_0^L &= 0 \end{aligned}} \quad (\text{E.4})$$

Derivando la energía potencial total  $\Pi$  respecto de la función incógnita  $\theta_x$  queda:

$$\delta\Pi = \Pi(\theta_x + \delta\theta_x) - \Pi(\theta_x) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^L E_o I_x \theta'_x \delta\theta'_x dz + \int_0^L G_o A_y (u'_y + \theta_x) \delta\theta_x dz - \int_0^L m_x \delta\theta_x dz \\
 &\quad - ( M_x(L) \delta\theta_x(L) - M_x(0) \delta\theta_x(0) )
 \end{aligned}$$

Integrando por partes el primer término:

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi &= E_o I_x \theta'_x \delta\theta_x \Big|_0^L - \int_0^L E_o I_x \theta''_x \delta\theta_x dz + \int_0^L G_o A_y (u'_y + \theta_x) \delta\theta_x dz \\
 &\quad - \int_0^L m_x \delta\theta_x dz - ( M_x(L) \delta\theta_x(L) - M_x(0) \delta\theta_x(0) )
 \end{aligned}$$

Y estableciendo la condición  $\delta\Pi = 0$  para cualquier variación  $\delta\theta_x$  queda la siguiente ecuación diferencial y condición de contorno.

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 -E_o I_x \theta''_x + G_o A_y (u'_y + \theta_x) &= m_x \\
 ( E_o I_x \theta'_x - M_x ) \delta\theta_x \Big|_0^L &= 0
 \end{aligned}
 } \tag{E.5}$$

Las ecuaciones diferenciales se corresponden con las ecuaciones de equilibrio:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 -\frac{dQ_y}{dz} &= p_y \\
 -\frac{dM_x}{dz} + Q_y &= m_x
 \end{aligned}
 } \tag{E.6}$$

Para el caso particular en que no haya carga flectora ( $m_x = 0$ ), la solución del sistema de ecuaciones diferenciales planteado es un polinomio de grado cuatro para el movimiento  $u_y(z)$ , y un polinomio de grado tres para el giro  $\theta_x(z)$ .

$$\begin{aligned}
 u_y(z) &= a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \\
 \theta_x(z) &= b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

Sustituyendo las dos soluciones en las ecuaciones diferenciales se obtienen los parámetros para la solución general:

$$\left. \begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{p_y}{2 G_o A_y} - \frac{b_1}{2} \\
 a_4 &= \frac{p_y}{24 E_o I_x} \\
 b_0 &= -\frac{6 E_o I_x}{G_o A_y} a_3 - a_1 \\
 b_2 &= -3 a_3 \\
 b_3 &= -\frac{p_y}{6 E_o I_x}
 \end{aligned} \right\} \tag{E.8}$$

Los cuatro parámetros restantes:  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_3$  y  $b_1$  se obtienen imponiendo las condiciones de contorno. Para el caso en estudio, una viga biapoyada con carga continua, las condiciones de contorno son:

$$\left. \begin{aligned} u_y(0) &= 0 \\ M_x(0) &= E_o \cdot I_x \cdot \theta'_x(0) = 0 \\ u_y(L) &= 0 \\ M_x(L) &= E_o \cdot I_x \cdot \theta'_x(L) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Que proporcionan los siguientes valores para dichos cuatro parámetros:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{p_y L^3}{24 E_o I_x} + \frac{p_y L}{2 G_o A_y} \\ a_3 &= -\frac{p_y L}{12 E_o I_x} \\ b_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo las soluciones se comprueba que los momentos  $M_x(z)$  y cortantes  $Q_y(z)$  coinciden con los proporcionados por el equilibrio estático, ecuaciones (E.1) y (E.2). La flecha en el centro de la luz y el giro en el apoyo vienen dados por:

$$\boxed{u_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{p_y L^4}{E_o I_x} \left(1 + \frac{48}{5} \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{1}{L^2}\right)}$$

$$\theta_x(0) = -\frac{p_y L^3}{24 E_o I_x}$$

Solución que coincide con la de Timoshenko incluida en su libro de *Resistencia de Materiales* [69]<sup>1</sup>.

Comparando con el cálculo sin deformación por cortante, el giro en los apoyos es el mismo, y la flecha en el centro luz se ve incrementada en un coeficiente mayor de la unidad. Como en las hipótesis de partida se ha considerado una deformación constante por cortante y por tanto permanece plana la sección, no hay influencia en la distribución de tensiones normales, por lo que no se puede obtener el efecto de arrastre por cortante.

### E.2.3. SOLUCIÓN 2: INTEGRACIÓN DE ALABEOS

En este apartado aprovechando que son conocidas las ecuaciones de momentos y cortantes, mediante integración se van a obtener los movimientos de la viga en estudio. En el apartado 3.7 dedicado al cortante se obtuvo la ecuación (3.20) que relaciona el alabeo de la sección  $v_z$  con la flecha  $u_y$  y el cortante  $Q_y$ :

$$v_z(x, y, z) = -y \cdot \frac{du_y(z)}{dz} + w_y(x, y, z) \cdot \frac{Q_y(z)}{G_o}$$

Por derivación se obtiene la deformación longitudinal  $\epsilon_z$ , y multiplicando esta por el módulo de elasticidad se obtiene la tensión longitudinal.

---

<sup>1</sup> § 39.

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z = E \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = E \cdot \left( -y \cdot \frac{d^2 u_y}{dz^2} + \frac{w_y}{G_o} \cdot \frac{dQ_y}{dz} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E \cdot \left( -y \cdot \frac{d^3 u_y}{dz^3} + \frac{w_y}{G_o} \cdot \frac{d^2 Q_y}{dz^2} \right)$$

Se considera el caso en que solamente hay cargas de valor constante ( $p_y = \text{constante}$ ), o lo que es lo mismo ( $d^2 Q_y/dz^2 = 0$ ), por lo que la variación de las tensiones normales queda:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -E \cdot y \cdot \frac{d^3 u_y}{dz^3}$$

La variación de las tensiones tangenciales viene dada por la ecuación (3.23) de expresión:

$$\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} = G \cdot \frac{\partial \gamma_{sz}}{\partial s} = G \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial s^2} \cdot \frac{Q_y}{G_o}$$

Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la ecuación de equilibrio (3.6) se obtiene:

$$G \cdot \frac{\partial^2 w_y}{\partial s^2} \cdot \frac{Q_y}{G_o} - E \cdot y \cdot \frac{d^3 u_y}{dz^3} = 0$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (3.29) y despejando:

$$\frac{d^3 u_y}{dz^3} = -\frac{Q_y}{E_o \cdot I_x}$$

En esta ecuación se sustituye la ecuación (E.2) para los cortantes de la viga en estudio, y se integra para obtener la ecuación de los movimientos  $u_y$ :

$$\frac{d^3 u_y}{dz^3} = -\frac{1}{E_o \cdot I_x} \left( -p_y z + \frac{p_y L}{2} \right)$$

$$u_y = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{L z^3}{12} \right) + a_2 z^2 + a_1 z + a_o$$

Imponiendo las condiciones de contorno ( $u_y(0) = 0$ ) y ( $u_y(L) = 0$ ) se obtienen dos de los parámetros:

$$a_o = 0$$

$$a_1 = \frac{p_y L^3}{24 E_o I_x} - L a_2$$

Los momentos en una sección se pueden obtener integrando las tensiones normales:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A E \cdot \left( -y \cdot \frac{d^2 u_y}{dz^2} + \frac{w_y}{G_o} \cdot \frac{dQ_y}{dz} \right) y dA =$$

$$= -E_o I_x \frac{d^2 u_y}{dz^2} + \frac{E_o I_{w_y \cdot y}}{G_o} \frac{dQ_y}{dz} = \tag{E.9}$$

$$= -E_o I_x \left( \frac{p_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{L z}{2} \right) + 2 a_2 \right) + \frac{E_o I_{w_y \cdot y}}{G_o} (-p_y)$$

Siendo:

$$I_{w_y \cdot y} = \int_A \frac{E}{E_o} w_y y dA$$

En la viga biapoyada en estudio los momentos en los extremos son nulos. Con las condiciones ( $M_x(0) = 0$ ) y ( $M_x(L) = 0$ ) se obtiene la incógnita que faltaba:

$$a_2 = -\frac{I_{w_y \cdot y} p_y}{2 G_o I_x}$$

Quedando finalmente la solución:

$$u_y = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{L z^3}{12} - \frac{E_o I_{w_y \cdot y}}{G_o} \frac{z^2}{2} + \left( \frac{L^3}{24} + \frac{E_o I_{w_y \cdot y}}{G_o} \frac{L}{2} \right) z \right)$$

Teniendo en cuenta la relación (3.43) entre  $I_{w_y \cdot y}$  y el área de cortante  $A_y$ , queda:

$$u_y = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{L z^3}{12} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{z^2}{2} + \left( \frac{L^3}{24} + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{L}{2} \right) z \right)$$

De la ecuación (E.9) para los momentos  $M_x$ , despejando la segunda derivada del movimiento vertical:

$$\frac{d^2 u_y}{dz^2} = -\frac{M_x}{E_o I_x} + \frac{1}{G_o A_y} \frac{dQ_y}{dz}$$

Sustituyendo las ecuaciones conocidas para los momentos (E.1) y cortantes (E.2), y la relación (3.43), se obtiene:

$$\frac{d^2 u_y}{dz^2} = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{L z}{2} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \right)$$

Y posteriormente integrando queda:

$$u_y = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{L z^3}{12} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{z^2}{2} \right) + a_1 z + a_o$$

Imponiendo las condiciones de movimientos nulos en los extremos se obtiene la misma solución.

En la ecuación:

$$Q_y = G_o A_y \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right)$$

Despejando el giro  $\theta_x$ , y sustituyendo las ecuaciones conocidas para  $Q_y$  y  $u_y$  se obtiene:

$$\theta_x = \frac{Q_y}{G_o A_y} - \frac{du_y}{dz} = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( -\frac{z^3}{6} + \frac{L z^2}{4} - \frac{L^3}{24} \right)$$

Si los momentos  $M_x$  son conocidos, a partir de la ecuación (3.13) que relaciona los momentos con los giros  $\theta_x$ , mediante integración se pueden obtener los giros. En la viga biapoyada en estudio con la ecuación (E.1) conocida de los momentos se obtiene:

$$\frac{d\theta_x}{dz} = \frac{M_x(z)}{E_o I_x} = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( -\frac{z^2}{2} + \frac{L z}{2} \right)$$

$$\theta_x = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( -\frac{z^3}{6} + \frac{L z^2}{4} \right) + b_o$$

Por la simetría del problema analizado, el giro en centro luz es nulo ( $\theta_x(L/2) = 0$ ). Imponiendo esta condición se obtiene el parámetro incógnita  $b_o$ , el cual coincide con el giro en el apoyo.

$$b_o = \theta_x(0) = -\frac{p_y L^3}{24 E_o I_x}$$

$$\theta_x = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( -\frac{z^3}{6} + \frac{L z^2}{4} - \frac{L^3}{24} \right)$$

Esta ecuación para los giros es la misma que la obtenida previamente. Particularizando para ( $z = L/2$ ) se obtiene la flecha en centro luz:

$$\boxed{w_y \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{p_y L^4}{E_o I_x} \left( 1 + \frac{48}{5} \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{1}{L^2} \right)}$$

Que es la misma expresión que la obtenida con la solución del apartado anterior. Con la diferencia de que con este planteamiento, utilizando la expresión de las tensiones normales, se obtienen estas con el efecto de arrastre de cortante incluido.

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, y, z) &= E \cdot \left( -y \cdot \frac{d^2 u_y}{dz^2} + \frac{w_y}{G_o} \cdot \frac{dQ_y}{dz} \right) = \\ &= E \cdot \left( -w_y(x, y) \frac{p_y}{G_o} - \frac{p_y y}{E_o I_x} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{L z}{2} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \right) \right) \end{aligned}$$

Para la sección por centro de luz:

$$\begin{aligned} \sigma_z \left( x, y, z = \frac{L}{2} \right) &= E \cdot \left( w_y(x, y) \cdot \frac{-p_y}{G_o} - \frac{p_y y}{E_o I_x} \cdot \left( -\frac{L^2}{8} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \right) \right) = \\ &= E \cdot \left( w_y(x, y) \cdot \frac{-p_y}{G_o} + \frac{p_y L^2}{8 E_o I_x} \cdot y \cdot \left( 1 + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{8}{L^2} \right) \right) \end{aligned}$$

En el caso de que no haya deformación por cortante (alabeo nulo  $w_y = 0$  y área de cortante infinita  $A_y = \infty$ ), y que el módulo de elasticidad  $E$  sea el mismo para toda la sección, la expresión anterior se simplifica como:

$$\sigma_z = \frac{p_y L^2}{8 I_x} y$$

**E.2.4. SOLUCIÓN 3: ECUACIÓN DIFERENCIAL**

Sustituyendo en la ecuación (3.20) para el alabeo de cortante, la ecuación (E.3) que relaciona el cortante con la deformación transversal queda:

$$\begin{aligned} v_z &= -y \cdot \frac{du_y}{dz} + w_y \cdot \frac{Q_y}{G_o} = \\ &= -y \cdot \frac{du_y}{dz} + w_y \cdot A_y \cdot \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) = \\ &= (w_y \cdot A_y - y) \cdot \frac{du_y}{dz} + w_y \cdot A_y \cdot \theta_x \end{aligned}$$

Se considera nulo el movimiento  $u_x$ . Y el movimiento en dirección de una pared de la sección viene dado por ( $v_s = u_y \cdot t_y$ ), donde  $t_y$  es la componente en  $y$  del vector director de la pared. Por derivación del campo de movimientos se obtienen las deformaciones.

