Estrategias de generalización de patrones geométricos de estudiantes de Educación Secundaria

(Strategies for geometric pattern generalization of high school students)

Irene Rodríguez Novoa

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

Grado en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Director: Mario Alfredo Fioravanti Villanueva

Diciembre - 2020

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Mario por querer ser mi director cuando le transmití mi petición de realizar el Trabajo Fin de Grado en relación con el área de la didáctica. Gracias por ayudarme a completar este reto, por todas las facilidades que me has ofrecido y tu comprensión en diferentes momentos del recorrido.

Agradecer también a los profesores que accedieron a participar en el estudio y me permitieron compartir con ellos esta experiencia en el aula. Me habéis ayudado enormemente.

Tambén quiero dar las gracias a...

A mi familia. En especial, a mis padres por apoyarme y ayudarme en todo lo posible todos estos años y no dejar que me rindiera nunca. No me cabe duda que sin vosotros y vuestro apoyo incondicional llegar hasta donde he llegado no habría sido posible. Os merecéis mucho más que dos líneas.

A Andrés por acompañarme en estos dos últimos años de carrera. Gracias por ser roca en mitad de la tempestad, por tener siempre palabras de ánimo e intentar comprenderme. Gracias por estar ahí en todo momento y más aún cuando las cosas no eran fáciles. Gracias por aparecer y permanecer a mi lado.

A mis amigos desde hace más de una década. Gracias por seguir acompañándome todos estos años, por comprenderme, por ser mi punto de desconexión cuando lo necesitaba y celebrar mis éxitos como los vuestros propios. No sé qué habría hecho sin vosotros.

Por último, a lo más valioso que me llevo de mi paso por la Facultad de Ciencias. A mis compañeros que se convirtieron en amigos. Gracias por cada rato con vosotros, ya fuese en la biblioteca, en la sala, descansando en la cafetería o compartiendo tantos momentos de ocio fuera de la facultad como ha habido. Habéis sido mi día a día durante estos años y habéis llenado mi rutina de buenos momentos. Gracias por todo el apoyo recibido y la ayuda que me habéis ofrecido siempre que lo he necesitado. Me alegro de haber coincidido con vosotros en este camino.

Resumen
Este manuscrito consiste en la combinación de un desarrollo teórico que trata sobre diferentes aspectos englobados dentro del álgebra y, además, de la enseñanza de esta, y una investigación realizada en el aula con alumnos de 3º de la ESO. Trataremos aspectos como son, por ejemplo, el pensamiento algebraico, las estrategias más utilizadas a la hora de generalizar y la flexibilidad como capacidad de adaptación frente la resolución de distintos problemas. En nuestro estudio hemos querido averiguar la relación existente entre el nivel de competencias matemáticas de los alumnos y su capacidad de generalización a partir patrones geométricos.

Abstract
This manuscript consists of the combination of a theoretical development that deals with different aspects included in algebra and, in addition, of the teaching of algebra and an investigation carried out in the classroom with 3rd year ESO students. We will deal with aspects such as, for example, algebraic thinking, the most used strategies when it comes to generalising and flexibility as a capacity for adaptation when faced with the resolution of different problems. In our study we wanted to find out the relationship between the level of mathematical competences of the students and their capacity to generalise from geometric patterns.

Palabras clave: pensamiento algebraico, generalización, sucesión, patrón geométrico, flexibilidad.

Key words: algebraic thinking, generalization, sequence, geometric pattern, flexibility.

Índice general

1 Introducción

Este trabajo es una combinación entre un desarrollo teórico sobre la enseñanza del álgebra y una investigación realizada a partir de los resultados obtenidos en un estudio llevado a cabo en el aula con alumnos de 3º de la ESO.

No se puede negar que el álgebra es una parte fundamental dentro del currículo de la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Por esta razón en las últimas décadas las investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes han suscitado un interés considerable. La mayoría de las investigaciones sobre las generalizaciones algebraicas se han centrado en el estudio del pensamiento algebraico de alumnos de Educación Primaria a medida que el concepto "early algebra" iba cogiendo cada vez más peso en el área de la didáctica en edades tempranas. Por ejemplo, [Becker et al (2006)], entre otras de sus investigaciones se centran en alumnos de los niveles de Educación Primaria. [Kohanova et al (2019)]

La primera sección es el marco teórico, en este apartado nos centraremos en los aspectos que rodean la enseñanza del álgebra. Todos los contenidos abordados en ese apartado son fruto de una lectura crítica y reflexiva de distintos autores en el campo de la didáctica. De esta manera, leyendo diferentes artículos sobre el álgebra en edades escolares, además de diversas investigaciones realizadas por distintos investigadores en diferentes etapas de desarrollo del alumno hemos podido centrar este trabajo en un contexto teórico en particular y, a partir de esto, realizar nuestra investigación dentro de unas premisas que veremos a lo largo del trabajo. Sin embargo, los conceptos, contenidos y temas abordados en el marco teórico no son solamente los necesarios para realizar el estudio en el aula. Vamos a tratar temas y profundizar en algunos aspectos más allá de los estrictamente necesarios para llevar a cabo la investigación.

En nuestra investigación el objetivo es estudiar la capacidad de estudiantes de 3º de ESO a la hora de generalizar secuencias a partir de una serie de figuras a las que se asocia un crecimiento lineal.

En el estudio se han propuesto a los estudiantes problemas de generalización a partir de patrones geométricos basados en mostrar los primeros términos de una sucesión numérica mediante representaciones gráficas.

Cuando se quieren realizar ejercicios de generalizaciones algebraicas con alumnos es útil recurrir a los patrones de figuras. Esto es debido a que los patrones de figuras en el trabajo de la enseñanza de las matemáticas tienen un papel de conector entre distintos aspectos de la actividad matemática central.

Este tipo de estudios son relevantes puesto que los problemas de generalización permiten desarrollar y promover el pensamiento algebraico. Y, asimismo, el uso de patrones geométricos favorece la abstracción y generalización por parte de los estudiantes.

Además, vamos a analizar otros aspectos, aparte de la generalización, como la flexibilidad. Esta cualidad que definiremos más adelante se basa en la idea de la capacidad del alumno a la hora de elegir, cambiar o corregir las estrategias según la demanda de la tarea a realizar.

La estructura de este trabajo se basa en cuatro secciones bien diferenciadas. En primer lugar, la sección 2 se basa en el desarrollo del marco teórico en el que se contextualiza nuestro trabajo y, seguidamente, en la sección 3 que corresponde a la metodología, antes que nada, presentamos una enumeración de las preguntas que nos planteamos resolver en la investigación. En esta misma sección nos encontramos con el desarrollo del estudio. En el siguiente apartado, sección 4, analizaremos las respuestas de los alumnos y cómo han llegado a determinadas respuestas. Por último, en la sección 5 presentamos las conclusiones que han sido extraídas de nuestro análisis en la sección anterior.

2 Marco teórico

En la introducción hemos mencionado la importancia del álgebra en los cursos de Educación Secundaria como veremos en el currículo más adelante. Sin embargo, el primer contacto con el álgebra debería llegar unos años antes. En numerosos estudios se habla sobre la introducción del estudio del álgebra en cursos anteriores a lo que hoy se conoce como E.S.O.

Esta introducción hacia el estudio del álgebra se lleva a cabo a partir del desarrollo del pensamiento algebraico.

2.1. El pensamiento algebraico

Al hablar de *pensamiento algebraico* hay autores como [Kaput (2008)] que lo definen como la forma de hacer, de pensar y de hablar sobre el álgebra como contenido matemático. Este contenido está caracterizado por la expresión de la generalidad la cual conduce a la descripción de cierta estructura [Cañadas et al (2016)].
[Vergel (2015)] define este pensamiento como la forma particular de reflexionar matemáticamente y, además, lo considera un conjunto de procesos corporizados de acción y reflexión [Goñi Cervera et al (2019)]. Podemos citar también a [Crawford (2004)] el cual define la competencia algebraica, entre otras acepciones similares a las explicadas en los párrafos precedentes, como la habilidad de entender las relaciones de las cantidades a través de patrones, definiendo funciones y aplicando entonces modelos matemáticos.
Se podría afirmar que nuestra propuesta de ejercicios para el estudio está, en parte, más relacionada con la última definición.

Cuando se busca fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas en Educación Primaria nos estamos refiriendo a lo conocido actualmente como *"early algebra"* [Arbona et al (2017)]. Cabe resaltar que esta propuesta no se refiere al modo de la enseñanza formal del álgebra conocida como *pre-álgebra* ya que las finalidades de cada propuesta son distintas. Por un lado, el "early algebra" no tiene como fin el facilitar a los

alumnos el posterior estudio del álgebra. Su objetivo es más bien el de promover en los estudiantes un aprendizaje más profundo y complejo a partir de la comprensión de la matemáticas escolares. En cambio, la enseñanza conocida como pre-álgebra busca poder suavizar el salto abrupto que da mentalmente el alumno de la aritmética al álgebra. Y, de esta manera, rebajar las dificultades típicas que uno se puede encontrar en su aprendizaje del álgebra [Molina (2011)].
Dentro del early algebra hay una suposición común de sus partidarios que es la capacidad de esta propuesta de potenciar las matemáticas elementales a los estudiantes. Sin embargo, hay dos puntos de vista distintos de cómo debe llevarse a cabo. Por un lado, existen aquellos que proponen construir sobre lo que ya es algebraico dentro del pensamiento de los niños pequeños refiriéndose, en particular, a su razonamiento numérico o aritmético. Por otro lado, también hay la opinión de promover cambios en el pensamiento de los estudiantes ofreciendo herramientas que les permitan operar a un nivel mayor de generalidad. No obstante, en la práctica estas dos opiniones no son necesariamente dicotómicas. [Confrey (1991)]
Ahora bien, podríamos cuestionarnos el por qué se le da tanta importancia al estudio del álgebra y a su forma de introducirlo desde edades tempranas. Según la comunidad educativa podemos ver el álgebra como una parte necesaria del conocimiento de una sociedad, un componente crucial para la alfabetización matemática y una rama de las matemáticas que promueve las actividades intelectuales de generalización, el pensamiento algebraico y el razonamiento deductivo. Todos estos motivos, en su conjunto y como requisito para el estudio de las matemáticas en cursos superiores y en distintos campos de empleo, pueden suponer el futuro y progreso económico de una nación por lo que, efectivamente, es una meta importante del currículo [Stacey et al (2004)].

Continuamos hablando del pensamiento algebraico en el cual se pueden distinguir dos clases de pensamiento. Estas son el pensamiento relacional y el pensamiento funcional. Vamos a tratar estas dos expresiones vistas desde el prisma de la Educación Primaria puesto que la información está extraída de investigadores enfocados en ese área.

Al indagar sobre el *pensamiento relacional* vemos que hay una falta de definición general del término. En el contexto en el que estamos trabajando de resolución de problemas mediante igualdades (ecuaciones) usaremos el significado que usa [Molina (2006)]. Según esta autora se puede definir el pensamiento relacional como la acción de considerar las expresiones e igualdades ciertas por sí solas, en vez de procesos a realizar paso a paso, y utilizar propiedades aritméticas y relaciones existentes entre los términos que las componen para resolver las igualdades o manipular las expresiones basadas en relaciones aritméticas. Por ejemplo, se usa el pensamiento relacional al entender que el producto 5 x 6 significa sumar cinco veces el número 6, 5 x 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6.

Por otra parte, el *pensamiento funcional* se basa en el contenido matemático de la función entendida como una relación de dependencia entre variables. Si nos fijamos en la definición dada por [Cañadas et al (2016)] entendemos el pensamiento funcional como una rama del pensamiento algebraico basada en la construcción, representación y razonamientos sobre los elementos que constituyen las funciones y estas mismas.

También hay autores como [Kieran (2004)] que hablan de un componente del pensamiento algebraico como es el *simbolismo algebraico*. Según ella "para caracterizar de forma significativa el pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, sino que se debe ser capaz también de expresarlo algebraicamente". Respecto a este mismo asunto hay otros autores que encuentran un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente hasta un cierto grado de generalidad y el uso de la notación algebraica. Aunque saben qué es lo que quieren expresar tienen dificultades con el uso de esta notación para escribirlo de manera algebraica [Callejo et al (2016)]. Este hecho hemos podido comprobarlo en el estudio realizado en el aula. Más adelante veremos algunos ejemplos de las dificultades presentadas con la notación por parte de los estudiantes, desde el mal uso del significado de las letras hasta sentencias incoherentes. Varios autores, como [Vergel (2015)], recalcan que es una tarea interesante la generalización de patrones en el contexto de desarrollar formas de pensamiento algebraico. Más adelante veremos qué es generalizar y la generalización a partir de patrones geométricos.

Para poder seguir comprendiendo mejor el marco teórico donde nos hallamos debemos introducir una serie de conceptos.

2.2. Sucesiones: progresiones aritméticas y geométricas

Sabemos que una *sucesión* es una secuencia ordenada de números. Cada número que forma la sucesión se denomina *término* y la notación que se suele utilizar es a_1, a_2, ..., a_n siendo los respectivos subíndices los que indican la posición del término en la secuencia. En los cuestionarios de este trabajo en vez de dar los primeros términos de las sucesiones de manera numérica se proporcionan a partir de figuras.

Vamos a tratar brevemente la teoría sobre progresiones aritméticas y geométricas como se suele presentar en 3º de ESO.

En el momento del estudio los alumnos no habían dado en clase el tema en el que se tratan las sucesiones. Posiblemente, los resultados de las pruebas hubiesen sido distintos en caso de que ellos hubiesen trabajado con anterioridad estos conceptos. Sin embargo, para realizar la investigación buscábamos esta situación para que ellos intentasen contestar el cuestinario de la manera más intuitiva posible a partir de las directrices ofrecidas en las pruebas.

Si en una sucesión se puede dar una expresión algebraica para calcular cualquier término de la sucesión determinando su posición en ella, nos estamos refiriendo a hallar su *término general* que se denota por a_n.

En el currículo del curso vienen incluidas dos tipos de sucesiones: la progresión aritmética y la progresión geométrica.
Una *progresión aritmética* es una sucesion donde un término cualquiera se halla al sumar al anterior término una cantidad fija la cual se llama diferencia y se suele denotar por d. Podemos establecer a partir de esta definición el término general para las progresiones aritméticas: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.
El otro tipo de sucesiones que trataremos son las *progresiones geométricas.* Estas son aquellas donde un término cualquiera de la sucesión se obtiene al multiplicar el anterior por una cantidad constante r, llamada razón. De esta manera, se define el término general de las progresiones geométricas: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Se hizo una búsqueda sobre si los contenidos relacionados con las sucesiones se ven en Primaria, por si se daba el supuesto de que nuestros alumnos contarían con más herramientas para la resolución al recordar los conceptos vistos hace años. No obstante, pudimos concluir que no es parte del currículo de primaria actualmente. También, se investigó en el currículo de Secundaria para averiguar si hasta el tercer curso de ESO los alumnos no ven los conceptos de sucesión, progresión aritmética, geométrica y todas las que engloba el tema. Finalmente, podemos afirmar que hasta 3º de la ESO el currículo no acoge el tema tratado. De esta manera, nos aseguramos de que las respuestas van a ser lo más intuitivas posibles como pretendíamos.

Por consiguiente, el razonamiento de los alumnos frente a las pruebas va a ser de tipo inductivo. Se introduce, a partir de las cuestiones y en orden, el término inmediato, cercano y lejano (ver sección 2.4) y la estrategia inversa para hallar la posición de un término. En nuestras sesiones con ellos en el aula tampoco se les da previamente la teoría que podrían utilizar para resolver el cuestionario.
Este procedimiento basado en introducir mediante ejercicios prácticos el tema, pero sin un desarrollo teórico previo varía al que se suele utilizar tradicionalmente en clase ya que en este último se desarrolla, en primer lugar, la teoría necesaria y después se da a lugar a su aplicación en ejemplos y ejercicios.

2.3. Conceptos básicos

Hemos mencionado anteriormente el uso de problemas de generalización en distintos niveles educativos pero, ¿a qué nos referimos cuándo hablamos de generalizar?
La *generalización* consiste en la búsqueda de similitudes entre términos, en pasar de un caso particular a un caso general e identificar la característica común. El proceso de generalizar está constituido por tres acciones:

1. Detectar una propiedad común.
2. Generalizar esa propiedad común para todos los términos de la secuencia.
3. Determinar una regla usando la propiedad común para poder hallar cualquier término de la secuencia [Goñi Cervera et al (2019)].

A continuación, vamos a definir qué es un *patrón geométrico*. De forma general, un patrón geométrico es un patrón creado a partir de figuras geométricas. Estudiar patrones geométricos permite el desarrollo del razonamiento matemático y las habilidades aritméticas, algebraicas y lógicas.

La figura 2.1 está extraída de uno de los enunciados de los ejercicios que se propusieron a los alumnos a la hora de realizar el cuestionario sobre las generalizaciones. El enunciado del ejercicio consta de un breve texto donde se nos dice que las abejas construyen sus enjambres mediante celdillas de forma hexagonal y en la figura se representa la manera de construcción que suponemos que siguen las abejas. Según el dibujo sabemos que con 6

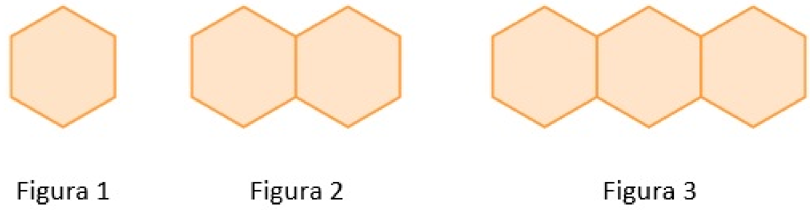


Figura 2.1: Ejemplo de un patrón geométrico construido mediante hexágonos.

paredes se construye una celdilla, con 11 paredes llegamos a construir 2 celdillas y para 3 necesitamos 16 paredes. A partir de esta información se les formulan varias preguntas a los estudiantes sobre la continuación de la figura.

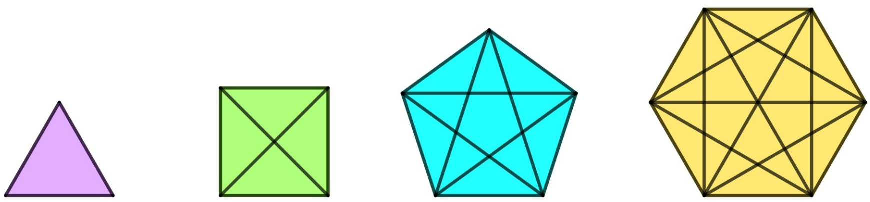


Figura 2.2: Ejemplo de un patrón geométrico a partir de polígonos regulares.

La figura 2.2 es un ejemplo de patrón geométrico que se compone mediante polígonos regulares. Podemos observar empezando desde el triángulo y siguiendo hacia la derecha que cada polígono regular presentado en la secuencia tiene un vértice más que el anterior y que el número de diagonales va en aumento también. Vamos a describir la sucesión usando la notación a_n donde n va a ser el números de vértices de la figura y se tomará como valor su número de diagonales.
El elemento que está en primera posición es el triángulo que tiene 3 vértices y no tiene diagonales entonces se cumple $a_3 = 0$, en segundo lugar tenemos el cuadrado que siguiendo el patrón es $a_4 = 2$, el péntagono en tercera posición de la sucesión corresponde con $a_5 = 5$ y el hexágono con $a_6 = 9$. A partir de estos datos (el patrón geométrico y los datos numéricos) seríamos capaces de hallar el término general de la sucesión y obtener de este modo el número de diagonales de cualquier polígono regular.

2.4. Tipos de generalización

Como ya sabemos qué es generalizar y a qué nos referimos cuando hablamos de patrones geométricos podemos empezar a tratar las actividades de generalización a partir de patrones geométricos. Estas consisten en comprender el patrón, recopilar la información de los casos particulares y llegar a formular una expresión de manera explícita que nos permita generalizar los resultados de cada caso particular que hemos obtenido.

