La Desigualdad de Bézout Geométrica de J. Heintz: deconstrucción, una prueba autocontenida

(J. Heintz's Geometrical Bézout Inequality: Deconstruction, a self-contained proof)

Toraya Fernández Ruiz

Trabajo de Fin de Grado

para acceder al

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de Cantabria

Director: Luis Miguel Pardo Vasallo

Febrero - 2021

A David por resolverme tantas dudas
y a Duna por hacerme compañía
en la realización de este trabajo

Agradecimientos

Después de cinco años y una pandemia, llega el momento de entregar este trabajo. Me gustaría dar las gracias a toda las personas que han contribuido a que hoy pueda concluir, por fin, el grado en Matemáticas.

En primer lugar me gustaría dar las gracias a mi director Luis Miguel Pardo. Gracias por la paciencia, por darme la oportunidad de realizar este trabajo, con el que he podido aprender tantas cosas y por tener tanta confianza en mi. También me gustaría agradecer al autor original de la desigualdad de Bézout, Joos Heintz, por tomarse la molestia de leerse el trabajo.

A mis profesores, me gustaría agradecerles el haber aprendido tantas cosas durante el grado, más de las que pensaba en un principio. Me gustaría agradecer a Cristina Pérez por su trato tan cercano y personal y a Nuria Corral por su preocupación y por dejar la puerta de su despacho siempre abierta para cuando hace falta. También me gustaría agradecer a Miguel, sus infinitos ánimos detrás de la barra.

Esta experiencia no habría sido lo mismo sin mis compañeros, que han sido un pilar fundamental en la carrera. Gracias a los que han estado durante el camino, y sobre todo gracias a los que aún están. A mis compañeros y amigos del doble grado, gracias por haberme aportado tanto a nivel académico, por haberme ayudado a crecer, pero sobre todo gracias por las experiencias personales que hemos compartido y por las que vendrán. Espero poder seguir viéndoos crecer.

También me gustaría agradecer a radiociencias, masterclass, los manines y la marina; por haber formado parte de experiencias únicas, por los cotilleos, las rurales y las cervezas en el CD's que ya son una tradición. Gracias por la amistad y por seguir formando parte de mi vida.

Finalmente, me gustaría dar las gracias a mi familia, por estar siempre ahí, dándome fuerzas cuando más las necesito, por entender las ausencias y los agobios. En especial me gustaría dar las gracias a mis padres, por los sacrificios que han hecho para que esté donde estoy y por creer siempre en mí.

Resumen

La Desigualdad de Bézout es un resultado central de la Geometría Algebraica, cuyo origen se remonta tiempos de I. Nexton (1642-1727) y É. Bézout (1730-1783). Los matemáticos de la época estaban interesados en la resolución de sistemas de dos ecuaciones polinomiales en dos variables (es decir, calcular los puntos de intersección de dos curvas planas). Pronto se percataron de que "resolver", no es una tarea clara a realizar algorítmicamente. Se trataba de encontrar una descripción de dichas soluciones, que como se observa en los trabajos de N. Abel o É. Galois sobre resolución de ecuaciones polinomiales por radicales, no siempre puede encontrarse. Por tanto, se buscaba al menos tener control (una cota superior) en el número de soluciones a calcular. Es por este motivo, por el cual la Desigualdad de Bézout es un resultado tan importante en el campo de la Geometría Algebraica.

Durante el siglo XIX y comienzos del siglo XX, la Teoría de Eliminación (también llamada Geometría Algebraica Computacional), evolucionaron teniendo en cuenta la necesidad de mantener el control en el tamaño de las soluciones, cuando se intersecan variedades algebraicas de dimensión arbitraria. Sin embargo, hasta comienzos de la década de los 80 del siglo pasado, no había una Desigualdad de Bézout para variedades algebraicas generales. Tres autores (W. Vogel, J. Heintz y W. Fulton) propusieron varias igualdades y desigualdades, en la linea de las ideas originales de É. Bézout y I. Newton.

En este trabajo nos centraremos en realizar una deconstrucción completa y autocontenida de la *Desigualdad de Bézout Geométrica de Joos Heintz* para variedades algebraicas afines, publicada en [**He, 83**].

Para ello, en primer lugar se establece el concepto de grado geométrico de una variedad algebraica afín, desde una perspectiva algebraica (como grado de la extensión de cuerpos de funciones racionales dada por un morfismo dominante) y una geométrica (como el cardinal finito de una intersección adecuada con variedades afines lineales), por medio de los conjuntos localmente cerrados para la topología de Zariski.

Además, se prueba que dicha definición verifica que el grado del producto cartesiano se corresponde con el producto de los grados, resultado esencial para probar la Desigualdad de Bézout.

Finalmente, se estudiará la intersección múltiple entre conjuntos constructibles (unión finita de conjuntos localmente cerrados), que también verifica una desigualdad de Bézout Geométrica. Se realizará una generalización del resultado propuesto para variedades algebraicas afines por J. Heintz y C. P. Schnorr (1982), por medio de dos cotas originales para el grado de la intersección finita de constructibles.

Palabras Clave: Variedad Algebraica, conjunto localmente cerrado, conjunto constructible, función racional, morfismo dominante, Grado Geométrico, Desigualdad de Bézout.

Abstract

Bézout's Inequality is a central result of Algebraic Geometry whose origins go back to the times of I. Newton (1642-1727) or É. Bézout (1730-1783). Mathematicians of those times were interested in solving systems of two polynomial equations in two variables. (i.e. computing the intersection points of two plane curves). They soon realized that "solving" is not a clear task to be done algorithmically. They wanted emphasized descriptions of solutions which often cannot be exhibited, as we can see in the works of N. Abel or É. Galois about polynomial equations solvable by radicals. Then, they at least wanted to have control (an upper bound) of the number of solutions they have to compute. This is the reason why Bézout's Inequality became to be such an important result in Algebraic Geometry.

During the XIX century and the beginning of the XX century, Elimination Theory (also known as Computational Algebraic Geometry) evolved having in mind the need of such control of the number of solutions when intersecting several algebraic varieties of any dimension. Nevertheless, until the beginning of the 80's of the past century, there were no Bézout's Inquality for general algebraic varieties. Three authors (W. Vogel, J. Heintz and W. Fulton) proposed several equalities and inequalities that belong to the class of original ideas of É. Bézout and I. Newton.

