GRADO EN ECONOMÍA

TRABAJO FIN DE GRADO

2020/2021

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE OPTIMIZACIÓN. EL ALGORITMO SIMPLEX

MATHEMATICAL METHODS OF OPTIMIZATION. THE SIMPLEX ALGORITHM

AUTORA: ANA LÓPEZ GUTIÉRREZ

DIRECTORA: PATRICIA GÓMEZ GARCÍA

Julio 2021

ÍNDICE

ÍNDICE DE GRÁFICOS Y TABLAS

RESUMEN

Con la realización de este trabajo se ha pretendido analizar y comprender el *método Simplex* partiendo de la *Investigación Operativa* y seguido de la *Programación Lineal*.

Primero, el trabajo comienza con un capítulo referente a la definición de la Investigación Operativa. También, se expone dónde surgió y cómo evolucionó gracias al avance tecnológico, además de formular el proceso que se debe de seguir para emplearla de manera correcta y llegar a la *solución óptima* de un problema.

A continuación, se relata un pequeño apartado relacionado con la Programación Lineal. En dicho apartado, se abordan cuestiones referidas a la aparición de la Programación Lineal en la II Guerra Mundial pues fue una de las piezas clave para resolver los problemas surgidos en dicha época bélica. Actualmente tiene una gran relevancia, sobre todo en el ámbito empresarial. Asimismo, se explica el procedimiento a seguir para calcular y hallar las soluciones de un problema lineal.

Seguidamente, se van a analizar y desarrollar los diferentes pasos de un ejemplo lineal de maximización de la *función objetivo* con dos variables de manera gráfica ya que con este procedimiento gráfico se podrá entender mejor la siguiente sección: el método Simplex.

Posteriormente, el ensayo se va a centrar en el método Simplex, un algoritmo que ha ido evolucionando al mismo tiempo que avanzaban los ordenadores y que nos ayuda a descifrar problemas con más de tres variables. Primero, se explica cómo formular un modelo lineal tanto en su *forma estándar* como en su *forma matricial*. Después, se detalla cómo se hallan las *soluciones básicas factibles* con dicho método y cómo se interpretan geométricamente. Igualmente, se expone el proceso para convertir el problema en *forma de tabla* y la introducción de las *variables artificiales*. Todo lo mencionado será explicado con ejemplos para la mejor comprensión.

Para finalizar el trabajo, se van a realizar dos casos prácticos desarrollados con el algoritmo Simplex, donde se siguen los pasos explicados en los apartados previos sobre cómo hallar las soluciones, además de comprobar que éstas coinciden con los vértices de la *región factible*.

ABSTRACT

The aim of this work is to analyse and understand the Simplex method starting from Operations Research and followed by Linear Programming.

First, the book begins with a chapter on the definition of Operations Research. It also explains where it arose and how it evolved thanks to technological progress, as well as formulating the process that must be followed in order to use it correctly and arrive at the optimal solution to a problem.

This is followed by a short section on Linear Programming. In this section, we deal with issues related to the appearance of Linear Programming in the Second World War, as it was one of the key elements in solving the problems that arose during that period of war. It is still very relevant today, especially in the business world. It also explains the procedure to be followed to calculate and find the solutions to a linear problem.

Next, the different steps of a linear example of maximisation of the objective function with two variables will be analysed and developed graphically, as this graphical procedure will help to better understand the following section: the Simplex method.

Subsequently, the essay will focus on the Simplex method, an algorithm that has evolved as computers have advanced and that helps us to decipher problems with more than three variables. First, it explains how to formulate a linear model in both its standard and matrix forms. It then details how the basic feasible solutions are found with this method and how they are interpreted geometrically. The process of converting the problem into table form and the introduction of the artificial variables is also explained. Everything mentioned will be explained with examples for a better understanding

To conclude the work, we will carry out two practical cases developed with the Simplex algorithm, where we follow the steps explained in the previous sections on how to find the solutions, as well as checking that these coincide with the vertices of the feasible region.

1. INTRODUCCIÓN

Tanto las personas físicas como las jurídicas se hacen diferentes preguntas a lo largo del tiempo como puede ser cuánto invertir en bolsa o a qué precio vender un producto. Para dar respuesta a estas preguntas se emplea la Investigación Operativa.

La Investigación Operativa o ciencia de la administración, es un conjunto de herramientas que se emplean en modelos matemáticos y estadísticos para encontrar la mejor solución, con el objetivo de ayudar en la toma de decisiones. Aunque este área es muy amplia y abarca diversos modelos, nosotros nos vamos a centrar en la Programación Lineal donde todos los términos expresados van a ser lineales.

La Programación Lineal es una de las técnicas más aplicadas en el ámbito empresarial ya que con ella podemos determinar los objetivos más comunes de las empresas como cuál es la cantidad óptima para que una empresa maximice beneficios o cuáles son los costes que debe asumir para que estos sean mínimos.

Operar con problemas lineales puede parecer en principio muy complejo, pero si seguimos los pasos correctos llegaremos a la solución óptima. Primero identificaremos cuáles son las *variables de decisión* seguido de la función objetivo y acabando con las *restricciones*. Cuando nos hemos situado en este punto, podremos resolverlo de dos maneras: numérica o gráficamente.

Pero para poder hallar gráficamente la solución a este tipo de problemas, tenemos que enfrentarnos a modelos lineales con dos variables. Si nos encontremos con tres o más variables, debemos aplicar otro método de resolución más específico como puede ser el método de *puntos interiores* o el método Simplex.

La diferencia entre estas dos técnicas es que si aplicamos los puntos interiores vamos a operar en el interior de la región factible mientras que con el método Simplex lo haremos con los puntos exteriores de la región, lo que se puede traducir en un menor tiempo para encontrar la solución óptima. En nuestro caso, vamos a emplear el algoritmo Simplex.

El método Simplex es una práctica matemática que, mediante la búsqueda y comprobación de las diferentes soluciones, proporciona la solución óptima del problema lineal.

A lo largo del trabajo se desarrollarán diferentes ejemplos y dos casos prácticos para comprender mejor este procedimiento matemático.

2. INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Como bien explica Sixto Ríos (1996, p. 13):

> Cualquier proceso de investigación consiste en un ciclo en el que el científico, a partir de observaciones acumuladas, formulará hipótesis que aceptará o rechazará mediante experimentos. En el caso de que tales experimentos confirmen la hipótesis, estará en el camino para formular modelos abstractos o teorías que permitan predicción, que es la finalidad de todo trabajo científico.

La aplicación de diferentes métodos de investigación nos lleva a establecer dos tipos de investigación (Ríos Insua, 1996). Por un lado, tenemos la *investigación pura*, que no muestra interés por los resultados después de la realización del proyecto y, por otro lado, tenemos la *investigación aplicada*. Esta siempre tiene en cuenta los posibles resultados aplicados en los ámbitos humanos, sociales, económicos... En definitiva, la investigación pura sólo quiere conocer las cosas mejor mientras que la investigación aplicada quiere hacer mejor las cosas.

El objetivo de esta última clase de investigación es encontrar mayor rendimiento a diferentes puntos como puede ser eficiencia, efectividad o empleo. Para llegar a estas conclusiones cuantitativas, hay que emplear un tipo de metodología, denominada Investigación Operativa (Ríos Insua, 1996).

En consecuencia, podemos definir la Investigación Operativa (I.O.) como la utilización de tácticas por parte de los científicos para optimizar las diversas cuestiones que se desarrollan en entidades industriales, administrativas, militares, sanitaras, económicas... (Ríos Insua, 1996).

2.1. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Los cálculos que se emplean para la elaboración de la Investigación Operativa (I.O.) son de varios ámbitos como puede ser el matemático o el económico, pero el más utilizado es el campo estadístico y la probabilidad (Ríos Insua, 1996).

Para conocer la procedencia de la investigación operativa, podemos hacerlo desde varios puntos de vista. Desde la perspectiva matemática, debemos centrarnos en los trabajos sobre modelos lineales de Jordan, Minkowski, Farkas... a finales del siglo XIX. Si nos situamos en la económica, Quesnay y Warlas fueron los impulsores planteando los primeros problemas lineales matemáticos en los siglos XVIII y XIX, respectivamente, que años más tarde fueron perfeccionados por Von Neumann, Kantorovich y Dantzig. Y desde la perspectiva estadística, sus raíces se deben a los trabajos de Erlang sobre fenómenos de espera (Ríos Insua, 1996).