Generalmente, en los problemas de generalización basados en patrones geométricos se enuncian los primeros términos de una sucesión mediante figuras y se suele pedir continuar la sucesión, determinar el número de elementos de una figura no especificada o, a partir del número de elementos de una figura desconocida, hallar qué posición ocupa la figura en dicha sucesión.

En las tareas basadas en determinar el número de elementos de una figura dependiendo de la posición que ocupe tal figura se podrá dar el caso de que se trate de un término inmediato (suele ser el siguiente término a los ya conocidos por el enunciado), un término próximo a los que conocemos o un término lejano. Hablemos entonces de las clasificaciones de los términos de una sucesión.

Basándonos en la clasificación de los términos como inmediatos, cercanos y lejanos podemos hablar de cuestiones de generalización inmediata, cercana/próxima y lejana respectivamente. Por otro lado, dependiendo de cómo sea la estrategia a seguir para la resolución podemos diferenciar las cuestiones como relación directa o inversa.

Primero, vamos a tratar la clasificación de los términos según su posición en la secuencia:

Si queremos hallar el término siguiente a los que tenemos enunciados estamos trabajando la *generalización inmediata*. El siguiente ejercicio está extraído de nuestro cuestionario y corresponde a la tarea de generalización inmediata.

> 2.1 ¿Cuántas paredes necesitan construir las abejas para formar cuatro celdillas de la misma manera que en la figura? ¿Cómo has calculado el número de paredes necesarias?

La resolución del ejercicio a partir de dibujar las cuatro celdillas se puede ver en la figura 2.3. Para formar esta figura hemos añadido 5 lados al patrón geométrico ya que el hexágono nuevo comparte un lado con el anterior adyacente. Por consiguiente, la respuesta correcta a la pregunta son 21 paredes.

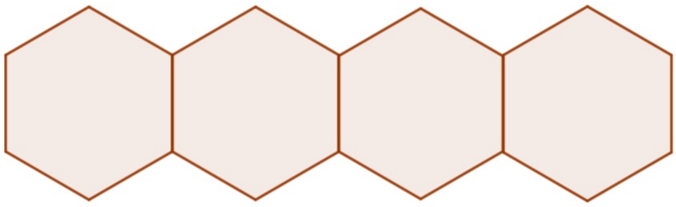


Figura 2.3: Resolución del ejercicio basado en el patrón de la Figura 1.

Otro ejemplo de generalización inmediata basándonos en la Figura 2.2 sería obtener el quinto polígono regular de la sucesión y llegar a saber su número de diagonales. Si cada polígono tiene un vértice más que el precedido por él mismo entonces llegamos a que el quinto elemento de la sucesión es un héptagono. Nos faltaría saber cuántas diagonales tiene el heptágono. Para ello podemos dibujar un polígono regular de 7 lados con todas sus diagonales y después contarlas (técnica de conteo). Otra estrategia alternativa, por ejemplo, sería hallar el término general de la sucesión y así saber el número de diagonales de cualquier polígono regular.
El razonamiento a emplear es que de cada vértice salen $n-3$ diagonales siendo n el número total de vértices. Tenemos que dividir entre 2 puesto que si contamos directamente el número de diagonales estaremos contando estas el doble de veces. De este modo llegamos a que el término general es $a_n = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$. En el caso del heptágono se cumple que tiene $a_7 = \frac{7\cdot(7-3)}{2} = 14$ diagonales. Tenemos la representación de esta solución en la figura 2.4. En este ejemplo la progresión no corresponde a una aritmética ni geométrica puesto que se trata de una expresión cuadrática.En cambio, en el estudio con alumnos este tipo de términos no les hemos contemplado, a ellos se les pide resolver cuestiones de dos sucesiones distintas; una es aritmética y la otra geométrica.
Continuamos con la clasificación, si el término que queremos calcular ya no es el siguiente a los conocidos pero podemos hallarlo a partir de técnicas visuales como puede ser el conteo (dibujar el patrón del término demandado y contar el número de elementos), entonces estamos tratando la *generalización cercana.*

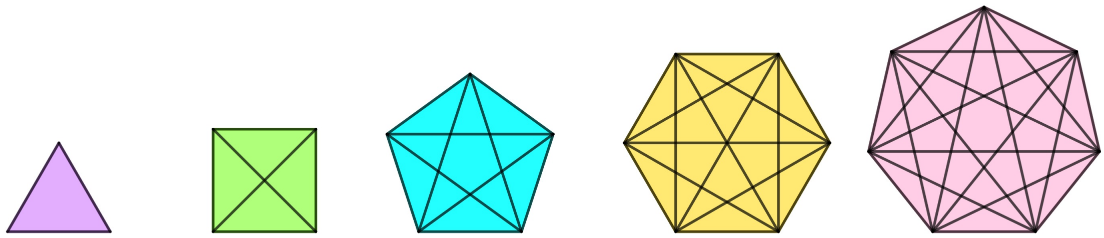


Figura 2.4: Ejemplo de un patrón geométrico a partir de polígonos regulares.

Veamos un ejemplo de una pregunta de generalización cercana extraída de nuestra prueba:

> 2.2 Si quieren formar 15 celdillas construídas de la misma forma, ¿cuántas paredes necesitan construir? ¿Cómo lo sabes?

Intentar resolver esta cuestión mediante estrategias gráficas como dibujar las 15 celdillas es poco práctico. En este tipo de tareas es más común el uso de otras estrategias.

En último lugar, si hablamos de un término lejano nos referimos a un término asociado a un valor numérico de la secuencia cuya representación gráfica supone una tarea muy costosa de llevar a cabo. Este tipo es conocido por *generalización lejana*. En estos casos la estrategia más exitosa es la formulación de una expresión para el término general de la sucesión. Esta expresión se espera que sea algebraica. El siguiente ejemplo es una cuestión sobre un término lejano extraída del ejercicio 2 de nuestra prueba de sucesiones:

> 2.3 Si las abejas han construido 100 celdillas de este modo unidas, ¿Cuántas paredes han necesitado para construirlas? ¿De qué manera has hallado el número de paredes?

Nos parece obvio que el hecho de dibujar 100 celdillas no es una tarea fácil y rápida, por lo que quedarían descartadas las estrategias basadas en la representación gráfica.

Estos ejercicios de obtener un término ya sea inmediato, cercano o lejano se engloban dentro de las tareas denominadas de relación directa, es decir, dada la posición n en la sucesión debemos obtener el término a_n.

A su vez, es recomendable añadir a este tipo de estudios al menos una cuestión de relación inversa. Estas cuestiones tratan de que a partir de una cantidad dada de elementos se llegue a concluir cuál es la posición n del objeto a_n en la sucesión conocida. Este tipo de preguntas son útiles para analizar la capacidad de los estudiantes de cambiar a un procedimiento inverso.

2.5 Si las abejas han construido 126 paredes, ¿cuál es el número máximo de celdillas que pueden construir del mismo modo que en los casos anteriores? ¿Cómo has conseguido hallar el número de celdillas?

En resumen, los problemas de generalización presentan dos clasificaciones de las cuestiones surgidas a partir de ellos: Una de ellas basada en la distancia de los términos por la cuál se elegirá una estrategia de generalización u otra (generalización inmediata, cercana o lejana) y la otra clasificación relacionada con el proceso de llegar a la solución a través del pensamiento algebraico (relación directa o indirecta).

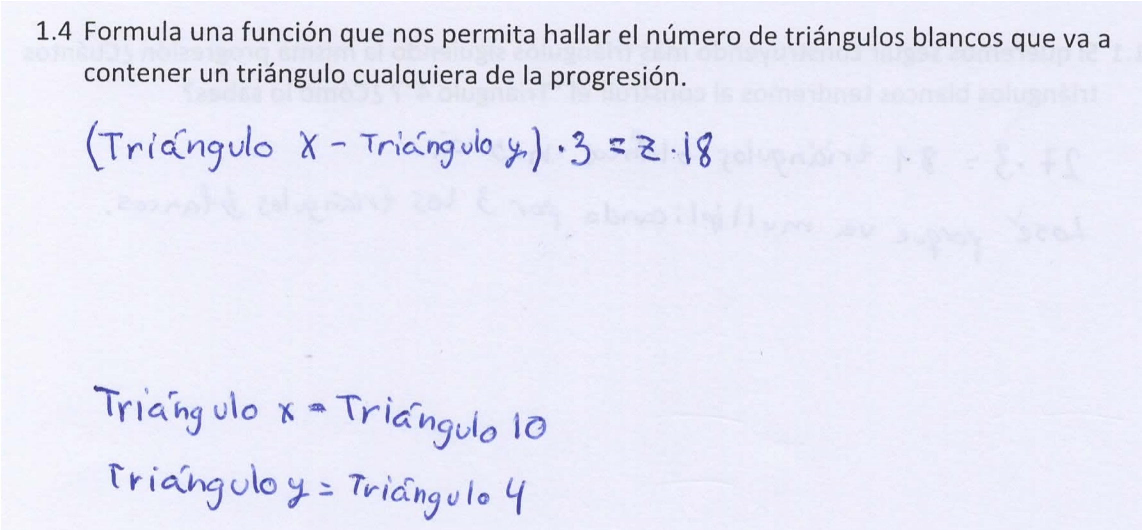
También se han realizado clasificaciones basadas en el uso de las letras en función del significado atribuido por parte de los estudiantes. [Küchemann (1981)] identificó seis maneras distintas de interpretación y uso de las letras:

- Letra evaluada.
- Letra no usada (ignorada).
- Letra usada como objeto.
- Letra usada como incógnita.
- Letra usada como número generalizado.
- Letra usada como variable.

Vamos a definir qué significa cada una de estas interpretaciones y veremos una serie de ejemplos extraídos de las pruebas realizadas en el estudio en relación con las definiciones:

- Letra evaluada: Este tipo ocurre cuando se asignan valores númericos arbitrarios a las letras. En la figura 2.5 podemos ver una resolución incorrecta por parte de un alumno donde utiliza las letras x e y a las cuales asigna valores arbitrarios siendo $x = 10$ e $y = 4$. Y podemos observar también que utiliza la letra z en la igualdad pero como letra ignorada cuya definición vemos a continuación.

- Letra ignorada: Los estudiantes ignoran la presencia de las letras o las consideran pero sin darles ningún significado.

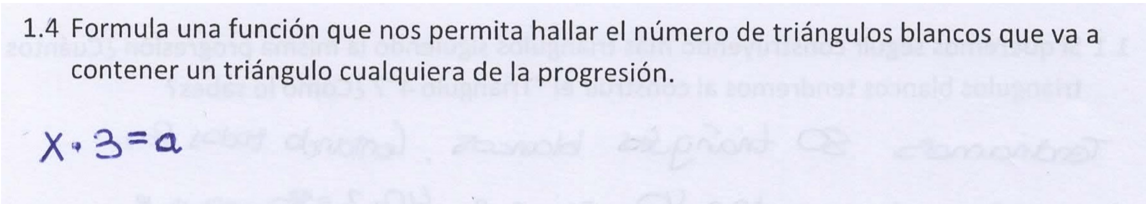

1.4 Formula una función que nos permita hallar el número de triángulos blancos que va a contener un triángulo cualquiera de la progresión.

(Triángulo X - Triángulo y) · 3 = z · 18

Triángulo x = Triángulo 10

Triángulo y = Triángulo 4

Figura 2.5: Ejemplo de letras evaluadas.

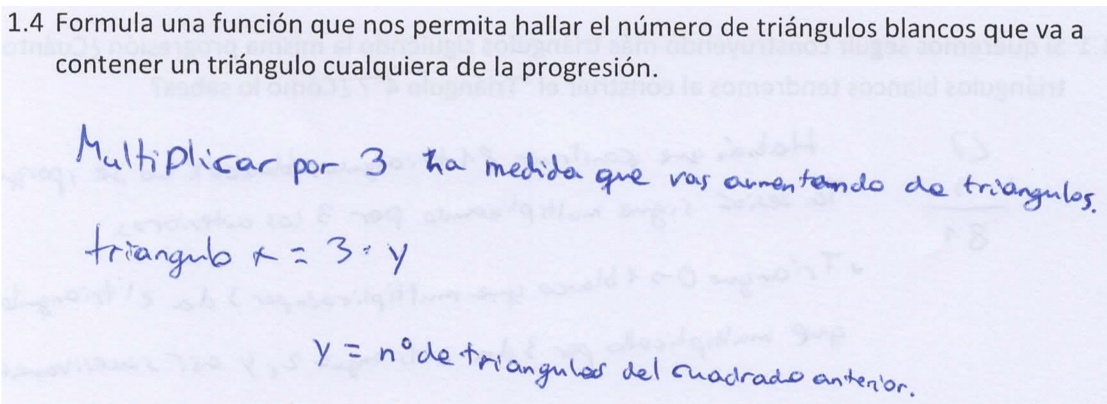

1.4 Formula una función que nos permita hallar el número de triángulos blancos que va a contener un triángulo cualquiera de la progresión.

X · 3 = a

Figura 2.6: Ejemplo de letra ignorada.

En la figura 2.6 se da una igualdad usando las letras x y a pero no sabemos qué es cada variable ya que no las define. Además, es una resolución errónea.

- Letra como un objeto: Uso de las letras como abreviaturas de nombres de objetos o como objetos en sí mismos.


1.4 Formula una función que nos permita hallar el número de triángulos blancos que va a contener un triángulo cualquiera de la progresión.

Multiplicar por 3 ha medida que vas aumentando de triángulos.

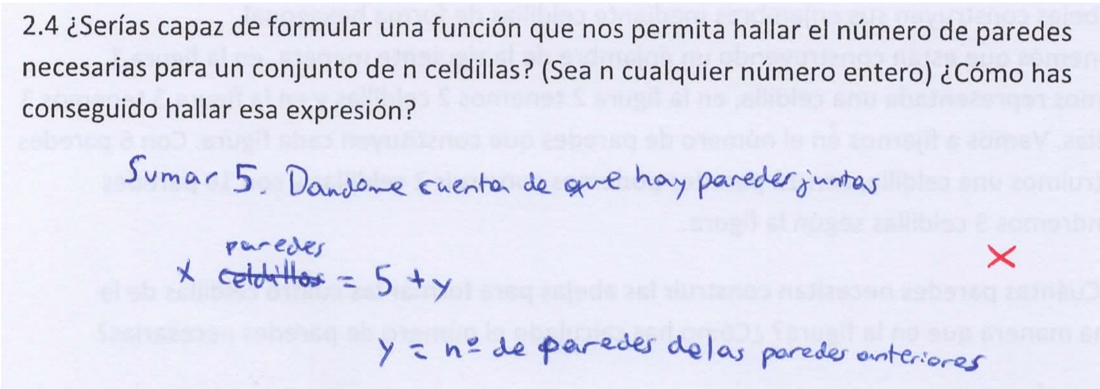
triangulo x = 3 · y

y = nº de triangulos del cuadrado anterior.

Figura 2.7: Ejemplo de letra tomada como objeto.

En la figura 2.7 podemos ver que en vez de definir la x tal y como ha hecho con la letra y pone simplemente "Triángulo x". Podemos ver esto como un ejemplo de tomar la letra x como un objeto que es el triángulo definido según la posición de la sucesión.

- Letra como una incógnita específica: Se percibe que las letras tienen un valor específico que es desconocido. Los alumnos entienden que dos variables denotadas con distinta letra del alfabeto no pueden tener el mismo valor.
  En la figura 2.8 se observa que el alumno usa dos letras distintas sabiendo que cada letra corresponde a un valor distinto. Siendo así que la x es el número de paredes necesarias en la posición de la sucesión y la letra y la define como el número de paredes que tenemos en la figura de la posición anterior.


2.4 ¿Serías capaz de formular una función que nos permita hallar el número de paredes necesarias para un conjunto de n celdillas? (Sea n cualquier número entero) ¿Cómo has conseguido hallar esa expresión?

Sumar 5. Dandome cuenta de que hay paredes juntas

x ~~celdillas~~ paredes = 5 + y

y = nº de paredes de las paredes anteriores

Figura 2.8: Ejemplo de letras como incógnita distintas.

- Letras como números generales: Las letras se perciben como valores, se entiende que pueden tomar varios valores en vez de únicamente uno.
- Letra como variación de cantidad (variable): Percepción de las letras como la representacion de un rango de valores desconocido. Se conoce que las letras pueden tomar valores racionales e irracionales. Además, son capaces de comprender que el valor de la variable puede venir definido por su relación con otras variables en una expresión.
  En la figura 2.9 tenemos un ejemplo de letra como variable. Cabe destacar que la resolución por parte del alumno es correcta aunque podría haber definido mejor la letra n usada. Se define n como el número (la posición) del triángulo en la sucesión y conoce que puede tomar distintos valores además de que viene definido por su relación dentro de la sucesión.

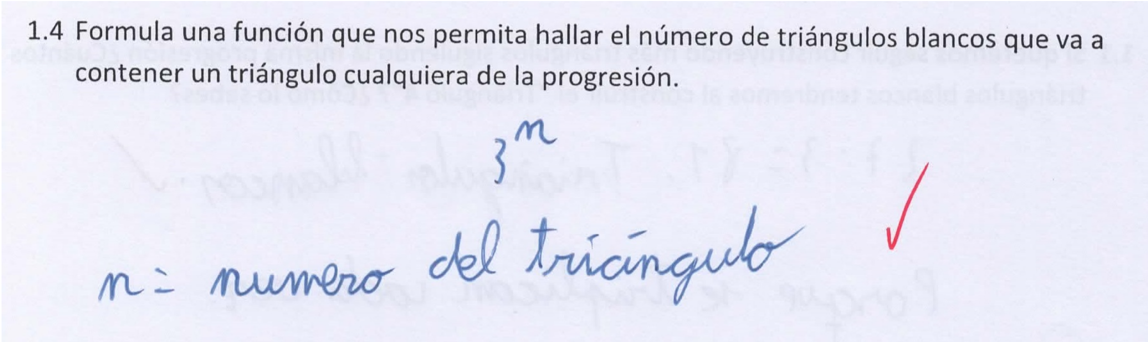


Figura 2.9: Ejemplo de letra como variable.

A partir de esta clasificación, [Küchemann (1981)] en su estudio estableció una relación entre las categorías de las letras y los niveles de competencia del álgebra. No vamos a hacer especial hincapié en ella, pero podemos sacar una idea general de la clasificación. Las tres primeras categorías; letra evaluada, ignorada y letra como un objeto corresponden a un nivel elemental en la capacidad de su uso. En segundo lugar, las tres últimas categorías; letra como una incógnita específica, como números generales y como variables conllevan un entendimiento alto sobre el concepto del manejo de las incógnitas. De este modo, diríamos que ver la letra como variación de cantidad, es decir, como una variable, sería la comprensión perfecta de los simbolos en el álgebra.

Y, por último, destacar que hemos enumerado las categorías en orden de menor a mayor dificultad en su manejo. Esto quiere decir que, por ejemplo, el uso de la letra evaluada es más fácil para el alumno que comprender la letra como una incógnita específica y, esta a su vez, de menor dificultad que como número generalizado [García Suárez et al (2003)].

2.5. Estrategias de generalización

Procedemos a hablar sobre las estrategias en la resolución de los problemas de generalización. Son varias las estrategias más conocidas y usadas por parte de los alumnos para la resolución de estos problemas.

Empezaremos citando varios autores y sus puntos de vista sobre las estrategias de generalización y, a continuación, vamos a elaborar una tabla con las que más se repiten en las resoluciones [Rivera et al (2005)] [Radford (2007)] [Callejo et al (2016)].

Por una parte, podemos distinguir las estrategias en visuales y numéricas dependiendo del uso que los estudiantes hacen de la información que obtienen a partir de los patrones geométricos [Rivera et al (2005)]. Las estrategias visuales se basan en el análisis y descomposición que hacen los estudiantes de la información gráfica a partir de los patrones geométricos y las estrategias numéricas son aquellas por las que los estudiantes priorizan la información numérica a la gráfica sin prestar a esta última demasiada atención.

