



# Superficies Minimales

Propiedades, Ejemplos, Deformaciones Isométricas y  
representación de Weierstrass

(Minimal Surfaces: Properties, Examples, Isometric  
Deformations and Weierstrass representation)

Bárbara Pérez de Diego

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Matemáticas  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Director: Mario Alfredo Fioravanti Villanueva

Junio 2021

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Introducción a la teoría de superficies . . . . .	5
1.2. Variable compleja . . . . .	7
<b>2. Introducción a las superficies minimales</b>	<b>9</b>
2.1. Definición y Variación Normal . . . . .	9
2.2. Ejemplos de superficies minimales . . . . .	12
2.2.1. Catenoide . . . . .	13
2.2.2. Helicoide . . . . .	15
2.2.3. Deformación del Helicoide en el Catenoide . . . . .	16
2.2.4. Superficie Minimal de Enneper . . . . .	17
2.2.5. Parametrizaciones locales de Monge minimales y superficie minimal de Scherk . . . . .	21
2.2.6. Superficie minimal de Henneberg . . . . .	22
2.3. Aplicación de Gauss de una superficie minimal . . . . .	22
<b>3. Superficies minimales y análisis complejo</b>	<b>25</b>
3.1. Coordenadas isotermas . . . . .	25
3.2. Análisis complejo . . . . .	27
3.3. Derivadas complejas y curvas minimales . . . . .	29
3.4. Determinacion de superficies minimales conjugadas . . . . .	37
<b>4. Superficies minimales y representacion de Weierstrass</b>	<b>39</b>
4.1. La representacion de Weierstrass . . . . .	39
4.2. Superficie Minimal de Costa . . . . .	44
4.2.1. Funciones $\wp$ y $\zeta$ de Weierstrass . . . . .	44
4.2.2. Funciones $\wp$ y $\zeta$ de Weierstrass en un cuadrado . . . . .	46
4.2.3. Definición de la Superficie Minimal de Costa . . . . .	47

# Agradecimientos

Lo primero, a Mario, por confiar en mi desde el primer día que pise la Facultad, por guiarme y darme consejo con este trabajo, ha sido un placer ser tu alumna.

A mis amigas, por ser mi pilar todos estos años, por estar siempre para celebrar mis logros, por darme los mejores consejos, y estar conmigo en todo momento. A Rodrigo, por ver siempre el lado bueno de las cosas, y apoyarme siempre, sobre todo, cuando las cosas no salían bien.

Y en especial a mis padres, Pedro y Marietta, a mi hermana Estela, y a toda mi familia, sin vosotros no habría llegado hasta aquí, gracias por apoyarme en todos los momentos de mi vida, en especial, en todos estos años de universidad, gracias a vosotros soy lo que soy hoy en día.

# Resumen

Las superficies minimales cobran un especial interés a lo largo de la historia, es por eso que estudiaremos distintas propiedades para identificar este tipo de superficies. Conoceremos los distintos avances a lo largo de la historia en la investigación de estas superficies.

A su vez resultará interesante la importante conexión de las superficies minimales con el análisis complejo, nos centraremos en el estudio de coordenadas isotermas y la relación que mantienen con este tipo de superficies.

Como último punto a destacar, veremos que otro de los objetos principales de estudio en este trabajo será la representación de Weierstrass y su importante relación con las superficies minimales, para lo que analizaremos concretamente el ejemplo de la superficie minimal de Costa.

**Palabras clave:** *Superficie minimal - Coordenadas Isotermas - Curva Minimal - Representación de Weierstrass - Superficie Minimal de Costa*

# Abstract

Minimal surfaces have been of special interest throughout history, that is why we will study different properties to identify this type of surfaces. We will learn about the different advances throughout history in the investigation of these surfaces.

At the same time it will be interesting the important connection of the minimal surfaces with the complex analysis, we will focus on the study of isothermal coordinates and the relation that they maintain with this type of surfaces.

As last point to emphasize, we will see that another of the main objects of study in this work will be the Weierstrass representation and its important relation with the minimal surfaces, for which we will analyze concretely the example of the minimal surface of Costa.

**Key words:** *Minimal surface - Isothermal coordinates - Minimal curve - Weierstrass representation - Minimal Costa surface.*

# Introducción

Es necesario primero, conocer un poco los distintos avances en el estudio de superficies minimales a lo largo de la historia, para tener así una pequeña idea sobre las motivaciones que llevaron a la investigación de este tipo de superficies, así como sus propiedades, y sus relaciones con distintos campos de las matemáticas, como puede ser el análisis complejo (esto lo podremos encontrar en una gran cantidad de libros y artículos relacionados con el estudio de superficies minimales como [8] y [7]).

El comienzo del estudio e investigación, de las superficies minimales comenzó alrededor del año 1760, con el matemático Lagrange, este se dedicó al problema de encontrar la superficie de menor área, entre un conjunto de superficies con la misma frontera, una de las conclusiones que obtuvo Lagrange, fue que esa superficie ha de verificar la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) + \frac{d}{dy} \left( \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right) = 0.$$

Unos años más tarde, Meusnier ofreció una interpretación geométrica a este problema, observando que las superficies que verificaban la expresión propuesta por Lagrange, eran aquellas, cuya curvatura media se anula, por eso, se comienza a usar el nombre de superficies minimales, para aquellas que verifican que  $H = 0$ . Además se afirmó y probó, que tanto el catenoide como el helicoides cumplen la expresión diferencial previa, por eso son considerados los primeros ejemplos de superficies minimales.

Es más adelante, a lo largo del siglo XIX, cuando encontramos más avances en este campo, con matemáticos muy importantes de la época como pueden ser Enneper, Schwarz, Riemann, Scherk y Weierstrass (veremos alguno de sus trabajos a lo largo del trabajo). Es muy importante el trabajo de Weierstrass como podremos comprobar en el capítulo final, ya que este establece una cierta relación entre las superficies minimales y el recién desarrollado análisis complejo, dando expresiones analíticas para generalizar superficies minimales, mediante el uso de funciones armónicas.

Aproximadamente, a mitad del siglo XIX, nos encontramos con los avances y descubrimientos del físico Joseph Plateau, y desarrolla lo que conocemos como problema de Plateau, este observó que las superficies minimales podrían interpretarse físicamente como pompas de jabón. La investigación de Plateau sobre la tensión superficial de las pompas de jabón, le sirvió para establecer una relación con el problema de minimizar el área dado el borde de la superficie. Para ello, lo que hizo Plateau, fue con un alambre definir el borde de la superficie, meterlo en una solución jabonosa y crear de esta manera una pompa de jabón, y obtuvo las siguientes

conclusiones:

- Las pompas de jabón se hacen a partir de superficies suaves (estas son aquellas que no tienen puntos singulares, es decir, tienen un único plano tangente en cada punto).
- La curvatura media de las pompas de jabón es 0.

Destacamos una segunda etapa en el estudio e investigación de superficies minimales, comenzando con la primera mitad del siglo XX, en el que se impulsa el desarrollo de las ecuaciones en derivadas parciales destacando matemáticos como Bernstein, Douglas o Morrey.

En la segunda mitad del siglo XX, destacan los trabajos de algunos matemáticos muy conocidos de la época como pueden ser do Carmo y Osserman, resultados de ambos matemáticos serán vistos a lo largo de este trabajo, como por ejemplo, para profundizar en algunos ejemplos de superficies minimales como el catenoide y el helicoide, así como para conocer distintos resultados que serán de especial importancia.

En este trabajo intentaremos conocer con más profundidad, el concepto de superficies minimales. En el primer capítulo repasaremos aquellos términos relevantes para el estudio de este tipo de superficies, vistos a lo largo de la carrera. Nos centraremos en algunas definiciones y teoremas relativos a la teoría de superficies, así como de teoría relacionada con el análisis complejo.

En el segundo capítulo, haremos una presentación a las superficies minimales, dando a conocer distintos métodos (teoremas), que nos permitirán identificar este tipo de superficies. Encontraremos a su vez distintos ejemplos de superficies minimales, como pueden ser el catenoide o el helicoide. Para acabar con este capítulo, estudiaremos la aplicación de Gauss de una superficie minimal.

Nos centraremos en la relación entre las superficies minimales y el análisis complejo, en el tercer capítulo, introduciremos las coordenadas isotermas y algunos teoremas y proposiciones relacionadas con este concepto. A su vez introduciremos las curvas minimales y su relación con las superficies minimales.

Para finalizar, veremos la representación de Weierstrass, su definición, propiedades y distintos teoremas que relacionarán esta representación con todo lo visto previamente. Del mismo modo, estudiaremos la relación que podemos encontrar entre una superficie minimal y una parametrización de Weierstrass. Por último nos encontraremos con la presentación de la superficie minimal de Costa, una superficie de especial interés por su alta relación con la representación de Weierstrass.

# Capítulo 1

## Preliminares

Para el correcto entendimiento de lo que es el trabajo en si, primero es necesario recordar y repasar algunos conceptos, teoremas y aspectos relacionados con superficies en general. Este capítulo preliminar, se basará en un breve repaso de geometría, y análisis complejo, dos campos muy importantes en los que profundizaremos en los capítulos posteriores.

### 1.1. Introducción a la teoría de superficies

Comenzaremos repasando los aspectos más importantes que veremos en los próximos capítulos relativos a este ámbito, presentaremos algunas definiciones así como resultados que resultarán interesantes para una correcta interpretación de la notación usada a lo largo de este trabajo. Gran cantidad de esta información podremos encontrarla en los libros citados en la bibliografía, centrándonos en [9].

**Definición 1.1.** Una superficie parametrizada  $x$  (también conocida como parametrización local) es una aplicación diferenciable:

$$x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

siendo  $\mathcal{U}$  un conjunto abierto contenido en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.2.** Dada  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada, decimos que la superficie es regular si y solo si  $x_u \times x_v$  es no nulo en todos los puntos  $(u, v)$  de  $\mathcal{U}$ .

**Definición 1.3.** Dada una superficie parametrizada inyectiva  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la normal unitaria  $N$  de la superficie viene dada por la siguiente expresión:

$$N(u, v) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}(u, v), \quad (1.1)$$

siendo evidente que es, en aquellos puntos  $(u, v)$  de  $\mathcal{U}$  en los cuales  $x_u \times x_v$  no se anula.

A partir de estas dos definiciones, resulta claro que  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si y solo si la normal unitaria  $N$  está bien definida en todos los puntos de  $\mathcal{U}$ .

**Definición 1.4.** Dada una superficie parametrizada  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se dice que la normal, definida por (1.1), puede interpretarse como una aplicación del conjunto en  $\mathcal{U}$  en  $S^2(1)$ , la esfera unidad, llamada aplicación de Gauss de la superficie  $x$ .

A continuación estudiaremos las formas fundamentales, que como veremos más adelante aparecen constantemente a lo largo del trabajo, se conocen distintas notaciones válidas y aceptadas para estas funciones, por eso presentamos a continuación las que hemos utilizado.

**Definición 1.5.** Dada una superficie parametrizada  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definimos las funciones  $g_{11}, g_{12}, g_{22} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , que vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$g_{11} = x_u \cdot x_u, \quad g_{12} = g_{21} = x_u \cdot x_v, \quad g_{22} = x_v \cdot x_v, \quad (1.2)$$

estas nos sirven para definir la métrica o primera forma fundamental de la superficie  $x$ , la cual tiene la siguiente expresión:

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2. \quad (1.3)$$

**Definición 1.6.** Dada una superficie parametrizada  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , podemos definir los coeficientes de lo que llamaremos la segunda forma fundamental, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} L_{11} &= x_{uu} \cdot N, \\ L_{12} &= x_{uv} \cdot N, \\ L_{22} &= x_{vv} \cdot N. \end{cases}$$

**Definición 1.7.** Atendiendo a la primera forma fundamental (1.2) y segunda forma fundamental (1.6), que acabamos de presentar, definimos el operador forma u operador de Weingarten una aplicación que irá del plano tangente a la superficie en un punto  $p$  en si mismo, de tal manera que se verifica que:

$$S_p = g^{-1}L, \quad (1.4)$$

siendo  $g$  la matriz cuyos elementos son los coeficientes de la primera forma fundamental, y  $L$  la matriz cuyos elementos son los coeficientes de la segunda forma fundamental. Además los autovalores de esta matriz  $S_p$  que son  $k_1, k_2$ , los denominaremos curvaturas principales.

Para finalizar definiremos la curvatura de Gauss de una superficie haciendo uso de la primera y segunda forma fundamental, de tal manera que:

$$K = \frac{\det L}{\det g} = \det S_p = k_1 k_2. \quad (1.5)$$

A su vez, la curvatura media, la definiremos como  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ , y como veremos más en detalle, aquellas superficies que verifican que su curvatura media es nula en todo punto, se denominarán superficies minimales.