La deformación longitudinal queda:

$$\begin{aligned} \epsilon_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = (w_y \cdot A_y - y) \cdot \frac{d^2 u_y}{dz^2} + w_y \cdot A_y \cdot \frac{d\theta_x}{dz} = \\ &= w_y \cdot A_y \cdot \left( \frac{d^2 u_y}{dz^2} + \frac{d\theta_x}{dz} \right) - y \cdot \frac{d^2 u_y}{dz^2} \end{aligned}$$

Y la deformación transversal:

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} &= \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_z}{\partial s} = \frac{du_y}{dz} t_y + \frac{\partial v_z}{\partial x} t_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} t_y = \\ &= \frac{du_y}{dz} t_y + \left( \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} A_y - 0 \right) \frac{du_y}{dz} + \frac{\partial w_y}{\partial x} A_y \theta_x \right) t_x + \\ &\quad + \left( \left( \frac{\partial w_y}{\partial y} A_y - 1 \right) \frac{du_y}{dz} + \frac{\partial w_y}{\partial y} A_y \theta_x \right) t_y = \\ &= \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} t_x + \frac{\partial w_y}{\partial y} t_y \right) A_y \frac{du_y}{dz} + \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} t_x + \frac{\partial w_y}{\partial y} t_y \right) A_y \theta_x = \\ &= \frac{\partial w_y}{\partial s} A_y \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right) \end{aligned}$$

Con la deformación longitudinal se puede obtener la energía de deformación por tensiones normales:

$$\begin{aligned} \frac{dU_\epsilon}{dz} &= \frac{1}{2} \int_A E \epsilon_z^2 dA = \frac{1}{2} E_o \{ \epsilon_g \}^t \left( \int_A \frac{E}{E_o} [A_\epsilon] dA \right) \{ \epsilon_g \} = \\ &= \frac{1}{2} E_o \{ \epsilon_g \}^t [ I ] \{ \epsilon_g \} \end{aligned}$$

Siendo:

$$\{ \epsilon_g \}^t = \left\{ \frac{d^2 u_y}{dz^2}, \frac{d\theta_x}{dz} \right\}$$

$$[A_\epsilon] = \left[ \begin{array}{c|c} (w_y A_y - y)^2 & (w_y A_y - y)(w_y A_y) \\ \hline (w_y A_y - y)(w_y A_y) & (w_y A_y)^2 \end{array} \right]$$

$$[I] = \int_A \frac{E}{E_o} [A_\epsilon] dA =$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} A_y^2 I_{w_y \cdot w_y} - 2 A_y I_{w_y \cdot y} + I_x & A_y^2 I_{w_y \cdot w_y} - A_y I_{w_y \cdot y} \\ \hline A_y^2 I_{w_y \cdot w_y} - A_y I_{w_y \cdot y} & A_y^2 I_{w_y \cdot w_y} \end{array} \right]$$

Teniendo en cuenta la relación (3.43):

$$A_y = \frac{I_x}{I_{w_y \cdot y}}$$

Y denominando  $k_y$  a la expresión:

$$k_y = \frac{I_{w_y \cdot w_y} I_x}{(I_{w_y \cdot y})^2} = \frac{I_{w_y \cdot w_y}}{I_x} A_y^2$$

$$A_y^2 = \frac{I_x}{I_{w_y \cdot w_y}} k_y$$

La matriz  $[I]$  queda como:

$$[I] = \left[ \begin{array}{c|c} A_y^2 I_{w_y \cdot w_y} - I_x & A_y^2 I_{w_y \cdot w_y} - I_x \\ \hline A_y^2 I_{w_y \cdot w_y} - I_x & A_y^2 I_{w_y \cdot w_y} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I_x (k_y - 1) & I_x (k_y - 1) \\ \hline I_x (k_y - 1) & I_x k_y \end{array} \right]$$

Y con la deformación transversal se obtiene la energía de deformación por tensiones tangenciales.

$$\frac{dU_\gamma}{dz} = \frac{1}{2} \int_A G \gamma_{sz}^2 dA = \frac{1}{2} G_o \{\gamma_g\}^t \left( \int_A \frac{G}{G_o} [A_\gamma] dA \right) \{\gamma_g\} =$$

$$= \frac{1}{2} G_o \{\gamma_g\}^t [D] \{\gamma_g\}$$

Siendo:

$$\{\gamma_g\}^t = \left\{ \frac{dw_y}{dz}, \theta_x \right\}$$

$$[A_\gamma] = \left[ \begin{array}{c|c} \left( \frac{\partial w_y}{\partial s} A_y \right)^2 & \left( \frac{\partial w_y}{\partial s} A_y \right)^2 \\ \hline \left( \frac{\partial w_y}{\partial s} A_y \right)^2 & \left( \frac{\partial w_y}{\partial s} A_y \right)^2 \end{array} \right]$$

$$[D] = \int_A \frac{G}{G_o} [A_\gamma] dA = \left[ \begin{array}{c|c} A_y^2 D_{w_y \cdot w_y} & A_y^2 D_{w_y \cdot w_y} \\ \hline A_y^2 D_{w_y \cdot w_y} & A_y^2 D_{w_y \cdot w_y} \end{array} \right]$$

Teniendo en cuenta la relación:

$$D_{w_y \cdot w_y} = \frac{1}{A_y}$$

La matriz  $[D]$  queda como:

$$[D] = \left[ \begin{array}{c|c} A_y & A_y \\ \hline A_y & A_y \end{array} \right]$$

La energía potencial total de una pieza de longitud  $L$ , que es la suma de la energía de deformación y de la energía potencial de las fuerzas exteriores, viene dada por:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L E_o \{\epsilon_g\}^t [I] \{\epsilon_g\} dz + \frac{1}{2} \int_0^L G_o \{\gamma_g\}^t [D] \{\gamma_g\} dz \\ & - \int_0^L p_y u_y dz - (Q_y(L) u_y(L) - Q_y(0) u_y(0)) - (M_x(L) \theta_x(L) - M_x(0) \theta_x(0)) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Estableciendo que las funciones incógnitas  $u_y$  y  $\theta_x$  hacen mínima la energía potencial  $\Pi$ , mediante la igualación a cero de las derivadas respecto de las funciones, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente, en el que se han denotado con el símbolo  $(\prime)$  las derivadas respecto de  $z$ :

$$E_o I_x (k_y - 1) (u_y'''' + \theta_x''') - G_o A_y (u_y'' + \theta_x') = p_y$$

$$E_o I_x (k_y - 1) u_y''' + E_o I_x k_y \theta_x'' - G_o A_y (u_y' + \theta_x) = 0$$

Con las condiciones de contorno:

$$\left( -E_o I_x (k_y - 1) (u_y''' + \theta_x'') + G_o A_y (u_y' + \theta_x) - Q_y \right) \delta u_y \Big|_0^L = 0$$

$$\left( E_o I_x (k_y - 1) u_y'' + E_o I_x k_y \theta_x' - M_x \right) \delta \theta_x \Big|_0^L = 0$$

Como se está considerando el caso en que la carga exterior  $p_y$  es constante se cumple:

$$\left. \begin{aligned} (u_y' + \theta_x) &= \frac{Q_y}{G_o A_y} \\ (u_y'' + \theta_x') &= \frac{-p_y}{G_o A_y} \\ (u_y''' + \theta_x'') &= 0 \\ (u_y'''' + \theta_x''') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Simplificándose el sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno al siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} -G_o A_y (u_y'' + \theta_x') &= p_y \\ E_o I_x (k_y - 1) u_y''' + E_o I_x k_y \theta_x'' - G_o A_y (u_y' + \theta_x) &= 0 \end{aligned}} \quad (\text{E.11})$$

$$\left. \begin{aligned} \left( G_o A_y \left( u'_y + \theta_x \right) - Q_y \right) \delta u_y \Big|_0^L &= 0 \\ \left( E_o I_x \left( k_y - 1 \right) u''_y + E_o I_x k_y \theta'_x - M_x \right) \delta \theta_x \Big|_0^L &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.12})$$

Cuando se considera que la deformación transversal por cortante es constante en toda la sección, que es lo mismo que decir que la sección permanece plana, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} w_y &= \frac{y}{D_{yy}} \\ I_{w_y \cdot w_y} &= \frac{I_x}{(D_{yy})^2} \\ I_{w_y \cdot y} &= \frac{I_x}{D_{yy}} \\ k_y &= 1 \end{aligned}$$

En este caso con ( $k_y = 1$ ) el sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno se simplifica, quedando el mismo que el obtenido con la teoría clásica en el apartado anterior.

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales planteado es un polinomio de grado cuatro para el movimiento  $u_y(z)$ , y un polinomio de tercer grado para el giro  $\theta_x(z)$ .

$$\begin{aligned} u_y(z) &= a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \\ \theta_x(z) &= b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Sustituyendo las dos soluciones en las ecuaciones diferenciales se obtienen los parámetros para la solución general:

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -\frac{G_o A_y}{6 E_o I_x} (a_1 + b_0) \\ a_4 &= \frac{p_y}{24 E_o I_x} \\ b_1 &= -2 a_2 - \frac{p_y}{G_o A_y} \\ b_2 &= \frac{G_o A_y}{2 E_o I_x} (a_1 + b_0) \\ b_3 &= -\frac{p_y}{6 E_o I_x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{E.14})$$

Los cuatro parámetros restantes:  $a_o$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $b_0$  se obtienen imponiendo las condiciones de contorno. Para el problema de la viga biapoyada con carga continua, igualmente que se hizo para la solución del apartado anterior, imponiendo las condiciones de contorno de que los movimientos y los momentos son nulos en los extremos, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{p_y L^3}{24 E_o I_x} + \frac{p_y L}{2 G_o A_y} k_y \\ a_2 &= -\frac{p_y k_y}{2 G_o A_y} \\ b_0 &= -\frac{p_y L^3}{24 E_o I_x} - \frac{p_y L (k_y - 1)}{2 G_o A_y} k_y \end{aligned} \right\}$$

Quedando las soluciones:

$$u_y = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{L z^3}{12} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{k_y z^2}{2} + \left( \frac{L^3}{24} + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{k_y L}{2} \right) z \right)$$

$$\theta_x = \frac{p_y}{E_o I_x} \left( -\frac{z^3}{6} + \frac{L z^2}{4} + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} (k_y - 1) z - \frac{L^3}{24} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{(k_y - 1) L}{2} \right)$$

Los momentos  $M_x$  y cortantes  $\theta_x$  que se obtienen coinciden con los de la solución estática. La flecha en centro de luz y el giro en el apoyo resultan ser:

$$u_y \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{5}{384} \frac{p_y L^4}{E_o I_x} \left( 1 + \frac{48}{5} \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{k_y}{L^2} \right)$$

$$\theta_x(0) = -\frac{p_y L^3}{24 E_o I_x} - \frac{p_y L (k_y - 1)}{2 G_o A_y}$$

Para el caso particular con  $(k_y = 1)$  estos valores de flecha y giro coinciden con las soluciones de los apartados anteriores.

Conocidas las funciones solución se pueden calcular las tensiones normales, las cuales incluyen el efecto de arrastre de cortante:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \cdot \left( w_y \cdot A_y \cdot \left( \frac{d^2 u_y}{dz^2} + \frac{d\theta_x}{dz} \right) - y \cdot \frac{d^2 u_y}{dz^2} \right) = \\ &= E \cdot \left( w_y \cdot A_y \cdot \frac{-p_y}{G_o A_y} - y \cdot \frac{p_y}{E_o I_x} \cdot \left( \frac{z^2}{2} - \frac{L z}{2} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} k_y \right) \right) \end{aligned}$$

Para la sección por centro de luz:

$$\begin{aligned} \sigma_z \left( x, y, z = \frac{L}{2} \right) &= E \cdot \left( w_y(x, y) \cdot \frac{-p_y}{G_o} - \frac{p_y y}{E_o I_x} \cdot \left( -\frac{L^2}{8} - \frac{E_o I_x}{G_o A_y} k_y \right) \right) = \\ &= E \cdot \left( w_y(x, y) \cdot \frac{-p_y}{G_o} + \frac{p_y L^2}{8 E_o I_x} \cdot y \cdot \left( 1 + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{8}{L^2} k_y \right) \right) \end{aligned}$$

En el caso de que no haya deformación por cortante y el módulo de elasticidad  $E$  sea el mismo para toda la sección, se simplifica como:

$$\sigma_z = \frac{p_y L^2}{8 I_x} y$$

### E.2.5. APLICACIÓN NUMÉRICA

Para comparar y verificar las diferentes soluciones obtenidas se realiza una aplicación numérica a un caso concreto. Se ha considerado una viga biapoyada de luz  $L = 15.00$  (m), con una carga repartida en toda su longitud de valor  $p_y = -500.00$  (kN/m). Con una sección rectangular hueca representada en la figura (D.1)<sup>2</sup> con las siguientes dimensiones: canto  $h = 3.00$  (m), ancho  $b = 2 \cdot h = 6.00$  (m) y espesor de todas las paredes  $t = 0.20$  (m). Siendo el material de módulo de elasticidad  $E = 3.00 \cdot 10^7$  (kN/m<sup>2</sup>) y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.20$ , a los que corresponde un módulo de elasticidad transversal  $G = 1.25 \cdot 10^7$  (kN/m<sup>2</sup>).

El cortante en el apoyo, el momento en centro de luz, y la tensión longitudinal cuando no se considera el efecto de arrastre por cortante, tienen los siguientes valores:

$$Q_y(0) = \frac{p_y L}{2} = -3750.00 \text{ (kN)}$$

$$M_x \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{p_y L^2}{8} = \frac{p_y L^2}{8} = -14062.50 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$$

$$\sigma_z \left( y = \frac{h}{2}, z = \frac{L}{2} \right) = \frac{M_x(L/2)}{I_x} \cdot \frac{h}{2} = -3348.21 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

Las características mecánicas de acuerdo a las expresiones que se obtienen en el apéndice D son:

$$I_x = \frac{7}{6} t h^3 = 6.3000 \text{ (m}^4\text{)}$$

$$A_y = \frac{245}{183} t h = 0.8033 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$I_{w_y \cdot w_y} = \frac{9299}{13720} \frac{h}{t} = 10.1665 \text{ (-)}$$

$$I_{w_y \cdot y} = \frac{61}{70} h^2 = 7.8429 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$k_y = \frac{I_{w_y \cdot w_y} I_x}{(I_{w_y \cdot y})^2} = \frac{46495}{44652} = 1.0413 \text{ (-)}$$

En la tabla superior de la sección la función de alabeo de cortante  $w_y$  es:

$\xi = x/(b/2)$	$x$ (m)	$y = h/2$ (m)	$w_y$ (1/m)
-1	-3.00	1.50	$1/(4 t) = 1.2500$
-1/2	-1.50	1.50	$23/(56 t) = 2.0536$
0	0.00	1.50	$13/(28 t) = 2.3214$
+1/2	+1.50	1.50	$23/(56 t) = 2.0536$
+1	+3.00	1.50	$1/(4 t) = 1.2500$

<sup>2</sup>Página 311

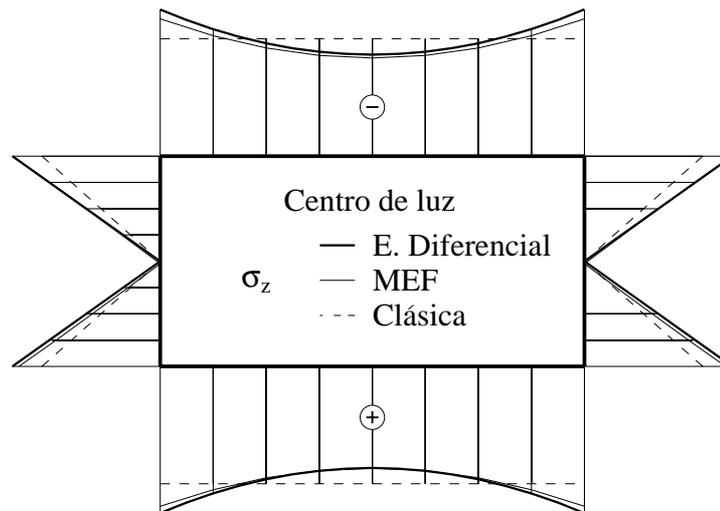


Figura E.2: Viga biapoyada con carga continua. Tensiones longitudinales  $\sigma_z$  en sección por centro de luz.