Otra manera de distinción es según la estrategia empleada. Distinguimos entre inducción ingenua, la cual se basa en ensayo y error, y la generalizacion. Dentro de la generalización podemos ver distintos niveles:

- Aritmética (estrategia recursiva).
- Algebraica factual (uso de una relación funcional en base a números concretos).
- Algebraica contextual (uso de una relación funcional descrita de manera verbal)
- Algebraica simbólica (uso de una relación funcional que se expresa mediante símbolos alfanuméricos) [Radford (2007)].

Si hablamos del cálculo del valor numérico de los términos en la resolución de tareas de relación directa podemos describir cuatro tipos de estrategia según [Callejo et al (2016)]. Estas estrategias son: conteo, recursiva, funcional y proporcional.

La estrategia de *conteo* consiste en representar de manera gráfica el término que se pregunta y contar el número de objetos que lo forman. En esta estrategia se pone de manifiesto la coordinación espacial y numérica. Tenemos ejemplos de la estrategia de conteo en las figuras 2.10 y 2.11 extraídas de las respuestas de alumnos que participaron en este estudio.

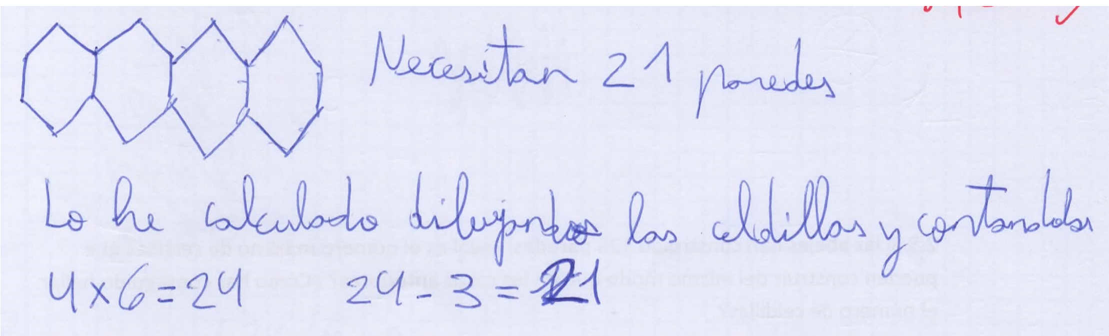


Figura 2.10: Ejemplo de resolución mediante conteo.

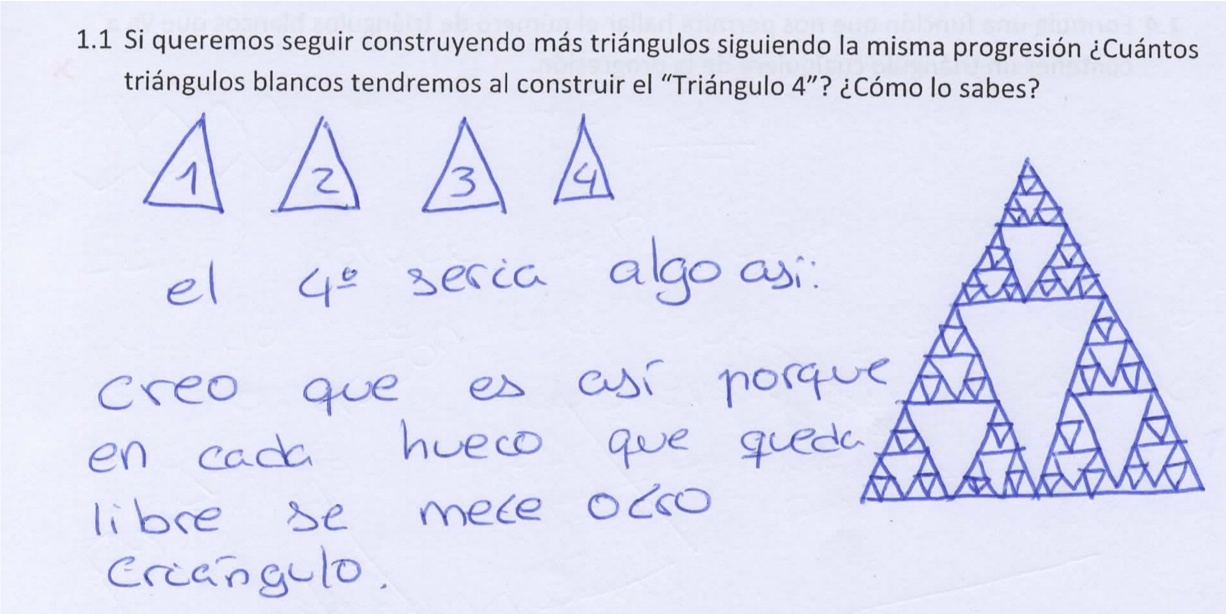
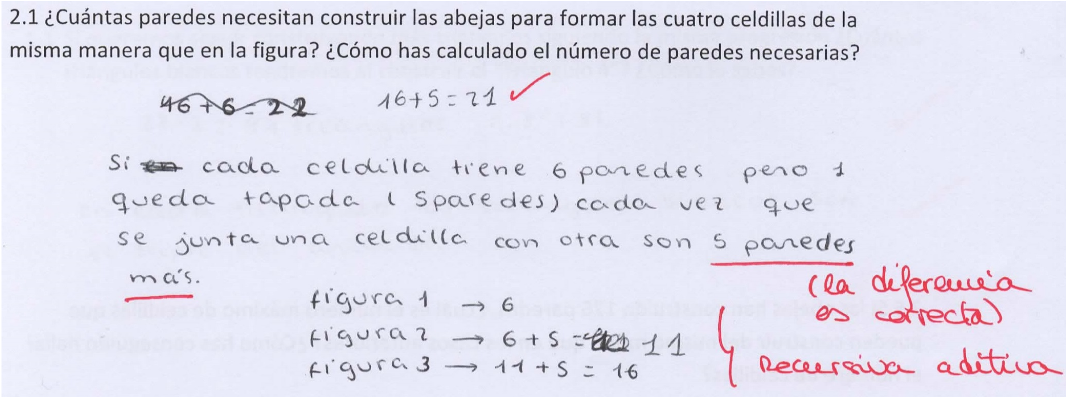


Figura 2.11: Ejemplo de resolución mediante conteo del ejercicio 1.1.

En la figura 2.10 tenemos un caso curioso ya que, primero, dibuja y cuenta el número de paredes necesarias. En segundo lugar, intenta llegar al resultado que ha obtenido, previamente, mediante la técnica de conteo. Multiplica el número de celdillas por las paredes que tiene cada celdilla y, después, resta 3 a ese resultado. Podemos intuir que resta esa cifra ya que es el número de paredes verticales que unen las celdillas entre sí. Al estar contando esas paredes dos veces, las elimina.
Además de estos ejemplos tenemos varias resoluciones donde se usa la estrategia de conteo para hallar el término inmediato demandado. Cabe destacar el hecho de que dependiendo del patrón geométrico puede no ser este método el más rápido para hallar la respuesta. Veamos la diferencia entre la figura 2.10 donde no supone un gran esfuerzo que dibujar 4 hexágonos, en cambio en la figura 2.11 dibujar el Triángulo de Sierpinski para obtener los 81 triángulos blancos no es una tarea sencilla.

Otra estrategia es la *recursiva aditiva* la cual trata de realizar sucesivas sumas de la diferencia entre dos términos consecutivos de la secuencia hasta llegar al término que nos interesa. Es relevante la analiticidad en esta técnica. Podemos ver un ejemplo de esta estrategia en la figura 2.12. Este ejemplo corresponde a la resolución de una cuestión de hallar un término inmediato. En vez de usar la estrategia de conteo ha utilizado la recursiva aditiva. Exponemos en la figura 2.13 un ejemplo del uso de la estrategia recursiva aditiva pero en esta ocasión para un término cercano/próximo.



2.1 ¿Cuántas paredes necesitan construir las abejas para formar las cuatro celdillas de la misma manera que en la figura? ¿Cómo has calculado el número de paredes necesarias?

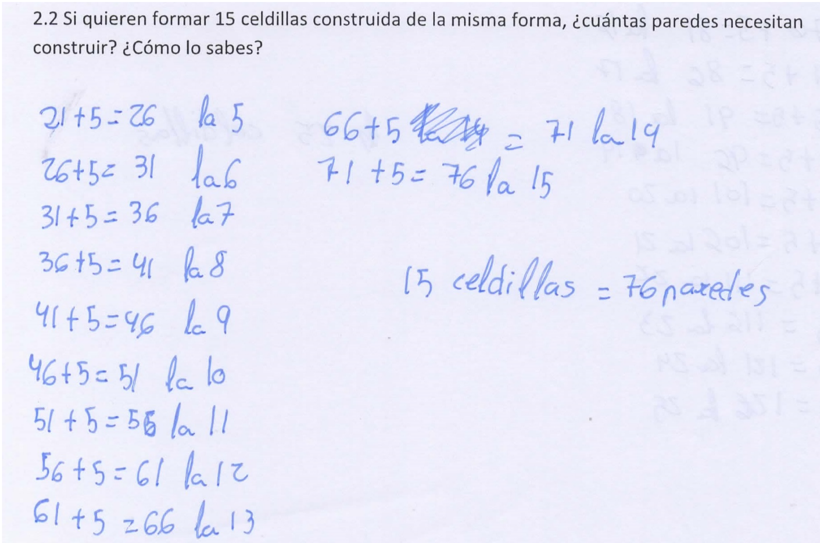
~~46+6=22~~ 16+5=21 ✓

Si cada celdilla tiene 6 paredes pero 1 queda tapada (5paredes) cada vez que se junta una celdilla con otra son 5 paredes más.

figura 1 → 6
figura 2 → 6+5 = 11
figura 3 → 11+5 = 16

(la diferencia es correcta)
Recursiva aditiva

Figura 2.12: Ejemplo de resolución mediante la estrategia recursiva aditiva.



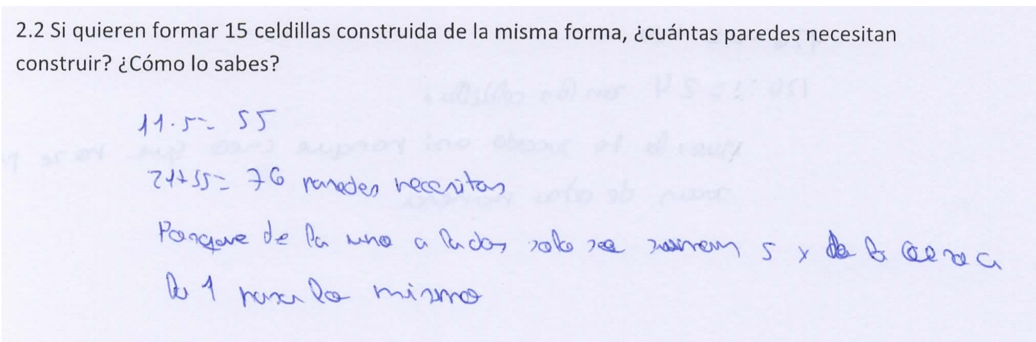
2.2 Si quieren formar 15 celdillas construida de la misma forma, ¿cuántas paredes necesitan construir? ¿Cómo lo sabes?

21+5=26 la 5
26+5= 31 la 6
31+5=36 la 7
36+5=41 la 8
41+5=46 la 9
46+5=51 la 10
51+5=56 la 11
56+5=61 la 12
61+5 =66 la 13
66+5 ~~=71~~ = 71 la 14
71 +5= 76 la 15

15 celdillas = 76 paredes

Figura 2.13: Ejemplo de resolución mediante la estrategia recursiva aditiva en el caso de término cercano.

La estrategia *funcional* se basa en aplicar de manera explícita o implícita una relación funcional que permite conocer el número de elementos que contiene el término sabiendo su posición en la sucesión. Podemos ver un par de casos con estrategia funcional de manera implícita para el mismo ejercicio en las figuras 2.14 y 2.15.



2.2 Si quieren formar 15 celdillas construida de la misma forma, ¿cuántas paredes necesitan construir? ¿Cómo lo sabes?

11·5= 55
21+55= 76 paredes necesitas
Porque de la uno a la dos solo se suman 5 y de la cero a la 1 pasa lo mismo

Figura 2.14: Ejemplo de resolución mediante la estrategia funcional.

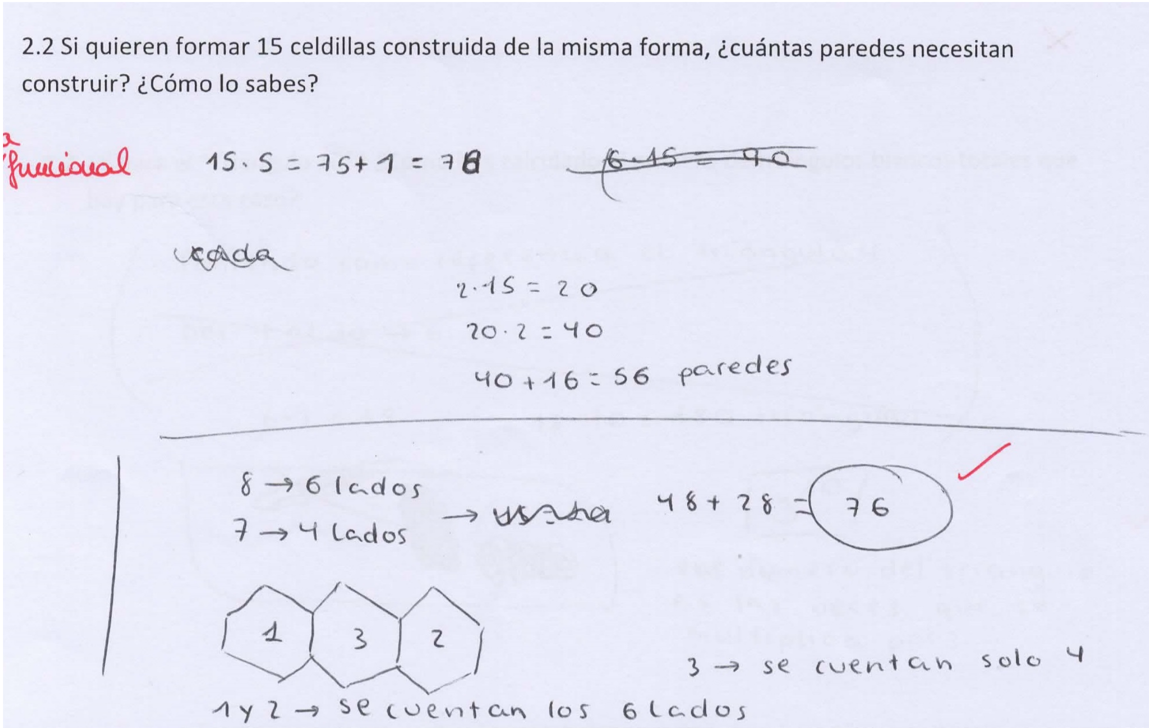
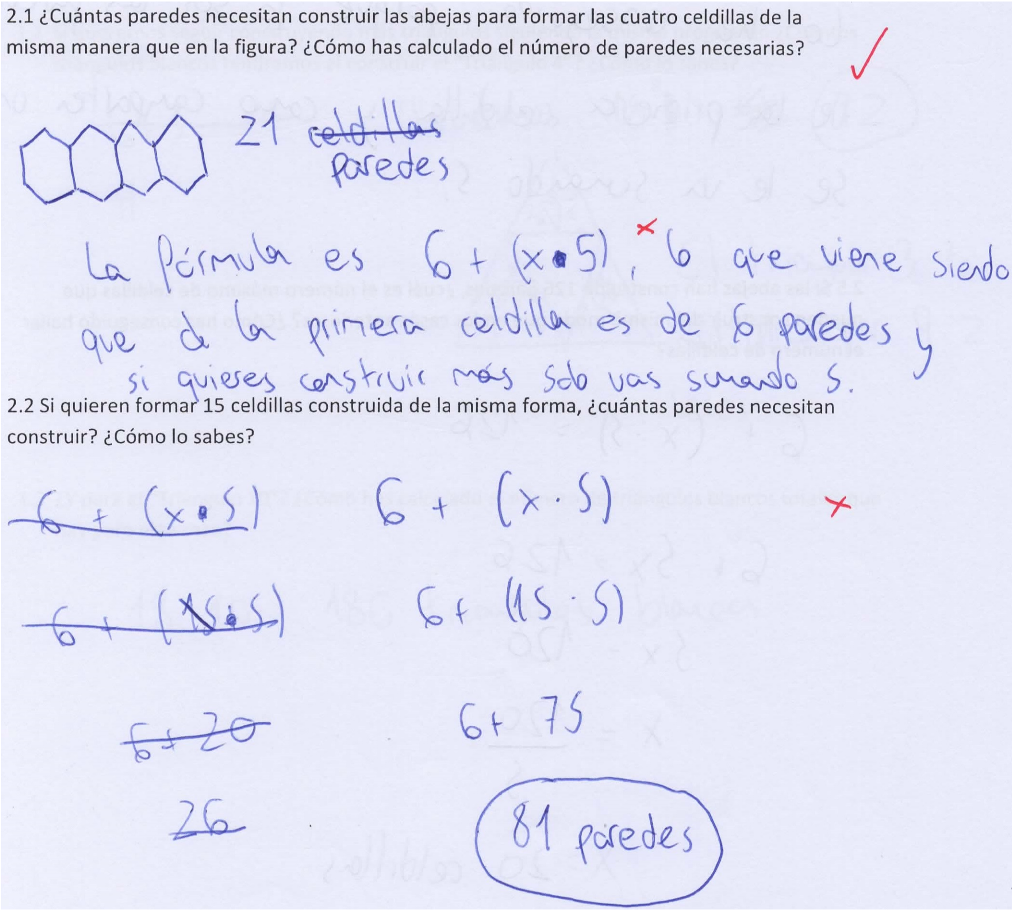


Figura 2.15: Ejemplo de resolución mediante estrategia funcional implícita y conteo.

En la Figura 2.15 podemos ver que en un primer intento llega a una solución incorrecta a partir de la estrategia funcional implícita, pero se apoya en la estrategia de conteo mediante un dibujo para contar las paredes de cada celdilla y, de esta forma, llega al resultado correcto.
En el ejemplo de la figura 2.16 tenemos un intento de estrategia funcional explícita. El término general definido es incorrecto aunque haya acertado el número de paredes en la pregunta de generalización inmediata. Ha llegado a esta respuesta mediante la técnica de conteo y, posteriormente, no prueba si su expresión algebraica se cumple para $x = 4$. Si lo hubiera hecho, se habría dado cuenta del error. Sin más comprobaciones, toma como cierto el término general y lo usa en la siguiente cuestión sobre generalización cercana. Sustituye x por el valor 15 ya que es el número de celdillas que se piden en el enunciado y llega a una solución incorrecta. Podría haber comprobado el resultado dibujando otra vez las celdillas.

Por último, tenemos la estrategia proporcional cuyo uso lleva a un resultado erróneo a no ser que se trate de una secuencia meramente proporcional. Esta estrategia permite calcular el valor de un término de la secuencia al establecer una proporción entre un término ya conocido y el que queremos hallar a partir de las cantidades de elementos que tiene cada término. En las figuras 2.17 y 2.18 encontramos ejemplos de estrategia proporcional.



2.1 ¿Cuántas paredes necesitan construir las abejas para formar las cuatro celdillas de la misma manera que en la figura? ¿Cómo has calculado el número de paredes necesarias?

21 ~~celdillas~~ paredes

La fórmula es $6 + (x \cdot 5)$, 6 que viene siendo que de la primera celdilla es de 6 paredes y si quieres construir más solo vas sumando 5.