**Teorema 1.8.** *Dada una superficie parametrizada reguñar  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , obtenemos las siguientes expresiones para la curvatura de Gauss y para la curvatura media:*

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad (1.6)$$

$$H = \frac{L_{11}g_{22} - 2L_{12}g_{12} + g_{11}L_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}. \quad (1.7)$$

## 1.2. Variable compleja

**Definición 1.9.** *Definimos el espacio euclídeo complejo  $\mathbb{C}^n$  como el conjunto de todas las  $n$ -túplas tales que:*

$$\mathbb{C}^n = \{(p_1, \dots, p_n) | p_j \text{ es un número complejo con } j = 1, \dots, n\}$$

donde además a los elementos  $(p_1, \dots, p_n)$  los llamaremos vectores complejos.

Está claro que  $\mathbb{C}^n$  tendrá estructura de espacio vectorial, por lo tanto podremos definir algunas operaciones con sus elementos de tal manera que, dados  $p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n)$ :

$$p + q = (p_1 + q_1, \dots, p_n + q_n).$$

A su vez, dado un número complejo  $\alpha$ , podremos obtener el vector:

$$\alpha q = (\alpha q_1, \dots, \alpha q_n).$$

Está claro que también podremos obtener el producto escalar de dos vectores complejos de tal manera que:

$$q \cdot p = \sum_{i=1}^n q_i \cdot p_i.$$

Del mismo modo podremos obtener el vector conjugado de un vector complejo:

$$\bar{q} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n).$$

Además igual que en el caso anterior, podremos definir una serie de propiedades relativas a las operaciones con vectores complejos conjugados de tal manera que:

$$\begin{aligned} \overline{p + q} &= \bar{p} + \bar{q}, \\ \overline{\alpha q} &= \bar{\alpha} \bar{q}, \\ \overline{q \cdot p} &= \bar{q} \cdot \bar{p}, \\ q \cdot \bar{q} &\geq 0. \end{aligned}$$

Definimos a su vez la norma de un vector complejo, que denotamos tal que  $|||$ , de la siguiente manera:

$$||q|| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{|q_1|^2 + \cdots + |q_n|^2}.$$

Y por último definimos el producto vectorial de dos vectores en  $\mathbb{C}^3$ , de manera análoga al producto vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , y encontramos tres propiedades que nos serán de gran utilidad en más adelante:

$$||a \times b|| = ||a||^2 ||b||^2 - |a \cdot \bar{b}|^2, \quad (1.8)$$

$$||a \times \bar{a}|| = ||a||^2, \quad (1.9)$$

$$a \times \bar{a} = 2i(\Im(a_2 \bar{a}_3), \Im(a_3 \bar{a}_1), \Im(a_1 \bar{a}_2)). \quad (1.10)$$

Encontramos una gran cantidad de similitudes entre las superficies minimales y las funciones analíticas, repasaremos algunas propiedades básicas de las funciones analíticas en variable compleja, que nos pueden ser útiles a la hora de estudiar las superficies minimales.

Dado un subconjunto abierto  $\mathcal{U}$  del conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$ , una función  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ , decimos que es analítica si esta tiene una derivada en cada punto  $q \in \mathcal{U}$ . Es decir, se tiene que verificar que el siguiente límite existe siempre.

$$\lim_{p \rightarrow q} \frac{f(p) - f(q)}{p - q}.$$

También podemos relacionar la parte real y la parte imaginaria de una función analítica compleja, denotamos  $g = \Re f$  y  $h = \Im f$ , para establecer esta relación utilizamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$g_u = h_v, \quad g_v = -h_u \quad (1.11)$$

Si continuamos derivando las ecuaciones anteriores, se verifica lo siguiente,  $g_{uu} + g_{vv} = h_{uu} + h_{vv} = 0$ , luego diremos que las funciones  $g, h$  son armónicas. Si las funciones son armónicas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann diremos que son armónicas conjugadas. Además tendremos que, la partes real e imaginaria de una función analítica son armónicas.

# Capítulo 2

## Introducción a las superficies minimales

### 2.1. Definición y Variación Normal

**Definición 2.1.** *Una superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  es una superficie regular cuya curvatura media se anula en todos los puntos de la misma.*

**Definición 2.2.** *Una superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  es la superficie de menor área, entre un conjunto de superficies cuyas fronteras coinciden.*

Lo que vamos a mostrar en esta sección es que estas definiciones coinciden, para ello vamos a definir la variación normal de una superficie  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  como una familia de superficies, que nos proporcionará información sobre los cambios de esta superficie  $\mathcal{M}$ , cuando esta se deforma en una dirección perpendicular a la superficie.

Denotamos  $A(t)$  como el área de esta familia de superficies, y veremos que la curvatura media de la superficie  $\mathcal{M}$  se anula en todos sus puntos si y solo si  $A'(t) = 0$ , en todos los puntos de la superficie  $\mathcal{M}$ .

Para comenzar, primero es necesario introducir una serie de definiciones que nos servirán para aclarar algunos conceptos que aparecerán a lo largo del capítulo.

**Definición 2.3.** *Dada  $\mathcal{M}$  una superficie regular, definimos un dominio en  $\mathcal{M}$  como un conjunto abierto y a su vez conexo que llamaremos  $\mathcal{U}$ , contenido en la superficie  $\mathcal{M}$ , de tal manera que al aplicar un homeomorfismo diferenciable  $\Phi$  a una circunferencia, su imagen será la frontera de  $\mathcal{U}$ , además, su aplicación tangente  $\Phi_*$  nunca se anula, salvo en un número finito de puntos.*

**Definición 2.4.** *A la unión de un dominio en  $\mathcal{M}$  con su frontera, la denominaremos región en  $\mathcal{M}$ .*

**Definición 2.5.** Dada  $\mathcal{Q}$  una región en  $\mathcal{M}$ , se dice que  $\mathcal{Q}$  es una región acotada si se verifica la siguiente condición:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \|p\| \leq M \quad \forall p \in \mathcal{Q}.$$

**Definición 2.6.** Dada  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^n$  una superficie regular, y  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}$  una región acotada contenida a su vez, en la traza de una carta local  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ . El área de la región  $\mathcal{Q}$  vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\text{Area}(\mathcal{Q}) = \int \int_{\mathbf{x}^{-1}(\mathcal{Q})} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv, \quad (2.1)$$

además esta no depende de la carta local seleccionada.

**Corolario 2.7.** Si la superficie regular  $\mathcal{M}$  está contenida en  $\mathbb{R}^3$  y tenemos igual que antes, una región acotada  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}$  que a su vez, se encuentra contenida en la traza de una carta local, esta vez regular,  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ , el área de  $\mathcal{Q}$  vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\text{Area}(\mathcal{Q}) = \int \int_{\mathbf{x}^{-1}(\mathcal{Q})} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv. \quad (2.2)$$

**Definición 2.8.** Dada  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie parametrizada regular y una región acotada  $\mathcal{Q}$  contenida en  $\mathcal{U}$ . Tomamos a su vez  $h : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y  $\delta > 0$ . Denotamos  $\mathbf{N}$  como el vector normal unitario, por lo tanto satisface que  $\mathbf{N}(u, v)$  es perpendicular a  $\mathbf{x}$  para cualquier par  $(u, v) \in \mathcal{U}$ . Ahora definimos la variación normal de  $\mathbf{x}$  y  $\mathcal{Q}$ , la cual queda determinada por la aplicación  $h$ , como:

$$\mathbf{x} : (-\delta, \delta) \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

la cual viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{x}[t](u, v) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)\mathbf{N}(u, v), \quad (2.3)$$

es claro que  $t \in (-\delta, \delta)$  y  $(u, v) \in \mathcal{Q}$ . Tenemos a su vez que las formas fundamentales también van a depender del parámetro  $t$ :

$$\begin{cases} g_{11}(t) &= \mathbf{x}[t]_u \cdot \mathbf{x}[t]_u, \\ g_{12}(t) &= \mathbf{x}[t]_u \cdot \mathbf{x}[t]_v, \\ g_{22}(t) &= \mathbf{x}[t]_v \cdot \mathbf{x}[t]_v. \end{cases}$$

Por lo tanto, es evidente que:

$$g_{11} = g_{11}(0), \quad g_{12} = g_{12}(0), \quad g_{22} = g_{22}(0),$$

y por último, el área de  $x[t]$  vendrá dado por

$$A(t) = \text{Area}(x[t](\mathcal{Q})) = \int \int_{\mathcal{Q}} \sqrt{g_{11}(t)g_{22}(t) - g_{12}(t)^2} dudv. \quad (2.4)$$

**Lema 2.9.** *Teniendo en cuenta, la expresión (2.4), se tiene que:*

$$A'(0) = -2 \int \int_{\mathcal{Q}} hH \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv, \quad (2.5)$$

donde  $H$  es la curvatura media de nuestra superficie  $\mathcal{M}$ .

*Demostración.* Tomamos la ecuación de  $x[t]$  (2.3) y la derivamos respecto de  $u$ , y de manera análoga respecto de  $v$ ,

$$\begin{cases} x[t]_u &= x_u + th_u N + thN_u, \\ x[t]_v &= x_v + th_v N + thN_v. \end{cases} \quad (2.6)$$

A continuación, utilizando los coeficiente de la primera forma fundamental (1.2), obtenemos que:

$$\begin{aligned} g_{11}(t) &= x[t]_u \cdot x[t]_u \\ &= (x_u + th_u N + thN_u) \cdot (x_u + th_u N + thN_u) \\ &= g_{11} + 2x_u thN_u + O(t^2). \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que  $-N_u x_u = Nx_{uu} = L_{11}$ , ver (1.6), luego:

$$g_{11}(t) = g_{11} - 2L_{11}th + O(t^2), \quad (2.7)$$

y de manera análoga calculamos  $g_{12}(t)$  y  $g_{22}(t)$ :

$$\begin{aligned} g_{12}(t) &= g_{12} - 2L_{12}th + O(t^2), \\ g_{22}(t) &= g_{22} - 2L_{22}th + O(t^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ahora utilizando la definición de  $A(t)$  y conociendo la expresión de la curvatura media  $H$ , (ver (1.7)), obtendremos que:

$$\begin{aligned} g_{11}(t)g_{22}(t) - g_{12}(t)^2 &= (g_{11} - 2thL_{11} + O(t^2))(g_{22} - 2thL_{22} + O(t^2)) \\ &\quad - (g_{12} - 2thL_{12} + O(t^2))^2 \\ &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 - 2th(g_{11}L_{22} + L_{11}g_{22} - 2L_{12}g_{12}) + O(t^2) \\ &= (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(1 - 4thH) + O(t^2), \end{aligned}$$

ahora sustituyendo en obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{g_{11}(t)g_{22}(t) - g_{12}(t)^2} &= \sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(1 - 4thH) + O(t^2)} \\
&= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \sqrt{(1 - 4thH) + O(t^2)} \\
&= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}(1 - 2thH) + O(t^2).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Y ahora reemplazando lo que tenemos en las ecuaciones (2.4) y (2.9) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
A(t) &= \text{Area}(x[t](\mathcal{Q})) = \int \int_{\mathcal{Q}} \left( \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \right) (1 - 2thH) + O(t^2) dudv \\
&= \int \int_{\mathcal{Q}} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv - 2t \int \int_{\mathcal{Q}} hH \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv + O(t^2),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

y, para finalizar, derivamos esta última ecuación (2.10) respecto de  $t$ , sustituimos por el valor 0 en  $t$ , y se obtiene lo que queríamos:

$$A'(0) = -2 \int \int_{\mathcal{Q}} hH \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv.$$

□

**Teorema 2.10.** *Dada una superficie parametrizada regular,  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tomamos a su vez una región acotada  $\mathcal{Q}$  contenida en  $\mathcal{U}$ , entonces la superficie  $x$  es minimal sobre la región  $\mathcal{Q}$  si y solo se verifica que  $A'(0) = 0$  utilizando una variación normal de  $x$  y  $\mathcal{Q}$  con respecto a cualquier homeomorfismo  $h : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Comenzamos realizando la implicación de izquierda a derecha. Suponemos que  $x$  es una superficie minimal, por definición, esta superficie verifica que  $H = 0$  en todos sus puntos, por lo tanto, sustituyendo en (2.5) es inmediato que  $A'(0) = 0$ .

La segunda implicación no es tan inmediata, la probaremos por reducción al absurdo, comenzamos suponiendo que se cumple  $A'(0) = 0$  para cualquier homeomorfismo  $h$ , pero que a su vez  $H(p) \neq 0$  para algún  $p \in \mathcal{Q}$  seleccionado de manera arbitraria.