En la siguiente tabla se compara los movimientos entre las soluciones teóricas calculadas, y dos soluciones numéricas con elementos finitos y bandas finitas, ambas con láminas con fuerte discretización:

Solución	$u_y(L/2)$ (m)	$\theta_x(0)$ (-)
0 : <i>Estática</i>	$-1.7439 \cdot 10^{-3}$	$3.7202 \cdot 10^{-4}$
1 : <i>Clásica</i>	$-3.1444 \cdot 10^{-3}$	$3.7202 \cdot 10^{-4}$
2 : <i>Integración</i>	$-3.1444 \cdot 10^{-3}$	$3.7202 \cdot 10^{-4}$
3 : <i>E.Diferencial</i>	$-3.2022 \cdot 10^{-3}$	$3.8744 \cdot 10^{-4}$
4 : <i>Elementos finitos</i>	$-3.2310 \cdot 10^{-3}$	—
5 : <i>Bandas finitas</i>	$-3.0660 \cdot 10^{-3}$	—

En la siguiente tabla se compara las tensiones  $\sigma_z$  ( $kN/m^2$ ) en centro de luz en la tabla superior. El dibujo de las soluciones más representativas se puede ver en la figura (E.2).

Sección	$x = -3.00$ (m)	$x = -1.50$ (m)	$x = 0.00$ (m)
Solución	$\sigma_z$ ( $kN/m^2$ )	$\sigma_z$ ( $kN/m^2$ )	$\sigma_z$ ( $kN/m^2$ )
0 : <i>Estática</i>	-3348.21	-3348.21	-3348.21
1 : <i>Clásica</i>	-3348.21	-3348.21	-3348.21
2 : <i>Integración</i>	-4089.03	-3124.74	-2803.32
3 : <i>E.Diferencial</i>	-4181.52	-3217.23	-2895.81
4 : <i>Elementos finitos</i>	-3916.00	-3084.00	-2800.00
5 : <i>Bandas finitas</i>	-3929.00	-3081.25	-2812.00

Tomando como referencia la solución con el método de bandas finitas la diferencia máxima para la solución 2 es del 4.0 %, y para la solución 3 es del 6.5 %.

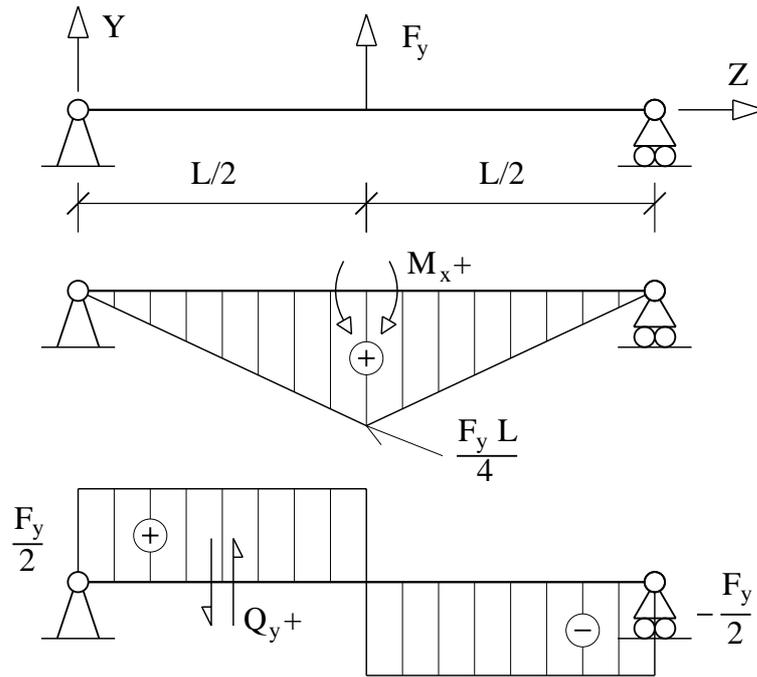


Figura E.3: Viga biapoyada con carga puntual.

### E.3. VIGA BIAPOYADA CON CARGA PUNTUAL

#### E.3.1. SOLUCIÓN 0: ESTÁTICA

Para la viga biapoyada con carga puntual en el centro de luz, por ser una estructura isostática, se pueden obtener los esfuerzos por equilibrio estático, los cuales están representados en la figura (E.3) junto con el convenio de signos de esfuerzos utilizado.

$$0 \leq z \leq \frac{L}{2}$$

$$M_x(z) = \frac{F_y}{2} \cdot z \quad (\text{E.15})$$

$$Q_y(z) = \frac{F_y}{2} \quad (\text{E.16})$$

#### E.3.2. SOLUCIÓN 1: TEORÍA CLÁSICA

A la solución general obtenida en un apartado anterior, ecuaciones (E.7) y (E.8), se le impone las siguientes condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned}
 p_y &= 0 \\
 u_y(0) &= 0 \\
 M_x(0) &= E_o \cdot I_x \cdot \theta'_x(0) = 0 \\
 Q_y\left(\frac{L}{2}\right) &= G_o \cdot A_y \cdot \left( u'_y\left(\frac{L}{2}\right) + \theta_x\left(\frac{L}{2}\right) \right) = \frac{F_y}{2} \\
 \theta_x\left(\frac{L}{2}\right) &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

Los parámetros incógnitas de la solución general que se obtienen son los siguientes:

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_1 &= \frac{F_y L^2}{16 E_o I_x} + \frac{F_y}{2 G_o A_y} \\
 a_3 &= -\frac{F_y}{12 E_o I_x} \\
 b_1 &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo los parámetros anteriores en la solución general, las funciones solución son:

$$u_y = \frac{F_y}{E_o I_x} \left( -\frac{z^3}{12} + \left( \frac{L^2}{16} + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{1}{2} \right) z \right)$$

$$\theta_x = \frac{F_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^2}{4} - \frac{L^2}{16} \right)$$

La flecha en el centro de la luz y el giro en el apoyo resultan:

$$\boxed{u_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F_y L^3}{48 E_o I_x} \left( 1 + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{12}{L^2} \right)}$$

$$u'_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{F_y}{2 G_o A_y}$$

$$\theta_x(0) = -\frac{F_y L^2}{16 E_o I_x}$$

$$\theta_x\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

Estos valores son los correspondientes a la izquierda de la posición de la carga puntual  $z < L/2$ . A la derecha de la posición de la carga teniendo en cuenta las simetrías de la solución:

$$u'_y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{F_y}{2 G_o A_y}$$

En el punto de aplicación de la carga puntual hay continuidad del movimiento  $u_y$  y del giro  $\theta_x$ , pero no hay continuidad de la derivada del movimiento  $u'_y$ , para que se pueda producir una deformación de cortante ( $u'_y + \theta_x$ ) con distinto signo a cada lado de la carga puntual.

### E.3.3. SOLUCIÓN 2: INTEGRACIÓN DE ALABEOS

En esta apartado se sigue el mismo proceso realizado para en el cálculo de la viga biapoyada con carga continua. Por integración de los momentos se obtienen los giros:

$$\frac{d\theta_x}{dz} = \frac{M_x}{E_o I_x} = \frac{F_y z}{2 E_o I_x}$$

$$\theta_x = \frac{F_y z^2}{4 E_o I_x} + b_o$$

Imponiendo la condición de contorno ( $\theta_x(L/2) = 0$ ) se obtiene el parámetro incógnita:

$$b_o = -\frac{F_y L^2}{16 E_o I_x}$$

$$\theta_x = \frac{F_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^2}{4} - \frac{L^2}{16} \right)$$

Por integración de los cortantes se obtiene el movimiento vertical:

$$\frac{d^3 u_y}{dz^3} = -\frac{Q_y}{E_o I_x} = -\frac{F_y}{2 E_o I_x}$$

$$u_y = -\frac{F_y z^3}{12 E_o I_x} + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Imponiendo las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} u_y(0) &= 0 \\ M_x(0) &= E_o \cdot I_x \cdot \theta'_x(0) = 0 \\ Q_y \left( \frac{L}{2} \right) &= G_o \cdot A_y \cdot \left( u'_y \left( \frac{L}{2} \right) + \theta_x \left( \frac{L}{2} \right) \right) = \frac{F_y}{2} \end{aligned} \right\}$$

Se obtienen los parámetros incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{F_y L^2}{16 E_o I_x} + \frac{F_y}{2 G_o A_y} \\ a_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Siendo la solución:

$$u_y = \frac{F_y}{E_o I_x} \left( -\frac{z^3}{12} + \left( \frac{L^2}{16} + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{1}{2} \right) z \right)$$

Que proporciona la misma flecha y giro en el apoyo que la obtenida en el apartado anterior mediante la teoría clásica. Por ser el cortante constante, al obtener las tensiones normales no hay efecto de arrastre de cortante en las mismas.

$$\sigma_z = E \left( -y \frac{d^2 u_y}{dx^2} + \frac{w_y}{G_o} \frac{dQ_y}{dz} \right) = -E y \frac{d^2 u_y}{dx^2} = \frac{F_y y}{I_x} \frac{z}{2}$$

### E.3.4. SOLUCIÓN 3: ECUACIÓN DIFERENCIAL

A la solución general dada por las ecuaciones (E.13) y (E.14) se les impone las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} u_y(0) &= 0 \\ M_x(0) = E_o \cdot I_x \cdot \theta'_x(0) &= 0 \\ \theta_x \left( \frac{L}{2} \right) &= 0 \\ Q_y \left( \frac{L}{2} \right) = G_o \cdot A_y \cdot \left( u_y' \left( \frac{L}{2} \right) + \theta_x \left( \frac{L}{2} \right) \right) &= \frac{F_y}{2} \end{aligned} \right\}$$

Con las que se obtienen los parámetros incógnitas siguientes:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= \frac{F_y L^2}{16 E_o I_x} + \frac{F_y}{2 G_o A_y} \\ a_2 &= 0 \\ b_0 &= -\frac{F_y L^2}{16 E_o I_x} \end{aligned} \right\}$$

Quedando la misma solución que en el apartado anterior.

$$u_y = \frac{F_y}{E_o I_x} \left( -\frac{z^3}{12} + \left( \frac{L^2}{16} + \frac{E_o I_x}{G_o A_y} \frac{1}{2} \right) z \right)$$

$$\theta_x = \frac{F_y}{E_o I_x} \left( \frac{z^2}{4} - \frac{L^2}{16} \right)$$

## E.4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Para el modo resistente de cortante, en la expresión del movimiento longitudinal (3.20) aparece el cortante:

$$v_z = -y \cdot \frac{du_y}{dz} + w_y \cdot \frac{Q_y}{G_o}$$

Se ha visto que para resolver un problema incluyendo el arrastre de cortante, se puede plantear un sistema de ecuaciones diferenciales (E.11) con sus condiciones de contorno (E.12) obtenido minimizando un funcional de energía (E.10), siendo las funciones incógnitas los movimientos  $u_y$  y los giros  $\theta_x$ . Para conseguirlo se ha eliminado el cortante  $Q_y$  de la expresión del alabeo utilizando la relación:

$$Q_y = \frac{1}{G \cdot A_y} \cdot \left( \frac{du_y}{dz} + \theta_x \right)$$

Se ha resuelto dos ejemplos de una viga biapoyada con carga continua y con carga puntual. Para el caso de carga continua las funciones solución son continuas en toda la viga, pero para el caso de la carga puntual los resultados que se han representado en la figura (E.4), presentan una discontinuidad en el valor de la derivada de la flecha.

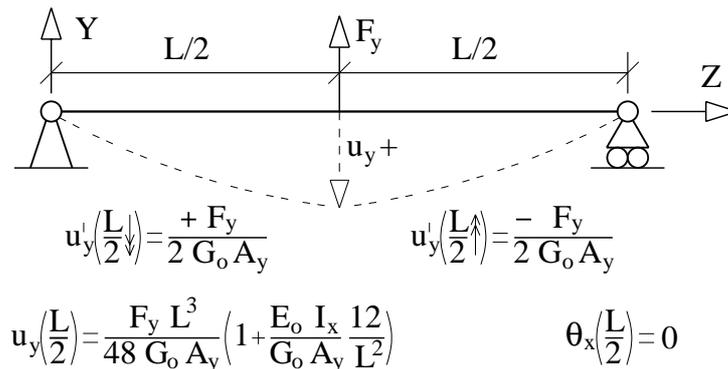


Figura E.4: Viga biapoyada con carga puntual: movimientos

Si se pretende resolver este problema mediante el método de los elementos finitos, como el funcional de energía (E.10) depende de las derivadas segundas de  $u''_y$ , es necesario establecer en los nudos la continuidad de las derivadas primeras  $u'_y$ , tal como indica O.C. Zienkiewicz [45]. Pero en los puntos donde se aplica una carga puntual, para que el cortante tenga signo contrario a cada lado de la carga, es necesario que no haya continuidad de las derivadas primeras del movimiento  $u'_y$ . Y lo mismo es aplicable al caso de un apoyo intermedio de una viga.

Por lo tanto, como para resolver el problema mediante el método de los elementos finitos se tienen condiciones contrapuestas sobre la continuidad de la primera derivada del movimiento, no es posible llevarla a cabo para un caso general de carga.

## Apéndice F

# ELEMENTO UNIDIMENSIONAL: FUNCIONES DE FORMA

Para las funciones de forma  $N_i$  y  $P_i$  de ecuaciones (4.17) y (4.18), los valores exactos de las integrales necesarias para obtener la matriz de rigidez y de fuerzas, son las siguientes.

$$\int_{z=0}^L \mathbf{N}_i \, dz = C_1 \cdot \frac{L}{2}$$

$i$	$C_1$
1	1/3
2	4/3
3	1/3

$$\int_{z=0}^L \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j \, dz = C_2 \cdot \frac{L}{2}$$

$C_2$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	4/15	2/15	-1/15
$i = 2$	2/15	16/15	2/15
$i = 3$	-1/15	2/15	4/15

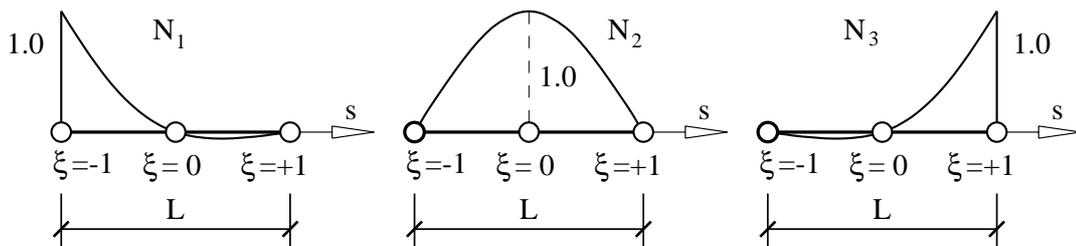


Figura F.1: Funciones de forma  $N_i$ .