2.2 Si quieren formar 15 celdillas construida de la misma forma, ¿cuántas paredes necesitan construir? ¿Cómo lo sabes?

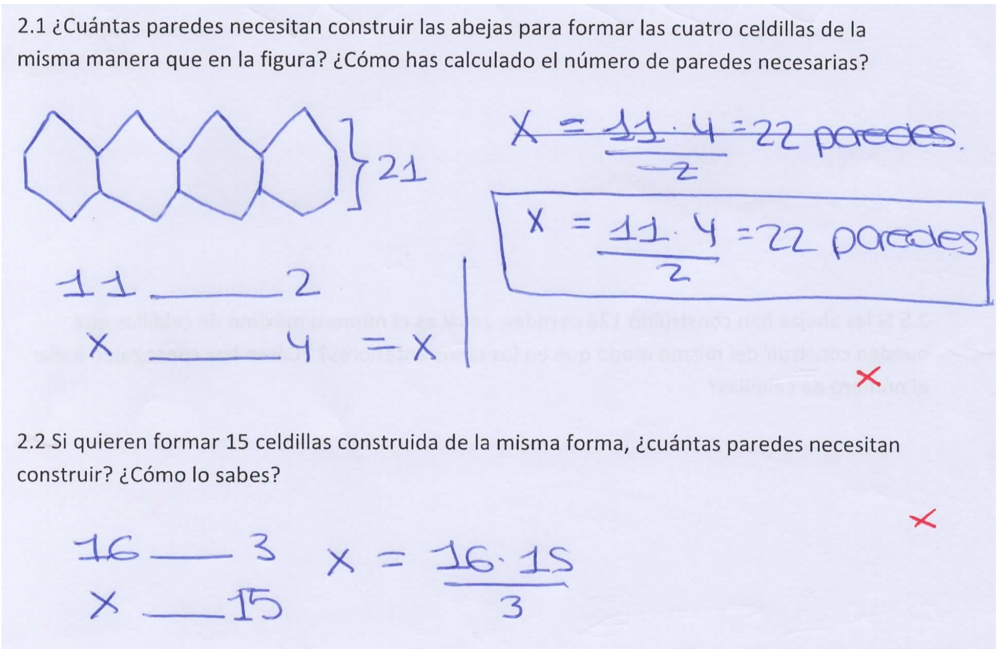
~~$6 + (x \cdot 5)$~~ $6 + (x \cdot 5)$

~~$6 + (15 \cdot 5)$~~ $6 + (15 \cdot 5)$

~~$6 + 20$~~ $6 + 75$

26 81 paredes

Figura 2.16: Ejemplo de resolución mediante estrategia funcional implícita.



2.1 ¿Cuántas paredes necesitan construir las abejas para formar las cuatro celdillas de la misma manera que en la figura? ¿Cómo has calculado el número de paredes necesarias?

21

~~$X = \frac{11 \cdot 4}{2} = 22$ paredes.~~

11 —— 2

X —— 4 = X

$\boxed{X = \frac{11 \cdot 4}{2} = 22 \text{ paredes}}$

2.2 Si quieren formar 15 celdillas construida de la misma forma, ¿cuántas paredes necesitan construir? ¿Cómo lo sabes?

16 —— 3

X —— 15

$X = \frac{16 \cdot 15}{3}$

Figura 2.17: Ejemplo de dos procedimientos erróneos mediante el uso de la regla de tres.

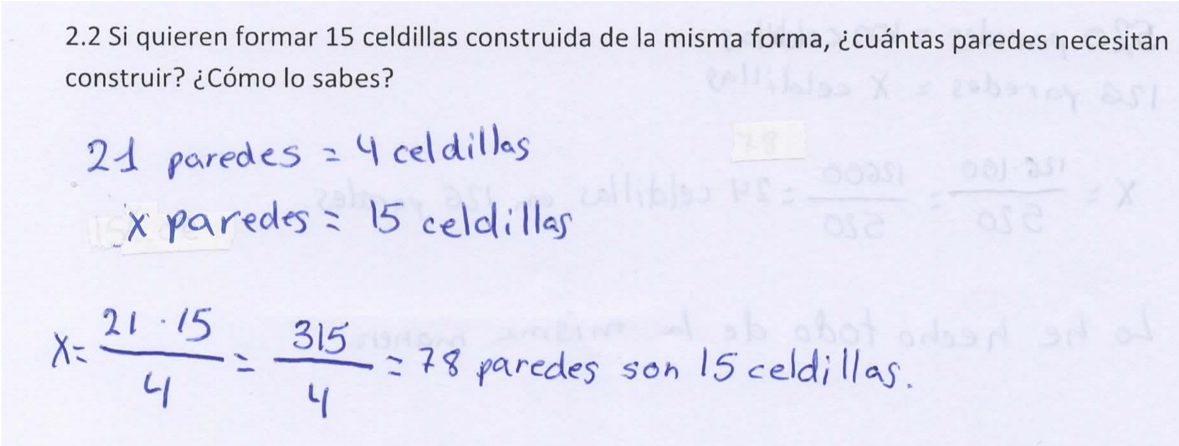


Figura 2.18: Ejemplo de resultado incorrecto debido al uso de una regla de tres.

Podemos observar que en los ejemplos con estrategia proporcional no se llega a la solución correcta ya que no se puede resolver de este modo. Es curioso que en el ejemplo de la figura 2.17 en el ejercico 2.1 el alumno consigue hallar la solución correcta mediante la técnica del conteo pero decide dar como respuesta final la hallada por la regla de tres. Podríamos decir que esto nos sirve para ver la tendencia de los alumnos hacia el uso de estrategias proporcionales aún teniendo otras herramientas más eficaces.

Otro recurso utilizado por los alumnos pero que no vamos a clasificar como estrategia en sí es la realización de una tabla que recoja los datos de los términos conocidos. De este modo, varios consiguen entender mejor cómo es la sucesión relacionando la posición del término y el número de elementos que contiene. Se exponen en las figuras 2.19 y 2.20 ejemplos de lo que podríamos llamar procedimiento tabular:

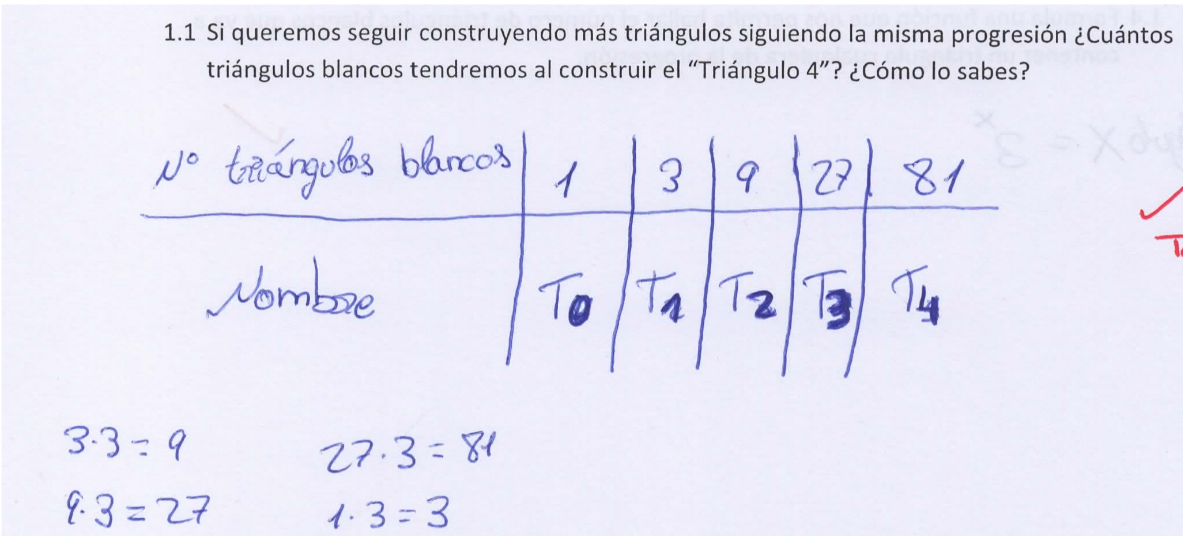


Figura 2.19: Tabla realizada por un alumno para el ejercicio 1.1.

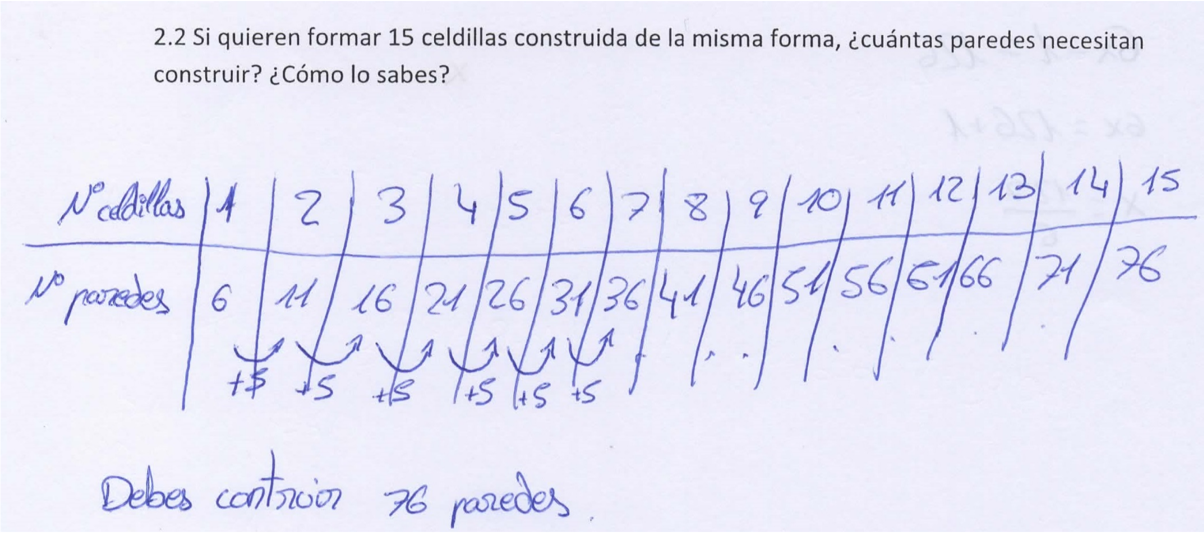


Figura 2.20: Ejemplo de tabla realizada para el ejercicio 2.2.

En la figura 2.20 podemos decir que ha construido la tabla con la estrategia recursiva aditiva. Conoce cuál es la diferencia entre elementos de la sucesión (escribe +5 entre celdas) y, de este modo, calcula los términos hasta llegar a la posición 15 que corresponde a un término cercano.
A continuación vemos la tabla formada por las estrategias citadas anteriormente.

Estrategia	Definición
Conteo	Consiste en dibujar o construir el patrón del término demandado y contar todos sus elementos.
Recursiva aditiva	Se realizan sumas sucesivas usando la diferencia numérica entre términos consecutivos como factor aditivo hasta llegar al término.
Múltiplo de la diferencia	Se usa como factor multiplicativo la diferencia entre términos consecutivos hasta llegar al deseado.
Funcional	Se aplica de manera explícita o implícita una relación funcional general que permita calcular la cantidad de objetos de un término cualquiera de la sucesión sabiendo su posición en ella.
Proporcional (Suele ser errónea)	Se calcula la cantidad de objetos de un término de la sucesión estableciendo una proporción entre las posiciones de dos términos de la sucesión y sus cantidades correspondientes.

Cuadro 2.1: Estrategias de generalización.

La resolución de problemas de generalización a partir de patrones geométricos es un proceso complejo en el que intervienen varios elementos.

Necesitamos que los alumnos tengan una base de conocimientos, saber gestionar y trabajar con los elementos que se enuncian y la capacidad de usar la lógica y la creatividad al mismo tiempo.

Dependiendo de la base de conocimientos matemáticos que tenga cada alumno vamos a obtener unos resultados distintos que serán, en consecuencia, más o menos exitosos.

Por este hecho, hemos visto necesario realizar una prueba individual de nivel matemático con carácter general que fue orientada a la edad de los alumnos de la muestra y el currículo de Matemáticas de Educación Secundaria de su curso. Esta prueba de nivel nos va a servir a posteriori para clasificar a los alumnos en distintos niveles según la puntuación obtenida en la prueba.

2.6. El currículo en 3º de ESO en la modalidad Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

Hagamos un inciso para contextualizarnos en el currículo [BOC]. Este estudio fue realizado a alumnos de 3º de ESO que cursaban la asignatura de Matemáticas en la modalidad de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Vamos a ir tratando el currículo por bloques y vamos a ir relacionándolo a su vez con nuestro estudio. El currículo de la modalidad "enseñanzas académicas" que se imparte en 3º y 4º de ESO se articula en cinco bloques de contenidos, estos son:

1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
2. Números y Álgebra.
3. Geometría.
4. Funciones.
5. Estadística y probabilidad.

Veamos entonces que se trata en cada bloque y que contenidos se imparten en este curso según esta clasificación:
El bloque 1 se llama "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas" y se organiza sobre procesos básicos e imprescindibles de las Matemáticas como pueden ser la resolución de problemas, la matematización y modelización. Este bloque sirve para cualquier aspecto de las matemáticas. Y en nuestro estudio, en general, se necesita tener capacidad de resolución de problemas para llevar a cabo las pruebas. Respecto a la matematiza-

ción y la modelización, en el ejercicio de las abejas estamos tratando un problema matemático en el contexto de la naturaleza puesto que las abejas construyen sus enjambres a partir de celdas hexagonales y los alumnos deben encontrar el modelo matemático que les permita resolver las tareas demandadas.
En el bloque 2. Números y Álgebra nos encontramos varios contenidos. Podemos verlos en la tabla 2.2 de forma resumida:

Contenidos del bloque 2. Números y Álgebra
Números decimales, racionales e irracionales.
Representación en la recta numérica de los números reales
Operaciones con fracciones y decimales. Jerarquía de operaciones.
Potencias de números racionales con exponente entero. Potencias de base 10.
Raíces cuadradas y cúbicas. Raíces no exactas.
Sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas.
Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
Introducción al estudio de polinomios.
Resolución de ecuaciones de segundo grado y sencillas de grado superior a dos.
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Cuadro 2.2: Contenidos del currículo dentro del bloque 2.

En la prueba de nivel de carácter matemático general podemos destacar varias preguntas relativas a este bloque. Como, por ejemplo, la representación en la recta real de los números reales, operaciones con fracciones y aplicar la jerarquía de operaciones. También, otros ejercicios como planteamiento y resolución de problemas, operaciones con polinomios, etc. Resaltamos, por otra parte, las cuestiones en las que los alumnos necesitaron realizar, como dice en el currículo, una traducción del lenguaje verbal al algebraico. Por ejemplo, resolver un problema de una rampa para salvar un desnivel, situaciones tan cotidianas en su día a día como calcular cuánto necesitan de media para aprobar una asignatura, ir a comprar ropa y calcular los precios mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos incognitas que debemos saber plantear, obviamente, de manera algebraica. Sin embargo, aunque no fue incluido en la prueba de nivel, de este bloque lo que más interés nos suscita para nuestro estudio es el apartado de sucesiones numéricas, progresiones aritméticas y geométricas. Como ya hemos explicado anteriormente los alumnos no habían llegado a dar este contenido del currículo aún en las fechas en las que realizamos las pruebas.

En siguiente lugar tenemos el bloque 3 centrado en la Geometría. Veamos algunos de los contenidos básicos del bloque en la tabla 2.3.

Contenidos del bloque 3. Geometría
Geometría del plano y del espacio. Mediatriz, bisectriz y sus relaciones Perímetros y áreas de polígonos y figuras circulares. Áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas. Semejanza de triángulos. Teorema de Tales. Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Cuadro 2.3: Contenidos del currículo dentro del bloque 3.

De este bloque destacamos que en la prueba de nivel se valoraron aspectos cómo la geometría del plano, áreas y volúmenes de distintas figuras. Debían calcular perímetros, cálcular áreas, utilizar el Teorema de Pitágoras y se pregunto por simetrías en el plano. Respecto a la prueba de sucesiones se aplica también geometría del plano puesto que en los enunciados se ofrecen los datos mediante patrones geométricos.

Veamos una serie de contenidos que se engloban dentro del bloque 4 sobre Funciones en la tabla 2.4.

Contenidos del bloque 4. Funciones
Análisis y descripción cualitativa de gráficas. Estudio de las características: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. Utilización de modelos lineales para estudiar distintas situaciones mediante la confección de la tabla, representación gráfica y obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta. Casos particulares de rectas. Funciones cuadráticas.

Cuadro 2.4: Contenidos del currículo dentro del bloque 4.

En la prueba de nivel se evalúan aspectos de este bloque cómo saber interpretar una gráfica, estudiar sus características y analizar situaciones de dependencia funcional. También se observa la capacidad por parte del alumno de responder cuestiones relacionadas con la información que obtenemos de la representación de funciones. Todo lo anteriormente citado en este párrafo está contenido en el bloque relativo a las funciones que ha sido citado en la tabla anterior. A la hora de definir el término general de las sucesiones en las pruebas es importante que el sujeto tenga un mínimo de conocimientos de este bloque.

Por último, en el bloque 5 dedicado a la estadística y la probabilidad nos encontramos:

Contenidos del bloque 5. Estadística y Probabilidad
Fases y tareas de un estudio estadístico.
Métodos de selección y representatividad de una muestra.
Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.
Gráficas estadísticas. Diagrama de caja y bigotes.
Parámetros de posición y dispersión.
Interpretación y análisis crítico ante la información de índole estadística.
Sucesos y espacio muestral.
Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos.
Permutaciones, factorial de un número.

Cuadro 2.5: Contenidos del currículo dentro del bloque 5.

A pesar de que estos últimos contenidos no se preguntan explícitamente en los ejercicios ni son esenciales a la hora de generalizar a partir de un patrón geométrico fueron evaluados en la prueba de nivel. Se preguntó por el cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y tareas de carácter estadístico.

En el Anexo B se encuentra la prueba sobre el nivel matemático realizada a los alumnos adaptada al currículo del curso donde podemos observar las preguntas citadas en este apartado dividido por bloques.

Para finalizar este apartado haremos una breve reflexión sobre el currículo sin centrarnos solamente en el curso que acabamos de presentar.

Extrayendo algunas ideas de [Stacey et al (2004)] podemos llegar a la conclusión de que el álgebra debe estar integrado implícitamente con otros temas de matemáticas con el objetivo de su utilización como un lenguaje para expresar las ideas de manera regular. Y, de manera general, intentar que el alumno no perciba los temas del currículo como bloques aislados entre sí. Por último, decir también que debemos tener en cuenta todas las oportunidades que nos ofrece la tecnología para el aprendizaje y el uso cada vez mayor de estas herramientas para el cálculo, la elaboración y visualización de gráficos, entre otras tareas. Con esto queremos transmitir la necesidad de incluir estos aspectos en el currículo ya que pueden ser tanto ayudas pedagógicas como importantes herramientas a la hora de encontrar soluciones.

2.7. La flexibilidad para resolver problemas matemáticos

Cuando mencionamos la creatividad a la hora de resolver problemas matemáticos nos referimos, de manera general, a la fluidez, flexibilidad de pensamiento y originalidad.

Uno de los aspectos en el que vamos a hacer hincapié entre otros al comprobar las resoluciones hechas por los alumnos es la flexibilidad en el uso de estrategias.

Podemos definir la *flexibilidad* como la capacidad de modificar las estrategias empleadas en la resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea [Callejo et al (2014)].
Es un constructo que ha sido estudiado en diversos campos como son el de la cognición, la psicología del desarrollo y la educación matemática .

La flexibilidad tiene distintas acepciones y se puede representar de diversas formas: cambiar de una operación mental a otra cualitativamente diferente o a los distintos enfoques que se pueden dar para la resolución de un problema.