Pero la Investigación Operativa no tuvo transcendencia hasta la Segunda Guerra Mundial (1939-1945). A lo largo de la guerra, se incrementó la necesidad de distribuir los recursos ya que estos eran escasos. Para poder lograr esta labor, primero el ejército británico y después el norteamericano establecieron grupos para desarrollar métodos cuantitativos y así resolver los problemas bélicos. Fue tal el éxito de este tipo de metodología que cinco de los científicos y físicos pertenecientes al desarrollo de la Investigación Operativa fueron condecorados con el premio Nobel (Mathur y Solow, 1996).

Cuando finalizó la Segunda Guerra Mundial, muchos de los investigadores empezaron a tener un papel importante en la industria, en la administración o en las universidades, impulsando así la aplicación de los modelos elaborados en la guerra incluso a otros ámbitos que no fuesen sólo de carácter militar. Pero estos procedimientos progresaron gracias al avance tecnológico, sobre todo en los ordenadores, provocando que se pudiesen resolver problemas complejos (Mathur y Solow, 1996).

Dar una definición de qué es la I.O. es complejo pero la que ofrece el profesor Johnson de la Operations Research Office de la Jonh Hopkins University puede ser la más completa y es la que Ríos Insua (1996, p. 14) expone en su obra:

> La Investigación Operativa es la predicción y comparación de valores, efectividad y costes de un conjunto de cursos de acción propuestos, en que intervienen sistema de hombres y máquinas y está basada sobre un modelo descrito mediante una metodología lógica o matemática que permita determinar los valores de los parámetros de los cursos de acción, mediante análisis de observaciones anteriores o de operaciones experimentales convenientemente diseñadas. Especialmente importante es dar una medida de la incertidumbre de las diversas predicciones hechas sobre el valor, efectividad, etc., de los cursos de acción propuestos.

2.2. MODELIZACIÓN

Uno de los rasgos básicos de la I.O. es el proceso de *modelización* de un problema real. Plasmar exactamente un modelo real no siempre es fácil y a veces este posee datos que son irrelevantes para conocer la solución, de tal modo que la modelización de un problema es un paso importante para llegar a un equilibrio entre un modelo que sea tan simple que no haga falta representarlo o sea tan complejo que no sea factible resolverlo con los procedimientos básicos de la Programación Lineal (Ríos Insua, 1996).

Cuando elaboramos el proceso de modelización (Mathur y Solow, 1996), nos podemos encontrar con modelos a escala, modelos analógicos o modelos matemáticos. Estos últimos son los que utiliza la I.O. debido a que estos modelos permiten analizar un número extenso de alternativas; tienen un menor coste los análisis del modelo que la experimentación con un sistema real; el tiempo se puede reducir brevemente; las modificaciones del problema son más sencillas; y es posible experimentar lo que no es viable con un sistema real.

Para llevar a cabo la formulación matemática de un modelo, debemos seguir los siguientes pasos que indica Ríos Insua (1996):

1) Determinar los componentes del modelo: variables de decisión o de control, parámetros...

2) Determinar la estructura: expresiones matemáticas relacionadas con las variables.

3) Determinar un principio de elección: optimización, satisfacción...

4) Generar alternativas o decisiones; y predicción y medición de los resultados obtenidos.

5) Seleccionar un escenario de suposiciones para examinar las situaciones de decisión.

Después de seguir los pasos indicados anteriormente para construir el modelo, procedemos a averiguar cuál es la solución del problema. Ríos Insua (1996, p. 15) define el término de solución como:

> Un conjunto de valores específicos para las variables de decisión, que permiten identificar cuál es la alternativa seleccionada para ser recomendada como solución del problema.

Para conocer el resultado del sistema, debemos saber a qué tipo de modelos nos enfrentamos ya que usaremos diferentes métodos para resolverlo. Por un lado, está el *método óptimo*: este se da cuando los valores satisfacen las restricciones obteniendo el mejor valor para la función objetivo. Por otro lado, está el *método heurístico* que ofrece valores para las restricciones, pero no tienen por qué ser óptimos, sólo generan un valor apto para la función objetivo (Mathur y Solow, 1996).

Normalmente el método heurístico (Mathur y Solow, 1996) va a ser utilizado cuando obtener las soluciones óptimas a un problema requiere mucho tiempo o es imposible conocerlas porque el modelo es muy abstracto y esta técnica es computacional.

Cuando ya hemos obtenido la solución al sistema, debemos *validar* el modelo, es decir, comprobar si el resultado obtenido tiene sentido y las decisiones pueden ejecutarse (Mathur y Solow, 1996). Por ello determinaremos si aceptamos el modelo para luego aplicarlo posteriormente o lo rechazamos de tal forma que tendremos que volver a elaborar el proceso de modelización. Para saber la validez del sistema, analizaremos la concordancia entre los datos observados del modelo real y los proporcionados por el modelo (Ríos Insua, 1996).

Es importante tener en cuenta que a veces tanto el modelo como la solución son válidos, pero puede que no sean viables cuando los aplicamos a la realidad. Esto es debido a que existen diversos factores, como los políticos o conductuales, que no se incluyen en la formulación del modelo (Mathur y Solow, 1996).

Para finalizar el proceso de modelización, pondremos en práctica la solución hallada anteriormente. El paso de la *implantación* es el más crucial ya que determina si el problema formulado es el correcto o si hay que modificarlo. Las razones por las que una solución no es factible pueden ser porque se hayan omitido limitaciones del problema o que haya alguna errónea. Por lo tanto, si nos encontramos en este supuesto, tendremos que volver a formular el problema con las modificaciones necesarias (Mathur y Solow, 1996).

El proceso de modificación del modelo según Mathur y Solow (1996, p. 8) “*puede tener que repetirse varias veces antes de encontrar una solución aceptable y factible”.*

3. PROGRAMACIÓN LINEAL

La Programación Lineal es uno de los métodos matemáticos más empleados por las empresas y administraciones públicas y pertenece al ámbito de la Optimización (Cobo Ortega, 1995).

Para saber cuál es el origen de la Programación Lineal, nos tenemos que remontar al periodo de la Unión Soviética, donde los economistas soviéticos empleaban técnicas para su desarrollo. Entre ellos destacó Leonid V. Kantorovich, en 1930, realizando un estudio sobre la aplicación de modelos lineales para potenciar la eficiencia en la producción (Cobo Ortega, 1995).

Pero la persona que realmente fomentó la Programación Lineal fue George Bernard Dantzig, (8 noviembre 1914 – 13 mayo 2005), durante la Segunda Guerra Mundial (1939 -1945). G.B. Dantzig fue un físico y matemático estadounidense considerado el padre de la Programación Lineal.

Dantzig junto con su grupo de ayudantes, que pertenecían al proyecto SCOOP (Scientific Computation of Optima Programs) creado por la Fuerza Aérea de los EE. UU., aplicaron esta metodología para realizar análisis estratégicos y de abastecimiento a las tropas aliadas. El método que utilizaron para enfrenarse a los problemas lineales fue el algoritmo Simplex, elaborado por Dantzig en 1947 (Cobo Ortega, 1995).

Así pues, a priori, la Programación Lineal puede parecer un método matemático más, pero vemos que ha tenido gran relevancia y gracias a este tipo de procedimiento se han podido resolver grandes incógnitas a lo largo de la historia.

Gracias a la evolución y al desarrollo de los ordenadores como instrumento de cálculo, la Programación Lineal ha adquirido mucha importancia ya que esta herramienta puede resolver problemas lineales con muchas variables y miles de restricciones, que no son posibles de descifrar de manera manual (Cobo Ortega, 1995).

Pero la Programación Lineal no sólo se utiliza para resolver problemas lineales con gran magnitud, sino que también se puede emplear para plantear problemas habituales como puede ser averiguar cuál es la cantidad óptima de ventas en periodo de rebajas o cuánta cantidad debe invertir un sujeto en bolsa para obtener el máximo beneficio posible.

Mathur y Solow (1996, p. 63) plasmaron que un problema de Programación Lineal puede definirse como "*un problema en el que la función objetivo y todas las restricciones son lineales y todas las variables son continuas".*

Cuando nos enfrentamos a un problema lineal, podemos resolver el problema mediante dos caminos diferentes. Uno puede ser de manera gráfica y otra de manera numérica. Con cualquier de los dos procedimientos llegaremos a la misma solución óptima.