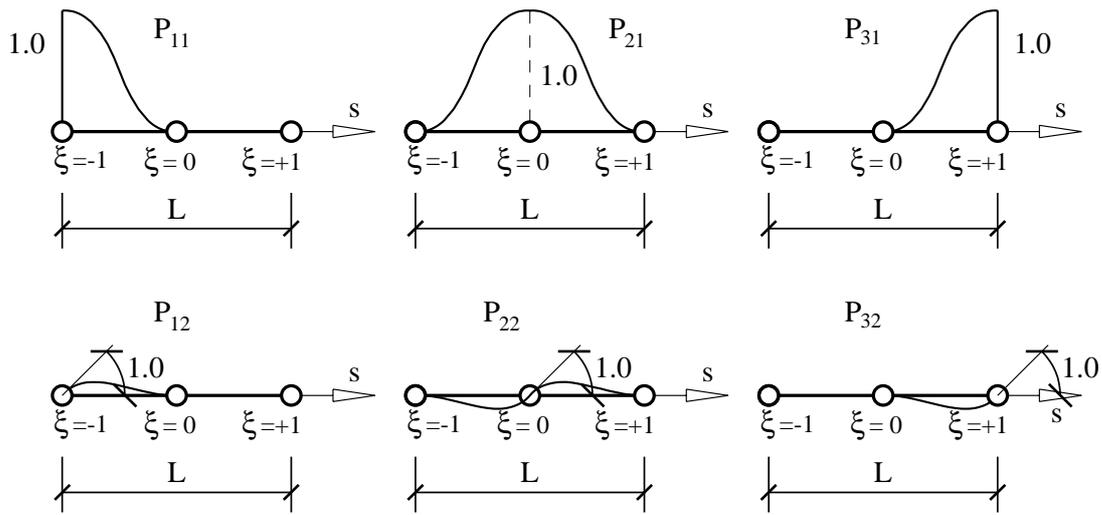


Figura F.2: Funciones de forma  $P_i$ .

$$\int_{z=0}^L \frac{dN_i}{dz} \frac{dN_j}{dz} dz = C_3 \cdot \frac{2}{L}$$

$C_3$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	7/6	-4/3	1/6
$i = 2$	-4/3	8/3	-4/3
$i = 3$	1/6	-4/3	7/6

$$\int_{z=0}^L N_i \frac{dN_j}{dz} dz = C_4$$

$C_4$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	-1/2	2/3	-1/6
$i = 2$	-2/3	0	3/3
$i = 3$	1/6	-2/3	1/2

$$\int_{z=0}^L \mathbf{P}_i dz = D_1 \cdot \frac{L}{2}$$

$i$	$D_1$
11	1/2
22	$L/24$
21	1
22	0
31	1/2
32	$-L/24$

$$\int_{z=0}^L \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j \, dz = D_2 \cdot \frac{L}{2}$$

$D_2$	$j = 11$	$j = 12$	$j = 21$	$j = 22$	$j = 31$	$j = 32$
$i = 11$	13/35	11 $L/420$	9/70	-13 $L/840$	0	0
$i = 12$	11 $L/420$	$L^2/420$	13 $L/840$	$-L^2/560$	0	0
$i = 21$	9/70	13 $L/840$	26/35	0	9/70	-13 $L/840$
$i = 22$	-13 $L/840$	$-L^2/560$	0	$L^2/210$	13 $L/840$	$-L^2/560$
$i = 31$	0	0	9/70	13 $L/840$	13/35	-11 $L/420$
$i = 22$	0	0	-13 $L/840$	$-L^2/560$	-11 $L/420$	$L^2/420$

$$\int_{z=0}^L \frac{d\mathbf{P}_i}{dz} \frac{d\mathbf{P}_j}{dz} \, dz = D_3 \cdot \frac{2}{L}$$

$D_3$	$j = 11$	$j = 12$	$j = 21$	$j = 22$	$j = 31$	$j = 32$
$i = 11$	6/5	$L/20$	-6/5	$L/20$	0	0
$i = 12$	$L/20$	$L^2/30$	$-L/20$	$-L^2/120$	0	0
$i = 21$	-6/5	$-L/20$	12/5	0	-6/5	$L/20$
$i = 22$	$L/20$	$-L^2/120$	0	$L^2/15$	$-L/20$	$-L^2/120$
$i = 31$	0	0	-6/5	$-L/20$	6/5	$-L/20$
$i = 22$	0	0	$L/20$	$-L^2/120$	$-L/20$	$L^2/30$

$$\int_{z=0}^L \frac{d^2\mathbf{P}_i}{dz^2} \frac{d^2\mathbf{P}_j}{dz^2} \, dz = D_4 \cdot \left(\frac{2}{L}\right)^3$$

$D_4$	$j = 11$	$j = 12$	$j = 21$	$j = 22$	$j = 31$	$j = 32$
$i = 11$	12	3 $L$	-12	3 $L$	0	0
$i = 12$	3 $L$	$L^2$	-3 $L$	$L^2/2$	0	0
$i = 21$	-12	-3 $L$	24	0	-12	3 $L$
$i = 22$	3 $L$	$L^2/2$	0	2 $L^2$	-3 $L$	$L^2/2$
$i = 31$	0	0	-12	-3 $L$	12	-3 $L$
$i = 22$	0	0	3 $L$	$L^2/2$	-3 $L$	$L^2$

$$\int_{z=0}^L \frac{d\mathbf{P}_i}{dz} \mathbf{N}_j \, dz = E_1$$

$E_1$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 11$	-2/5	-7/10	1/10
$i = 12$	11 $L/240$	$-L/20$	$L/240$
$i = 21$	1/2	0	-1/2
$i = 22$	$-L/30$	$L/15$	$-L/30$
$i = 31$	-1/10	7/10	2/5
$i = 22$	$L/240$	$-L/20$	11 $L/240$

$$\int_{z=0}^L \frac{dP_i}{dz} \frac{dN_j}{dz} dz = E_2 \cdot \frac{2}{L}$$

$E_2$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 11$	1	-1	0
$i = 12$	$-L/24$	$L/12$	$-L/24$
$i = 21$	-1	2	-1
$i = 22$	0	0	0
$i = 31$	0	-1	1
$i = 22$	$L/24$	$-L/12$	$L/24$

$$\int_{z=0}^L \frac{d^2P_i}{dz^2} \frac{dN_j}{dz} dz = E_3 \cdot \left(\frac{2}{L}\right)^2$$

$E_3$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 11$	1	-2	1
$i = 12$	$3 L/4$	$-L$	$L/4$
$i = 21$	0	0	0
$i = 22$	0	0	0
$i = 31$	-1	2	-1
$i = 22$	$L/4$	$-L$	$3 L/4$

## Apéndice G

# DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DE UN MODELO M.E.F.

### G.1. INTRODUCCIÓN

Al realizar un cálculo de una estructura con secciones de paredes delgadas con un modelo tridimensional de elementos finitos, ya sea con sólidos o con láminas, se obtiene en cada punto del modelo el valor de cada tensión o movimiento. Siendo estos valores la respuesta conjunta de la estructura con todos sus modos resistentes.

Si se tienen definidos los modos resistentes de la sección, se puede plantear una ecuación para cada punto, en que el valor de la tensión o movimiento conocido que son funciones de función de  $(x, y, z)$ , se expresen como combinación de los valores conocidos de los modos resistentes que son funciones de  $(x, y)$  y de los movimientos o deformaciones generalizadas que son las incógnitas, y que son funciones de  $(z)$ . Como lo normal es que se puedan plantear más ecuaciones que incógnitas, hay que recurrir a métodos estadísticos para obtener una solución que minimice el error.

### G.2. DESCOMPOSICIÓN DE TENSIONES

De acuerdo con las ecuaciones (4.7) y (4.9) las tensiones longitudinales en una sección de paredes delgadas vienen dadas por la siguiente expresión, donde el símbolo (') indica derivación respecto de la coordenada longitudinal  $z$ .

$$\begin{aligned}\sigma_z = & + (E) u'_z + (E y) \theta'_x + (E w_{yo} A_y) \chi'_y \\ & + (-E x) \theta'_y + (E w_{xo} A_x) \chi'_x + (E w_d) \theta''_z + (-E w_d) \psi''_d\end{aligned}$$

Que se puede expresar de forma simplificada como suma del producto de la tensión para deformación generalizada de valor unidad de cada modo, por el valor de dicha deformación generalizada:

$$\sigma_z(x, y, z) = \sum \sigma_{z,i}(x, y) \epsilon_{g,i}(z)$$

Si en cada punto  $(x_j, y_j)$  con tensión conocida  $\sigma_{z,j}$  de la sección situada en la coordenada  $z_i$ , se plantea la ecuación anterior, queda el sistema de ecuaciones:

$$\{\sigma_{z,j}\} = [\sigma_{z,i}(x_j, y_j)] \cdot \{\epsilon_{g,i}(z_i)\}$$

Si el número de puntos con tensión conocida fuera igual al número de modos considerados se tendría un sistema lineal de ecuaciones. Pero en general, se pueden plantear más ecuaciones que incógnitas, momento en que entra en juego la estadística mediante el *Modelo de regresión lineal general* que permite obtener los valores de las incógnitas que ajustan mejor las ecuaciones.

De la misma forma para las tensiones tangenciales se utilizan las ecuaciones (4.8) y (4.10). Indicando con el símbolo  $(r)$  que es una derivada respecto de las coordenadas  $z$  o  $s$ , según cual sea la variable de la función que es derivada, se tiene:

$$\begin{aligned} \tau_{sz} = & + (G t_x) (u'_x - \theta_y) + (G w'_{xo} A_x) \chi_x \\ & + (G t_y) (u'_y + \theta_x) + (G w'_{yo} A_y) \chi_y \\ & + G (w'_a - h_a) \theta'_z + G (u_{ds} - w'_d) \psi'_d \\ & + (G w'_{at}) \theta'''_z + (G w'_{dt}) \psi'''_d \end{aligned}$$

Cuando variables incógnitas aparecen multiplicadas por el mismo coeficiente conocido sólo es posible obtener su suma, como es el caso de las que sumadas dan las deformaciones por cortante  $(u'_x - \theta_y)$  y  $(u'_y + \theta_x)$ . Suele ocurrir que se cumple la proporcionalidad siguiente  $t_d/t_a = (u_{ds} - w'_d)/(w'_a - h_a) = C$ , en cuyo caso sólo es posible obtener el valor conjunto de  $(\theta'_z + C \cdot \psi'_d)$ .

### G.3. DESCOMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Para descomponer los tres movimientos  $\{v_x, v_y, v_z\}$  de los puntos de una sección en los correspondientes a cada modo, se partirá del campo de movimientos (4.6) definido en el apartado 4.4, que se reproduce a continuación.

Modo	$\mathbf{v}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\mathbf{v}_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$
<i>Axil</i>			$1 \cdot u_z$
<i>Flexión y - z</i>		$1 \cdot u_y$	$y \cdot \theta_x$
<i>Cortante y</i>			$w_{yo} \cdot A_y \cdot \chi_y$
<i>Flexión x - z</i>	$1 \cdot u_x$		$-x \cdot \theta_y$
<i>Cortante x</i>			$w_{xo} \cdot A_x \cdot \chi_x$
<i>Torsión</i>	$-(y - y_a) \cdot \theta_z$	$(x - x_a) \cdot \theta_z$	$+w_a \cdot \frac{d\theta_z}{dz} + w_{at} \cdot \frac{d^3\theta_z}{dz^3}$
<i>Distorsión</i>	$u_{dx} \cdot \psi_d$	$u_{dy} \cdot \psi_d$	$-w_d \cdot \frac{d\psi_d}{dz} + w_{dt} \cdot \frac{d^3\psi_d}{dz^3}$

## G.4. MODELO DE REGRESIÓN LINEAL GENERAL

Teniendo  $n$  datos y  $p$  incógnitas, se quiere realizar un ajuste de datos, expresado mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{Y\} = [X] \cdot \{\beta\} + \{\epsilon\}$$

Donde  $\{Y\}$  y  $[X]$  se corresponden con los  $n$  datos conocidos,  $\{\beta\}$  son los  $p$  parámetros a determinar, y  $\{\epsilon\}$  son los residuos en el ajuste de datos. De acuerdo con A. Luceño [70] el valor estimado de máxima verosimilitud, denotado por el símbolo ( $\hat{\cdot}$ ), viene dado por:

$$\{\hat{\beta}\} = ([X]^t \cdot [X])^{-1} \cdot ([X]^t \cdot \{Y\})$$

La estimación de la media de la respuesta viene dada por:

$$\{\hat{\mu}\} = [X] \cdot \{\hat{\beta}\}$$

Por lo que los residuos, diferencia entre el valor observado y el estimado son:

$$\{\epsilon\} = \{Y\} - \{\hat{\mu}\} = \{Y\} - [X] \cdot \{\hat{\beta}\}$$

Como estimador de la varianza  $\sigma^2$  se utiliza el estimador  $s^2$ , que se obtiene con la expresión:

$$\{s^2\} = \frac{1}{n-p} \cdot (\{Y\} - [X] \cdot \{\hat{\beta}\})^t \cdot (\{Y\} - [X] \cdot \{\hat{\beta}\}) = \frac{1}{n-p} \cdot \{\epsilon\}^t \cdot \{\epsilon\}$$

Para medir la bondad del ajuste se puede calcular el coeficiente de determinación o coeficiente de correlación múltiple al cuadrado  $R^2$ . Es un valor comprendido entre cero y uno, y viene dado por:

$$y_m = \frac{\sum Y_i}{n}$$

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{\mu}_i - y_m)^2}{\sum (Y_i - y_m)^2}$$

En el caso de que la matriz de diseño  $[X]$  no tenga una columna de unos (1.0), en vez de la expresión anterior se debe de utilizar la siguiente:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{\mu}_i)^2}{\sum (Y_i)^2}$$

## G.5. EJEMPLO DE DESCOMPOSICIÓN DE TENSIONES

Como ejemplo de la forma de realizar la descomposición se aplica a los resultados del ejemplo de la viga biapoyada con carga continua y sección rectangular del apartado E.2.5. En la sección por centro de luz las tensiones  $\sigma_z$  obtenidas del modelo de elementos finitos con láminas en las esquinas y centro de las tablas superior e inferior son:

$i$	$x_i$ (m)	$y_i$ (m)	$z_i$ (m)	$\sigma_{z,i}$ (kN/m <sup>2</sup> )	$w_y$ (1/m)	$w_{yo}$ (1/m)
1	-3.00	1.50	7.50	-3916.0	1.2500	-0.6173
2	0.00	1.50	7.50	-2800.0	2.3214	0.4541
3	+3.00	1.50	7.50	-3916.0	1.2500	-0.6173
4	-3.00	-1.50	7.50	+3989.0	-1.2500	0.6173
5	0.00	-1.50	7.50	+2903.0	-2.3214	-0.4541
6	+3.00	-1.50	7.50	+3989.0	-1.2500	0.6173

Se desea descomponer las tensiones según la siguiente expresión:

$$\sigma_z = (E \cdot y) \cdot \theta'_x + E \cdot \left( w_y - \frac{y}{A_y} \right) \cdot A_y \cdot \chi'_y = (E \cdot y) \cdot \theta'_x + (E \cdot w_{yo} \cdot A_y) \cdot \chi'_y$$