Tomamos por lo tanto  $h$  de tal manera que se satisfaga que  $h(p) = H(p)$ , y además  $h$  será cero en el exterior de un entorno suficientemente pequeño de nuestro punto  $p$ . Como hemos tomado  $h$  de tal manera que  $H(p) = h(p)$ , esto implica que  $A'(0) < 0$ , y nuestra hipótesis de partida era que  $A'(0) = 0$ , por lo tanto es claro que  $H(p) = 0$ . □

## 2.2. Ejemplos de superficies minimales

Como bien hemos mencionado en la introducción histórica, el catenoide y el helicoide son los primeros ejemplos conocidos de superficies minimales, es por eso que se conocen más resultados

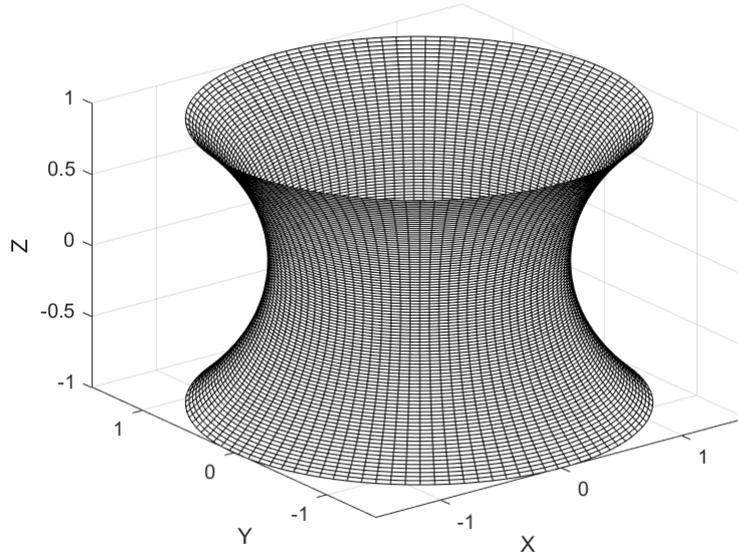


Figura 2.1: Catenoide

relacionados con las superficies minimales, y estas superficies, algunos de ellos desarrollados por do Carmo [2] los veremos en esta sección.

### 2.2.1. Catenoide

Comenzamos viendo uno de los ejemplos más importantes, el catenoide dado por:

$$x(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), av), \quad (2.11)$$

con  $0 < u < 2\pi$ ,  $-\infty < v < \infty$ .

El catenoide es una superficie de revolución en  $\mathbb{R}^3$  que se obtiene al rotar la curva:

$$y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right), \quad (2.12)$$

sobre el eje  $z$ , su representación gráfica podemos verla en la Figura (2.1).

**Proposición 2.11.** *El catenoide se caracteriza por ser la única superficie de revolución que es también minimal.*

*Demostración.* Podemos ver esta demostración más completa, apoyandonos en distintos dibujos tal y como podemos ver en [2]. Buscamos una curva  $y = f(z)$  de tal forma que, cuando la rotamos sobre el eje  $z$ , es una superficie minimal. Sabemos que tanto los paralelos como los meridianos de una superficie de revolución son líneas de curvatura de la superficie, tenemos

que la curvatura de  $y = f(z)$  es la contraria (signo opuesto) de la curvatura normal del círculo generado por el punto  $f(z)$ . Por lo tanto, la curvatura de  $y = f(z)$  será,

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}},$$

y la curvatura normal del círculo, es la proyección de su curvatura normal ( $= 1/y$ ) sobre la dirección normal  $N$  a la superficie, luego tendremos que,

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = -\frac{1}{y} \cos \alpha,$$

pero  $-\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ , y sabiendo que  $\beta = y'$ , obtenemos,

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{y} \frac{1}{(1 + (y')^2)^{1/2}},$$

de tal manera que esta es la ecuación que tiene que satisfacer la curva  $y = f(z)$ .

Claramente, existe un punto  $p$  en el cual  $f'(p) \neq 0$ . Trabajamos con un entorno de este punto  $p$ , donde  $f' \neq 0$ . A continuación, multiplicamos ambos miembros de la ecuación anterior por  $2y'$ , obtenemos lo siguiente,

$$\frac{2y''y'}{1 + (y')^2} = \frac{2y'}{y},$$

cambiando de variable, tal que  $1 + (y')^2 = v$ , luego es evidente que  $2y''y' = v'$ , y de aquí obtenemos,

$$\frac{v'}{v} = \frac{2y'}{y},$$

y ahora integrando, obtenemos que,

$$\log v = \log y^2 + \log k^2 = \log(yk)^2,$$

siendo  $k$  una constante de integración. Ahora, esta expresión puede ser escrita de la siguiente manera,

$$\frac{kdy}{\sqrt{(yk)^2 - 1}} = kdx,$$

e integrando de nuevo, obtenemos que,

$$\cosh^{-1}(yk) = kx + c,$$

siendo  $c$  una constante de integración, luego,

$$y = \frac{1}{k} \cosh(kx + c),$$

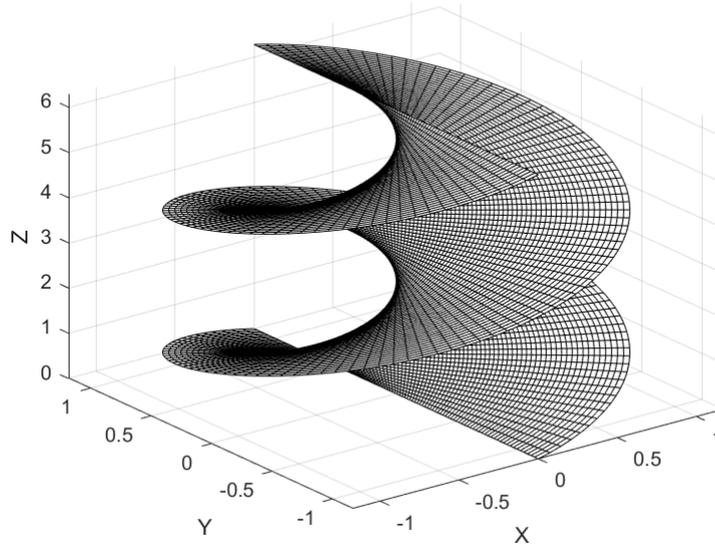


Figura 2.2: Helicoide

por lo tanto, en un entorno de un punto donde  $f' \neq 0$ , la curva  $y = f(z)$  es una catenaria. Pero entonces  $y'$  solo puede ser cero en el punto  $z = 0$ , por lo tanto la superficie será un catenoide.  $\square$

### 2.2.2. Helicoide

Continuamos ahora con el helicoide, el cual viene dado por:

$$x(u, v) = (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), au), \quad (2.13)$$

cuya representación es la que aparece en la figura (2.2).

Hemos comprobado que se cumple que  $g_{11} = g_{22} = a^2 \cosh(v)^2$  y que  $g_{12} = g_{21} = 0$ . También se verifica que  $x_{uu} + x_{vv} = 0$  en todo punto, por lo tanto el helicoide es una superficie minimal.

**Proposición 2.12.** *El helicoide se caracteriza por ser la única superficie minimal que es a su vez una superficie reglada.*

*Demostración.* Para comenzar, damos por hecho que los ceros, de la curvatura de Gauss de una superficie minimal son aislados (resultado obtenido a partir de los estudios de Osserman [4]).

Empezamos suponiendo que la superficie no es un plano, luego en algún entorno  $V$  de la superficie, la curvatura de Gauss  $K$  será estrictamente negativa.

Partiendo de la hipótesis de que nuestra superficie es minimal, la curvatura media es cero,

luego  $V$  está recubierta por dos familias de curvas asintóticas las cuales son ortogonales entre sí.

Por ser una superficie minimal, por cada punto pasan dos curvas asinóticas, una es la recta que define la superficie reglada y la otra no es una recta, suponiendo el caso en el que la superficie no es un plano, podemos tomar un punto  $p \in V$  de tal manera que, la curva asintótica, la que no es recta, tiene torsión no nula en ese punto  $p$ .

Como el plano osculador, (generado por el vector tangente y el vector normal) de una curva asintótica es el plano tangente a la superficie, existe un entorno  $U$  de tal manera que las rectas que definen la superficie reglada de  $U$  son las normales principales a la familia de curvas asintóticas (las que no son las rectas anteriormente mencionadas).

A continuación estudiamos que esto pasa si y solo si las curvas asintóticas son hélices circulares (ver ejercicio 18 página 26 [2]). Luego,  $U$  es parte de un helicoido, y como la torsión de una hélice circular es constante, toda la superficie será un helicoido, como queríamos probar.  $\square$

### 2.2.3. Deformación del Helicoide en el Catenoide

El helicoido (2.13) y el catenoide (2.11), serán el principio y el final, respectivamente, de una deformación mediante superficies minimales. A la deformación la llamaremos *helcat*, y la definimos de la manera siguiente, cumpliendo que  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ :

$$\begin{aligned} helcat[t](u, v) = & \cos(t)(\sinh(v) \sin(u), -\sinh(v) \cos(u), u) \\ & + \sin(t)(\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v). \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Teorema 2.13.** *La familia de superficies  $t \rightarrow helcat[t]$  que depende de un solo parámetro  $t$ , es una deformación del helicoido en el catenoide, de tal manera que se verifica que  $helcat[0]$  es una forma de parametrizar el helicoido, y  $helcat[\frac{\pi}{2}]$  es una reparametrización del catenoide. Para cada  $t$ , se cumple que  $helcat[t]$  es una superficie minimal que será a su vez isométrica al helicoido, luego el helicoido es localmente isométrico al catenoide.*

*Demostración.* Tomando los coeficientes de la primera forma fundamental de *helcat*,  $g_{11}(t), g_{12}(t), g_{22}(t)$ . comprobamos primero que se verifica que:

$$g_{11}(t)(u, v) = g_{22}(t)(u, v) = \cosh^2(v), \quad g_{12}(t)(u, v) = 0.$$

luego es claro que son funciones constantes respecto a la variable  $t$ .

Tomando ahora los coeficientes de la segunda forma fundamental de *helcat*,  $L_{11}(t)(u, v), L_{12}(t)(u, v),$

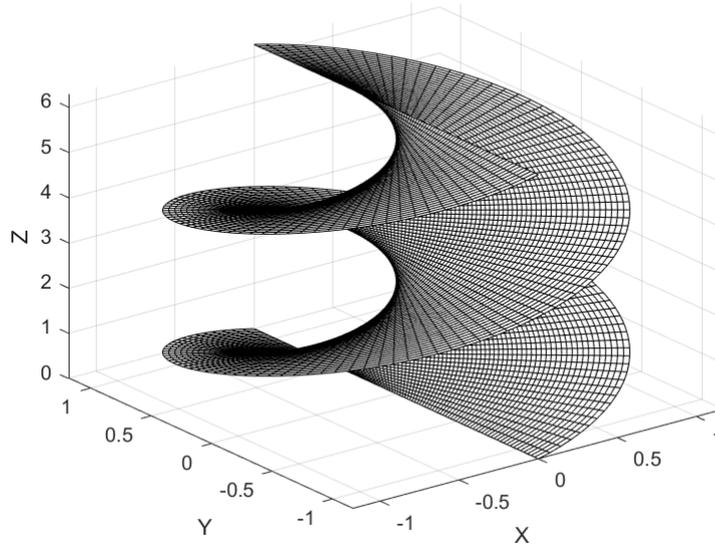


Figura 2.3:  $helcat[0]$

$L_{22}(t)(u, v)$ , comprobamos que:

$$L_{11}(t)(u, v) = -L_{22}(t)(u, v) = \text{sen}(t).$$

□

Vemos en las siguientes figuras las representaciones gráficas que nos muestran la deformación del helicoides (comenzando en  $helcat[0]$ ), en el catenoide (finalizando en  $helcat[\pi/2]$ ).

#### 2.2.4. Superficie Minimal de Enneper

Una de las superficies minimales más simples es la superficie minimal de Enneper, que tiene la siguiente parametrización:

$$SupEnneper(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2\right).$$

Vemos en la figura (2.9) su representación gráfica.

