



*Facultad
de
Ciencias*

**EL CONDICIONAMIENTO DE UN
POLINOMIO**
(The condition number of a polynomial)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Cristina Gómez Casanueva
Director: Carlos Beltrán Álvarez

Junio - 2021

Agradecimientos

Gracias a mi familia por confiar en mi desde el día que decidí empezar este camino.

Gracias a Roberto, por apoyarme cada día durante estos años.

Gracias a los compañeros de ciencias, en especial a las que se han convertido en amigas, por hacer estos años más divertidos.

Por último, agradecer a Carlos haberme dado la oportunidad de realizar este trabajo y su ayuda desde el primer día.

Resumen

En este trabajo se estudia el concepto de condicionamiento o número de condición de un polinomio, en el caso de polinomios homogéneos y no homogéneos. El número de condición mide como varían las soluciones de un polinomio al producirse pequeños cambios en sus coeficientes. Para medir el tamaño de los coeficientes de la forma apropiada se introduce la norma de Weyl de la que demostraremos algunas propiedades fundamentales. A partir de lo expuesto, se implementan en dos programas de ordenador independientes el polinomio de Wilkinson ilustrando un ejemplo de mal condicionamiento, y por otro lado una secuencia de polinomios bien condicionados.

Palabras clave: condicionamiento, polinomio homogéneo, norma de Weyl, polinomio de Wilkinson

Abstract

In this paper we study the concept of condition or condition number of a polynomial, in the case of homogeneous and non-homogeneous polynomials. The condition number measures how the solutions of a polynomial vary when we make small changes in its coefficients. In order to measure the size of the coefficients in the appropriate way, the Weyl norm is introduced and some fundamental properties will be demonstrated. Based on the exposed, two independent computer programs are implemented, the first one about Wilkinson's polynomial to show bad condition, and on the other hand, a sequence of well conditioned polynomials.

Key words: condition, homogeneous polynomial, Weyl's norm, Wilkinson's polynomial

Índice general

Introducción	1
1. Número de condición de un polinomio	3
1.1. Norma de Bombieri-Weyl	4
1.2. Condicionamiento de un polinomio	13
1.3. Cálculo analítico del número condición	21
2. Implementación computacional	25
2.1. El Polinomio de Wilkinson	25
2.1.1. Código MATLAB	29
2.2. Polinomios bien condicionados	30
2.2.1. Código Maxima	36
3. Conclusiones	39
Bibliografía	40

Introducción

Los polinomios son tal vez las expresiones matemáticas más estudiadas de la historia. Su aparición es frecuente en todas las ramas de las matemáticas, y sus propiedades han despertado el interés de los matemáticos desde que tenemos constancia.

Los primeros en resolver ecuaciones polinomiales, esto es, el problema de hallar las raíces o ceros de polinomios; fueron los babilonios hace más de 4.000 años. Estos resolvieron polinomios de grado 2, lo que en la actualidad se conoce como ecuación cuadrática. Con el paso de los años, distintas civilizaciones, como las griegas, árabes o europeas entre otras, continuaron en el estudio de la resolución de ecuaciones polinomiales, hallando la expresión para las soluciones de polinomios cuadráticos, que se siguen utilizando hoy en día. Posteriormente, en el siglo XVI en Italia se hallaron fórmulas para las ecuaciones de grados 3 y 4. Para polinomios de grado 5 o superior no se puede encontrar una fórmula para su resolución. [11]

A pesar de llevar tantos años trabajando en la resolución de polinomios, el problema de la precisión en la resolución de este y otros problemas numéricos no se comprende correctamente hasta la aparición del estudio de números de condición en el año 1948, al analizar la propagación de errores utilizando herramientas computacionales (una novedad en aquella época) para la resolución de ecuaciones lineales, por el matemático Alan Turing. Desde entonces, el número de condición viene ocupando un papel crucial en el análisis de la precisión de los algoritmos numéricos. El concepto número de condición de un polinomio en una raíz se puede definir como una medida o estimación del cambio que se produce en la raíz si se producen pequeñas perturbaciones en los coeficientes del polinomio. [5]

El objetivo de este trabajo de fin de grado es definir el número de condición y recopilar sus propiedades más interesantes descubiertas hasta la fecha, ilustrando todo ello con ejemplos. Una de las principales aportaciones de este trabajo al estudio del número de condición es la demostración en detalle de algunas de sus propiedades, que no es fácil encontrar con los cálculos explícitos en la literatura.

El trabajo se divide en dos partes principales claramente diferenciadas, y una última parte recogiendo las conclusiones obtenidas con la realización de este trabajo. La primera de estas partes, el primer capítulo, se ocupa de la parte más teórica,

se propone la definición formal de número de condición, así como la propuesta por los matemáticos Michael Shub y Stephen Smale, quienes utilizan polinomios homogéneos. Para ello se define una norma unitaria invariante conocida como norma de Weyl o de Bombieri-Weyl. Finalizando el capítulo se pueden encontrar varios ejemplos de aplicación de las definiciones y propiedades expuestas.

Seguidamente se encuentra la segunda parte, la implementación computacional, en ella se estudia el mal condicionamiento del polinomio de Wilkinson y el problema que propusieron Shub y Smale sobre hallar una secuencia de polinomios con un número de condición adecuado, esto es, una secuencia de polinomios bien condicionados. Para la realización de esta parte del trabajo, ha sido necesario el uso de dos softwares matemáticos para la implementación de los polinomios. Durante el desarrollo del segundo capítulo se adjuntan los métodos empleados.

Capítulo 1

Número de condición de un polinomio

Para comenzar con el trabajo en este capítulo se introduce el concepto matemático de condicionamiento de un polinomio, al que para cuantificarlo le ponemos un número concreto que denotamos por número de condición, y la definición propuesta por los matemáticos Michael Shub y Stephen Smale. También veremos algunos ejemplos sobre su cálculo para unos polinomios concretos.

El caso más conocido en el que se utiliza el número de condición es en la resolución de sistemas lineales de la forma $Ax = b$, donde se calcula como $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Esta cantidad mide el error relativo en la salida respecto al error relativo en la entrada. Claramente $cond(A) \geq 1$, en consecuencia $\log(cond(A)) \geq 0$ y permite medir la precisión que se ha perdido en la solución obtenida.

Antes de Shub y Smale, con Demmel o Wilkinson, en el cálculo de raíces de polinomios, se tomaba como número de condición el valor $cond(f) = \frac{1}{|f'(\zeta)|}$; donde f es un polinomio tal que $f(\zeta) = 0$. Como en el caso de los sistemas lineales mide la sensibilidad relativa al error en la entrada respecto el de la salida, pero no satisface $cond(f) \geq 1$. Por esta y otras razones Shub y Smale deciden dar una nueva definición del número de condición de un polinomio que veremos a continuación.

Antes de comenzar a definir el número de condición será necesario dotar de una norma adecuada al espacio de los polinomios con los que vamos a trabajar, seguiremos la notación utilizada en [9]. A lo largo de este trabajo nos vamos a centrar en polinomios homogéneos y los resultados que obtengamos se pueden extender a casos más generales.

1.1. Norma de Bombieri-Weyl

Comenzamos definiendo un polinomio p homogéneo de grado $N \geq 0$ con coeficientes complejos de dos variables:

$$p(z, w) = \sum_{i=0}^N a_i z^i w^{N-i}, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_N \neq 0$$

Denotemos por \mathcal{H}_N el espacio vectorial formado por el conjunto de polinomios de la forma de p . La norma utilizada generalmente en este espacio es la norma euclídea (o norma 2), la cuál vamos a sustituir por una versión ponderada de esta de forma que sea unitaria invariante, definimos así la norma de Weyl como sigue:

Definición 1.1 *Se define **norma de Weyl** del polinomio p (también conocida como **norma de Bombieri**, **Bombieri-Weyl** o **Kostlan**) como*

$$\|p\| = \left(\sum_{i=0}^N \binom{N}{i}^{-1} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $\binom{N}{i}$ es el coeficiente binomial.

La norma de Weyl pondera en mayor medida los coeficientes de los extremos del polinomio. Podemos verlo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1 *Cálculo de la norma de Weyl para un caso sencillo:*

$$\begin{aligned} p(x, y) &= y^7 + xy^6 - 3x^2y^5 + 3x^5y^2 - x^7 \\ \|p\|^2 &= \binom{7}{0}^{-1}|1|^2 + \binom{7}{1}^{-1}|1|^2 + \binom{7}{2}^{-1}|-3|^2 + \binom{7}{5}^{-1}|3|^2 + \binom{7}{7}^{-1}|-1|^2 = 3 \\ \|p\| &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

A partir de aquí, cuando trabajemos en el espacio de polinomios homogéneos \mathcal{H}_N se utilizará la norma de Weyl, salvo en los casos que se indique lo contrario.

Definición 1.2 *Sea $f(X) = \sum_{i=0}^N a_i X^i$ el polinomio no-homogéneo asociado a p , se define la **norma de Weyl de un polinomio univariado** como la de su homogeneizado:*

$$\|f\| = \|p\|.$$

A continuación presentamos uno de los resultados más interesantes de la norma de Weyl junto a su demostración, que no hemos encontrado de forma completa en la literatura y cuya compleción ha sido una de las aportaciones más laboriosas y señalables de este trabajo:

Teorema 1.1 Sean $p \in \mathcal{H}_N$ dotado de la norma de Weyl y $(z, w) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, se cumple:

$$\|p\|^2 = \frac{N+1}{2\pi^2} \int_{(z,w) \in \mathbb{C}^2: |z|^2 + |w|^2 = 1} \frac{|p(z, w)|^2}{(|z|^2 + |w|^2)^N} d(z, w)$$

Notar que el denominador que aparece en la integral vale 1 por la restricción que se define a la hora de integrar. Sin embargo, se añade este coeficiente para los casos en los que se integre en regiones distintas de la esfera unidad de \mathbb{R}^4 .

Dem: Queremos demostrar la igualdad precedente:

$$\sum_{i=0}^N \binom{N}{i}^{-1} |a_i|^2 = \frac{N+1}{2\pi^2} \int_{(z,w): |z|^2 + |w|^2 = 1} \frac{|p(z, w)|^2}{(|z|^2 + |w|^2)^N} d(z, w)$$

Para ello, dividimos la demostración en dos partes diferenciadas; en la primera de estas calcularemos el valor de la integral anterior para tres polinomios distintos, para posteriormente, en la segunda parte, utilizar los valores de dichas integrales para demostrar el teorema.