Para llegar a la solución de un problema de Programación Lineal, lo primero que debemos averiguar son sus variables de decisión, su función objetivo y sus restricciones, que siempre serán lineales ya que operamos con Programación Lineal.

1) Identificación de las variables de decisión:

Antes de empezar con el problema y averiguar cuál es la función objetivo y las restricciones, primero tenemos que conocer cuáles van a ser las variables de decisión. Las variables de decisión son los parámetros que no conocemos y vamos a hallar mediante la resolución del problema. Para averiguar cuáles son dichas variables, debemos saber qué información poseemos y sobre qué variables tenemos control. Cuando ya las hayamos identificado, podemos construir la función objetivo y las restricciones (Mathur y Solow, 1996).

2) Identificación de la función objetivo:

La función objetivo se puede definir como una función lineal entre las diferentes variables del problema. Para formar dicha función, construimos una ecuación lineal relacionando los datos y las variables que constituyen el problema, el cual resolveremos mediante el proceso de optimización en función de si el objetivo es maximizar o minimizar la función.

Cuando ya hemos averiguado cuál va a ser la función objetivo, podemos pasar a identificar cuáles van a ser las restricciones lineales del problema de optimización.

3) Identificación de las restricciones:

Para hallar las restricciones de un problema lineal tenemos que averiguar cuáles son las limitaciones de las variables de decisión que nos ofrece el propio problema.

Dependiendo del tipo de problema al que nos enfrentemos, bien sea maximizar o minimizar la función objetivo, podemos encontrarnos con un número diferente de restricciones. Todo eso dependerá de las limitaciones que tengan las variables de decisión a partir de los datos dados por el problema (Ríos Insua, 1996).

Cuando ya hemos recopilado toda esta información, podemos construir el problema lineal de optimización para poder proceder a su resolución. Se puede obtener la solución óptima mediante un ordenador o de manera manual, aunque esta última puede ser compleja dependiendo del tipo de problema al que nos enfrentemos.

Como ya hemos comentado previamente, todos los problemas planteados en este trabajo van a ser lineales y, por lo tanto, se van a solucionar como tales. Los problemas de optimización no lineales se resuelven con las herramientas propias de la *Programación No Lineal*.

4. EJEMPLO GRÁFICO

En el apartado anterior hemos explicado qué es la Programación Lineal y los pasos a seguir para poder resolver un problema lineal.

A continuación, vamos a abordar un problema sencillo con dos variables de manera gráfica para ver de forma más clara cómo se consigue conocer la solución óptima a los problemas de Programación Lineal.

Aunque este método de resolución no es muy aplicable a problemas reales, ya que sólo es posible cuando operamos con dos variables y generalmente los problemas lineales cuentan con tres o más variables, el enfoque gráfico es muy práctico porque sirven de ayuda a la hora de entender cómo resolver los problemas algebraicos de tres o más variables (Mathur y Solow, 1996).

Como detallan Mathur y Solow (1996, p. 119):

> El enfoque gráfico es útil no sólo para encontrar una solución óptima, sino también para obtener información adicional sobre cuán susceptible es la solución óptima con respecto a los cambios en los datos del problema.

Vamos a considerar el siguiente modelo:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{max} & 15x_1 + 25x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 60 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 150 \\ & x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

donde ya hemos identificado cuál es el objetivo, su función y cuáles son las restricciones del problema.

La finalidad de este procedimiento es encontrar las soluciones a este problema hallando los valores de x_1 y x_2 que satisfagan las restricciones y que maximicen la función objetivo (Mathur y Solow, 1996).

Para resolver un problema con el enfoque gráfico, nos vamos a centrar primero en las restricciones, para posteriormente continuar con la función objetivo. En primer lugar, vamos a cambiar las desigualdades de las restricciones por igualdades, para así poder dibujarlas en la gráfica y ver qué valores son factibles (Mathur y Solow, 1996).

$$x_1 + x_2 \leq 60 \longrightarrow x_1 + x_2 = 60$$

$$3x_1 + x_2 \leq 150 \longrightarrow 3x_1 + x_2 = 150$$

Cuando ya tenemos las igualdades, procedemos a representarlas en la gráfica. Para ello, primero vamos a dar valores nulos a x_1 para saber en qué punto está x_2 y después damos valor cero a x_2 para saber dónde está x_1.

Numéricamente sería:

$x_1 + x_2 = 60$; $x_1 = 0$; $x_2 = 60$ por lo tanto el punto será el (0,60)

$x_1 + x_2 = 60$; $x_2 = 0$; $x_1 = 60$ por lo tanto el punto será el (60,0)

y

$3x_1 + x_2 = 150$; $x_1 = 0$; $x_2 = 150$ por lo tanto el punto será el (0,150)

$3x_1 + x_2 = 150$; $x_2 = 0$; $x_1 = 50$ por lo tanto el punto será el (50,0)

Además, sabemos que, por la tercera restricción, x_2 tiene que ser menor o igual a 30.

Todo esto gráficamente sería:

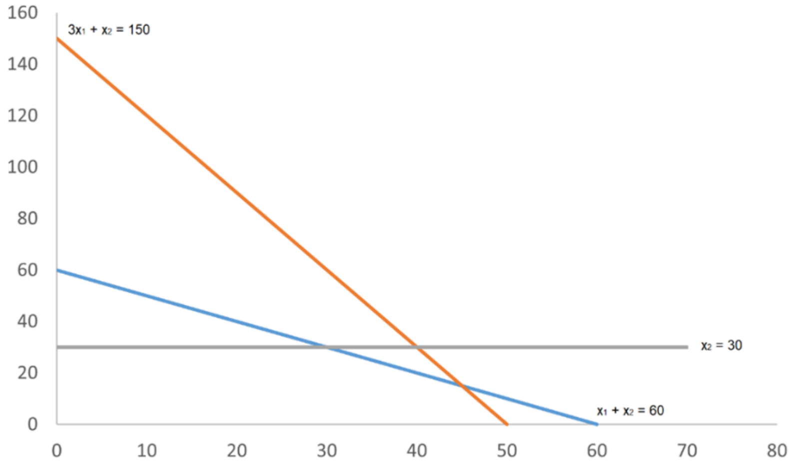

GRÁFICO 4. 1; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.

La siguiente gráfica muestra la región de puntos del plano que satisfacen las restricciones, es decir, la región factible:

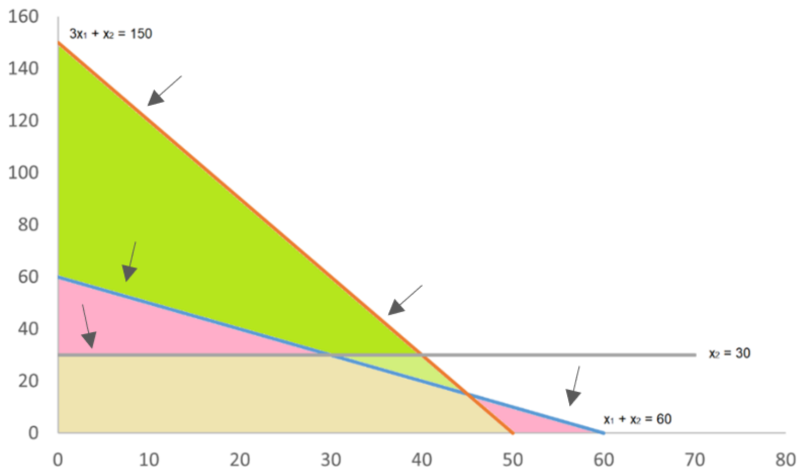

GRÁFICO 4. 2; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.

Vemos que la parte del gráfico representada en marrón claro corresponde a la combinación de los valores que satisfacen la primera restricción, (coloreada en rosa), la segunda restricción, (coloreada en verde), y la tercera. También cumplen las dos últimas condiciones de positividad. Por consiguiente, hemos encontrado la región factible.