In this manuscript, we will focus on performing a complete and self-contained deconstruction of *Joos Heintz's Geometric Bézout Inequality* for affine algebraic varieties, publised in [**He, 83**].

In order to do that, in first place the concept of geometric degree of an affine algebraic variety is established, from an algebraic perspective (from the degree of the extension of rational functions fields, given by a dominant marphism), and a geometric one (as the finite cardinal of a suitable intersection with linear affine varieties), through the locally closed sets of Zariski's Topology.

Besides, it is also verified that the degree of the cartesian product equals the product of the degrees, essential result to prove Bézout's Inequality.

Finally, the multiple intersection among constructible sets (finite union of locally closed sets) will be studied, considering the fact that they also fulfilled a Bézout's Inequality. A generalization of the result for algebraic algebraic varieties of J. Heintz and C. P. Schnorr (1982) will be carried out, presenting two original upper bounds for the degree of the finite intersection of constructible sets.

Key Words: Algebraic Variety, Locally Closed set, Constructible set, racional function, dominant morphism, Geometric Degree, Bézout's Inequality.

Índice

Capítulo 0. Introducción y Resumen de Contenidos de la Memoria i
0.1. Introducción i
0.1.1. Orígenes y tipos esenciales de (des)igualdades de Bézout i
0.1.2. Breve apunte sobre Teoría de la Eliminación. v
0.2. Resumen del Contenido de la Memoria. vi
0.2.1. Resumen Capítulo 2 vii
0.2.2. Resumen Capítulo 3 ix
0.2.3. Resumen Capítulo 4 x

Capítulo 1. Resultados Preliminares de Geometría Algebraica 1
1.1. Conjuntos Algebraicos Afines. Topología de Zariski 1
1.2. El "Nullstellensatz" de Hilbert-Kronecker 2
1.3. Aplicaciones sobre una Variedad Algebraica 3

Capítulo 2. La Noción de Grado de un Localmente Cerrado Afín 5
2.1. Localmente cerrados para la Topología de Zariski 5
2.2. Cardinal de fibras de morfismos dominantes 6
2.3. Una Construcción Esencial 17
2.4. Noción (geométrica) de grado de un conjunto localmente cerrado afín 19
2.4.1. Extensión de la definición a la clausura Zariski 22
2.4.2. Grado geométrico para conjuntos algebraicos equidimensionales 25
2.4.3. Subaditividad del grado para localmente cerrados y variedades algebraicas 26

Capítulo 3. Desigualdad de Bézout para Localmente Cerrados:
Grado del Producto Cartesiano 27
3.1. Desigualdad del grado para la intersección con variedades afines lineales 27
3.2. Grado de la imagen por un morfismo lineal de una variedad algebraica 28
3.2.1. Descomposición minimal de un constructible 28
3.3. Grado del producto cartesiano de conjuntos localmente cerrados. 30
3.4. Desigualdad de Bézout para conjuntos localmente cerrados 41

Capítulo 4. Cotas para el Grado de la Intersección Múltiple de Constructibles 42
4.1. Grado de conjuntos constructibles 42
4.2. La historia de la Proposición 2.3 de [**HeSc, 82**] 45
4.3. Demostración de la acotación *i)* del Teorema (4.2.3) 46
4.4. Demostración de la acotación *ii)* del Teorema (4.2.3) 48
4.4.1. Algunos resultados técnicos preliminates 48
4.4.2. Prueba de la cota *ii)* para el grado de la intersección 49
4.5. Conclusiones sobre el Teorema (4.2.3) 50

Apéndice I. Localización. Extensiones Enteras. Dimensión Local. Normalización de Noether i
I.1. Anillos locales y localización i
I.1.1. Anillos de valoración discreta iii
I.2. Extensiones enteras de anillos iii
I.2.1. Teorema de Krull-Cohen-Seidenberg v
I.3. Dimensión de Krull v
I.4. Lema de Normalización de Noether ix
I.5. Lema de Nakayama xi
I.6. Otros aspectos del Concepto de Dimensión xii
I.6.1. Anillos de Artin. Anillos y Módulos Graduados xii
I.6.2. El Polinomio de Hilbert-Samuel xii
I.6.3. Teorema de la Dimensión Local xiii

Apéndice. Bibliografía xv

CAPÍTULO 0

Introducción y Resumen de Contenidos de la Memoria

Índice

0.1. Introducción **i**
0.1.1. Orígenes y tipos esenciales de (des)igualdades de Bézout i
0.1.1.1. **(Des)igualdades de Bézout Extrínsecas** iii
0.1.1.2. **(Des)igualdades de Bézout para Ideales** iv
0.1.1.3. **(Des)igualdades de Bézout Intrínsecas o Geométricas** v
0.1.2. Breve apunte sobre Teoría de la Eliminación. v
0.2. Resumen del Contenido de la Memoria. **vi**
0.2.1. Resumen Capítulo 2 vii
0.2.2. Resumen Capítulo 3 ix
0.2.3. Resumen Capítulo 4 x

0.1. Introducción

La Teoría de la Intersección, las diversas nociones de grado de variedades algebraicas y las Igualdades o Desigualdades de Bézout constituyen una serie de resultados de gran tradición matemática cuyos orígenes se remontan a la Teoría de la Eliminación desde finales del siglo XVIII (en términos más actuales, la Teoría de la Eliminación ha pasado a llamarse Geometría Algebraica Efectiva o Computacional). El interés en acotar los grados de objetos geométricos dados por ecuaciones polinomiales es claro cuando se piensa en algoritmos de resolución de ecuaciones o en algoritmos de eliminación de cuantificadores. Este Trabajo de Fin de Grado no se ocupa de los aspectos algorítmicos ni de las aplicaciones, se centrará en establecer de forma autocontenida, completa y detallada la *Desigualdad de Bézout de Joos Heintz*.

Para presentarla y antes de resumir los contenidos de la memoria, dedicaremos un poco de tiempo a escribir el contexto histórico del resultado principal de nuestra contribución.

0.1.1. Orígenes y tipos esenciales de (des)igualdades de Bézout.

Históricamente, fue Newton (en [Ne, 1680]), quien realizó la primera observación de la fenomenología de dicha noción. Para explicar el contenido de Newton, comenzamos fijando una serie de notaciones.

