Universidad de Cantabria

Facultad de Ciencias

Programación dinámica con aplicaciones en la economía

(Dynamic programming with applications in economics)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

Grado en Matemáticas

Autora: Sofía Muriedas García
Director: Luis Alberto Fernández Fernández
Junio 2021

Agradecimientos

En primer lugar quisiera dar las gracias, por todo su apoyo y paciencia, a mi director Luis Alberto Fernández Fernández, sin él, este trabajo no hubiera sido posible. Gracias a mi familia por el apoyo incondicional, por darme fuerzas y haber hecho de mí la persona que soy. También quiero dar las gracias a mis amigos y compañeros de facultad, los cuales me han acompañado durante estos últimos años y han hecho de mi paso por la universidad un viaje inolvidable. En último lugar, agradecer a todos los profesores que han colaborado en mi formación y a mis amigos de toda la vida, a quienes estaré eternamente agradecida por todo su cariño.
Muchas gracias a todos.

Resumen

La programación dinámica es una técnica desarrollada por el matemático Richard Bellman en la década de 1950. Sirve para resolver algunos problemas de optimización complejos, descomponiéndolos en subproblemas más sencillos. Este método se basa en el llamado "Principio de optimalidad de Bellman" según el cual "dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima". Se trata de una herramienta muy conocida en el campo de la informática, aunque su utilidad se extiende a otras muchas áreas. En este TFG nos centraremos en resolver algunos problemas de optimización pertenecientes al ámbito de la economía, empleando la Regla de los Multiplicadores de Lagrange, y el método de la programación dinámica. Además trataremos, tanto sistemas de dimensión finita, como problemas de horizonte infinito.

Palabras clave: función de política, variable de estado, variable de control, control óptimo, función valor, dinámica óptima, tasa de descuento.

Abstract

Dynamic programming is a technique developed by the mathematician Richard Bellman in the 1950s. It is used to solve some complex optimisation problems by decomposing them into simpler subproblems. This method is based on the so-called "Bellman's Principle of Optimality" according to which "given an optimal sequence of decisions, every subsequence of it is, in turn, optimal". It is a well-known tool in the field of computer science, although its usefulness extends to many other areas. In this project we will focus on solving some optimisation problems belonging to the field of economics, using the Lagrange Multiplier Rule and the dynamic programming method. We will also deal with both finite-dimensional systems and infinite-horizon problems.

Keywords: policy function, state variable, control variable, optimal control, value function, optimal dynamics, discount rate.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La economía es una ciencia social cuyo propósito reside en la administración de unos recursos limitados para la producción de bienes y servicios. La escasez de los recursos, y la demanda ilimitada de éstos, conlleva la necesidad de elección. Cada uno de nosotros, ya sea como empresario o consumidor, tomamos todos los días numerosas decisiones económicas. La pregunta es: ¿con qué criterios tomamos estas decisiones?, ¿nos deberíamos basar solo en nuestra intuición?. Está claro que la respuesta dependerá de la magnitud de la elección y del coste de oportunidad asociado. No obstante, cuando nos enfrentamos a problemas de gran escala, resulta conveniente tener a nuestro alcance algunas herramientas que nos faciliten la toma de decisión. John Maynard Keynes, afirmaba que el buen economista debía ser matemático, historiador, conocedor de la política y buen filósofo.

En efecto, las matemáticas configuran uno de los pilares fundamentales en el ámbito de la economía. Muchas de sus ramas facilitan el estudio, tratamiento e interpretación de numerosos modelos económicos. En este trabajo, presentaremos uno de los métodos matemáticos empleados para la optimización de problemas complejos que permite visualizar la evolución de variables económicas: la programación dinámica.

La programación dinámica es una técnica empleada para dar solución a problemas en los cuales se toma una serie de decisiones de forma secuencial, y en donde la elección afecta a decisiones futuras. La idea principal del método consiste en descomponer el problema en subproblemas de talla inferior, con menor complejidad y encontrar la solución óptima de éstos. Además, se basa en el Principio de optimalidad de Bellman, según el cual *"Dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima"*.

El nacimiento de esta herramienta tuvo lugar en los años posteriores a la Segunda Guerra Mundial, alrededor de 1950, para abordar determinados problemas referentes a la guerra a través de las matemáticas. Richard E. Bellman, junto con sus colaboradores, trabajó en la teoría de los procesos de decisión en múltiples pasos, desarrollando así el método de la programación dinámica. Los nuevos avances y sus aplicaciones no solo tenían lugar en el campo de la ingeniería, sino también en el de la economía, biología, medicina y ciencias sociales.

En el ámbito de la economía, en la primera mitad de los años cincuenta, autores como Arnold Tustin y W.Phillips, intentaron aplicar a los sistemas económicos las teorías de control desarrolladas durante la Segunda Guerra Mundial. Sin embargo, fue en los años 70 cuando realmente surgió un gran interés en la utilización de técnicas de control óptimo para controlar y modelar sistemas macroeconómicos, convirtiéndose hoy en día en el principal instrumento matemático de la macroeconomía clásica. En particular, el método de la programación dinámica es empleado no sólo en el ámbito de la macroeconomía, si no que aborda problemas de control de inventarios, selección de inversiones, mantenimiento y reemplazamiento de máquinas o planificación de la producción.

En este trabajo, vamos a ocuparnos de problemas que se tratan de manera frecuente en el campo de la economía, por lo que es interesante conocer qué tipo de funciones se emplean y el por qué. Los economistas utilizan el término función de utilidad para designar la función que a ellos les interesa maximizar. Esta función representa la satisfacción que las personas obtienen por elegir o consumir un bien. Suele ser creciente y cóncava para representar que, a mayor cantidad de un bien, más satisfacción presentará el individuo, pero menor será el beneficio adicional. Nuestro objetivo, consistirá en determinar la solución óptima a través de la cual se puede maximizar esta función utilidad, trabajando con el problema que se refleja a continuación:

$$(PB)\begin{cases} Maximizar & V = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(y_k, u_k) + f_n(y_n) \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = g_k(y_k, u_k) \quad \forall k = 0, 1, .., n-1 \\ & u_k \in \Gamma_k \qquad\qquad\quad\ \forall k = 0, 1, .., n-1 \\ con: & y_0 \ \ dado \end{cases} \tag{1.1}$$

Este problema consta de n etapas o períodos. La notación empleada para designar tanto las funciones como las variables utiliza un subíndice, cuya finalidad es hacer referencia a la etapa en la que se encuentra el término. En cada uno de los períodos, aparecerán las variables y_k y u_k, exceptuando que esta última no tomará valor en la etapa n y que conocemos el valor de y_0, por lo que, es un problema cuyas incógnitas serán: $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$. Por ejemplo, supongamos que se quiere obtener el máximo rendimiento invirtiendo en un determinado bien durante un período de tiempo. Las variables $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ en este caso representarían la cantidad a invertir en cada momento k, mientras que las incógnitas $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ nos indicarían la cuantía de capital restante después de realizar la inversión. El dato y_0 sería el capital inicial.

La función objetivo a maximizar, V, que va a representar nuestra función utilidad, está compuesta por la suma de diferentes funciones. Para cada etapa k, aparece una función f_k, que desde el período cero hasta la etapa $n-1$, requerirá de las variables y_k y u_k, mientras que en la última etapa la función f_n dependerá únicamente de la variable y_n. Continuando con el ejemplo, nuestra función utilidad V en ese caso representaría el potencial beneficio del capital invertido en cada momento k.

Por otro lado, aparecen dos restricciones que serán claves a la hora de resolver este problema. La primera de ellas se trata de una restricción de igualdad, donde para cada período k, la función g_k que depende de las variables y_k y u_k, determinará el valor de y_{k+1}. Esta restricción de igualdad nos indica el estado del sistema en cada etapa, en nuestro problema ejemplo nos indicaría el capital restante en la etapa $k + 1$, tras haber realizando una inversión en el momento k. En segundo lugar, para cada etapa k, aparece la restricción que indica que la variable u_k ha de pertenecer a un cierto conjunto de valores admisibles, Γ_k. Si estamos ante una situación en la que hay que invertir, es razonable pensar que la cantidad tiene que ser nula o positiva, por eso podríamos establecer como ejemplo la condición de ser mayores o iguales a cero.

Otra cuestión a tener en cuenta, es el número de etapas en las que se divide nuestro problema, es decir, el tamaño de n. Es claro que a medida que el número de períodos aumente, la dificultad crecerá también. Cuando nos encontremos un problema de talla grande, será necesario acudir a técnicas sofisticadas, haciendo uso de programas informáticos para poder hallar la solución óptima. Sin embargo, cuando el problema sea relativamente pequeño, se podrán emplear diferentes métodos dependiendo también a su vez del tamaño. En ocasiones habrá procesos que dependiendo de la talla del problema resultarán más engorrosos que otros.

A lo largo de este trabajo, daremos solución al problema principal (PB) y trataremos algunos ejemplos del ámbito de la economía. Durante el capítulo 2 utilizaremos la Regla de los Multiplicadores de Lagrange para poder determinar el control óptimo de nuestro sistema. Posteriormente, trabajaremos en un problema de acumulación donde se reflejará la utilidad de esta técnica. A continuación, en el capítulo 3, de nuevo daremos solución al problema (PB) pero desde el enfoque de la programación dinámica. Trataremos el problema de acumulación óptima desde este punto de vista, comparándolo así con el método del capítulo 2. Al final de este capítulo, también se estudiará el problema principal cuando la función objetivo V adopte una forma cuadrática. Para finalizar, haremos una modificación en el problema principal, y trabajaremos con un horizonte temporal infinito empleando el método de la programación dinámica. A través de esta técnica, estudiaremos uno de los modelos más importantes en el campo de la macroeconomía, el modelo básico de crecimiento.

Capítulo 2

Resolución aplicando la Regla de los Multiplicadores de Lagrange

2.1. Multiplicadores de Lagrange

Una vez que ya se conoce cuál es el problema que nos interesa, en este capítulo vamos a pasar a su resolución. Para ello, en primer lugar haremos uso de los conocidos multiplicadores de Lagrange, una herramienta introducida durante el grado. Para enunciar la Regla de los Multiplicadores de Lagrange vamos a considerar el siguiente problema:
Dadas $F, h_i, r_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abierto, la formulación del problema será la siguiente:

$$(P) \begin{cases} Minimizar & F(x) \\ sujeto\ a: & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \\ & h_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq n_I \\ & r_j(x) \leq 0 \quad 1 \leq j \leq n_D \end{cases} \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.1. ***Regla de los Multiplicadores de Lagrange**. Si $\overline{x}$ es una solución del problema (P), supuesto que $F, h_i, r_j \in C^1(\Omega)$, entonces $\forall i \in \{1, .., n_I\}$, $\forall j \in \{1, .., n_D\}$, existen $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}_+$, $\{\overline{\lambda}_i\}_{i=1}^{n_I} \subset \mathbb{R}$ y $\{\overline{\mu}_j\}_{j=1}^{n_D} \subset \mathbb{R}_+$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\overline{\alpha} + \sum_{i=1}^{n_I} |\overline{\lambda}_i| + \sum_{j=1}^{n_D} \overline{\mu}_j > 0 \tag{2.2}$$

$$\overline{\alpha} \nabla F(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n_I} \overline{\lambda}_i \nabla h_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{n_D} \overline{\mu}_j \nabla r_j(\overline{x}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\overline{\mu}_j \geq 0 \quad y \quad \overline{\mu}_j r_j(\overline{x}) = 0, \quad \forall j \in \{1, .., n_D\} \tag{2.4}$$

$$h_i(\overline{x}) = 0, \quad \forall i \in \{1, .., n_I\} \quad y \quad r_j(\overline{x}) \leq 0, \quad \forall j \in \{1, .., n_D\} \tag{2.5}$$

La demostración puede verse en [1].

Estas cuatro condiciones reciben el nombre de condiciones de Fritz-John. Igualmente, se denominan **condiciones de Kuhn-Tucker** cuando el parámetro $\overline{\alpha}$ toma valor igual a uno (se dice entonces que $\overline{x}$ es un punto de Kuhn-Tucker). Por otro lado, los números $\{\overline{\lambda}_i\}_{i=1}^{n_I}$ y $\{\overline{\mu}_j\}_{j=1}^{n_D}$ son conocidos como **multiplicadores de Lagrange**. Otro término a introducir y que nos será útil más adelante, es la denominada función Lagrangiana.

Definición 2.1.1. *Se llama* ***función Lagrangiana*** *a la función* $L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n_I} \times \mathbb{R}^{n_D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como:*

$$L(x, \lambda, \mu) = F(x) + \sum_{i=1}^{n_I} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{n_D} \mu_j r_j(x)$$

Observación 2.1.1. *Notemos que si* $\overline{x}$ *es un punto de Kuhn-Tucker, se verifica que* $\nabla_x L(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) = 0$

Basta notar que:

$$\nabla_x L(\overline{x}, \overline{\lambda}, \overline{\mu}) = \nabla F(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n_I} \overline{\lambda}_i \nabla h_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{n_D} \overline{\mu}_j \nabla r_j(\overline{x})$$

Además, como $\overline{x}$ es un punto de Kuhn-Tucker, cumple la condición (2.3) tomando $\overline{\alpha}$ igual a uno.

2.2. Resolución del problema (PB)

A lo largo de esta sección, resolveremos el problema principal a través de la Regla de los Multiplicadores de Lagrange, interpretando el sistema como un problema de optimización estático. Inicialmente, tenemos que reescribir el problema adecuándolo a la formulación de (2.1), de forma que el problema que estudiaremos a partir de ahora es el siguiente:

$$(PDM) \begin{cases} Minimizar & V = -\sum_{k=0}^{n-1} f_k(y_k, u_k) - f_n(y_n) & \\ sujeto\ a: & g_k(y_k, u_k) - y_{k+1} = 0 & \forall k = 0, 1, .., n-1 \\ & -y_k \leq 0 & \forall k = 1, 2, .., n \\ & -u_k \leq 0 & \forall k = 0, 1, .., n-1 \\ con: & y_0 \ \ dado & \end{cases} \tag{2.6}$$

Una vez planteado el nuevo sistema, debemos observar que nuestras incógnitas $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ e $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ conforman el vector x del problema (2.1), que en este caso estará compuesto por $2n$ variables, por lo que tomaremos $m = 2n$.

Antes de continuar con el siguiente paso, es importante destacar la necesidad de empezar probando la existencia de solución, para que tenga sentido realizar todo el proceso que se sigue a continuación. La demostración de la existencia de solución se debe realizar en cada problema que se trate de resolver, empleando algunas herramientas como el Teorema de Weierstrass, ("una función continua definida sobre un compacto alcanza sus extremos"), o demostrando que la función objetivo es continua, y coerciva sobre el conjunto cerrado de puntos admisibles. En cualquier caso, este tema se tratará de forma separada y de ahora en adelante vamos a suponer que existe un vector solución $\overline{x}$.

Para comenzar con la resolución del problema (2.6), vamos a definir su función Lagrangiana,

$$L(u,y,\lambda,\sigma,\mu) = -\sum_{k=0}^{n-1} f_k(y_k,u_k) - f_n(y_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(g_k(y_k,u_k) - y_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(-y_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k(-u_k) \tag{2.7}$$

donde $u = (u_0, ..., u_{n-1})$, $y = (y_1, ..., y_n)$ y $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_{n-1})$, $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$, $\mu = (\mu_0, ..., \mu_{n-1})$.

Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que nuestro vector solución $\overline{x}$, definido como $\overline{x} = (\overline{u}_0, ..., \overline{u}_{n-1}, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_n)$ es un punto de Kuhn-Tucker. Entonces, por la observación (2.1.1), $\nabla_{u,y} L(\overline{u}, \overline{y}, \overline{\lambda}, \overline{\sigma}, \overline{\mu}) = 0$, por lo que, tras derivar la función Lagrangiana respecto de u e y se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = -\frac{\partial f_k}{\partial u_k}(\overline{y}_k, \overline{u}_k) + \overline{\lambda}_k \frac{\partial g_k}{\partial u_k}(\overline{y}_k, \overline{u}_k) - \overline{\mu}_k = 0 \qquad \forall k = 0, 1, .., n-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_k} = -\frac{\partial f_k}{\partial y_k}(\overline{y}_k, \overline{u}_k) - \overline{\lambda}_{k-1} + \overline{\lambda}_k \frac{\partial g_k}{\partial y_k}(\overline{y}_k, \overline{u}_k) - \overline{\sigma}_k = 0 \qquad \forall k = 1, .., n-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_n} = -\frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\overline{y}_n) - \overline{\lambda}_{n-1} - \overline{\sigma}_n = 0$$

Además junto a estas ecuaciones, debemos tener en cuenta que nuestro vector solución también ha de verificar la condición (2.4) de la Regla de los Multiplicadores de Lagrange, la cual señala:

$$\overline{\sigma}_k \geq 0 \;\; y \quad \overline{\sigma}_k(-\overline{y}_k) = 0 \quad \forall k = 1, .., n$$

$$\overline{\mu}_k \geq 0 \;\; y \quad \overline{\mu}_k(-\overline{u}_k) = 0 \quad \forall k = 0, .., n-1$$

En consecuencia, si juntamos las anteriores expresiones nos encontramos con el siguiente sistema :

$$\overline{\mu}_k = -\frac{\partial f_k}{\partial u_k}(\overline{y}_k, \overline{u}_k) + \overline{\lambda}_k \frac{\partial g_k}{\partial u_k}(\overline{y}_k, \overline{u}_k) \qquad \forall k = 0, 1, .., n-1 \tag{2.8}$$

$$\overline{\sigma}_k = -\frac{\partial f_k}{\partial y_k}(\overline{y}_k, \overline{u}_k) - \overline{\lambda}_{k-1} + \overline{\lambda}_k \frac{\partial g_k}{\partial y_k}(\overline{y}_k, \overline{u}_k) \qquad \forall k = 1, .., n-1 \tag{2.9}$$

$$\overline{\sigma}_n = -\frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\overline{y}_n) - \overline{\lambda}_{n-1} \tag{2.10}$$

$$\overline{\mu}_k \cdot \overline{u}_k = 0 \quad \forall k = 0, .., n-1 \tag{2.11}$$

$$\overline{\sigma}_k \cdot \overline{y}_k = 0 \quad \forall k = 1, .., n \tag{2.12}$$

Antes de empezar a buscar una solución para el sistema, vamos a analizar cuál es la información de la que disponemos y qué es aquello que nos interesa encontrar. Inicialmente, como datos sabemos el número de etapas en las que se divide el problema, es decir el valor de n, conocemos también el valor de y_0 y además están a nuestro alcance las funciones $\{f_k\}_{k=0}^{n}$ y $\{g_k\}_{k=0}^{n-1}$. Por otro lado, en cuanto a las variables que aparecen, observamos un total de $5n$, entre las que se encuentran: $\{\overline{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\overline{y}_k\}_{k=1}^{n}$, $\{\overline{\lambda}_k\}_{k=0}^{n-1}$, $\{\overline{\mu}_k\}_{k=0}^{n-1}$ y $\{\overline{\sigma}_k\}_{k=1}^{n}$.