Comenzamos la primera parte definiendo el polinomio $p(z, w) = z^N$ y calculamos cuánto vale la integral. Sean $z = a + bi$, $w = c + di$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, como integramos sobre $|z|^2 + |w|^2 = 1$ entonces $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ y estamos integrando sobre la esfera unidad de \mathbb{R}^4 . Por tanto, la integral a calcular es:

$$I_1 = \int_{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1} (a^2 + b^2)^N d(a, b, c, d)$$

Para calcular la integral parametrizamos la esfera unidad de \mathbb{R}^4 que denotaremos por \mathbb{S}^3 , para ello utilizamos la proyección estereográfica. La proyección desde $P = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{S}^3$ de un punto de de la esfera sobre \mathbb{R}^3 está dada por la aplicación:

$$\begin{aligned} \pi: \quad \mathbb{S}^3 - \{P\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (a, b, c, d) &\longmapsto (X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{a}{1-d}, \frac{b}{1-d}, \frac{c}{1-d}\right) \end{aligned}$$

y su inversa:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \\ (X_1, X_2, X_3) &\longmapsto \frac{1}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1} (2X_1, 2X_2, 2X_3, X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1) \end{aligned}$$

Sean $h(a, b, c, d) = (a^2 + b^2)^N$ y $v = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$I_1 = \int_v h(\pi^{-1}(v)) \det((D\pi^{-1}(v))^T D\pi^{-1}(v))^{1/2} dv$$

donde sustituyendo se obtiene $h(\pi^{-1}(v)) = [(\frac{1}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1})^2(4X_1^2 + 4X_2^2)]^N$ y utilizando el software matemático de cálculo simbólico Maxima

$det((D\pi^{-1}(v))^T D\pi^{-1}(v))^{1/2} = \frac{8}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^3}$. Sustituyendo en la integral I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{(X_1, X_2, X_3)} \left[\frac{(4X_1^2 + 4X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^2} \right]^N \frac{8}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^3} dX_1 dX_2 dX_3 = \\ &= 2^{2N+3} \int \int \int_{(X_1, X_2, X_3)} \frac{(X_1^2 + X_2^2)^N}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^{2N+3}} dX_1 dX_2 dX_3 \end{aligned}$$

Para el cálculo de esta integral triple se utiliza un cambio de las coordenadas X_1, X_2, X_3 a coordenadas esféricas como sigue:

$$X_1 = R \cos(\theta) \sin(\varphi), \quad X_2 = R \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad X_3 = R \cos(\varphi)$$

con $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < \pi$. Escribiendo la integral en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2^{2N+3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{(R^2 \sin^2(\varphi))^N}{(R^2 + 1)^{2N+3}} R^2 \sin(\varphi) dR d\varphi d\theta = \\ &= 2^{2N+3} 2\pi \int_0^\pi \sin^{2N+1}(\varphi) d\varphi \int_0^\infty \frac{R^{2N+2}}{(R^2 + 1)^{2N+3}} dR \end{aligned}$$

Calculamos cada integral por separado utilizando las fórmulas que encontramos en [7] que utilizan funciones beta y gamma, empezamos con $I_\varphi = \int_0^\pi \sin^{2N+1}(\varphi) d\varphi$.

Sabemos que $B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}(\varphi) \cos^{2y-1}(\varphi) d\varphi$, entonces para el caso de I_φ , $x = N + 1$ e $y = \frac{1}{2}$. Ahora, por simetría de la función seno

$$\int_0^\pi \sin^{2N+1}(\varphi) d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2N+1}(\varphi) d\varphi = B(N + 1, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(N + 1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(N + 3/2)}$$

Para $I_R = \int_0^\infty \frac{R^{2N+2}}{(R^2+1)^{2N+3}} dR$, conocemos la igualdad siguiente:

$$B(x, y) = 2 \int_0^\infty \frac{R^{2x+1}}{(R^2 + 1)^{x+y}} dR,$$

por tanto:

$$\int_0^\infty \frac{R^{2N+2}}{(R^2 + 1)^{2N+3}} dR = \frac{1}{2} B(N + \frac{3}{2}, N + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(N + 3/2)^2}{\Gamma(2N + 3)}$$

Sustituyendo en I_1 nos quedará una expresión en función de Gammas que despejaremos utilizando las propiedades siguientes de tal función:

- $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$
- Fórmula de Duplicación de Legendre: $\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$
- $\Gamma(1/2) = \pi$

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2^{2N+4}\pi \frac{\Gamma(N+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(N+3/2)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(N+3/2)^2}{\Gamma(2N+3)} = 2^{2N+3}\pi^2 \frac{\Gamma(N+1)\Gamma(N+3/2)}{\Gamma(2N+3)} = \\
&= 2^{2N+3}\pi^2 \frac{(N2^{1-2N}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(2N)}{\Gamma(N+1/2)})\Gamma(N+3/2)}{\Gamma(2N+3)} = \frac{2^4\pi^2 N\Gamma(2N)\Gamma(N+3/2)}{\Gamma(N+1/2)\Gamma(2N+3)} = \\
&= 2^4\pi^2 N \frac{(2N-1)!\Gamma(N+3/2)}{\Gamma(N+1/2)(2N+2)(2N+1)(2N)(2N-1)!} = \\
&= \frac{2^4\pi^2 N\Gamma(N+3/2)}{\Gamma(N+1/2)2^3(N+1)(N+1/2)N} = \frac{2\pi^2\Gamma(N+3/2)}{\Gamma(N+1/2)(N+1)(N+1/2)} = \\
&= 2\pi^2 \frac{(N+1/2)\Gamma(N+1/2)}{\Gamma(N+1/2)(N+1)(N+1/2)} = 2\pi^2 \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

Para $p(z, w) = z^N$, se tiene $\|p\|^2 = \frac{N+1}{2\pi^2} \frac{2\pi^2}{N+1} = 1$.

Ahora definimos el polinomio $p(z, w) = z^{N-k}w^k$ para $k \in \mathbb{Z}, 0 < k < N$. Siguiendo la misma notación, la integral que queremos calcular en este caso es:

$$I_2 = \int_{a^2+b^2+c^2+d^2=1} (a^2+b^2)^{N-k}(c^2+d^2)^k d(a, b, c, d)$$

Se observa fácilmente que es similar al caso anterior, de hecho, vamos a parametrizar la función a integrar utilizando de nuevo la aplicación π^{-1} .

Llamamos $f(a, b, c, d) = (a^2+b^2)^{N-k}(c^2+d^2)^k$, y obtenemos la imagen de $\pi^{-1}(v)$,

$$\begin{aligned}
f(\pi^{-1}(v)) &= \left[\frac{4X_1^2 + 4X_2^2}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^2} \right]^{N-k} \left[\frac{4X_3^2 + (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1)^2}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^2} \right]^k = \\
&= \frac{4^{N-k}(X_1^2 + X_2^2)^{N-k}(4X_3^2 + (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1)^2)^k}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^{2N}}
\end{aligned}$$

Como estamos utilizando la misma parametrización $\det((D\pi^{-1}(v))^T D\pi^{-1}(v))^{1/2}$ no cambia, y la integral nos queda:

$$I_2 = 2^{2N-2k+3} \iiint_{(X_1, X_2, X_3)} \frac{(X_1^2 + X_2^2)^{N-k}(4X_3^2 + (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1)^2)^k}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^{2N+3}} dX_1 dX_2 dX_3$$

Aplicando el mismo cambio a coordenadas esféricas que para la integral I_1 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2^{2N-2k+3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{(R^2 \sin^2(\varphi))^{N-k} (4R^2 \cos^2(\varphi) + (R^2 - 1)^2)^k}{(R^2 + 1)^{2N+3}} R^2 \sin(\varphi) \\
&\hspace{25em} dR d\varphi d\theta = \\
&= 2^{2N-2k+3} 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{R^{2N-2k+2}}{(R^2 + 1)^{2N+3}} \sin^{2N-2k+1}(\varphi) (4R^2 \cos^2(\varphi) + (R^2 - 1)^2)^k dR d\varphi
\end{aligned}$$

Con unos sencillos cálculos tenemos las siguientes igualdades, que posteriormente utilizaremos para calcular la integral,

$$\begin{aligned}
4R^2 \cos^2(\varphi) + (R^2 - 1)^2 &= 4R^2 \cos^2(\varphi) + R^4 + 1 - 2R^2 = \\
&= 4R^2(1 - \sin^2(\varphi)) + R^4 + 1 - 2R^2 = 4R^2 - 4R^2 \sin^2(\varphi) + R^4 + 1 - 2R^2 = \\
&= (R^2 + 1)^2 - 4R^2 \sin^2(\varphi) \\
[(R^2 + 1)^2 - 4R^2 \sin^2(\varphi)]^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (R^2 + 1)^{2j} (-4R^2 \sin^2(\varphi))^{k-j}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en I_2 :

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2^{2N-2k+3} 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{R^{2N-2k+2}}{(R^2 + 1)^{2N+3}} \sin^{2N-2k+1}(\varphi) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (R^2 + 1)^{2j} \\
&\hspace{10em} (-4R^2 \sin^2(\varphi))^{k-j} dR d\varphi = \\
&= 2^{2N-2k+3} 2\pi \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{R^{2N-2k+2}}{(R^2 + 1)^{2N+3}} \sin^{2N-2k+1}(\varphi) (R^2 + 1)^{2j} \\
&\hspace{10em} (-4R^2 \sin^2(\varphi))^{k-j} dR d\varphi = \\
&= 2^{2N-2k+3} 2\pi \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-4)^{k-j} \int_0^\pi \sin^{2N-2j+1}(\varphi) d\varphi \int_0^\infty \frac{R^{2N-2j+2}}{(R^2 + 1)^{2N-2j+3}} dR
\end{aligned}$$

De igual forma que para las integrales que aparecían en I_1 , utilizaremos las mismas

fórmulas de [7] con las x e y correspondientes en este caso,

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2^{2N-2k+3} 2\pi \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-4)^{k-j} \frac{\Gamma(N-j+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(N-j+3/2)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(N-j+3/2)^2}{\Gamma(2N-2j+3)} = \\
&= 2^{2N-2k+3} 2\pi \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-4)^{k-j} \frac{\Gamma(N-j+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(N-j+3/2)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(N-j+3/2)^2}{\Gamma(2N-2j+3)} = \\
&= 2^{2N+3} \pi (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-4)^{-j} \frac{\Gamma(N-j+1)\sqrt{\pi}\Gamma(N-j+3/2)}{\Gamma(2N-2j+3)} = \\
&= 2^{2N+3} \pi^{3/2} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-4)^{-j} (N-j)^{\frac{2^{1-2N+2j}\sqrt{\pi}\Gamma(2N-2j)}{\Gamma(N-j+1/2)}} \Gamma(N-j+\frac{3}{2})}{\Gamma(2N-2j+3)} = \\
&= 2^4 \pi^2 (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \frac{(N-j)\Gamma(2N-2j)\Gamma(N-j+3/2)}{\Gamma(2N-2j+3)\Gamma(N-j+1/2)}
\end{aligned}$$

Conocemos las dos igualdades siguientes:

- $\Gamma(2N-2j) = (2N-2j-1)!$
- $\Gamma(2N-2j+3) = (2N-2j+2)(2N-2j+1)(2N-2j)(2N-2j-1)!$

así, el cociente de ambas valdrá $\frac{1}{(2N-2j+2)(2N-2j+1)(2N-2j)}$, y seguimos con I_2 ,

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2^4 \pi^2 (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^j (N-j)\Gamma(N-j+3/2)}{(2N-2j+2)(2N-2j+1)(2N-2j)\Gamma(N-j+1/2)} = \\
&= 2^4 \pi^2 (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \frac{1}{2^3 (N-j+1)(N-j+1/2)} \frac{\Gamma(N-j+3/2)}{\Gamma(N-j+1/2)} = \\
&= 2\pi^2 (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \frac{1}{(N-j+1)(N-j+1/2)} (N-j+\frac{1}{2}) = \\
&= 2\pi^2 (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^j}{N-j+1} = 2\pi^2 (-1)^k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{(-1)^{k-l}}{N-k+l+1} = \\
&= 2\pi^2 (-1)^{2k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{\Gamma(N-k+l+1)}{\Gamma(N-k+l+2)} = 2\pi^2 (-1)^k \frac{B(k+1, N-k+1)}{\Gamma(1)} = \\
&= 2\pi^2 \frac{k!(N-k)!}{(N+1)!} = 2\pi^2 \binom{N}{k}^{-1} \frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