Denotaremos por K a un cuerpo base y por $\mathbb{K}$ a su clausura algebraica. Denotamos por $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ (o simplemente por $\mathbb{A}^n$ si el cuerpo $\mathbb{K}$ es claro por el contexto) al espacio afín $n-$dimensional sobre $\mathbb{K}$. Denotamos a su vez por $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ el espacio proyectivo de la misma dimensión sobre $\mathbb{K}$. Finalmente, denotamos por $K[X_1, \cdots, X_n]$ el anillo de polinomios de n variables con coeficientes en K. Dado un polinomio $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$, denotamos por $V_{\mathbb{A}}(f) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ la hipersuperficie formada por los ceros de f en $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, en decir el conjunto que viene dado a partir de la relación siguiente:

$$V_{\mathbb{A}}(f) := \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) : f(x) = 0\}.$$

Si $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \cdots, X_n]$ es un ideal, denotamos por $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$ al conjunto de todos ceros comunes a todos los polinomios de $\mathfrak{a}$, es decir:

$$V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) := \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) : f(x) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\} = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V_{\mathbb{A}}(f).$$

Igualmente, si $f \in K[X_0, \cdots, X_n]$ es un polinomio homogéneo, tiene sentido considerar la hipersuperficie proyectiva que define.

Usando la notación clásica por coordenadas homogéneas, sea $x := (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ un punto proyectivo. Dado $f \in K[X_0, \cdots, X_n]$ un polinomio homogéneo y dos representaciones de x, $(x_0, \cdots, x_n)$ y $(y_0, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Como existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda(x_0, \cdots, x_n) = (y_0, \cdots, y_n)$, entonces:

$$f(y_0, \cdots, y_n) = \lambda^{\deg(f)} f(x_0, \cdots, x_n).$$

Por tanto, tiene sentido considerar la ecuación $f(x) = 0$ mediante:

$$f(x_0 : \cdots : x_n) = f(x_0, \cdots, x_n) = 0$$

cuyas soluciones no dependen del representante de x elegido. Definimos así la hipersuperficie proyectiva:

$$V_{\mathbb{P}}(f) := \{x \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) : f(x) = 0\}.$$

Si $\mathfrak{b} \subseteq K[X_0, \cdots, X_n]$ es un ideal graduado (es decir, un ideal que admite un sistema generador formado por polinomios homogéneos), tiene sentido considerar:

$$V_{\mathbb{P}}(\mathfrak{b}) = \{x \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) : f(x) = 0 \text{ es }, \forall f \in \mathfrak{b} \text{ homogéneo }\}.$$

Los objetos $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$ y $V_{\mathbb{P}}(\mathfrak{b})$ anteriores son respectivamente las *variedades algebraicas* afines y proyectivas.

Fijadas estas notaciones, retrocedemos al siglo XVII. En aquel tiempo, se desarrollaban estudios, sobre todo, relacionados con "curvas planas", donde el concepto de "curva" no hace referencia a la variedad algebraica como conjunto de ceros, sino en una forma clásica, a una ecuación que la define. Así, estos autores llamaron curva afín a un polinomio $f \in K[X_1, X_2]$ y una curva proyectiva a un polinomio homogéneo $F \in K[X_0, X_1, X_2]$. La observación de Newton sería la siguiente:

"Dadas dos curvas , $f_1, f_2 \in K[X_1, X_2]$ (salvo un cambio genérico de coordenadas) el conjunto de las soluciones del sistema $(f_1 = 0, f_2 = 0)$, deben satisfacer una ecuación univariada derivada del producto de los grados $\deg(f_1)\deg(f_2)$*."*

Durante el resto del siglo XVII y gran parte del XVIII, muchos autores trataron de profundizar acerca del contenido de dicha afirmación, pero fue É. Bézout quien en sus trabajos [**Be,1764a**], [**Be,1764b**] y [**Be,1767**], dio una forma bastante definitiva al fenómeno observado por Newton. Nótese que al considerar "curva" como ecuación, el concepto de "multiplicidad" interviene, aunque se tendrá que definir correctamente. Nótese también que el propósito de Newton, como el de Bézout y de todos los especialistas en Teoría de la Eliminación del siglo XIX que les siguieron, es el de controlar el número de soluciones de un sistema de ecuaciones, en última instancia, para su resolución algorítmica.

El texto de G. Walker [**Wa, 71**], presenta una versión bastante cercana al concepto clásico de la Igualdad de Bézout, que conserva esta filosofía.

Teorema 0.1.1. (Igualdad de Bézout para curvas).
Sean C_1 y C_2 dos curvas proyectivas planas, expresadas mediante dos polinomios homogéneos $F_1, F_2 \in \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$ de grados d_1 y d_2 respectivamente: $C_1 = V_{\mathbb{P}}(F_1)$ y $C_2 = V_{\mathbb{P}}(F_2)$. Suponiendo que el conjunto $C_1 \cap C_2$ es finito (i.e. no tienen componentes comunes), entonces se tiene que:

$$d_1 \cdot d_2 = \sum_{\zeta \in C_1 \cap C_2} i(C_1, C_2, \zeta),$$

donde $i(C_1, C_2, \zeta)$ representa la multiplicidad de intersección de C_1 y C_2 en el punto $\zeta \in \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$.

Debemos hacer algunas precisiones sobre el enunciado para evitar confusiones de interpretación. Mientras d_1 y d_2 son los grados de los polinomios F_1 y F_2, noción conocida en la época de Bézout, habrá que esperar a J. P. Serre para una introducción correcta de la noción de multiplicidad de intersección[1], en su obra [**Se, 58**] de 1965. Aceptando la definición de multiplicidad de intersección como conocida, debe también observarse que en el enunciado anterior, la noción usada depende del ideal graduado $\mathfrak{a} = (F_1, F_2) = (F_1) + (F_2)$ que define $C_1 \cap C_2 = V_{\mathbb{P}}(\mathfrak{a})$. Es decir, la fórmula debería escribirse como:

$$d_1 \cdot d_2 = \sum_{\zeta \in C_1 \cap C_2} i(\mathfrak{a}, \zeta).$$

La expresión anterior no depende de las curvas C_1 y C_2, sino de las representaciones elegidas, por lo que se trata de una expresión sintáctica. Dicho de otra forma, no depende del elemento semántico, que tiene significado geométrico (las curvas C_1, C_2 y $C_1 \cap C_2$), sino de los ideales (F_1), (F_2) y (F_1, F_2). Por tanto, también sería adecuada una expresión en la que solo intervinieran los polinomios:

$$d_1 \cdot d_2 = \sum_{\zeta \in C_1 \cap C_2} i(F_1, F_2, \zeta).$$

Cabe destacar que el resultado anterior, pasa a ser una desigualdad, cuando pasamos del caso proyectivo al caso afín. Sean $C_1 = V_{\mathbb{A}}(F_1)$, $C_2 = V_{\mathbb{A}}(F_2)$ y $\zeta \in \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ un punto de intersección, entonces:

$$d_1 \cdot d_2 \geq \sum_{\zeta \in C_1 \cap C_2} i(F_1, F_2, \zeta).$$

A partir de la Identidad de Bézout para curvas, muchos son los autores intentaron generalizaciones para objetos geométricos o ideales de dimensión superior, con un cuerpo algebraicamente cerrado como soporte. Nótese, al hilo de esta consideración, que el resultado no es cierto si el cuerpo base no es algebraicamente cerrado: es un resultado falso en el caso diofántico (punto $\mathbb{Q}$-racionales en $\mathbb{A}^n(\mathbb{Q})$ o $\mathbb{P}_n(\mathbb{Q})$) o en el caso de la Geometría Algebraica Real (variedades en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ o $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$).

[1] Multiplicidad de intersección en $\zeta \in C_1 \cap C_2$: Dimensión como espacio vectorial del anillo de gérmenes de funciones regulares en ζ cocientado por el ideal suma $(F_1) + (F_2) = (F_1, F_2)$. $i((F_1, F_2), \zeta) := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{X,\zeta}/(F_1, F_2)$, con $X = \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$.

Para entender, mediante una sencilla clasificación, las diversas extensiones de la Igualdad de Bézout a variedades de cualquier dimensión, distinguimos los siguientes tres tipo básicos:

- (Des)igualdades de Bézout Extrínsecas.
- (Des)igualdades de Bézout para Ideales.
- (Des)igualdades de Bézout Intrínsecas o Geométricas.

0.1.1.1. (Des)igualdades de Bézout Extrínsecas.

En las desigualdades extrínsecas, las acotaciones se hacen mediante grados de los sistemas de ecuaciones involucrados y no mediante grados asociados a ideales o a las variedades algebraicas. Son muchos los resultados de este tipo que pueden encontrarse en la literatura, y destacamos autores como B. Iversen y B.L. van der Waerden como ejemplos.

Para emplear un resultado de tipo extrínseco, retomamos, en lenguaje más moderno, el resultado del propio Bézout consideró, para el caso multivariado.

Supongamos $K = \mathbb{K}$ y para un entero positivo $d \in \mathbb{N}$ denotamos mediante:

$$H_d(X_0, \cdots, X_n) := \{f \in K[X_0, \cdots, X_n] : f \text{ es homogéneo de grado } d\} \cup \{0\}$$

$$P_d(X_1, \cdots, X_n) := \{g \in K[X_1, \cdots, X_n] : \deg(g) \leq d\}.$$

Escribiremos símplemente H_d y P_d, cuando no haya confusión sobre el número de variables involucradas. Ambos conjuntos son espacios vectoriales de la misma dimensión, dada por el número combinatorio:

$$\dim(H_d) = \dim(P_d) = \binom{d+n}{n}.$$

Además, se identifican por los procesos de afinización (sustituir X_0 por 1) y homogeneización de grado d.

Consideramos $(d) = (d_1, \cdots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ una familia de grados y definimos el conjunto de los sistemas de n ecuaciones homogéneas siguiente:

$$\mathcal{H}_{(d)} := \prod_{i=1}^{n} H_{d_i}(X_0, \cdots, X_n).$$

Igualmente, podríamos definir $\mathcal{P}_{(d)}$ para las ecuaciones afines. Tanto $\mathcal{H}_{(d)}$ como $\mathcal{P}_{(d)}$ pueden identificarse con espacios afines de la forma $\mathbb{A}^{N_{(d)}}(\mathbb{K})$, donde $N_{(d)}$ se corresponde con:

$$N_{(d)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i+n}{n}.$$

Tiene sentido considerar en $\mathcal{H}_{(d)}$ y $\mathcal{P}_{(d)}$ propiedades genéricas (es decir, que se verifican salvo una variedad algebraica afín propia). El enunciado extrínseco podría resumirse del modo siguiente:

Teorema 0.1.2. (Des)igualdades de Bézout extrínsecas. *Con las nociones precedentes:*

i) Sea $f = (f_1, \cdots, f_n) \in \mathcal{H}_d$ una lista de polinomios homogéneos tal que $V_{\mathbb{P}}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{P}}(f_n) \subseteq \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ es un conjunto finito. Entonces,

$$\sharp\left(V_{\mathbb{P}}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{P}}(f_n)\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \deg(f_i) = \prod_{i=1}^{n} d_i = \mathcal{D}_{(d)}$$

El número $\mathcal{D}_{(d)}$ se suele denominar "Número de Bézout".

ii) La anterior desigualdad es genéricamente en $\mathcal{H}_{(d)}$ una igualdad. Es decir, existe $\Sigma_{(d)} \subseteq \mathcal{H}_{(d)}$ una variedad algebraica propia (viendo $\mathcal{H}_{(d)}$ como espacio afín) tal que $\forall f = (f_1, \cdots, f_n) \in \mathcal{H}_{(d)} \backslash \Sigma_{(d)}$:

$$\sharp\left(V_{\mathbb{P}}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{P}}(f_n)\right) = \prod_{i=1}^{n} d_i$$

iii) El resultado i) es cierto para el caso afín. es decir, dado $f = (f_1, \cdots, f_n) \in \mathcal{P}_{(d)}$, tal que $V_{\mathbb{A}}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{A}}(f_n) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ es un conjunto finito, entonces

$$\sharp\left(V_{\mathbb{A}}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{A}}(f_n)\right) \leq \prod_{i=1}^{n} d_i = \mathcal{D}_{(d)}$$

iv) El resultado ii) es también cierto para el caso afín. Es decir, existe una variedad algebraica afín propia $\widetilde{\Sigma}_{(d)} \subseteq \mathcal{P}_{(d)}$ tal que para cada $f = (f_1, \cdots, f_n) \in \mathcal{P}_{(d)} \setminus \widetilde{\Sigma}_{(d)}$, se verifica que:

$$\sharp\left(V_{\mathbb{A}}(f_1) \cap \cdots \cap V_{\mathbb{A}}(f_n)\right) = \mathcal{D}_{(d)} = \prod_{i=1}^{n} d_i.$$

Cabe destacar que en este manuscrito no nos ocuparemos de (des)igualdades de Bézout extrínsecas.