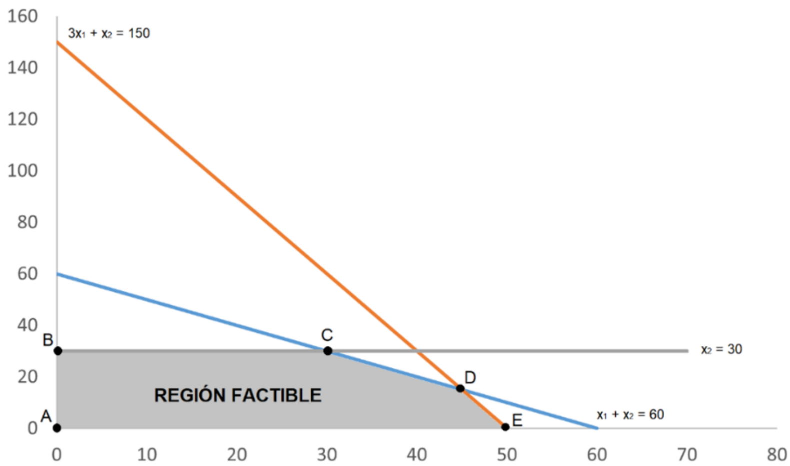

GRÁFICO 4. 3; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.

Se puede apreciar que la región factible está limitada por los puntos A hasta E, que son denominados puntos extremos (Mathur y Solow, 1996).

A continuación, vamos a representar las curvas de nivel $15x_1 + 25x_2=k$.

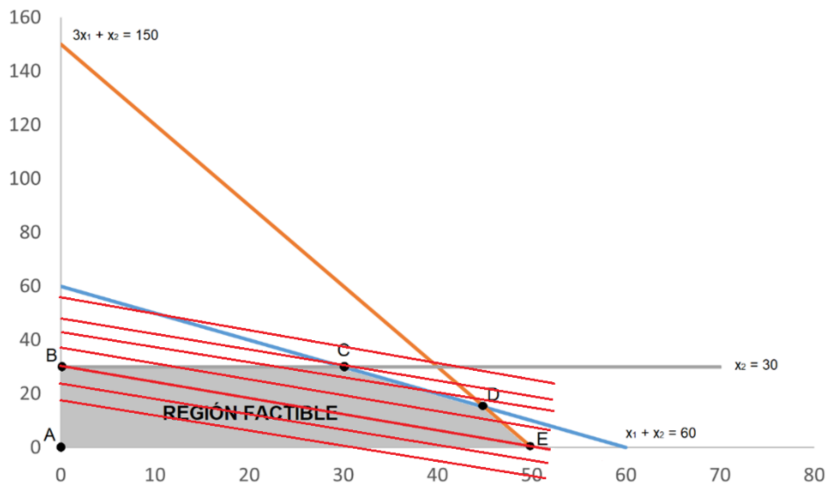

GRÁFICO 4. 4; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.

Para conocer cuál es la recta que en nuestro caso determine el máximo de la función, debemos averiguar primero cuál es el *vector gradiente*.

Como detalla Cobo Ortega (1995, p.81) "*dada una función de n variables, su vector gradiente es el vector formado por las n derivadas parciales primeras*".

En este caso, el vector gradiente es (15, 25). Dicho vector determina el sentido de crecimiento de la función. Si lo que queremos hallar es el máximo, debemos recorrer las curvas de nivel en la misma dirección del vector gradiente hasta encontrar los últimos puntos de la región factible que pertenezcan a una de las rectas. Si nuestro objetivo es minimizar, realizaríamos el mismo proceso, pero seguiríamos la dirección contraria al vector (Cobo Ortega, 1995).

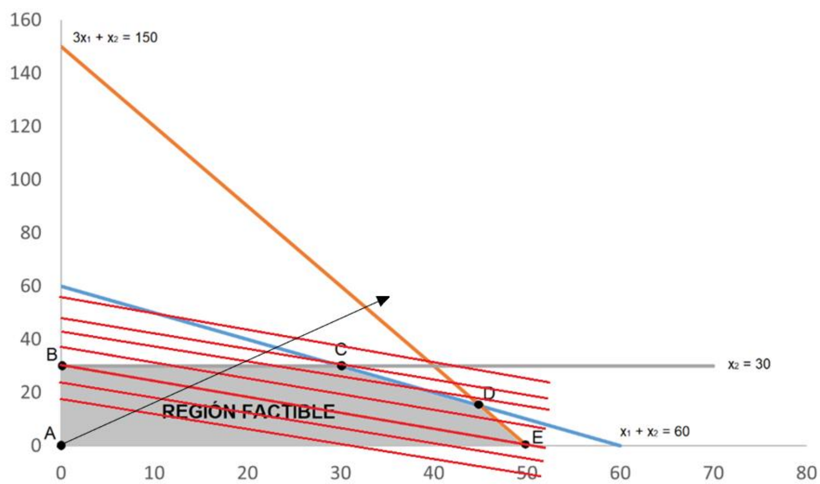

GRÁFICO 4. 5; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.

Como podemos observar en la gráfica, el *punto óptimo* donde se alcanza el máximo es el punto C, cuyos valores son $x_1 = 30$ y $x_2 = 30$, por lo que podemos afirmar que la solución óptima al problema es 15(30) + 25(30) = 1200, k = 1200.

Con la resolución de este ejemplo, vemos que la solución óptima equivale a un vértice de la región factible. Con este tipo de ejemplos, Cobo Ortega (1995) expone alguna de las características de los programas lineales:

1) Los espacios de las soluciones factibles son polítopos y es recomendable que sean un conjunto acotado.

2) Todo problema lineal es un problema de optimización convexo, lo que implica que todo óptimo es global y se alcanza en la frontera del área de las soluciones factibles.

3) Si existe óptimo, se puede afirmar que este se halla en un vértice del polítopo que forme la región factible.

4) Si se obtiene el óptimo en dos puntos, también es solución cualquier punto combinación lineal convexa de ambos.

El método de resolución gráfica anteriormente descrito sólo es posible cuando nos enfrentemos a un problema con dos variables. Si nos encontramos en la posición de tener tres variables o más, podemos emplear el método Simplex (Cobo Ortega, 1995).

5. MÉTODO SIMPLEX

En el apartado anterior hemos explicado cómo hallar la solución de un problema de Programación Lineal gráficamente, pero esta metodología sólo es posible (Mathur y Solow, 1996) cuando nos enfrentamos a un sistema con menos de tres variables. Si nos encontramos en la situación de tener tres o más variables, recurriremos al algoritmo Simplex.

Como afirman Mathur y Solow (1996, p. 169), el algoritmo Simplex es un "*método algebraico para resolver todos los problemas de programación lineal en un número finito de pasos en una computadora*".

5.1. FORMA ESTÁNDAR

Mathur y Solow (1996, p. 174) describen que:

> Debido a que el algoritmo Simplex es algebraico, se hace necesario sustituir cada uno de los pasos geométricos con el correspondiente paso algebraico. Para hacerlo, primero se requiere convertir un problema de programación lineal en una forma específica sensible a la manipulación algebraica.

Como ya sabemos, los problemas de programación lineal se pueden desarrollar de diferentes maneras (Mathur y Solow, 1996) bien sea maximizando o minimizando la función objetivo junto con sus restricciones, que pueden ser de igualdad o de desigualdad, y sus variables, que pueden ser negativas (≤ 0) o positivas (≥ 0). Por lo tanto, para resolver este tipo de problemas, primero se formulan en forma estándar.

Además, cuando operamos con este tipo de metodología y encontramos la solución de un problema de Programación Lineal en su forma estándar también hallamos la solución del problema en su *forma original*, ya que estos son análogos. Asimismo, si el problema no es factible o no está acotado en su forma estándar tampoco lo es en su forma original. (Mathur y Solow, 1996).

Un problema de Programación Lineal acepta forma estándar como la siguiente (Cobo Ortega, 1995):

$$\begin{cases} \min\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \dots, n \end{cases}$$

Suponemos que el número de variables va a ser igual o mayor que el de las restricciones de igualdad ($n \geq m$). Además, sin pérdida de generalidad, suponemos que $b_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2 \dots, m$ (Cobo Ortega, 1995).

Las características principales de este tipo de formulación según Cobo Ortega (1995) son:

1) Minimizar una función lineal homogénea.

2) Las restricciones son de igualdad y el término independiente es mayor o igual a cero.

3) Las variables de decisión sólo toman valores no negativos.