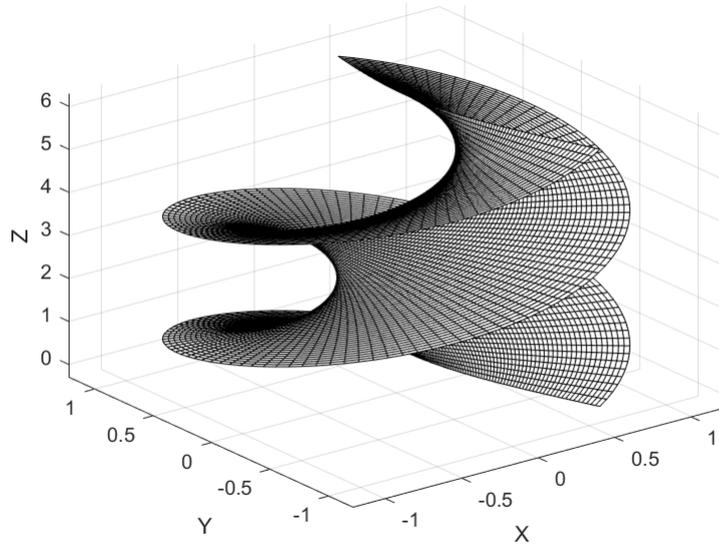


Figura 2.4:  $\text{helcat}[\pi/10]$

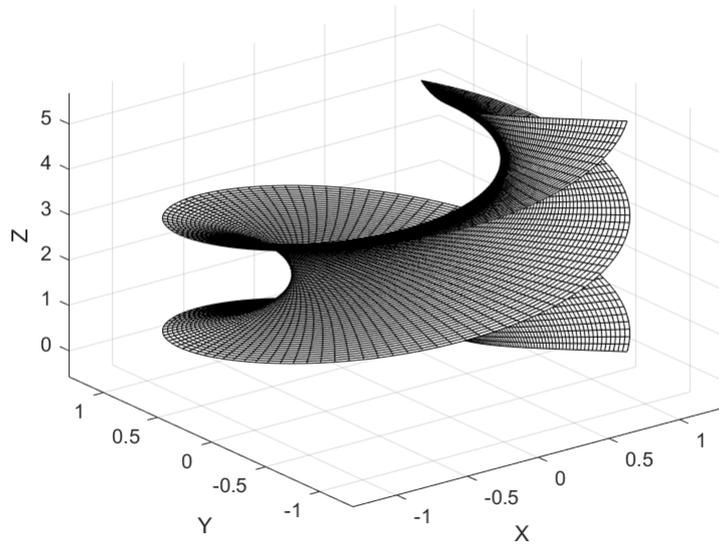


Figura 2.5:  $\text{helcat}[\pi/5]$

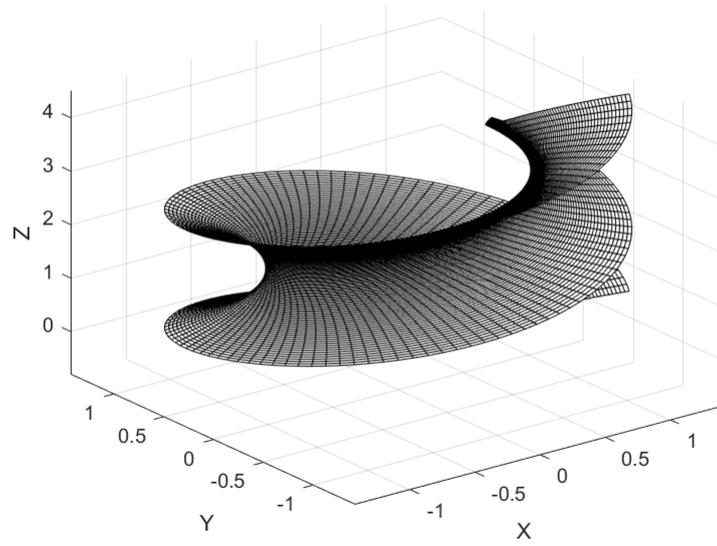


Figura 2.6:  $\text{helcat}[3\pi/10]$

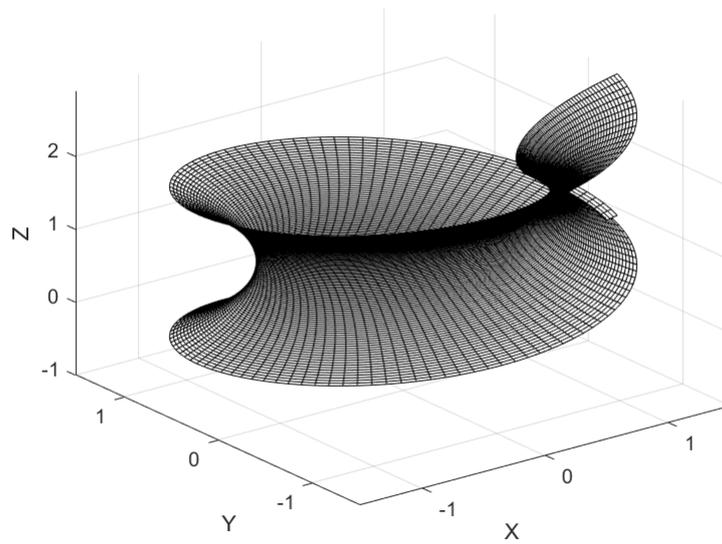


Figura 2.7:  $\text{helcat}[2\pi/5]$

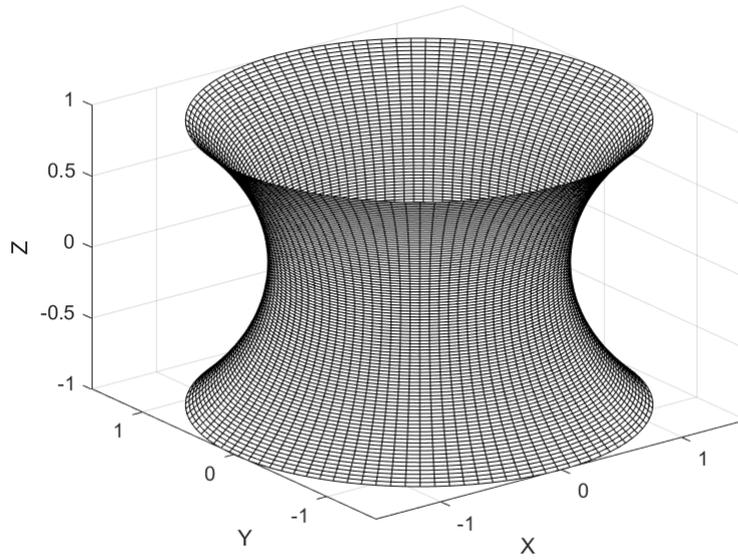


Figura 2.8:  $\text{helcat}[\pi/2]$

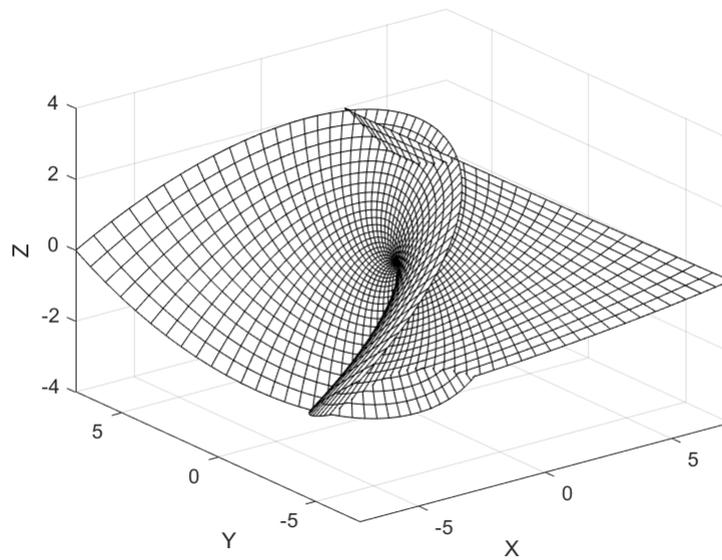


Figura 2.9: Superfície Minimal de Enneper

## 2.2.5. Parametrizaciones locales de Monge minimales y superficie minimal de Scherk

**Lema 2.14.** *Dada una parametrización local del Monge  $(u, v) \rightarrow (u, v, h(u, v))$  es una superficie minimal si y solo si verifica la siguiente condición:*

$$(1 + h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1 + h_u^2)h_{vv} = 0. \quad (2.15)$$

**Teorema 2.15.** *En el caso particular  $h(u, v) = f(u) + g(v)$ , se cumple que si es una superficie minimal, o la superficie que llamamos  $\mathcal{M}$  es parte de un plano o existe una constante  $a \neq 0$  que cumple que:*

$$f(u) = -\frac{1}{a} \log \cos(au), \quad y \quad g(v) = \frac{1}{a} \log \cos(av), \quad (2.16)$$

o lo podemos escribir de la siguiente forma,

$$h(u, v) = \frac{1}{a} \log \left( \frac{\cos(av)}{\cos(au)} \right). \quad (2.17)$$

*Demostración.* Partimos de que  $h(u, v) = f(u) + g(v)$ , luego se cumple que:

$$h_{uu} = f''(u), \quad h_{uv} = 0, \quad h_{vv} = g''(v).$$

Por lo tanto comparando esto con la ecuación 2.15 obtenemos que,

$$\frac{f''(u)}{1 + f'(u)^2} = \frac{-g''(v)}{1 + g'(v)^2}. \quad (2.18)$$

Es claro que  $u$  y  $v$  son variables independientes, luego obtenemos que a cada lado de (2.18), tendremos una constante que denotamos como  $a$ . Estudiamos primero el caso  $a = 0$ , y obtenemos que las dos funciones, tanto  $f$  como  $g$  son lineales, luego nuestra superficie sería parte de un plano. En el caso  $a \neq 0$ , utilizando algunas técnicas de resolución de EDOs, obtenemos la ecuación (2.16).  $\square$

Definimos la superficie resultante de este teorema como la superficie minimal de Scherk, dada por,

$$scherk[a](u, v) = \left( u, v, \frac{1}{a} \log \left( \frac{\cos(av)}{\cos(au)} \right) \right). \quad (2.19)$$

Podemos ver su representación gráfica en la figura para el caso  $scherk[1]$ , (2.10), no obstante esta se puede extender a todo el plano.

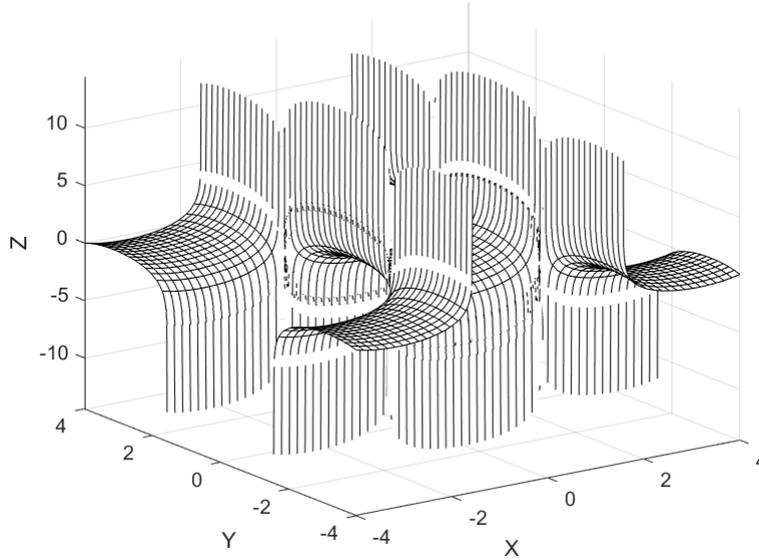


Figura 2.10: Superficie Minimal de Scherk

### 2.2.6. Superficie minimal de Henneberg

Vemos a continuación la parametrización de la superficie minimal de Henneberg,

$$\begin{aligned} \text{henneberg}(u, v) = \left( 2 \sinh u \cos v - \frac{2}{3} \sinh 3u \cos 3v, \right. \\ \left. 2 \sinh u \sin v + \frac{2}{3} \sinh 3u \sin 3v, 2 \cosh 2u \cos 2v \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

Vemos en la figura (2.11) la representación gráfica de la superficie minimal de Henneberg.

## 2.3. Aplicación de Gauss de una superficie minimal

Comenzamos introduciendo una serie de conceptos no vistos anteriormente, que nos serán útiles en esta sección.

**Definición 2.16.** La estructura compleja  $\mathcal{J} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una aplicación que viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{J}(t_1, t_2) = (-t_2, t_1),$$

es decir, esta aplicación es una transformación, en forma de giro de  $90^\circ$  en sentido antihorario, luego verificará que  $\mathcal{J}^2 = -I$ .

**Definición 2.17.** Dadas dos superficies regulares  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  y orientadas en  $\mathbb{R}^n$ , y sean  $\mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{J}_2$  sus respectivas estructuras complejas. Dada una aplicación  $\Phi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ , decimos que es

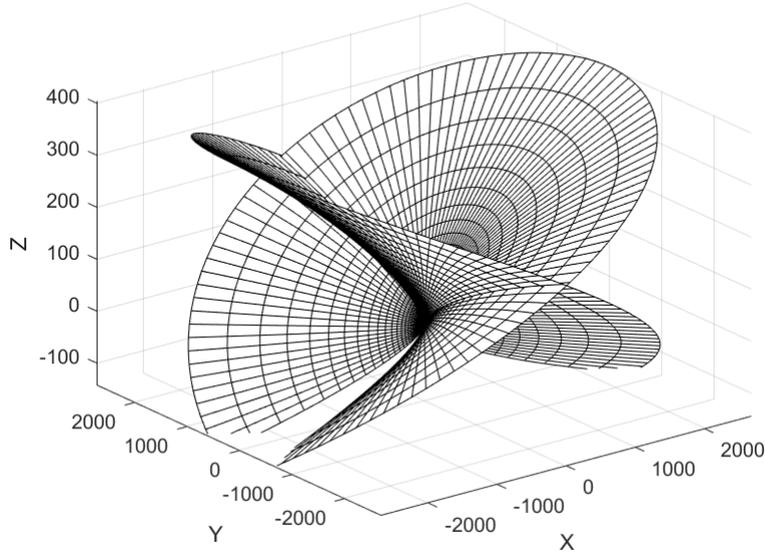


Figura 2.11: Superficie minimal de Henneberg

una aplicación compleja si se verifica que:

$$\Phi_* \circ \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 \circ \Phi_*, \quad (2.21)$$

y de manera análoga, la aplicación  $\Phi$  definida anteriormente, se dice anticompleja si cumple que,

$$\Phi_* \circ \mathcal{J}_1 = -\mathcal{J}_2 \circ \Phi_*. \quad (2.22)$$

**Lema 2.18.** Dada  $\Phi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  una aplicación compleja o anticompleja, se cumple que  $\Phi$  es una aplicación conforme, es decir, preserva los ángulos.