0.1.1.2. (Des)igualdades de Bézout para Ideales.

Se trata del ámbito con menos avances históricos por lo negativo de los resultados. Si en los resultados de tipo extrínseco lo que importa y define las cotas son las ecuaciones involucradas, en este caso lo que importa son los propios ideales generados por los polinomios que dan lugar a dichos sistemas de ecuaciones. Así, recuperando la idea de Bézout para curvas, lo que se tendría sería el ideal $\mathfrak{a} = (F)$, el ideal $\mathfrak{b} = (G)$, con $F, G \in K[X_0, \cdots, X_n]$ y el ideal suma: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (F) + (G) = (F, G)$, generado por $\{F, G\}$. En las condiciones de Bézout, como $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ideales principales, uno podría tratar de establecer la siguiente desigualdad de ideales graduados.

$$\deg(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \leq \deg(\mathfrak{a}) \cdot \deg(\mathfrak{b}). \tag{0.1.1}$$

Dado que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ son graduados, siguiendo los planteamientos de [Se, 58] sobre multiplicidades, el grado de un ideal graduado $\mathfrak{a}$, contando multiplicidades, estaría determinado por el coeficiente director del polinomio de Hilbert (ver Apéndice I) del anillo graduado cociente: $K[X_0, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}$. Este es el punto de partida de [MasWüs, 71] (y también lo serán en [Vo, 84]). Desafortunadamente, el polinomio de Hilbert de un ideal graduado está altamente ligado a sus componentes primarias aisladas (correspondientes a primos minimales) y esto hace que se olviden las componentes inmersas que sí pueden afectar a la suma.

Las ideas de [MasWüs, 71] han sido retomadas recientemente por [HHPS, 21] para tratar la noción de grado de un ideal propio sea o no afín. El Ejemplo 8 de [HHPS, 21], demuestra que una *Desigualdad de Bézout para ideales es inestable*, es decir, una desigualdad como la de la identidad (0.1.1) es en general falsa. En dicho artículo se escribe la familia de ideales $\{\mathfrak{a}_k \subseteq K[X_1, X_2] : k \in \mathbb{N}\}$, dados mediante:

$$\mathfrak{a}_k := (X_1^k, X_1X_2) \subseteq K[X_1, X_2].$$

Nótese que $\mathfrak{a}_k$ no es principal para $k \geq 1$. Estos ideales admiten una descomposición primaria minimal:

$$\mathfrak{a}_k = (X_1) \cap (X_1^k, X_2),$$

donde $\mathfrak{q}_1 = (X_1)$ es una componente primaria aislada y $\mathfrak{q}_2 = (X_1^k, X_2)$ es la componente primaria inmersa. Vista como variedad afín, $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}_k)$ es la recta $V_{\mathbb{A}}(X_1)$, aunque el punto $(0, 0)$ está inmerso con multiplicidad debida a $\mathfrak{q}_2$. El polinomio de Hilbert, que solo depende de $\mathfrak{q}_1$, nos da un grado $\deg(\mathfrak{a}_k) = 1$.

De otro modo, consideramos el ideal principal $\mathfrak{b} = (X_2)$, generado por la recta horizontal, por tanto tiene grado $\deg(\mathfrak{b}) = 1$. Sin embargo, se tiene que $\mathfrak{a}_k + \mathfrak{b} = (X_1^k, X_1X_2, X_2) = (X_1^k, X_2)$.

En [HHPS, 21] se prueba que $\deg(\mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}) = k$ y por tanto no es posible tener una desigualdad de ideales del tipo (0.1.1), ya que para $k \geq 2$, se verifica que:

$$k = \deg(\mathfrak{a}_k + \mathfrak{b}) \not\leq \deg(\mathfrak{a}_k)\deg(\mathfrak{b}) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Por ello, en el caso de ideales se obtienen solamente resultados de tipo extrínseco, como el siguiente que puede verse en [HHPS, 21].

Definición 1. *Sea R un anillo y sea $\{f_1, \cdots, f_k\} \subseteq R$ una sucesión de k elementos de R.*

i) Decimos que $\{f_1, \cdots, f_n\}$ es una sucesión regular en R si verifica que:
- *$(f_1, \cdots, f_k) \neq (1)$.*
- *f_1 no es divisor de cero en R.*
- *Para cada i, $2 \leq i \leq k$, f_i no es divisor de cero en el anillo cociente:*

$$R/(f_1, \cdots f_{i-1})$$

ii) Si $\mathfrak{a} \subseteq R$ es un ideal propio, decimos que $f_1, \cdots, f_k$ es una sucesión regular con respecto a $\mathfrak{a}$ si las clases residuales $\{f_1 + \mathfrak{a}, \cdots, f_k + \mathfrak{a}\}$ forman una sucesión regular en $R/\mathfrak{a}$.

Con una adecuada definición de grado de un ideal en el caso no graduado, que no introducimos por no ser el objetivo de este TFG, en [HHPS, 21] se prueba el siguiente resultado para ideales:

Teorema 0.1.3. *Sea $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \cdots, X_n]$ un ideal propio, no necesariamente graduado, y sea $f_1, \cdots, f_k \in K[X_1, \cdots, X_n]$ una sucesión regular con respecto a $\mathfrak{a}$. Entonces, se verifica:*

$$\deg(\mathfrak{a} + (f_1, \cdots, f_k)) \leq \deg(\mathfrak{a}) \prod_{i=1}^{k} \deg(f_i).$$

0.1.1.3. (Des)igualdades de Bézout Intrínsecas o Geométricas.