A la hora de hablar de flexibilidad, nos encontramos con otro término relacionado que es la *adaptividad*. Cabe destacar que existen autores, como [Callejo et al (2014)], que usan estos dos términos como sinónimos.
Podemos encontrar diferencias entre los términos a la hora de utilizarlos ya que la flexibilidad se emplea, en general, cuando nos referimos al hecho de usar varias estrategias y la capacidad de cambiar de una a otra y, por otro lado, la adaptividad se centra en la habilidad para seleccionar, de manera consciente o no, la estrategia más apropiada para la resolución de la tarea.
Además, distinguen entre intra-flexibilidad e inter-flexibilidad. Llamamos intra-flexbilidad a la flexibilidad del pensamiento dentro de un mismo problema y el concepto de inter-flexibilidad al empleo de la flexibilidad entre distintos problemas [Callejo et al (2014)].

Al estar compuesto nuestro cuestionario sobre sucesiones por dos ejercicios distintos y cada uno por cinco apartados diferentes, entonces podremos analizar levemente la intra-flexibilidad y la inter-flexibilidad.
Si el alumno es capaz de resolver los cinco apartados del mismo ejercicio correctamente basándose en el uso de distintas estrategias diremos que posee una buena intra-flexbilidad. En el caso de que el alumno tenga la capacidad de resolver ambos ejercicios planteados en el cuestionario estaremos hablando entonces de inter-flexibilidad.

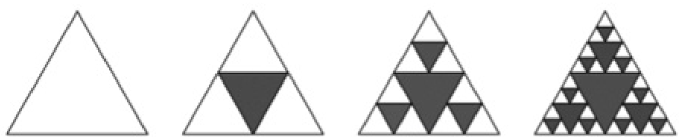
En la figura 2.21 nos encontramos con dos apartados distintos que corresponden al primer ejercicio del cuestionario. Usamos este ejemplo para ver la demanda de estrategias distintas. El apartado 1.3 requiere para su solución la capacidad de usar una estrategia clasificada como directa. En segundo

lugar, el 1.5 se propone para ver el uso de estrategias inversas. El cambio de estrategias entre apartados nos sirve de indicador de la flexibilidad en base de si el alumno es capaz de elegir la estrategias requeridas.
El hecho de que nos interese fijarnos en la flexibilidad interiorizada que tienen los alumnos es porque está fuertemente relacionada con el proceso de resolución de problemas y llevarlo a cabo con éxito.
Esto se debe a que en el aprendizaje de las matemáticas nos enfrentamos a nuevas situaciones y problemas a medida que avanzamos. Por lo que es conveniente tener una buena base de competencias matemáticas donde están incluidas las distintas estrategias y, también, el ser flexibles para su uso y adaptación al problema.

Habitualmente, se pueden ver diferencias entre individuos de la misma edad debido, en ocasiones, al grado de flexibilidad que tenga cada uno de ellos para utilizar estrategias alternativas según las condiciones de los problemas [Callejo et al (2014)].

En nuestro estudio, realizado a alumnos de 3º de ESO nos encontramos que todos tienen la misma edad (excepto algún caso en concreto), por lo que podremos relacionar de manera más sencilla los resultados obtenidos con el grado de flexibilidad entre estudiantes de la misma edad.

Ejercicio 1:



En la figura anterior podemos observar cuatro triángulos. Dentro de cada triángulo hay triángulos blancos y/o coloreados. El triángulo más a la izquierda le denominaremos "Triángulo 0", al siguiente "Triángulo 1", al tercero contando desde la izquierda "Triángulo 2" y al que está situado a la derecha del todo "Triángulo 3".

1.3 ¿Si queremos construir el "Triángulo 50"? ¿Cuántos triángulos blancos va a contener este triángulo? ¿Cómo has llegado a este resultado?

1.5 Si quisiéramos construir un triángulo que contenga 729 triángulos blancos en su interior ¿Cuál sería el número del triángulo correspondiente siguiendo la notación ya utilizada para nombrar los triángulos anteriores, es decir, qué número tendríamos que poner en la X si le queremos llamar "Triángulo X" al triángulo con 729 triángulos blancos en su interior? ¿Cómo has hallado la X de "Triángulo X"?

Figura 2.21: Ejercicio 1: La pregunta 1.3 es de relación directa. La pregunta 1.5 es de relación inversa.

3 Metodología

3.1. Preguntas de la investigación

En esta investigación vamos a abordar una serie de preguntas:

- ¿Hasta qué punto los alumnos de 3º de la ESO tienen desarrollada la capacidad de formular generalizaciones a partir de patrones geométricos?
- ¿Cuáles son las técnicas más usadas por los alumnos a la hora de generalizar?
- ¿Hay correlación entre el nivel general en matemáticas presentado por los alumnos en las pruebas de nivel y su capacidad de generalizar?
- ¿Y entre su nivel en matemáticas y la flexibilidad en el uso de distintas técnicas de generalización?

3.2. Desarrollo del estudio

El experimento contó con la participación de tres clases de 3º de ESO de dos institutos públicos de Cantabria, España. En total, sumamos 45 alumnos para el estudio.

La muestra iba a ser de mayor tamaño debido a que, inicialmente, contábamos con cinco grupos de estudiantes de 3º de ESO y uno de 4º de ESO pero en las fechas en las que se iba a realizar la prueba en las dos clases restantes de 3º y la de 4º nos encontramos con la suspensión de la actividad académica y el confinamiento general de la población debido a la crisis sanitaria del Covid-19.

La investigación estaba diseñada, en un primer momento, en tres partes: La primera era la realización de la prueba de carácter general sobre el nivel matemático de los alumnos, la segunda constaba de la realización del cuestionario de sucesiones formado por dos ejercicios[1] y la tercera parte estaba basada en realizar entrevistas de manera individual sobre las respuestas dadas en los cuestionarios a una parte de la muestra. Esta proporción de la muestra hubiese sido seleccionada en base a los resultados obtenidos en las dos primeras partes. Este estudio iba a ser también llevado a cabo en la clase de 4º de ESO para comparar los resultados obtenidos entre los dos cursos puesto que los alumnos del curso superior habían trabajado los contenidos de sucesiones anteriormente. Habríamos estudiado entonces las diferencias entre la realización de la prueba de manera intuitiva (3º) y, también, con más conocimientos y herramientas para abordar el tema (4º). Como consecuencia de la crisis sanitaria, además de vernos obligados reducir la muestra, no se pudo llevar a cabo la tercera parte del estudio puesto que no se retomaron las clases del curso 2019/2020 y era inviable realizar entrevistas individuales a los alumnos.

La finalidad de la primera parte era poder clasificar en 4 niveles de competencia matemática a los alumnos participantes en el estudio. La prueba de nivel de carácter general matemático constaba de 15 ejercicios y cada ejercicio puntuaba hasta un máximo de 10 puntos siendo así la puntuación más alta posible de 150 puntos. Tuvieron una hora de clase para realizar el cuestionario y no tenían permitido el uso de la calculadora. Había ejercicios de distintos tipos: operaciones con fracciones, planteamiento de problemas de manera algebraica, algunos otros eran de tipo test teniendo varias respuestas y siendo solo una correcta, etc. (Ver Anexo B) En la correción de la prueba no se han asignado califaciones negativas a los ejercicios con respuestas incorrectas por lo cual la puntuación mínima posible es 0.

Se diseñó la prueba extrayendo algunos ejercicios de la Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables [CDI] de la Comunidad de Madrid de la fecha abril de 2009 para el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria y, también, de la prueba de Evaluación de Educación Secundaria Obligatoria sobre la competencia matemática para el 4º curso de ESO creada por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa [INEE].

En base a las calificaciones obtenidas en la prueba se clasificó a los alumnos en 4 niveles. Los alumnos que obtuvieron una calificación situada entre el 0 y el 37.5 se encuentran en el nivel D, los que consiguieron una puntuación mayor que 37.5 y menor o igual a 75 se les asignó el nivel C, los que se encuentran en el nivel B sacaron una puntuación mayor de 75 y menor o

[1] La realización de las pruebas escritas fue autorizada previamente por el Comité de Ética de Proyectos de Investigación de la Universidad de Cantabria y los padres/tutores legales de cada alumno.

igual que 112.5. Por último, los que lograron las puntuaciones más altas comprendidas entre 112.5 y 150 constituyen el nivel A. Ver tabla 3.1.

Puntuación	Nivel
[0, 37.5]	Nivel D
(37.5, 75]	Nivel C
(75, 112.5]	Nivel B
(112.5, 150]	Nivel A

Cuadro 3.1: Puntuación correspondiente a cada nivel.

Nº alumnos totales	45
Sexo masculino	27
Sexo femenino	18
Nivel A	3
Nivel B	22
Nivel C	16
Nivel D	4
Moda	Nivel B
Media	77.32 (Nivel B)
Mediana	Se encuentra en el nivel B

Cuadro 3.2: Número de alumnos clasificados por género y nivel.

Al diferenciar a los alumnos en cuatro niveles en función de las puntuaciones descritas en la tabla 3.1 obtenemos la siguiente clasificación en la tabla 3.2. A partir de estos datos podemos afirmar cuál es la moda, la media y la mediana.

En la segunda parte del estudio, los alumnos realizaron un cuestionario donde el primer ejercicio trataba una progresión geométrica a partir del triángulo de Sierpinski y el segundo ejercicio consistía en una progresión aritmética cuya figura sigue un patrón lineal, formado por hexágonos simulando las celdillas de un enjambre de abejas. Tenían una hora de clase para realizar el cuestionario compuesto por los dos ejercicios.

En cada ejercicio se propone a los estudiantes varias cuestiones, cada una de ellas es de mayor dificultad que la anterior. La primera pregunta trata sobre el término inmediato, en la segunda deben hallar el término cercano demandado y en la tercera un término lejano. A continuación, se pide intentar hallar el término general de la sucesión y la última pregunta de cada ejercicio corresponde a una cuestión de estrategia inversa. En la última pregunta vemos la diferencia con las tres primeras que son de estrategia directa. Para poder responder a las preguntas de estrategia inversa se necesita modificar la estrategia utilizada en las cuestiones anteriores. En este punto va a ser dónde podremos señalar la flexibilidad del alumno.

En el momento del estudio, como ya hemos explicado anteriormente, los estudiantes no habían llegado a trabajar el tema de sucesiones en clase. Intentamos, de manera primordial, que este hecho fuera así ya que buscábamos una respuesta intuitiva para ver su capacidad de generalizar sucesiones sin tener conocimientos previos de la materia. Ellos cuando realizaron los cuestionarios desconocían los conceptos de progresión geométrica, aritmética y ni siquiera sabían qué es el término general de una sucesión.

Antes de continuar con la siguiente sección, recordemos de qué trata cada apartado del cuestionario.

Ejercicio 1	Apartado 1.1	Apartado 1.2	Apartado 1.3	Apartado 1.4	Apartado 1.5
Ejercicio 2	Apartado 2.1	Apartado 2.2	Apartado 2.3	Apartado 2.4	Apartado 2.5
Tipo de pregunta	Término inmediato	Término cercano/próximo	Término lejano	Definir función	Utilizar estrategia inversa

Cuadro 3.3: Los conceptos requeridos en cada apartado del cuestionario.

Acontecemos, entonces, a realizar el análisis del los resultados obtenidos en las pruebas.

4 Análisis de resultados

En esta sección vamos a analizar las respuestas obtenidas por los alumnos. Veremos porcentaje de aciertos, fallos y respuestas en blanco, las estrategias más usadas y la flexibilidad. Analizaremos estos aspectos tanto de forma general como observando por separado cada uno de los niveles y apartados.

4.1. Respuestas correctas, incorrectas y en blanco.

En la tabla 4.1 se recogen el número de respuesta correctas, incorrectas y en blanco (no contestadas) de cada apartado.

Ejercicio 1	Apartado 1.1	Apartado 1.2	Apartado 1.3	Apartado 1.4	Apartado 1.5
Respuestas correctas	29	14	7	8	6
Respuestas incorrectas	16	26	25	18	20
NS/NC	0	5	13	19	19
Ejercicio 2	Apartado 2.1	Apartado 2.2	Apartado 2.3	Apartado 2.4	Apartado 2.5
Respuestas correctas	37	31	24	10	10
Respuestas incorrectas	8	14	18	24	29
NS/NC	0	0	3	11	6

Cuadro 4.1: Clasificación de respuestas en correctas, incorrectas y sin contestación.

En un primer vistazo a la tabla 4.1 nos damos cuenta de que el número de respuestas correctas disminuye a medida que avanzamos en los apartados de cada ejercicio. Esto tiene fácil explicación puesto que cada apartado demanda una tarea de mayor dificultad que la precedida. Lógicamente, a mayor dificultad más probabilidades de fallar en la respuesta. Tenemos la información de la tabla 4.1 representada gráficamente a partir de un diagrama de barras en las figuras 4.1 y 4.2. Hemos seleccionado el diagrama de barras como método de representación al tratarse de unos datos cualitativos como son "Respuestas correctas", "Respuestas incorrectas"*o* "No sabe / No contesta".

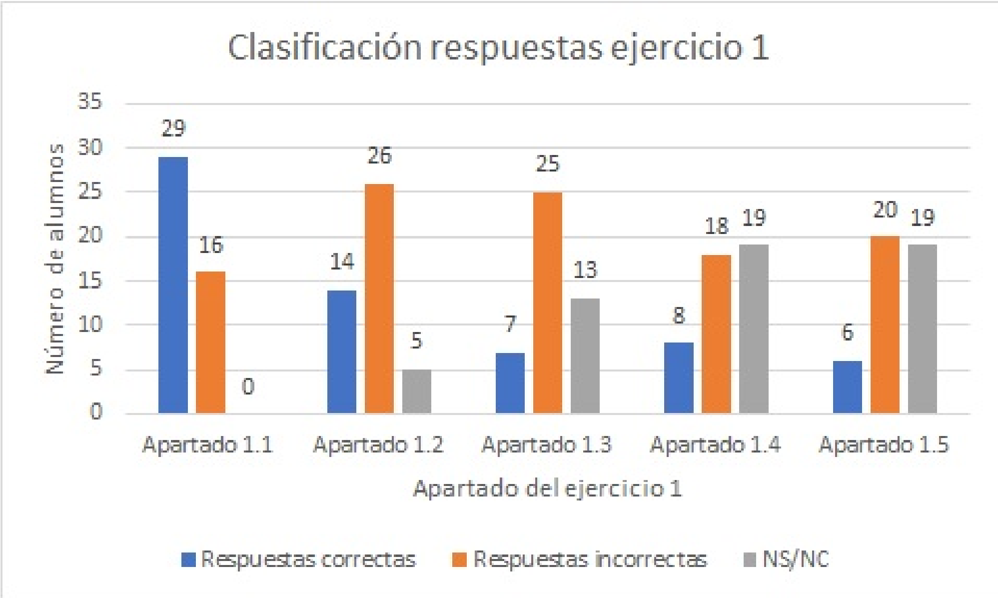


Figura 4.1: Representación gráfica de la clasificación de respuestas del ejercicio 1.

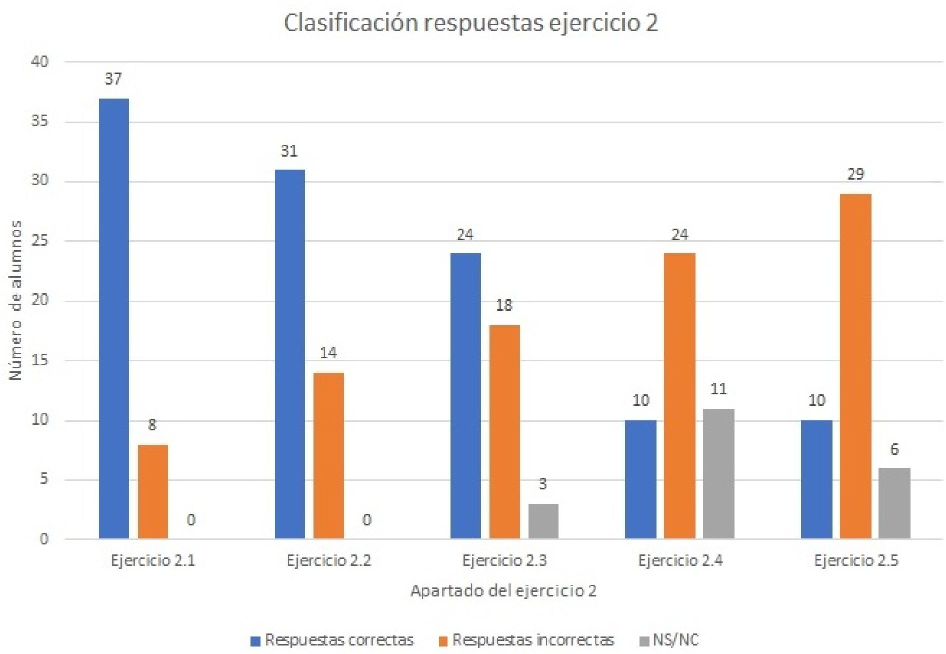


Figura 4.2: Representación gráfica de la clasificación de respuestas del ejercicio 2.

Como ya hemos explicado en anteriores secciones, los apartados 1.1 y 2.1 de la prueba tratan sobre hallar el término inmediato de la sucesión correspondiente de cada ejercicio. En el primer apartado del ejercicio 1 el porcentaje de respuestas correctas es 64.44 % y en el segundo ejercicio llega a un 82.22 %. Veamos esta información de manera visual a través de dos sectores circulares realizados en función de los porcentajes en la figura 4.3. Cabe destacar que en ambos apartados no hubo ninguna respuesta en

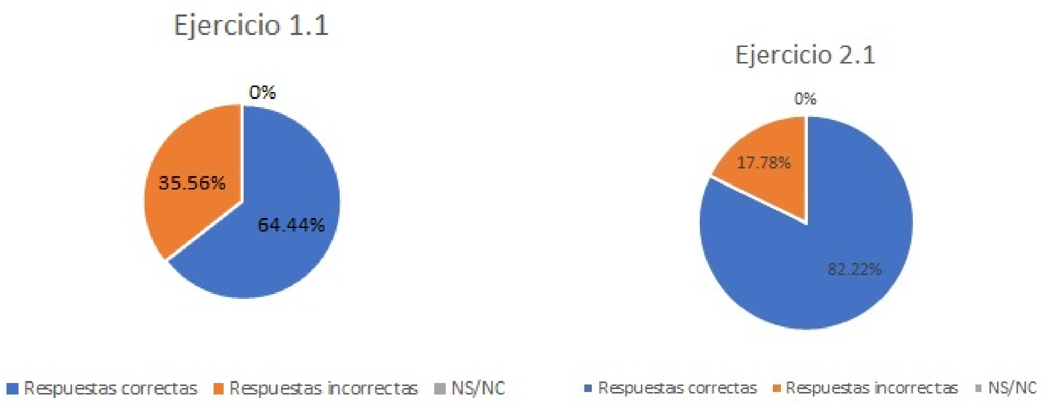


Figura 4.3: Sectores circulares de los porcentajes de los apartados 1.1 y 2.1.

blanco. Todos los alumnos que realizaron las pruebas intentaron responder obteniendo mayor o menor éxito la pregunta. Siendo el porcentaje de aciertos mayor del 50 % en ambos apartados del término inmediato.

Continuamos con los apartados 1.2 y 2.2. Estas dos cuestiones tratan de hallar un término cercano/próximo. En el ejercicio de las abejas se busca el número de paredes necesarias para construir 15 celdillas y en la pregunta 1.2 queremos averiguar cuántos triángulos blancos hay en el triángulo llamado “Triángulo 10” en la sucesión. Veamos los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y en blanco en la figura 4.4.