También es posible definir este tipo de problema lineal de manera matricial, como detalla Cobo Ortega (1995), de tal forma que los vectores y las matrices serían los siguientes:

$$c = (c_1, \quad c_2, \quad \dots, \quad c_n) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por lo que el problema puede definirse como:

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Esto es conocido como formulación estándar matricial de un programa lineal.

Para poder entender mejor el proceso de transformación de un problema de Programación Lineal en su forma original a su forma estándar, vamos a desarrollar un ejemplo, pero debemos efectuar una serie de cambios en el problema (Cobo Ortega, 1995).

Primero, vamos a modificar el problema de maximización por uno de minimización. Este paso es posible porque maximizar es semejante a minimizar su función opuesta (Cobo Ortega, 1995). Por lo tanto, ambas funciones van a alcanzar el mínimo en el mismo punto, aunque el valor de las funciones sobre ese punto será distinto.

Respecto a las restricciones, transformamos las desigualdades en igualdades mediante la introducción de nuevas variables que se denominan *variables de holgura* (Cobo Ortega, 1995).

Si nos encontramos con que algunas de las variables x_i no están bajo el supuesto de no negatividad, será reemplazada por la diferencia entre dos variables no negativas (Cobo Ortega, 1995).

Y, por último, multiplicaremos por -1 la ecuación para conseguir que $b_i \geq 0$.

Después de todas estas transformaciones, podemos formular la forma estándar de un problema lineal, distinguiendo entre variables naturales, que son las proporcionadas por el problema, y variables de holgura.

Esto numéricamente sería así:

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 10 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Efectuando las modificaciones enunciadas anteriormente, llegamos a:

$$\begin{cases} \min\ -2x_1 - 5x_2 + 4(x_6 - x_7) \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 - 6x_2 + 2(x_6 - x_7) + x_5 = 10 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Además, podemos definir el problema de Programación Lineal en su forma estándar de manera matricial:

$$c = (-2, -5, 0, 0, 4, -4) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

5.2. MATRICES Y SOLUCIONES BÁSICAS

Para encontrar las soluciones factibles básicas de un sistema lineal, debemos definir primero su forma estándar matricial, que anteriormente hemos explicado.

Por lo tanto, obtenemos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \min\ cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

donde A corresponde a una matriz de *m* filas, (número de restricciones), y *n* columnas, (número de variables), siendo $n \geq m$. Como en la mayoría de los casos las restricciones van a ser de desigualdad, se van a introducir variables de holgura para que estas se conviertan en restricciones de igualdad. Además, el rango de la matriz A va a ser *m* por lo que se va a impedir que haya restricciones redundantes o contradictorias, así evitaremos que el sistema no tenga solución (Cobo Ortega, 1995).

Ángel Cobo (1995, p. 197) define que:

> Cada una de las submatrices de A con determinante distinto de cero formadas seleccionando m columnas de A, se llama matriz básica o matriz de base.

Por lo que, si B es una de las matrices descritas en la definición anterior, podemos denominarla matriz básica factible, sólo si se da que $B^{-1}b \geq 0$, es decir, cada elemento del vector tiene que ser mayor o igual a cero (Cobo Ortega, 1995).

Cada una de las matrices básicas genera una *solución básica* (Cobo Ortega, 1995). Para construir estas matrices, debemos seguir los siguientes pasos:

Si B es una matriz básica de A, podemos considerar que B está formada por las primeras *m* columnas de A. Con las columnas restantes se va a crear una nueva matriz denominada D (Cobo Ortega, 1995).

$$A = (B|D)$$

Las variables de decisión las podemos distribuir de la siguiente manera:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_D \end{pmatrix}$$

Si nos centramos en el vector x_B, las *m* variables equivalen a las columnas seleccionadas para elaborar la matriz básica y se denominan como *variables básicas* mientras que en el vector x_D, las variables restantes $n - m$, son *variables no básicas* (Cobo Ortega, 1995, p. 198).

$$Ax = b \rightarrow (B\ D)\begin{pmatrix} x_B \\ x_D \end{pmatrix} = Bx_B + Dx_D = b \rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D$$

Es importante que la matriz B posea un determinante nulo para así poder hallar su inversa (Cobo Ortega, 1995). Si damos valores nulos a las variables no básicas, es decir, $x_D = 0$, vamos a obtener

$$x_B = B^{-1}b$$

Por lo que la solución básica sería

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para formar las soluciones básicas a partir de las matrices básicas tenemos que calcular el siguiente sistema:

$$Bx_B = b$$

Además de tener que dar valores nulos a las variables restantes (Cobo Ortega, 1995).

Cobo Ortega (1995) clasifica a las soluciones básicas de la siguiente manera:

Una solución básica va a ser factible siempre y cuando $x_B \geq 0$ e infactible cuando alguna de las variables básicas es negativa. Además, las soluciones también pueden ser degeneradas si alguna de las variables básicas es nula o no degeneradas si todas las variables básicas son positivas.

Para conocer el número máximo de solución básicas debemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Pero no todas las combinaciones de *m* columnas y *n* columnas proporcionan un determinante nulo. Aun así, se puede confirmar que el número de soluciones básicas de un modelo es finito (Cobo Ortega, 1995).

Para poder comprender el desarrollo explicado anteriormente, vamos a realizar un ejemplo donde hallemos las soluciones básicas de un sistema.

$$\begin{cases} \min \quad 8x_1 + 16x_2 + 4x_3 \\ 8x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ 4x_1 + 16x_2 - 4x_3 \leq 48 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Primero debemos calcular su forma estándar

$$\begin{cases} \min \quad 8x_1 + 16x_2 + 4x_3 \\ 8x_1 + 8x_2 + x_4 = 24 \\ 4x_1 + 16x_2 - 4x_3 + x_5 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

las matrices son:

$$c = (8 \quad 16 \quad 4 \quad 0 \quad 0); \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 16 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

La primera matriz básica es la compuesta por las dos primeras columnas de A:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Para hallar las variables básicas del problema, tenemos que calcular el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix}$$

por lo que obtenemos:

$$\begin{cases} 8x_1 + 8x_2 = 24 \\ 4x_1 + 16x_2 = 48 \end{cases}$$

Si calculamos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtenemos los siguientes valores:

$x_1 = 0; \quad x_2 = 3$

Por lo tanto, la solución básica a este problema es:

$$x = (0, 3, 0, 0, 0)$$

Como las variables son no negativas, la solución básica hallada es factible y es degenerada ya que el primer valor es nulo.

A continuación, vamos a construir el resto de las soluciones básicas.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix} \rightarrow x = (3, 0, -9, 0, 0) \rightarrow \text{ Infactible.}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix} \rightarrow x = (12, 0, 0, -72, 0) \rightarrow \text{ Infactible.}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix} \rightarrow x = (3, 0, 0, 0, 36) \rightarrow \text{ Factible no degenerada.}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix} \rightarrow x = (0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow \text{ Factible degenerada.}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix} \rightarrow x = (0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow \text{ Factible degenerada.}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix} \rightarrow x = (0, 3, 0, 0, 0) \rightarrow \text{ Factible degenerada.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix} \rightarrow x = (0, 0, -12, 24, 0) \rightarrow \text{ Infactible.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 48 \end{pmatrix} \rightarrow x = (0, 0, 0, 24, 48) \rightarrow \text{ Factible no degenerada.}$$

5.2.1. Interpretación geométrica de las soluciones básicas

Para entender la labor importante que ejercen las soluciones básicas en la Programación Lineal, vamos a explicar con un ejemplo su análisis gráfico (Cobo Ortega, 1995).

$$\begin{cases} \min \quad x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2, \geq 0 \end{cases}$$

Su representación gráfica sería:

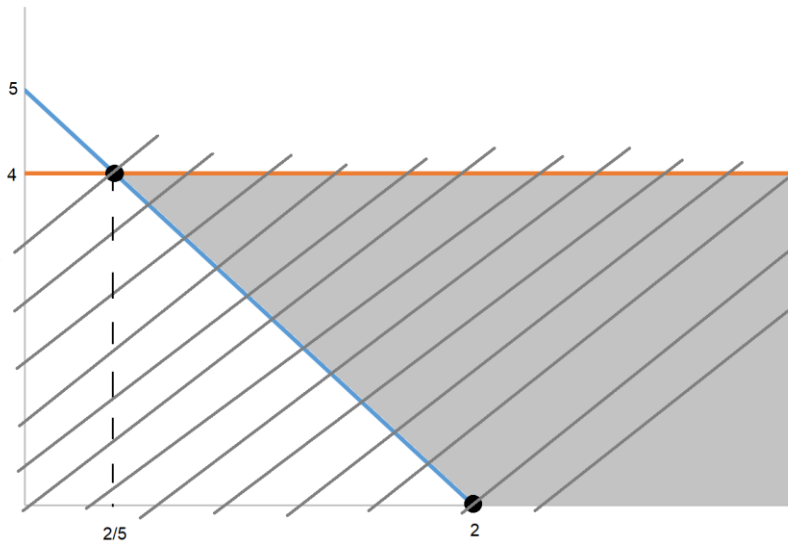

GRÁFICO 5. 1; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.