En este subgrupo es en el que se centra este Trabajo de Fin de Grado, siendo la Desigualdad de Bézout de [He, 83] el objeto principal de estudio. La motivación básica de este acercamiento a Bézout parte de la idea de que el verdadero objeto de estudio es el objeto geométrico o semántico (las variedades algebraicas) y no tanto el algebraico (es decir, la forma más o menos acertada de representar las ecuaciones sintácticas que definen nuestro objeto).

Retomando el resultado original de Bézout, tenemos las curvas $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{K})$ y podemos definir su grado como el grado de los "mejores" polinomios que las definen. Es decir, sean $F_1, F_2 \in K[X_0, X_1, X_2]$, los polinomios que dan lugar a los ideales siguientes, donde (.) representa le "ideal generado por":

$$(F_1) = I_{\mathbb{P}}(C_1) = (\{f \in K[X_0, X_1, X_2] \text{ homogéneo } : f(x) = 0, \forall x \in C_1\})$$

$$(F_2) = I_{\mathbb{P}}(C_2) = (\{f \in K[X_0, X_1, X_2] \text{ homogéneo } : f(x) = 0, \forall x \in C_2\})$$

Definimos el grado de C_1 y C_2 respectivamente como $\deg(C_1) = \deg(F_1)$ y $\deg(C_2) = \deg(F_2)$. Nótese que al ser (F_1) y (F_2) ideales radicales (por el Nullstellensats), no contienen multiplicidades ni en C_1, ni en C_2. Si $C_1 \cap C_2$ es finito, definimos su grado como su cardinal, es decir:

$$\deg(C_1 \cap C_2) := \sharp(C_1 \cap C_2) < \infty.$$

Entonces, la igualdad de Bézout clásica implicaría:

$$\deg(C_1 \cap C_2) = \sharp(C_1 \cap C_2) \leq \deg(C_1) \cdot \deg(C_2). \tag{0.1.2}$$

Este resultado es consecuencia directa de los trabajos del propio Bézout en el siglo XVIII.

Ahora bien, ¿es posible tener un resultado similar a (0.1.2) cuando no nos restringimos a curvas (i.e en dimensión superior)?, ¿ es posible tener un resultado como (0.1.2) incluso si $C_1 \cap C_2$ no es un conjunto finito de puntos?, ¿como se definirá el grado de una variedad algebraica cualquiera cuando su ideal no es principal?

De manera simultánea e independiente, siguiendo motivaciones matemáticas completamente distintas, tres autores respondieron a estas preguntas a comienzos de los años 80 del siglo pasado, para lo cual desarrollaron diferentes nociones del grado de una variedad algebraica.

- W. Wogel en [Vo, 84], utiliza como ya se había hecho con anterioridad, una noción de grado basada en el coeficiente director del polinomio de Hilbert, para desarrollar una prueba de la desigualdad de Bézout en el caso proyectivo.
- W. Fulton en [Fu, 84], mediante teoría de divisores, conservando la noción de multiplicidad de intersección, plantea una generalización de la igualdad original de Bézout para dimensión arbitraria.
- J. Heintz en [He, 83], introduce una noción de grado para conjuntos algebraicos afines a través del grado de extensiones de cuerpos, y es equivalente a la de Vogel a través de la clausura proyectiva.

El propósito de este Trabajo de Fin de grado es realizar una deconstrucción completa y autocontenida de la Desigualdad de Bézout Geométrica de [He, 83].

En el texto de esta introducción resumiremos los principales resultados expuestos en la memoria. Debe hacerse notar que no es nuestro propósito realizar una comparativa entre los tres resultados anteriores, ni mostrar la relación entre ellos. Nos centraremos solamente en el de [He, 83], dejando a un lado los otros dos. Pero antes, se plantearán algunas nociones de Teoría de Eliminación, con el fin de motivar la introducción de los conjuntos constructibles (y también los localmente cerrados como caso particular), que aparecerán de forma recurrente a lo largo de la memoria.

0.1.2. Breve apunte sobre Teoría de la Eliminación.

La Teoría de la Eliminación se corresponde con el tratamiento algorítmico de la Geometría Algebraica cuando este es posible. Los polinomios, surgen de forma natural a través de la manipulación de expresiones de primer orden de la teoría (i.e. involucran cuantificadores y operaciones elementales[2]).

La expresión general de una formula de primer orden en lenguaje de cuerpos algebraicamente cerrados es:

$$Q_1 X_{i_1}, \cdots, Q_r X_{i_r} : \bigvee_{i=1}^{s} \left(\left(\bigwedge_{j=1}^{k} (f_{i,j} = 0) \right) \bigwedge \left(\bigwedge_{\ell=1}^{t} (g_{i,\ell} \neq 0) \right) \right), \ Q_i \in \{\exists, \forall\}, \ f_{i,j}, g_{i,\ell} \in \mathbb{K}[X_0, \cdots, X_n].$$

[2]En el caso de cuerpos algebraicamente cerrados: Variables $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, constantes $\{+1, -1, 0\}$, operaciones del anillo $\{+, \cdot\}$, booleanas $\{\wedge, \vee, \neg\}$, inversiones $\{^{-1}\}$, condiciones de signo $\{= 0\}$ y cuantificadores $\{\forall, \exists\}$.

Interpretando las fórmulas a través de conjuntos (es decir, ecuaciones con variedades algebraicas) e identificando los símbolos: $\vee \equiv \cup$ y $\wedge \equiv \cap$, se llega a los constructibles (uniones finitas de intersecciones de abiertos y cerrrados de la topología), que se corresponden con una fórmula de libre de cuantificadores.

El objetivo fundamental de la Teoría de la Eliminación es la construcción de algoritmos que "eliminen" los cuantificadores de las fórmulas de ecuaciones polinomiales. Cabe destacar que ya que $\forall \equiv \neg(\exists\neg)$, un buen punto de inicio es el estudio de la eliminación de un bloque de cuantificadores existenciales. Sin embargo, estos algoritmos se caracterizan por tener complejidades muy altas. El fundamento teórico viene dado por el siguiente teorema, en la versión de [**Ch, 64-65**].