*Demostración.* Comenzamos tomando un punto  $p$  de la superficie  $\mathcal{M}_1$ , un vector tangente  $v_p$  a  $\mathcal{M}_1$  en el punto  $p$  y  $J_p$  la estructura compleja. Existirá  $\lambda(p) \in \mathbb{R}$  que verifica lo siguiente,

$$\|\Phi_*(v_p)\| = \lambda(p)\|v_p\|. \quad (2.23)$$

Partiendo de la hipótesis inicial, que indica que  $\Phi$  es una aplicación compleja o bien anticompleja, (2.23) tiene como consecuencia que,

$$\|\Phi_*(J_p v_p)\| = \lambda(p)\|v_p\|, \quad \Phi_*(v_p) \cdot \Phi_*(J_p v_p) = 0. \quad (2.24)$$

Un elemento genérico de  $\mathcal{M}_{1p}$  es de la forma  $av_p + bJ_p v_p$ . Por lo tanto lo que queremos probar es que nuestro  $\lambda(p)$  inicial, que corresponde a  $v_p$ , es válido para cualquier vector  $v_p$  del espacio

tangente. Por lo tanto de las ecuaciones previas (2.23) y (2.24) se sigue que,

$$\|\Phi_*(av_p + bJ_p v_p)\|^2 = \lambda(p)^2 \|av_p + bJ_p v_p\|^2,$$

para todo  $a, b$  en  $\mathbb{R}$ . Por consiguiente,  $\Phi$  es una aplicación conforme tal y como queríamos probar.  $\square$

**Teorema 2.19.** *Dada una superficie minimal  $\mathcal{M}$  contenida en  $\mathbb{R}^3$  que es orientada, su aplicación de Gauss será anticompleja.*

*Demostración.* Tomamos  $p \rightarrow N(p)$  la aplicación de Gauss de nuestra superficie  $\mathcal{M}$ . Dado un punto  $p$  de esta superficie  $\mathcal{M}$ , y  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormal de  $\mathcal{M}_p$ , y esta diagonaliza el operado  $S_p$  de  $\mathcal{M}$  en el punto  $p$ . Dadas las curvaturas principales  $k_1$  y  $k_2$  asociadas a la superficie. Denotaremos como  $J_p$  la estructura compleja que queda determinada por el vector normal unitario  $N$ , entonces por las propiedades de una estructura compleja, se verifica que:

$$J_p e_1 = \pm e_2, \quad J_p e_2 = \mp e_1.$$

Sabiendo que  $\mathcal{M}$  es una superficie minimal, es evidente que  $k_1 = -k_2$ , luego:

$$J_p S_p e_1 = J_p k_1 e_1 = \pm k_1 e_2 = \mp k_2 e_2 = \mp S_p e_2 = -S_p J_p e_1,$$

$$J_p S_p e_2 = J_p k_2 e_2 = \pm k_2 e_1 = \mp k_1 e_1 = \mp S_p e_1 = -S_p J_p e_2.$$

Sabemos que  $S_p$  es la aplicación opuesta de la aplicación tangente de  $N$  ( $N_*$ ) en el punto  $p$  (ver [1], Lema 14.4), por lo tanto la aplicación  $N$  es anticompleja tal y como queríamos demostrar.  $\square$

De Lema 2.18 y Teorema 2.19 se sigue el siguiente corolario:

**Corolario 2.20.** *Dada una superficie minimal, su aplicación de Gauss es conforme.*

# Capítulo 3

## Superficies minimales y análisis complejo

Como bien hemos comentado en la introducción histórica, encontramos distintas relaciones de las superficies minimales con otros campos de las matemáticas, es a partir del siglo XIX, cuando comenzamos a ver similitudes entre el reciente análisis complejo, y las superficies que estamos estudiando, como veremos a lo largo de este capítulo.

### 3.1. Coordenadas isotermas

**Definición 3.1.** Dado un subconjunto abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  decimos que esta parametrización local es isoterma si existe  $\lambda : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función diferenciable de tal manera que se verifique lo siguiente:

$$\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \lambda^2, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \quad (3.1)$$

siendo  $\lambda$  la función de escala de la parametrización local isoterma.

**Teorema 3.2.** Dada una superficie  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}^n$ , vamos a suponer que  $ds^2$  es una métrica en nuestra superficie. Entonces, dado un punto  $p$  de la superficie  $\mathcal{M}$ , existen un subconjunto abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$  y a su vez, una parametrización local isoterma  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$  de tal manera que se verifica que:

$$p \in \mathbf{x}(\mathcal{U}), \quad \text{y} \quad ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2), \quad (3.2)$$

siendo  $\lambda$  la función de escala nuestra parametrización local isoterma.

*Demostración.* Este teorema precisa de una demostración muy engorrosa, la cual podemos ver en el libro de Osserman [4] (página 31).

□

Vamos a introducir un nuevo concepto de notación:  $\Delta$  será el laplaciano de  $\mathbb{R}^2$  que definimos

de la siguiente forma:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}.$$

**Teorema 3.3.** *Dada una parametrización local isoterma  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , su curvatura de Gauss puede darse en función de  $\lambda$ , siendo esta la función de escala, de la siguiente manera:*

$$K = \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}. \quad (3.3)$$

*Demostración.* La demostración directa haciendo uso de esta fórmula para el cálculo de la curvatura de Gauss de una superficie, la cual podemos encontrar en [1] (página 435), encontrándonos con un caso particular de esta expresión:

$$K = \frac{-1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial v} \right) \right\},$$

usando ahora que es isoterma, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{\lambda^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) \right\} \\ &= \frac{-1}{\lambda^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \lambda + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log \lambda \right\} \\ &= \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2} \end{aligned}$$

□

## 3.2. Análisis complejo

**Definición 3.4.** Dado un subconjunto abierto  $\mathcal{U}$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización local, diremos que  $x$  es armónica si se verifica que  $x_{uu} + x_{vv} = 0$

**Definición 3.5.** Dado un subconjunto abierto  $\mathcal{U}$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos parametrizaciones locales, diremos que  $x, y$  verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann si cumplen que:

$$x_u = y_v, \quad y \quad x_v = -y_u.$$

**Lema 3.6.** Partiendo de las hipótesis de la definición anterior, si  $x$  e  $y$  cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann diremos que son armónicas, concretamente diremos que son armónicas conjugadas.

**Lema 3.7.** Dada una parametrización local isoterma y regular  $x$ , denotamos  $\lambda$  su función de escala y su curvatura media  $H$ , entonces se verifica lo siguiente,

$$x_{uu} + x_{vv} = 2\lambda^2 HN, \tag{3.4}$$

siendo  $N$  la normal unitaria que viene dada por la siguiente ecuación,

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}. \tag{3.5}$$

*Demostración.* Partiendo de la hipótesis inicial de que  $x$  es isoterma, derivamos las ecuaciones (3.2), de tal manera que,

$$x_{uu} \cdot x_u = x_{uv} \cdot x_v, \quad y \quad x_{vv} \cdot x_u = -x_{vu} \cdot x_v,$$

luego manipulando las ecuaciones anteriores, obtenemos que,

$$(x_{uu} + x_{vv}) \cdot x_u = x_{uv} \cdot x_v - x_{vu} \cdot x_v = 0,$$

es claro que, de manera análoga obtenemos que  $(x_{uu} + x_{vv}) \cdot x_v = 0$ . Por lo tanto, resulta evidente que  $x_{uu} + x_{vv}$  es normal a la superficie  $\mathcal{M}$ . Ahora, haciendo uso de la ecuación (1.7) obtenemos lo siguiente,

$$H = \frac{L_{11} + L_{22}}{2\lambda^2} = \frac{(x_{uu} + x_{vv}) \cdot N}{2\lambda^2},$$

y ahora es evidente que obtenemos, como queríamos demostrar, la expresión (3.4).  $\square$

**Corolario 3.8.** Dada una parametrización  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  local, isoterma y regular, será una superficie minimal si y solo si verifica que es armónica.

Este corolario establece la relación que buscamos entre las funciones armónicas y las superficies minimales. Resultará de gran utilidad transformar las coordenadas  $u, v$ , a coordenadas

en el sentido complejo, las cuales denotaremos como  $z, \bar{z}$ . Veamos la relación que existe entre estas:

$$\begin{cases} z = u + iv, \\ \bar{z} = u - iv. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} u = \frac{z + \bar{z}}{2}, \\ v = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Utilizar estas coordenadas es un poco complicado, ya que un error bastante frecuente, es creer que  $\bar{z}$  está determinado por  $z$ , y esto no es así, salvo cuando partimos de  $u$  y  $v$  ya que  $z$  y  $\bar{z}$  pueden ser definidas anteriormente 3.6, luego las coordenadas  $z$  y  $\bar{z}$  podrán verse como coordenadas abstractas en el conjunto de los números complejo, y a partir de estas, definir  $u$  y  $v$  con las ecuaciones 3.7.

Resulta útil introducir los siguientes operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right). \quad (3.8)$$

De las ecuaciones (3.6) se sigue lo siguiente:

$$dz = du + idv, \quad d\bar{z} = du - idv. \quad (3.9)$$

Y ahora de (3.8) y (3.9), es elemental probar que  $dz, d\bar{z}$  y  $\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z}$  son duales en el sentido:

$$dz \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) = 1, \quad dz \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 0, \quad d\bar{z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) = 0, \quad d\bar{z} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = 1. \quad (3.10)$$

Es importante destacar las fórmulas:

$$|dz|^2 = dzd\bar{z} = du^2 + dv^2,$$

y

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

### 3.3. Derivadas complejas y curvas minimales

**Definición 3.9.** Dada una parametrización local  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definimos su derivada compleja de la siguiente forma:

$$\frac{\partial x}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}(x_u - ix_v)(u, v), \quad \text{donde } z = u + iv.$$

Lo podemos escribir también de la siguiente forma:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = (\Phi_1[x], \dots, \Phi_n[x]) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} - i \frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u} - i \frac{\partial x_n}{\partial v} \right).$$

**Lema 3.10.** Dada una parametrización local  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , su derivada compleja cumple las siguientes identidades:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k[x]^2 = \frac{1}{4}(x_u \cdot x_u - x_v \cdot x_v - 2ix_u \cdot x_v) = \frac{1}{4}(g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}), \quad (3.11)$$

y

$$\sum_{k=1}^n |\Phi_k[x]|^2 = \frac{1}{4}(x_u \cdot x_u + x_v \cdot x_v) = \frac{1}{4}(g_{11} + g_{22}). \quad (3.12)$$

*Demostración.* La demostración de este lema resulta bastante trivial y directa realizando los cálculos pertinentes, no obstante, vamos a realizarla.

Comenzamos con la identidad que nos indica la ecuaciones (3.11).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Phi_k[x]^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 - 2i \left( \frac{\partial x_k}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4}(x_u \cdot x_u - x_v \cdot x_v - 2ix_u \cdot x_v), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Phi_k[x]|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \left| \frac{\partial x_k}{\partial u} \right|^2 + \left| \frac{\partial x_k}{\partial v} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4}(x_u \cdot x_u + x_v \cdot x_v). \end{aligned}$$

□

Vemos a continuación un teorema muy importante, en el cual veremos y probaremos que una parametrización local minimal y también isoterma nos da lugar a una serie de funciones

analíticas, de tal manera que la suma de los cuadrados de estas es igual a cero.

**Teorema 3.11.** *Dada una parametrización local  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces se verifica lo siguiente:*

1.  *$x$  es una parametrización armónica si y solo si se verifica que  $\partial x / \partial z$ , su derivada compleja es analítica.*
2.  *$x$  es isoterma si y solo si se verifica que:*

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k[x]^2 = 0. \quad (3.13)$$

3. *si se verifica (2), entonces  $x$  es parametrización regular si y solo si*

$$\sum_{k=1}^n |\Phi_k[x]|^2 \neq 0. \quad (3.14)$$

Por otro lado, dado un conjunto simplemente conexo  $\mathcal{U}$ , y dadas unas funciones analíticas  $\Phi_1, \dots, \Phi_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$  que verifican que:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k^2 = 0, \quad y \quad \sum_{k=1}^n |\Phi_k|^2 \neq 0. \quad (3.15)$$

Entonces existirá una parametrización  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que sea local, minimal, isoterma y regular, de tal manera que la derivada compleja de  $x$  es  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ .

*Demostración.* Esta primera demostración (1) es trivial, ya que por las ecuaciones de Cauchy-Riemann para  $\partial x / \partial z$ , son  $x_{uu} + x_{vv} = 0$ , y además  $x_{uv} - x_{vu} = 0$ . Siguiendo con (2) es evidente que es una consecuencia directa de (3.11), puesto que igualando esta a 0, se obtiene que  $g_{12} = 0$  y que  $g_{11} = g_{22}$ , por lo tanto es isoterma, tal y como queríamos ver, y además (3) se obtiene de manera directa de (3.12).