Las incógnitas que nos interesa hallar son aquellas que conforman el vector solución $\overline{x}$. Sin embargo, si se observan los datos del problema, a partir del valor de $\{\overline{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$, se pueden obtener las variables $\{\overline{y}_k\}_{k=1}^{n}$. De esta forma, nuestro principal objetivo va a consistir en encontrar las variables $\{\overline{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$. Para ello, en cada etapa k, necesitaremos una expresión (denominada **función de política** h_k), que dependa únicamente de $\overline{y}_k$ y a partir de la cual se pueda determinar el valor de $\overline{u}_k$.

$$\overline{u}_k = h_k(\overline{y}_k) \tag{2.13}$$

Cuando se determinen todas las funciones de política para las variables $\{\overline{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$, se podrán obtener las incógnitas $\{\overline{y}_k\}_{k=1}^{n}$ haciendo uso del valor inicial y_0 y de las funciones $\{g_k\}_{k=0}^{n-1}$.

Una vez que ya hemos establecido el objetivo principal, vamos a comenzar con la resolución. Observando las diferentes ecuaciones, parece conveniente empezar partiendo desde la última etapa. Por lo tanto, nuestro propósito ahora es determinar la función de política h_{n-1} para la variable $\overline{u}_{n-1}$. Sin embargo podemos encontrar diversas posibles situaciones:

1. La primera de ellas, corresponde a la posibilidad de que la variable $\overline{u}_{n-1}$ tome valor cero, en ese caso automáticamente ya tendríamos la expresión que estábamos buscando:

$$\overline{u}_{n-1} = 0 \tag{2.14}$$

2. Por otra parte, la variable $\overline{u}_{n-1}$ puede tomar valor distinto de cero. Ante esta situación, hacemos uso de la ecuación (2.11) que indica que el multiplicador $\overline{\mu}_{n-1}$ ha de ser necesariamente nulo. Con este nuevo dato, si sustituimos $\overline{\mu}_{n-1} = 0$ en la ecuación (2.8), podemos despejar el valor de $\overline{\lambda}_{n-1}$:

$$\overline{\lambda}_{n-1} = \frac{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_{n-1}}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1})}{\frac{\partial g_{n-1}}{\partial u_{n-1}}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1})} \tag{2.15}$$

Una vez que ya hemos despejado $\overline{\lambda}_{n-1}$, nuevamente nos encontramos ante dos posibles casos:

a) Primeramente, puede darse la posibilidad de que la variable $\overline{y}_n$ tome valor 0. Si esto ocurre, a través de la restricción de igualdad en la etapa $n-1$, sustituyendo $\overline{y}_n = 0$, ya tenemos una función que depende únicamente de las variables $\overline{y}_{n-1}$ y $\overline{u}_{n-1}$. Por lo que, basta despejar $\overline{u}_{n-1}$ para obtener la función de política que buscábamos:

$$g_{n-1}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{u}_{n-1} = h_{n-1}(\overline{y}_{n-1}) \tag{2.16}$$

b) A diferencia del caso *a*), otra posible situación es que la variable $\overline{y}_n$ sea distinta de cero.

En ese caso, necesariamente el multiplicador $\overline{\sigma}_n$ tendría que ser cero para que se verifique la ecuación (2.12). Por otro lado, sustituyendo $\overline{\sigma}_n = 0$ en la ecuación (2.10) podemos despejar el valor de $\overline{\lambda}_{n-1}$:

$$\overline{\lambda}_{n-1} = -\frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\overline{y}_n) \tag{2.17}$$

El miembro de la derecha de esta ecuación depende de la variable $\overline{y}_n$. Sin embargo, haciendo uso de la restricción de igualdad para $k = n-1$, podemos expresar este término en función de las variables $\overline{y}_{n-1}$ y $\overline{u}_{n-1}$, de forma que exista una función tal que :

$$F_{n-1}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1}) = -\frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\overline{y}_n) \tag{2.18}$$

Igualando (2.15) y (2.17), tenemos una expresión que depende de las variables $\overline{y}_{n-1}$ y $\overline{u}_{n-1}$:

$$\frac{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial u_{n-1}}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1})}{\frac{\partial g_{n-1}}{\partial u_{n-1}}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1})} - F_{n-1}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1}) = 0 \tag{2.19}$$

Para encontrar la función de política que estábamos buscando, basta despejar de la ecuación (2.19) la variable $\overline{u}_{n-1}$:

$$\overline{u}_{n-1} = h_{n-1}(\overline{y}_{n-1}) \tag{2.20}$$

En cualquiera de los casos, ya sea $\overline{u}_{n-1} = 0$ ó $\overline{u}_{n-1} \neq 0$, hemos conseguido encontrar una expresión que depende únicamente de $\overline{y}_{n-1}$ y a partir de la cual se pueda hallar $\overline{u}_{n-1}$. De esta forma, hemos reducido la talla del problema.

Habiendo encontrado la función de política h_{n-1}, ahora nuestro siguiente paso va a ser tratar de hallar la expresión a través de la cual podamos obtener $\overline{u}_{n-2}$. De nuevo, al igual que en el caso anterior aparecen diferentes posibilidades:

1. Si la variable $\overline{u}_{n-2} = 0$, la función de política queda determinada automáticamente:

2. Por el contrario, puede darse el caso en el que la variable $\overline{u}_{n-2}$ sea no nula. Si esto ocurre, haciendo uso de las ecuaciones (2.11) y (2.8) podemos despejar el valor de $\overline{\lambda}_{n-2}$:

$$\overline{\lambda}_{n-2} = \frac{\frac{\partial f_{n-2}}{\partial u_{n-2}}(\overline{y}_{n-2}, \overline{u}_{n-2})}{\frac{\partial g_{n-2}}{\partial u_{n-2}}(\overline{y}_{n-2}, \overline{u}_{n-2})} \tag{2.21}$$

   Cuando ya tenemos despejado el valor de $\overline{\lambda}_{n-2}$, nos encontramos ante otras dos posibles situaciones:

   a) En primer lugar, que la variable $\overline{y}_{n-1}$ tome valor cero. Análogamente a la etapa anterior, se obtiene la función de política a través de la restricción de igualdad:

$$g_{n-2}(\overline{y}_{n-2}, \overline{u}_{n-2}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{u}_{n-2} = h_{n-2}(\overline{y}_{n-2}) \tag{2.22}$$

   b) Si por el contrario, la variable $\overline{y}_{n-1}$ es distinta de cero, empleando las ecuaciones (2.12) y (2.9) podemos obtener otra expresión de la variable $\overline{\lambda}_{n-2}$:

$$\overline{\lambda}_{n-2} = -\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1}) + \overline{\lambda}_{n-1}\frac{\partial g_{n-1}}{\partial y_{n-1}}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1}) \tag{2.23}$$

El miembro de la derecha de esta ecuación depende de las variables $\overline{y}_{n-1}$, $\overline{u}_{n-1}$ y $\overline{\lambda}_{n-1}$. Sin embargo, en la etapa anterior, ya verificamos que $\overline{u}_{n-1}$ se podía expresar a partir de $\overline{y}_{n-1}$. Por otro lado, también se comprobó que $\overline{\lambda}_{n-1}$ se puede representar a partir de las variables $\overline{y}_{n-1}$, $\overline{u}_{n-1}$. Además, teniendo en cuenta la restricción de igualdad para $k = n-2$, la variable $\overline{y}_{n-1}$ se va a poder expresar a partir de $\overline{y}_{n-2}$, $\overline{u}_{n-2}$. Por lo que, existirá una función a partir de la cual se puede representar el término de la derecha de la ecuación (2.23):

$$F_{n-2}(\overline{y}_{n-2}, \overline{u}_{n-2}) = -\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1}) + \overline{\lambda}_{n-1}\frac{\partial g_{n-1}}{\partial y_{n-1}}(\overline{y}_{n-1}, \overline{u}_{n-1}) \tag{2.24}$$

Por lo tanto, igualando (2.21) y (2.23), obtenemos una ecuación en función de $\overline{y}_{n-2}$ y $\overline{u}_{n-2}$:

$$\frac{\frac{\partial f_{n-2}}{\partial u_{n-2}}(\overline{y}_{n-2}, \overline{u}_{n-2})}{\frac{\partial g_{n-2}}{\partial u_{n-2}}(\overline{y}_{n-2}, \overline{u}_{n-2})} - F_{n-2}(\overline{y}_{n-2}, \overline{u}_{n-2}) = 0 \tag{2.25}$$

Si despejamos la variable $\overline{u}_{n-2}$, podremos encontrar la función de política para expresar el término $\overline{u}_{n-2}$ en función de $\overline{y}_{n-2}$:

$$\overline{u}_{n-2} = h_{n-2}(\overline{y}_{n-2}) \tag{2.26}$$

El proceso anterior se puede generalizar fácilmente para cualquier período k. Como se puede observar, la resolución del problema a través de este método, consiste en construir funciones de política partiendo de la etapa final, avanzando hasta llegar al inicio. De esta forma, cuando se llega a la primera etapa, se sustituye el valor dado, formando una cadena gracias a la cual se obtienen todos los valores. Este procedimiento se denomina **inducción hacia atrás**, y más adelante observaremos cómo esta idea tiene cierta similitud al concepto propuesto por Bellman en la programación dinámica.

2.3. Problema de acumulación óptima

En esta sección, mediante el proceso detallado anteriormente, vamos a dar solución a un problema de acumulación óptima, basado en [3]. La idea de estos problemas consiste en, partiendo de una cantidad inicial de un determinado bien, y_0, añadir en cada etapa la cantidad de bien que se desee teniendo en cuenta las restricciones. Una vez transcurridas las n etapas, la cantidad de bien acumulada se venderá a un determinado precio. El objetivo consistirá en maximizar el beneficio, representado por la diferencia entre ingresos, que será la cuantía total que se reciba por la venta del bien, menos gastos, siendo éstos los costes de ir añadiendo en cada etapa una determinada cantidad y en caso de haber, los costes incurridos por el mantenimiento de la cantidad acumulada.

Por otro lado, debemos tener en cuenta que cada año se experimenta una determinada tasa de inflación, lo que provoca una pérdida del poder adquisitivo, y una disminución del valor del dinero. Por este motivo, se introduce también en este problema, una tasa de descuento $\beta \in (0,1)$, para representar esa pérdida del valor a lo largo de las diferentes etapas del problema. La formulación general del problema será la siguiente:

$$(PA)\begin{cases} Maximizar & V = \beta^n p y_n - \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k f(y_k, u_k) \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = y_k + u_k \qquad \forall k = 0,1,..,n-1 \\ & u_k \geq 0 \qquad \forall k = 0,1,..,n-1 \\ con: & y_0\ \ dado \end{cases} \tag{2.27}$$

En este caso, los vectores $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ e $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ que conforman el vector x del problema, van a representar en cada etapa k, la cantidad de bien que se añade y la cuantía total del bien respectivamente. La función $f(y_k, u_k)$ representará los respectivos costes de añadir en cada etapa la cantidad u_k y mantener la acumulada y_k, y p hará referencia al precio unitario por el cual se puede vender la cantidad total acumulada. En este sistema, se supone también que estamos hablando de cantidades positivas, por lo que y_0 será mayor o igual a cero.

Para dar un ejemplo concreto, vamos a pensar en el funcionamiento de una mina de hierro. Supongamos que tenemos una cantidad inicial de 3 toneladas de hierro, los costes de extraer u_k toneladas de hierro se elevan a $0,15u_k^2$ (no hay costes por el mantenimiento de la cantidad acumulada). Al cabo de cinco años se venderá todo el metal extraído, por un precio unitario de 6 u.m, y el factor de descuento toma un valor de $0,98$, originado por una inflación del 2 %. El propósito del problema consiste en calcular la cantidad de hierro a extraer en cada etapa para obtener así el máximo beneficio.

Para dar solución a este problema a través del método de los multiplicadores de Lagrange, debemos formular el sistema basándonos en (2.6), resultando:

$$(PAE)\begin{cases} Minimizar & V = -0,98^5 \cdot 6 \cdot y_5 + \sum_{k=0}^{4} 0,98^k \cdot 0,15u_k^2 \\ sujeto\ a: & y_k + u_k - y_{k+1} = 0 \qquad \forall k = 0,1,..,4 \\ & -u_k \leq 0 \qquad \forall k = 0,1,..,4 \\ con: & y_0 = 3 \end{cases} \tag{2.28}$$

En este caso, haciendo uso de las restricciones de igualdad, el problema (PAE) se puede escribir como:

$$(PAE')\begin{cases} Minimizar & F(u_0,\ldots,u_4) = -0,98^5 \cdot 6 \cdot (3 + u_0 + \ldots + u_4) + \sum_{k=0}^{4} 0,98^k \cdot 0,15u_k^2 \\ sujeto\ a: & -u_k \leq 0 \qquad \forall k = 0,1,..,4 \end{cases} \tag{2.29}$$

Para probar que existe solución, basta con observar que la función objetivo es convexa por ser la suma finita de funciones convexas del tipo $h(x) = ax^2 + bx$ con $a > 0$, en este caso, $h(u_k) = 0,98^k \cdot 0,15u_k^2 - 0,98^5 \cdot 6 \cdot u_k$. Por lo tanto, al ser F una función convexa, en efecto alcanza el valor mínimo.

Ahora bien, para hallar la solución en esta ocasión, podemos minimizar cada término por separado, resolviendo el siguiente problema para cada $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$$(PAE'_k) \begin{cases} Minimizar & F_k(u_k) = -0,98^5 \cdot 6 \cdot u_k + 0,98^k \cdot 0,15u_k^2 \\ sujeto\ a: & -u_k \leq 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

Para hallar el mínimo, derivamos e igualamos a cero cada función F_k, obteniendo:

$$0 = F'_k(u_k) = -0,98^5 \cdot 6 + 2 \cdot 0,98^k \cdot 0,15u_k \Rightarrow u_k = \frac{0,98^5 \cdot 6}{2 \cdot 0,98^k \cdot 0,15}$$

Este valor de la variable u_k corresponde con el valor mínimo de la función F_k que estábamos buscando para cada k. Elaborando los cálculos de las variables solución $\overline{u}_k$ y a través de la restricción de igualdad del problema inicial (PAE), nuestro vector solución $\overline{x} = (\overline{u}_0, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, \overline{y}_4, \overline{y}_5)$ es el siguiente:

$$\overline{x} = (18{,}078,\ 18{,}447,\ 18{,}823,\ 19{,}208,\ 19{,}6,\ 21{,}078,\ 39{,}525,\ 58{,}348,\ 77{,}556,\ 97{,}156)$$

Con este resultado, en el que se refleja la cantidad a extraer en cada etapa y la cantidad acumulada en cada período, obtenemos un beneficio máximo de 271,60 u.m. . Otra de las formas de resolver el problema (PAE) es utilizando la Regla de los Multiplicadores de Lagrange. En este caso, las condiciones resultantes serían:

$$\begin{aligned} &\mu_k = 2 \cdot 0,98^k \cdot 0,15 \cdot u_k - 0,98^5 \cdot 6 && \forall k = 0, 1, .., 4 \\ &\mu_k u_k = 0 && \forall k = 0, .., 4 \end{aligned}$$

Para cada $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se darían dos posibles situaciones, o bien $\overline{u}_k = 0$, ó $\overline{u}_k = \frac{0{,}98^5 \cdot 6}{2 \cdot 0{,}98^k \cdot 0{,}15}$. Con lo que nos encontraríamos $2^5 = 32$ posibles soluciones, que hay que evaluar en la función objetivo para conocer en cual se alcanza el mínimo. Este problema en concreto, se trataba de un problema de tan solo 5 etapas, en el que la función de coste solo dependía de la variable u_k, lo que facilita el problema, y además no existían restricciones de cota para las variables y_k porque ya estaban implícitas. Sin embargo, realizar todo el proceso a mano puede resultar pesado, lo que nos indica que el proceso de los multiplicadores de Lagrange, aunque resulte ser efectivo, no parece que sea el más óptimo en determinadas situaciones.

Si por ejemplo, nos encontramos ante un problema en el que el número de etapas es considerable, realizar todo este proceso a mano no sería óptimo, se debería de emplear alguna técnica computacional para solventar el problema de la talla. Si por otro lado, nuestra función coste también depende de la variable y_k, el método nos conduciría a calcular en cada etapa una función de política que deberíamos arrastrar a lo largo de todo el proceso, lo que provocaría un aumento de complejidad y por consiguiente más posibilidades de error. En el siguiente capítulo, vamos a introducir otra de las técnicas empleadas para resolver este tipo de problemas, la programación dinámica. Basándose en la misma idea que en la técnica de los multiplicadores de Lagrange, este nuevo método, nos permitirá resolver nuestro problema objeto de estudio de una forma más simple.

Capítulo 3

Resolución aplicando Programación Dinámica

3.1. Introducción

En este tercer capítulo nos centraremos en resolver el problema principal con la ayuda de una nueva herramienta: la programación dinámica. Esta técnica, como se detalla en la introducción, fue desarrollada por el matemático Richard Bellman alrededor de 1950, con el fin de encontrar un método general de optimización de procesos de decisión en múltiples pasos. Antes de comenzar con el método, explicaremos el planteamiento del problema, así como sus elementos:

$$(PB)\begin{cases} Maximizar & V = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(y_k,u_k) + f_n(y_n) & \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = g_k(y_k,u_k) & \forall k = 0,1,..,n-1 \\ & u_k \in \Gamma_k & \forall k = 0,1,..,n-1 \\ con: & y_0\ \ dado & \end{cases}$$

Este problema, se trata de un sistema dinámico, es decir, un sistema que evoluciona en este caso en un tiempo discreto, compuesto por n etapas o períodos, en donde se conoce la situación inicial y_0. La evolución del sistema dependerá del valor que se le asigne a las variables $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ y $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$. Por un lado, las incógnitas $\{u_k\}_{k=0}^{n-1}$ se denominan **variables de control**, cada u_k representa en cada etapa k la influencia que se ejerce sobre el comportamiento del sistema, mientras que las variables $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ constituyen las **variables de estado**, indicando en cada período k la situación en la que se encuentra el sistema. Además, para cada k, las variables de control pertenecerán al conjunto Γ_k.

El objetivo principal del problema será determinar el **control óptimo**, denominado así el vector que contiene las variables de control solución y expresado como $\overline{u}$, de forma que se maximice la función V que recibe el nombre de **funcional objetivo**. Esta función V está compuesta a su vez por el conjunto de funciones $\{f_k\}_{k=0}^{n-1}$, denominadas **funciones de retorno**, y por f_n siendo ésta la función que simboliza una aportación al funcional objetivo de la última etapa. Por otro lado, el vector que contiene las variables de estado solución representado por $\overline{y}$ recibe el nombre de **trayectoria de estado óptima** o **camino óptimo**. La evolución del sistema aparece reflejada a través de unas restricciones de igualdad, $\{g_k\}_{k=0}^{n-1}$, que reciben el nombre de **ecuación de estado** o **ecuación de movimiento**.