La función de alabeo  $w_y$  es la definida en la figura (D.3)<sup>1</sup>, el área de cortante  $A_y$  viene dada por la ecuación (D.1) y la función de alabeo  $w_{yo}$  está representada en la figura (5.3)<sup>2</sup>, siendo por tanto todos ellos valores conocidos. Para cada punto con tensión conocida dicha expresión proporciona una ecuación en que las incógnitas son  $\theta'_x$  y  $\chi'_y$ .

$$\{\sigma_{z,i}\} = [E \cdot y_i \mid E \cdot w_{yo,i} \cdot A_y] \begin{Bmatrix} \theta'_x \\ \chi'_y \end{Bmatrix}$$

Como se tienen seis puntos con tensiones conocidas, se obtiene un sistema de seis ecuaciones con dos incógnitas:

$$\{Y\} = [X] \cdot \{\beta\}$$

$$\{Y\} = \{\sigma_{z,i}\} = \begin{Bmatrix} -3916.0 \\ -2800.0 \\ -3916.0 \\ +3989.0 \\ +2903.0 \\ +3989.0 \end{Bmatrix}$$

$$\{X\} = [E \cdot y_i \mid E \cdot w_{yo,i}] = \left[ \begin{array}{cc|c} 4.500 \cdot 10^7 & -1.8520 \cdot 10^7 & \\ 4.500 \cdot 10^7 & 1.3622 \cdot 10^7 & \\ 4.500 \cdot 10^7 & -1.8520 \cdot 10^7 & \\ \hline -4.500 \cdot 10^7 & 1.8520 \cdot 10^7 & \\ -4.500 \cdot 10^7 & -1.3620 \cdot 10^7 & \\ -4.500 \cdot 10^7 & 1.8520 \cdot 10^7 & \end{array} \right]$$

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} \theta'_x \\ \chi'_y \end{Bmatrix}$$

<sup>1</sup>Página 314

<sup>2</sup>Página 125

De acuerdo con el modelo de regresión lineal general el valor estimado de máxima verosimilitud de los parámetros es:

$$\begin{aligned}
 \{\hat{\beta}\} &= ([X]^t \cdot [X])^{-1} \cdot ([X]^t \cdot \{Y\}) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1.215 \cdot 10^{16} & -1.094 \cdot 10^{15} \\ -1.095 \cdot 10^{15} & 4.703 \cdot 10^{14} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} -9.681 \cdot 10^{11} \\ 1.117 \cdot 10^{11} \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1.041 \cdot 10^{-16} & 2.424 \cdot 10^{-16} \\ 2.424 \cdot 10^{-16} & 2.690 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -9.681 \cdot 10^{11} \\ 1.117 \cdot 10^{11} \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} -7.374 \cdot 10^{-5} \\ 6.594 \cdot 10^{-5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta'_x \\ \chi'_y \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Con los parámetros se puede obtener primero la estimación de las tensiones que da el modelo de regresión lineal, y restándolas a las tensiones que se tenían como datos se obtienen los residuos. Si al obtener los valores estimados, se multiplica cada columna de la matriz  $[X]$  por el parámetro correspondiente, se puede obtener la descomposición de las tensiones.

$$\begin{aligned}
 \{\hat{\mu}\} &= [X] \cdot \{\hat{\beta}\} = \begin{Bmatrix} -3318.1 - 634.4 \\ -3318.1 + 466.6 \\ -3318.1 - 634.4 \\ +3318.1 + 634.4 \\ +3318.1 - 466.6 \\ +3318.1 + 634.4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3952.5 \\ -2851.5 \\ -3952.5 \\ 3952.5 \\ 2851.5 \\ 3952.5 \end{Bmatrix} = \{\sigma_{z,i}\} \\
 \{\epsilon\} &= \{Y\} - \{\hat{\mu}\} = \{Y\} - [X] \cdot \{\hat{\beta}\} = \begin{Bmatrix} 36.5 \\ 51.5 \\ 36.5 \\ 36.5 \\ 51.5 \\ 36.5 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Las tensiones totales del modelo de elementos finitos y su descomposición en tensiones parciales se han representado en la figura (G.1).

Para comprobar la bondad del modelo de regresión se calcula el coeficiente de determinación. El valor que se obtiene es muy cercano a la unidad, lo que significa que el modelo de regresión utilizado en este ejemplo es muy adecuado.

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{\mu}_i)^2}{\sum(Y_i)^2} = \frac{7.8751 \cdot 10^7}{7.8762 \cdot 10^7} = 0.99986$$

La regresión se ha realizado en la sección por centro luz, por lo que los parámetros obtenidos son más concretamente  $\theta'_x(L/2)$  y  $\chi'_y(L/2)$ . Si se realiza la regresión de tensiones en más secciones a lo largo de la pieza, lo que se obtiene es una estimación de las funciones  $\theta'_x(z)$  y  $\chi'_y(z)$ .

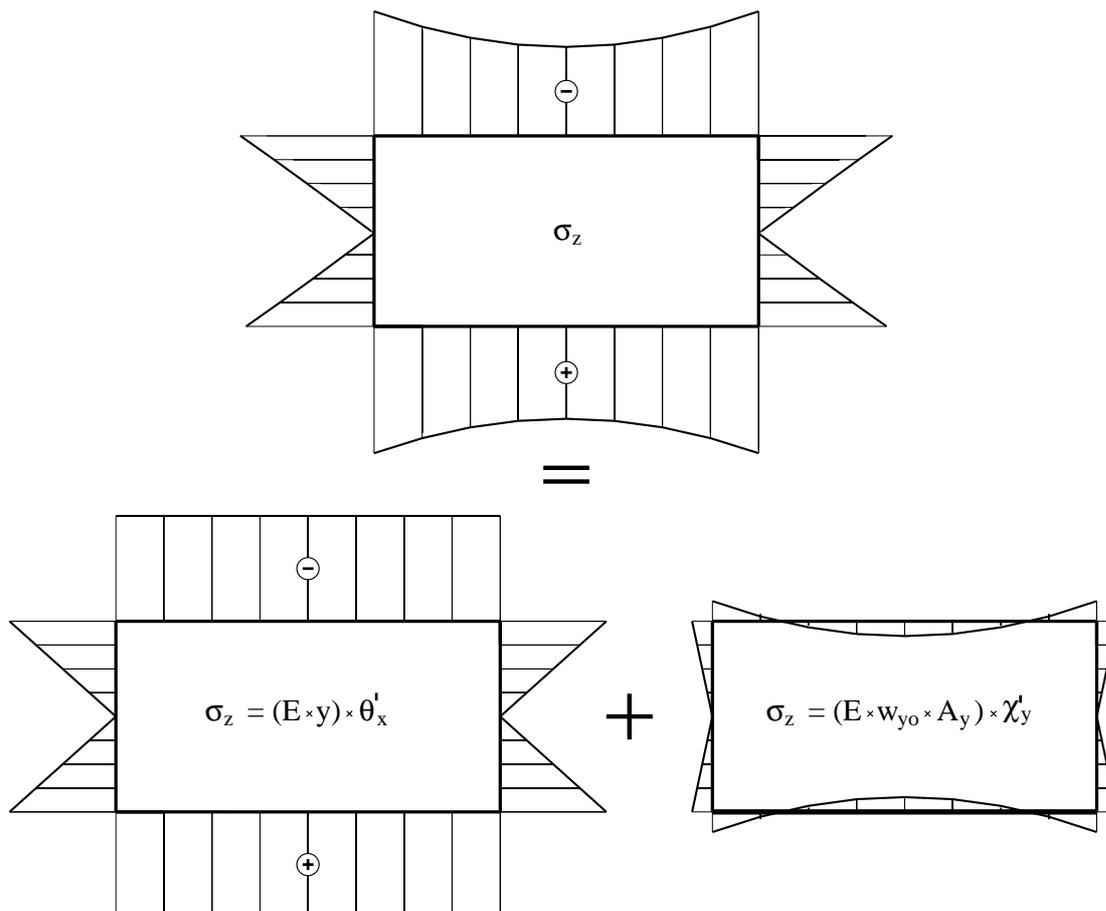


Figura G.1: Tensiones longitudinales  $\sigma_z$  en sección por centro de luz, y su descomposición.

## Apéndice H

# SECCIÓN CAJÓN. CÁLCULO CONVENCIONAL

### H.1. INTRODUCCIÓN

En el presente apéndice se incluyen las características mecánicas para una sección cajón unicelular obtenidas utilizando la teoría convencional de *Resistencia de Materiales*. La mayor parte de las expresiones se pueden encontrar en la bibliografía, siendo otras de elaboración propia. La geometría de la sección tipo se ha representado en la figura (H.1), para la cual se ha tomado la misma notación que la utilizada por J. Schlaich [43].

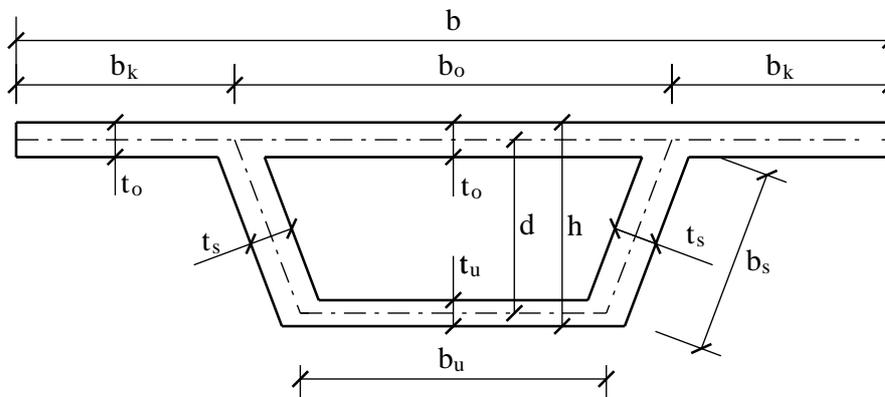


Figura H.1: Sección cajón. Geometría tipo.

Excepto para el modo de distorsión, el resto de los resultados coinciden con los que se obtienen con la metodología de obtención con elementos finitos de los modos resistentes expuesta en el apartado 3. Los motivos de las diferencias para el modo de distorsión se explican en el apartado 6.3.

## H.2. AXIL Y FLEXIÓN

Longitud del alma:

$$b_s = \sqrt{d^2 + \left(\frac{b_o - b_u}{2}\right)^2}$$

Área:

$$A = b \cdot t_o + 2 \cdot b_s \cdot t_s + b_u \cdot t_u$$

Centro de gravedad. Distancia a la fibra superior  $u_s$  y a la inferior  $u_i$ .

$$u_s = \frac{(b_s \cdot t_s + b_u \cdot t_u) \cdot d}{A}$$

$$u_i = d - u_s$$

Inercias de flexión en las que se han despreciado las inercias de las tablas superior e inferior respecto de sus ejes:

$$I_x = b \cdot t_o \cdot u_s^2 + 2 \cdot (u_s^2 - u_s \cdot u_i + u_i^2) \cdot \frac{t_s \cdot b_s}{3} + b_u \cdot t_u \cdot u_i^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot t_o \cdot b^3 + \frac{1}{12} \cdot t_u \cdot b_u^3 + \frac{1}{6} \cdot t_s \cdot b_s \cdot (b_o^2 + b_o \cdot b_u + b_u^2)$$

## H.3. CORTANTE

Las tensiones tangenciales por cortante unidad ( $Q_y = 1$ ) en dirección  $y$  representadas en la figura (H.2), se obtienen con la fórmula de Collignon-Jourawski y teniendo en cuenta que por simetría en el centro de las tablas superior e inferior la tensión tangencial es nula.

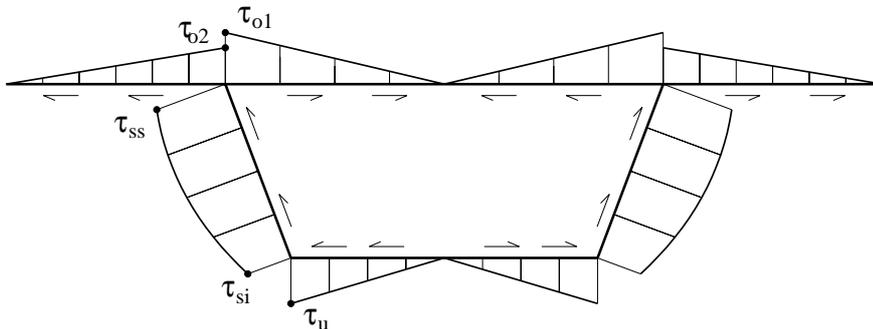


Figura H.2: Sección cajón. Tensiones tangenciales por cortante  $Q_y$ .

Extremo de la tabla superior entre almas:

$$\tau_{o1} = \frac{u_s \cdot b_o}{2 \cdot I_x}$$

Arranque del voladizo:

$$\tau_{o2} = \frac{u_s \cdot (b - b_o)}{2 \cdot I_x}$$

Extremo superior del alma:

$$\tau_{ss} = \frac{u_s \cdot t_o \cdot b}{2 \cdot t_s \cdot I_x}$$

Extremo inferior del alma:

$$\tau_{si} = \frac{(d - u_s) \cdot t_u \cdot b_u}{2 \cdot t_s \cdot I_x}$$

Extremo de la tabla inferior:

$$\tau_u = \frac{(d - u_s) \cdot b_u}{2 \cdot I_x}$$

Áreas de cortante con deformación transversal constante:

$$D_{xx} = b \cdot t_o + b_u \cdot t_u + 2 \cdot b_s \cdot t_s \cdot \left( \frac{b_o - b_u}{2 \cdot b_s} \right)^2$$

$$D_{yy} = 2 \cdot b_s \cdot t_s \cdot \left( \frac{d}{b_s} \right)^2$$

Área de cortante por el método energético:

$$t_1 = \frac{d - u_s}{I_x} \cdot \frac{t_u \cdot b_u}{2 \cdot t_s}$$

$$t_2 = \frac{d - u_s}{I_x}$$

$$t_3 = \frac{d}{2 \cdot b_s \cdot I_x}$$

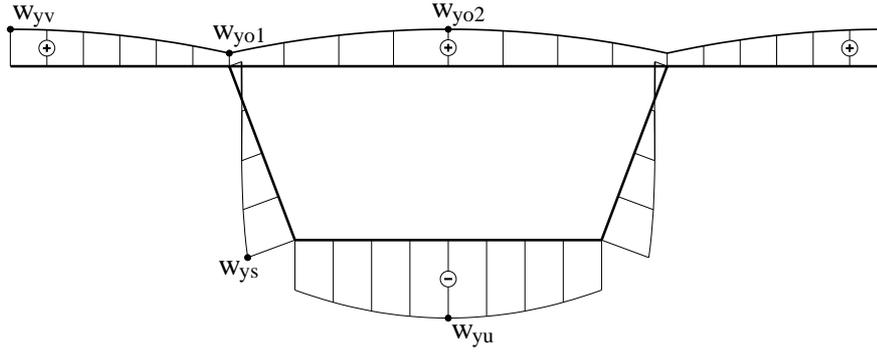
$$a_1 = \frac{u_s^2 \cdot (b - b_o)^3 \cdot t_o}{24 \cdot I_x^2} + \frac{u_s^2 \cdot b_o^3 \cdot t_o}{24 \cdot I_x^2} + \frac{(d - u_s)^2 \cdot b_u^3 \cdot t_u}{24 \cdot I_x^2}$$

$$a_2 = \left( t_1^2 \cdot b_s + t_1 \cdot t_2 \cdot b_s^2 + \frac{1}{3} \cdot (t_2^2 - 2 \cdot t_1 \cdot t_3) \cdot b_s^3 - \frac{1}{2} \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot b_s^4 + \frac{1}{5} \cdot t_3^2 \cdot b_s^5 \right) \cdot t_s$$

$$A_y = \frac{1}{2 \cdot (a_1 + a_2)}$$

La función de alabeo de cortante  $w_y$  representada en la figura (H.3) se obtiene como sigue. Mediante la ecuación (3.22) que relaciona las tensiones tangenciales de cortante con la función de alabeo  $w_y$ , se puede obtener esta última. Con cortante unidad ( $Q_y = 1$ ) y módulo de elasticidad transversal constante  $G = G_o$ , a partir de dicha fórmula la función de alabeo  $w_y$  se obtiene mediante la integral:

$$w_y(s) = w_{yu} + \int_0^s \tau(s) ds = w_{yu} + w_y^*(s)$$


 Figura H.3: Sección cajón. Función de alabeo  $w_y$  de cortante  $Q_y$ .