Finalmente, en el caso del polinomio $p(z, w) = z^{N-k}w^k$ su norma de Weyl al cuadrado vale:

$$\|p\|^2 = \frac{N+1}{2\pi^2} 2\pi^2 \binom{N}{k}^{-1} \frac{1}{N+1} = \binom{N}{k}^{-1}$$

Para finalizar la primera parte de la demostración, definimos la función $p(z, w) = z^k w^{N-k} \overline{z^j w^{N-j}}$ con $j \neq k$ y calculamos su integral sobre la región definida por los puntos (z, w) tales que $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Recordemos $z = a + bi, w = c + di$.

$$I_3 = \int_{a^2+b^2+c^2+d^2=1} (a+bi)^k (c+di)^{N-k} (a-bi)^j (c-di)^{N-j} d(a, b, c, d)$$

Utilizando de nuevo la proyección estereográfica (π^{-1}) escribimos I_3 como una integral de \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \int \int_{(X_1, X_2, X_3)} \left(\frac{2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1} \right)^{k+j} (X_1 + X_2 i)^k (X_1 - X_2 i)^j \\ &\quad \left(\frac{2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1} \right)^{2N-k-j} (2X_3 + i(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1))^{N-k} \\ &\quad (2X_3 - i(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 1))^{N-j} \frac{8}{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + 1)^3} dX_1 dX_2 dX_3 \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos hacemos el mismo cambio a esféricas que en los dos casos anteriores:

$$\begin{aligned} I_3 &= 2^{k+j+3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{(R^2 + 1)^{2N+3}} (R \sin(\varphi))^{k+j} (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^k \\ &\quad (\cos(\theta) - i \sin(\theta))^j (2R \cos(\varphi) + i(R^2 - 1))^{N-k} (2R \cos(\varphi) - (R^2 - 1))^{N-j} dR d\varphi d\theta = \\ &= 2^{k+j+3} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^k (\cos(\theta) - i \sin(\theta))^j d\theta \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{(R^2 + 1)^{2N+3}} \\ &\quad (R \sin(\varphi))^{k+j} (2R \cos(\varphi) + i(R^2 - 1))^{N-k} (2R \cos(\varphi) - (R^2 - 1))^{N-j} dR d\varphi \end{aligned}$$

Calculamos la integral que depende de θ

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^k (\cos(\theta) - i \sin(\theta))^j d\theta = \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^k (e^{-i\theta})^j d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-j)} d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta(k-j)) + i \sin(\theta(k-j)) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta(k-j)) d\theta + i \int_0^{2\pi} \sin(\theta(k-j)) d\theta = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $I_3 = 0$.

Queda por demostrar la segunda parte, donde veremos el interés de estas integrales. Dado cualquier polinomio $p(z, w) = \sum_{k=0}^N a_k z^k w^{N-k}$ veamos que el cuadrado de su norma de Weyl es $\frac{N+1}{2\pi^2} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} |p(z, w)|^2 d(z, w)$.

Sabemos que $|p(z, w)|^2 = p(z, w)\overline{p(z, w)}$, entonces

$$\begin{aligned} & \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} |p(z, w)|^2 d(z, w) = \\ &= \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} \sum_{k=0}^N a_k z^k w^{N-k} \overline{\sum_{j=0}^N a_j z^j w^{N-j}} d(z, w) = \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N a_k \overline{a_j} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} z^k w^{N-k} \overline{z^j w^{N-j}} d(z, w) \end{aligned}$$

Según los valores que tomen k y j podemos distinguir tres casos:

1. Si $k = j = N$:

$$\begin{aligned} & a_k \overline{a_j} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} z^k w^{N-k} \overline{z^j w^{N-j}} d(z, w) = \\ &= a_N \overline{a_N} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} z^N \overline{z^N} d(z, w) \\ &= |a_N|^2 \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} |z^N|^2 d(z, w) = |a_N|^2 I_1 = |a_N|^2 \frac{2\pi^2}{N+1} \end{aligned}$$

2. Si $k = j \neq N$:

$$\begin{aligned} & a_k \overline{a_j} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} z^k w^{N-k} \overline{z^k w^{N-k}} d(z, w) = \\ &= a_k \overline{a_k} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} z^k w^{N-k} \overline{z^k w^{N-k}} d(z, w) = \\ &= |a_k|^2 \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} |z^k w^{N-k}|^2 d(z, w) = |a_k|^2 I_2 = \\ &= |a_k|^2 2\pi^2 \binom{N}{k}^{-1} \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

3. Si $k \neq j$ nos queda una integral como I_3 que sabemos que vale 0.

Aplicando estos 3 casos a la integral de $|p(z, w)|^2$ nos queda como sigue, eliminamos los casos en los que $k \neq j$ porque es nula la integral,

$$\begin{aligned} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} |p(z, w)|^2 d(z, w) &= \sum_{k=0}^N a_k \overline{a_k} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} z^k w^{N-k} \overline{z^k w^{N-k}} d(z, w) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 \binom{N}{k}^{-1} \frac{2\pi^2}{N+1} + |a_N|^2 \frac{2\pi^2}{N+1} = \sum_{k=0}^N |a_k|^2 \binom{N}{k}^{-1} \frac{2\pi^2}{N+1} \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple porque $\binom{N}{N} = 1$.

Por último, conocemos la norma de Weyl (ver definición 1.1) y despejando tenemos:

$$\frac{N+1}{2\pi^2} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} |p(z, w)|^2 d(z, w) = \|p\|^2$$

□

Como consecuencia de este teorema y su demostración se obtiene y demuestra el siguiente resultado sobre la invarianza de la norma de Weyl bajo la acción de matrices unitarias, una de las razones por las que se emplea esta norma en \mathcal{H}_N . Recordemos previamente la definición de grupo unitario, en nuestro caso trabajaremos con el grupo unitario de dimensión 2.

Definición 1.3 Se define el **grupo unitario** $U(n+1)$ como

$$U(n+1) := \{u \in GL_{n+1}(\mathbb{C}) : uu^* = I_{n+1}\}$$

donde u^* es el traspuesto conjugado de u .

Corolario 1.1 Sea $U \in U(2)$ una matriz unitaria 2×2 , se satisface

$$\|p\| = \|p \circ U\|$$

donde $p \circ U \in \mathcal{H}_N$ está dado por $p \circ U(z, w) = p\left(U \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)$.

Dem: Aplicamos el teorema 1.1 al polinomio $p \circ U$:

$$\begin{aligned} \|p \circ U\|^2 &= \frac{N+1}{2\pi^2} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} \frac{|p \circ U(z, w)|^2}{(|z|^2 + |w|^2)^N} d(z, w) = \\ &= \frac{N+1}{2\pi^2} \int_{(z,w):|z|^2+|w|^2=1} |p\left(U \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right)|^2 d(z, w) = \\ &= \frac{N+1}{2\pi^2} \int_{(\alpha,\beta):|\alpha|^2+|\beta|^2=1} |p(\alpha, \beta)|^2 d(\alpha, \beta) = \|p\|^2 \end{aligned}$$

De donde podemos concluir $\|p \circ U\| = \|p\|$.

A la hora de calcular las integrales anteriores, para la tercera igualdad se define la isometría $\bar{\varphi}$ de $\mathbb{S}(\mathbb{C}^2)$ y aplicamos el Teorema de Cambio de Variable, teniendo en cuenta que el jacobiano de una isometría siempre vale 1.

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}: \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) &\longrightarrow \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) \\ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} &\longmapsto U \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

1.2. Condicionamiento de un polinomio

Una vez conocida la norma que vamos a utilizar y sus propiedades más interesantes, apoyándonos en [5], [1] y [8] y siguiendo la notación de la sección anterior, se propone la definición de condicionamiento de un polinomio, así como fórmulas para su cálculo y propiedades.

Para comenzar, se define $\zeta = (a, b) \in \mathbb{C}^2$ raíz del polinomio homogéneo p (definido en la sección anterior), es decir, ζ verifica $p(a, b) = 0$. Al ser p un polinomio homogéneo cualquier múltiplo no nulo de ζ también es raíz de este. Por tanto, podemos considerar las raíces de p en el espacio proyectivo de líneas que pasan por el origen de \mathbb{C}^2 , esto es, el espacio proyectivo complejo que denotamos como $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$. Lo primero es definir la variedad solución.

Definición 1.4 *Sea \mathcal{H}_N el conjunto de polinomios homogéneos de grado exactamente N , $p \in \mathcal{H}_N$ y $\zeta \in \mathbb{C}^2$. Se define la **variedad solución** como*

$$V = \{(p, \zeta) \in \mathcal{H}_N \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) : p(\zeta) = 0\}$$

y tiene dos proyecciones, $\pi_1 : V \longrightarrow \mathcal{H}_N$ sobre la primera componente y $\pi_2 : V \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ sobre la segunda componente.

A continuación, se realiza una pequeña introducción al concepto de condicionamiento de un polinomio para ir avanzando hasta la definición de número de condición que se utilizará para su cálculo. Para esto, nos apoyamos en [5], donde se distinguen dos tipos de condicionamiento: el relativo y el absoluto.

Lo primero es definir dos espacios vectoriales de dimensiones finitas que denotamos por X e Y reales o complejos, y un subconjunto abierto D , $D \subseteq X$. Se define una aplicación σ entre ambos,

$$\sigma: D \longrightarrow Y$$

Con todo ello, se puede definir el condicionamiento relativo y el condicionamiento absoluto como sigue.

Definición 1.5 Se define el **número de condición relativo** de σ en un punto $x \in D$ distinto de cero que satisfaga $\sigma(x) \neq 0$ como

$$\text{cond}^\sigma(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\text{RelError}(x) \leq \delta} \frac{\text{RelError}(\sigma(x))}{\text{RelError}(x)}.$$

$\text{RelError}(x)$ denota el error relativo de x , definido por $\text{RelError}(x) = \frac{\|\bar{x} - x\|}{\|x\|}$ con $\bar{x} \in X$. Análogamente para el caso de $\text{RelError}(\sigma(x))$, donde tiene la forma $\text{RelError}(\sigma(x)) = \frac{\|\sigma(\bar{x}) - \sigma(x)\|}{\|\sigma(x)\|}$.

Definición 1.6 De igual manera, se define el **número de condición absoluto** de σ en x por

$$\text{acond}^\sigma(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\bar{x} - x\| \leq \delta} \frac{\|\sigma(\bar{x}) - \sigma(x)\|}{\|\bar{x} - x\|}$$

Entre ambas cantidades existe una relación que se demuestra de forma sencilla a partir de sus definiciones. Se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 1.1 Sean los números de condición relativo y absoluto anteriores, se verifica la siguiente igualdad

$$\text{cond}^\sigma(x) = \text{acond}^\sigma(x) \frac{\|x\|}{\|\sigma(x)\|}$$

Para ir finalizando con los condicionamientos relativo y absoluto, se da una última caracterización de estos en el caso que la aplicación σ sea diferenciable en el punto x .