Vemos en el gráfico, que el problema lineal alcanza su mínimo en uno de los vértices (2/5,4) y sin embargo el máximo no se alcanza en ningún punto (Cobo Ortega, 1995).

A continuación, vamos a poner el modelo en su forma estándar

$$\begin{cases} \min \quad x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

donde x_3 y x_4 son las variables de holgura y las matrices son:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Las soluciones básicas que obtenemos son:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow x = (2/5, 4, 0, 0) \rightarrow \text{ Factible no degenerada.}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow x = (2, 0, 0, 4) \rightarrow \text{ Factible no degenerada.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow x = (0, 4, -2, 0) \rightarrow \text{ Infactible.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow x = (0, 5, 0, -1) \rightarrow \text{ Infactible.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow x = (0, 0, -10, 4) \rightarrow \text{Infactible.}$$

Por lo tanto, las soluciones factibles al problema son $(2/5, 4, 0, 0)$ y $(2, 0, 0, 4)$, donde los valores de x_1 y x_2 de estas soluciones coinciden con los vértices de la región factible (Cobo Ortega, 1995).

Como describe Cobo Ortega (1995, p. 203):

> Las soluciones básicas factibles de un programa lineal
>
> $$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$
>
> se corresponden con los vértices del politopo dado por las restricciones.

Anteriormente, se mencionó una importante propiedad de los problemas lineales: si existe óptimo, este se alcanza al menos en un vértice de la región factible. Por lo tanto, de aquí se concluye el Teorema fundamental de la programación lineal (Cobo Ortega, 1995, p. 206):

> Dado un programa lineal en forma estándar, si existe solución óptima, ésta se alcanza al menos sobre una de las soluciones básicas factibles.

El número de soluciones básicas que posee un problema es finito por lo que para resolver este tipo de problemas es necesario la construcción de las soluciones básicas factibles y elegir aquella que minimice la función objetivo. Bien es cierto que este método de resolución no es viable siempre y cuando nos enfrentemos a un modelo con una gran cantidad de variables de decisión (Cobo Ortega, 1995).

El método Simplex tiene como finalidad hallar la solución básica factible sin formular todas las soluciones, solamente utilizaremos un subconjunto que se aproxime a la solución. Por lo que, para emplear el método Simplex, tenemos que partir de una solución básica factible inicial. Si esta solución no es óptima, tendremos que buscar otra que haga que el valor de la función objetivo disminuya o en su defecto no aumente. Este paso deberá repetirse hasta determinar la solución básica factible óptima (Cobo Ortega, 1995).

5.3. FORMA DE TABLA

Como afirma Cobo Ortega (1995, p. 215):

> La resolución de programas lineales mediante el método Simplex implica la realización de gran cantidad de cálculos, sobre todo cuando el número de variables y/o restricciones es relativamente elevado. Sin embargo, estos cálculos no son complejos y pueden realizarse en modo sistemático utilizando una forma tabular.

Así surgen las conocidas tablas del Simplex, pero este tipo de tablas se emplean simplemente con fines educativos ya que nadie utiliza esta metodología en casos reales debido a la gran magnitud de los problemas (Cobo Ortega, 1995).

Para emplear el método Simplex en forma de tabla seguiremos las indicaciones de Cobo Ortega (1995, pp. 215-218) para el siguiente problema:

$$\begin{cases} \min cx \\ Ax = b \text{ con } b \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

construimos la siguiente tabla:

(C_1)	(C_2)	(C_3)	$c_1 \cdots \cdots c_n$	(F_1)
c_{B_1} $\vdots$ c_{B_m}	x_{B_1} $\vdots$ x_{B_m}	b_1 $\vdots$ b_m	$a_{11} \cdots \cdots a_{1n}$ a_{ij} $a_{m1} \cdots \cdots a_{mn}$	
		$c_B o\, b$	$c_b o\, A_1 \cdots \cdots c_B\, o\, A_n$	(F_{m+2})
			$z_1 \cdots \cdots z_n$	(F_1) – (F_{m+2})

$z_i = c_i - c_B\ o\ A_i \quad i = 1, 2, \dots, n$ *siendo* $A_1, \dots, A_n$ *las columnas de la matriz A.*

La primera fila de la tabla corresponde a los coeficientes de las variables de la función objetivo mientras que la columna C_1 corresponde a los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo, la columna C_2 a las variables básicas iniciales y la columna C_3 al vector de términos independientes de las restricciones.

Es importante aclarar que las variables iniciales deben tener asociadas una matriz de base igual a la identidad. En muchas situaciones, al introducir variables de holgura en las restricciones se forma una matriz básica identidad, utilizada como base inicial del algoritmo. Si esto no sucede, se aplican diferentes técnicas para conseguir una submatriz identidad como puede ser introducir una variable artificial o con una manipulación previa del problema.

Si ahora nos fijamos en la parte central de la tabla, vemos que esta está formada por la matriz de coeficientes *A*; la fila F_{m+2} incluye los resultados de multiplicar de manera escalar la columna C_1 con las columnas de la matriz *A*; y la última fila corresponde a la diferencia entre la fila F_1 y la fila F_{m+2}.

Toda tabla está relacionada con una solución factible básica (Cobo Ortega, 1995). Una vez formada la primera tabla, debemos fijarnos en los elementos de la última fila:

- Si todos son mayores o iguales a cero, hemos logrado averiguar la solución óptima. El valor óptimo es el último elemento de C_3.

- Si alguno es negativo, tenemos que construir una nueva tabla (Cobo Ortega, 1995):

    1) El elemento negativo de mayor valor absoluto de la última fila identificará la nueva variable básica.

    2) Dividimos los valores de la columna C_3 entre los valores positivos de la columna de *A* correspondiente al elemento negativo elegido, para así conocer qué variable básica vamos a sustituir por la nueva. Elegimos el cociente de menor valor y el elemento de la matriz *A* utilizado. Este funcionará como “pivot” y la variable de la columna C_2 que se encuentre en la fila del pivot ya no será variable básica. Si estamos en la situación donde no hay valores positivos, podemos afirmar que el problema no tiene óptimo finito.

    3) Transformamos en 1 el pivot y anulamos los demás elementos de su columna. Sólo se van a permitir ciertas transformaciones como son multiplicar por constantes la fila donde esté el pivot y sumar o restar a una fila un múltiplo de la fila del pivot.

    4) Cambiamos las variables básicas en la columna C_2 y el correspondiente elemento de la columna C_1

    5) Calculamos otra vez los valores de las dos últimas filas de la tabla.

Se repite el procedimiento hasta llegar a una tabla con la última fila de elementos no negativos.

A continuación, para comprender mejor como se aplica el método Simplex en forma de tabla vamos a realizar un ejemplo partiendo del siguiente modelo.

$$\begin{cases} \min 9x_1 - 2x_2 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Construimos su tabla:

			9	−2	0	0
0	x_3	8	−4	1	1	0
0	x_4	12	2	6^*	0	1
		0	0	0	0	0
			9	−2	0	0

x_3 y x_4 van a ser las variables básicas y además vemos que hay un elemento negativo en la última fila, vamos a dividir 8/1 y 12/6.

El término que lleva * es el “pivot”. Su posición muestra que x_4 ya no va a ejercer de variable básica y que esta será sustituida por x_2.

Para construir la tabla siguiente, debemos lograr que el “pivot” tenga el valor 1 y anular los elementos restantes de su columna. Dividimos la segunda fila por 6 y restamos la segunda fila a la primera. Sustituimos x_4 por x_2 y modificamos la primera columna de la tabla.