Siendo  $w_{yu}$  una constante de integración, que es el alabeo en el punto que se tome como origen en la integración, como por ejemplo el centro de la tabla inferior. Esta constante se obtiene normalizando la función de alabeo respecto del axil:

$$w_{yu} = - \frac{\int_A w_y^* dA}{A}$$

Y la función de alabeo ortogonalizada respecto al giro se obtendrá con la ecuación:

$$w_{yo}(s) = w_y(s) - \frac{y}{A_y}$$

Variables auxiliares:

$$C_{inf} = \frac{d - u_s}{I_x} \cdot \frac{b_u^2}{8}$$

$$C_{sup} = C_{inf} + \frac{d - u_s}{I_x} \frac{t_u}{t_s} \frac{b_u}{2} b_s + \frac{1}{I_x} \left( (d - u_s) \frac{b_s^2}{2} - \frac{d}{b_s} \frac{b_s^3}{6} \right)$$

$$C_{iu} = \frac{d - u_s}{I_x} \frac{b_u^3}{2^3 \cdot 6} t_u$$

$$C_{is} = \left( C_{inf} b_s + \frac{d - u_s}{I_x} \frac{t_u}{t_s} \frac{b_u}{2} \frac{b_s^2}{2} + \frac{1}{I_x} \left( (d - u_s) \frac{b_s^3}{6} - \frac{d}{b_s} \frac{b_s^4}{24} \right) \right) t_s$$

$$C_{iv} = \left( C_{sup} \frac{b - b_o}{2} + \frac{u_s}{I_x} \left( \frac{b - b_o}{2} \right)^3 \frac{1}{2} - \frac{u_s}{I_x} \frac{1}{6} \left( \frac{b - b_o}{2} \right)^3 \right) t_o$$

$$C_{io} = \left( C_{sup} \frac{b_o}{2} + \frac{u_s}{I_x} \left( \frac{b_o}{2} \right)^3 \frac{1}{2} - \frac{u_s}{I_x} \frac{1}{6} \left( \frac{b_o}{2} \right)^3 \right) t_o$$

Centro de la tabla inferior:

$$w_{yu} = - \frac{2(C_{iu} + C_{is} + C_{iv} + C_{io})}{A}$$

Extremo inferior del alma:

$$w_{ys} = w_{yu} + C_{inf}$$

Extremo superior del alma:

$$w_{yo1} = w_{yu} + C_{sup}$$

Extremo del voladizo:

$$w_{yv} = w_{yu} + C_{sup} + \frac{1}{2} \frac{u_s}{I_x} \left( \frac{b - b_o}{2} \right)^2$$

Centro de la tabla superior:

$$w_{yo2} = w_{yu} + C_{sup} + \frac{1}{2} \frac{u_s}{I_x} \left( \frac{b_o}{2} \right)^2$$

## H.4. TORSIÓN UNIFORME

Para obtener la función de alabeo de torsión  $w_a$  en una sección cerrada (véase por ejemplo A. Samartín [68] o H. Nakai [57] ) el procedimiento es el siguiente:

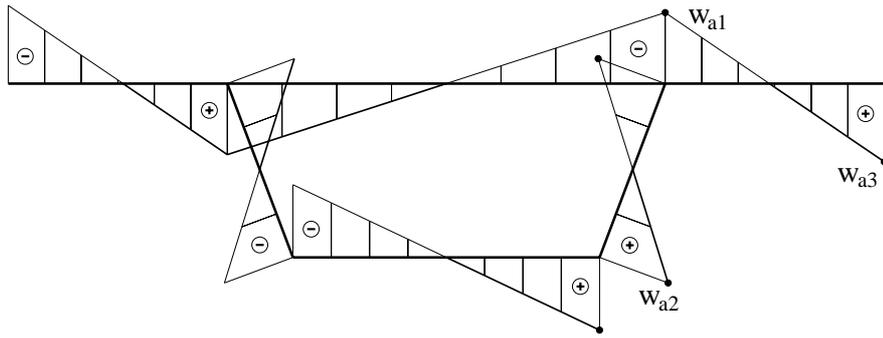
- Se convierte la sección en abierta y se obtienen sus coordenadas sectoriales. Por ejemplo, abriendo la sección por el centro de la tabla inferior y considerando como centro de giro  $(x_b, y_b)$  el centro de la tabla superior, entonces las coordenadas sectoriales son  $w_{b1}(s) (m^2) = \int_o^s h_b ds$ , donde  $h_b$  es la distancia de la pared al centro de giro.
- Para restablecer la continuidad de la sección, es necesaria la existencia de un rasante constante en las paredes del circuito cerrado. Equivale a considerar una función de alabeo  $w_{b2}$  cuya pendiente en cada pared es  $w'_{b2} = p/t(s)$ , donde  $p$  es una constante y  $t(s)$  es el espesor de las paredes. La función de alabeo se obtiene por integración  $w_{b2}(s) (m^2) = \int_o^s (p/t(s)) ds$ .
- Estableciendo que la función de alabeo suma  $w_b(s) = w_{b1}(s) + w_{b2}(s)$  tiene que ser continua en el punto en que se abrió la sección, se obtiene el valor de la constante  $p$ .
- Considerando un nuevo centro de giro  $(x_a, y_a)$  e imponiendo la condición de que no haya momentos flectores, se obtiene el centro de giro y la función de alabeo de torsión buscada  $w_a$ .

Función de alabeo de torsión uniforme. Figura (H.4).

Constante  $p$  obtenida según el procedimiento descrito:

$$p = \frac{-(b_o + b_u) \cdot d}{\frac{b_o}{t_o} + 2 \cdot \frac{b_s}{t_s} + \frac{b_u}{t_u}} = \frac{-2 \cdot A_e}{\sum \frac{L_i}{t_i}}$$

Centro de esfuerzos cortantes, definido por la distancia al borde superior (positiva hacia abajo):


 Figura H.4: Sección cajón. Función de alabeo  $w_a$  de torsión uniforme.

$$w_{b1} = \frac{p \cdot b_o}{2 \cdot t_o}$$

$$w_{b2} = \frac{b_o \cdot d}{2} + \left( \frac{b_o}{2 \cdot t_o} + \frac{b_s}{t_s} \right) \cdot p$$

$$y_a = \frac{-1}{I_y} \left( \left( \frac{t_o b_o^2}{6} + \frac{t_o (b^2 - b_o^2)}{4} + \frac{t_s b_s (2b_o + b_u)}{6} \right) w_{b1} + \left( \frac{t_s b_s (2b_u + b_o)}{6} + \frac{t_u b_u^2}{6} \right) w_{b2} \right)$$

Función de alabeo en extremo superior del alma:

$$w_{a1} = w_{b1} + y_a \cdot \frac{b_o}{2}$$

Extremo inferior del alma:

$$w_{a2} = w_{b2} + y_a \cdot \frac{b_u}{2}$$

Extremo del voladizo:

$$w_{a3} = w_{b1} + y_a \cdot \frac{b}{2}$$

Inercia a torsión:

$$I_t = \frac{(b_o + b_u)^2 \cdot d^2}{\frac{b_o}{t_o} + 2 \cdot \frac{b_s}{t_s} + \frac{b_u}{t_u}} = \frac{4 \cdot A_e^2}{\sum \frac{L_i}{t_i}}$$

Tensión tangencial:

$$\tau_{sz} = \frac{M_{zu}}{I_t} \cdot \frac{p}{t(s)} = \frac{-M_{zu}}{2 \cdot A_e \cdot t(s)}$$

Rasante:

$$q = \tau_{sz} \cdot t(s) = \frac{p}{I_t} \cdot M_{zu} = \frac{-1}{2 \cdot A_e} \cdot M_{zu} = \frac{-1}{(b_o + b_u) \cdot d} \cdot M_{zu}$$

## H.5. TORSIÓN NO UNIFORME

El procedimiento para obtener las tensiones tangenciales por torsión no uniforme es:

- Se convierte la sección en abierta, cortando por ejemplo por el extremo superior del alma izquierda, y en el punto de corte se pone un rasante incógnita  $S_r$  (momento estático sectorial).
- Comenzando a integrar desde el extremo del voladizo izquierdo, donde por condición de contorno la tensión tangencial es nula, se obtienen los momentos estáticos sectoriales  $S_a(s) = \int_0^s w_a(s) t ds$ . Al llegar a un encuentro entre paredes hay que establecer el equilibrio de tensiones tangenciales del nudo, y sumar a la integral la constante apropiada.
- Para obtener la incógnita  $S_r$  se minimiza la energía de deformación de las tensiones tangenciales, obteniéndose la ecuación  $S_r = -(\int (S_a(s)/t) ds) / (\oint (1/t) ds)$ .

Tensiones tangenciales de torsión no uniforme. Figura (H.5).

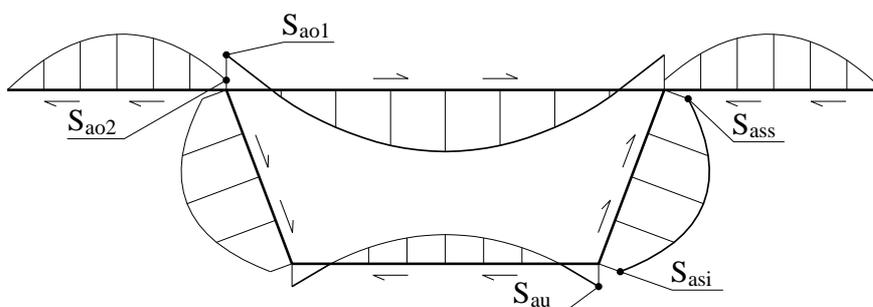


Figura H.5: Tensiones tangenciales  $S_a$  de torsión no uniforme.  $\tau_{sz} = (M_{zw} \cdot S_a)/(I_a \cdot t)$ .

Rasante  $S_r$  en el circuito cerrado:

$$I_{sr} = -\frac{1}{6}w_{a1}b_o^2 - \frac{1}{4}(w_{a1} + w_{a3})(b - b_o)b_o + \frac{1}{3}(2w_{a1} + w_{a2})b_s^2 + \frac{1}{2}(w_{a1} + w_{a2})\frac{t_s}{t_u}b_s b_u + \frac{1}{6}w_{a2}b_u^2$$

$$S_r = \frac{-I_{sr}}{\frac{b_o}{t_o} + 2 \cdot \frac{b_s}{t_s} + \frac{b_u}{t_u}}$$

Extremo de la tabla superior entre almas:

$$S_{a.o1} = -\frac{1}{4}(w_{a1} + w_{a3})(b - b_o)t_o + S_r$$

Arranque del voladizo:

$$S_{a.o2} = -\frac{1}{4}(w_{a1} + w_{a3})(b - b_o)t_o$$

Extremo superior del alma:

$$S_{a.ss} = S_r$$

Extremo inferior del alma:

$$S_{a.si} = +\frac{1}{2} (w_{a1} + w_{a2}) b_s t_s + S_r$$

Extremo de la tabla inferior:

$$S_{a.su} = +\frac{1}{2} (w_{a1} + w_{a2}) b_s t_s + S_r$$

Módulo de alabeo:

$$I_a = w_{a1}^2 \frac{t_o b_o}{3} + (w_{a1}^2 + w_{a1} w_{a3} + w_{a3}^2) \frac{t_o (b - b_o)}{3} + (w_{a1}^2 + w_{a1} w_{a2} + w_{a2}^2) \frac{2 t_s b_s}{3} + w_{a2}^2 \frac{t_u b_u}{3}$$

Siendo  $\theta_z$  el giro de torsión de la sección, y  $m_t$  la carga torsora aplicada, la ecuación diferencial que hay que resolver en problemas con torsión uniforme y no uniforme es:

$$E_o I_a \theta_z^{IV} - G_o I_t \theta_z^{II} = m_t$$

## H.6. DISTORSIÓN

Las características indicadas en este apartado se corresponden con la hipótesis de que la función de alabeo sigue una ley lineal en todo el ancho de la tabla superior de la sección. El desarrollo de las expresiones se puede encontrar en J. Schlaich [43] y J. Manterola [44].