Proposición 1.2 Sea $\sigma : D \rightarrow Y$ una aplicación diferenciable en x , entonces se cumplen:

$$\begin{aligned} \text{acond}^\sigma(x) &= \|D\sigma(x)\| \\ \text{cond}^\sigma(x) &= \text{acond}^\sigma(x) \frac{\|x\|}{\|\sigma(x)\|} \end{aligned}$$

Ahora, conocido un cierto polinomio $p \in \mathcal{H}_N$ y una raíz ζ de este, podemos obtener una fórmula para el cálculo del número de condición del polinomio p dado $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Antes de comenzar, se necesita incluir el significado de la notación \dot{p} y $\dot{\zeta}$ que se va a utilizar.

Lema 1.1 Sea una curva C^∞ , $\mathbb{R} \rightarrow U$, $t \mapsto f(t) = \sum_{i=0}^N a_i(t)X^i$, tal que $f(0) = f_0$ y U un entorno abierto de f_0 , escribimos

$$\dot{f} = \frac{df}{dt}(0) = \sum_{i=0}^N \frac{da_i}{dt}(0)X^i = \sum_{i=0}^N \dot{a}_i X^i$$

Sean $p_t(z, w) = p(z, w) + t\dot{p}(z, w)$ el polinomio obtenido al perturbar los coeficientes de p y $\zeta_t = (a_t, b_t)$ una raíz del polinomio, entonces $p_t(\zeta_t) = 0$ y en consecuencia $\frac{\partial}{\partial t}p_t(\zeta_t) = 0$. Como $p_t(\zeta_t) = p(\zeta_t) + t\dot{p}(\zeta_t)$ y $p_t(\zeta_t) = 0$, se tiene $p(\zeta_t) = -t\dot{p}(\zeta_t)$. Derivando respecto de t y tomando $t = 0$ en esta última igualdad, se obtiene:

$$Dp(\zeta)\dot{\zeta} = -\dot{p}(\zeta)$$

Teniendo en cuenta que $\zeta^*\dot{\zeta} = \langle \dot{\zeta}, \zeta \rangle = 0$, donde ζ^* denota el adjunto de ζ , se verifica:

$$\begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix} \dot{\zeta} = \begin{pmatrix} -\dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\zeta} = - \begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya podemos dar una primera definición de condicionamiento de un polinomio:

Definición 1.7 Sean $p \in \mathcal{H}_N$ un polinomio homogéneo de grado N y $\zeta \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ una raíz proyectiva compleja de p . Fijada una norma en \mathcal{H}_N , se define el **condicionamiento** de p en ζ como

$$\text{cond}_p \zeta = \sup_{\|\dot{p}\|=\|p\|} \|\dot{\zeta}\| = \sup_{\|\dot{p}\|=\|p\|} \left\| \begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

o $+\infty$ si la matriz $\begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix}$ no es invertible.

Entonces, conocidos p y ζ podemos obtener $\dot{\zeta}$ y así el condicionamiento del polinomio p .

Seguidamente, veamos la definición que propusieron Shub y Smale en [8] para el número de condición del polinomio p , apoyándonos en la definición 1.7 anterior,

Definición 1.8 En las condiciones de la definición 1.7, definimos el **número de condición** (normalizado) de p en ζ como:

$$\mu_{\text{norm}}(p, \zeta) = N^{1/2} \text{cond}_p \zeta$$

Proposición 1.3 Dada $\zeta = (a, b) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ una raíz del polinomio $p \in \mathcal{H}_N$ dotado de la norma de Bombieri-Weyl, se calcula el número de condición como:

$$\mu_{\text{norm}}(p, \zeta) = N^{1/2} \|(Dp(\zeta)|_{\zeta^\perp})^{-1}\| \|p\| \|\zeta\|^{N-1},$$

si la matriz $Dp(\zeta)|_{\zeta^\perp}$ no es invertible, $\mu_{\text{norm}}(p, \zeta)$ toma el valor $+\infty$.

La matriz $Dp(\zeta)|_{\zeta^\perp}$ es la restricción al complemento ortogonal en \mathbb{C}^2 de la derivada $Dp(\zeta) = \left(\frac{\partial}{\partial z}p, \frac{\partial}{\partial w}p\right)_{(z,w)=\zeta}$.

Dem: Primero se estudia el caso trivial, cuando la matriz $Dp(\zeta)|_{\zeta^\perp}$ no sea invertible, entonces por la definición 1.7 se tiene $\text{cond}_p \zeta = +\infty$ y se sigue por la definición 1.8 que $\mu_{\text{norm}}(p, \zeta) = +\infty$.

Para el caso no trivial, sean $p(z, w) = \sum_{i=0}^N a_i z^i w^{N-i}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$ y $\zeta = (a, b)$ una raíz del polinomio. Se estudia el caso en que la raíz del polinomio sea $\zeta = (1, 0)$, en este caso $p(z, w) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^k w^{N-k}$.

Se calcula el número de condición del polinomio para dicha raíz utilizando la definición 1.8, a continuación se detalla el proceso seguido:

$$\begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Na_N & a_{N-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{N-1}} \begin{pmatrix} 0 & a_{N-1} \\ 1 & -Na_N \end{pmatrix}$$

Se obtiene su condicionamiento (definición 1.7):

$$\begin{aligned} \text{cond}_p \zeta &= \sup_{\|\dot{p}\|=\|p\|} \left\| \begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \sup_{b_0, \dots, b_N: \sum_{k=0}^N |b_k|^2 \binom{N}{k}^{-1} = \|p\|^2} \left\| \frac{1}{a_{N-1}} \begin{pmatrix} 0 & a_{N-1} \\ 1 & -Na_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_N \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{a_{N-1}} \|p\| \end{aligned}$$

Reemplazando su valor en la definición 1.8:

$$\mu_{\text{norm}}(p, \zeta) = \sqrt{N} \frac{1}{|a_{N-1}|} \|p\| \quad (1.1)$$

Ahora, utilizando la proposición se evalúa μ_{norm} de p en ζ , para lo cual se conocen la norma de ζ , que vale 1, y $Dp(\zeta) = (Na_N, a_{N-1})$. Para conocer $(Dp(\zeta)|_{\zeta^\perp})^{-1}$ se define la aplicación:

$$\begin{aligned} (Na_N, a_{N-1})|_{(1,0)^\perp}: \quad (1, 0)^\perp &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha(0, 1) &\longmapsto \alpha a_{N-1} \end{aligned}$$

por lo tanto $\|(Dp(\zeta)|_{\zeta^\perp})^{-1}\| = |a_{N-1}|^{-1}$, con todo ello:

$$\mu_{\text{norm}}(p, \zeta) = N^{1/2} |a_{N-1}|^{-1} \|p\|$$

Se obtiene el mismo valor que en 1.1.

Para finalizar la demostración falta probar el caso general. Sean p el polinomio definido al comienzo de la demostración con ζ raíz verificando $\|\zeta\| = 1$, y $U \in U(2)$ una matriz unitaria tal que $U\zeta = (1, 0)$. Antes de empezar se necesita demostrar la siguiente igualdad:

$$\mu_{\text{norm}}(p, \zeta) = \mu_{\text{norm}}(p \circ U^*, U\zeta) \quad (1.2)$$

Desarrollamos el lado izquierdo de la igualdad:

$$\mu_{norm}(p, \zeta) = \sqrt{N} \sup_{\|\dot{p}\|=\|p\|} \left\| \begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{N} \sup_{\|\dot{p}\|=\|p\|} A(\dot{p})$$

Dado \dot{p} cualquiera, consideramos el polinomio $\dot{q} = \dot{p} \circ U^*$. Del corolario 1.1 se deducen las igualdades siguientes:

$$\|\dot{q}\| = \|\dot{p} \circ U^*\| = \|\dot{p}\|$$

$$\|q\| = \|p \circ U^*\| = \|p\|$$

Ahora, podemos desarrollar el lado derecho,

$$\mu_{norm}(p \circ U^*, U\zeta) = \sqrt{N} \sup_{\|\dot{q}\|=\|q\|} \left\| \begin{pmatrix} Dq(U\zeta) \\ (U\zeta)^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{q}(U\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{N} \sup_{\|\dot{q}\|=\|q\|} B(\dot{q})$$

Así, para probar 1.2 basta con ver $A(\dot{p}) = B(\dot{q})$.

$$\begin{aligned} B(\dot{q}) &= \left\| \begin{pmatrix} Dq(U\zeta) \\ (U\zeta)^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{q}(U\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} D(p \circ U^*)(U\zeta) \\ (U\zeta)^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\dot{p} \circ U^*)(U\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} Dp(\zeta)D(U^*(U\zeta)) \\ (U\zeta)^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p}(U^*(U\zeta)) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} Dp(\zeta)U^* \\ \zeta^*U^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix} U^* \right\|^{-1} \left\| \begin{pmatrix} \dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \left\| U \begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{p}(\zeta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = A(\dot{p}) \end{aligned}$$

Podemos demostrar la proposición para el caso general,

$$\begin{aligned} \mu_{norm}(p, \zeta) &= \mu_{norm}(p \circ U^*, U\zeta) = \mu_{norm}(p \circ U^*, (1, 0)) = \\ &= \sqrt{N} \|(D(p \circ U^*)(1, 0)|_{(1,0)^\perp})\| \|p \circ U^*\| \|U\zeta\|^{N-1} = \\ &= \sqrt{N} \|(Dp(\zeta)|_{\zeta^\perp})^{-1}\| \|p\| \|\zeta\|^{N-1} \end{aligned}$$

□

Proposición 1.4 *En los casos en que no se precise ninguna raíz del polinomio p , el número de condición de p viene dado por:*

$$\mu(p) = \max_{\zeta \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2): p(\zeta)=0} \mu(p, \zeta)$$

Ahora, se puede extender la definición de número de condición al caso de polinomios univariados. Para ello, se define un polinomio f univariado con coeficientes complejos:

$$f(X) = \sum_{i=0}^N a_i X^i, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_N \neq 0$$

Proposición 1.5 *Sea f un polinomio univariado con coeficientes complejos y sea $x \in \mathbb{C}$ una raíz de f , entonces*

$$\mu(f, x) = \mu(p, (x, 1))$$

donde p es el polinomio homogeneizado de f , $p(x, y) = \sum_{i=0}^N a_i x^N y^{N-i}$. Cuando no se especifique ninguna raíz concreta de f , se toma el máximo:

$$\mu(f) = \max_{x \in \mathbb{C}: f(x)=0} \mu(f, x)$$

Esta última parte de la proposición se deduce a partir de la proposición 1.4.

Proposición 1.6 *Sean f un polinomio univariado con coeficientes complejos, $z \in \mathbb{C}$ una raíz del polinomio, y sean $a, b \in \mathbb{C}$ ambas no nulas, se tiene:*

$$\mu(af, bz) = \mu(f, z)$$

Teorema 1.2 *En casos sencillos, el número de condición de un polinomio f univariado con coeficientes complejos de grado N , dotado de la norma de Weyl, se puede calcular como*

$$\mu(f, x) = \frac{N^{\frac{1}{2}}(1 + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}{|f'(x)|} \|f\|$$

Dem: Sean f el polinomio univariado y p el polinomio homogeneizado de f , definidos como $f(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ y $p(x, y) = \sum_{i=0}^N a_i x^N y^{N-i}$ aplicando la proposición 1.5 se tiene la siguiente igualdad:

$$\mu(f, x) = \mu(p, (x, 1))$$

y con ayuda de la definición 1.3 de número de condición:

$$\mu(p, (x, 1)) = N^{1/2} \|(Dp(x, 1)|_{(x,1)^\perp})^{-1}\| \|p\| \|(x, 1)\|^{N-1} \quad (1.3)$$

Para calcular $\mu(f, x)$ basta con calcular 1.3, para ello solo hace falta conocer cuánto vale cada una de las normas que intervienen en tal igualdad.