Por lo tanto, la tabla quedaría así:

			9	−2	0	0
0	x_3	6	$-\frac{13}{3}$	0	1	$-\frac{1}{6}$
−2	x_2	2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$
		−4	$-\frac{2}{3}$	−2	−2	$-\frac{1}{3}$
			$\frac{25}{3}$	0	2	$\frac{1}{3}$

La última fila cumple la condición que buscábamos, lo que indica que hemos alcanzado un óptimo:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 6 \qquad x_4 = 0$$

por lo que el problema inicial tiene como solución óptima el punto (0, 2) y como valor óptimo, -4

5.3.1. Introducción de variables artificiales

Las variables artificiales van a utilizarse en la resolución tabular del método Simplex siempre y cuando en la tabla no se disponga de un conjunto de vectores que formen la matriz identidad. Cuando estemos en esa situación y el sistema esté en forma estándar, introduciremos las variables artificiales y las sumaremos a las restricciones para lograr obtener una matriz básica que sea igual a la identidad (Cobo Ortega, 1995).

Esta modificación no va a afectar a la solución del problema (Cobo Ortega, 1995) ya que el objetivo es que las variables artificiales dejen de ser básicas para que así se anulen. Esto se va a conseguir incluyendo un coeficiente muy alto positivo en la función objetivo.

Para entender mejor este tipo de procedimiento, expondremos un ejemplo de cómo utilizar este tipo de variables.

Vamos a operar con el siguiente problema lineal:

$$\begin{cases} \min 4x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 60 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + x_2 = 27 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Transformamos el problema a su forma estándar introduciendo x_3 y x_4 como variables de holgura:

$$\begin{cases} \min 4x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 60 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_4 = 60 \\ 3x_1 + x_2 = 27 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

y obtenemos la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que de esta matriz no vamos a poder obtener la submatriz identidad (Cobo Ortega, 1995), de modo que vamos a introducir las variables x_5 y x_6 que van a actuar como variables artificiales.

Para insertar dichas variables, debemos hacerlo con un coeficiente muy alto positivo (Cobo Ortega, 1995), que denominaremos *M*, en la función objetivo. De esa forma, enseguida pasarán a ser variables no básicas y tomarán el valor nulo, no influyendo así en el valor óptimo final. Además, con estas dos variables incluidas en la primera y tercera restricción, podremos obtener una matriz básica igual a la identidad en la primera tabla

Por lo tanto, el problema queda así:

$$\begin{cases} \min 4x_1 + 5x_2 + Mx_5 + Mx_6 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 60 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_4 = 60 \\ 3x_1 + x_2 + x_6 = 27 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Posteriormente, realizamos la primera tabla:

			4	5	0	0	M	M
M	x_5	60	6	4	-1	0	1	0
0	x_4	60	5	5	0	1	0	0
M	x_6	27	3^*	1	0	0	0	1
		87M	9M	5M	$-$M	0	M	M
			$4-9$M	$5-5$M	M	0	0	0

Como *M* tiene un valor muy grande, (Cobo Ortega, 1995) los dos primeros términos de la última fila de la tabla van a ser negativos y es el primer término el que en valor absoluto va a ser mayor.

La siguiente tabla es:

			4	5	0	0	M	M
M	x_5	6	0	2^*	-1	0	1	-2
0	x_4	15	0	$\frac{10}{3}$	0	1	0	$-\frac{5}{3}$
4	x_1	9	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
		$6M+36$	4	$2M+\frac{4}{3}$	$-M$	0	M	$-2M+\frac{4}{3}$
			0	$-2M+\frac{11}{3}$	M	0	0	$3M-\frac{4}{3}$

Vemos que una de las variables ya no es básica (x_6).

			4	5	0	0	M	M
5	x_2	3	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	x_4	5	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
4	x_1	8	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
		47	4	5	$-\frac{11}{6}$	0	$\frac{11}{6}$	$\frac{23}{3}$
			0	0	$\frac{11}{6}$	0	$M-\frac{11}{6}$	$M-\frac{23}{3}$

Ahora vemos que ya no aparece ninguna de las variables artificiales como básicas y, por consiguiente, podemos suprimir las dos últimas columnas de la tabla (Cobo Ortega, 1995).

			4	5	0	0
5	x_2	3	0	1	$-\frac{1}{2}$	0
0	x_4	5	0	0	$\frac{5}{3}$	1
4	x_1	8	1	0	$\frac{1}{6}$	0
		47	4	5	$-\frac{11}{6}$	0
			0	0	$\frac{11}{6}$	0

No hay ningún término negativo en la última fila de la tabla lo que significa que hemos encontrado un óptimo, cuyas coordenadas son: 0

$x_1 = 8$ $\qquad$ $x_2 = 3$ $\qquad$ $x_3 = 0$ $\qquad$ $x_4 = 5$

El problema inicial de dos variables tiene como solución óptima el punto (8, 3) y el valor óptimo es 47.

6. CASOS PRÁCTICOS

A continuación, vamos a resolver dos problemas lineales mediante el método Simplex: uno con minimización y otro con maximización de la función objetivo. Además, vamos a demostrar que las soluciones básicas factibles halladas van a coincidir con los vértices del problema.

6.1. CASO 1

Vamos a partir del siguiente problema lineal:

$$\begin{cases} \min\ -x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Como ya hemos explicado anteriormente, el primero paso es poner el modelo en forma estándar.

$$\begin{cases} \min\ -x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_4 = 18 \\ 6x_1 + 3x_2 + x_5 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

El segundo paso es construir la tabla, donde las variables x_3, x_4 y x_5 tiene asociadas la matriz de base de la identidad:

			-1	-1	0	0	0
0	x_3	3	-1	1	1	0	0
0	x_4	18	3	6	0	1	0
0	x_5	18	6^*	3	0	0	1
		0	0	0	0	0	0
			-1	-1	0	0	0

Podemos apreciar que en la última fila hay dos términos negativos con el mismo valor, lo que indica que las variables x_1 y x_2 pueden ser las variables de entrada.

En nuestro caso, hemos señalado el “pivot” con el símbolo *. Por lo tanto, x_1 va a sustituir a la variable x_5 como variable básica.

Para ello, vamos a realizar las operaciones oportunas en la tabla, haciendo que el “pivot” sea 1 y transformando la primera y segunda fila. Por lo que la segunda tabla sería:

			-1	-1	0	0	0
0	x_3	6	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{6}$
0	x_4	9	0	$\frac{9^*}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$
-1	x_1	3	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{6}$
		-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{6}$
			0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{6}$

Analizando la tabla, vemos que todavía tenemos un término negativo en la última fila, por lo tanto, no hemos alcanzado un óptimo por lo que debemos seguir realizando transformaciones en la tabla hasta llegar a ese óptimo.

Seleccionamos el nuevo “pivot”, haciendo que x_4 ya no sea variable básica y sea sustituida por x_2. Obtenemos la tercera tabla:

			-1	-1	0	0	0
0	x_3	3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
-1	x_2	2	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$
-1	x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
		-4	-1	-1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$
			0	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Con esta tabla ya vemos que no hay ningún término negativo en la última fila, lo que se traduce a que hemos alcanzado el óptimo en el punto:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 0 \qquad x_5 = 0$$

y el valor óptimo es -4.

Toda tabla que se ejecute con el algoritmo Simplex lleva asociada una solución básica factible, cuyas coordenadas corresponden a la tercera columna. Podemos identificar las soluciones básicas factibles con los vértices correspondientes de la región factible.