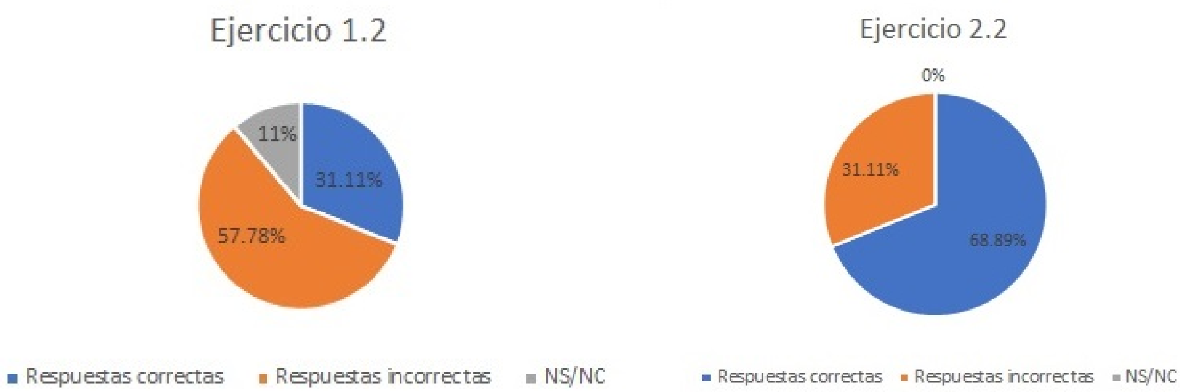


Figura 4.4: Sectores circulares de los porcentajes de los apartados 1.2 y 2.2.

En el ejercicio 2.2 todos los alumnos respondieron la pregunta, en cambio en el apartado 1.2 ya vemos que hay un 11.11 % de alumnos que no fueron capaces de responder. En este apartado de los 45 alumnos respondieron la cuestión 40 alumnos y lo hicieron de manera correcta 14, lo que equivaldría a un 35 % de respuestas del total de las 40 obtenidas y en el ejercicio 2.2 respondieron los 45 alumnos y de ellos hubo 31 que acertaron. La diferencia significativa entre ambos apartados es el hecho de que en el 1.2 se trata de una progresión geométrica y el 2.2 se basa en una progresión aritmética. Como conclusión de estos cuatro apartados, podríamos decir que los alumnos han tenido más éxito hallando el término inmediato y cercano de la progresión aritmética.

Si comparamos estos datos con los que tenemos de los apartados 1.3 y 2.3 podemos ver que en el apartado 1.3 el porcentaje de respuestas correctas ha bajado hasta el 15.55 % y en el apartado 2.3 a un 53.33 %. En ambos se pide al alumno que halle un término lejano de la sucesión. En el 1.3 se pide hallar el término que ocupa la posición 50 en la sucesión y en el 2.3 la número 100. Situamos la tasa de respuestas en blanco del apartado 1.3 en un 28.8 % y en el 2.3 es un 6.66 %. Nos llama la atención que más de un cuarto de los alumnos del estudio no dieron ninguna respuesta a la pregunta 1.3. Veamos esta información en la figura 4.5.

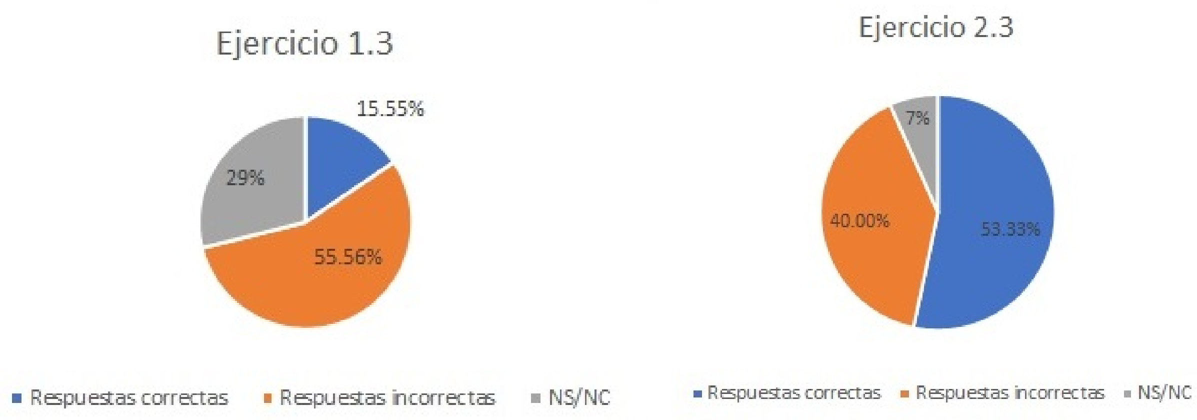


Figura 4.5: Sectores circulares de los porcentajes de los apartados 1.3 y 2.3.

En la cuarta cuestión de cada ejercicio se pide al alumno que defina una función para determinar cualquier término de la sucesión. Ya no pedimos que nos halle cierto término de la sucesión utilizando la estrategia que prefiera, en este apartado buscamos de manera más directa observar la capacidad de generalizar del alumno y su manejo con el lenguaje algebraico. En definitiva, con esta pregunta estamos intentando que lleguen a definir el término general de la sucesión. Los alumnos al no ser conocedores de la teoría de sucesiones, no saben el concepto de término general. A pesar de ello, algunos sí consiguieron formular la expresión algebraica correcta. Durante el desarrollo de la prueba los alumnos podían hacerme preguntas sobre sus dudas respecto a los enunciados. Este apartado fue el que más dudas generó ya que hubo varios estudiantes que no sabían exactamente qué era una función y, por ende, no entendían que pedía el enunciado. A continuación, observemos en la figura 4.6 el porcentaje de cada tipo de respuesta obtenida.

Figura 4.6: Sectores circulares de los porcentajes de los apartados 1.4 y 2.4.

El porcentaje de respuestas incorrectas es cada vez más elevado. En el ejercicio 1.4 respondieron la pregunta 26 alumnos de 45 y en el 2.4 dieron respuesta 34 alumnos. Si hacemos el porcentaje de respuestas incorrectas sin tomar el número de alumnos que respondieron en blanco tenemos un 69.23 % para el 1.4 y un porcentaje del 70.58 % en el 2.4. Los errores más frecuentes al intentar definir el término general fueron, por un lado, dificultades al intentar escribir de manera matemática la expresión y, por otro lado, definir una expresión algebraica la cual solo se cumple para unos determinados valores de la sucesión. Esto nos lleva a ver la falta de capacidad de generalización que se hace visible a la hora de intentar definir el término general. También fueron comunes los errores de notación al definir las variables, algunos de estos ejemplos se pueden ver en la sección del marco teórico cuando tratamos los distintos significados que pueden atribuir los alumnos a las letras.

Por último, las cuestiones finales de cada ejercicio tratan de emplear una estrategia inversa. Lo ideal sería que a partir del término general definido intenten aplicar la estrategia inversa sustituyendo los valores que nos da el enunciado en el lugar correspondiente. En el ejercicio 1.5 tenemos que averiguar en qué posición se encuentra el triángulo que contiene 729 triángulos blancos en su interior y en el 2.5 el número máximo de celdillas que se pueden construir con 126 paredes.

Los porcentajes basados en la clasificación de las respuestas obtenidas se recogen en la figura 4.7.

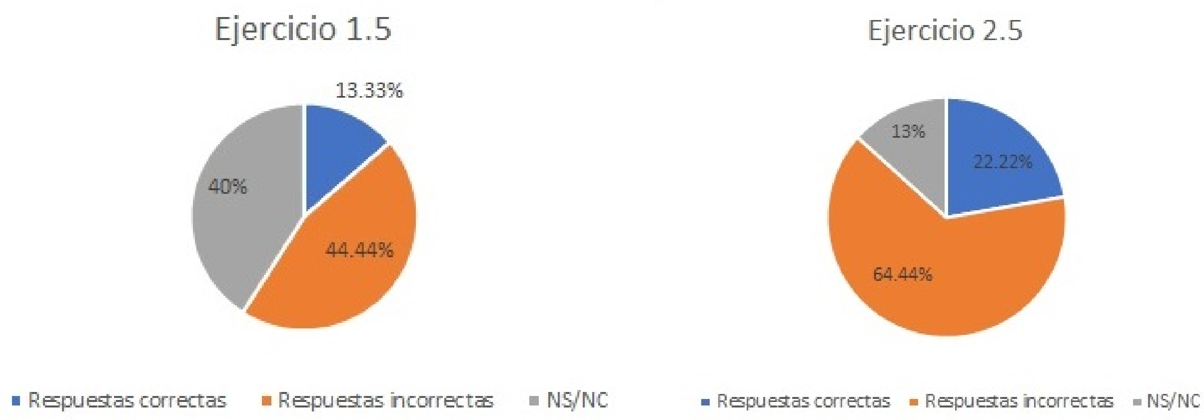


Figura 4.7: Sectores circulares de los porcentajes de los apartados 1.5 y 2.5.

Nos llama la atención que hay un 40 % de alumnos que no dieron respuesta alguna en el ejercicio 1.5. Esto puede deberse a que un 42 % de ellos no consiguieron hallar el término general en la cuestión anterior. De tal forma se explica que sin un término general definido es más complicado aplicar una estrategia inversa. No obstante hubo alumnos que con el término general definido o sin él realizaron la estrategia inversa deshaciendo las cuentas que habían interiorizado como correctas en los tres primeros apartados de tipo estrategia directa. Aunque al ejercicio 2.5 respondieron más porcentaje de alumnos que al 1.5 vemos que las respuestas incorrectas son el valor predominante. Si un alumno define el término general de manera incorrecta y después intenta emplear su expresión para realizar la estrategia inversa esta va a ser a su vez incorrecta.

En la tabla 4.6 hemos recogido el número de aciertos de las cuestiones de relación directa por niveles. Podemos observar a simple vista que las seis preguntas las respondieron correctamente solamente alumnos de nivel A y B. Si nos fijamos en los niveles B y C, los cuales cuentan con un mayor número de alumnos, se presentan varias diferencias entre ellos. Por ejemplo, un 59.09 % de alumnos del nivel B respondieron como mínimo cuatro preguntas correctamente, en cambio, menos de un 37.5 % llegan a esos resultados en el nivel C. Por otro lado, son mayoritarios los alumnos de este nivel por debajo de los 3 aciertos.

	Nivel A	Nivel B	Nivel C	Nivel D
Nº total de alumnos	3	22	16	4
0/6	0	2	2	1
1/6	0	1	4	0
2/6	0	2	3	1
3/6	1	4	1	1
4/6	1	6	5	0
5/6	0	4	1	1
6/6	1	3	0	0
Media	4.33	3.59	2.38	2.5

Cuadro 4.2: Número de aciertos divididos por nivel.

Por ejemplo, si nos basamos en un dato como la media del número de aciertos de cada nivel diríamos lo siguiente: La media de respuestas correctas del nivel A fueron 4.33, del nivel B 3.59, del nivel C 2.38 y del D 2.5. Tomaremos la parte entera de estos datos ya que el número de respuestas correctas es un valor discreto. Luego, llegamos a: Nivel A: 4 respuestas correctas. Nivel B: 3 respuestas correctas. Nivel C y D: 2 respuestas correctas. A partir de este dato, podemos afirmar que sí hay relación entre los niveles y los resultados de los cuestionarios. A mayor nivel que tenga el alumno en matemáticas, mejor es su capacidad de generalización. Aunque entre los niveles C y D es la misma parte entera de la media y si nos fijamos en el valor exacto diríamos que han respondido con más éxito los alumnos del nivel D que los del C aunque sea por una leve diferencia. Tendremos que mirar otros aspectos para poder responder con rotundidad a la pregunta. Veamos de manera más exhaustiva por niveles los aciertos y fallos de cada apartado en la tabla 4.3.

A continuación, teniendo en cuenta el total de los 10 apartados de la prueba de sucesión hemos intentado hallar la correlacción entre el número de aciertos de cada alumno en las 10 preguntas y la calificación que obtuvieron en la prueba de nivel matemático de carácter general. Podemos observar el diagrama de dispersión (nube de puntos) a partir de nuestros datos en la figura 4.8.

La recta de regresión es $y = 0{,}039x + 0{,}7388$ siendo el coeficiente de correlación de Pearson $r = 0{,}445$. Como nuestro coeficiente de correlación es positivo significa que la relación es directa, es decir, a mayor puntuación en la prueba de nivel mayor es la probabilidad de acertar las cuestiones de la prueba de sucesiones. Al no estar el valor de r próximo al 1 ni al -1 no

Nivel A	Ejercicio 1.1	Ejercicio 1.2	Ejercicio 1.3
Respuestas correctas	2	1	1
Respuestas incorrectas	1	2	2
	Ejercicio 2.1	Ejercicio 2.2	Ejercicio 2.3
Respuestas correctas	3	3	3
Nivel B	Ejercicio 1.1	Ejercicio 1.2	Ejercicio 1.3
Respuestas correctas	15	7	5
Respuestas incorrectas	7	15	11
NS/NC			6
	Ejercicio 2.1	Ejercicio 2.2	Ejercicio 2.3
Respuestas correctas	20	18	14
Respuestas incorrectas	2	4	6
NS/NC			2
Nivel C	Ejercicio 1.1	Ejercicio 1.2	Ejercicio 1.3
Respuestas correctas	11	5	
Respuestas incorrectas	5	8	11
NS/NC		3	5
	Ejercicio 2.1	Ejercicio 2.2	Ejercicio 2.3
Respuestas correctas	11	8	6
Respuestas incorrectas	5	8	9
NS/NC			1
Nivel D	Ejercicio 1.1	Ejercicio 1.2	Ejercicio 1.3
Respuestas correctas	1	1	1
Respuestas incorrectas	3	2	2
NS/NC		1	1
	Ejercicio 2.1	Ejercicio 2.2	Ejercicio 2.3
Respuestas correctas	3	3	1
Respuestas incorrectas	1	1	3

Cuadro 4.3: Número de aciertos por cada apartado y nivel.

podemos asegurar que haya una relación fuerte entre ambas variables. No obstante, que el coeficiente de correlación sea bajo no indica que las variables sean independientes. Simplemente, existe una debilidad en la relación lineal.

Destacamos que en la gráfica podemos ver que únicamente un alumno del nivel A consiguió responder a las 10 preguntas de manera correcta. Podemos resaltar que este mismo alumno obtuvo un 144.5 sobre 150 puntos en la prueba de nivel matemático convirtiéndose así en la calificación más alta entre los 45 alumnos que realizaron las pruebas.

En el siguiente punto trataremos cuáles son las estrategias más utilizadas en cada uno de los apartados de relación directa.

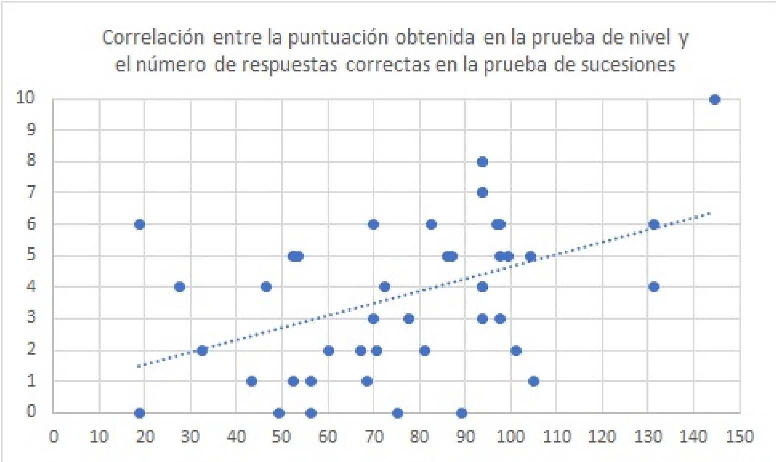


Figura 4.8: Diagrama de dispersión con recta de regresión incluida a partir de los resultados obtenidos en ambas pruebas.

4.2. Las estrategias más utilizadas en las cuestiones de relación directa

Para poder llevar a cabo una clasificación hemos analizado las respuestas de cada apartado individualmente y dividido en las estrategias más comunes ya vistas en el marco teórico. Estas estrategias son: Conteo, recursiva aditiva, múltiplo de la diferencia en el caso de progresiones aritméticas, múltiplo de la razón en el caso de progresiones geométricas, estrategia funcional, proporcional y otros. En el apartado de “otros” englobamos todas las estrategias usadas que no se corresponden a ninguna de las anteriores, suelen ser estrategias carentes de lógica, y también las respuestas en blanco.
Empecemos con las cuestiones sobre términos inmediato. Veremos el número de alumnos que ha usado cada estrategia y su equivalencia en porcentaje sobre el total (45 alumnos):

Estrategias	Conteo	Recursiva aditiva	Múltiplo de la razón	Funcional	Proporcional	Otros
Ejercicio 1.1	5	1	30	4	2	3
Porcentaje	11.11 %	2.22 %	66.66 %	8.88 %	4.44 %	6.66 %
Estrategias	Conteo	Recursiva aditiva	Múltiplo de la diferencia	Funcional	Proporcional	Otros
Ejercicio 2.1	9	19	0	11	3	3
Porcentaje	20 %	42.22 %	0 %	24.44 %	6.66 %	6.66 %

Cuadro 4.4: Clasificación de estrategias para generalización inmediata.

Continuamos con los apartados 1.2 y 2.2 como ya sabemos corresponden a cuestiones de generalización cercana:

Estrategias	Conteo	Recursiva aditiva	Múltiplo de la razón	Funcional	Proporcional	Otros
Ejercicio 1.2	2	1	18	12	3	9
Porcentaje	4.44 %	2.22 %	40 %	26.67 %	6.66 %	20 %
Estrategias	Conteo	Recursiva aditiva	Múltiplo de la diferencia	Funcional	Proporcional	Otros
Ejercicio 2.2	6	7	4	21	6	1
Porcentaje	13.33 %	15.55 %	8.88 %	46.66 %	13.33 %	2.22 %

Cuadro 4.5: Clasificación de estrategias para generalización cercana.

En tercer lugar, tenemos las estrategias clasificadas para las cuestiones de términos lejanos en las sucesiones:

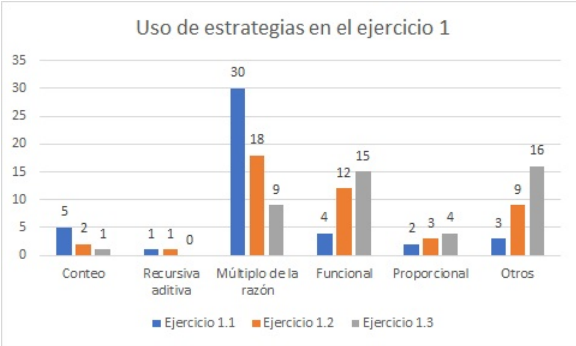
Estrategias	Conteo	Recursiva aditiva	Múltiplo de la razón	Funcional	Proporcional	Otros
Ejercicio 1.3	1	0	9	15	4	16
Porcentaje	2.22 %	0 %	20 %	33.33 %	8.88 %	35.55 %
Estrategias	Conteo	Recursiva aditiva	Múltiplo de la diferencia	Funcional	Proporcional	Otros
Ejercicio 2.3	1	1	4	26	8	5
Porcentaje	2.22 %	2.22 %	8.88 %	57.78 %	17.77 %	11.11 %

Cuadro 4.6: Clasificación de estrategias para generalización lejana.

Seguidamente, podemos ver en las gráficas 4.9 y 4.10 la información recogida en las tablas anteriores.

En el ejercicio 1 el cual trataba de una progresión geométrica observamos que la estrategia más utilizada en los dos primeros apartados ha sido el múltiplo de la razón y en el tercer apartado la funcional obviando la estrategia “otros” en este caso ya que contiene también las respuestas en blanco. Es obvio que utilizar la estrategia de conteo para contabilizar el número de triángulos contenidos en el triángulo de Sierpinski es poco práctico y menos aún para términos cercanos o lejanos, tampoco es útil la estrategia recursiva aditiva en ese caso ya que no llegamos a la solución sumando n veces la diferencia. La mayoría de alumnos han percibido que se trata de una progresión geométrica y, por tanto, utilizan la estrategia basada en multiplicar las veces necesarias la razón. A medida que aumenta la lejanía de los términos y es menos práctico multiplicar la razón tantas veces intentan usar la estrategia funcional.