Para hacer la demostración de la afirmación final, suponemos que se cumplen las ecuaciones que encontramos en (3.15) y denotamos:

$$x = \Re \left( \int (\Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z)) dz \right).$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (3.11), se verifica que es isoterma y (3.11) nos indica que nuestra parametrización  $x$  es regular. Tal y como lo hemos denotado,  $x$  es la parte real de una  $n$ -tupla de funciones que son analíticas, por lo tanto se verifica que  $x$  es armónica. Luego como  $x$  es local, isoterma, regular y además es armónica, luego teniendo en cuenta el corolario 3.8, es minimal.  $\square$

A continuacion, vamos a describir un método para obtener una familia uniparamétrica de superficies minimales, que sean isométricas, lo cual nos sirve para entender el ejemplo de la deformacion del helicoide en el catenoide visto en la sección anterior.

**Definición 3.12.** *Dadas dos parametrizaciones locales minimales e isotermas,  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se dice que estas son conjugadas si verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Definimos a continuacion la familia asociada a  $x$  e  $y$ , esta será la familia uniparamétrica  $t \rightarrow z[t]$  donde  $z[t] : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y viene dada por:*

$$z[t] = (\cos t)x + (\sen t)y = \Re(e^{-it}(x + iy)). \quad (3.16)$$

**Teorema 3.13.** *Dadas dos parametrizaciones locales minimales, isotermas y además, conjugadas  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces  $z[t]$  también será una parametrización local minimal e isoterma para cada  $t$ . Asimismo, se verifica que todas las superficies de la familia asociada tendrán la misma forma fundamental. Por lo tanto,  $t \rightarrow z[t]$  será una deformación isométrica.*

*Demostración.* Lo primero es ver que  $z[t]_{uu} + z[t]_{vv} = 0$  lo cual es trivial para cada  $t$ . Ahora, dadas  $g_{11}(t), g_{12}(t), g_{22}(t)$  los coeficientes de la primera forma fundamental en  $z[t]$ , podemos obtener que:

$$\begin{aligned} g_{11}(t) &= z[t]_u \cdot z[t]_u \\ &= ((\cos t)x_u + (\sen t)y_u) \cdot ((\cos t)x_u + (\sen t)y_u) \\ &= (\cos t)^2(x_u \cdot x_u) + (\sen t)^2(y_u \cdot y_u) + 2(\sen t \cos t)(x_u \cdot y_u), \end{aligned} \quad (3.17)$$

y como  $x$  e  $y$  son conjugadas, verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir,

$$y_u \cdot y_u = x_u \cdot x_u, \quad x_u \cdot y_u = -x_u \cdot x_v = 0.$$

Luego continuando con (3.17), se obtiene que

$$g_{11}(t) = x_u \cdot x_u.$$

De manera análoga obtendríamos que:

$$g_{12}(t) = 0 \quad g_{22}(t) = x_v \cdot x_v,$$

para cada  $t$ . Luego se verifica que  $z[t]$  es isoterma y además, resulta evidente que las funciones asociadas a los coeficientes de la primera forma fundamental  $g_{11}(t)$ ,  $g_{12}(t)$  y  $g_{22}(t)$  son funciones de  $t$  constantes, es decir, no dependen del parámetro  $t$ .  $\square$

**Definición 3.14.** *Dadas dos parametrizaciones locales minimales e isotermas  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , llamaremos complexificación de estas parametrizaciones a la aplicación  $x + iy : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$ .*

**Lema 3.15.** *Dadas dos superficies minimales  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que además son conjugadas, se verifica que su complexificación  $x + iy : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$  es una función analítica. Además se cumple que la derivada de  $x + iy$  es el doble de la derivada compleja de  $x$ .*

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $x + iy$  es una  $n$ -tupla de funciones de variable compleja siendo cada una de ellas analíticas, es claro que  $x + iy$  será también analítica, lo cual prueba la primera afirmación. Por otro lado, para probar la segunda afirmación obtendremos la derivada de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(x + iy) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) (x + iy) \\ &= \frac{1}{2} (x_u - ix_v + y_v + iy_u). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $x$  e  $y$  son conjugadas, luego verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la ecuación anterior se sigue tal que,

$$\frac{d}{dz}(x + iy) = x_u - ix_v = 2 \frac{\partial x}{\partial z}.$$

□

**Definición 3.16.** *Dado un subconjunto abierto  $\mathcal{U} \in \mathbb{C}$ , definimos una curva minimal como una función analítica  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$  que verifica lo siguiente,*

$$\Psi'(z) \cdot \Psi'(z) = 0,$$

para todo  $z$  en el conjunto  $\mathcal{U}$ . Si se verifica a su vez que,

$$\Psi'(z) \overline{\Psi'(z)} \neq 0,$$

para cada  $z$  en  $\mathcal{U}$ , entonces decimos que  $\Psi$  es una curva minimal regular.

**Lema 3.17.** *Entre las curvas minimales definidas anteriormente y las derivadas en el sentido complejo, de parametrizaciones locales minimales e isotermas, existirá una biyección.*

*Demostración.* Como ya hemos visto en el teorema 3.11, se verifica que una parametrización local minimal e isoterma da lugar a una curva minimal, siendo esta su complexificación. Del mismo modo, dada  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$  una curva minimal, vamos a definir una parametrización local  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$x(u, v) = \Re(\Psi(u + iv)). \quad (3.18)$$

Probar que  $x$  es una parametrización local minimal e isoterma es trivial, y además que  $\Psi$  sea regular implica de manera directa que  $x$  también lo sea, tal y como queríamos probar. □

De esta manera, podemos observar que una curva minimal puede considerarse una forma de generalizar una parametrización local minimal e isoterma. Cambiando la notación, vamos

a denotar la derivada compleja de  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  siendo esta una parametrización local, de la siguiente manera.

$$\Phi = x_z = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}(x_u - ix_v) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Por lo tanto,

$$\bar{\Phi} = x_{\bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(x_u + ix_v) = (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n).$$

**Lema 3.18.** *Dada una curva minimal  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$ , entonces se verifica lo siguiente:*

$$\begin{aligned} \Phi \times \bar{\Phi} &= x_z \times x_{\bar{z}} = \frac{i}{2}x_u \times x_v \\ &= 2i(\Im(\varphi_2\bar{\varphi}_3), \Im(\varphi_3\bar{\varphi}_1), \Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2)), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} N &= \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{x_z \times x_{\bar{z}}}{i\|x_z\|^2} = \frac{\Phi \times \bar{\Phi}}{i\|\Phi\|^2} \\ &= \frac{2i(\Im(\varphi_2\bar{\varphi}_3), \Im(\varphi_3\bar{\varphi}_1), \Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2))}{\|\Phi\|^2}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Haciendo uso de (1.9), podemos ver que:

$$\|\Phi\|^2 = \|\Phi \times \bar{\Phi}\| = \frac{1}{2}\|x_u \times x_v\|,$$

luego, resulta evidente que:

$$\frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{(2/i)\Phi \times \bar{\Phi}}{2\|\Phi\|^2} = \frac{\Phi \times \bar{\Phi}}{i\|\Phi\|^2}.$$

□

**Lema 3.19.** *Dadas dos parametrizaciones locales minimales, isotermas y además, conjugadas  $x, y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y siendo  $t \rightarrow z[t]$  la familia asociada a estas dos parametrizaciones, entonces para cada  $t$  se verifica lo siguiente:*

1. *La conjugada armónica de  $z[t]$  será  $z[t + \pi/2]$ ;*
2. *La complejificación de  $z[t]$  será  $e^{-it}(x + iy)$ ;*
3. *La normal unitaria  $N$  de cada  $z[t]$  no depende de  $t$ .*

*Demostración.* Comenzamos probando (1), para ello derivamos la expresión de  $z[t]$  con respecto a la variable  $u$  y utilizaremos para simplificar nuestra expresión las ecuaciones de Cauchy-Riemann ya que partimos de la hipótesis, de que nuestras parametrizaciones, son conjugadas.

$$\begin{aligned} z[t]_u &= \Re(e^{-it}(x_u + iy_u)) = \Re(e^{-it}(y_v - ix_v)) \\ &= \Re(e^{-i(t+\pi/2)}(x_v + iy_v)) = z[t + \pi/2]_v, \end{aligned}$$

y de manera análoga, obtenemos que  $z[t]_v = -z[t + \pi/2]_u$ . Para demostrar (2), operaremos las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} z[t] + iz[t + \pi/2] &= \Re(e^{-it}(x + iy)) + i\Re(e^{-i(t+\pi/2)}(x + iy)) \\ &= \Re(e^{-it}(x + iy)) + i\Re(-ie^{-it}(x + iy)) \\ &= \Re(e^{-it}(x + iy)) + i\Im(e^{-it}(x + iy)) \\ &= e^{-it}(x + iy). \end{aligned}$$

Ahora, la curva minimal determinada por  $x$  e  $y$ , la denotamos por  $\Psi$ , entonces por (2), la curva minimal determinada por  $z[t]$ , será  $e^{-it}\Psi$ , y su derivada compleja sería  $e^{-it}\Psi'$ .  $\square$

Una vez conocido este lema, podemos empezar a hablar de la curvatura de Gauss de una curva minimal. Primero, introduciremos algunos conceptos como el de proyección estereográfica, esta se utiliza para establecer relaciones entre el plano complejo y  $S^2(1)$ , la esfera unitaria (centro el origen y radio la unidad). Tomamos un punto  $p = (p_1, p_2, p_3)$  en la esfera, este tiene que ser distinto del polo norte, que denotaremos por  $pn = (0, 0, 1)$ . Sabemos que la recta que pasa por  $p$  y  $pn$ , la denotaremos por  $R$ , interseca al plano complejo en un punto que llamaremos  $q = (q_1, q_2)$ . Es ahora cuando parametrizamos la recta  $R$  de la siguiente forma,

$$t \rightarrow tq + (1 - t)pn = (tq_1, tq_2, 1 - t).$$

Por lo tanto, como la recta pasa por  $p$ , existirá un  $t_0$ , de tal manera que,

$$(p_1, p_2, p_3) = p = t_0q + (1 - t_0)pn = (t_0q_1, t_0q_2, 1 - t_0),$$

luego, resulta evidente que  $1 - t_0 = p_3$ , por consiguiente, obtendremos lo siguiente,

$$q_1 = \frac{p_1}{t_0} = \frac{p_1}{1 - p_3}, \quad y \quad q_2 = \frac{p_2}{t_0} = \frac{p_2}{1 - p_3}.$$

**Definición 3.20.** A la aplicación  $st : S^2(1) \rightarrow \mathbb{C}$  la denominamos *proyección estereográfica*, la cual viene dada por la siguiente expresión,

$$st(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}.$$

Veremos a continuación como es la composición de la aplicación de Gauss de una curva minimal, con la proyección estereográfica que acabamos de definir.

**Lema 3.21.** Dada una curva minimal  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^3$  y  $\Psi' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ . Sea a su vez  $N$  la normal unitaria de la parametrización local dada por la ecuación (3.18). Entonces se cumple que,

$$st \circ N = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}.$$

*Demostración.* Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{st} \circ N &= \frac{2(\Im(\varphi_2\bar{\varphi}_3) + i\Im(\varphi_3\bar{\varphi}_1))}{\|\Phi\|^2 - 2\Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2)} \\
&= \frac{\varphi_2\bar{\varphi}_3 - \bar{\varphi}_2\varphi_3 + i(\varphi_3\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_3\varphi_1)}{\|\Phi\|^2 - 2\Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2)} \\
&= \frac{\varphi_3(\bar{\varphi}_1 + i\bar{\varphi}_2) - \bar{\varphi}_3(\varphi_1 + \varphi_2)}{\|\Phi\|^2 - 2\Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2)},
\end{aligned}$$

sabiendo que

$$(\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2) = -\varphi_3^2,$$

podemos continuar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_3(\bar{\varphi}_1 + i\bar{\varphi}_2) - \bar{\varphi}_3(\varphi_1 + \varphi_2)}{\|\Phi\|^2 - 2\Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2)} &= \frac{\varphi_3(\bar{\varphi}_1 + i\bar{\varphi}_2) - \bar{\varphi}_3\left(\frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 + i\varphi_2}\right)}{\|\Phi\|^2 - 2\Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2)} \\
&= \frac{\varphi_3((\varphi_1 - i\varphi_2)(\bar{\varphi}_1 + i\bar{\varphi}_2) - |\varphi_3|^2)}{(\varphi_1 - \varphi_2)(\|\Phi\|^2 - 2\Im(\varphi_1\bar{\varphi}_2))} \\
&= \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}.
\end{aligned}$$

□

**Lema 3.22.** *Dada una curva minimal  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , su curvatura de Gauus viene dada por la siguiente expresión:*

$$K = \frac{-4(\|\Psi'\|^2\|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \bar{\Psi}'|^2)}{\|\Psi'\|^6}.$$