Resaltar que a lo largo de estas definiciones, y al contrario que en la Regla de los Multiplicadores de Lagrange, en ningún momento se ha requerido la diferenciabilidad de las funciones en el planteamiento. Esta característica de la programación dinámica permite resolver problemas con determinadas restricciones que a través de Lagrange sería imposible.

3.2. Método Programación dinámica

En esta sección explicaremos con más detenimiento la programación dinámica a través de diversos resultados, tomados de [2], [3]. Como un primer concepto, la idea principal de la programación dinámica se basa en resolver un problema de n etapas o períodos descomponiéndolo en n problemas de una etapa o período, pero sin perder la visión del problema en su conjunto.

Un problema de control óptimo en tiempo discreto como (PB), verifica la siguiente propiedad:

Propiedad de causalidad Dados $k,\ j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tal que verifiquen que $j < k$, se tiene que la variable estado y_k del sistema dependerá únicamente de la variable estado y_j, y de los controles intermedios $\{u_j, u_{j+1}, ..., u_{k-1}\}$.

Esta propiedad es una consecuencia inmediata del planteamiento del problema. Como ya se explicó anteriormente, a través de la ecuación de estado se muestra la evolución del sistema, con lo que de esta forma la variable y_{j+1} dependerá del valor de y_j y u_j. De forma análoga, la variable y_{j+2} se podrá expresar en términos de u_{j+1} e y_{j+1}.

Si sucesivamente empleamos este argumento, llegaremos a la siguiente expresión:

$$y_k = g_{k-1}(y_{k-1}, u_{k-1}) = g_{k-1}(g_{k-2}(y_{k-2}, u_{k-2}), u_{k-1}) = g_{k-1}(g_{k-2}(g_{k-3}(y_{k-3}, u_{k-3}), u_{k-2}), u_{k-1}) =$$

$$= ... = \Phi(y_j, u_j, u_{j+1}, ..., u_{k-1})$$

La función Φ, hace referencia al conjunto de todas las funciones que resultan de ir sustituyendo de manera recurrente la variable estado. Por lo que, queda así comprobado que en efecto, la variable estado y_k se podrá expresar en función de la variable y_j, y de las correspondientes variables de control intermedias.

Como consecuencia de esta proposición, cada trayectoria de estado queda determinada por el valor inicial y_0, y el conjunto de controles $\{u_0, u_1, ..., u_{n-1}\}$. De esta forma, para conseguir el objetivo general del problema que es maximizar el funcional objetivo, bastará con determinar el valor de las variables de control $\{u_0, u_1, ..., u_{n-1}\}$.

La siguiente cuestión a tratar es la resolución del problema que nos compete, sin embargo antes de adentrarnos en los principios fundamentales, vamos a enunciar el siguiente resultado que nos será de gran utilidad más adelante:

Lema 3.2.1. *Dados* Γ_1 *y* Γ_2 *dos conjuntos compactos, sean* $q_1 : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$, *y* $q_2 : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \to \mathbb{R}$ *dos funciones reales continuas, entonces:*

$$\max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2} \{q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2)\} = \max_{x_1 \in \Gamma_1} \{q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2} \{q_2(x_1, x_2)\}\} \tag{3.1}$$

Demostración. En primer lugar, aplicando el teorema de Weierstrass, la función compuesta por las funciones q_1 y q_2 alcanza el máximo por ser la composición de dos funciones continuas, definida en $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ compacto. Por otro lado, para demostrar la igualdad de ambas expresiones, vamos a comenzar probando que el término de la izquierda es mayor o igual que el miembro de la derecha.

Por definición de máximo de una función es claro que se verifica lo siguiente:

$$\max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2} \{q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2)\} \geq q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2), \forall x_1 \in \Gamma_1, \ \forall x_2 \in \Gamma_2$$

Más en concreto:

$$\max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2} \{q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2)\} \geq q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2} \{q_2(x_1, x_2)\} \forall x_1 \in \Gamma_1 \tag{3.2}$$

En particular, como todavía no hemos probado la existencia del máximo para el término de la derecha, se tiene que: :

$$\max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2} \{q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2)\} \geq \sup_{x_1 \in \Gamma_1} \{q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2} \{q_2(x_1, x_2)\}\}$$

Para probar a continuación la desigualdad en el sentido contrario, por definición de máximo es claro que para todo x_1 que pertenezca a Γ_1 y para todo x_2 que pertenezca a Γ_2:

$$q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2) \leq q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2} \{q_2(x_1, x_2)\}$$

Concretamente, se verificará que:

$$\max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2} \{q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2)\} \leq \sup_{x_1 \in \Gamma_1} \{q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2} \{q_2(x_1, x_2)\}\}$$

Por lo tanto, necesariamente ambos términos tienen que ser iguales. Para demostrar ahora que se alcanza el máximo en el miembro de la derecha, sabemos en primer lugar que, existirán $\overline{x}_1$ y $\overline{x}_2$ pertenecientes a Γ_1 y Γ_2 respectivamente, para los cuales se alcance el máximo del miembro de la izquierda:

$$q_1(\overline{x}_1) + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2} \{q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2)\} = \sup_{x_1 \in \Gamma_1} \{q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2} \{q_2(x_1, x_2)\}\}$$

Por lo tanto para cualquier $x_1 \in \Gamma_1$ se verifica que:

$$q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2} \{q_2(x_1, x_2)\} \leq q_1(\overline{x}_1) + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

En particular, si tomamos $x_1 = \overline{x}_1$:

$$q_1(\overline{x}_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2}\{q_2(\overline{x}_1, x_2)\} \leq q_1(\overline{x}_1) + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

En esta expresión, desaparecen los términos $q_1(\overline{x}_1)$, y entonces por definición de máximo, sabemos que $\max_{x_2 \in \Gamma_2}\{q_2(\overline{x}_1, x_2)\} = q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\sup_{x_1 \in \Gamma_1} \{q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2}\{q_2(x_1, x_2)\}\} = q_1(\overline{x}_1) + q_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = q_1(\overline{x}_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2}\{q_2(\overline{x}_1, x_2)\}$$

Por lo que queda probado que en efecto se alcanza el máximo. □

Antes de continuar con la siguiente observación, destacar que la compacidad de los conjuntos Γ_1 y Γ_2 es suficiente para probar que se alcanza el máximo. Sin embargo esta condición no es necesaria. Para que se verifique el lema, basta con que se alcancen los máximos.

Observación 3.2.1. *Este lema, se puede generalizar para el caso de n funciones. Si tenemos el conjunto de $\{q_i\}_{i=1}^n$ de funciones reales, continuas y con Γ_i dominios compactos, entonces:*

$$\begin{aligned} &\max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2, \ldots, x_n \in \Gamma_n} \{q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2) + \ldots + q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} = \\ &\max_{x_1 \in \Gamma_1}\{q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2}\{q_2(x_1, x_2) + \ldots + \max_{x_n \in \Gamma_n}\{q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Demostración. Para demostrar esta igualdad vamos a emplear la técnica de inducción. Anteriormente, se ha probado que para $i = 2$ esta igualdad es cierta. El siguiente paso es suponer que para el caso $n-1$, se verifica la igualdad. De este modo nuestra hipótesis de inducción será:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2, \ldots, x_{n-1} \in \Gamma_{n-1}} \{q_1(x_1) + q_2(x_1, x_2) + \ldots + q_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\} = \\ &\max_{x_1 \in \Gamma_1}\{q_1(x_1) + \max_{x_2 \in \Gamma_2}\{q_2(x_1, x_2) + \ldots + \max_{x_{n-1} \in \Gamma_{n-1}}\{q_{n-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1})\}\}\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por último, debemos comprobar que se cumple para el caso n. Por hipótesis de inducción, sabemos que se verifica la igualdad para el caso de $n-1$ funciones. En este caso, al contar con una función más, podemos considerar la suma de las dos últimas, es decir, de q_{n-1} y de q_n, como una única, y de este modo se daría la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1 \in \Gamma_1, x_2 \in \Gamma_2, \ldots, x_n \in \Gamma_n} \{q_1(x_1) + \ldots + q_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} = \\ &\max_{x_1 \in \Gamma_1}\{q_1(x_1) + \ldots + \max_{x_{n-1} \in \Gamma_{n-1}, x_n \in \Gamma_n}\{q_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\} \end{aligned}$$

Sin embargo, sabemos que para el caso de dos funciones, se verifica la expresión (3.1), luego se obtiene así:

$$= \max_{x_1 \in \Gamma_1}\{q_1(x_1) + \ldots + \max_{x_{n-1} \in \Gamma_{n-1}}\{q_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \max_{x_n \in \Gamma_n}\{q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}\}\}$$

□

Seguidamente, se muestra uno de los conceptos fundamentales de la programación dinámica, a partir del cual se podrán resolver los problemas del tipo (PB). El método de la programación dinámica se basa en la idea de avanzar de atrás hacia adelante, partiendo desde el final del horizonte temporal dado hasta llegar al inicio.

Proposición 3.2.1. *Supongamos que existe una solución de (PB). Se define la función* $V_n^*(y_n)$ *como la aportación al funcional objetivo de este último período, es decir:*

$$V_n^*(y_n) = f_n(y_n) \tag{3.5}$$

Posteriormente, siguiendo el orden de final a principio, para cada $k \in \{n-1, n-2, ..., 1, 0\}$ *se establecen las denominadas* ***ecuaciones de Bellman****:*

$$V_k^*(y_k) = \max_{u_k \in \Gamma_k} \{f_k(y_k, u_k) + V_{k+1}^*(g_k(y_k, u_k))\} \tag{3.6}$$

Entonces, la función $V_0^*(y_0)$*, determinada por el último paso del algoritmo, determinará el valor óptimo del funcional objetivo.*

Por otro lado, si para cada $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$*,* $\overline{u}_k$ *maximiza la expresión situada a la derecha de la ecuación de Bellman, en función de* y_k*, entonces un control óptimo del problema vendrá determinado por:*

$$\overline{u} = (\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_{n-1})$$

Cada función $V_k^*(y_k)$ recibe el nombre de **función valor** y representa en términos de y_k el valor óptimo del funcional objetivo en el período k.

Demostración. Inicialmente, queremos comprobar que la función $V^*(y_0)$ dada por el método de la programación dinámica, corresponde al valor óptimo del funcional objetivo, es decir, que verifica las ecuaciones de estado y que cumple lo siguiente:

$$V^*(y_0) = \max_{u_0 \in \Gamma_0, .., u_{n-1} \in \Gamma_{n-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k(y_k, u_k) + f_n(y_n) \right\}$$

Gracias a las ecuaciones de estado podemos escribir cada variable y_k en función de $u_0, ..., u_{k-1}$. Entonces, estamos en las condiciones del lema 3.2.1, y se tiene que:

$$V^*(y_0) = \max_{u_0 \in \Gamma_0} \{f_0(y_0, u_0) + \max_{u_1 \in \Gamma_1} \{f_1(y_1, u_1) + ... + \max_{u_{n-1} \in \Gamma_{n-1}} \{f_{n-1}(y_{n-1}, u_{n-1}) + f_n(y_n)\} ...\}\}$$

Por otro lado, si tenemos en cuenta las ecuaciones de estado del sistema, el algoritmo de la programación dinámica establece:

$$V_n^*(y_n) = f_n(y_n)$$

$$V_{n-1}^*(y_{n-1}) = \max_{u_{n-1} \in \Gamma_{n-1}} \{f_{n-1}(y_{n-1}, u_{n-1}) + V_n^*(y_n)\}$$

Además, como conocemos que $y_n = g_{n-1}(y_{n-1}, u_{n-1})$ se conseguirá una función que maximice la variable de control u_{n-1}, pero en términos de la variable de estado y_{n-1}. Si repetimos este proceso de manera recursiva hasta llegar a las primeras etapas, obtendremos:

$$V_1^*(y_1) = \max_{u_1 \in \Gamma_1} \{f_1(y_1, u_1) + V_2^*(y_2)\} \quad con \quad y_2 = g_1(y_1, u_1)$$

$$V_0^*(y_0) = \max_{u_0 \in \Gamma_0} \{f_0(y_0, u_0) + V_1^*(y_1)\} \quad con \quad y_1 = g_0(y_0, u_0)$$

Cuando finalizamos el proceso, en efecto podemos observar cómo la función $V_0^*(y_0)$ nos proporciona el valor óptimo del funcional objetivo. Además, al concluir el método, obtendremos una función que maximiza la variable de control u_0 en términos de la variable y_0, dato que conocemos. Con ambas variables, u_0 e y_0, a través de la ecuación de movimiento obtenemos el valor de y_1. Si de nuevo, sustituimos y_1, en la función del paso anterior que maximizaba u_1, ya conoceríamos esta variable de control, y así sucesivamente hasta llegar a la última de las etapas. Los vectores de control obtenidos a lo largo de este proceso, nos proporcionarán el control óptimo $\overline{u} = (\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_{n-1})$. □

Una vez que ya se han introducido las ecuaciones de Bellman y se han detallado los pasos a seguir para resolver nuestro problema principal (PB), vamos a exponer a continuación el principio de optimalidad de Bellman:

Teorema 3.2.1. ***(Principio de optimalidad de Bellman)*** *Supongamos que* $\overline{u} = (\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_{n-1})$ *es un control óptimo de nuestro problema (PB), e* $\overline{y} = (\overline{y}_0, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_{n-1}, \overline{y}_n)$ *es la trayectoria de estado óptima. Entonces se tiene que,* $(\overline{u}_j, \overline{u}_{j+1}, ..., \overline{u}_{n-1})$ *es un control óptimo para el problema (SPD), siendo éste:*

$$(SPD) \begin{cases} Maximizar & \sum_{k=j}^{n-1} f_k(y_k, u_k) + f_n(y_n) & \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = g_k(y_k, u_k) & \forall k = j, j+1, .., n-1 \\ & u_k \in \Gamma_k & \forall k = j, j+1, .., n-1 \\ con: & \overline{y}_j \quad dado & \end{cases} \tag{3.7}$$

Demostración. Para demostrar esto, por reducción al absurdo, supondremos que el vector $(\overline{u}_j, \overline{u}_{j+1}, ..., \overline{u}_{n-1})$ no es un control óptimo del subproblema (SPD).

En este caso, existirá otro vector $(u_j^*, u_{j+1}^*, ..., u_{n-1}^*)$ tal que alcance el máximo del subproblema. En consecuencia, si esto ocurre, el vector $(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_{j-1}, u_j^*, u_{j+1}^*, ..., u_{n-1}^*)$ es un vector de variables de control que sustituyéndolas en el funcional objetivo del problema inicial (PB) generarían un mayor valor que el generado por el vector $\overline{u}$. Pero llegamos aquí a una contradicción, puesto que partíamos de que el vector $\overline{u}$ era un control óptimo del problema inicial, luego en efecto el vector $(\overline{u}_j, \overline{u}_{j+1}, ..., \overline{u}_{n-1})$ es un control óptimo del subproblema (SPD). □

En la rama de la economía, es posible que en diversas situaciones, cuando se nos plantee un problema multietapa, haya que trabajar con cantidades monetarias, con independencia de que sean gastos o ingresos, que se realizan en distintos momentos. Recibir una cierta cantidad de unidades monetarias hoy, no es lo mismo que obtenerlas dentro de un par de años, al igual que tampoco lo es si hablamos en términos de utilidad, por este motivo es imprescindible homogeneizar estas cantidades, y es por esto por lo que en muchos de los problemas del ámbito de la economía se introduce una tasa de descuento, coste de capital. La tasa de descuento, le resta valor al dinero del futuro cuando se trae al presente. Por este motivo, a continuación, vamos a considerar nuestro problema principal (PB), añadiendo en el funcional objetivo este parámetro, al que denotaremos por β, perteneciente al intervalo $(0,1)$

$$(PDB)\begin{cases} Maximizar & V=\sum_{k=0}^{n-1}\beta^k f_k(y_k,u_k)+\beta^n f_n(y_n) \\ sujeto\ a: & y_{k+1}=g_k(y_k,u_k) \quad \forall k=0,1,..,n-1 \\ & u_k\in\Gamma_k \qquad \forall k=0,1,..,n-1 \\ con: & y_0\ \ dado \end{cases} \tag{3.8}$$

Para resolver este problema a través del método de la programación dinámica, si aplicamos la Proposición 3.2.1, las ecuaciones de Bellman resultantes serían las siguientes:
Para la última de las etapas

$$V_n^*(y_n)=\beta^n f_n(y_n)$$

Y para cada $k\in\{n-1,n-2,...,1,0\}$ se definirán como

$$V_k^*(y_k)=\max_{u_k\in\Gamma_k}\{\beta^k f_k(y_k,u_k)+V_{k+1}^*(g_k(y_k,u_k))\}$$

Sin embargo, a continuación vamos a demostrar cómo las ecuaciones de Bellman para el problema (PDB), se pueden expresar de una manera más simple.