En los apartados de generalización inmediata, cercana y lejana del ejercicio 2 podemos apreciar que a diferencia del ejercicio 1 hay un mayor uso de la estrategia de conteo y la recursiva aditiva. Esto tiene una sencilla explica-



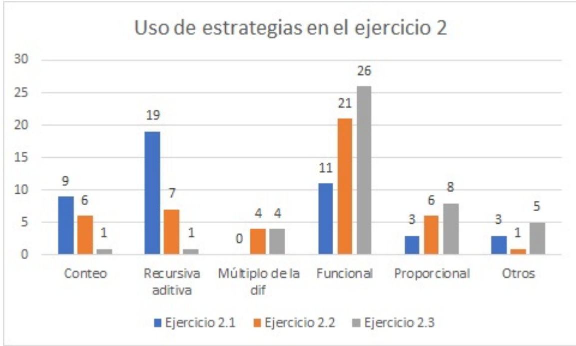


Figura 4.9: Número de alumnos que ha usado cada estrategia en los apartados 1.1, 1.2 y 1.3.

Figura 4.10: Número de alumnos que ha usado cada estrategia en los apartados 2.1, 2.2 y 2.3.

ción puesto que se trata de una progresión aritmética y, por ejemplo, en el apartado 2.1 dibujar cuatro hexágonos para contar el número de paredes no es una ardua tarea. Ahora bien, si nos fijamos en el uso del múltiplo de la diferencia podemos observar que es menor su uso puesto que los alumnos perciben que la sucesión ya no es geométrica como en el ejercicio 1 y fueron más los que intentaron usar la estrategia funcional. También hay menos alumnos que dejaron sin responder estas tres cuestiones. A partir de estos datos podríamos afirmar que los alumnos encuentran menos dificultades a la hora de intentar trabajar con las progresiones aritméticas.
Continuemos viendo el uso de las estrategias, pero ahora según la clasificación de los alumnos por niveles. En esta ocasión, a diferencia de la clasificación hecha anteriormente dividida por cuestiones, en el apartado "otros" no se tendrán en cuenta las preguntas sin respuesta, solo las estrategias que no corresponde con ninguna de las clasificadas ya.

Figura 4.11: Diagramas de barras a partir las estrategias usadas por los alumnos de nivel A.

Los alumnos del nivel A únicamente hacen uso de la estrategia basada en el múltiplo de la razón y de la funcional para el caso de la progresión geométrica. En el ejercicio de la progresión aritmética usan la estrategia recursiva aditiva y la funcional. Ninguno usa la estrategia proporcional puesto que se han percatado de que las sucesiones presentadas no siguen una proporción. La estrategia funcional es la que requiere un manejo del álgebra mayor y como podemos observar es la más usada en los seis apartados por los alumnos del nivel más alto.

En el nivel B ya nos encontramos más variedad en el uso de las estrategias. En los apartados 1.1 y 1.2 la más usada fue el múltiplo de la razón y en el 1.3 puesto que ya es un término lejano la más usada fue la estrategia funcional. En el ejercicio 2 la estrategia funcional fue la más usada para el término cercano y lejano mientrás que para el inmediato fueron la estrategia de conteo y la recursiva aditiva. Ya no es tan obvio la predominancia de la estrategia funcional en ambos ejercicios pero sí es mayor su utilización frente a otras estrategias. En este nivel empezamos a ver el uso de la estrategia proporcional cuyo uso es erróneo.

Figura 4.12: Diagramas de barras a partir las estrategias usadas por los alumnos de nivel B.

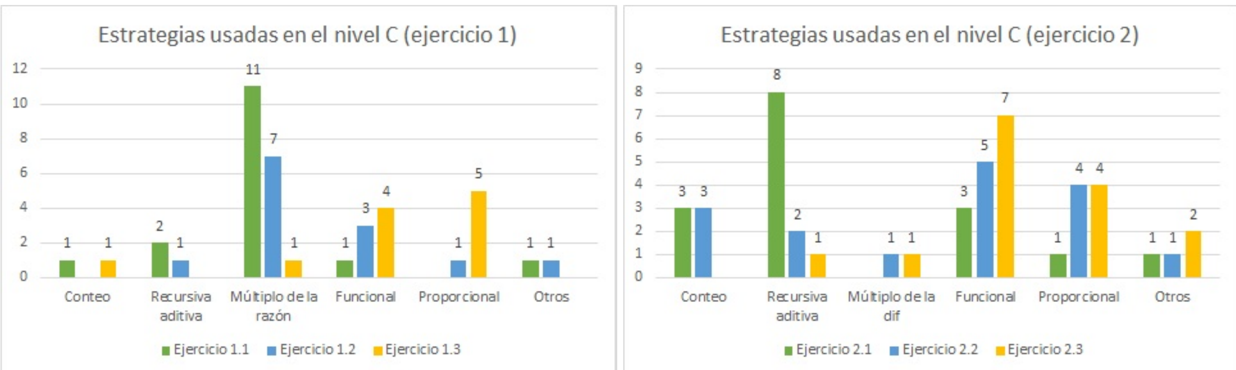


Figura 4.13: Diagramas de barras a partir las estrategias usadas por los alumnos de nivel C.

En el nivel C la estrategia funcional ya no es la más usada salvo en el 2.2

y 2.3, en los demás apartados los alumnos se decantan antes por utilizar estrategias más sencillas como son el múltiplo de la razón o la recursiva aditiva. Persiste el uso erróneo de la estrategia proporcional.

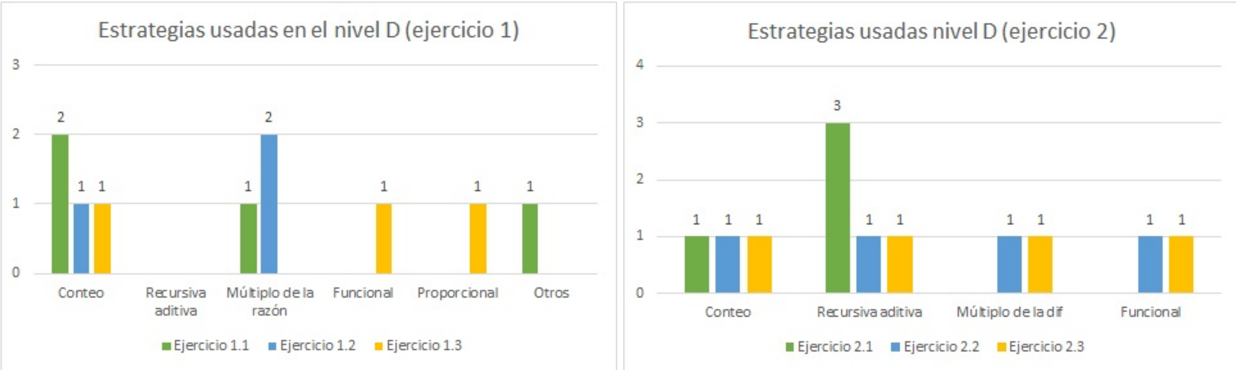


Figura 4.14: Diagramas de barras a partir las estrategias usadas por los alumnos de nivel D.

Llegamos, finalmente, al nivel D que se corresponde con los alumnos de menor nivel matemático. Un claro ejemplo de esto es que en el ejercicio 1 solamente uno de ellos en el apartado 1.3. Para el término inmediato optan por dibujar la figura y contar (estrategia de conteo) o usar la estrategia recursiva aditiva si se trata de una progresión aritmética. Vemos que toman otras alternativas antes que intentar usar la estrategia funcional. Este hecho, según explica [Callejo et al (2016)], se debe al salto cualitativo que supone el cambio de una representación gráfica a una estrategia funcional. Para poder hacer uso de la estrategia funcional se deben apoyar en la estructura espacial y numérica de la figura para hacer los cálculos, mientras la representación gráfica se basa en el simple recuento.

4.3. La capacidad de generalizar y su expresión algebraica

En esta sección veremos en cada nivel el número de alumnos que fueron capaces de definir de manera correcta el término general de cada una de las sucesiones.

Como podemos ver en los diagramas poligonales de la figura 4.15 creados a partir de la tabla A.1 contenida en el Anexo A, podemos concluir que en el ejercicio 1 el 33.33 % de los alumnos del nivel A consiguió definir correctamente el término general y el 100 % de ellos en el ejercicio 2. En el nivel B el 22.73 % definió el término general en ambos ejercicios. En el nivel C ya bajamos a un 6.25 % de los alumnos en el ejercicio 1 y 2. Por último, en el nivel D tenemos que para el ejercicio 1 y 2 un 25 % de los alumnos definió el término general. Resulta curioso la coincidencia de los porcentajes en los niveles B,C y D, esto es debido que para ambos ejercicios hubo el mismo número de alumnos que definieron correctamente el término general respectivamente en cada nivel. En el nivel C y D aunque sea el mismo porcentaje en ambos ejercicios no hubo ningún alumno que definiese el término general de forma correcta en los dos apartados. Y, en el nivel B sí encontramos a dos estudiantes que definieron ambos términos correctamente, el resto solo conseguía definir uno de los dos términos.

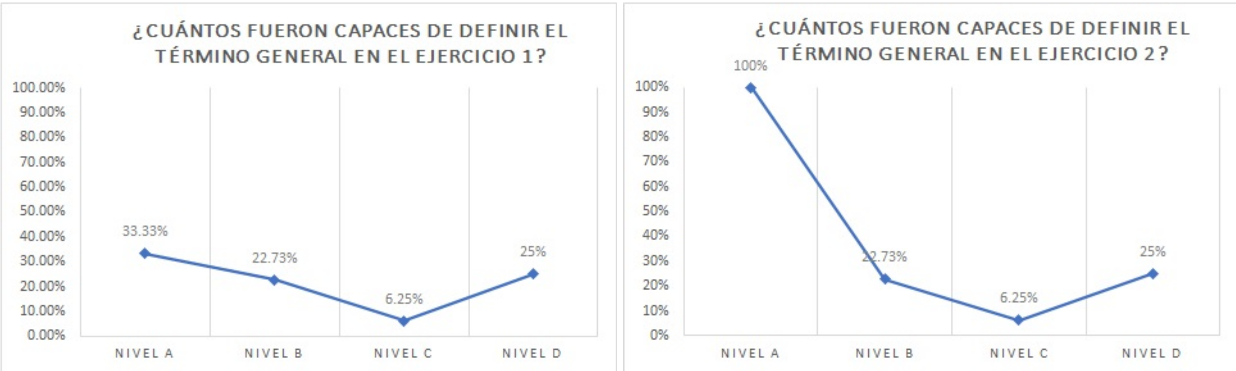


Figura 4.15: Diagramas poligonales a partir los porcentajes de aciertos del término general según el nivel.

En base a estas afirmaciones y con el objetivo de responder una de nuestras preguntas de la investigación vamos a intentar llegar a una conclusión. Preguntémonos entonces, ¿podemos asegurar que existe una correlación entre el nivel general atribuido según las pruebas previas y la capacidad de generalizar en ejercicios con patrones geométricos? Lo que podemos tomar como cierto es que los alumnos del nivel A tuvieron más éxito a la hora de definir el término general de las sucesiones que los alumnos de los otros tres niveles.

Además de analizar todas los aspectos anteriores, queremos estudiar también el grado de flexibilidad presentado por los alumnos en las pruebas realizadas.

4.4. El nivel de flexibilidad medido a partir de la intra-flexibilidad y la inter-flexbilidad

Como definimos en el apartado del marco teórico, se puede diferenciar entre dos tipos de flexibilidad: la intra-flexibilidad y la inter-flexibilidad.

Hemos analizado estos aspectos a partir de las respuestas obtenidas en nuestro cuestionario de sucesiones dividido en dos ejercicios y cada uno de

ellos en cinco apartados.
Vamos a comparar dentro de un mismo problema su capacidad de elegir con éxito las estrategias a partir de las respuestas a las cuestiones de relación directa para hallar términos inmediatos, cercanos y lejanos y el apartado de relación inversa. Diremos que presenta intra-flexibilidad si es capaz de resolver la mayoría de los apartados de relación directa e inversa.
Por otro lado, diremos que presenta inter-flexibilidad si ha resuelto de manera correcta varios apartados de ambos problemas ya que tratan progresiones de distinto tipo.
Haremos especial hincapié en la capacidad de resolver las cuestiones de relación directa y al menos una de las dos de relación inversa considerando este aspecto como intra-flexibilidad.

Respuestas correctas a las cuestiones inversas	Nivel A	Nivel B	Nivel C	Nivel D
0/2	1	16	14	4
1/2	1	5	2	0
2/2	1	1	0	0

Cuadro 4.7: Número de aciertos a las tareas inversas por nivel

En la tabla 4.7 vemos que 35 alumnos no fueron capaces de resolver correctamente ninguna de las dos tareas de relación inversa. Esto supone casi un 78 % (77.78 %) del total de alumnos. No hay ningún alumno de nivel D en los otros 10 restantes y solo 2 de ellos corresponde a un nivel C. Si nos pregúntamos cuántos han sido capaces de resolver las dos cuestiones correctamente nos encontramos con un alumno incluído en el nivel A y otro en el nivel B. Según estos datos, hay 35 alumnos que no presentan intra-flexibilidad puesto que aunque hayan resuelto correctamente alguna de las preguntas de relación directa no lo han conseguido para las de relación inversa. En resumen, solo encontramos intra-flexibilidad en el 66.66 % de alumnos del nivel A, en un 27.27 % de aquellos del nivel B y un 12.5 % en el nivel C. Según estos datos sí comprobamos que a mayor nivel, mayor intra-flexibilidad.
Respecto a la inter-flexibilidad, tenemos en la figura 4.16 un diagrama que representa si hubo aciertos en ambos ejercicios o sólo en uno de ellos dividido por niveles. Se observa que en el nivel más alto se presenta una mayor inter-flexibilidad según los aciertos y disminuye este porcentaje a medida que bajamos de nivel. La figura 4.16 está construida a partir de los datos

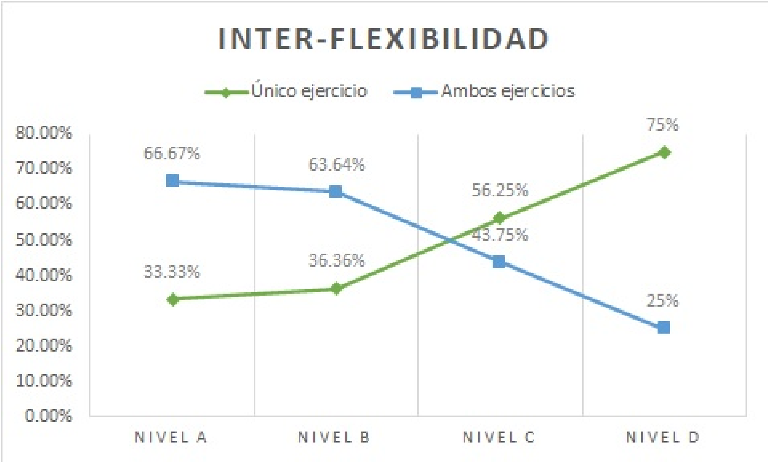


Figura 4.16: Diagramas poligonal a partir de los porcentajes por niveles de aciertos de las cuestiones de relación directa divididos en uno o en ambos ejercicios.

iniciales de la tabla A.2 del Anexo A.

5 Conclusiones

Según los datos obtenidos, en primer lugar, podemos afirmar que las tareas de generalización inmediata fueron las que mayor porcentaje de aciertos tuvieron en ambos ejercicios y ningún alumno dejo de responder estas cuestiones. Podemos asegurar, también, que en las cinco preguntas del ejercicio 2 es mayor el número de aciertos si comparamos cada una con su análoga del ejercicio 1 según el concepto que se trata. Por otro lado, siguiendo esta comparación se dieron más respuestas en blanco en cada apartado del ejercicio 1 en comparación a los respectivos del 2. La pregunta en la que menos porcentaje de aciertos tuvo en el ejercicio 1 fue la cuestión 1.5. Además, fue la que menos respuestas correctas tuvo en el total de los 10 apartados. En la pregunta 2 los menos acertados fueron los apartados 2.4 y 2.5. Por todo esto, podemos aseverar que los estudiantes tuvieron más éxito trabajando con la progresión aritmética.

Según el diagrama de dispersión en la figura 4.8 y los datos extraídos de ello, concluimos que hay una relación directa entre el nivel general en matemáticas presentado por los alumnos en las pruebas de nivel y su capacidad de generalizar. A mayor puntuación en la prueba de nivel, mayor es la probabilidad de acertar las cuestiones sobre sucesiones. No pudimos demostrar que exista una relación fuerte entre las dos variables, pero tampoco son variables independientes entre sí.

En base a los diagramas poligonales 4.15 vemos que los alumnos del nivel A fueron los que mejor definieron los términos generales en ambos ejercicios, mientras que los alumnos del nivel D obtuvieron una ligera ventaja frente a los del B y, en ambos ejercicios, los que tuvieron más dificultades para definir el término general fue el nivel C. Según estos datos, no podemos afianzar el hecho de que a mayor nivel matemático más capacidad de generalizar una sucesión a partir de patrones geométricos mediante una expresión algebraica. Añadir que hubo un número menor de alumnos en el nivel D que en el C, por lo que el margen de error es mayor al analizar estos datos entre los dos niveles.

Respecto a las estrategias más usadas entre los 45 alumnos en las tareas de relación directa: En el ejercicio 1 (progresión geométrica), la estrategia más utilizada para hallar el término inmediato y el cercano fue el múltiplo de la razón. Para la generalización lejana, sin tener en cuenta el apartado “otros” ya que contiene respuestas en blanco, es la estrategia funcional. En el ejercicio 2 (progresión aritmética) la estrategia más practicada para la generalización inmeadita fue la recursiva aditiva, mientras que la estrategia funcional fue la más estilada en la obtención del término cercano y lejano. También hallamos las más comunes por nivel. En el nivel A para ambos ejercicios y en los tres tipos de generalización la estrategia predominante fue la funcional. En el nivel B para la progresión geométrica y las generalizaciones inmediata y cercana fue el múltiplo de la razón. La estrategia más utilizada para hallar el término lejano fue la funcional. Para la progresión aritmética la mayoría empezó utilizando para el término inmediato la estrategia de recursividad y el conteo, variaron a la funcional para la generalización próxima y lejana. En tercer lugar, los alumnos del nivel C utilizaron para el término inmediato, en mayor medida, el múltiplo de la razón para la progresión geométrica y la estrategia recursiva aditiva para la aritmética. Para hallar el término cercano de la geométrica repitieron con el múltiplo de la razón, mientras que en la sucesión aritmética la estrategia funcional fue la más utilizada. Finalmente, para el término lejano se decantaron otra vez por la funcional en el caso de la aritmética, pero en la progresión geométrica para hallar este último término predominó la estrategia proporcional. Por último, en el nivel D fue en el nivel que más variedad hubo al elegir estrategias. Podemos destacar el uso del múltiplo de la razón en la generalización cercana de la progresión geométrica, el conteo para la generalización inmediata y la recursiva aditiva en la inmediata de la aritmética.

Finalmente, pudimos comprobar que a mayor sea el conocimiento matemático general de un alumno va a presentar una mayor inter-flexibilidad e intra-flexibilidad.

Sería interesante poder repetir el estudio cuando se haya superado la pandemia, de modo que se pueda tener una muestra de alumnos de 3^{o} ESO más amplia y se puedan realizar entrevistas personales sobre las pruebas con algunos de ellos. También podría plantearse alguna intervención didáctica mediante la realización de actividades especialmente diseñadas para la mejora de la capacidad de generalización y estudiar la efectividad de este desarrollo realizando luego la prueba con los mismos alumnos cuando estén cursando 4^{o} de la ESO.