*Demostración.* Sabemos que  $\|\Psi'\|^2 = 2\lambda^2$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Delta \log \lambda &= \frac{1}{2}\Delta \log(\lambda^2) = 2\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z} \log(\|\Psi'\|^2) \\
&= 2\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z} (\log(\Psi' \cdot \bar{\Psi}')) \\
&= 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\Psi'' \cdot \bar{\Psi}'}{\|\Psi'\|^2} \right) \\
&= 2\left( \frac{\|\Psi'\|^2\|\Psi''\|^2 - (\Psi'' \cdot \bar{\Psi}')(\Psi' \cdot \bar{\Psi}'')}{\|\Psi'\|^4} \right) \\
&= \frac{2(\|\Psi'\|^2\|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \bar{\Psi}'|^2)}{\|\Psi'\|^4}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto de (3.3), obtenemos que:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2} = - \left( \frac{2}{\|\Psi'\|^2} \right) \left( \frac{2(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}|^2)}{\|\Psi'\|^4} \right) \\ &= \frac{-4(\|\Psi'\|^2 \|\Psi''\|^2 - |\Psi'' \cdot \overline{\Psi'}|^2)}{\|\Psi'\|^6}. \end{aligned}$$

□

### 3.4. Determinacion de superficies minimales conjugadas

**Lema 3.23.** *Dada una función armónica  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo  $\mathcal{U}$  un conjunto abierto de  $\mathbb{C}$ , tomamos un punto  $z_0 = x_0 + iy_0$  en  $\mathcal{U}$*

1. *Dada una función analítica  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que se verifica que  $\Re f(x + iy) = h(x, y)$  e  $\Im f(z_0) = 0$ , entonces se cumple que:*

$$f(z) = 2h\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - h(x_0, y_0). \quad (3.19)$$

2. *De la misma manera, si la ecuacion (3.19) define a la funcion  $f$ , entonces se verifica que esta funcion es analítica, cumpliendo que  $f(z_0) = h(x_0, y_0)$ .*

*Demostración.* Comenzamos demostrando (1), y vamos a empezar por el caso  $z_0 = 0$ . Para ello vamos a definir una función  $g$ , tal que esta verifica que:

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})},$$

luego como  $f$  es analítica es obvio que  $g$  también lo será. A continuacion vamos a expresar la funcion  $h$  en terminos de nuestras funciones  $f$  y  $g$  de la siguiente forma:

$$h(x, y) = \frac{1}{2} \left( f(x + iy) + \overline{f(x + iy)} \right) = \frac{1}{2} (f(x + iy) - g(x - iy)). \quad (3.20)$$

Ya que la funcion  $h$  es armónica por hipótesis, podemos desarrollarlo como una serie de potencias, luego podemos escribir,

$$h\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right).$$

Ademas, (3.20), implica que,

$$h\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{1}{2}(f(z) + g(0)) = \frac{1}{2}(f(z) + h(0, 0)),$$

tal y como queríamos ver. Ahora para demostrar la parte (2) del lema, calculamos,

$$f_x = h_x - ih_y, \quad f_y = ih_x + h_y.$$

Por lo tanto, se verifica que,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

luego es claro que  $f$  es analítica. □

**Corolario 3.24.** *Dado un subconjunto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  y dada una parametrizacion local minimal e isoterma,  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  la complexificacion de  $\mathbf{x}$  verificando esta que*

$\Im\Psi(0) = 0$ . Entonces se verifica que:

$$\Psi(z) = 2x\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - x(0,0). \quad (3.21)$$

Además se cumple que la parametrización local minimal e isoterma y que es la conjugada de  $x$  con  $y(0,0) = (0, \dots, 0)$ , viene dada por la siguiente expresión:

$$y(u,v) = \Im\left(2x\left(\frac{u+iv}{2}, \frac{u+iv}{2i}\right) - x(0,0)\right). \quad (3.22)$$

*Demostración.* Denotamos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y para cada  $j = 1, \dots, n$ , llamamos  $\psi_j$  a la complexificación de  $x_j$  de tal forma que se verifica que  $\Im\psi_j(0) = 0$ . El lema anterior, nos lleva a que:

$$\psi_j(z) = 2x_j\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - x_j(0,0).$$

□

# Capítulo 4

## Superficies minimales y representacion de Weierstrass

En este capitulo veremos la relacion que existe entre las superficies minimales y la representacion de Weierstrass, para ello en una primera seccion introduciremos este concepto y presentaremos una serie de teoremas de interés. Será al final de este capítulo donde veremos el ejemplo de la superficie de Costa, el cual esta muy relacionado con esta representación.

### 4.1. La representacion de Weierstrass

Comenzamos introduciendo una definición.

**Definición 4.1.** Dadas dos funciones meromorfas  $f(z), g(z)$  las cuales están definidas en  $\mathcal{U} \in \mathbb{C}$ , tomamos  $z_0$  en  $\mathcal{U}$  definimos lo siguiente:

$$\begin{cases} x_1(z) = \Re \left( \int_{z_0}^z \frac{f(w)}{2} (1 - g(w)^2) dw \right), \\ x_2(z) = \Re \left( \int_{z_0}^z \frac{if(w)}{2} (1 + g(w)^2) dw \right), \\ x_3(z) = \Re \left( \int_{z_0}^z f(w)g(w) dw \right), \end{cases} \quad (4.1)$$

y

$$\begin{cases} y_1(z) = \Im \left( \int_{z_0}^z \frac{f(w)}{2} (1 - g(w)^2) dw \right), \\ y_2(z) = \Im \left( \int_{z_0}^z \frac{if(w)}{2} (1 + g(w)^2) dw \right), \\ y_3(z) = \Im \left( \int_{z_0}^z f(w)g(w) dw \right). \end{cases} \quad (4.2)$$

donde se cumple que  $z = u + iv$ .

$$x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)),$$

e

$$y(u, v) = (y_1(u, v), y_2(u, v), y_3(u, v)).$$

De esta manera, diremos que  $x$  es una parametrización local de Weierstrass, e  $y$  una parametrización local de Weierstrass conjugadas, estando determinadas por las funciones  $f(z)$  y  $g(z)$ .

**Teorema 4.2.** *Dada una función analítica  $f(z)$  y  $g(z)$ , una función meromorfa, la parametrización local de Weierstrass y la conjugada, son parametrizaciones locales minimales y a su vez isotermas, además se verifica que la métrica de estas viene dada por la siguiente expresión,*

$$ds^2 = \frac{1}{4}|f(z)|^2(1 + |g(z)|^2)^2|dz|^2,$$

*cumpliendo también que  $x$  e  $y$  son isométricas. Se verifica a su vez que ambas son regulares, salvo en algunas puntos de  $f$  (donde se anula o donde tiene alguna singularidad).*

*Demostración.* Primero obtenemos la complejificación de  $x$ , a partir de lo visto en el capítulo anterior, y se obtiene la siguiente expresión:

$$(x + iy) = \int_{z_0}^z \left( \frac{f(w)}{2}(1 - g(w)^2), \frac{if(w)}{2}(1 + g(w)^2), f(w)g(w) \right) dw,$$

luego es claro que  $(x + iy)$  es una 3-tupla de funciones analíticas. Como bien sabemos, las partes real e imaginaria de una función analítica, son armónicas, luego se verifica que:

$$x_{uu} + x_{vv} = y_{uu} + y_{vv} = 0.$$

Ahora gracias al lema (3.15), podemos calcular la derivada compleja de  $x$ , obteniendo lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{f(z)}{2}(1 - g(z)^2), \frac{if(z)}{2}(1 + g(z)^2), f(z)g(z) \right), \quad (4.3)$$

ahora, de (4.3), podemos comprobar que se satisface (3.13), por lo tanto se cumple que  $(x + iy)$  será una curva minimal y además  $x$  e  $y$  son isotermas. Continuamos con lo siguiente, sabemos  $g_{11} = g_{22}$ , por lo tanto podemos proseguir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} &= 2 \sum_{k=1}^3 |\phi[x]|^2 \\ &= \frac{1}{8}(|f|^2|1 - g^2|^2 + |f|^2|1 + g^2|^2 + 4|fg|^2) \\ &= \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2, \end{aligned}$$

por lo tanto se verifica que la métrica tiene la siguiente expresión, tal y como queríamos de-

mostrar.

$$ds^2 = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2(du^2 + dv^2) = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2|dz|^2.$$

□

**Corolario 4.3.** *Dadas dos funciones meromorfas definidas en el plano complejo  $\mathbb{C}$ ,  $f(z)$  y  $g(z)$ , siendo  $x$  e  $y$  su parametrización local de Weierstrass generada por  $f(z)$ , y la parametrización local de Weierstrass conjugada generada por  $g(z)$  respectivamente, se verifica que:*

$$z \rightarrow (x + iy),$$

será una curva minimal.

A continuación estudiaremos la implicación inversa, es decir, dada una curva minimal, veremos como esta puede determinar una representación de Weierstrass.

**Lema 4.4.** *Dada una curva minimal  $\Psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $\Psi' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , verificandose que  $\varphi_1 - i\varphi_2 \neq 0$ , definimos lo siguiente:*

$$f = \varphi_1 - i\varphi_2, \quad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}, \quad (4.4)$$

por lo tanto,  $f$  y  $g$  determinan la representación de Weierstrass de  $\Psi$ , luego se verifica que:

$$\Psi' = \left( \frac{f}{2}(1 - g^2), \frac{if}{2}(1 + g^2), fg \right).$$

*Demostración.* Para demostrarlo, vamos a comenzar probando que  $\frac{f}{2}(1 - g^2) = \varphi_1$ , lo cual mostraremos de manera detallada:

$$\begin{aligned} \frac{f}{2}(1 - g^2) &= \frac{1}{2}(\varphi_1 - i\varphi_2) \left( 1 - \frac{\varphi_3^2}{(\varphi_1 - i\varphi_2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\varphi_1 - i\varphi_2)^2 - \varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - 2i\varphi_1\varphi_2 - \varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\varphi_1 - i\varphi_2)^2 + (\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2)}{\varphi_1 - i\varphi_2} \\ &= \frac{1}{2}(\varphi_1 - i\varphi_2) + (\varphi_1 + i\varphi_2) = \varphi_1. \end{aligned}$$

De manera análoga obtendremos que  $\varphi_2 = \frac{if}{2}(1 + g^2)$  y se obtiene de manera directa que  $\varphi_3 = fg$ . □

**Teorema 4.5.** *Dadas dos funciones meromorfas  $f(z)$  y  $g(z)$ , la familia asociada  $z[t]$  a la parametrización local de Weierstrass que determinan estas dos funciones, viene dada de la*

siguiente manera:

$$t \rightarrow z[t] = (z_1[t], z_2[t], z_3[t]),$$

donde cada componente viene dada por la siguiente expresion:

$$\begin{cases} z_1(z) = \Re \left( e^{-it} \int_{z_0}^z \frac{f(w)}{2} (1 - g(w)^2) dw \right), \\ z_2(z) = \Re \left( e^{-it} \int_{z_0}^z \frac{if(w)}{2} (1 + g(w)^2) dw \right), \\ z_3(z) = \Re \left( e^{-it} \int_{z_0}^z f(w)g(w) dw \right). \end{cases} \quad (4.5)$$

*Demostración.* Resulta trivial, probar que la expresión  $z[t]$  dada por las ecuaciones que acabamos de ver en este teorema (4.5), se obtienen de manera directa, aplicando las ecuaciones (3.16).  $\square$

Para finalizar con esta sección, obtendremos una expresión que nos proporciona, la curvatura de Gauss, de una parametrización local de Weierstrass.

**Teorema 4.6.** *Dada una parametrización local de Weierstrass definida por dos funciones  $f$  y  $g$ , siendo estas meroformas, su curvatura de Gauss  $K$ , viene dada por la siguiente expresión,*

$$K = \frac{-16|g'|^2}{|f|^2(1 + |g|^2)^4}. \quad (4.6)$$

*Demostración.* Para comenzar tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta \log |f(z)| &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \log |f(z)|^2 \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} (\log f(z) + \log \overline{f(z)}) = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

además,

$$\begin{aligned} \Delta \log(1 + |g(z)|^2) &= 4 \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \log(1 + g(z)\overline{g(z)}) \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{g'(z)\overline{g(z)}}{1 + |g(z)|^2} \right) \\ &= \frac{16|g'(z)|^2}{(1 + |g(z)|^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Luego, podemos ver que la función de escala  $\lambda$  será  $\lambda = |f|(1 + |g|^2)$ . Por lo tanto usando (4.7)

y (4.8) y (3.3), se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} K &= \frac{-\Delta \log |f|(1 + |g|^2)}{|f|^2(1 + |g|^2)^2/4} = \frac{-\Delta \log(1 + |g|^2)}{|f|^2(1 + |g|^2)^2/4} \\ &= \frac{-4|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} = \frac{-16|g'|^2}{|f|^2(1 + |g|^2)^4}. \end{aligned}$$

□

## 4.2. Superficie Minimal de Costa

Como bien comentamos en la introducción histórica, una de las superficies minimales más interesantes a lo largo de la historia es la superficie minimal de Costa. (Podemos encontrar la representación gráfica de la superficie minimal de Costa en la figura (4.1)).