Proposición 3.2.2. *Las ecuaciones de Bellman para el problema (PDB), son equivalentes a:*

$$J_n^*(y_n)=f_n(y_n)$$

$$J_k^*(y_k)=\max_{u_k\in\Gamma_k}\{f_k(y_k,u_k)+\beta J_{k+1}^*(g_k(y_k,u_k))\}\ \ para\ cada\ \ k\in\{n-1,n-2,...,1,0\}$$

Demostración. En primer lugar definimos:

$$J_n^*(y_n)=\frac{1}{\beta^n}V_n^*(y_n)=f_n(y_n)$$

y para cada $k\in\{n-1,n-2,...,1,0\}$ se establece:

$$J_k^*(y_k)=\frac{1}{\beta^k}V_k^*(y_k)$$

Se tiene lo siguiente:

$$J_k^*(y_k)=\frac{1}{\beta^k}V_k^*(y_k)=\frac{1}{\beta^k}\max_{u_k\in\Gamma_k}\{\beta^k f_k(y_k,u_k)+V_{k+1}^*(g_k(y_k,u_k))\}=$$

$$\max_{u_k\in\Gamma_k}\{f_k(y_k,u_k)+\frac{1}{\beta^k}V_{k+1}^*(g_k(y_k,u_k))\}=\max_{u_k\in\Gamma_k}\{f_k(y_k,u_k)+\frac{\beta}{\beta^{k+1}}V_{k+1}^*(g_k(y_k,u_k))\}$$

Por como hemos definido la función $J_k^*(y_k)$, se tiene que $J_{k+1}^*(y_{k+1})=\frac{1}{\beta^{k+1}}V_{k+1}^*(y_{k+1})$, y por tanto:

$$J_k^*(y_k)=\max_{u_k\in\Gamma_k}\{f_k(y_k,u_k)+\beta J_{k+1}^*(g_k(y_k,u_k))\}$$

$\square$

3.3. Problema de acumulación óptima con Programación dinámica

En la sección 2.3 resolvimos un problema de acumulación óptima particular, aplicando la Regla de los Multiplicadores de Lagrange. Vimos además que este procedimiento no era óptimo. Por este motivo, en esta sección daremos solución al mismo problema, pero esta vez aplicando la programación dinámica. Recordemos que el problema planteado era el siguiente:

$$(PAE)\begin{cases} Maximizar & V = 0,98^5 \cdot 6 \cdot y_5 - \sum_{k=0}^{4} 0,98^k \cdot 0,15u_k^2 & \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = y_k + u_k & \forall k = 0,1,..,4 \\ & u_k \geq 0 & \forall k = 0,1,..,4 \\ con: & y_0 = 3 & \end{cases} \tag{3.9}$$

En primer lugar, aplicando la proposición 3.2.2, tenemos que, empezando por la última etapa:

$$J_5^*(y_5) = 6 \cdot y_5$$

Avanzando de atrás hacia adelante, para $k = 4$ tenemos:

$$J_4^*(y_4) = \max_{u_4 \geq 0}\{-0,15u_4^2 + 0,98J_5^*(y_4 + u_4)\} = \max_{u_4 \geq 0}\{-0,15u_4^2 + 0,98 \cdot 6 \cdot y_4 + 0,98 \cdot 6 \cdot u_4\}$$

Para calcular ese máximo, definimos la función $c(u_4) = -0,15u_4^2 + 0,98 \cdot 6 \cdot y_4 + 0,98 \cdot 6 \cdot u_4$. Derivamos, igualamos a cero y obtenemos:

$$c'(u_4) = 0 \ \Rightarrow u_4 = \frac{0,98 \cdot 6}{2 \cdot 0,15}$$

Haciendo la segunda derivada, tenemos que $c''(u_4) < 0$, y por lo tanto comprobamos que se trata de un máximo. Además este valor pertenece a Γ_4 ya que es mayor que cero, y por lo tanto, se trata del valor que estábamos buscando. Con lo cual la función valor $J_4^*(y_4)$ resulta la siguiente:

$$J_4^*(y_4) = 57,624 + 0,98 \cdot 6 \cdot y_4$$

Una vez que tenemos esta función, vamos a obtener $J_3^*(y_3)$:

$$J_3^*(y_3) = \max_{u_3 \geq 0}\{-0,15u_3^2 + 0,98J_4^*(y_3 + u_3)\} = \max_{u_3 \geq 0}\{-0,15u_3^2 + 0,98 \cdot 57,624 + 0,98^2 \cdot 6 \cdot y_3 + 0,98^2 \cdot 6 \cdot u_3\}$$

Aplicando el mismo procedimiento que para el caso anterior, se obtiene que se alcanza ese máximo cuando $u_3 = \frac{0,98^2 \cdot 6}{2 \cdot 0,15}$, y la función $J_3^*(y_3)$ es igual a:

$$J_3^*(y_3) = 111,817 + 0,98^2 \cdot 6 \cdot y_3$$

Avanzando así de atrás hacía adelante, y aplicando los mismos argumentos, llegamos a que la función valor $J_0^*(y_0)$, que nos va a proporcionar el valor del funcional objetivo, alcanza su máximo cuando $u_0 = \frac{0,98^5 \cdot 6}{2 \cdot 0,15}$ y queda definida como:

$$J_0^*(y_0) = 255,336 + 0,98^5 \cdot 6 \cdot y_0$$

Si sustituimos el valor $y_0 = 3$, tenemos que el valor del funcional es $J_0^*(y_0) = 271,60$, al igual que obteníamos en el capítulo anterior. Además, el control óptimo es igual $\overline{u} = (18,078,\ 18,447,\ 18,823,\ 19,208,\ 19,6)$ coincidiendo también con el obtenido anteriormente. Por otro lado, para determinar la trayectoria óptima basta con ir sustituyendo en la ecuación de movimiento las variables de estado, resultando así: $\overline{y} = (21,078,\ 39,525,\ 58,348,\ 77,556,\ 97,156)$.

3.4. Problema de control óptimo con objetivo cuadrático en tiempo discreto

Hasta ahora, el propósito de todos nuestros problemas consistía en encontrar una estrategia óptima para maximizar o minimizar una función teniendo en cuenta que tanto las variables de estado como las de control eran unidimensionales. Sin embargo, existen problemas en los que es necesario analizar más de un objetivo en cada período. Por ejemplo, si nos interesa analizar tanto la evolución de nuestro peso como de nuestra tensión durante un período de tiempo, en ese caso la variable de estado será bidimensional, y si tomamos como controles la alimentación, el deporte y la medicación, la variable será tridimensional. Por este motivo, en el problema que aparece durante esta sección, u_k representará el vector m-dimensional de las variables de control en la etapa k e y_k hará referencia también al vector n-dimensional de variables de estado en el período k.

A continuación, vamos a introducir el problema que se tratará durante esta sección. La formulación del sistema tiene algunas diferencias con respecto al problema inicial (PB). Las variaciones, se reflejan tanto en la función objetivo, que ahora pasará a ser una función cuadrática, como en la aparición de matrices, en las restricciones y en la función objetivo. Además, también se eliminará la restricción sobre la variable de control en cada etapa.

A continuación se refleja el enunciado del problema:

$$(PC)\begin{cases} Maximizar & V = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(y_k' W_k y_k + u_k' \Lambda_k u_k) + \frac{1}{2} y_n' W_n y_n \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = A_k y_k + B_k u_k \qquad \forall k = 0,1,...,n-1 \\ con: & y_0 \ \ dado \end{cases} \tag{3.10}$$

en donde:

- u_k es el vector de control m-dimensional en la etapa k.
- y_k representa el vector de estado n-dimensional en el período k.
- W_k, Λ_k, A_k, B_k son matrices dadas, siendo: W_k de tamaño $n \times n$, simétrica y semidefinida negativa, Λ_k de dimensiones $m \times m$ simétrica y definida negativa, A_k de $n \times n$ y B_k de $n \times m$. Además la notación y_k' o u_k' hace alusión al vector traspuesto de la variable de estado y control respectivamente.

Una de las formas, a través de las cuales se puede dar solución a este problema, es mediante el método de la programación dinámica. En la siguiente proposición quedan determinados tanto el control óptimo del problema como la trayectoria de estado óptima. Este resultado se basa en [3].

Proposición 3.4.1. *Para $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, el control óptimo del problema (PC) queda determinado por la siguiente expresión:*

$$\overline{u}_k = G_k y_k$$

en donde, la matriz G_k viene dada por:

$$G_k = -\Theta_k^{-1} \Psi_k'$$

siendo:

$$\Phi_k = W_k + A_k' K_{k+1} A_k \quad \textit{simétrica y semidefinida negativa,}$$

$$\Theta_k = \Lambda_k + B_k' K_{k+1} B_k \quad \textit{simétrica y definida negativa,}$$

$$\Psi_k = A_k' K_{k+1} B_k,$$

$$K_k = \Phi_k - \Psi_k \Theta_k^{-1} \Psi_k' \quad \textit{simétrica y semidefinida negativa} \quad \forall k = 0, 1, ..., n-1,$$

$$K_n = W_n.$$

Por otro lado, la trayectoria de estado óptima del problema viene determinada por:

$$\overline{y}_{k+1} = [A_k + B_k G_k]\overline{y}_k \quad \forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

Además la función valor para cada k perteneciente al conjunto $\{0, 1, ..., n-1\}$ resulta:

$$V_k^*(y_k) = \frac{1}{2} y_k' K_k y_k$$

Demostración. En primer lugar, para probar la existencia de solución, transformando nuestro problema en uno de minimización, vamos a probar que $-V$ es continua y coerciva en el conjunto cerrado de puntos admisibles K. En este caso está claro que $-V$ es continua. Ahora bien, para probar la coercividad, tenemos que al cambiar el signo a nuestro problema (PC), las matrices $-\Lambda_k$ son definidas positivas. Más aún, gracias al cociente de Rayleigh, sabemos que para cualquier vector de control u_k, se verifica:

$$\lambda_{k1} \leq \frac{u_k'(-\Lambda_k)u_k}{u_k' u_k} \leq \lambda_{km}$$

con $\lambda_{km} \geq \lambda_{km-1} \geq ... \geq \lambda_{k1} > 0$ valores propios de $-\Lambda_k$. Consecuentemente, para cada u_k se va tener:

$$u_k'(-\Lambda_k)u_k \geq \lambda_{k1} u_k' u_k = \lambda_{k1} ||u_k||_2^2$$

Por lo que la función objetivo $-V$, teniendo en cuenta que ahora las matrices $-W_k$ son semidefinidas positivas, va a verificar:

$$-V \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (y_k'(-W_k)y_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k1} ||u_k||_2^2 \geq c||u_k||_2^2 \geq 0$$

A partir de esta desigualdad, en primer lugar podemos afirmar que existe ínfimo, ya que la función $-V$ está acotada inferiormente por cero. Además, teniendo en cuenta que nuestro problema se puede resolver a partir de las variables de control, es claro que esta función es coerciva. Por otro lado, el conjunto de puntos admisibles es cerrado, ya que si tomamos una sucesión, $\forall N \in \mathbb{N}$ $\{(y_k^N, u_k^N)\}$ que tiende a $(\overline{y}_k, \overline{u}_k)$, este punto se encuentra dentro del conjunto de puntos admisibles. Esto se debe a que, $A_k y_k^N + B_k u_k N = y_{k+1}^N$, que tomando límites, se tiene que $A_k \overline{y}_k + B_k \overline{u}_k = \overline{y}_{k+1}$, perteneciente al conjunto de puntos admisibles. Por lo tanto, $-V$ alcanza el mínimo, y por consiguiente V el máximo.

Habiendo probado que existe solución para el sistema (PC), para calcularla vamos a emplear las ecuaciones de Bellman enunciadas en la Proposición 3.2.1. El primer paso es comenzar por la última etapa, comprobando que para $k = n - 1$ se verifica la proposición anterior. Para ello, definimos la función $V_n^*(y_n)$ como la aportación del último período al funcional objetivo. Para esta última etapa, vamos a denominar $W_n = K_n$, y se tiene entonces:

$$V_n^*(y_n) = \frac{1}{2} y_n' K_n y_n$$

Avanzando de atrás hacia adelante, vamos a definir a continuación la ecuación de Bellman para $k = n - 1$:

$$V_{n-1}^*(y_{n-1}) = \max_{u_{n-1} \in \mathbb{R}^m} \{\frac{1}{2} y_{n-1}' W_{n-1} y_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-1}' \Lambda_{n-1} u_{n-1} + V_n^*(A_{n-1} y_{n-1} + B_{n-1} u_{n-1})\}$$

Teniendo en cuenta cómo se ha definido la función $V_n^*(y_n)$, esta expresión es igual a:

$$\begin{aligned}
V_{n-1}^*(y_{n-1}) &= \max_{u_{n-1} \in \mathbb{R}^m} \{\frac{1}{2} y_{n-1}' W_{n-1} y_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-1}' \Lambda_{n-1} u_{n-1} + \\
&\qquad \frac{1}{2}[A_{n-1} y_{n-1} + B_{n-1} u_{n-1}]' K_n [A_{n-1} y_{n-1} + B_{n-1} u_{n-1}]\} \\
&= \max_{u_{n-1} \in \mathbb{R}^m} \{\frac{1}{2} y_{n-1}' W_{n-1} y_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-1}' \Lambda_{n-1} u_{n-1} + \\
&\qquad \frac{1}{2}[y_{n-1}' A_{n-1}' + u_{n-1}' B_{n-1}'] K_n [A_{n-1} y_{n-1} + B_{n-1} u_{n-1}]\} \\
&= \max_{u_{n-1} \in \mathbb{R}^m} \{\frac{1}{2} y_{n-1}' W_{n-1} y_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-1}' \Lambda_{n-1} u_{n-1} + \\
&\qquad \frac{1}{2} y_{n-1}' A_{n-1}' K_n A_{n-1} y_{n-1} + \frac{1}{2} y_{n-1}' A_{n-1}' K_n B_{n-1} u_{n-1} + \\
&\qquad \frac{1}{2} u_{n-1}' B_{n-1}' K_n A_{n-1} y_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-1}' B_{n-1}' K_n B_{n-1} u_{n-1}\} \\
&= \max_{u_{n-1} \in \mathbb{R}^m} \{\frac{1}{2} y_{n-1}' [W_{n-1} + A_{n-1}' K_n A_{n-1}] y_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-1}' [\Lambda_{n-1} + B_{n-1}' K_n B_{n-1}] u_{n-1} + \\
&\qquad \frac{1}{2} y_{n-1}' A_{n-1}' K_n B_{n-1} u_{n-1} + \frac{1}{2}[y_{n-1}' A_{n-1}' K_n B_{n-1} u_{n-1}]'\}
\end{aligned}$$

Una vez que hemos llegado a esta última expresión, vamos a analizar cómo es el término $y_{n-1}' A_{n-1}' K_n B_{n-1} u_{n-1}$ para ver si se puede simplificar todavía más la ecuación anterior. El vector y_{n-1}' es de dimensión $(1 \times n)$, que multiplicado por la matriz A_{n-1}' de dimensiones $(n \times n)$, resulta un vector de $(1 \times n)$. Si a su vez este vector, le multiplicamos por la matriz K_n de $(n \times n)$, y por B_{n-1} de $(n \times m)$ obtendremos otro vector pero ahora de dimensiones $(1 \times m)$. Por último, si multiplicamos a éste por el vector u_{n-1} de $(m \times 1)$, el resultado será un escalar perteneciente a los reales. De esta forma, y teniendo en cuenta que el traspuesto de un escalar es el propio escalar, los términos $[y'_{n-1}A'_{n-1}K_nB_{n-1}u_{n-1}]$ y $[y'_{n-1}A'_{n-1}K_nB_{n-1}u_{n-1}]'$ serán iguales, y la función $V^*_{n-1}(y_{n-1})$ se podrá expresar de la siguiente manera:

$$V^*_{n-1}(y_{n-1}) = \max_{u_{n-1}\in\mathbb{R}^m}\{\frac{1}{2}y'_{n-1}[W_{n-1} + A'_{n-1}K_nA_{n-1}]y_{n-1} + \frac{1}{2}u'_{n-1}[\Lambda_{n-1} + B'_{n-1}K_nB_{n-1}]u_{n-1} + y'_{n-1}A'_{n-1}K_nB_{n-1}u_{n-1}\}$$

Para poder trabajar de una manera más cómoda con la función $V^*_{n-1}(y_{n-1})$ vamos a establecer la siguiente notación:

$$\Phi_{n-1} = W_{n-1} + A'_{n-1}K_nA_{n-1},$$

$$\Theta_{n-1} = \Lambda_{n-1} + B'_{n-1}K_nB_{n-1},$$

$$\Psi_{n-1} = A'_{n-1}K_nB_{n-1},$$

Por lo que, la ecuación de Bellman para el período $k = n-1$ se podrá expresar:

$$V^*_{n-1}(y_{n-1}) = \max_{u_{n-1}\in\mathbb{R}^m}\{\frac{1}{2}y'_{n-1}\Phi_{n-1}y_{n-1} + \frac{1}{2}u'_{n-1}\Theta_{n-1}u_{n-1} + y'_{n-1}\Psi_{n-1}u_{n-1}\} \tag{3.11}$$

El siguiente paso consiste en calcular el vector de control $u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ mediante el cual se alcanza el máximo de la función anterior. Para ello, tenemos que tener en cuenta la condición necesaria de máximo en el caso sin restricciones, que enuncia que si un punto es máximo de una función, necesariamente el gradiente de la función en dicho punto ha de ser igual a cero. Además en este caso, como la función es cóncava, esta condición también es suficiente. Por ese motivo, derivaremos e igualaremos a cero la expresión anterior, obteniendo:

$$u'_{n-1}\Theta_{n-1} + y'_{n-1}\Psi_{n-1} = 0 \tag{3.12}$$

Por otra parte, la matriz Θ_{n-1}, es simétrica, ya que es la suma de Λ_{n-1}, matriz simétrica por definición, y la matriz producto $B'_{n-1}K_nB_{n-1}$, también simétrica. Este apunte nos va a resultar útil para poder despejar la variable u_{n-1} de la ecuación (3.12), ya que lo primero que vamos a hacer es trasponer la ecuación como se muestra a continuación:

$$[u'_{n-1}\Theta_{n-1} + y'_{n-1}\Psi_{n-1}]' = 0 \implies \Theta_{n-1}u_{n-1} + \Psi'_{n-1}y_{n-1} = 0$$

Y seguidamente despejar u_{n-1}:

$$u_{n-1} = -\Theta^{-1}_{n-1}\Psi'_{n-1}y_{n-1} \tag{3.13}$$

Una vez que tenemos la expresión (3.13) que hace referencia al vector de control óptimo para $k = n-1$, debemos verificar que existe la inversa de la matriz Θ_{n-1}, para que dicha expresión tenga sentido. Esto es equivalente a probar que la matriz Θ_{n-1} es no singular, o lo que es lo mismo, que su determinante es distinto de cero. Una de las diversas formas de calcular el determinante de una matriz, es a través del producto de sus valores propios. De manera que si probamos que la matriz Θ_{n-1} es definida negativa, implicará que todos sus valores propios son menores estrictos que cero, y por consiguiente el determinante será no nulo, y la matriz poseerá inversa.

La matriz Θ_{n-1} está compuesta por la suma de:

- La matriz Λ_{n-1}, definida negativa, lo que significa que por definición, para cualquier vector x distinto de cero, se verifica: $x'\Lambda_{n-1}x < 0$
- La matriz $B'_{n-1}K_nB_{n-1}$, con K_n semidefinida negativa, lo que implica que para cualquier vector x distinto de cero, se tiene que: $x'K_nx \leq 0$.