Recordemos que $\|p\|$ denota la norma de Weyl del polinomio p , y de la definición 1.2 se deduce que $\|p\| = \|f\|$.

Aplicando la definición de norma euclídea se tiene:

$$\|(x, 1)\|^{N-1} = (\sqrt{|x|^2 + 1})^{N-1} = (|x|^2 + 1)^{\frac{N-1}{2}}$$

Reescribimos 1.3 con lo visto hasta ahora, y teniendo en cuenta que $\mu(f, x) = \mu(p, (x, 1))$:

$$\mu(f, x) = N^{1/2} \|(Dp(x, 1)|_{(x,1)^\perp})^{-1}\| \|f\| (|x|^2 + 1)^{\frac{N-1}{2}} \quad (1.4)$$

Nos falta hallar $\|(Dp(x, 1)|_{(x,1)^\perp})^{-1}\|$, para ello se empieza definiendo la aplicación restricción:

$$\begin{aligned} Dp(x, 1)|_{(x,1)^\perp} : (x, 1)^\perp &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \beta(1, -\bar{x}) &\longmapsto \beta Dp(x, 1)(1, -\bar{x}) \end{aligned}$$

Entonces $Dp(x, 1)|_{(x,1)^\perp}(\beta(1, -\bar{x})) = \beta Dp(x, 1)(1, -\bar{x})$, utilizando la definición de derivada de una función en un punto se calcula $Dp(x, 1)(1, -\bar{x})$:

$$\begin{aligned} Dp(x, 1)(1, -\bar{x}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p(x+t, 1-t\bar{x}) - p(x, 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-t\bar{x})^N f\left(\frac{x+t}{1-t\bar{x}}\right) - f(x)}{t} = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \left((1-t\bar{x})^N f\left(\frac{x+t}{1-t\bar{x}}\right) \right) = f'(x)(1+|x|^2) - N\bar{x}f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Dp(x, 1)|_{(x,1)^\perp}(1, -\bar{x}) = f'(x)(1+|x|^2) - N\bar{x}f(x)$.

Ahora tomando normas,

$$\|(Dp(x, 1)|_{(x,1)^\perp})^{-1}\| = \left\| \frac{(1, -\bar{x})}{f'(x)(1+|x|^2) - N\bar{x}f(x)} \right\| = \frac{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}{|f'(x)(1+|x|^2) - N\bar{x}f(x)|}$$

Sustituyendo en 1.4:

$$\mu(f, x) = N^{\frac{1}{2}} \frac{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}{|f'(x)(1+|x|^2) - N\bar{x}f(x)|} \|f\| (1+|x|^2)^{\frac{N-1}{2}}$$

Como $x \in \mathbb{C}$ verifica $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$,

$$\mu(f, x) = \frac{N^{\frac{1}{2}} \|f\| (1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}{|f'(x)|}$$

□

Para finalizar el capítulo se recogen algunas propiedades interesantes sobre el número de condición, acompañadas de una breve demostración.

Proposición 1.7 Sean $p \in \mathcal{H}_N$ y $z \in \mathbb{C}^2$, se cumplen:

1. $\mu(\lambda p, z) = \mu(p, z)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$
2. $\mu(p, \lambda z) = \mu(p, z)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$
3. $\mu(p \circ U^{-1}, Uz) = \mu(p, z)$ para todo $U \in U(2)$
4. $\mu(p, z) \geq 1$ (Si z es una raíz doble de p , $\mu(p, z) = \infty$)

Dem:

1. Aplicamos la definición 1.8 de número de condición a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}\mu(\lambda p, z) &= \sqrt{N} \text{cond}_{\lambda p} z \\ \mu(p, z) &= \sqrt{N} \text{cond}_p z\end{aligned}$$

Basta con ver que $\text{cond}_{\lambda p} z = \text{cond}_p z$, lo cuál se deduce de la definición 1.7 de condicionamiento de un polinomio.

2. Se procede de forma similar al caso anterior, se cumple que $\text{cond}_p \lambda z = \text{cond}_p z$ y sustituyendo en la definición de número de condición se cumple (2).
3. Se encuentra su prueba en la demostración detallada de la proposición 1.3.
4. Sea $p = \sum_{i=0}^N a_i z^i w^{N-i} \in \mathcal{H}_N$, sabemos por (3) que $\mu(p, z) = \mu(p \circ U^{-1}, Uz)$, elegimos $U \in U(2)$ tal que $Uz = (1, 0)$, conocemos el valor de μ en la raíz $(1, 0)$ por la proposición 1.3:

$$\begin{aligned}\mu(p, z) &= \mu(p \circ U^{-1}, Uz) = \sqrt{N} \frac{1}{|a_{N-1}|} \|p\| \\ (\mu(p, z))^2 &= N \frac{1}{|a_{N-1}|^2} \|p\|^2 = N \frac{1}{|a_{N-1}|^2} \sum_{i=0}^N \binom{N}{i}^{-1} |a_i|^2 = \\ &= N \frac{1}{|a_{N-1}|^2} \left(\binom{N}{N-1}^{-1} |a_{N-1}|^2 + \sum_{i=0, i \neq N-1}^N \binom{N}{i}^{-1} |a_i|^2 \right) = \\ &= 1 + N \frac{1}{|a_{N-1}|^2} \sum_{i=0, i \neq N-1}^N \binom{N}{i}^{-1} |a_i|^2\end{aligned}$$

En consecuencia, $\mu(p, z) \geq 1$.

1.3. Cálculo analítico del número condición

Para esta sección se proponen varios polinomios distintos y se calcula su número de condición, y en algún caso su condicionamiento, utilizando la teoría demostrada en las secciones precedentes. Para cada caso se utilizará una forma de calcularlo diferente según el polinomio que tengamos.

Ejemplo 1.2 *Este ejemplo muestra dos formas para obtener $\dot{\zeta}$, la primera será mediante un cálculo directo sin utilizar la definición y en la segunda utilizaremos la fórmula que se ha obtenido en este capítulo.*

Sea $p(w, z) = \frac{1}{4}z^2 - w^2$ un polinomio homogéneo de dos variables.

Buscamos $\zeta = (a, b)$ raíz de p , tomamos $a = 1$ y hallamos b ,

$$p(1, b) = 0 \iff \frac{z^2}{4} - 1 = 0 \iff z^2 = 4 \iff z = \pm 2$$

Elegimos $\zeta = (1, 2)$, que por construcción es raíz de p .

Ahora necesitamos $\zeta_t = (w_t, z_t)$, para ello, sea $\dot{p} = zw$, entonces

$$p_t(\zeta_t) = 0 \iff \frac{z_t^2}{4} - w_t^2 + tz_t w_t = 0$$

Fijamos $w_t = 1$ como antes, y sustituimos:

$$\frac{z_t^2}{4} - 1 + tz_t = 0 \iff z_t = -2t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} z_t = \left(-2 + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \right) \Big|_{t=0} = -2 \Rightarrow \zeta_t = (1, -2)$$

Calculamos $\dot{\zeta}$:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \prod_{\zeta^\perp} (1, -2) = (1, -2) - \frac{\langle (1, -2), \zeta \rangle}{\|\zeta\|^2} \zeta = \\ &= (1, -2) - \frac{-3}{5} (1, 2) = \left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5} \right) \end{aligned}$$

Y por último, utilizamos la fórmula que se ha desarrollado al comienzo de la sección para el cálculo de $\dot{\zeta}$ que es un proceso más rápido,

$$\dot{\zeta} = \begin{pmatrix} -2w_t & \frac{1}{2}z_t \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$$

Una vez se ha calculado $\dot{\zeta}$, independientemente del proceso utilizado, se calcula su norma:

$$\|\dot{\zeta}\| = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \approx 1,7888$$

Finalmente, utilizando la definición 1.7, el condicionamiento del polinomio $p(w, z) = \frac{1}{4}z^2 - w^2$ en la raíz $\zeta = (1, 2)$ vale 1,7888.

Ejemplo 1.3 Sea el polinomio de segundo grado definido por $p(w, z) = w^2$ evaluado en el punto $\zeta = (w, z) = (1, 0)$.

$$\begin{pmatrix} Dp(\zeta) \\ \zeta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De forma trivial, se tiene que el determinante de la matriz es nulo, por lo tanto, la matriz no es invertible y utilizando las definiciones 1.3 y 1.7 el condicionamiento del polinomio p vale ∞ y en consecuencia su número de condición también.

Ejemplo 1.4 Se definen el polinomio $f(z) = z^n - 1$ y su raíz $\zeta = 1$, utilizando el teorema 1.2 se tiene que el número de condición de f en $z = 1$ es:

$$\mu_{norm}(f, \zeta) = n^{1/2} \frac{\|z^n - 1\| 2^{\frac{n}{2}-1}}{n} \quad (1.5)$$

Calculamos $\|z^n - 1\|$ utilizando la definición de la norma de Weyl (definición 1.1):

$$\begin{aligned} \|z^n - 1\|^2 &= \binom{n}{0}^{-1} |-1|^2 + \binom{n}{n}^{-1} |1|^2 = 2 \\ \|z^n - 1\| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Se sustituye el valor obtenido para $\|z^n - 1\|$ en 1.5:

$$\mu_{norm}(f, \zeta) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo 1.5 Se define el polinomio homogéneo de dos variables p como sigue, para cada $n = 1, 2, \dots$

$$p(z, w) = z^n - a^n w^n, \quad a > 0$$

Tomamos $\zeta = (a, 1)$ raíz de p y se calcula su número de condición utilizando la proposición 1.3. Se calculan los valores que intervienen en la fórmula y posteriormente se sustituyen.

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= \binom{n}{n}^{-1} |1|^2 + \binom{n}{0}^{-1} |a^n|^2 = 1 + a^{2n} \\ \|p\| &= (1 + a^{2n})^{1/2} \\ \|\zeta\|^{n-1} &= (1 + a^2)^{\frac{n-1}{2}} \\ Dp(\zeta) &= (nz^{n-1}, -na^n w^{n-1})_{(z,w)=(a,1)} = (na^{n-1}, -na^n) = na^n(a^{-1}, -1) \end{aligned}$$

Para conocer $Dp(a, 1)|_{(a, 1)^\perp}$ se define la aplicación:

$$\begin{aligned} na^n(a^{-1}, -1)|_{(a, 1)^\perp}: \quad & (a, 1)^\perp \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \beta(1, -\bar{a}) \longmapsto \beta na^n(a^{-1} + \bar{a}) \end{aligned}$$

Entonces, $Dp(a, 1)|_{(a, 1)^\perp} = na^n(a^{-1} + \bar{a}) = na^n(a^{-1} + a) = na^{n-1}(1 + a^2)$ y se sigue de forma sencilla el cálculo de la norma de su inversa,

$$\|(Dp(\zeta)|_{\zeta^\perp})^{-1}\| = \frac{(1 + a^2)^{1/2}}{na^{n-1}(1 + a^2)} = \frac{1}{a^{n-1}(1 + a^2)^{1/2}}$$

Con todo ello, ya tenemos el número de condición del polinomio:

$$\begin{aligned} \mu_{norm}(p, \zeta) &= n^{1/2} \frac{1}{na^{n-1}(1 + a^2)^{1/2}} (1 + a^{2n})^{1/2} (1 + a^2)^{\frac{n-1}{2}} = \\ &= \frac{n^{1/2}(1 + a^{2n})^{1/2}(1 + a^2)^{\frac{n-2}{2}}}{na^{n-1}} \end{aligned}$$

Este ejemplo se ha tomado de [9], donde Shub y Smale obtuvieron un resultado ligeramente distinto para el número de condición de este polinomio,

$$\mu(p, \zeta) = \frac{n^{1/2}(1 + a^2)^{(n-2)/2}(1 + a^{2n})^{1/2}}{(n-1)a^{n-1}}$$

este resultado tiene una errata, en el denominador aparece “n-1” en lugar de “n”.