### 4.2.1. Funciones $\wp$ y $\zeta$ de Weierstrass

Sean  $w_1$  y  $w_2$  dos números complejos ambos distintos de cero, supondremos que  $\Im(w_2/w_1)$  es positiva, lo cual nos indica que el ángulo que forman  $w_1$  y  $w_2$  es agudo. Definimos el enrejado  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \{mw_1 + nw_2 | m, n \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Ahora definimos,

$$g_2 = 60 \sum_{w \in \mathcal{L}} \frac{1}{w^4}, \quad y \quad g_3 = 140 \sum_{w \in \mathcal{L}} \frac{1}{w^6}. \quad (4.9)$$

A continuación, la función  $\wp$  de Weierstrass asociada con el enrejado  $\mathcal{L}$  viene definida por la siguiente expresión:

$$\wp(z, \{g_2, g_3\}) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \mathcal{L}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right). \quad (4.10)$$

Por lo tanto, la función  $\wp$  que acabamos de definir, es una función periódica, con periodo  $w_1$  y  $w_2$ . El siguiente conjunto,

$$PP(\{g_2, g_3\}) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = aw_1 + bw_2 \quad \text{con} \quad 0 \leq a, b < 1\},$$

se conoce como el paralelogramo periódico fundamental de  $\wp(z, \{g_2, g_3\})$ . La función  $\wp$  verifica la siguiente fórmula,

$$\wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} \right)^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2). \quad (4.11)$$

Definimos a continuación, la función  $\zeta$  de Weierstrass, la cual viene dada por la siguiente expresión:

$$\zeta(z, \{g_2, g_3\}) = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \mathcal{L}} \left( \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right). \quad (4.12)$$

Cuando se sobreentiende que usamos  $g_2, g_3$ , escribiremos:

$$\wp(z) = \wp(z, \{g_2, g_3\}), \quad y \quad \zeta(z) = \zeta(z, \{g_2, g_3\}).$$

Tambien sabemos que  $w\wp$  verifica la siguiente expresi3n diferencial,

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3. \quad (4.13)$$

Adem3s de las ecuaciones (4.10) y (4.12), podemos obtener la siguiente relaci3n entre las funciones  $\wp$  y  $\zeta$ ,

$$\zeta'(z) = -\wp(z). \quad (4.14)$$

Teniendo en cuenta que  $\wp'(z)$  es una funci3n impar de  $z$  con periodo  $w_1$ , tendremos lo siguiente,

$$\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = -\wp'\left(-\frac{w_1}{2}\right) = -\wp'\left(-\frac{w_1}{2} + w_1\right) = -\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right),$$

de tal manera que

$$\wp'\left(\frac{w_1}{2}\right) = 0.$$

De manera similar, podemos obtener que:

$$\wp'\left(\frac{w_2}{2}\right) = \wp'\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = 0.$$

Adem3s podemos ver que  $\wp'$  no tiene m3s ceros en paralelogramos peri3dico fundamental aparte de  $w_1/2, w_2/2, (w_1 + w_2)/2$ . Adem3s, de (4.13), podemos ver que las 3 ra3ces del polinomio

$$4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \quad (4.15)$$

son las que mencionabamos anteriormente, por lo tanto denotaremos,

$$e_1 = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{w_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right),$$

luego podemos escribir, (4.13), de la siguiente forma,

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3), \quad (4.16)$$

donde

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{g_2}{4}, \\ e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \end{cases} \quad (4.17)$$

La funcion  $\zeta$  de Weierstrass no es peri3dica, de todas formas,

$$\zeta(z + mw_1 + nw_2) = \zeta(z) + 2m\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) + 2n\zeta\left(\frac{w_2}{2}\right). \quad (4.18)$$

Luego, (4.18), implica que

$$\zeta\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) = \zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) + \zeta\left(\frac{w_2}{2}\right). \quad (4.19)$$

Ahora, haciendo uso de la relacion de Legendre obtendremos que

$$\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) w_2 - \zeta\left(\frac{w_2}{2}\right) w_1 = \pi, \quad (4.20)$$

para ver una demostración completa ver [6].

### 4.2.2. Funciones $\wp$ y $\zeta$ de Weierstrass en un cuadrado

Vamos a comenzar suponiendo que el cuadrado del que estamos hablando viene dado por:

$$\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \Re(z) < 1 \text{ y } 0 \leq \Im(z) < 1\}. \quad (4.21)$$

La funcion  $\wp$  de Weierstrass correspondiente al cuadrado (4.21), tiene  $w_1=1$  y  $w_2 = i$  y viene dada por la siguiente expresión:

$$\wp(z, \{g_2, g_3\}) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{(z - m - ni)^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right), \quad (4.22)$$

con  $(m, n) \neq (0, 0)$ . Además, de la misma manera podremos definir la funcion  $\zeta$  de Weierstrass para el cuadrado (4.21) de la siguiente forma:

$$\zeta(z, \{g_2, g_3\}) = \frac{1}{z} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \left( \frac{1}{z - m - ni} + \frac{1}{m + ni} + \frac{z}{(m + ni)^2} \right). \quad (4.23)$$

Para determinar a continuacion  $g_2$  y  $g_3$  en las funciones (??) y (4.23), y usaremos (4.22) para calcular:

$$e_1 + e_2 = \wp\left(\frac{1}{2}, \{g_2, g_3\}\right) + \wp\left(\frac{i}{2}, \{g_2, g_3\}\right) = 0. \quad (4.24)$$

Por lo tanto, de (4.17), podemos obtener lo siguiente

$$\begin{cases} e_3 = g_3 = 0, \\ g_2 = -4e_1e_2 = 4e_1^2. \end{cases} \quad (4.25)$$

En el caso del cuadrado dado por (4.21), utilizaremos (4.25), para reducir la ecuación diferencial (4.13), a la siguiente expresión,

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)(\wp(z)^2 - e_1^2). \quad (4.26)$$

A continuación veremos una notación especial para las funciones  $\wp$  y  $\zeta$  de Weierstrass correspondientes al cuadrado (4.21).

$$\begin{cases} P(z) = \wp(z, \{c, 0\}), \\ Z(z) = \zeta(z, \{c, 0\}). \end{cases} \quad (4.27)$$

### 4.2.3. Definición de la Superficie Minimal de Costa

La superficie minimal de Costa puede ser definida como un parametrización de Weierstrass utilizando las siguientes funciones,

$$f(z) = P(z), \quad y \quad g(z) = \frac{A}{P'(z)}. \quad (4.28)$$

Como la superficie minimal de Costa no tiene auto-intersecciones, tomaremos,

$$A = \sqrt{2\pi g_2} = 2\sqrt{2\pi e_1} \approx 34,46 \quad (4.29)$$

**Definición 4.7.** *La curva minimal de Costa, es la curva minimal meromorfa,  $CostaC = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ . Denotamos,*

$$CostaC'(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{f(z)}{2}(1 - g(z)^2), i \frac{f(z)}{2}(1 + g(z)^2), f(z)g(z) \right), \quad (4.30)$$

donde  $f$  y  $g$  son las indicadas en (4.28). Luego,  $CostaC$  será la antiderivada de  $CostaC'$  con la siguiente normalización,

$$CostaC \left( \frac{1+i}{2} \right) = (0, 0, 0).$$

A continuación, veremos como utilizamos la función  $Z$  de Weierstrass para expresar  $CostaC$  sin necesidad de utilizar integrales.

**Teorema 4.8.** *La curva minimal de Costa viene dada por*

$$CostaC(z) = (CostaC_1(z), CostaC_2(z), CostaC_3(z)),$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Costa}C_1(z) = \frac{1}{2} \left( -Z(z) + \pi z - i\pi + \frac{\pi^2(1+i)}{4e_1} \right. \\ \quad \left. + \frac{\pi}{2e_1} \left( Z\left(z - \frac{1}{2}\right) - Z\left(z - \frac{i}{2}\right) \right) \right), \\ \text{Costa}C_2(z) = \frac{i}{2} \left( -Z(z) - \pi z + \pi - \frac{\pi^2(1+i)}{4e_1} \right. \\ \quad \left. - \frac{\pi}{2e_1} \left( Z\left(z - \frac{1}{2}\right) - Z\left(z - \frac{i}{2}\right) \right) \right), \\ \text{Costa}C_3(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left( \log \left( \frac{P(z) - e_1}{P(z) + e_1} \right) - \pi i \right). \end{array} \right.$$

*Demostración.* La demostración es bastante sencilla, ya que solo precisa del manejo de operaciones e integrales, lo cual podemos ver en [5].  $\square$

**Corolario 4.9.** *Ahora, la superficie minimal de Costa, vendrá dada por la expresión siguiente,*

$$\text{Costa}(u, v) = (\text{Costa}_1(u, v), \text{Costa}_2(u, v), \text{Costa}_3(u, v))$$

donde,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Costa}_1(u, v) = \frac{1}{2} \Re \left( -Z(u+iv) + \pi u + \frac{\pi^2}{4e_1} \right. \\ \quad \left. + \frac{\pi}{2e_1} \left( Z\left(u+iv - \frac{1}{2}\right) - Z\left(u+iv - \frac{i}{2}\right) \right) \right), \\ \text{Costa}_2(u, v) = \frac{1}{2} \Re \left( -iZ(u+iv) + \pi v + \frac{\pi^2}{4e_1} \right. \\ \quad \left. - \frac{\pi i}{2e_1} \left( Z\left(u+iv - \frac{1}{2}\right) - Z\left(u+iv - \frac{i}{2}\right) \right) \right), \\ \text{Costa}_3(u, v) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \log \left| \frac{P(u+iv) - e_1}{P(u+iv) + e_1} \right|. \end{array} \right.$$

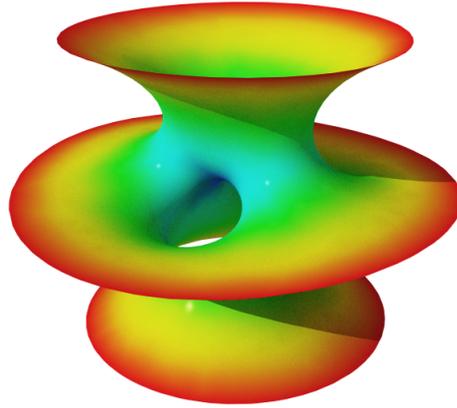


Figura 4.1: Superficie Minimal de Costa

## Conclusiones

Como bien hemos podido comprobar, existen distintas maneras de verificar que una superficie es minimal. Hemos presentado y estudiado distintos métodos para obtener superficies minimales, así como dado a conocer diferentes ejemplos de este tipo de superficies.

Tal y como mencionabamos en la introducción, las superficies minimales están ampliamente relacionadas con otros campos de las matemáticas, hemos podido verificar esto, analizando la relación de las superficies minimales con el análisis complejo, concretamente con aquellas parametrizaciones que son armónicas.

A su vez hemos conocido otro tipo de representación más compleja de lo habitual, la representación de Weierstrass, esta fórmula como hemos podido ver resulta muy util a la hora de determinar superficies minimales, desarrollando el caso de la superficie minimal de Costa.

El estudio de este tipo de superficies continua siendo objeto de estudio actualmente en Geometría Diferencial, produciendose gran cantidad de avances en las últimas décadas. Como hemos podido ver se trata de un tema interesante, pudiendo continuar este trabajo, estudiando y analizando las distintas propiedades topológicas de las superficies minimales, como ouede ser el género asi como el número de finales topológicos.

**Nota:** Todas las figuras que se muestran en este trabajo han sido realizadas por la autora, mediante el uso de Matlab salvo la figura (4.1), la cual hemos obtenido de [10].

# Bibliografía

- [1] REGO, L.A.C., FERNANDEZ, M., GRAY, A., & CORDERO, L.A, *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
- [2] CARMO, M.P, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Pearson, 1976.
- [3] PRESSLEY, A.N, *Elementary Differential Geometry*, segunda edición, Springer, 2010.
- [4] OSSERMAN, R, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Publications, 1986.
- [5] GRAY, A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces With Mathematica*, 2nd edition, Crc Pr I Llc, 1998.
- [6] CHANDRASEKHARAN, K, *Elliptic Functions: 281*, 1985 ed, Springer, 1985.
- [7] PEREZ, J Una nueva edad de oro de las superficies mínimas, *La Gaceta de la RSME*, 20, 193-211, 2017.
- [8] LOPEZ, F.J Departamento de Geometría y Topología. Universidad de Granada. *Complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$* .
- [9] ETAYO, F *Apuntes Teoría Global de Superficies* Universidad de Cantabria, 2019.
- [10] COLABORADORES WIKIPEDIA *Superficies Minimales* Wikipedia, la enciclopedia libre. [https://es.wikipedia.org/wiki/Superficie\\_minimal](https://es.wikipedia.org/wiki/Superficie_minimal)