Para probar que la matiz Θ_{n-1} es definida negativa, tenemos que demostrar que para cualquier vector x no nulo, se verifica $x'\Theta_{n-1}x < 0$:

$$x'\Theta_{n-1}x = x'[\Lambda_{n-1} + B'_{n-1}K_nB_{n-1}]x = x'\Lambda_{n-1}x + x'B'_{n-1}K_nB_{n-1}x =$$

$$= x'\Lambda_{n-1}x + (B_{n-1}x)'K_n(B_{n-1}x) < 0$$

Por lo que se prueba así que la expresión (3.13) está bien definida, y por lo tanto determina el vector de control óptimo para $k = n-1$. Para simplificar la notación nuevamente, vamos a denotar:

$$G_{n-1} = -\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1} = -[\Lambda_{n-1} + B'_{n-1}K_nB_{n-1}]^{-1}A'_{n-1}K_nB_{n-1}$$

Por consiguiente, el vector de control óptimo en la etapa $k = n-1$, queda definido como:

$$\overline{u}_{n-1} = G_{n-1}y_{n-1} \tag{3.14}$$

Si sustituimos la expresión (3.14) en la función $V^*_{n-1}(y_{n-1})$, resulta la siguiente expresión:

$$V^*_{n-1}(y_{n-1}) = \frac{1}{2}y'_{n-1}\Phi_{n-1}y_{n-1} + \frac{1}{2}[G_{n-1}y_{n-1}]'\Theta_{n-1}[G_{n-1}y_{n-1}] + y'_{n-1}\Psi_{n-1}[G_{n-1}y_{n-1}] =$$

$$= \frac{1}{2}y'_{n-1}\Phi_{n-1}y_{n-1} + \frac{1}{2}y'_{n-1}G'_{n-1}\Theta_{n-1}G_{n-1}y_{n-1} + y'_{n-1}\Psi_{n-1}G_{n-1}y_{n-1}$$

Para facilitar el manejo de la expresión denotamos:

$$K_{n-1} = \Phi_{n-1} + G'_{n-1}\Theta_{n-1}G_{n-1} + 2\Psi_{n-1}G_{n-1} = \Phi_{n-1} + [-\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1}]'\Theta_{n-1}[-\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1}] +$$

$$2\Psi_{n-1}[-\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1}] = \Phi_{n-1} + \Psi_{n-1}\Theta_{n-1}^{-1}{}'\Theta_{n-1}\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1} - 2\Psi_{n-1}\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1}$$

Además, si tenemos en cuenta que la matriz Θ_{n-1} es simétrica, su inversa, es decir, Θ_{n-1}^{-1} también es simétrica. Por lo que la expresión de la matriz K_{n-1} se simplifica todavía más y nos queda:

$$K_{n-1} = \Phi_{n-1} - \Psi_{n-1}\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1}$$

Antes de continuar con el siguiente paso, vamos a analizar las matrices Θ_{n-1},Φ_{n-1} y K_{n-1}:

- En cuanto a la matriz Θ_{n-1}, ya hemos probado anteriormente que es simétrica y definida negativa.
- Por otro lado, la matriz $\Phi_{n-1} = W_{n-1} + A'_{n-1}K_nA_{n-1}$, también va a tratarse de una matriz simétrica por ser suma de dos matrices simétricas. Además podemos afirmar que esta matriz

es semidefinida negativa, puesto que, para cualquier vector no nulo se verifica lo siguiente

$$x'\Phi_{n-1}x = x'[W_{n-1} + A'_{n-1}K_nA_{n-1}]x = x'W_{n-1}x + (A_{n-1}x)'K_n(A_{n-1}x) \leq 0$$

dado que las matrices W_{n-1} y K_n son semidefinidas negativa, y por tanto verifican que $x'W_{n-1}x \leq 0$ siendo x vector no nulo, y $(A_{n-1}x)'K_n(A_{n-1}x) \leq 0$ con $(A_{n-1}x)$ vector distinto de cero.

- Por último, nos queda estudiar cómo es la matriz K_{n-1}.Ya hemos visto que la matriz Φ_{n-1} es simétrica, al igual que lo es la matriz $\Psi_{n-1}\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1}$ por ser Θ_{n-1}^{-1} simétrica como ya hemos probado anteriormente, por lo que, podemos afirmar que la matriz K_{n-1} es simétrica por ser la resta de dos matrices simétricas. Además de esto, vamos a poder afirmar que la matriz K_{n-1} es semidefinida negativa, si probamos la siguiente igualdad:

$$K_{n-1} = (A_{n-1} + B_{n-1}G_{n-1})'K_n(A_{n-1} + B_{n-1}G_{n-1}) + \begin{pmatrix} I \\ G_{n-1} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_{n-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ G_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Para demostrar esto, vamos a desarrollar, por un lado la definición de la matriz K_{n-1} inicial, y por otro lado, el miembro de la derecha de la igualdad anterior. En primer lugar, definimos:

$$K_{n-1} = \Phi_{n-1} - \Psi_{n-1}\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1}$$

Si sustituimos las matrices Φ_{n-1} y Ψ_{n-1}, por sus respectivas expresiones, y tenemos en cuenta que la matriz $G_{n-1} = -\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1}$, la matriz K_{n-1} se puede expresar de la siguiente manera:

$$K_{n-1} = W_{n-1} + A'_{n-1}K_nA_{n-1} + A'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1}$$

Vamos a comprobar ahora si el miembro derecho de la ecuación (3.15) es igual a éste:

$$(A_{n-1} + B_{n-1}G_{n-1})'K_n(A_{n-1} + B_{n-1}G_{n-1}) + \begin{pmatrix} I \\ G_{n-1} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} W_{n-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ G_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= A'_{n-1}K_nA_{n-1} + A'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1} + G'_{n-1}B'_{n-1}K_nA_{n-1} + G'_{n-1}B'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1} + \tag{3.16}$$
$$W_{n-1} + G'_{n-1}\Lambda_{n-1}G_{n-1}$$

Sustituimos la matriz Λ_{n-1}, por su expresión, usando la matriz Θ_{n-1}:

$$G'_{n-1}\Lambda_{n-1}G_{n-1} = G'_{n-1}(\Theta_{n-1} - B'_{n-1}K_nB_{n-1})G_{n-1} = G'_{n-1}\Theta_{n-1}G_{n-1} - G'_{n-1}B'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1}$$

Ahora, si tenemos en cuenta las definiciones de las matrices G_{n-1} y Ψ_{n-1} tenemos:

$$G'_{n-1}\Lambda_{n-1}G_{n-1} = -G'_{n-1}\Theta_{n-1}\Theta_{n-1}^{-1}\Psi'_{n-1} - G'_{n-1}B'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1} =$$

$$= -G'_{n-1}B'_{n-1}K_nA_{n-1} - G'_{n-1}B'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1}$$

Con lo cual, si sustituimos este término en (3.16) , tenemos que:

$$(A_{n-1}+B_{n-1}G_{n-1})'K_n(A_{n-1}+B_{n-1}G_{n-1})+\begin{pmatrix} I \\ G_{n-1}\end{pmatrix}'\begin{pmatrix} W_{n-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ G_{n-1}\end{pmatrix}=$$

$$=A'_{n-1}K_nA_{n-1}+A'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1}+G'_{n-1}B'_{n-1}K_nA_{n-1}+G'_{n-1}B'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1}+$$

$$W_{n-1}-G'_{n-1}B'_{n-1}K_nA_{n-1}-G'_{n-1}B'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1}=$$

$$=W_{n-1}+A'_{n-1}K_nA_{n-1}+A'_{n-1}K_nB_{n-1}G_{n-1}$$

Por lo que en efecto, llegamos a que ambos términos son iguales, y por consiguiente, esto supone que la matriz K_{n-1} se puede expresar como en (3.15).Esto es de gran utilidad para afirmar que la matriz K_{n-1} es semidefinida negativa, ya que la matriz K_n es semidefinida negativa por definición y la matriz conformada por W_{n-1}, Λ_{n-1} y ceros, también es semidefinda negativa, por estar formada a partir de dos matrices semidefinidas negativas y ceros.

Una vez que ya se ha probado la veracidad de la proposición para el caso $k=n-1$, el siguiente paso es establecer si para un cierto k la proposición es cierta, entonces también se verifica para $k-1$. Para probar esto, vamos a definir la ecuación de Bellman para el caso $k-1$:

$$V^*_{k-1}(y_{k-1})=\max_{u_{k-1}\in\mathbb{R}^m}\{\frac{1}{2}y'_{k-1}W_{k-1}y_{k-1}+\frac{1}{2}u'_{k-1}\Lambda_{k-1}u_{k-1}+V^*_k(A_{k-1}y_{k-1}+B_{k-1}u_{k-1})\}$$

Por hipótesis, sabemos que la función $V^*_k(y_k)=\frac{1}{2}y'_kK_ky_k$. Luego, si utilizamos esto en la ecuación de Bellman, obtenemos la siguiente expresión, empleando el mismo desarrollo que para $n-1$:

$$V^*_{k-1}(y_{k-1})=\max_{u_{k-1}\in\mathbb{R}^m}\{\frac{1}{2}y'_{k-1}[W_{k-1}+A'_{k-1}K_kA_{k-1}]y_{k-1}+\frac{1}{2}u'_{k-1}[\Lambda_{k-1}+B'_{k-1}K_kB_{k-1}]u_{k-1}+$$

$$y'_{k-1}[A'_{k-1}K_kB_{k-1}]u_{k-1}\}$$

Para simplificar, a través de la notación establecida se tiene que:

$$V^*_{k-1}(y_{k-1})=\max_{u_{k-1}\in\mathbb{R}^m}\{\frac{1}{2}y'_{k-1}\Phi_{k-1}y_{k-1}+\frac{1}{2}u'_{k-1}\Theta_{k-1}u_{k-1}+y'_{k-1}\Psi_{k-1}u_{k-1}\}$$

Para calcular el vector de control tal que maximice la función anterior, basta utilizar de manera análoga los argumentos empleados en el caso $n-1$, con lo que derivamos e igualamos a cero: $u'_{k-1}\Theta_{k-1}+y'_{k-1}\Psi_{k-1}=0$.
De nuevo, la matriz Θ_{k-1} es simétrica por ser la suma de la matriz Λ_{k-1}, simétrica por hipótesis, y $B'_{k-1}K_kB_{k-1}$ simétrica puesto que la matriz K_k se supone simétrica por hipótesis de inducción. Luego, podemos despejar el vector de control óptimo de la expresión:

$$[u'_{k-1}\Theta_{k-1}+y'_{k-1}\Psi_{k-1}]'=0\ \Rightarrow\ \Theta_{k-1}u_{k-1}+\Psi'_{k-1}y_{k-1}=0\ \Rightarrow\ u_{k-1}=-\Theta^{-1}_{k-1}\Psi'_{k-1}y_{k-1}\quad(3.17)$$

Al igual que hicimos para el caso $n-1$, vamos a verificar que esta expresión está bien definida, comprobando que los valores propios de la matriz Θ_{k-1} son todos negativos. La prueba es exactamente la misma que para el caso de la matriz Θ_{n-1}. Tenemos que demostrar que para cualquier vector x no nulo se verifica $x'\Theta_{k-1}x < 0$:

$$x'\Theta_{k-1}x = x'[\Lambda_{k-1} + B'_{k-1}K_kB_{k-1}]x = x'\Lambda_{k-1}x + (B_{k-1}x)'K_k(B_{k-1}x) < 0$$

por ser Λ_{k-1} definida negativa y K_k semidefinida negativa por hipótesis. De esta forma, se puede asegurar que la matriz posee inversa, al tratarse de una matriz definida negativa, y que la expresión (3.17) está bien definida.

Por lo que, teniendo en cuenta la definición de la matriz G_{k-1} de la proposición, podemos afirmar que el vector de control óptimo para $k-1$ se define de la siguiente manera: $\overline{u}_{k-1} = G_{k-1}y_{k-1}$

Y por tanto, la función $V^*_{k-1}(y_{k-1})$ queda determinada por la expresión que aparece a continuación:

$$V^*_{k-1}(y_{k-1}) = \frac{1}{2}y'_{k-1}\Phi_{k-1}y_{k-1} + \frac{1}{2}[G_{k-1}y_{k-1}]'\Theta_{k-1}[G_{k-1}y_{k-1}] + y'_{k-1}\Psi_{k-1}[G_{k-1}y_{k-1}] =$$

$$= \frac{1}{2}y'_{k-1}\Phi_{k-1}y_{k-1} + \frac{1}{2}y'_{k-1}G'_{k-1}\Theta_{k-1}G_{k-1}y_{k-1} + y'_{k-1}\Psi_{k-1}G_{k-1}y_{k-1}$$

Al igual que hicimos para el caso $n-1$, se define la matriz K_{k-1} para simplificar la notación, y empleando los mismos argumentos obtenemos:

$$K_{k-1} = \Phi_{k-1} + G'_{k-1}\Theta_{k-1}G_{k-1} + 2\Psi_{k-1}G_{k-1} = \Phi_{k-1} + [-\Theta^{-1}_{k-1}\Psi'_{k-1}]'\Theta_{k-1}[-\Theta^{-1}_{k-1}\Psi'_{k-1}] +$$

$$2\Psi_{k-1}[-\Theta^{-1}_{k-1}\Psi'_{k-1}] = \Phi_{k-1} + \Psi_{k-1}\Theta^{-1}_{k-1}{}'\Theta_{k-1}\Theta^{-1}_{k-1}\Psi'_{k-1} - 2\Psi_{k-1}\Theta^{-1}_{k-1}\Psi'_{k-1} =$$

$$= \Phi_{k-1} - \Psi_{k-1}\Theta^{-1}_{k-1}\Psi'_{k-1}$$

Y por tanto, nos queda:

$$V^*_{k-1}(y_{k-1}) = \frac{1}{2}y'_{k-1}K_{k-1}y_{k-1}$$

como aparece en la proposición. Además, empleando los mismos argumentos que para el caso $n-1$, se verifica que Θ_{k-1} es simétrica y definida negativa, y las matrices Φ_{k-1} y K_{k-1} son simétricas y semidefinidas negativas.

Una vez probado esto, para finalizar con la demostración nos queda comprobar cómo es la forma de la trayectoria de estado óptima. Para ello, basta sustituir en la ecuación de movimiento del problema, la forma del vector de control óptimo. Es decir, para cada $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ se define: $y_{k+1} = A_ky_k + B_ku_k$. Si tenemos en cuenta que para cada $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ se establece que $\overline{u}_k = G_ky_k$, entonces tenemos que la trayectoria de estado óptima se define como:

$$\overline{y}_{k+1} = A_k\overline{y}_k + B_kG_k\overline{y}_k = [A_k + B_kG_k]\overline{y}_k$$

Y queda así demostrada la proposición. $\square$

Capítulo 4

Problema de control óptimo en tiempo discreto con horizonte temporal infinito

En este capítulo, vamos a realizar un cambio en el problema original (PB). Cuando planteamos inicialmente el sistema, hablábamos de un problema con un horizonte temporal finito, en el cual existían n etapas o períodos. La idea a partir de ahora, va a consistir en considerar un sistema en el que el número de etapas es infinito. Además, en esta ocasión, tanto las funciones que componen la función objetivo, como aquellas que determinan las restricciones de igualdad, $\{f_k\}$ y $\{g_k\}$, serán las mismas para todas las etapas. Otro de los cambios que se va a realizar se encuentra en las restricciones de las variables u_k. En este nuevo sistema, para cada período k, las variables u_k van a pertenecer a un conjunto que depende directamente de la variable y_k, y que se va a definir a partir de una función h.

Por otra parte, a diferencia del problema (PB), esta vez se incorporará en la función objetivo un cierto factor $\beta \in (0,1)$, referente a la tasa de descuento. De esta forma, el problema que trataremos de resolver a lo largo de este capítulo, será:

$$(PHI)\begin{cases} Maximizar & V = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k) & \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = g(y_k, u_k) & \forall k = 0,1,2,... \\ & u_k \in \Gamma(y_k) = [\rho_0, h(y_k)] & \forall k = 0,1,2,... \\ con: & y_0\ \ dado & \end{cases} \tag{4.1}$$

4.1. Formulación del problema

Para resolver el sistema planteado anteriormente, utilizaremos las técnicas de la programación dinámica. Sin embargo, antes de comenzar con la resolución, durante esta sección se aclarará la notación empleada.

En primer lugar, para cada k, las variables y_k y u_k, harán referencia a las variables de estado y control respectivamente, por lo que $y_k \in K \subset \mathbb{R}$ y $u_k \in \mathbb{R}$, además en este caso, el conjunto de variables de estado admisibles será $K = [0, y_{max}]$. La función de retorno f, se definirá del espacio $K \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, mientras que la ecuación de movimiento g, irá del espacio $K \times \mathbb{R}$ a K. Por otro lado, a cada variable de estado y_k le hará corresponder el intervalo cerrado $[\rho_0, h(y_k)]$, siendo $\rho_0 \in \mathbb{R}$ y h

una función definida de K en $[\rho_0, +\infty)$. Dependiendo del valor que tome la variable de estado, el conjunto de posibles variables de control se verá afectado. Un claro ejemplo de esta situación en el ámbito de la economía, se da en el caso de que la variable y_k, corresponda al capital disponible en el momento k, y la variable estado u_k, sea la cantidad a invertir en la siguiente etapa. Los posibles valores que pueda tomar la variable u_k, cambiarán según la cantidad de capital disponible y_k, ya que como mucho solo se podrá invertir el capital existente.

Otro nuevo término que aparecerá a lo largo del capítulo, es el concepto de **dinámica factible**, que se trata de una sucesión de variables de estado y control $\{(y_k, u_k)\}_{k=0,1,...}$ pertenecientes al conjunto $K \times \mathbb{R}$, tal que para cada etapa k, $u_k \in \Gamma(y_k)$ y se verifique la ecuación de movimiento: $y_{k+1} = g(y_k, u_k)$.

Una hipótesis que será necesaria para la resolución de nuestro problema principal es la siguiente:

Hipótesis 4.1.1. *Para cada dinámica factible, $\{(y_k, u_k)\}_{k=0,1,...}$ desde y_0, existirá un $M_0 \in \mathbb{R}$, tal que:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k) \leq M_0$$

4.2. Resolución

En esta sección, daremos solución al problema (PHI) a través de la programación dinámica, basándonos en [4] y [5]. Inicialmente, vamos a definir lo que se conoce como **problema secuencial**, que trata el mismo sistema que queremos resolver, planteado inicialmente, pero con la salvedad de que en vez de un máximo, ahora tenemos un supremo. El paso de supremo a máximo ya se estudiará más adelante. Dicho esto, nuestro problema principal ahora es el siguiente:

$$(PS)\begin{cases} \textit{Supremo} & V(y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k) \\ \textit{sujeto a :} & y_{k+1} = g(y_k, u_k) \qquad\qquad \forall k = 0, 1, 2, ... \\ & u_k \in \Gamma(y_k) = [\rho_0, h(y_k)] \quad \forall k = 0, 1, 2, ... \\ \textit{con :} & y_0 \;\; \textit{dado} \end{cases} \tag{4.2}$$

Todo problema secuencial, tiene asociado un **problema funcional**:

$$(PF)\left\{ \; v(y) = \sup_{u \in [\rho_0, h(y)]} \{f(y, u) + \beta v(g(y, u))\} \right. \tag{4.3}$$

Antes de continuar trabajando con ambos sistemas, vamos a explicar de dónde surge la idea del problema funcional. Para poder resolver el problema secuencial empleando la programación dinámica, y teniendo en cuenta la forma de nuestra función objetivo, usamos la Proposición 3.2.2. En nuestro caso, como el problema tiene un horizonte temporal infinito, en primer lugar se debe truncar el problema, quedándonos el sistema que se muestra a continuación:

$$(PT)\begin{cases} \textit{Supremo} & V=\sum_{k=0}^{n-1}\beta^k f(y_k,u_k) \\ \textit{sujeto a}: & y_{k+1}=g(y_k,u_k) \qquad\qquad \forall k=0,1,2,...,n-1 \\ & u_k\in\Gamma(y_k)=[\rho_0,h(y_k)] \quad \forall k=0,1,2,...,n-1 \\ \textit{con}: & y_0 \ \ \textit{dado} \end{cases} \tag{4.4}$$

Inicialmente, en este problema truncado $V_n^*(y_n)=0$. A continuación, siguiendo un orden descendente, para cada $k\in\{n-1,n-2,...,1,0\}$ se definen las ecuaciones de Bellman de la siguiente forma:

$$V_k^*(y_k)=\sup_{u_k\in[\rho_0,h(y_k)]}\{f(y_k,u_k)+\beta V_{k+1}^*(g(y_k,u_k))\}$$

Hemos truncado previamente el problema original, luego el siguiente paso es calcular el límite. Formalmente, si V_k^* es convergente a una función v, en el límite nos quedaría la siguiente expresión:

$$v(y)=\sup_{u\in[\rho_0,h(y)]}\{f(y,u)+\beta v(g(y,u))\}$$

Esta expresión, es justamente el problema funcional que hemos definido anteriormente. Una vez que hemos visto de dónde surge el concepto de problema funcional, a continuación, vamos a probar que la solución V del problema secuencial, resuelve el problema funcional.