Teorema 0.1.4. (Teorema Fundamental de la Teoría de la Eliminación). *Sea $C \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ un constructible y sea $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^r$ una aplicación polinomial. Entonces $\pi(C) \subseteq \mathbb{K}^r$ es un constructible.*

Este resultado implica que si $C \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ viene dado por una formula $\Phi(X_0, \cdots, X_n)$ sin cuantificadores, entonces existe una formula Ψ libre de cuantificadores, de forma que la imagen $\pi(C)$ verifica que:

$$\pi(C) = \{y \in \mathbb{K}^r : \exists x \in \mathbb{K}^{n+1}, \Phi(x) = y\} = \{(y_1, \cdots, y_r) \in \mathbb{K}^r : \Psi(y_1, \cdots, y_r)\}.$$

Por tanto, toda fórmula con cuantificadores existencias es equivalente a una fórmula sin cuantificadores.

Teorema 0.1.5. *Toda fórmula de primer orden del lenguaje de cuerpos algebraicamente cerrados es semánticamente equivalente a una fórmula libre de cuantificadores. Luego la teoría es completa (cierto equivale a demostrable). Además es decidible, es decir, existe un algoritmo que elimina los cuantificadores.*

Una de las estrategias más comúnmente utilizadas para eliminar un bloque de cuantificadores existenciales es el uso del llamado Nullstellensatz Efectivo, motivado por el problema X de D. Hilbert y desarrollado por su alumna G. Hermann en su obra [**He, 1926**]. El resultado podría resumirse como:

Teorema 0.1.6. *Existe una función $D : \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que verifica las siguientes propiedades.*
Sea $\{f_1, \cdots, f_s\}$ un conjunto finito de elementos de $K[X_1, \cdots, X_n]$. Sea d el máximo de los grados de dichos polinomios. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ la variedad algebraica $V := V_{\mathbb{K}}(f_1, \cdots, f_s)$ de ceros comunes. Supongamos que $\sharp(K) \geq 2d + 1$. Entonces son equivalentes:

$$\exists x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}), f_1(x) = 0, \cdots, f_s(x) = 0,$$

y $\exists g_1, \cdots, g_s \in K[X_1, \cdots, X_n]$, tales que:

$$\deg(g_1) \leq D(d, n, s) \;\; y \;\; 1 = g_1 f_1 + \cdots + g_s f_s.$$

Además $D(d, n, s)$ se puede escoger satisfaciendo que $D(d, n, s) \leq (sd)^{2^n}$.

Este resultado ha sido ámpliamente estudiado por numerosos autores, tratando de reducir el tamaño de la cota para $D(d, n, s)$. A finales de los 80 del pasado siglo, de manera independiente, los siguientes autores: W. D. Brownawell en [**Br,87**], L. Caniglia, A. Galligo y J. Heirtz en [**CGH,89**] y J. Kollàr en [**Kol, 88**]; llegan a una acotación fina de la cota $D(d, n, s)$ de G. Hermann:

$$D(d, n, s) \leq \max\{3, d\}^n$$

0.2. Resumen del Contenido de la Memoria.

La memoria se compone, además de un Capítulo 1, de Preliminares de tres capítulos esenciales.

- El Capítulo 2 se dedica a establecer con todo detalle, y de forma totalmente autocontenida, la noción de grado geométrico de una variedad algebraica afín, para lo cual se introducen los conjuntos localmente cerrados para la topología de Zariski.
- El Capítulo 3 se dedica a probar la desigualdad de Bézout de [**He, 83**] para conjuntos localmente cerrados. Es de destacar que el elemento teórico más relevante es la prueba detallada de la igualdad $\deg(V \times W) = \deg(V) \cdot \deg(W)$ (ver Teorema 4.1.6), que se corresponde con la clave de la demostración de Heintz. En el manuscrito original, esta igualdad es presentada de forma un tanto imprecisa. Aquí reharemos los detalles de la prueba de forma completa y autocontenida.
- El Capítulo 4 se dedica a dar estimaciones de cotas del grado de la intersección de varios constructibles. En esencia, en [**He, 85**], J. Heintz observa que sus resultados en [**He, 83**] no son válidos para constructibles, a pesar de haberlos presentado como tal. En [**HeSc, 82**] se usa la versión de la desigualdad de Bézout para variedades afines de [**He, 83**] y [**He, 85**], para probar una cota para el grado de la intersección de varios conjuntos algebraicos: la Proposición 2.3, que se recoge en la Proposición (4.2.1) del trabajo. La prueba de dicha proposición no se puede generalizar directamente para constructibles. Para solventar este problema, introducimos el Teorema (4.2.3) donde probamos tres cotas superiores originales para el grado de una intersección de varios constructibles.

El material usado está, en parte, tomado de los manuscritos [**Pa, 19**] y [**PaSe, 20**].

El manuescrito se completa con un Apéndice I, en el que se recogen algunos resultados elementales de Álgebra Conmutativa y Geometría Algebráica, así como algunos apuntes sobre Dimensión Local.

Cabe destacar, que a lo largo del trabajo se va a asumir que el cuerpo base K es algebraicamente cerrado.

Ahora, pasamos a describir capítulo a capítulo, los principales contenidos de la memoria.

0.2.1. Resumen Capítulo 2.
"La Noción de Grado de un Localmente Cerrado Afín"

Como ya hemos destacado, muchos han sido los intentos de abordar las generalizaciones de las ideas de É. Bézout. Cuando nos enfrentamos al estudio de las generalizaciones de naturaleza intrínseca, nuestro objeto primario es una variedad algebraica V (afín o proyectiva) y nuestro objetivo pasa por introducir una noción natural de grado que permita probar una desigualdad de Bézout.

Muchas son las nociones intuitivas y, a veces, imprecisas que podemos encontrar en la literatura del siglo XIX. Tales nociones imprecisas hacen que, en la tradición matemática, se tenga la impresión de que se "conoce" o se "entiende". Esto hace que, como ya se ha mencionado, tres matemáticos, siguiendo motivaciones distintas, llegaran de forma independiente a definir nociones de grado independientes en la década de los 80 del siglo pasado: W. Vogel [**Vo, 84**], W. Fulton [**Fu, 84**] y J. Heintz [**He, 83**].

La definición dada por este último es aquella que se va a tratar de desgranar y clarificar en este trabajo.

En el lenguaje de la Geometría Algebraica del siglo XIX, podríamos resumir la noción de grado de una variedad algebraica afín irreducible $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ como:

"El grado de V es el cardinal genérico de una fibra genérica obtenida a través de una proyección lineal genérica asociada a la dimensión de V."