Bibliografía

[Arbona et al (2017)] E. Arbona, M.J. Beltrán-Meneu, Á. Gutiérrez y A. Jaime, *"Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de educación primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra."* Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universitat de València. 2017.

[Becker et al (2006)] Becker, J. R. Rivera, F. *"Establishing and Justifying Algebraic Generalization at the Sixth Grade Level."* In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 465-472. Prague. 2006.

[BOC] *"Boletín Oficial de Cantabria extraordinario nº 39"*. Gobierno de Cantabria. (pp. 536-547). Cantabria, España. Viernes 5 de junio de 2015.

[Callejo et al (2016)] M.L. Callejo, A. García-Reche y C. Fernández, *"Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales."* Universidad de Alicante. Enero 2016.

[Callejo et al (2014)] M.L. Callejo y A. Zapatera, *"Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria."* Abril 2014.

[Cañadas et al (2016)] M.C. Cañadas y M. Molina, *"Aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades."* En Castro, Encarnación; Castro, Enrique; Lupiáñez, José Luis; Ruiz-Hidalgo, Juan Francisco; Torralbo, Manuel (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Granada, España: Comares, 2016.

[CDI] *"Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI). Tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria"*. Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, Madrid, España. Abril 2009

[Confrey (1991)] J. Confrey, *"Steering a course between Vygotsky and Piaget."* Educational Researcher, 20 (8), 28 -32. 1991.

[Crawford (2004)] A. Crawford, *"Developing algebraic thinking: Past, present and future"*, en *"The future of the teaching and learning of algebra"*, K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (eds.), Melbourne, Australia: The University of Melbourne, 2004.

[García Suárez et al (2003)] J. García Suárez, I. Segovia Alex y J.L. Lupiáñez Gómez, *"El uso de las letras como fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas."* Bolema [online]. 2014, vol.28, n.50, pp.1545-1566. ISSN 1980-4415. Septiembre 2003.

[Goñi Cervera et al (2019)] J. Goñi Cervera y I. Polo Blanco, *"Estrategias de generalización cercana y lejana en tareas con patrones geométricos: Un estudio con estudiantes de 6 y 7 años."* Universidad de Cantabria, Julio 2019.

[INEE] *"Prueba de Evaluación de Educación Secundaria Obligatoria sobre la competencia matemática para el 4º curso de ESO"*. Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), Madrid, España. Curso 2018-2019.

[Kaput (2008)] Kaput, J. J. *"What is algebra? What is algebraic reasoning?."* En J. J. Kaput, D.W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *"Algebra in the early grades."* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Routledge. 2008.

[Kieran (2004)] C. Kieran, *"The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities"*, en *'The future of the teaching and learning of algebra"*, K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (eds.), Melbourne, Australia: The University of Melbourne, 2004.

[Kohanova et al (2019)] I. Kohanova and T. Solstad, *"Linear figural patterns as a teaching tool for préservice elementary teachers - the role of symbolic expressions."*, Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Netherlands. Utrecht, Feb 2019.

[Küchemann (1981)] D. Küchemann. *"Children's understanding of mathematics: 11-16"*, en Algebra. En K.M.Hart (Ed), Londres, 1981.

[Molina (2011)] M. Molina, *"Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años."* Universidad de Salamanca, Mayo 2011.

[Molina (2006)] M. Molina, *"Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo por alumnos de tercero de educación primaria."* Universidad de Salamanca, Enero 2006.

[Radford (2007)] L. Radford, *"Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts."*. Septiembre 2007

[Rivera et al (2005)] F. Rivera, F., J.Becker, *"Figural and numerical modes of generalization in Algebra, Mathematics Teaching in the middle school."*, pp.198–203. 2005.

[Stacey et al (2004)] K. Stacey, H. Chick y M. Kendal, *"The future of the teaching and learning of algebra."* Melbourne, Australia: The University of Melbourne, 2004.

[Vergel (2015)] R. Vergel, *"Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano."* PNA, 9(3), 193-215. 2015.

A Anexo

¿Cuántos fueron capaces de definir la función correctamente?			
Nivel A	Ejercicio 1	Sí No	1 2
Nivel A	Ejercicio 2	Sí No	3 0
Nivel B	Ejercicio 1	Sí No	5 17
Nivel B	Ejercicio 2	Sí No	5 17
Nivel C	Ejercicio 1	Sí No	1 15
Nivel C	Ejercicio 2	Sí No	1 15
Nivel D	Ejercicio 1	Sí No	1 3
Nivel D	Ejercicio 2	Sí No	1 3

Cuadro A.1: Resultados sobre el término general según los alumnos de cada nivel.

	Nivel A	Nivel B	Nivel C	Nivel D
Alumnos que acertaron preguntas de un solo ejercicio	1	8	9	3
Alumnos que acertaron preguntas de ambos ejercicios	2	14	7	1

Cuadro A.2: Alumnos clasificados por nivel y respuestas correctas a uno o ambos ejercicios.

B Anexo

PRUEBA DE NIVEL

EJERCICIO 1: Calcula el valor de A y B, dando el resultado de la forma más sencilla posible.

$$A = 8 - 3\frac{1}{1+\frac{1}{2}} =$$

$$B = (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 =$$

EJERICIO 2: Completa la siguiente tabla. En cada columna, el porcentaje, la fracción y el decimal deben ser equivalentes.

Porcentaje	30%		
Fracción		3/4	
Decimal			0,04

EJERCICIO 3: Una rampa tiene una longitud de 13 m y salva un desnivel de 5 m ¿Qué longitud tiene la base de la rampa?

EJERCICIO 4: Marca con una cruz el rectángulo correspondiente a V o a F, a la derecha de cada igualdad, según sea la igualdad verdadera o falsa.

$\frac{5+10x}{5} = 10x$ V F

$4 + 8z = 4(1+2z)$ V F

$(a-b)^2 = a^2 - b^2$ V F

$\sqrt{a^2+9} = a+3$ V F

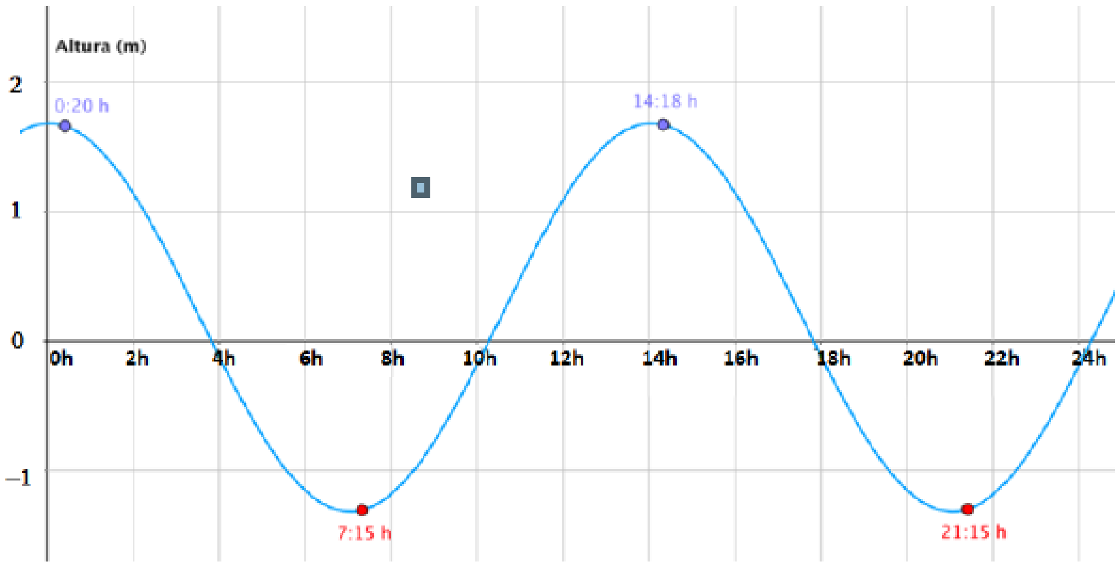
EJERCICIO 5: Las notas de Rosa en las dos primeras evaluaciones de matemáticas han sido 3,5 y 4,6. Quiere tener como media de las tres evaluaciones al menos un 5. ¿Cuánto tendrá que sacar, por lo menos, en la tercera evaluación?

EJERCICIO 6: La madre de Laura y José ha pagado 122 euros por un vestido y una sudadera, que ha regalado a sus hijos. José protesta porque con lo que cuesta el vestido se podrían haber comprado dos sudaderas y habrían sobrado 17 euros.

a) Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que represente la situación anterior. Indica con claridad el significado de las letras que empleas.

b) Calcula el precio del vestido y de la sudadera.

EJERCICIO 7: La altura de la marea durante el día de ayer está representada en el siguiente gráfico:



Observa la gráfica y elige la opción correcta:

A. En un periodo de 24 horas se alcanza una vez la pleamar y otra la bajamar (momentos en que la marea alcanza su altura máxima y mínima, respectivamente)
B. El intervalo de tiempo entre el momento más alto de la marea y el más bajo es de, aproximadamente, 3 horas.
C. La diferencia de altura de la marea en la pleamar y la bajamar es de, aproximadamente, 8 metros.
D. La diferencia entre la altura máxima y mínima de la marea durante 24 h es de, aproximadamente, 3 metros.

EJERCICIO 8: La altura máxima y mínima, en metros, de las mareas durante el fin de semana se muestra a continuación:

	Sábado	Domingo
Mínima	-1,9	-1,6
Máxima	1,8	1,5

Representa los valores mínimos y máximos por días en las siguientes rectas numéricas y señala el intervalo de variación:

<u>EJERCICIO 9:</u> ¿Cuál de las siguientes figuras es simétrica?

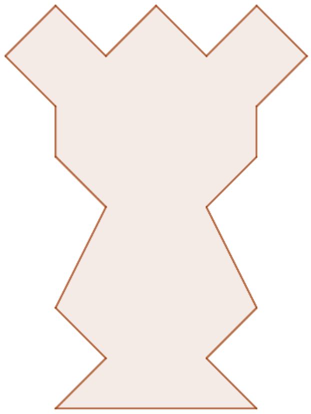


Figura 1

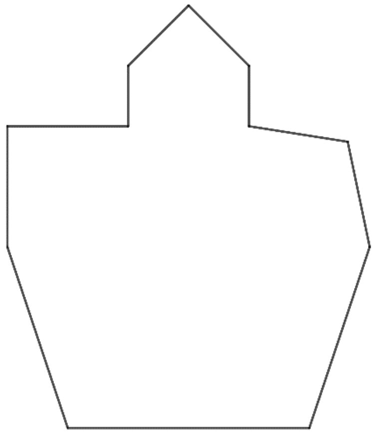
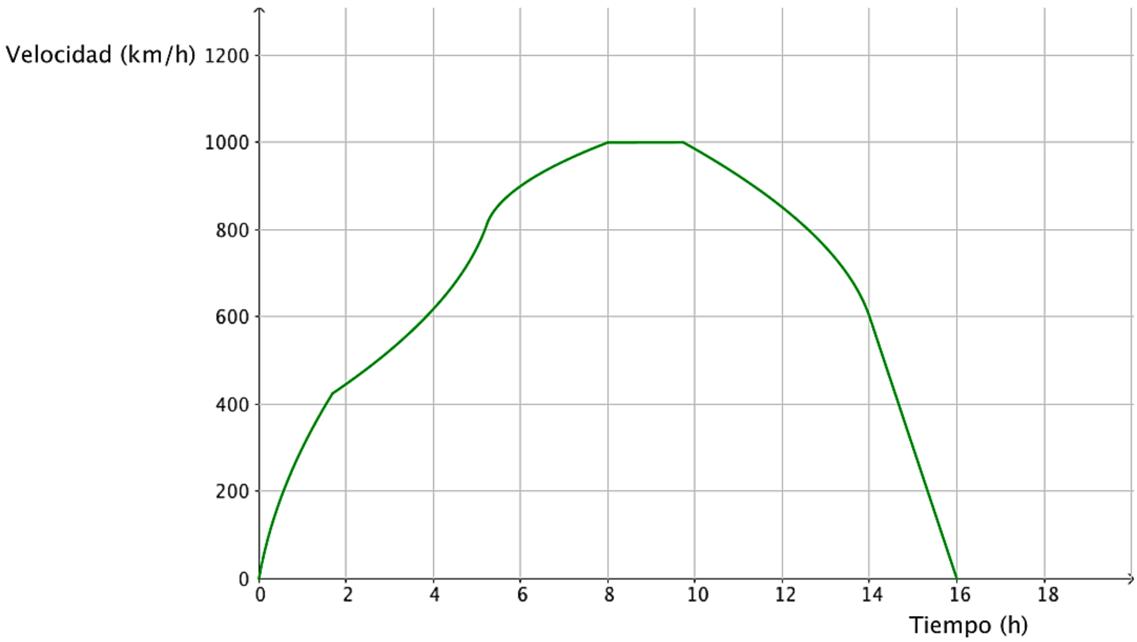


Figura 2

Escoge la opción correcta:

A. Las dos figuras
B. La figura 1
C. La figura 2
D. Ninguna de las dos

<u>EJERCICIO 10:</u> La siguiente gráfica muestra la velocidad del avión Madrid – La Habana



Responde las siguientes preguntas:

¿Cuál es la duración del viaje? _______________ horas

¿Cuántas horas de vuelo transcurren hasta que el avión alcanza por primera vez su velocidad máxima? ____________ horas

¿Cuál es su velocidad máxima? ___________ km/h

EJERCICIO 11: La siguiente tabla muestra los días de lluvia a lo largo del año en La Habana

	En.	Feb.	Mar.	Ab.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.	Total
Temperatura media	20	21	22	24	25	26	26	26	26	23	22	21	
Días de lluvia	3	1	3	3	4	7	6	7	7	6	4	3	54

Jaime ha planificado visitar La Habana un día de agosto. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva ese día?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{7}{31}$

C. $\frac{2}{15}$

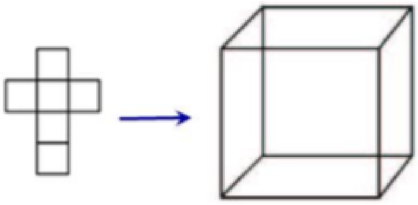
D. $\frac{26}{7}$

EJERCICIO 12: La siguiente tabla muestra las ventas de las diferentes papeletas para un sorteo entre alumnos de ESO y Bachillerato. Sabiendo que un alumno ha comprado una papeleta de 5 euros, calcula la probabilidad de que sea de ESO.

Precio papeleta	ESO	Bachillerato
1 €	200	150
3 €	150	150
5 €	50	100

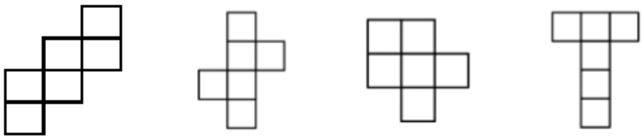
A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{3}$

<u>EJERCICIO 13:</u> Sabemos que el desarrollo del cubo es, por ejemplo:

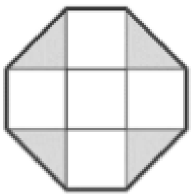


¿Cuál de los siguientes desarrollos NO corresponde al de un cubo?

A. B. C. D.

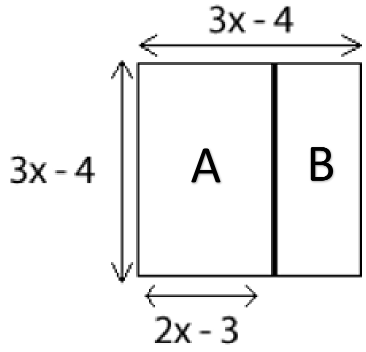


<u>EJERCICIO 14:</u> Tenemos un polígono octogonal construido de la siguiente manera:



¿Cuál sería el volumen de un prisma de altura 10 cm construido sobre la base del polígono si cada cuadrado que ves en la figura tiene 1 cm de lado?

EJERCICIO 15: Tenemos un cuadrado dividido en dos zonas A y B. ¿Cuál es el área de la zona B?



A. $4x^2 - x + 4$

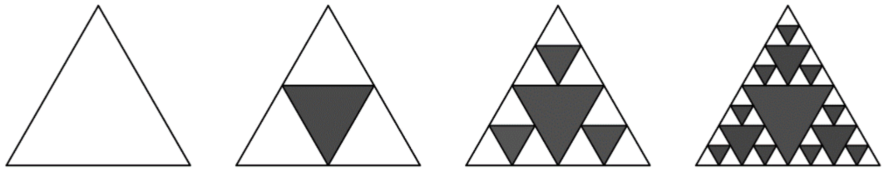
B. $4x^2 + x - 4$

C. $3x^2 - 7x + 4$

D. $3x^2 - 7x - 4$

CUESTIONARIO PROGRESIONES

Ejercicio 1:



En la figura anterior podemos observar cuatro triángulos. Dentro de cada triángulo hay triángulos blancos y/o coloreados. El triángulo más a la izquierda le denominaremos "Triángulo 0", al siguiente "Triángulo 1", al tercero contando desde la izquierda "Triángulo 2" y al que está situado a la derecha del todo "Triángulo 3".

Responde las siguientes preguntas de la manera más exhaustiva y completa que puedas, razonando los argumentos utilizados para justificar tu respuesta.

1.1 Si queremos seguir construyendo más triángulos siguiendo la misma progresión ¿Cuántos triángulos blancos tendremos al construir el "Triángulo 4"? ¿Cómo lo sabes?

1.2 ¿Y para el "Triángulo 10"? ¿Cómo has calculado el número de triángulos blancos totales que hay para este caso?

1.3 ¿Si queremos construir el “Triángulo 50”? ¿Cuántos triángulos blancos va a contener este triángulo? ¿Cómo has llegado a este resultado?

1.4 Formula una función que nos permita hallar el número de triángulos blancos que va a contener un triángulo cualquiera de la progresión.

1.5 Si quisiéramos construir un triángulo que contenga 729 triángulos blancos en su interior ¿Cuál sería el número del triángulo correspondiente siguiendo la notación ya utilizada para nombrar los triángulos anteriores, es decir, qué número tendríamos que poner en la X si le queremos llamar “Triángulo X” al triángulo con 729 triángulos blancos en su interior? ¿Cómo has hallado la X de “Triángulo X”?

Ejercicio 2:

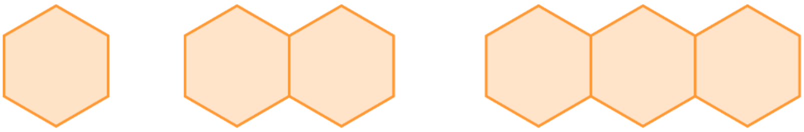


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Las abejas construyen sus enjambres mediante celdillas de forma hexagonal.
Suponemos que están construyendo un enjambre de la siguiente manera, en la figura 1 tenemos representada una celdilla, en la figura 2 tenemos 2 celdillas y en la figura 3 tenemos 3 celdillas. Vamos a fijarnos en el número de paredes que constituyen cada figura. Con 6 paredes construimos una celdilla, con 11 paredes podemos construir 2 celdillas y con 16 paredes obtendremos 3 celdillas según la figura.

2.1 ¿Cuántas paredes necesitan construir las abejas para formar las cuatro celdillas de la misma manera que en la figura? ¿Cómo has calculado el número de paredes necesarias?

2.2 Si quieren formar 15 celdillas construida de la misma forma, ¿cuántas paredes necesitan construir? ¿Cómo lo sabes?

2.3 Si las abejas han construido 100 celdillas de este modo unidas, ¿Cuántas paredes han necesitado para construirlas? ¿De qué manera has hallado el número de paredes?

2.4 ¿Serías capaz de formular una función que nos permita hallar el número de paredes necesarias para un conjunto de n celdillas? (Sea n cualquier número entero) ¿Cómo has conseguido hallar esa expresión?

2.5 Si las abejas han construido 126 paredes, ¿cuál es el número máximo de celdillas que pueden construir del mismo modo que en los casos anteriores? ¿Cómo has conseguido hallar el número de celdillas?