Proposición 4.2.1. *Suponiendo la hipótesis (4.1.1), se tiene que si la función V es solución de (PS), entonces resuelve el problema funcional (PF), es decir:*

$$V(y)=\sup_{u\in[\rho_0,h(y)]}\{f(y,u)+\beta V(g(y,u))\}$$

Demostración. Inicialmente, vamos a tomar un control $u_0\in[\rho_0,h(y_0)]$, definiremos el estado y_1 como $y_1=g(y_0,u_0)$, y fijaremos un cierto $\varepsilon>0$. La demostración va a consistir en probar dos desigualdades. A continuación, vamos a probar la primera de ellas:

$$V(y)\geq\sup_{u\in[\rho_0,h(y)]}\{f(y,u)+\beta V(g(y,u))\}$$

Por un lado, tomaremos $V(y_1)$ como el valor supremo de la función objetivo del problema secuencial, tomando como valor inicial, el vector de estado y_1. De acuerdo a la definición de supremo, para cualquier $\varepsilon>0$, existirá una dinámica factible desde y_1, $\{(y_1,u_1),(y_2,u_2),...\}$, tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\beta^{k-1}f(y_k,u_k)\geq V(y_1)-\varepsilon$$

Si ahora tomamos la dinámica factible que hemos definido anteriormente, y le añadimos el par (y_0,u_0), sigue siendo una dinámica factible ahora desde y_0, $\{(y_0,u_0),(y_1,u_1),(y_2,u_2),...\}$. Sin embargo, esta dinámica factible, no tiene por qué ser con la que se alcance el valor supremo $V(y_0)$, por lo que tenemos la siguiente desigualdad:

$$V(y_0) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k) = f(y_0, u_0) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} f(y_k, u_k) \geq f(y_0, u_0) + \beta V(y_1) - \beta\varepsilon$$

Sustituyendo el valor del vector de estado y_1 de acuerdo a su definición, tendremos:

$$V(y_0) \geq f(y_0, u_0) + \beta V(g(y_0, u_0)) - \beta\varepsilon$$

Hemos tomado el vector de control $u_0 \in [\rho_0, h(y_0)]$, y haciendo tender ε tender a cero, se verifica:

$$V(y_0) \geq \sup_{u_0 \in [\rho_0, h(y_0)]} \{f(y_0, u_0) + \beta V(g(y_0, u_0))\}$$

El siguiente paso es demostrar la desigualdad en el otro sentido, es decir, probar que:

$$V(y) \leq \sup_{u \in [\rho_0, h(y)]} \{f(y, u) + \beta V(g(y, u))\}$$

siendo $V(y_0)$, de nuevo, el valor supremo del problema secuencial. Utilizando la definición de supremo, conocemos que $V(y_0)$ es la menor de las cotas superiores, luego fijado $\varepsilon > 0$, debe existir una dinámica factible desde y_0 tal que:

$$V(y_0) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k) + \varepsilon = f(y_0, u_0) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} f(y_k, u_k) + \varepsilon$$

Por otro lado, el sumatorio $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} f(y_k, u_k)$ no tiene por qué alcanzar el supremo con la dinámica factible que se ha establecido, pero será menor o igual que el valor supremo $V(y_1)$, y se tendrá:

$$V(y_0) \leq f(y_0, u_0) + \beta V(y_1) + \varepsilon$$

Aplicando los mismo argumentos que en la desigualdad anterior, tenemos que cuando ε tiende a cero se sigue verificando la desigualdad por la definición de supremo y podemos sustituir el vector de estado y_1 por su definición $y_1 = g(y_0, u_0)$. Además, por cómo hemos tomado el vector de control u_0, cualquier vector que pertenezca al conjunto $[\rho_0, h(y_0)]$ va a verificar la desigualdad, en particular, aquel para el cual se alcance el supremo de la función del miembro de la derecha:

$$V(y_0) \leq \sup_{u_0 \in [\rho_0, h(y_0)]} \{f(y_0, u_0) + \beta V(g(y_0, u_0))\}$$

Llegamos así a la igualdad que buscábamos: □

Acabamos de probar, que en efecto, la función V del problema secuencial resuelve el problema funcional. A continuación, vamos a establecer una serie de hipótesis que serán necesarias para continuar con la resolución:

Hipótesis 4.2.1. *La función de retorno f, ha de ser continua y acotada sobre el conjunto de puntos $\{(y, u) \in K \times \mathbb{R} : u \in [\rho_0, h(y)]\}$. Además, la función g ha ser también continua en el mismo conjunto, y el parámetro β tiene que pertenecer al intervalo* $(0, 1)$

Hipótesis 4.2.2. *La función* $h : [0, y_{max}] \to [\rho_0, +\infty)$ *ha de ser continua.*

El siguiente paso, será encontrar la función v que resuelve el problema funcional. Si observamos con detenimiento este problema (PF), podemos contemplar que la función v se encuentra dentro del propio sistema, lo que nos lleva a utilizar una técnica de punto fijo. Aquí emplearemos el teorema del punto fijo de Banach. Este teorema, además nos asegura que en caso de existir esa solución, ésta ha de ser única, y como hemos probado que V resuelve el problema funcional, entonces si encontramos el punto fijo v, se tendrá que $V = v$.

Teorema 4.2.1. ***(Teorema del punto fijo de Banach)*** *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo, y sea* f *una aplicación del espacio* X *en sí mismo contractiva. Entonces, existe un único* $\overline{x} \in X$*, tal que* $f(\overline{x}) = \overline{x}$*. Además, este punto se puede encontrar, cogiendo un elemento* $x_0 \in X$ *arbitrario y definiendo una sucesión* $\{x_n\}$ *tal que:*

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}) = x_n$$

Tomando el límite de x_n *cuando* n *tiende a infinito, encontraremos el punto fijo* $\overline{x} \in X$*, es decir, tal que* $f(\overline{x}) = \overline{x}$*.*

Recordemos que una aplicación f es contractiva, verifica que existe una constante $\beta \in (0, 1)$ tal que para cualquier $x_1, x_2 \in X$, se tiene que $d(f(x_1), f(x_2)) \leq \beta d(x_1, x_2)$

Demostración. Seguiremos [6]. En primer lugar, vamos a demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ que hemos definido en el teorema, es una sucesión de Cauchy. Para ello, ha de verificar que, para cualquier distancia $\varepsilon > 0$, existirá un $N \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, para cualesquiera números naturales $m, n > N$. Antes de demostrar esto, vamos a probar la desigualdad que se muestra a continuación y que nos será útil:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \beta^n d(x_1, x_0) \tag{4.5}$$

Para ello, vamos a emplear inducción. Inicialmente, vamos a comprobar que la desigualdad se verifica para n=1, y n=2:

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \beta d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq \beta d(x_2, x_1) \leq \beta^2 d(x_1, x_0)$$

Suponemos que la desigualdad se verifica para el caso $n - 1$. Comprobamos que se cumple la desigualdad para el caso n:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \beta d(x_n, x_{n-1}) \leq \beta^n d(x_1, x_0)$$

Vamos a demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. Dada una distancia $\varepsilon > 0$, y $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$, se tiene:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + ... + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + d(x_m, x_{m-1})$$

Por la desigualdad (4.5), podemos afirmar:

$$d(x_m, x_n) \leq \beta^n d(x_1, x_0) + \beta^{n+1} d(x_1, x_0) + ... + \beta^{m-2} d(x_1, x_0) + \beta^{m-1} d(x_1, x_0) =$$

$$= \beta^n d(x_1, x_0)[1 + \beta + \beta^2 + ... + \beta^{m-2-n} + \beta^{m-1-n}] =$$

$$= \beta^n d(x_1, x_0) \sum_{t=0}^{m-1-n} \beta^t \leq \beta^n d(x_1, x_0) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t = \beta^n d(x_1, x_0) \frac{1}{1-\beta}$$

Como $\beta \in (0, 1)$ y β^N tiende a cero cuando $N \to +\infty$, existirá un cierto $N \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\beta^N < \frac{\varepsilon(1-\beta)}{d(x_1, x_0)}$$

Tomando ahora, $m, n > N$, en particular como $n > N$ y $\beta \in (0, 1)$, se verifica que $\beta^n < \beta^N$, y entonces tenemos:

$$d(x_m, x_n) \leq \beta^n d(x_1, x_0) \frac{1}{1-\beta} < \frac{\varepsilon(1-\beta)}{d(x_1, x_0)} d(x_1, x_0) \frac{1}{1-\beta} = \varepsilon$$

Por lo que hemos verificado así que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. Al encontrarnos en un espacio (X, d) métrico completo, sabemos que esta sucesión va a converger a un elemento $\overline{x} \in X$.

A continuación, vamos a verificar que $\overline{x}$, es el punto fijo de la función f, es decir, que verifica que $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Por ser la función f contractiva, es continua, lo que implica que:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n \to \infty} x_{n-1})$$

Y por lo tanto:

$$\overline{x} = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n \to \infty} x_{n-1}) = f(\overline{x})$$

Por último, debemos comprobar que el punto fijo es único. Para probar esto, vamos a suponer que existen dos puntos, $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in X$, tal que $f(\overline{x}_1) = \overline{x}_1$ y $f(\overline{x}_2) = \overline{x}_2$, entonces se verifica:

$$d(f(\overline{x}_2), f(\overline{x}_1)) = d(\overline{x}_2, \overline{x}_1)$$

Y como la constante $\beta \in (0, 1)$:

$$d(\overline{x}_2, \overline{x}_1) > \beta d(\overline{x}_2, \overline{x}_1)$$

Lo cual es una contradicción. Y de esta manera, queda así demostrado el teorema del punto fijo. □

Por lo tanto, teniendo en cuenta este teorema, lo primero que tenemos que hacer es establecer un operador T, definido sobre un espacio métrico completo, para encontrar esa función v que verifique que $T(v) = v$. De acuerdo a la formulación del problema, parece razonable definir el operador T como, dada una función v y un vector de estado y:

$$T[v](y) = \max_{u \in [\rho_0, h(y)]} \{f(y, u) + \beta v(g(y, u))\} \tag{4.6}$$

El operador T va de un espacio de funciones en sí mismo. En esta ocasión, el espacio que vamos a seleccionar es $C(K)$, el espacio de funciones continuas, reales, definidas sobre un compacto K. La elección de este espacio, se deriva de la necesidad de que la función que buscamos v, tiene que ser continua y ha de estar definida sobre un compacto para que pueda alcanzar así el valor máximo.

Notemos que $C(K)$ es un espacio métrico completo con la norma:

$$||v||_\infty = \max_{y \in K} |v(y)| \tag{4.7}$$

y la distancia derivada de esa norma: $d(v, \widetilde{v}) = ||v - \widetilde{v}||_\infty$.
Antes de continuar, recordemos que nuestro problema original consistía en encontrar el máximo, por lo que vamos a estudiar el paso del supremo al máximo. Anteriormente, hemos probado que:

$$V(y) = \sup_{u \in [\rho_0, h(y)]} \{f(y,u) + \beta V(g(y,u))\}$$

Sin embargo, sabemos que la función de retorno f y g son continuas y V ha de ser continua, por lo que la función que se encuentra dentro del supremo es continua por ser composición de funciones continuas. Además, como esta función está definida sobre el compacto $[\rho_0, h(y)]$, por el teorema de Weierstrass, sabemos que se alcanzará el máximo.

El siguiente paso, es comprobar que el operador T está bien definido. En primer lugar, como la función de retorno es continua por hipótesis, g y v son continuas, por composición de funciones continuas, la función que se encuentra dentro del máximo, a la que vamos a denotar por q, es continua. Sin embargo, ahora lo que tenemos que probar, es que $F : [0, y_{max}] \to \mathbb{R}$ es continua siendo:

$$F(y) = \max_{u \in [\rho_0, h(y)]} q(y,u)$$

Para probar esto, vamos a demostrar que si la sucesión $\{y_n\}$ tiende a $\overline{y}$, entonces $F(y_n)$ tiende a $F(\overline{y})$. Usaremos una demostración original que no está tomada de ningún libro. Para ello, sean $u_n \in [\rho_0, h(y_n)]$ y $\overline{u} \in [\rho_0, h(\overline{y})]$ tales que $F(y_n) = q(y_n, u_n)$ y $F(\overline{y}) = q(\overline{y}, \overline{u})$. Entonces:

- En primer lugar, por hipótesis sabemos que la función h, es una función continua, por lo tanto se verifica que $h(y_n)$ tiende a $h(\overline{y})$, y además conocemos que la función h, está acotada inferiormente por el valor de ρ_0, por lo tanto, existirá una constante $c > \rho_0$, tal que $\rho_0 \leq h(y_n) \leq c$. Como $u_n \in [\rho_0, h(y_n)]$, necesariamente se verifica entonces que para todo n, $\rho_0 \leq u_n \leq c$, luego la sucesión $\{u_n\}_n$ estará acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existirá una subsucesión $\{u_{nk}\}_k$ convergente a un cierto $\widetilde{u}$ (que no tiene por qué ser $\overline{u}$). Nuevamente, por cómo se definen las variables de estado, se verifica que $\rho_0 \leq u_{nk} \leq h(y_{nk})$, además la subsucesión de variables de estado $\{y_{nk}\}_k$ va a seguir convergiendo a $\overline{y}$, luego $\rho_0 \leq \widetilde{u} \leq h(\overline{y})$.

  Por otro lado, la variable de control $\overline{u}$, es con aquella con la que se alcanza el máximo de la función q, fijado $\overline{y}$, luego se tiene que $q(\overline{y}, \widetilde{u}) \leq q(\overline{y}, \overline{u})$. Esto implica que, al ser q continua:

  $$\lim_{k \to \infty} q(y_{nk}, u_{nk}) = q(\overline{y}, \widetilde{u}) \leq q(\overline{y}, \overline{u})$$

  En particular, se tiene que:

  $$\overline{\lim}_{n \to \infty} q(y_n, u_n) \leq q(\overline{y}, \overline{u})$$

- Ahora lo que queremos probar es que $\underline{\lim}_{n \to \infty} q(y_n, u_n) \geq q(\overline{y}, \overline{u})$. Aquí tenemos que distinguir dos posibles casos:

1. Si $\overline{u} \in [\rho_0, h(\overline{y}))$, por definición de límite, existirá un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_0 \leq \overline{u} < h(y_n)$ $\forall n \geq n_0$. Por lo tanto, $\forall n \geq n_0$ se tendrá que $q(y_n, \overline{u}) \leq q(y_n, u_n)$. De esta forma, si tomamos el límite inferior, y teniendo en cuenta que q es continua:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} q(y_n, \overline{u}) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} q(y_n, u_n) \ \Rightarrow q(\overline{y}, \overline{u}) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} q(y_n, u_n)$$

2. Si $\overline{u} = h(\overline{y})$, de nuevo por definición de límite, si tomamos un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, existirá un cierto $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_0 \leq h(\overline{y}) - \varepsilon \leq h(y_n)$ $\forall n \geq n_\varepsilon$, en particular se verifica $\rho_0 \leq \overline{u} - \varepsilon \leq h(y_n)$ $\forall n \geq n_\varepsilon$. Por consiguiente, $q(y_n, \overline{u} - \varepsilon) \leq q(y_n, u_n)$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ y tomando límites inferiores:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} q(y_n, \overline{u} - \varepsilon) = q(\overline{y}, \overline{u} - \varepsilon) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} q(y_n, u_n)$$

   Haciendo tender ε a cero, por ser q continua, se tiene que $q(\overline{y}, \overline{u}) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} q(y_n, u_n)$.

Combinando todo lo anterior, tenemos que:

$$q(\overline{y}, \overline{u}) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} q(y_n, u_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} q(y_n, u_n) \leq q(\overline{y}, \overline{u})$$

Por lo que, existirá el límite de $q(y_n, u_n)$, y en particular se tendrá que:

$$\lim_{n\to\infty} q(y_n, u_n) = q(\overline{y}, \overline{u}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(\overline{y})$$

A través de esta demostración, hemos probado que el operador T está bien definido. Para poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach, debemos probar que el operador T es contractivo, es decir, tenemos que demostrar que existe una constante $\beta \in (0, 1)$, tal que:

$$||T(v_1) - T(v_2)|| \leq \beta ||v_1 - v_2||$$

Para probar esto, vamos a emplear el siguiente teorema:

Teorema 4.2.2. ***(Condiciones suficientes de Blackwell para una contracción)*** *Supongamos que el operador $T : C(K) \to C(K)$ verifica:*

1. *Dadas $f, g \in C(K)$ tales que para todo $y \in K$ se verifica que $f(y) \leq g(y)$, entonces $(Tf)(y) \leq (Tg)(y)$ para todo $y \in K$.*

2. *Existe un parámetro $\beta \in (0, 1)$ tal que:*

$$[T(f + a)](y) \leq (Tf)(y) + \beta a \ \forall f \in B(K), a \geq 0, y \in K$$

Entonces el operador T es contractivo.