Variabes auxiliares:

$$\alpha_o = \frac{t_o \cdot b^3}{t_s \cdot b_s \cdot b_o^2}$$

$$\alpha_u = \frac{t_u \cdot b_u}{t_s \cdot b_s}$$

$$\beta = \frac{b_u}{b_o}$$

$$\beta^* = \frac{\alpha_o + \beta + 2}{\alpha_u \cdot \beta + 2 \cdot \beta + 1}$$

$$y_o = \frac{1 + 2 \cdot \beta + \alpha_u \cdot \beta}{3 + 3 \cdot \beta + \alpha_o + \alpha_u \cdot \beta} \cdot b_s$$

$$y_u = b_s - y_o$$

$$A_o = \frac{\frac{b^3 \cdot t_o}{b_o} - (2 - \beta^*) \cdot b_s \cdot b_u \cdot t_s}{b_o + b_u}$$

$$A_u = A_o + 3 \cdot (1 - \beta^*) \cdot b_s \cdot t_s$$

$$I_s = \frac{b_s^3 \cdot t_s}{12}$$

$$g = \sqrt{d^2 + \left(\frac{b_o + b_u}{2}\right)^2}$$

$$i_s = \frac{t_s^3}{12}$$

$$i_o = \frac{t_o^3}{12}$$

$$i_u = \frac{t_u^3}{12}$$

$$\gamma_o = \frac{i_s \cdot b_o}{i_o \cdot b_s}$$

$$\gamma_u = \frac{i_s \cdot b_u}{i_u \cdot b_s}$$

$$K_1 = \frac{(1 + \beta) \cdot (2 + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \beta^2 + \alpha_o + \alpha_u \cdot \beta^2)}{3 + 3 \cdot \beta + \alpha_o + \alpha_u \cdot \beta}$$

$$K_2 = \frac{2 + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \beta^2 + \gamma_o + \gamma_u \cdot \beta^2}{\beta \cdot ((\gamma_o + 2) \cdot (\gamma_u + 2) - 1)}$$

Inercia de alabeo ( para movimiento en dirección del alma  $V_s = 1.0$  ):

$$I_{v_s} = I_s \cdot \frac{2 \cdot \beta \cdot ((\alpha_o + 2) \cdot (\alpha_u + 2) - 1)}{(1 + \beta) \cdot (3 + 3 \cdot \beta + \alpha_o + \alpha_u \cdot \beta)}$$

Rigidez de marco ( para movimiento  $V_s = 1.0$  ):

$$K_{v_s} = \frac{24 \cdot b_s}{b_u^2 \cdot d^2} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot i_s$$

Estas características mecánicas están referidas a un movimiento en dirección del alma derecha  $V_s$  de valor unidad. Siendo  $m_t$  la carga torsora, la ecuación diferencial de distorsión es:

$$E \cdot I_{v_s} \cdot V_s^{IV} + E \cdot K_{v_s} \cdot V_s = \frac{b_u \cdot b_s}{b_o \cdot (b_o + b_u) \cdot d} \cdot m_t$$

La deformada transversal de la sección se ha representado en la figura H.6. En ella se puede apreciar que el movimiento en dirección de cada pared es constante en toda ella, de acuerdo con la hipótesis de despreciar las deformaciones por axil que se ha adoptado en la teoría <sup>1</sup>.

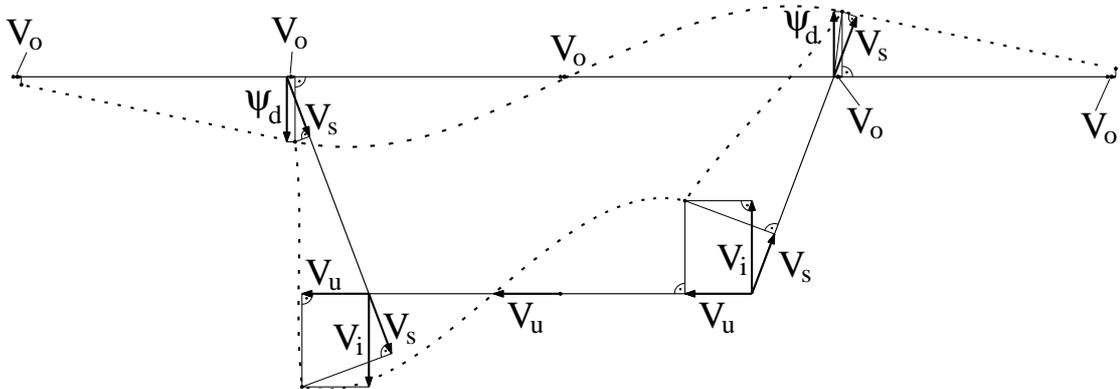


Figura H.6: Sección cajón. Deformada de distorsión.

<sup>1</sup>En la referencia [44] es incorrecta la forma de componer los movimientos en dirección de las paredes para obtener el movimiento total. En especial, para obtener los momentos flectores de la sección transversal la deformada considerada contiene deformaciones por axil, por lo que es errónea, y por tanto también lo son las expresiones para los momentos que se obtienen.

Existiendo las siguientes relaciones entre los movimientos:

$$C_{\psi_d} = \frac{d}{b_s} \cdot \frac{1 + \beta^*}{\beta + \beta^*} \quad C_o = \frac{2 \cdot b_s}{b_o \cdot (1 + \beta^*)}$$

$$C_u = \frac{2 \cdot b_s \cdot \beta^*}{b_u \cdot (1 + \beta^*)} \quad C_i = \frac{1}{C_{\psi_d} \cdot \beta}$$

$$V_s = C_{\psi_d} \cdot \psi_d \quad V_o = C_o \cdot V_s \quad V_u = C_u \cdot V_s \quad V_i = C_i \cdot V_s$$

Si se refieren las características a un movimiento vertical del alma  $\psi_d$  de valor unidad, y se multiplica la ecuación diferencial por un coeficiente  $C_{m_t}$  para adaptar el significado del término independiente, quedan las siguientes características mecánicas y ecuación diferencial.

$$C_{m_t} = \frac{2 \cdot (b_o + b_u) \cdot d}{b_u \cdot b_s}$$

Inercia de alabeo ( para movimiento  $\psi_d = 1.0$  ):

$$I_d = (C_{m_t} \cdot C_{\psi_d}) \cdot I_{v_s}$$

Rigidez de marco ( para movimiento  $\psi_d = 1.0$  ):

$$K_d = (C_{m_t} \cdot C_{\psi_d}) \cdot K_{v_s}$$

Ecuación diferencial:

$$E \cdot I_d \cdot \psi_d^{IV} + E \cdot K_d \cdot \psi_d = \frac{2 \cdot m_t}{b_o}$$

Si la carga torsora  $m_t$  se descompone en un par de fuerzas aplicadas en la parte superior del alma de valor  $m_t/b_o$ , multiplicando cada una de estas fuerzas por el movimiento vertical de la deformada transversal de la sección que se ha tomado como la unidad, se obtiene la carga distorsora ( $m_d = 2 \cdot m_t/b_o$ ), que coincide con el valor que aparece en la ecuación diferencial.

Función de alabeo de distorsión uniforme  $w_d$ , correspondiente a un movimiento vertical unidad del alma ( $\psi_d = 1$ ). Figura (H.7).

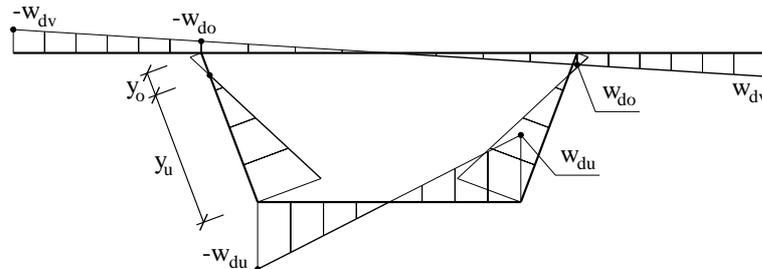


Figura H.7: Sección cajón. Función de alabeo  $w_d$  de distorsión uniforme.

Extremo superior del alma:

$$C_{w_d} = \frac{b_s}{1 + \beta^*} \cdot C_{\psi_d}$$

$$w_{do} = +C_{w_d} \cdot 1.0$$

Extremo inferior del alma:

$$w_{du} = -C_{w_d} \cdot \beta^*$$

Extremo del voladizo:

$$w_{dv} = +C_{w_d} \cdot \frac{b}{b_o}$$

Tensiones tangenciales de distorsión no uniforme. Figura (H.8).

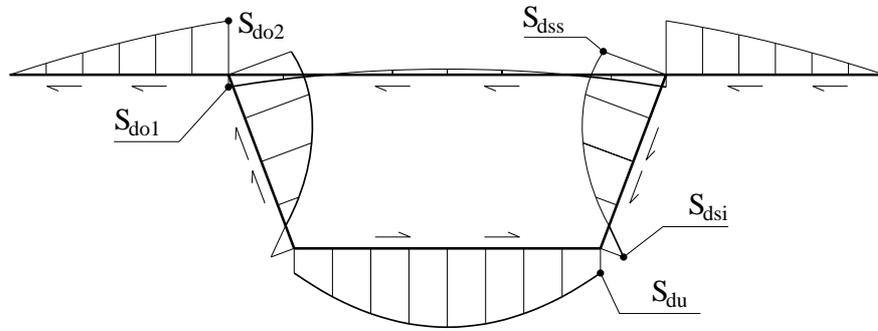


Figura H.8: Sección cajón. Tangenciales de distorsión no uniforme.

Arranque de voladizo:

$$C_{S_d} = \frac{-b_s}{1 + \beta^*} \cdot \frac{1}{C_{\psi_d}}$$

$$S_{do2} = \left( \frac{t_o}{b_o} \cdot \frac{b^2 - b_o^2}{4} \right) \cdot C_{S_d}$$

Extremo de la tabla superior entre almas:

$$S_{do1} = \left( \frac{t_o}{b_o} \cdot \frac{b^2 - b_o^2}{4} - \frac{A_o}{6} \right) \cdot C_{S_d}$$

Extremo inferior del alma:

$$S_{dsi} = \left( \frac{A_u}{6} \right) \cdot C_{S_d}$$

Extremo superior del alma:

$$S_{dss} = \left( \frac{A_u}{6} + \frac{\beta^* - 1}{2} \cdot b_s \cdot t_s \right) \cdot C_{S_d}$$

Extremo de la tabla inferior:

$$S_{dsu} = \left( \frac{A_u}{6} \right) \cdot C_{S_d}$$

Movimiento horizontal de la tabla superior:

$$u_{dx.sup} = C_o \cdot C_{\psi_d}$$

Movimiento horizontal de la tabla inferior:

$$u_{dx.inf} = -C_u \cdot C_{\psi_d}$$

Por la hipótesis de que la función de alabeo es lineal en todo el ancho de la tabla superior la tensión tangencial  $t_d$  por distorsión uniforme ( ecuación (3.134) ) tiene que ser nula ( $t_d = 0$ ). Por lo tanto son nulas las características mecánicas:

$$D_{t_d.t_d} = 0 \qquad D_{t_d.t_a} = 0$$

La inercia cruzada  $I_{w_a.w_d}$  entre las funciones de alabeo de torsión y distorsión en general es distinta de cero, pudiéndose calcular mediante las expresiones del apéndice F.

# Bibliografía

- [1] Vasili Zakharovich Vlasov. *Thin-walled elastic beams*. Israel Program for Scientific Translations, 1961.
- [2] Steen Krenk y Bo Jeppensen. Finite elements for beam cross-sections of moderate wall thickness. *Computers and Structures*, 32(5):1035–1043, 1989.
- [3] Jeppe Jönsson. Determination of shear stresses, warping functions and section properties of thin-walled beams using finite elements. *Computers and Structures*, 68:393–410, 1998.
- [4] Hhaled M. Sennah y John B. Kennedy. State of the art in design of curved box girder bridges. *Journal of Bridge Engineering*, 6(3):159–167, 2001.
- [5] Hhaled M. Sennah y John B. Kennedy. Literature review in analysis of box girder bridges. *Journal of Bridge Engineering*, 7(2):134–143, 2002.
- [6] S. H. Zhang y L. P. R. Lyons. A thin-walled box beam finite element for curved bridge analysis. *Computers and Structures*, 18(6):1035–1046, 1984.
- [7] L. F. Boswell y S. H. Zhang. A box beam finite element for the elastic analysis of thin-walled structures. *Thin-Walled Structures*, 1(4):353–383, 1983.
- [8] S. H. Zhang y L. P. R. Lyons. The application of the thin-walled box beam element to multibox bridge analysis. *Computers and Structures*, 18(5):795–802, 1984.
- [9] Chai Hong Yoo y Samir V. Acra. Cross-sectional properties of thin-walled multicellular section. *Computers and Structures*, 22(1):53–61, 1986.
- [10] N. W. Murray y M. M. Attard. A direct method of evaluating the warping properties of thin-walled open and closed profiles. *Thin-Walled Structures*, 5:351–364, 1987.
- [11] Li Guohao. *Analysis of box girder and truss bridges*. China Academic Publishers and Springer-Verlag, 1987.
- [12] Steen Krenk y O. Gunneskov. A triangulation procedure for elastic cross sections with moderate wall thickness. *Computers and Structures*, 24(1):1–12, 1986.
- [13] Richard Schardt. *Verallgemeinerte technische biegetheorie (Generalized beam theory)*. Springer Verlag, 1989.
- [14] P. Leach. The calculation of modal cross-section properties for use in the generalized beam theory. *Thin-Walled Structures*, 19:61–79, 1994.

- 
- [15] J.M. Davies y P. Leach. First-order generalised beam theory. *J. Construct. Steel Research*, 31:187–220, 1994.
- [16] Ferdinando Laudiero y Marco Savoia. Shear strain effects in flexure and torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section. *Thin-Walled Structures*, 10(1990):87–119, 1990.
- [17] Ferdinando Laudiero ; Marco Savoia y Daniele Zaccaria. The influence of shear deformations on the stability of thin-walled beams under non-conservative loading. *Int. J. Solids Structures*, 27(11):1351–1370, 1991.
- [18] Ferdinando Laudiero y Marco Savoia. The shear strain influence on the dynamics of thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*, 11:375–407, 1991.
- [19] A. Ghani Razaqpur y Hangang G. Li. A finite element with exact shape functions for shear lag analysis in multi-cell box girders. *Computers and Structures*, 39(1/2):155–163, 1991.
- [20] A. Ghani Razaqpur y Hangang G. Li. Thin-walled multicell box-girder finite element. *Journal of structural engineering*, 117(10):2953–2971, 1991.
- [21] A. Ghani Razaqpur y Hangang G. Li. Refined analysis of curved thin-walled multicell box girders. *Computers and Structures*, 53(1):131–142, 1994.
- [22] A. Tesar. Shear lag in the behaviour of thin walled box bridges. *Computers and Structures*, 59(4):607–612, 1996.
- [23] Q.Z. Luo ; Y.M. Wu ; Q.S. Li ; J. Tang y G.D. Liu. A finite segment model for shear lag analysis. *Engineering Structures*, 26:2113–2124, 2004.
- [24] Luigino Dezi ; Fabrizio Gara y Graziano Leoni. Effective slab width in prestressed twin-girder composite decks. *Journal of structural engineering*, 132(9):1358–1370, 2006.
- [25] A. Prokić. Thin-walled beams with open and closed cross-sections. *Computers and Structures*, 47(6):1065–1070, 1993.
- [26] A. Prokić. Material nonlinear analysis of thin-walled beams. *Journal of Structural Engineering*, 120(10):2840–2852, 1994.
- [27] A. Prokić. New warping function for thin-walled beams. i: Theory. *Journal of Structural Engineering*, 122(12):1437–1442, 1996.
- [28] A. Prokić. New warping function for thin-walled beams. ii: Finite element method and applications. *Journal of Structural Engineering*, 122(12):1443–1452, 1996.
- [29] A. Prokić. New finite element for analysis of shear lag. *Computers and Structures*, 80(11):1011–1024, 2002.
- [30] Jeppe Jönsson. Distortional warping functions and shear distributions in thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*, 33:245–268, 1999.