Capítulo 2

Implementación computacional

2.1. El Polinomio de Wilkinson

Para el desarrollo de esta sección tomamos como referencia [12]. Además de la parte teórica que abarca la sección, se implementará un programa en MATLAB para trabajar con dicho polinomio. Lo primero es presentar la definición de Polinomio de Wilkinson, el cual debe su nombre a James Hardy Wilkinson (1919-1986), quién utilizó este polinomio en el estudio del cálculo de raíces.

Definición 2.1 *El Polinomio de Wilkinson está definido por:*

$$w(x) = \prod_{i=1}^{20} (x - i)$$

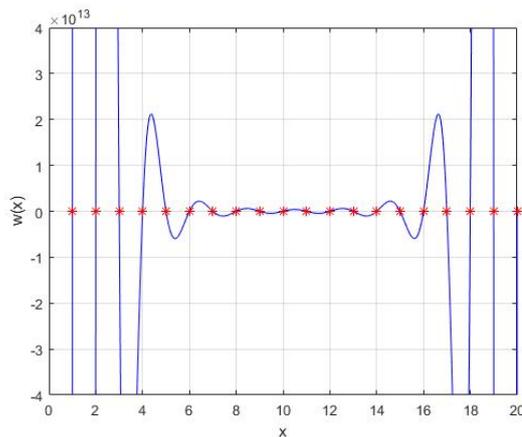


Figura 2.1: Polinomio de Wilkinson y sus raíces.

En la figura 2.1 anterior se puede observar la gráfica del polinomio de Wilkinson, así como sus 20 raíces representadas en color rojo, con asteriscos. Esta gráfica se ha generado utilizando MATLAB, al igual que para obtener el polinomio expandido, que se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 w(x) = & x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - 1256850x^{17} + 53327946x^{16} - \\
 & - 1672280820x^{15} + 40171771630x^{14} - 756111184500x^{13} + \\
 & + 11310276995381x^{12} - 135585182899530x^{11} + \\
 & + 1307535010540395x^{10} - 10142299865511450x^9 + \\
 & + 63030812099294896x^8 - 311333643161390640x^7 + \\
 & + 1206647803780373360x^6 - 3599979517947607200x^5 + \\
 & + 8037811822645051776x^4 - 12870931245150988800x^3 + \\
 & + 13803759753640704000x^2 - 8752948036761600000x + \\
 & + 2432902008176640000.
 \end{aligned}$$

Este polinomio se empleó para estudiar los cambios que se producen en las raíces de los polinomios al perturbar sus coeficientes, es decir, en el estudio del condicionamiento.

A continuación, se estudia el condicionamiento del polinomio de Wilkinson para todas sus raíces. Para ello, se ha implementado en MATLAB un fichero tipo function (cuyo código se puede encontrar en la subsección siguiente) que devuelve en la salida el valor del condicionamiento, calculado según el teorema 1.2, para cada raíz que le proporcionemos en la entrada. Notar que los resultados obtenidos son aproximaciones de dicho valor, debido a la precisión que utiliza MATLAB.

z_0	1	2	3	4	5
$\mu(w, z_0)$	62179	4.5067e+09	2.0767e+13	1.3955e+16	2.5558e+18
z_0	6	7	8	9	10
$\mu(w, z_0)$	1.8352e+20	6.4356e+21	1.2674e+23	1.5386e+24	1.2270e+25
z_0	11	12	13	14	15
$\mu(w, z_0)$	6.7171e+25	2.6008e+26	7.2567e+26	1.4725e+27	2.1720e+27
z_0	16	17	18	19	20
$\mu(w, z_0)$	2.3023e+27	1.7072e+27	8.4008e+26	2.4632e+26	3.2559e+25

Tabla 2.1: Número de condición para cada raíz, z_0 , de $w(x)$.

Como se puede observar en la tabla 2.1, el condicionamiento del polinomio de Wilkinson va aumentando según aumenta el valor de sus raíces, hasta obtener valores del orden de 10^{27} . Para todos los casos el valor obtenido para $\mu(w, z_0)$ es muy grande computacionalmente, por lo tanto se puede afirmar que al realizar un pequeño cambio en uno de sus coeficientes se producirá un gran cambio en sus raíces.

Para ilustrar este resultado, vamos a perturbar ligeramente el coeficiente de x^{18} como en [6], y ver que ocurre con las raíces del polinomio perturbado. Denotemos por $w_p(x)$ al polinomio perturbado, que tiene la forma $w_p(x) = w(x) + 0,001x^{18}$ cuyos coeficientes son los mismos que los del polinomio original $w(x)$, excepto el coeficiente de x^{18} que en este caso va a ser 20615,001. De la misma forma que en el caso anterior, se utiliza MATLAB para calcular sus raíces y representarlas en una gráfica, en este caso se han implementado las instrucciones necesarias en un fichero tipo script que incluimos al igual que para el polinomio sin perturbar en la subsección que se encuentra al finalizar esta sección.

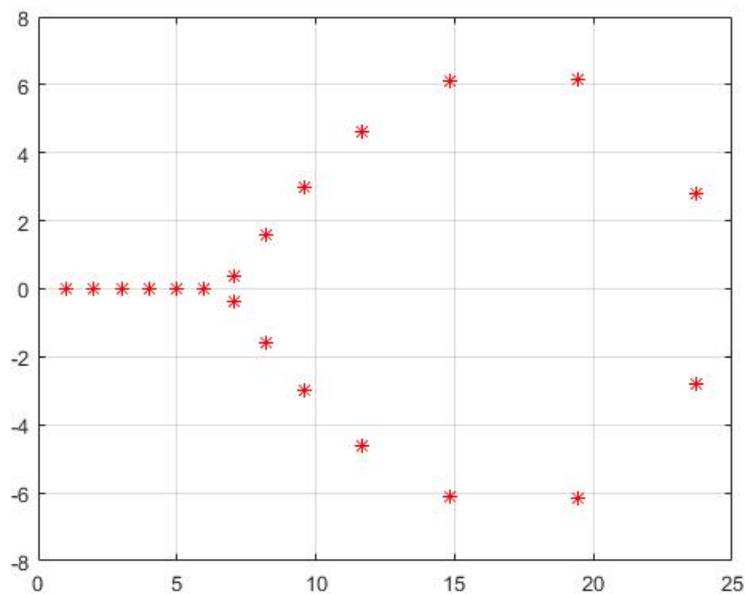


Figura 2.2: Raíces de $w_p(x)$.

En esta figura se representan todas las raíces del polinomio $w_p(x)$ perturbado en color rojo marcadas con asteriscos, que trivialmente se sabe que son 20, donde el eje X es el eje real e Y corresponde al eje imaginario. Además, también se observa en la gráfica que a partir de la sexta raíz, las 14 raíces restantes las podemos agrupar en 7 pares de raíces conjugadas.

En la siguiente tabla se recogen las raíces de $w(x)$ y $w_p(x)$. En el caso de $w_p(x)$, donde se obtienen valores con decimales, se aproximan las raíces a 5 decimales.

Raíces de $w(x)$	Raíces de $w_p(x)$
1	1
2	1.99999
3	3
4	3.99999
5	5.00012
6	5.9906
7	7.08339 - 0.38827i
8	7.08339 + 0.38827i
9	8.18209 - 1.56759i
10	8.18209 + 1.56759i
11	9.60113 - 2.99430i
12	9.60113 + 2.99430i
13	11.65605 - 4.62318i
14	11.65605 + 4.62318i
15	14.83438 - 6.09208i
16	14.83438 + 6.09208i
17	19.42358 - 6.14475i
18	19.42358 + 6.14475i
19	23.72396 - 2.82030i
20	23.72396 + 2.82030i

Tabla 2.2: Raíces de $w(x)$ y $w_p(x) = w(x) + 0,01x^{18}$.

Se observa en la tabla 2.2 que a partir de la séptima raíz se empiezan a producir cambios significativos en las raíces, apareciendo raíces con parte imaginaria no nula, a diferencia de las raíces del polinomio de Wilkinson sin perturbar en el que todas sus raíces son reales.

Como recapitulación de lo visto durante esta sección, se ha probado utilizando el polinomio de Wilkinson que pequeños cambios en los coeficientes de un polinomio no implica necesariamente que se produzcan pequeños cambios en sus raíces, y el número de condición nos sirve para conocer la sensibilidad de las raíces ante los cambios que se produzcan en los coeficientes del polinomio. En resumen, el problema de hallar los ceros del polinomio de Wilkinson está mal condicionado y el mal condicionamiento de un problema es un concepto que sólo depende del polinomio, no del método que se vaya a utilizar para su resolución.

2.1.1. Código MATLAB

Para la obtención de las raíces del polinomio de Wilkinon, así como su gráfica, ha sido necesario implementar en MATLAB un fichero (tipo function) declarando una función que denotamos por *wilkinson*, con las sentencias de comandos necesarias que definen el polinomio de Wilkinson. También ha sido necesario calcular la norma de Weyl, ya que no se ha encontrado ninguna función propia del programa para su cálculo. En el código que se muestra a continuación se han incluido los comentarios sobre el significado de las variables tanto de entrada como salida, así como lo que se ha ido calculando en cada paso.

```

1 function [w, wexp, mu]=wilkinson(x, z0)
2 % OBJETIVO: calcular el condicionamiento de una determinada raiz
3 % del Polinomio de Wilkinson
4 % ENTRADA:
5 %   x: variable simbolica
6 %   z0: raiz del polinomio de Wilkinson (1,2,3,...20)
7 % SALIDA:
8 %   w: Polinomio de Wilkinson
9 %   wexp: Polinomio de Wilkinson expandido
10 %   mu: condicionamiento
11
12 i=20;
13 w=prod(x-(1:i)); % Polinomio de Wilkinson
14
15 % Grafica de w(x)
16 fplot(w, 'b')
17 grid on
18 axis([0 20 -4.e13 4.e13])
19 xlabel('x'), ylabel('w(x)')
20 hold on
21 % Grafica de las raices de w(x)
22 coefw=fliplr(coeffs(w));
23 coef=coeffs(w);
24 rw=roots(coefw);
25 plot(rw, zeros(20,1), 'r*')
26 hold off
27
28 % Polinomio expandido:
29 wexp=expand(w);
30
31 % Norma de Weyl (def. 1.1.):
32 norm_weyl=0;
33 N=20; % Grado polinomio
34 for i=1:21
35     norm_weyl= norm_weyl + ((factorial(i-1)*factorial(N-i+1))/
36     factorial(N))*abs(coef(i))^2;
37     i=i+1;

```

```

37 end
38 norm_weyl=sqrt(norm_weyl);
39
40 % Condicionamiento (trm. 1.2.):
41 der1 = diff(w,x);
42 derz=subs(der1,z0); % Derivada en el punto
43 mu = sqrt(N)*((1 + (abs(z0))^2)^((N-2)/2)*norm_weyl)/(abs(derz));
44 mu = eval(mu);

```

El siguiente código, como podemos ver en los comentarios, es un fichero tipo script conteniendo el código para el cálculo de las raíces del polinomio perturbado y la posterior representación gráfica de estas.

```

1 % Fichero tipo script para calcular las raices del Polinomio de
2 % Wilkinson polinomio perturbado
3
4 i=20;
5 syms x; % Se declara la variable simbolica
6
7 wp=prod(x-(1:i))+0.001*x^18; % Polinomio de Wilkinson perturbado
8 % Raices del polinomio
9 coefw=fliplr(coeffs(wp));
10 rw=roots(coefw);
11
12 % Grafica de las raices:
13 plot(rw,'r*')
14 grid on

```

2.2. Polinomios bien condicionados

Apoyándonos en [3] y [4] en esta sección se presenta una sucesión de polinomios con un número de condición óptimo, que se ha descubierto recientemente, y posteriormente se utiliza el motor de cálculo simbólico Maxima para la obtención de dichos polinomios y su número de condición. Previamente, se introducen algunos resultados que nos serán de utilidad para ver como se ha llegado a la obtención de tal secuencia de polinomios.