Demostración. Seguiremos [5]. Sean dos funciones $f, g \in C(K)$. Por la definición de la norma del supremo, sabemos que se tiene que $f - g \leq ||f - g||_\infty$. En particular, $f \leq g + ||f - g||_\infty$, y aplicando las condiciones (1) y (2):

$$Tf \leq T(g + ||f-g||_\infty) \leq Tg + \beta||f-g||_\infty \Rightarrow Tf - Tg \leq \beta||f-g||_\infty$$

Por otro lado, como $||f-g||_\infty = ||g-f||_\infty$, se tiene que $g \leq f + ||f-g||_\infty$, y de forma análoga que con el caso anterior:

$$Tg \leq T(f + ||f-g||_\infty) \leq Tf + \beta||f-g||_\infty \Rightarrow Tg - Tf \leq \beta||f-g||_\infty$$

Por lo tanto, al aplicar la norma infinito, se va a verificar que $||Tf - Tg||_\infty \leq \beta||f-g||_\infty$, y se tiene así que T es un operador contractivo. $\square$

Si utilizamos este resultado para probar que nuestro operador T es contractivo, tenemos que probar que verifica las condiciones (1) y (2). En primer lugar, dadas $v_1, v_2 \in C(K)$ tales que $v_1(y) \leq v_2(y)$ $\forall y \in K$, se tiene que $\beta v_1(y) \leq \beta v_2(y)$, por lo que $\beta v_1(g(y,u)) \leq \beta v_2(g(y,u))$. De esta forma:

$$T[v_1](y) = \max_{u\in[\rho_0,h(y)]}\{f(y,u) + \beta v_1(g(y,u))\} \leq \max_{u\in[\rho_0,h(y)]}\{f(y,u) + \beta v_2(g(y,u))\} = T[v_2](y)$$

En segundo lugar, vamos a tomar $v_1 \in C(K)$, $a \geq 0$ e $y \in K$:

$$T[v_1+a](y) = \max_{u\in[\rho_0,h(y)]}\{f(y,u)+\beta(v_1+a)(g(y,u))\} = \max_{u\in[\rho_0,h(y)]}\{f(y,u)+\beta v_1(g(y,u))\}+\beta a = T[v_1]+\beta a$$

Por tanto, existe un parámetro $\beta \in (0,1)$ que satisface la condición (2), y por consiguiente, se puede afirmar que el operador T es contractivo.

Aplicando ahora el Teorema del punto fijo de Banach, existe una única función v que resuelve nuestro problema funcional. Para poder hallar esta función, el propio teorema del punto fijo nos dice que partiendo de una función arbitraria $v_0 \in C(K)$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} T^n(v_0) = v$$

De forma adicional, se puede probar que bajo ciertas condiciones, el problema secuencial y el problema funcional son equivalentes. Esto se obtiene a partir de los tres resultados que aparecen a continuación, basados en [4], [5]. Además para probarlos, será necesario asumir otra hipótesis:

Hipótesis 4.2.3. *Existe al menos una dinámica factible, $\{(y_k,u_k)\}_{k=0,1,...}$ desde y_0, existirá un cierto $m_0 \in \mathbb{R}$, tal que la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=0,1,..}$ verifique:*

$$m_0 \leq \sum_{k=0}^{n} \beta^k f(y_k,u_k) = S_n, \ \forall n$$

Proposición 4.2.2. *Sea v la función que resuelve el problema funcional (PF), y supongamos las hipótesis (4.1.1) y (4.2.3). Si la función v verifica la condición de transversalidad fuerte, es decir, para todo y_0 y dinámica factible $\{(y_k,u_k)\}$ desde y_0 se cumple que $\overline{\lim}_{k\to\infty}\beta^k v(y_k) = 0$, entonces v*

resuelve el problema secuencial (PS).

Demostración. Vamos a probar que:

$$v(y_0) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k) \right\}$$

verificando además las ecuaciones de estado. En primer lugar, vamos a comprobar que $v(y_0)$ es en efecto una cota superior, y para ello, tenemos que demostrar que para cualquier dinámica factible desde y_0, se tiene que $v(y_0) \geq \sup\{\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k)\}$. Sabemos que la función v resuelve el problema funcional, por lo que se tiene que para cualquier dinámica factible desde y_0:

$$v(y_0) = \sup_{u_0 \in [\rho_0, h(y_0)]} \{f(y_0, u_0) + \beta v(g(y_0, u_0))\} \tag{4.8}$$

En particular, para cualquier $u_0 \in [\rho_0, h(y_0)]$, se verifica:

$$v(y_0) \geq f(y_0, u_0) + \beta v(g(y_0, u_0))$$

Como estamos en una dinámica factible, los vectores de estado y_k, se pueden definir como $y_k = g(y_k, u_k)$. Además, las dos expresiones anteriores que se verifican cuando la dinámica factible empieza en y_0, también se dan cuando la dinámica factible empieza en un determinado y_k. De este modo, se tiene lo siguiente:

$$v(y_0) \geq f(y_0, u_0) + \beta v(y_1) \geq f(y_0, u_0) + \beta f(y_1, u_1) + \beta^2 v(y_2) \geq ... \geq \sum_{k=0}^{t} \beta^k f(y_k, u_k) + \beta^{t+1} v(y_{t+1})$$

Cuando t tiende a infinito la última expresión existe y está acotada. Por hipótesis se tiene que $\overline{\lim}_{k\to\infty} \beta^k v(y_k) = 0$, en el infinito nos va a quedar $v(y_0) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k)$.

Una vez probado que $v(y_0)$ es cota superior, para ver que es el supremo, debemos comprobar que para todo $\varepsilon > 0$, existe una dinámica factible desde y_0, $\{(y_k, u_k)\}_{k=0,1,...}$, tal que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k) + \varepsilon \geq v(y_0)$$

Para probar esto, previamente tomamos una sucesión $\{\alpha_k\}_{k=0,1..} \subset (0, +\infty)$, tal que verifique $\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \alpha_k \leq \varepsilon$. De nuevo, como la función v, resuelve el problema funcional, existe un control u_0, tal que:

$$v(y_0) \leq f(y_0, u_0) + \beta v(g(y_0, u_0)) + \alpha_0$$

Tomando ahora $y_1 = g(y_0, u_0)$, existe un vector de control u_1 tal que:

$$v(y_1) \leq f(y_1, u_1) + \beta v(g(y_1, u_1)) + \alpha_1$$

Si juntamos ambas expresiones, y definimos $y_2 = g(y_1, u_1)$, resulta la desigualdad:

$$v(y_0) \leq f(y_0, u_0) + \beta f(y_1, u_1) + \beta^2 v(y_2) + \alpha_0 + \beta \alpha_1$$

Si repetimos este proceso de forma iterativa, podremos hallar una dinámica factible desde y_0, tal que se verifique:

$$v(y_0) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_k, u_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \alpha_k + \overline{\text{lím}}_{k\to\infty} \beta^k v(y_k)$$

Por hipótesis, sabemos que para todo y_0 y dinámica factible, se tiene que $\overline{\text{lím}}_{k\to\infty} \beta^k v(y_k) = 0$, por lo tanto tenemos que:

$$v(y_0) \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(y_k, u_k) + \varepsilon$$

Y de esta forma, queda probado que en efecto, la función $v(y_0)$, bajo estas condiciones es el supremo de la función objetivo. $\square$

A través de esta proposición y de (4.2.1), se prueba que las funciones de los problemas secuencial y funcional son equivalentes bajo ciertas circunstancias. Nos queda por caracterizar, cuándo las dinámicas óptimas son válidas en ambos problemas. Para ello, se presentan los siguientes resultados:

Proposición 4.2.3. *Sea $\{(\overline{y}_k, \overline{u}_k)\}_k$ una dinámica factible óptima desde $\overline{y}_0$, es decir, tal que nos permita alcanzar el valor supremo del problema secuencial (PS), y verificándose las hipótesis (4.1.1), (4.2.3), entonces se tiene que para cualquier $k = 0, 1, 2...$:*

$$V(\overline{y}_k) = f(\overline{y}_k, \overline{u}_k) + \beta V(\overline{y}_{k+1})$$

Demostración. Para probar esta proposición, vamos a hacer uso de la técnica de inducción. En primer lugar, demostraremos que se verifica la igualdad para el caso $k = 0$. Inicialmente, sabemos que la dinámica óptima $\{(\overline{y}_k, \overline{u}_k)\}_k$ logra alcanzar el valor supremo de la función objetivo del problema secuencial, por lo que tenemos lo siguiente:

$$V(\overline{y}_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_k, \overline{u}_k) = f(\overline{y}_0, \overline{u}_0) + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_{k+1}, \overline{u}_{k+1})$$

Tenemos que verificar que:

$$V(\overline{y}_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_{k+1}, \overline{u}_{k+1})$$

Si tomamos otra dinámica factible $\{(\overline{y}_0, \overline{u}_0), (\overline{y}_1, u_1), (y_2, u_2), ...\}$ desde $\overline{y}_0$, se tiene que:

$$V(\overline{y}_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_k, \overline{u}_k) = f(\overline{y}_0, \overline{u}_0) + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_{k+1}, \overline{u}_{k+1}) \geq f(\overline{y}_0, \overline{u}_0) + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_{k+1}, u_{k+1})$$

En particular, para cualquier dinámica factible desde $\overline{y}_1$, $\{(\overline{y}_1, u_1), (y_2, u_2), ...\}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_{k+1}, \overline{u}_{k+1}) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(y_{k+1}, u_{k+1})$$

Si para cualquier dinámica factible desde $\overline{y}_1$, se va a verificar la desigualdad anterior, entonces el valor supremo de esa función se va a alcanzar en la dinámica factible desde $\overline{y}_1$ correspondiente a

$\{(\overline{y}_1,\overline{u}_1),(\overline{y}_2,\overline{u}_2),\}$. Por lo que se tiene que $V(\overline{y}_1)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k f(\overline{y}_{k+1},\overline{u}_{k+1})$, y entonces:

$$V(\overline{y}_0)=f(\overline{y}_0,\overline{u}_0)+\beta V(\overline{y}_1)$$

El siguiente paso es suponer que se verifica la igualdad para el caso $t-1$:

$$V(\overline{y}_{t-1})=f(\overline{y}_{t-1},\overline{u}_{t-1})+\beta V(\overline{y}_t)$$

A continuación, tenemos que probar que se verifica para el caso igual a t:

$$V(\overline{y}_t)=f(\overline{y}_t,\overline{u}_t)+\beta V(\overline{y}_{t+1})$$

Por hipótesis de inducción sabemos que $V(\overline{y}_t)$ es el valor supremo de la función objetivo del problema secuencial con dinámica factible $\{(\overline{y}_t,\overline{u}_t),(\overline{y}_{t+1},\overline{u}_{t+1}),...\}$ desde $\overline{y}_t$, por lo tanto se verifica:

$$V(\overline{y}_t)=\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(\overline{y}_k,\overline{u}_k)=f(\overline{y}_t,\overline{u}_t)+\beta\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(\overline{y}_{k+1},\overline{u}_{k+1})$$

Tenemos que probar a continuación que:

$$V(\overline{y}_{t+1})=\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(\overline{y}_{k+1},\overline{u}_{k+1})$$

Como $\{(\overline{y}_t,\overline{u}_t),(\overline{y}_{t+1},\overline{u}_{t+1}),...\}$ es la dinámica factible a través de la cual se alcanza el valor supremo de la función objetivo del problema secuencial desde $\overline{y}_t$, para cualquier otra dinámica factible como $\{(\overline{y}_t,\overline{u}_t),(\overline{y}_{t+1},u_{t+1}),...\}$ desde $\overline{y}_t$ se tiene que:

$$V(\overline{y}_t)=\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(\overline{y}_k,\overline{u}_k)=f(\overline{y}_t,\overline{u}_t)+\beta\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(\overline{y}_{k+1},\overline{u}_{k+1})\geq f(\overline{y}_t,\overline{u}_t)+\beta\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(y_{k+1},u_{k+1})$$

En particular, para cualquier dinámica factible $\{(\overline{y}_{t+1},u_{t+1}),(y_{t+2},u_{t+2}),...\}$ desde $\overline{y}_{t+1}$, se verifica:

$$\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(\overline{y}_{k+1},\overline{u}_{k+1})\geq\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(y_{k+1},u_{k+1})$$

Por consiguiente, $V(\overline{y}_{t+1})=\sum_{k=t}^{\infty}\beta^k f(\overline{y}_{k+1},\overline{u}_{k+1})$, y se da la siguiente igualdad:

$$V(\overline{y}_t)=f(\overline{y}_t,\overline{u}_t)+\beta V(\overline{y}_{t+1})$$

□

Una vez probado esto, vemos cómo en esta proposición podemos cambiar la función V, por v, es decir que se verifica que:

$$v(\overline{y}_k)=f(\overline{y}_k,\overline{u}_k)+\beta v(\overline{y}_{k+1}) \tag{4.9}$$

Esto se debe a que, por definición tenemos que:

$$v(\overline{y}_k) = \sup_{u_k \in [\rho_0, h(\overline{y}_k)]} \{f(\overline{y}_k, u_k) + \beta v(g(\overline{y}_k, u_k))\}$$

Ahora como por la Proposición 4.2.1, sabemos que la función V resuelve este problema funcional, y hemos probado que $\{(\overline{y}_k, \overline{u}_k)\}$ es la dinámica óptima, entonces necesariamente el vector de control u_k para el que se alcanza el valor supremo en el problema funcional con la función v, tiene que ser $\overline{u}_k$. Y por lo tanto en efecto se tiene la igualdad (4.9).

Proposición 4.2.4. *Sea $\{(\overline{y}_k, \overline{u}_k)\}$ una dinámica factible óptima desde $\overline{y}_0$ del problema funcional, es decir que verifica que:*

$$v(\overline{y}_k) = f(\overline{y}_k, \overline{u}_k) + \beta v(\overline{y}_{k+1})$$

Suponiendo las hipótesis (4.1.1), (4.2.3), si se verifica la condición de transversalidad débil, es decir, que $\overline{\lim}_{k\to\infty} \beta^k V(\overline{y}_k) \leq 0$, entonces $\{(\overline{y}_k, \overline{u}_k)\}$ es una dinámica óptima para el problema secuencial.

Demostración. Queremos probar que a través de la dinámica factible $\{(\overline{y}_k, \overline{u}_k)\}$ desde $\overline{y}_0$, se alcanza el valor supremo de la función objetivo del problema secuencial, o lo que es lo mismo:

$$V(\overline{y}_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_k, \overline{u}_k)$$

Para ello, en primer lugar, como sabemos que se trata de una dinámica factible desde $\overline{y}_0$, por definición de supremo:

$$V(\overline{y}_0) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_k, \overline{u}_k)$$

Ahora lo que tenemos que probar para que se de la igualdad, es la desigualdad contraria. Según las hipótesis, sabemos que se verifica lo siguiente:

$$v(\overline{y}_k) = f(\overline{y}_k, \overline{u}_k) + \beta v(\overline{y}_{k+1})$$

Por otro lado, como hemos visto anteriormente, la función V resuelve el problema funcional, y si se tiene que la dinámica factible es $\{(\overline{y}_k, \overline{u}_k)\}$ entonces la función V verifica:

$$V(\overline{y}_k) = f(\overline{y}_k, \overline{u}_k) + \beta V(\overline{y}_{k+1})$$

Por lo tanto, tenemos:

$$V(\overline{y}_0) = f(\overline{y}_0, \overline{u}_0) + \beta V(\overline{y}_1)$$

A su vez, también se tiene que:

$$V(\overline{y}_1) = f(\overline{y}_1, \overline{u}_1) + \beta V(\overline{y}_2)$$

Si juntamos ambas expresiones, resulta lo siguiente:

$$V(\overline{y}_0) = f(\overline{y}_0, \overline{u}_0) + \beta f(\overline{y}_1, \overline{u}_1) + \beta^2 V(\overline{y}_2)$$

Si repetimos esto t veces se tiene que:

$$V(\overline{y}_0) = \sum_{k=0}^{t} \beta^k f(\overline{y}_k, \overline{u}_k) + \beta^{t+1} V(\overline{y}_{t+1})$$

Ahora como por hipótesis tenemos que, $\overline{\lim}_{k\to\infty} \beta^k V(\overline{y}_k) \leq 0$, si hacemos tender t a infinito entonces:

$$V(\overline{y}_0) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k f(\overline{y}_k, \overline{u}_k)$$

Y por lo tanto queda demostrada así la proposición □

4.3. Modelo Básico de Crecimiento en una economía

A lo largo de este capítulo, resolveremos uno de los problemas clave en el ámbito de la macroeconomía aplicando la programación dinámica en horizonte infinito. Las ideas aplicadas a lo largo de esta sección han sido tomadas de [3], [6].

El propósito de los modelos económicos consiste en explicar el funcionamiento de una economía, así como comprender el comportamiento de las diferentes variables a través de una simplificación de la realidad. En particular, la macroeconomía actual se basa en el desarrollo de modelos de equilibrio dinámico, en los que las decisiones presentes de los diferentes agentes económicos, influyen en el conjunto de posibles decisiones futuras.

El sistema que vamos a tratar en este trabajo se basa en el modelo básico de crecimiento. Este modelo inicialmente fue desarrollado por el matemático y filósofo Frank P.Ramsey en 1928, para posteriormente ser perfeccionado por David Cass y Tjalling Koopmans en 1965, y Brock y Mirman en el año 1972. Su objetivo reside en describir el comportamiento del sector privado, tanto consumidores como empresas, y del sector público.

Por un lado se encuentran las familias, quienes disponen del factor trabajo y de determinados activos financieros; su rol en la economía es consumir y ahorrar. Por otra parte, en la economía son las empresas quienes invierten, a través de bienes de capital o existencias; además son las que compran capital a un tipo de interés y trabajo a cambio de una retribución salarial. Ambos agentes económicos se encuentran en el mercado, en donde también participa el sector público. La demanda y oferta del factor trabajo y capital, con la participación de los sectores privado y público, hacen que los mercados lleguen al equilibrio.

En este trabajo nos vamos a centrar en el comportamiento de las familias en el sentido determinista y en un tiempo discreto, estudiando cuánto deben consumir y ahorrar en determinados instantes de tiempo, para alcanzar su objetivo de manera óptima. A diferencia de otros modelos, como el modelo de Robert Solow, la tasa de ahorro de los consumidores no se trata de una variable exógena, constante, si no que se va a determinar dentro del modelo, teniendo en cuenta las restricciones presupuestarias de las familias, y las decisiones de consumo óptimas.

Inicialmente, nos planteamos una economía en donde se produce un determinado bien, y en donde el número de habitantes permanece constante. En cada período de tiempo, cada agente económico, debe determinar qué cantidad del bien existente consume, y cuál es la cuantía que dedica al ahorro. Además, en este sistema, los consumidores van a tener una vida infinita, es decir, consideramos que tienen un tiempo ilimitado para tomar sus decisiones. Esta hipótesis se realiza, con el fin de obtener una trayectoria de capital más realista. Si suponemos que el número de etapas es finito, para maximizar nuestra función, en la última etapa deberemos haber consumido todo el bien existente, lo que no se asemeja demasiado a la realidad.

Para cada periodo k, la variable de estado y_k, hará referencia a la cuantía de capital en el instante k, mientras que denotaremos por c_k a la cantidad del bien producido durante esta etapa. Esta cantidad c_k, va a quedar determinada por la función de producción q, que dependerá únicamente del capital existente en el momento k, es decir: $c_k = q(y_k)$.