El problema gráficamente sería:

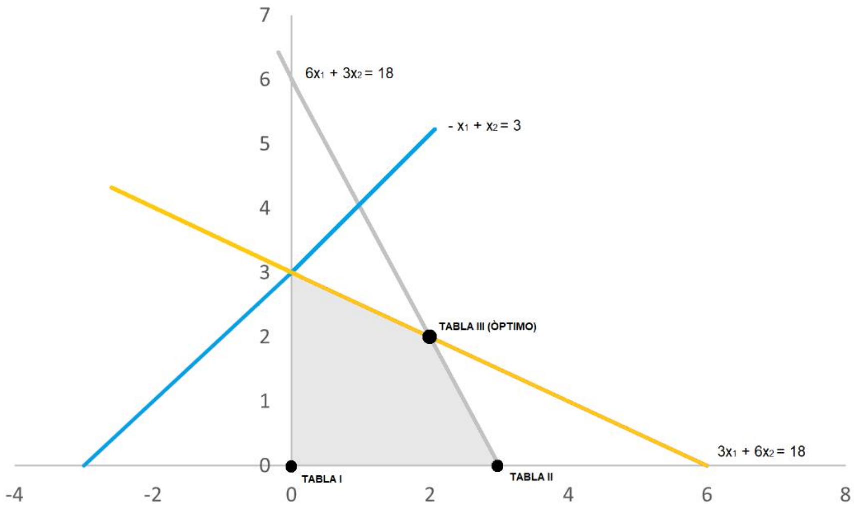

GRÁFICO 6. 1; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

	Punto	Vértice	Valor óptimo
Primera tabla	(0, 0, 3, 18, 18)	(0, 0)	0
Segunda tabla	(3, 0, 6, 9, 0)	(3, 0)	-3
Tercera tabla	(2, 2, 3, 0, 0)	(2, 2)	-4

TABLA 6. 1; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

6.2. CASO 2

Una empresa textil quiere vender 60 vestidos y 100 pares de zapatos en periodo de rebajas. Para ello ha impulsado dos ofertas: A y B. La oferta A se compone de un lote de 2 vestidos y 6 pares de zapatos a 120€ mientras que en la oferta B la compra de un lote de 2 vestidos y 2 pares de zapatos sale a 55€. ¿Cuántos lotes de cada tipo tiene que vender la empresa para poder maximizar sus ingresos?

$$\begin{cases} \max\ 120x_1 + 55x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Como ya hemos explicado anteriormente, el primero paso es poner el modelo en forma estándar.

$$\begin{cases} \min\ -120x_1 - 55x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

A continuación, construimos la tabla, donde las variables x_3 y x_4 tienen asociada la matriz de base de la identidad:

			-120	-55	0	0
0	x_3	60	2	2	1	0
0	x_4	100	6^*	2	0	1
		0	0	0	0	0
			-120	-55	0	0

Vemos que en la última fila hay dos términos negativos, pero va a ser x_1 la variable que sustituya a x_4 como variable básica.

Después de realizar las operaciones en la primera tabla, la segunda sería:

			-120	-55	0	0
0	x_3	$\frac{80}{3}$	0	$\frac{4^*}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$
-120	x_1	$\frac{50}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$
		-2000	-120	-40	0	-20
			0	-15	0	20

Fijándonos en la última fila, vemos aún hay un término negativo, así pues, seguimos realizando transformaciones en la tabla.

Escogemos el nuevo “pivot” y que x_3 deja de ser variable básica y x_2 la sustituye.

De tal modo que la tercera tabla sería:

			-120	-55	0	0
-55	x_2	20	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
-120	x_1	10	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
		-2300	-120	-55	$-\frac{45}{4}$	$-\frac{65}{4}$
			0	0	$\frac{45}{4}$	$\frac{65}{4}$

Vemos que ya no hay ningún término negativo en la última fila, por lo que podemos concluir que hemos alcanzado el óptimo en el punto:

$x_1 = 10$ $\qquad$ $x_2 = 20$ $\qquad$ $x_3 = 0$ $\qquad$ $x_4 = 0$

y el valor óptimo es -2300. Por tanto, los ingresos máximos son 2300 euros.

Para ver como coinciden las soluciones halladas con los vértices, hacemos la representación gráfica.

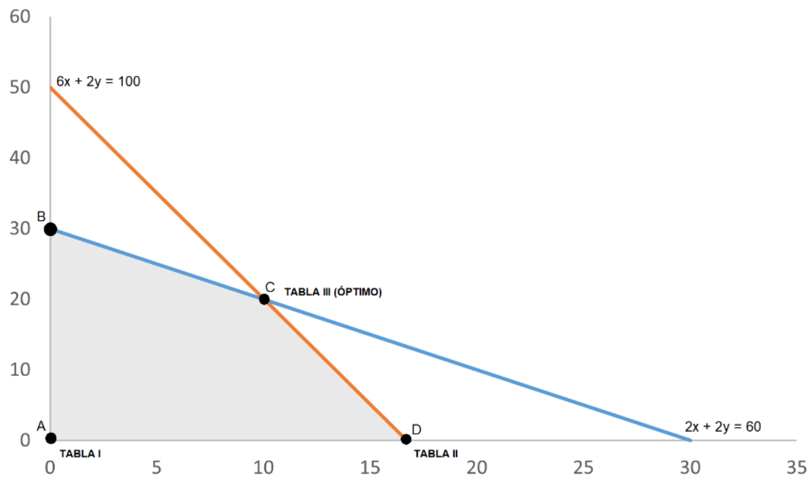

GRÁFICO 6. 2; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

	Punto	Vértice	Valor óptimo
Primera tabla	(0, 0, 60, 100)	(0, 0)	0
Segunda tabla	(50/3, 0, 80/3, 0)	(50/3, 0)	-2000
Tercera tabla	(10, 20, 0, 0)	(10, 20)	-2300

TABLA 6. 2; FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA

Con los gráficos representados, podemos comprobar que las soluciones básicas factibles calculadas con el algoritmo Simplex coinciden con los vértices de la región factible. Por lo tanto, vemos que con el método Simplex pasamos de un punto a otro que proporcione un valor mejor para la función objetivo.

7. CONCLUSIÓN

Tras la realización de este trabajo, podemos comprobar la gran relevancia que ha tenido la Investigación Operativa a lo largo del tiempo. Con esta metodología se han podido resolver grandes problemas planteados como por ejemplo la asignación de los recursos. Además, debido al avance tecnológico, la Investigación Operativa se ha podido desarrollar llegando a ser imprescindible en el ámbito empresarial, ya que con estas técnicas podemos entender la Programación Lineal. Por lo tanto, podemos detallar que la Investigación Operativa es el paso previo a la Programación Lineal.

Gracias a estas herramientas matemáticas, hemos podido comprender cómo desarrollar problemas que tengan variables continuas y restricciones lineales. Bien es cierto que, a la hora de resolver dichos problemas, poseemos varios métodos: analítico y gráfico. Posiblemente, el método gráfico sea uno de los métodos más rápidos y claros a la hora de ejecutarlos, pero tiene la desventaja de que este sólo puede utilizarse cuando el problema posea dos variables y esta situación en la vida real es casi imposible. De ahí viene gran parte de la relevancia del método Simplex.

Con este algoritmo, hemos podido comprobar que, aunque el número de variables sea elevado, siempre obtendremos, si el problema lo tiene, un valor óptimo. Este algoritmo que fue diseñado en 1947 ha ido avanzando a la misma velocidad que han avanzado los ordenadores, lo que ha permitido que las empresas e industrias puedan acceder a esta metodología de manera habitual.

Pero el método Simplex no sólo es conocido porque halle la solución de un problema con más de tres variables, sino que éste tiene como objetivo encontrar dicha solución sin la necesidad de obtener todos los puntos candidatos (las soluciones básicas factibles, es decir, los vértices del politopo de la región factible), ya que el algoritmo opera con un subconjunto de ellos. Esto implica una disminución del tiempo a la hora de realizar este proceso.

Por lo tanto, podemos concluir que gracias al método Simplex muchas empresas o incluso personas, encuentran respuesta a la búsqueda de la toma de decisiones debido a que este algoritmo siempre escoge el punto óptimo que dé mejor valor a la función objetivo.

8. BIBLIOGRAFÍA

Alvarado Boirivant, J. (2009) “La programación lineal. Aplicación de las pequeñas y medianas empresas”. *Reflexiones*, 88(1), pp. 2-5. Disponible en: https://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/reflexiones/article/view/11511 [Consultado 29/04/2021]

Cobo Ortega, A. (1995) *Optimización matemática.* Santander: COPISAN.

Mathur, K. y Solow, D. (1996) *Investigación de Operaciones, El arte de la Toma de Decisiones.* México: Prentice Hall.

Ríos Insua, S. (1996) *Investigación Operativa, Programación lineal y aplicaciones..* Madrid: Ramón Areces.

Taha, H. A. (2004). *Investigación de operaciones*. Pearson Educación.