En el Capítulo 1 se planteó la definición de número de condición (normalizado) de un polinomio propuesta por Shub y Smale (ver 1.8), quienes probaron que, con una probabilidad de al menos $1/2$, si se seleccionan unos determinados polinomios en la esfera unidad del conjunto \mathcal{H}_N , su número de condición valdrá a lo sumo N . Shub y Smale también mencionan que se puede hallar un polinomio de grado N cuyo número de condición sea menor o igual que $N^{3/4}$ con probabilidad positiva. La existencia de polinomios bien condicionados da lugar, en 1993, a un problema más complejo de resolver: hallar tales polinomios.

Problema 2.1 (*Problema principal en [9]*) *Encontrar explícitamente una familia de polinomios de grado N cuyo número de condición sea como máximo N .*

Este problema se propuso con la idea de hallar un polinomio que se pudiese utilizar en el diseño de algoritmos que empleen métodos de homotopía para el cálculo de raíces de polinomios, esta es la pregunta que se presenta en el Problema 17 de Smale, en el caso de una dimensión.

Problema 17 de Smale. *Can a zero of n complex polynomial equations in n unknowns be found approximately, on the average, in polynomial time with a uniform algorithm?*

En español, *¿existirá un algoritmo para calcular los ceros aproximados de sistemas de ecuaciones polinomiales en tiempo polinomial en promedio?*

El Problema 17 de Smale fue finalmente resuelto, sin embargo no se encontró la solución al problema 2.1, el cual al final ha sido resuelto en [4], donde también se ha demostrado la existencia de una cota inferior para el número de condición, que previamente no se había estudiado. Los matemáticos Luis Miguel Pardo y Carlos Beltrán, han encontrado una solución para el Problema 17 de Smale (ver [2]).

Lema 2.1 *Existe una constante universal C tal que $\mu_{norm}(P) \geq C\sqrt{N}$ para cada polinomio P de grado N .*

La solución que se propone en [4] para el problema 2.1 describe un algoritmo que genere la secuencia de polinomios con un número de condición a lo sumo N , el siguiente teorema recoge esta solución.

Teorema 2.1 *Para todo $N \geq 1$, sean M, r_1, \dots, r_M un conjunto admisible de números enteros. Se definen las alturas paralelas*

$$h_j = 1 - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{j-1} r_k - \frac{r_j}{N}, \quad H_j = h_j - \frac{r_j}{N}$$

para $1 \leq j \leq M - 1$, y sea $r_j = 6s_j + rem_j$ con $rem_j \in \{0, \dots, 5\}$ para $2 \leq j \leq M$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que los polinomios $P_N(z) =$

$P_N^{(1)}(z)P_N^{(2)}(z)P_N^{(3)}(z)P_N^{(4)}(z)$ con

$$\begin{aligned} P_N^{(1)}(z) &= (z^{4s_M+rem_M} - 1)(z^{r_1} - \rho(h_1)^{r_1})(z^{r_1} - 1/\rho(h_1)^{r_1}) \\ P_N^{(2)}(z) &= (z^{s_2} - \rho(H_1)^{r_1})(z^{s_2} - 1/\rho(H_1)^{s_2}) \\ P_N^{(3)}(z) &= \prod_{j=2}^{M-1} (z^{4s_j+rem_j} - \rho(h_j)^{4s_j+rem_j})(z^{4s_j+rem_j} - 1/\rho(h_j)^{4s_j+rem_j}) \\ P_N^{(4)}(z) &= \prod_{j=2}^{M-1} (z^{s_j+s_{j+1}} - \rho(H_j)^{s_j+s_{j+1}})(z^{s_j+s_{j+1}} - 1/\rho(H_j)^{s_j+s_{j+1}}) \end{aligned}$$

donde si $s_2 = 0$ o si $s_j + s_{j+1} = 0$ el término correspondiente se elimina del producto, y $\rho(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ satisfacen

$$\mu_{norm}(P_N) \leq C\sqrt{N}.$$

Esta solución para el problema 2.1 da lugar a una nueva cuestión:

Problema 2.2 *Encontrar una fórmula explícita para una familia de polinomios de grado N cuyo número de condición sea como máximo N . Además, hallar límites asintóticos para el mínimo número de condición de un polinomio de grado N , $N \rightarrow \infty$.*

La primera parte de este problema se ha demostrado en [3], donde se ha dado tal fórmula y una cota superior para el número de condición de dichos polinomios, con ayuda de los avances hechos anteriormente.

Teorema 2.2 *Sean $N = 4M^2$, con $M \geq 1$ un entero positivo. Se definen*

$$r_j = 4j, \quad h_j = 1 - \frac{4j^2}{N}$$

para $1 \leq j \leq M$ y se considera el polinomio de grado N dado por

$$P_N(z) = (z^{r_M} - 1) \prod_{j=1}^{M-1} (z^{r_j} - \rho(h_j)^{r_j})(z^{r_j} - \rho(h_j)^{-r_j}),$$

donde $\rho(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Entonces $\mu_{norm}(P_N) \leq \min(N, \frac{19}{2}\sqrt{N+1})$.

La demostración de este teorema se escapa de los contenidos expuestos en este trabajo, se puede encontrar detallada en [3].

Este teorema nos ocupa la parte principal de esta sección, lo primero va a ser construir un nuevo conjunto de puntos en la esfera que denotamos por \mathcal{P}_N para conocer las raíces del polinomio P_N descrito en el teorema. Bajo la acción de la proyección estereográfica, las raíces del polinomio P_N se corresponden con los puntos que forman el conjunto \mathcal{P}_N . Este conjunto es la unión de los puntos igualmente distribuidos en paralelos simétricos de la esfera respecto del plano xy . En la siguiente imagen vemos un ejemplo de este conjunto para el caso de $M=3$.

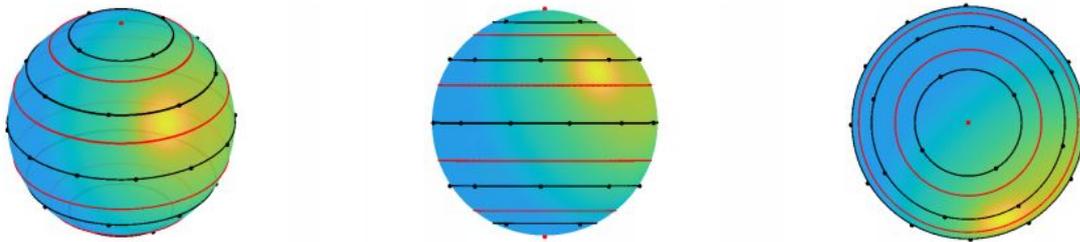


Figura 2.3: Construcción del conjunto \mathcal{P}_N para $N=36$ [3]

En esta figura se puede ver un ejemplo concreto de cómo se construye el conjunto de puntos \mathcal{P}_N cuando $M=3$, y entonces $N=36$. Se ve la esfera desde tres puntos de vista diferentes, de izquierda a derecha, en la primera una esfera ligeramente inclinada, a continuación desde el ecuador, y la última desde el polo norte. En rojo se marcan los paralelos que delimitan las bandas y los paralelos que se han mencionado previamente se representan en negro y en ellos se marcan los puntos que forman el conjunto, que se encuentran igualmente distribuidos.

Ahora que ya se conocen las raíces del polinomio P_N , con ayuda del sistema de álgebra computacional Maxima, se genera el código necesario para obtener el polinomio P_N que se describe en el teorema, para valores de M desde 1 hasta 10. Como $N = 4M^2$ es el grado del polinomio obtendremos polinomios de grados desde 4 hasta 400. Se puede encontrar el código utilizado en la sección 2.2.1.

Con esto, se pretende comprobar si para tales valores de M se cumple la cota que se ha demostrado en el teorema. Para ello, para cada uno de los polinomios P_N se calcula el número de condición de cada una de sus raíces, y se toma como número de condición del polinomio el más grande de estos valores, es decir el máximo. Para el cálculo del número de condición se utiliza la fórmula que se ha demostrado en el teorema 1.2 del primer capítulo. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos para algunos de estos polinomios.

M	μ	Cota	$\ P_N(z)\ $
1	$\sqrt{2}$	4	$\sqrt{2}$
2	2.932131510931117	16	2.154219069255515
3	4.318794729553002	36	2.80049233856129
4	5.709784885968175	64	3.383431895955425
5	7.114795325965084	$19\sqrt{101}/2$	3.921258554554249
6	8.527082868862218	$19\sqrt{145}/2$	4.42506152294712

Tabla 2.3: Número de condición, cota y norma de Weyl para los 6 primeros polinomios descritos en el teorema 2.2

Para los 4 primeros valores de M se observa que la cota coincide con el grado del polinomio y a partir del quinto valor la cota es $\frac{19}{2}\sqrt{N+1}$. Claramente, se cumple el teorema para todos ellos.

Se presenta a continuación una nueva tabla donde se pueden observar los seis primeros polinomios de la secuencia descrita en el teorema 2.2 factorizados, es decir, los polinomios para los que hemos calculado su número de condición, así como su grado que denotamos por N en la segunda columna.

M	N	$P_N(z)$
1	4	$z^4 - 1$
2	16	$(z^4 - 49)(z^4 - \frac{1}{49})(z^8 - 1)$
3	36	$(z^4 - 289)(z^4 - \frac{1}{289})(z^8 - \frac{2401}{16})(z^8 - \frac{16}{2401})(z^{12} - 1)$
4	64	$(z^4 - 961)(z^4 - \frac{1}{961})(z^8 - 2401)(z^8 - \frac{1}{2401})(z^{12} - \frac{148035889}{531441})\dots$ $\dots(z^{12} - \frac{531441}{148035889})(z^{16} - 1)$
5	100	$(z^4 - 2401)(z^4 - \frac{1}{2401})(z^8 - \frac{279841}{16})(z^8 - \frac{16}{279841})(z^{12} - \frac{4750104241}{531441})\dots$ $\dots(z^{12} - \frac{531441}{4750104241})(z^{16} - \frac{6975757441}{16777216})(z^{16} - \frac{16777216}{6975757441})(z^{20} - 1)$
6	144	$(z^4 - 5041)(z^4 - \frac{1}{5041})(z^8 - 83521)(z^8 - \frac{1}{83521})\dots$ $\dots(z^{12} - 117649)(z^{12} - \frac{1}{117649})(z^{16} - \frac{5764801}{256})(z^{16} - \frac{256}{5764801})\dots$ $\dots(z^{20} - \frac{52599132235830049}{95367431640625})(z^{20} - \frac{95367431640625}{52599132235830049})(z^{24} - 1)$

Tabla 2.4: Polinomios de la secuencia del teorema 2.2 con M desde 1 hasta 6.