La función de producción q, debe ser en primer lugar continua, además debe de verificar que $q(0) = 0$, ya que si el capital existente es cero, es lógico suponer que no se realiza la producción del bien, y por último debe ser estrictamente creciente, lo que implica que a mayor capital invertido, mayor cantidad de bien se produce. Así mismo, también deberá ser cóncava y verificar:

$$\lim_{y \to 0} q'(y) = +\infty \qquad \lim_{y \to +\infty} q'(y) = 0$$

Por otro lado, en cada etapa k, la cantidad del bien existente $q(y_k)$, se va a dividir en: u_k, que corresponderá a la cantidad del bien que se destina al consumo en ese período y s_k que será la parte que se ahorra. En este sistema, los agentes económicos, van a poder emplear la parte ahorrada en el período siguiente, transformándola en capital, de tal forma que se acumule y en la siguiente etapa con una mayor disposición de capital pueda aumentar la cantidad producida. Además, se debe tener en cuenta que tanto el consumo en cada etapa, u_k, como la cantidad de capital existente, y_k será mayor o igual a cero. De aquí, se deducen las siguientes expresiones:

$$q(y_k) = u_k + s_k, \quad u_k, y_k \geq 0$$

Teniendo en cuenta la explicación anterior, la evolución del capital se va a poder representar a través del capital existente y del ahorro de los consumidores. En particular, el capital existente en el período $k+1$ será la suma del capital en el periodo k más el ahorro de las familias en la etapa k. Sin embargo, como ya hemos hablado en muchas ocasiones a lo largo de este trabajo, el valor del capital en cada período no va a ser el mismo. A medida que se avance en el tiempo, el capital va a ir perdiendo valor, por eso se debe tener en cuenta una tasa de depreciación para el capital, $\delta \in [0, 1]$. Matemáticamente, el progreso del capital existente se puede expresar a través de la siguiente ecuación: $y_{k+1} = (1 - \delta)y_k + s_k$.

Por último nos queda por determinar la función objetivo de nuestro problema. Nuestro propósito es maximizar el beneficio de los consumidores, y ese beneficio, va a quedar determinado por la función de utilidad de las familias. Esta función $U(u_k)$, representa la satisfacción o el beneficio que obtiene el consumidor a causa del empleo de una cantidad del bien a consumir. No nos debemos olvidar en esta función, de añadir el factor de descuento $\beta \in (0,1)$, ya que debemos tener también en cuenta que el valor de utilidad del presente se deprecia a lo largo del tiempo. Por lo que nuestra función objetivo en el problema va a tener la siguiente forma:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U(u_k)$$

Por consiguiente, explicado el funcionamiento de nuestro problema, y realizando alguna simplificación, el problema objeto de estudio consiste en, partiendo de una cantidad inicial de capital y_0, determinar el consumo y ahorro tal que:

$$(PSCB)\begin{cases} Maximizar & V = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U(u_k) \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = (1-\delta)y_k + q(y_k) - u_k \\ & y_k \geq 0 \\ & u_k \geq 0 \\ con: & y_0 \ \ dado \end{cases} \tag{4.10}$$

Aunque el ahorro no es una variable que se encuentre dentro del problema, una vez hallado el consumo óptimo en cada etapa, y el capital existente, se puede determinar a partir de la ecuación $q(y_k) = u_k + s_k$.

Una vez planteado el problema, a continuación pasaremos a su resolución. Para ello, haremos uso del procedimiento explicado en la sección anterior. Como podemos observar, el sistema (4.10), se trata del problema secuencial. El problema funcional asociado al sistema (4.10), se muestra a continuación:

$$(PFCB)\left\{ \ v(y) = \text{máx}_{0\leq u\leq(1-\delta)y+q(y)}\{U(u) + \beta v((1-\delta)y + q(y) - u)\}\right. \tag{4.11}$$

Para resolver este problema, se debe emplear como ya hemos visto, el Teorema del punto fijo de Banach. Comenzaremos definiendo un operador T de la siguiente manera:

$$T[v](y) = \max_{0\leq u\leq(1-\delta)y+q(y)}\{U(u) + \beta v((1-\delta)y + q(y) - u)\}$$

Antes de continuar, debemos recordar que cuando se seleccionen las funciones utilidad y producción, se debe comprobar que en efecto se verifican las hipótesis necesarias para poder aplicar esta resolución y afirmar que la solución del problema funcional es la solución del problema secuencial. En este caso, como estamos hablando en términos generales esto no es necesario.

Por lo tanto, siempre y cuando se satisfagan las hipótesis necesarias, este operador como ya probamos en la sección anterior está bien definido y además es contractivo. Por este motivo, podemos asegurar por el Teorema del punto fijo de Banach que existe una única función v tal que $T(v) = v$, y como ya probamos $V = v$. Además este teorema, nos proporciona el método para calcular esa función que estamos buscando. Este método se basa en seleccionar una función arbitraria v_0, perteneciente al conjunto de funciones continuas sobre un compacto, y haciendo el límite siguiente, se obtendrá la función que estábamos buscando: $\lim_{n\to\infty} T^n(v_0) = v$

En el momento en el que quede determinada cuál es la función que resuelve el problema funcional, conoceremos el valor óptimo de nuestro problema secuencial. Además, a partir de la propiedad $Tv = v$, podremos obtener la expresión de la variable de consumo, en función del capital y, es decir, $u = \phi(y)$, en donde como ya sabemos, la función ϕ recibe el nombre de función de política. A partir de esto, podremos obtener el capital en cada etapa a través de la ecuación $y_{k+1} = (1-\delta)y_k + q(y_k) - \phi(y_k)$.

Hasta ahora hemos hablado en términos generales, sin especificar la función utilidad o la función producción. Por este motivo, y con el fin de tener una mejor visualización del problema, vamos a explicar de manera simplificada uno de los ejemplos clásicos analizados en el ámbito de la macroeconomía, que es el ejemplo de Brock y Mirman.

En este ejemplo, se toma como función utilidad la función logaritmo neperiano, es decir, $U(u_k) = \ln(u_k)$, y como función producción $q(y_k) = y_k^\alpha$, tomando como el parámetro α, un valor perteneciente al intervalo $(0,1)$. Por otro lado, se tomará como tasa de depreciación $\delta = 1$, la tasa de descuento β será un valor arbitrario en $(0,1)$ y el capital inicial se fijará en y_0. Además hemos añadido que en este caso el consumo que se debe realizar en cada etapa u_k ha de ser mayor que cero, es decir, como mínimo existirá siempre un cierto consumo $\rho_0 > 0$, lo que evitará cualquier problema técnico en la función objetivo. Por lo tanto, el problema de crecimiento económico que vamos a resolver es el siguiente:

$$(PE)\begin{cases} Maximizar & V = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \ln(u_k) \\ sujeto\ a: & y_{k+1} = y_k^\alpha - u_k \\ & y_k \geq 0 \\ & u_k \geq \rho_0 \\ con: & y_0\ \ dado \end{cases} \tag{4.12}$$

Antes de comenzar con la resolución del problema debemos comprobar que la función de producción verifica todas las condiciones y que se cumplen todas las hipótesis necesarias. Como se puede observar, la función de producción $q(y) = y^\alpha$ es continua, cumple que $q(0) = 0$ y es estrictamente creciente y cóncava. Además $q'(y) = \frac{\alpha}{y^{1-\alpha}}$, con que $\lim_{y\to 0} q'(y) = +\infty$ y $\lim_{y\to+\infty} q'(y) = 0$.

En cuanto a las hipótesis necesarias que se deben verificar, tenemos que en este caso h es la función de producción, y es continua. Por otro lado, la función g es continua, y por cómo hemos establecido las hipótesis, la función de retorno va a ser acotada sobre el conjunto de puntos $\{u_k \in [\rho_0, h(y_k^\alpha)]\}$. Lo único que nos queda por comprobar es que para cada dinámica factible existirá un cierto $M_0 \in \mathbb{R}$, tal que se verifique:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \ln(u_k) \leq M_0$$

Sin embargo, sabemos que $y_1 = y_0^\alpha - u_0 < y_0^\alpha$, por lo que por definición $\rho_0 \leq u_1 \leq y_1^\alpha < (y_0^\alpha)^\alpha$. Con lo cual, para un cierto k vamos a tener que $\rho_0 \leq u_k < y_0^{\alpha^{k+1}}$. Si aplicamos logaritmos a ambos lados, tenemos que $\ln(u_k) < \alpha^{k+1}\ln(y_0)$. Aquí vamos a tomar $y_0 > 1$ para no obtener un beneficio negativo. Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \ln(u_k) < \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \alpha^{k+1} \ln(y_0) = \ln(y_0)\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\alpha)^k = \frac{\ln(y_0)\alpha}{1-\beta\alpha} = M_0$$

De esta forma, tenemos que para cualquier dinámica factible el funcional objetivo va a estar acotado, y por consiguiente se verifican todas las hipótesis y condiciones necesarias, luego podemos pasar a su resolución. Para resolver este problema, necesitamos definir el problema funcional asociado:

$$(PFE)\left\{ \; v(y) = \text{máx}_{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha} \{\ln(u) + \beta v(y^\alpha - u)\} \right. \tag{4.13}$$

En este caso, el máximo nunca se va a alcanzar cuando $u = 0$, porque si esto ocurre el $\ln(u)$ tendería a menos infinito. Pero para que se verifiquen las condiciones necesarias, vamos a tomar $\rho_0 > 0$ suficientemente pequeño. Como ya hemos visto para el caso general, el siguiente paso es definir nuestro operador T que será contractivo, y aplicar posteriormente el Teorema del punto fijo de Banach. El operador queda determinado de la siguiente forma:

$$T[v](y) = \underset{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}{\text{máx}} \{\ln(u) + \beta v(y^\alpha - u)\}$$

Para encontrar esa función v tal que $Tv = v$, debemos tomar una función v_0 arbitraria, y comenzar con el algoritmo que nos propone el propio teorema. En este caso, se va a seleccionar la función más sencilla posible, $v_0 = 0$. Seguidamente, vamos a obtener la función v_1:

$$T[v_0](y) = v_1(y) = \underset{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}{\text{máx}} \{\ln(u) + \beta v_0(y^\alpha - u)\} = \underset{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}{\text{máx}} \{\ln(u)\}$$

Ahora bien, como el logaritmo neperiano es estrictamente creciente, la función alcanzará el máximo cuando $u = y^\alpha$, por lo que:

$$v_1(y) = \underset{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}{\text{máx}} \{\ln(u)\} = \ln(y^\alpha) = \alpha \ln(y)$$

Para continuar con el proceso, debemos calcular la función v_2:

$$T[v_1](y) = v_2(y) = \underset{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}{\text{máx}} \{\ln(u) + \beta v_1(y^\alpha - u)\} = \underset{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}{\text{máx}} \{\ln(u) + \beta\alpha \ln(y^\alpha - u)\}$$

Para calcular ese máximo, vamos a definir el siguiente problema auxiliar:

$$\underset{u}{\text{máx}}\, f(u) = \ln(u) + \beta\alpha \ln(y^\alpha - u)$$

Los posibles candidatos se hallan derivando f e igualando a cero:

$$f'(u) = 0 = \frac{1}{u} - \frac{\beta\alpha}{y^\alpha - u} \;\Rightarrow u = \frac{y^\alpha}{1+\beta\alpha}$$

Nos falta comprobar que ese valor es un máximo local, a través de la derivada segunda. En efecto, se obtiene que $f''(u) = -\frac{1}{u^2} - \frac{\beta\alpha}{(y^\alpha - u)^2} < 0$, y por tanto, podemos asegurar que se trata de un máximo local. Ahora bien, para que sea el máximo que estamos buscando debe pertenecer al intervalo $[\rho_0, y^\alpha]$, pero esto está claro. Puntualizar además que en este caso el máximo no se puede encontrar en los extremos del intervalo por cómo esta definida nuestra función, por eso empleamos el argumento de la derivada. Por lo tanto nuestra función v_2 queda definida de la siguiente manera:

$$v_2(y) = \ln(\frac{y^\alpha}{1+\beta\alpha}) + \beta\alpha\ln(y^\alpha - \frac{y^\alpha}{1+\beta\alpha}) = \ln(y^\alpha) - \ln(1+\beta\alpha) + \beta\alpha\ln(y^\alpha\beta\alpha) - \beta\alpha\ln(1+\beta\alpha) =$$

$$\ln(y^\alpha) - \ln(1+\beta\alpha) + \beta\alpha\ln(y^\alpha) + \beta\alpha\ln(\beta\alpha) - \beta\alpha\ln(1+\beta\alpha) =$$

$$\alpha(1+\beta\alpha)\ln(y) - (1+\beta\alpha)\ln(1+\beta\alpha) + \beta\alpha\ln(\beta\alpha)$$

Una vez que ya tenemos la función v_2, siguiendo la mismo metodología, podemos calcular v_3:

$$T[v_2](y) = v_3(y) = \max_{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}\{\ln(u) + \beta v_2(y^\alpha - u)\} =$$

$$\max_{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}\{\ln(u) + \beta\alpha(1+\beta\alpha)\ln(y^\alpha - u) - \beta(1+\beta\alpha))\ln(1+\beta\alpha) + \beta^2\alpha\ln(\beta\alpha)\}$$

Si razonamos como para la función v_2, nos encontramos que el máximo de la función se encuentra cuando $u = \frac{y^\alpha}{1+\beta\alpha+\beta^2\alpha}$, valor que como se puede observar se encuentra dentro del intervalo $[\rho_0, y^\alpha]$. De esta forma, la función v_3 resulta:

$$v_3(y) = \ln(\frac{y^\alpha}{1+\beta\alpha+\beta^2\alpha}) + \beta\alpha(1+\beta\alpha)\ln(y^\alpha - \frac{y^\alpha}{1+\beta\alpha+\beta^2\alpha}) - \beta(1+\beta\alpha))\ln(1+\beta\alpha) + \beta^2\alpha\ln(\beta\alpha)$$

Realizando algunas simplificaciones, y teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos, la función v_3, se puede expresar de la forma:

$$v_3(y) = \alpha(1+\beta\alpha+\beta^2\alpha^2)\ln(y) - (1+\beta\alpha+\beta^2\alpha^2)\ln(1+\beta\alpha+\beta^2\alpha^2)+$$

$$\beta\alpha(1+\beta\alpha)\ln(\beta\alpha+\beta^2\alpha^2)) - \beta(1+\beta\alpha))\ln(1+\beta\alpha) + \beta^2\alpha\ln(\beta\alpha)$$

En general, si observamos todas las funciones que hemos obtenido en este procedimiento, se tiene que, para cada k:

$$v_k(y) = \alpha\sum_{i=0}^{k-1}(\beta\alpha)^i\ln(y) + A_k,$$

siendo A_k una constante que depende de la función en la que nos encontremos, y que se debe determinar. Por otro lado, cuando k, tienda a infinito, que es la función que nos interesa encontrar, podemos observar cómo ese sumatorio, se trata de la serie geométrica de razón $\beta\alpha$, por lo que conocemos que su suma es $\frac{1}{1-\beta\alpha}$, y por tanto la función que estamos buscando tiene la forma:

$$v(y) = \frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(y) + A$$

Por último, nos queda determinar el valor de la constante A. Para ello, como conocemos que la función que estamos buscando, verifica que $Tv = v$, se tiene que:

$$\frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(y) + A = \max_{\rho_0 \leq u \leq y^\alpha}\{\ln(u) + \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(y^\alpha - u) + \beta A\}$$

A continuación, al igual que hacíamos para las demás funciones, para calcular el máximo del miembro de la derecha, vamos a definir el siguiente problema auxiliar:

$$\max_u f(u) = \ln(u) + \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(y^\alpha - u) + \beta A$$

Debemos derivar e igual a cero para encontrar los posibles candidatos:

$$f'(u) = 0 = \frac{1}{u} - \frac{\beta\alpha}{(1-\beta\alpha)(y^\alpha - u)} \Rightarrow u = y^\alpha(1-\beta\alpha)$$

Si hacemos la segunda derivada nos queda un valor menor que cero, por lo que estamos ante un máximo local. Por otro lado, este valor se encuentra dentro del intervalo $[\rho_0, y^\alpha]$ porque $\beta, \alpha \in (0,1)$ y ρ_0 es suficientemente pequeño, por lo que se trata de la expresión que buscábamos, ya que el máximo no se va a encontrar en los extremos por la definición de la función. Esta relación $u = y^\alpha(1-\beta\alpha)$ se trata de la función de política, a través de la cuál, conociendo cual es el valor en cada etapa del vector estado y_k, podremos conocer el valor óptimo de la variable de control u_k. De esta forma, el consumo óptimo en cada etapa k queda determinado por:

$$\overline{u}_k = \overline{y}_k^\alpha(1-\beta\alpha)$$

Para conocer ahora el valor de la constante A, sustituimos la expresión de la variable de control, y obtenemos:

$$\frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(y) + A = \ln(y^\alpha(1-\beta\alpha)) + \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(y^\alpha - y^\alpha(1-\beta\alpha)) + \beta A$$

$$A - \beta A = [\alpha + \frac{\beta\alpha^2}{1-\beta\alpha} - \frac{\alpha}{1-\beta\alpha}]\ln(y) + \ln(1-\beta\alpha) + \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(\beta\alpha)$$

$$A = \frac{1}{1-\beta}(\ln(1-\beta\alpha) + \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(\beta\alpha))$$

Por lo tanto, la función que estábamos buscando y que nos va a proporcionar el valor óptimo de nuestro problema secuencial, ya que $V(y_0) = v(y_0)$, es la siguiente:

$$v(y_0) = \frac{\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(y_0) + \frac{1}{1-\beta}(\ln(1-\beta\alpha) + \frac{\beta\alpha}{1-\beta\alpha}\ln(\beta\alpha)$$

Por otro lado, la dinámica factible óptima de este problema, va a quedar determinada de la siguiente manera: para cada $k = 0, 1, 2...$, la variable de consumo $\overline{u}_k = \overline{y}_k^\alpha(1-\beta\alpha)$, mientras que la variable de estado que representa el capital en cada momento, $\overline{y}_k$, se obtiene a partir de la ecuación de movimiento, $\overline{y}_{k+1} = \overline{y}_k^\alpha - \overline{y}_k^\alpha(1-\beta\alpha) = \overline{y}_k^\alpha\beta\alpha$. Por último, para hallar el ahorro en cada etapa, simplemente se debe realizar la siguiente operación: para cada k, $\overline{s}_k = \overline{y}_k^\alpha - \overline{u}_k$.

Bibliografía

[1] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Wiley, 1987.

[2] J. L. Bonifaz y R. Lama, *Optimización dinámica y teoría económica*, Universidad del Pacífico, 2013
https://repositorio.up.edu.pe/bitstream/handle/11354/976/AE33.pdf?sequence=6&isAllowed=y

[3] E. Cerdá, *Optimización dinámica*, Prentice Hall, 2003.

[4] A.J.Riascos, *Métodos matemáticos y computacionales en macroeconomía*, Universidad de los Andes, 2009
http://www.alvaroriascos.com/books/mmm2009.pdf

[5] N. L. Stokey y R. E. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, 1989.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Banach_fixed-point_theorem