- [31] Jeppe Jönsson. Distortional theory of thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*, 33:269–303, 1999.
- [32] Katy Saadé. *Ph. D. Thesis. Finite element modeling of shear in thin walled beams with a single warping function*. Universite Libre de Bruxelles, 2005.
- [33] Shi-Jun Zhou. Finite beam element considering shear-lag effect in box girder. *Journal of engineering mechanics*, 136(9):1115–1122, 2010.
- [34] Shi-Jun Zhou. Shear lag analysis in prestressed concrete box girders. *Journal of Bridge Engineering*, 16(4):500–512, 2011.
- [35] Eric Reissner. Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5(3):268–278, 1946.
- [36] *Abaqus 6.11. Analysis users manual. Volume IV: elements*. Dassault Systèmes, 2011.
- [37] *Ansys mechanical APDL element reference. Release 13.0*. Ansys Inc., 2010.
- [38] *Aqua. Materials and cross sections. Version 15.34*. Sofistik AG., 2007.
- [39] *CSI Analysis reference manual for SAP2000, ETABS, and SAFE*. Computers and Structures, Inc., 2008.
- [40] *Lusas. Theory manual*. Finite Element Analysis Ltd., 2012.
- [41] Julián Díaz del Valle. *Colección Caminos*. Escuela de Ingenieros de Caminos de Santander.
- [42] *Recomendaciones para el proyecto de puentes mixtos para carreteras. RPX-95*. Ministerio de Fomento de España, 2000.
- [43] Jörg Schlaich y Hartmut Scheef. *Concrete box-girder bridges*. IABSE, 1982.
- [44] Javier Manterola Armisén. *Puentes. Tomo II. La sección cajón de hormigón. Tableros metálicos y mixtos*. E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, 2000.
- [45] O.C. Zienkiewicz. *El método de los elementos finitos*. Editorial Reverte, 1982.
- [46] Julián Díaz del Valle. *Mecánica de los medios continuos I*. Universidad de Cantabria, 1993.
- [47] Vladimír Krístek. *Theory of box girders*. John Wiley and Sons, 1979.
- [48] Klaus Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [49] Francisco Cambronero Barrientos. *Manual del programa de elementos finitos Vettes*. <http://www.vettes.com/>, 2012.
- [50] Francisco Cambronero Barrientos. *Trabajo de fin de carrera. Análisis numérico de láminas en forma de paraboloides hiperbólicas*. Universidad de Cantabria, 1996.
- [51] Y. K. Cheung. *Finite strip method in structural analysis*. Pergamon Press, 1976.

- [52] C. F. Kollbrunner. *Torsion in structures. An engineering approach*. Springer International, 1969.
- [53] William H. Press et al. *Numerical recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [54] *Instrucción de acciones a considerar en puentes de ferrocarril. IAPF-2010*. Ministerio de Fomento de España, 2010.
- [55] *Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 2: Puentes*. AENOR, 2012.
- [56] *EAE Instrucción de acero estructural*. Ministerio de Fomento de España, 2011.
- [57] Hiroshi Nakai y Chai Hong Yoo. *Analysis and design of curved steel bridges*. McGraw Hill, 1988.
- [58] Javier Pascual Santos. *Tesis doctoral. Criterios de dimensionamiento de los diafragmas interiores en secciones cajón de puentes mixtos*. Universidad Politécnica de Madrid, 2004.
- [59] *Obras de paso de nueva construcción. Conceptos generales*. Ministerio de Fomento de España, 2000.
- [60] Jacques Mathivat. *Construcción de puentes de hormigón pretensado por voladizos sucesivos*. Editores Técnicos Asociados, 1980.
- [61] Salvador Monleón Cremades. *Curso de puentes*. Universidad Politécnica de Valencia, 1990.
- [62] Christian Menn. *Prestressed concrete bridges*. Birkhäuser Verlag, 1990.
- [63] Salvador Monleón Cremades. *Cuadernos de modelización y análisis de puentes. Volumen I*. Universidad Politécnica de Valencia, 2003.
- [64] *Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1-5: Placas planas cargadas en su plano*. AENOR, 2011.
- [65] *Eurocódigo 2: Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación*. AENOR, 2010.
- [66] *EHE-08 Instrucción de hormigón estructural*. Ministerio de Fomento de España, 2008.
- [67] B. Johansson ; R. Maquoi ; G. Sedlacek ; C. Müller y D. Beg. *Commentary and worked examples to EN 1993-1-5 Plated structural elements*. European Commission JRC, 2007.
- [68] Avelino F. Samartín Quiroga. *Cálculo de estructuras de puentes de hormigón*. Editorial Rueda, 1983.
- [69] S. Timoshenko. *Resistencia de materiales. Primera parte. Teoría elemental y problemas*. Espasa-Calpe, 1957.
- [70] Alberto Luceño Vázquez. *Métodos de estadística aplicada*. Universidad de Cantabria, 1988.

ENERO  
2013

FRANCISCO  
CAMBRONERO BARRIENTOS

ANÁLISIS CONJUNTO DE LOS MODOS RESISTENTES  
EN SECCIONES DE PAREDES DELGADAS  
Y SU APLICACIÓN A TABLEROS DE PUENTE

UNIVERSIDAD  
DE CANTABRIA

## TESIS DOCTORAL

Título: “Análisis conjunto de los modos resistentes en secciones de paredes delgadas y su aplicación a tableros de puente”.

Autor: Francisco Cambroner Barrientos

## FE DE ERRATAS

**Pág. 13** Párrafo 1. Donde dice “... y con espesores de pared **pequeños** respecto de las dimensiones exteriores ...” debe decir “... y con espesores de pared **grandes** respecto de las dimensiones exteriores ...”.

**Pág. 18** Figura 2.1. Donde dice “**y, ζ**” debe decir “**z, ζ**”.

**Pág. 32** Después del párrafo 5. Donde dice:

$$v_j(x, y, z) = \sum w_{ji}(x, y, z) \cdot u_i(z)$$

Debe decir:

$$v_j(x, y, z) = \sum w_{ji}(x, y) \cdot u_i(z)$$

**Pág. 36** Figura 3.5. Donde dice “**Torsioń**” debe decir “**Torsión**”.

**Pág. 47** Al final de la página. Donde dice:

$$\int_A \{\delta w_{yi}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{yi}\} dA = G_o \int_A \{\delta w_{yi}\}^t [N'_i]^t \frac{E y}{E_o I_x} dA$$

Debe decir:

$$\int_A \{\delta w_{yi}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{yi}\} dA = G_o \int_A \{\delta w_{yi}\}^t [N_i]^t \frac{E y}{E_o I_x} dA$$

**Pág. 48** Después del primer párrafo. Donde dice:

$$\{f_{yi}\} = G_o \int_A [N'_i]^t \frac{E y}{E_o I_x} dA$$

Debe decir:

$$\{f_{yi}\} = G_o \int_A [N_i]^t \frac{E y}{E_o I_x} dA$$

**Pág. 51** En la cuarta fórmula contando desde abajo. Donde dice:

$$\int_A \{\delta w_{xi}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{xi}\} dA = G_o \int_A \{\delta w_{xi}\}^t [N'_i]^t \frac{E x}{E_o I_y} dA$$

Debe decir:

$$\int_A \{\delta w_{xi}\}^t [N'_i]^t G [N'_i] \{w_{xi}\} dA = G_o \int_A \{\delta w_{xi}\}^t [N_i]^t \frac{E x}{E_o I_y} dA$$

**Pág. 51** Antes del último párrafo. Donde dice:

$$\{f_{xi}\} = G_o \int_A [N'_i]^t \frac{E x}{E_o I_y} dA$$

Debe decir:

$$\{f_{xi}\} = G_o \int_A [N_i]^t \frac{E x}{E_o I_y} dA$$

**Pág. 63** Después del primer párrafo. Donde dice:

$$c = - \frac{\sum \frac{E}{E_o} \cdot t \cdot L \cdot \frac{w_{a1} + w_{a2}}{2}}{\sum \frac{E}{E_o} \cdot t \cdot L}$$

$$x_a = x_b - \frac{1}{I_x} \sum \frac{E \cdot t \cdot L}{E_o \cdot 6} (2 \cdot w_{a1} \cdot y_1 + w_{a1} \cdot y_2 + w_{a2} \cdot y_1 + 2 \cdot w_{a2} \cdot y_2)$$

$$y_a = y_b + \frac{1}{I_y} \sum \frac{E \cdot t \cdot L}{E_o \cdot 6} (2 \cdot w_{a1} \cdot x_1 + w_{a1} \cdot x_2 + w_{a2} \cdot x_1 + 2 \cdot w_{a2} \cdot x_2)$$

Debe decir:

$$c = - \frac{\sum \frac{E}{E_o} \cdot t \cdot L \cdot \frac{w_{b1} + w_{b2}}{2}}{\sum \frac{E}{E_o} \cdot t \cdot L}$$

$$x_a = x_b - \frac{1}{I_x} \sum \frac{E \cdot t \cdot L}{E_o \cdot 6} (2 \cdot w_{b1} \cdot y_1 + w_{b1} \cdot y_2 + w_{b2} \cdot y_1 + 2 \cdot w_{b2} \cdot y_2)$$

$$y_a = y_b + \frac{1}{I_y} \sum \frac{E \cdot t \cdot L}{E_o \cdot 6} (2 \cdot w_{b1} \cdot x_1 + w_{b1} \cdot x_2 + w_{b2} \cdot x_1 + 2 \cdot w_{b2} \cdot x_2)$$

**Pág. 66** Figura 3.26. Donde dice:

$$\tau_{sz} = -2 \times y_s \times \theta'_z$$

Debe decir:

$$\tau_{sz} = -G \times 2 \times y_s \times \theta'_z$$

**Pág. 67** Párrafo 3. Donde dice “Como se **esta** estudiando una ...” debe decir “Como se **está** estudiando una ...”.

**Pág. 97** Párrafo 1. Donde dice “... como obtener las funciones que dependen de **las coordenadas de la sección.**” debe decir “... como obtener las funciones que dependen de **la coordenada longitudinal de la pieza.**”

**Pág. 105** Después del tercer párrafo. Donde dice:

$$I_{w_{x_0}.y} = \int_A \frac{E}{E_0} w_{x_0} x dA$$

Debe decir:

$$I_{w_{x_0}.x} = \int_A \frac{E}{E_0} w_{x_0} x dA$$

**Pág. 109** Después del primer párrafo. Donde dice:

$$\begin{aligned} D_{w_{x_0}.x} &= \int_A \frac{G}{G_0} w_{x_0} t_x dA & D_{w_{y_0}.y} &= \int_A \frac{G}{G_0} w_{y_0} t_y dA \\ D_{w_{x_0}.y} &= \int_A \frac{G}{G_0} w_{x_0} t_y dA & D_{w_{y_0}.x} &= \int_A \frac{G}{G_0} w_{y_0} t_x dA \\ D_{w_{x_0}.t_a} &= \int_A \frac{G}{G_0} w_{x_0} t_a dA & D_{w_{x_0}.t_d} &= \int_A \frac{G}{G_0} w_{x_0} t_d dA \\ D_{w_{y_0}.t_a} &= \int_A \frac{G}{G_0} w_{y_0} t_a dA & D_{w_{y_0}.t_d} &= \int_A \frac{G}{G_0} w_{y_0} t_d dA \end{aligned}$$

Debe decir:

$$\begin{aligned} D_{w_{x_0}.x} &= \int_A \frac{G}{G_0} w'_{x_0} t_x dA & D_{w_{y_0}.y} &= \int_A \frac{G}{G_0} w'_{y_0} t_y dA \\ D_{w_{x_0}.y} &= \int_A \frac{G}{G_0} w'_{x_0} t_y dA & D_{w_{y_0}.x} &= \int_A \frac{G}{G_0} w'_{y_0} t_x dA \\ D_{w_{x_0}.t_a} &= \int_A \frac{G}{G_0} w'_{x_0} t_a dA & D_{w_{x_0}.t_d} &= \int_A \frac{G}{G_0} w'_{x_0} t_d dA \end{aligned}$$

$$D_{w_{y_0.t_a}} = \int_A \frac{G}{G_o} w'_{y_0} t_a dA \quad D_{w_{y_0.t_d}} = \int_A \frac{G}{G_o} w'_{y_0} t_d dA$$

**Pág. 117** Después del primer párrafo. Donde dice:

$$\begin{aligned} K_{4.7} &= - N'_i E_o A_x I_{w_{x_0.x}} N'_j - N_i G_o A_x D_{w_{x_0.x}} N_j \\ K_{7.4} &= - N'_i E_o A_x I_{w_{x_0.x}} N'_j - N_i G_o A_x D_{w_{x_0.x}} N_j \end{aligned}$$

Debe decir:

$$\begin{aligned} K_{4.7} &= - N_i G_o A_x D_{w_{x_0.x}} N_j \\ K_{7.4} &= - N_i G_o A_x D_{w_{x_0.x}} N_j \end{aligned}$$

**Pág. 117** Después del segundo párrafo. Donde dice:

$$\begin{aligned} K_{3.8} &= N'_i E_o A_y I_{w_{y_0.y}} N'_j + N_i G_o A_y D_{w_{y_0.y}} N_j \\ K_{8.3} &= N'_i E_o A_y I_{w_{y_0.y}} N'_j + N_i G_o A_y D_{w_{y_0.y}} N_j \end{aligned}$$

Debe decir:

$$\begin{aligned} K_{3.8} &= + N_i G_o A_y D_{w_{y_0.y}} N_j \\ K_{8.3} &= + N_i G_o A_y D_{w_{y_0.y}} N_j \end{aligned}$$

**Pág. 124** Párrafo 3. Donde dice “Las **características** mecánicas de la sección ...” debe decir “Las **características** mecánicas de la sección”.

**Pág. 145** Figura 5.21. Donde dice “Centro tabla superior” debe decir “Centro **de la** tabla superior”.

**Pág. 149** Párrafo 3. Donde dice “... se van comparar ...” debe decir “... se van **a** comparar ...”.

**Pág. 203** Párrafo 1. Donde dice “... que **sea nula la integral** del producto ...” debe decir “... que **sean nulas las integrales** del producto ...”.

**Pág. 203** Párrafo 3. Donde dice “Y teniendo en cuenta la **cuación** ...” debe decir “Y teniendo en cuenta la **ecuación** ...”.

**Pág. 235** Párrafo 3. Donde dice “... el cálculo con único modo ...” debe decir “... el cálculo con **un** único modo ...”.

**Pág. 275** Después del párrafo 2. Donde dice:

$$= \left( \frac{2}{3} \sigma_{mín} + \frac{1}{2} \sigma_{máx} \right) \cdot t_i \cdot b_i$$

Debe decir:

$$= \left( \frac{2}{3} \sigma_{\text{mín}} + \frac{1}{3} \sigma_{\text{máx}} \right) \cdot t_i \cdot b_i$$

**Pág. 291** Párrafo 10. Donde dice “... en la verificación **del** los resultados ...” debe decir “... en la verificación **de** los resultados ...”.

**Pág. 350** Figura E.4. Donde dice “ $u_y+$ ” debe decir “ $u_y-$ ”.

**Pág. 375** Referencia bibliográfica [38]. Donde dice “**Version**” debe decir “**Versión**”.

En Burgos, a 14 de Abril de 2013