Para los casos en los que M sea mayor o igual que 7 tanto para la norma de Weyl como para el número de condición de los polinomios correspondientes se

obtienen expresiones con raíces y fracciones con más de 200 dígitos que Maxima no puede convertir en un número real como en los casos vistos hasta ahora, por lo que se ha decidido que para estos casos se presentan tales polinomios y su cota para el número de condición para poder tener una idea sobre cuánto valdrá en las dos tablas siguientes.

M	$P_N(z)$
7	$\begin{aligned} & (z^4 - 9409) \left(z^4 - \frac{1}{9409}\right) \left(z^8 - \frac{4879681}{16}\right) \left(z^8 - \frac{16}{4879681}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{12} - \frac{496981290961}{531441}\right) \left(z^{12} - \frac{531441}{496981290961}\right) \left(z^{16} - \frac{4879681}{16777216}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{16} - \frac{531441}{16777216}\right) \left(z^{20} - \frac{4297625829703557649}{95367431640625}\right) \dots \\ & \left(z^{20} - \frac{95367431640625}{4297625829703557649}\right) \left(z^{24} - \frac{787662783788549761}{1156831381426176}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{24} - \frac{4297625829703557649}{787662783788549761}\right) \left(z^{28} - 1\right) \end{aligned}$
8	$\begin{aligned} & (z^4 - 16129) \left(z^4 - \frac{1}{16129}\right) \left(z^8 - 923521\right) \left(z^8 - \frac{1}{923521}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{12} - \frac{2839760855281}{531441}\right) \left(z^{12} - \frac{531441}{2839760855281}\right) \left(z^{16} - 5764801\right) \dots \\ & \dots \left(z^{16} - \frac{5764801}{1}\right) \left(z^{20} - \frac{134391637934412192049}{95367431640625}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{20} - \frac{95367431640625}{134391637934412192049}\right) \left(z^{24} - \frac{21914624432020321}{282429536481}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{24} - \frac{282429536481}{21914624432020321}\right) \left(z^{28} - \frac{368790120348678391253573281}{459986536544739960976801}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{28} - \frac{459986536544739960976801}{368790120348678391253573281}\right) \left(z^{32} - 1\right) \end{aligned}$
9	$\begin{aligned} & (z^4 - 25921) \left(z^4 - \frac{1}{25921}\right) \left(z^8 - \frac{38950081}{16}\right) \left(z^8 - \frac{16}{38950081}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{12} - 24137569\right) \left(z^{12} - \frac{1}{24137569}\right) \left(z^{16} - \frac{806460091894081}{16777216}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{16} - \frac{16777216}{806460091894081}\right) \left(z^{20} - \frac{2329194047563391944849}{95367431640625}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{20} - \frac{95367431640625}{2329194047563391944849}\right) \left(z^{24} - \frac{13841287201}{4096}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{24} - \frac{4096}{13841287201}\right) \left(z^{28} - \frac{55347525466347647961440563489}{459986536544739960976801}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{28} - \frac{459986536544739960976801}{55347525466347647961440563489}\right) \left(z^{32} - \frac{1104427674243920646305299201}{1208925819614629174706176}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{32} - \frac{1104427674243920646305299201}{1208925819614629174706176}\right) \left(z^{36} - 1\right) \end{aligned}$
10	$\begin{aligned} & (z^4 - 39601) \left(z^4 - \frac{1}{39601}\right) \left(z^8 - 5764801\right) \left(z^8 - \frac{1}{5764801}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{12} - \frac{48551226272641}{531441}\right) \left(z^{12} - \frac{531441}{48551226272641}\right) \left(z^{16} - \frac{78310985281}{256}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{16} - \frac{78310985281}{256}\right) \left(z^{20} - 282475249\right) \left(z^{20} - \frac{1}{282475249}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{24} - \frac{22563490300366186081}{282429536481}\right) \left(z^{24} - \frac{282429536481}{22563490300366186081}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{28} - \frac{3203887529980253057019236799601}{459986536544739960976801}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{28} - \frac{459986536544739960976801}{3203887529980253057019236799601}\right) \left(z^{32} - \frac{48661191875666868481}{281474976710656}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{32} - \frac{281474976710656}{48661191875666868481}\right) \left(z^{36} - \frac{22900517950310099316516366499712153041}{22528399544939174411840147874772641}\right) \dots \\ & \dots \left(z^{36} - \frac{22528399544939174411840147874772641}{22900517950310099316516366499712153041}\right) \left(z^{40} - 1\right) \end{aligned}$

Tabla 2.5: Polinomios bien condicionados del teorema 2.2 para M=7,8,9,10.

M	7	8	9	10
Cota	$\frac{19}{2}\sqrt{197}$	$\frac{19}{2}\sqrt{257}$	$\frac{95}{2}\sqrt{13}$	$\frac{19}{2}\sqrt{401}$

Tabla 2.6: Cota para los polinomios de la tabla 2.5.

2.2.1. Código Maxima

Para finalizar con esta sección, se muestran a continuación las instrucciones que se han introducido en el sistema de álgebra computacional Maxima para generar los diez primeros polinomios descritos en el teorema 2.2, además de su número de condición.

```

1 /* Teorema 2.2 */
2 /*Definimos las variables necesarias para obtener el polinomio P*/
3 M:1; /* M enetro positivo mayor o igual que 1 (unico valor que
   tenemos que proporcionar)*/
4 N:4*M^2;
5 rho:sqrt((1+x)/(1-x));
6
7 for j:1 while j<=M do(
8     r[j]:4*j,
9     h[j]:1-(4*j^2)/N
10 );
11
12 /* Definimos el polinomio */
13 P:z^r[M]-1;
14
15 for j:1 while j<M do(
16     P:P*(z^r[j]-substitute(x=h[j],rho)^r[j])*(z^r[j]-substitute(x=
   h[j],rho)^(-r[j]))
17 );
18 P;
19
20 /* Calculo de raices del polinomio P */
21 raicesP:solve(P);
22
23 /* Polinomio expandido */
24 P:expand(P);
25
26 /* Derivada del polinomio en el punto z */
27 dP:diff(P,z);
28
29 /* Caluclo de la norma de Weyl (Bombieri-Weyl) */
30 normaBW: factorial(0)*factorial(N-0)/factorial(N)*(abs(substitute(
   z=0,P)))^2 + sum(factorial(i)*factorial(N-i)/factorial(N)*abs(
   coeff(P,z^i))^2, i, 1, N);
31 normaBW:sqrt(normaBW);

```

```
32
33 /*Calculo del numero de condicion*/
34 for i:1 while i<= N do(
35     raiz[i]: rhs(part(raicesP,i)),
36     munorm[i]:sqrt(N)*normaBW*(1+abs(raiz[i])^2)^((N-2)/2) /abs(
        ev(dP,raicesP[i]))
37 );
38
39 mumax:0;
40 for j:1 while j<=N do(
41     mumax:max(mumax,munorm[j])
42 );
43 mumax;
44
45 cota:min(N,sqrt(N+1)*(19/2));
```


Capítulo 3

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado algunas propiedades teóricas de la norma de Weyl, incluyendo en particular su representación en términos de una integral (ver teorema 1.1). Gracias a ello, hemos podido demostrar fórmulas para el cálculo práctico del número de condición de un polinomio. Si bien eran conocidas en la literatura matemática, para completar la demostración hemos tenido que combinar distintas fuentes bibliográficas, como [7], y completar los cálculos de varias integrales en varias variables.

A partir de la definición de condicionamiento, vista durante el primer capítulo, se deduce que el concepto de condicionamiento o número de condición de un polinomio depende únicamente del polinomio elegido, y en ningún caso se verá afectado por el método de resolución utilizado o el programa que se implemente para su resolución. Para ilustrarlo hemos podido ver que ocurre con el polinomio de Wilkinson y su mal condicionamiento, el cual también nos ha ayudado a mostrar la importancia del condicionamiento a la hora de trabajar con polinomios.

Además, durante el segundo capítulo de este trabajo también se han estudiado polinomios bien condicionados, para los cuáles se ha demostrado analíticamente que cumplen la cota propuesta en el teorema 2.2.

Para finalizar, añadir que el mal condicionamiento de un polinomio, como es el caso de Wilkinson, no es algo que afecte solamente a los matemáticos, en meteorología, por ejemplo, a la hora de realizar predicciones sobre el tiempo que hará en los próximos días si se tienen errores en las medidas tomadas hace falta saber qué errores van a producir en futuras predicciones. Esto también puede afectar en otras áreas como pueden ser la medicina, la ingeniería o cualquier ciencia que utilice métodos numéricos, y por eso la importancia de seguir avanzando en el estudio del condicionamiento.

Bibliografía

- [1] BELTRÁN, C. *Sobre el problema número 7 de Smale*. La Gaceta de la RSME 23 (2020), no. 3, 507-534
- [2] BELTRÁN, C. y PARDO, L. *On Smale's 17th Problem: A Probabilistic Positive Solution*. Found Comput Math 8, 1–43 (2008)
- [3] BELTRÁN, C. y LIZARTE, F. *On the minimum value of the condition number of polynomials*. IMA Journal of Numerical Analysis (2020).
- [4] BELTRÁN, C., ETAYO, U., MARZO, J., y ORTEGA-CERDÁ, J. *A sequence of polynomials with optimal condition number*. Journal of the American Mathematical Society 34 (2021), no. 1, 219-244
- [5] BÜRGISSER, P. y CUCKER, F. *Condition: The Geometry of Numerical Algorithms*. Berlin: Springer (2013).
- [6] ETAYO, U. *The condition number of polynomials and its relationship with a set of points on the sphere*. XV Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones, Universidad de la Rioja. (2016) <https://www.unirioja.es/dptos/dmc/EACA2016/talks/Etayo.pdf>
- [7] GRADSHTEYN, I.S. y RYZHIK, I.M. *Table of Integrals, Series, and Products*, 7.a ed. JEFFREY, A. y ZWILINGER, D., Eds. (2007).
- [8] SHUB, M. y SMALE, S. *Complexity of Bézout's theorem I: Geometric aspects*. Journal of the American Mathematical Society 6 (1993), no. 2, 459-501.
- [9] SHUB, M. y SMALE, S. *Complexity of Bézout's theorem III: Condition number and packing*. Journal of Complexity 9 (1993), no. 1, 4-14
- [10] ZHANG, H. *Numerical condition of polynomials in different forms*. Electronic Transactions on Numerical Analysis 12 (2001), 66-87.
- [11] Wikipedia: Historia de las matemáticas. https://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_las_matematicas. [consulta: 28/05/2021]

- [12] Wikipedia: Wilkinson's polynomial. https://en.wikipedia.org/wiki/Wilkinson's_polynomial. [consulta: 17/04/2021]