El abuso de término "genérico" aporta bastante confusión en esta preudo-definición, así que habría que precisarla de algún modo. Para comenzar, recordemos que las variedades algebraicas afines definen una única topología sobre $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ conocida como *Topología de Zariski* y cuyo conjunto de cerrados $\mathcal{C}(\mathscr{T}_Z)$ está formado precisamente por las variedades algebraicas, es decir:

$$\mathcal{C}(\mathscr{T}_Z) = \{V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) : \mathfrak{a} \subseteq \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n], \text{ con } \mathfrak{a} \text{ un ideal}\}.$$

En el Capítulo 1 se exponen algunas propiedades básicas de esta topología. Dado un subconjunto afín $S \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, denotamos por $\overline{S}^z$ su clausura para la topología de Zariski (que es una variedad algebraica). Si los conjuntos cerrados son las variedades algebraicas, los abiertos son los complementarios de las variedades algebraicas y los conjuntos *localmente cerrados* en $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ se corresponden con las intersecciones de un abierto y un cerrado de la topología. Por otro lado, los *constructibles* se obtienen a partir de uniones finitas de conjuntos localmente cerrados. Es importante aclarar que los constructibles no siempre son localmente cerrados, como se muestra en el Ejemplo (3.2.1). Resultan de especial interés, los *localmente cerrados irreducibles*, intersección de un abierto y un cerrado irreducible.

A lo largo del trabajo se va a tener como herramienta fundamental los *morfismos regulares o aplicaciones polinomiales* $\varphi : V \subseteq \mathbb{A}^n \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$, definidas como $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x))$, entre variedades irreducibles, donde $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ son funciones polinomiales. Como se explica con más detalle en el Capítulo 1, cada variedad algebraica irreducible V, tiene asociada una $K-$álgebra $K[V]$ de *funciones polinomiales o regulares*, que además es dominio de integridad. Esto permite definir su cuerpo de fracciones $K(V)$, que se corresponde con el *cuerpo de funciones racionales sobre* V.

Asociado a un morfismo regular como φ, tenemos un morfismo de $K-$álgebras dado por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & K[W] & \longrightarrow & K[V] \\ & h & \longmapsto & h \circ \varphi \end{array}$$

Cuando la clausura Zariski de la imagen de un morfismo regular coincide con la variedad de llegada, este se denomina *dominante* y como se muestra en la Proposición (1.3.4), induce un monomorfismo de $K-$álgebras. Si V y W son irreducibles, φ^* admite una extensión natural al cuerpo de fracciones.

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* : & K(W) & \longrightarrow & K(V) \\ & \dfrac{h_1}{h_2} & \longmapsto & \dfrac{h_1 \circ \varphi}{h_2 \circ \varphi} \end{array}$$

Para concluir esta terminología, llamaremos dimensión de una variedad algebraica, a su dimensión de Krull como espacio topológico. Esta noción se presenta con más detalle en la sección I.3 del Apéndice I.

Por tanto, un morfismo dominante entre variedades irreducibles $\varphi : V \longrightarrow W$ se transforma en una extensión de cuerpos: $\varphi^* : K(W) \hookrightarrow K(V)$. Si además estas tienen la misma dimensión, entonces la

extensión es finita (finitamente generada y algebraica) y podemos considerar su grado como extensión:

$$[K(V) : K(W)].$$

La primera observación de [**He, 83**] es que dicho grado acota al cardinal de las fibras finitas. Esto es lo que desarrollamos con todo detalle en la Sección 2.2. La sección se completa con resultados necesarios para este resultado. Los resultados principales son la Proposición (2.2.6) y el Teorema (2.2.11). Ambos se combinan en el siguiente resultado.

Teorema 0.2.1. (El Cardinal de la Fibra Genérica). *Supongamos K un cuerpo algebraicamente cerrado. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ dos conjuntos localmente cerrados irreducibles de la misma dimensión. Sea $\varphi : V \longrightarrow W$ un morfismo dominante. Entonces,*

i) Para cada $y \in W$ tal que la fibra $\varphi^{-1}(\{y\})$ sea un conjunto finito, se tiene que:

$$\sharp\,(\varphi^{-1}(\{y\})) \leq [K(V) : K(W)].$$

ii) Si además la extensión de cuerpos dada por $\varphi^* : K(W) \hookrightarrow K(V)$ es separable, existe un abierto Zariski $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ tal que $\mathcal{U} \cap W \neq \emptyset$ y para cada $y \in \mathcal{U} \cap W$, la fibra satisface:

$$\sharp\,(\varphi^{-1}(\{y\})) = [K(V) : K(W)].$$

Nótese que esto significa que si la fibra de un morfismo es finita, su cardinal está acotado por por el grado de la extensión de cuerpos y genéricamente en W, el cardinal de la fibra coincide con el grado de la extensión de cuerpos. Damos una prueba completa, original y autocontenida de este resultado, que está vagamente inspirado en el Teorema de la Dimensión de las Fibras, cambiando dimensión por cardinal.

El resultado anterior carece de una buena interpretación geométrica a priori. Sin embargo, será la clave para dar una construcción de una transformación apropiada que nos permitirá obtener esta interpretación, como se expone en la Sección 2.3. Si $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ es una variedad algebraica irreducible de dimensión r, sea $\mathcal{M}_{r\times n}(K)$ el espacio de matrices con r filas y n columnas. Nótese que $\mathcal{M}_{r\times n}(K) = \mathbb{A}^{rn}(K)$ y que cada uno de sus elementos define una aplicación lineal de $\mathbb{A}^n(K)$ a $\mathbb{A}^r(K)$.

Podemos definir así el siguiente morfismo regular, donde x representa un vector columna.

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{A}^{rn} \times V & \longrightarrow & \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r \\ & (M, x) & \longmapsto & (M, Mx) \end{array}$$

En la Proposición (2.3.1) se prueba que Φ es un morfismo dominante entre dos variedades algebraicas irreducibles de la misma dimensión: $r(n+1)$. Además, el morfismo de cuerpos generado a partir de él:

$$\Phi^* : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) \hookrightarrow K(\mathbb{A}^{rn} \times V),$$

es una extensión finita y separable. Nótese que Φ considera todas las aplicaciones lineales posibles sobre V en un espacio de dimensión r, $\mathbb{A}^r(K)$. Por el teorema anterior concluimos que:

i) Dada $M \in \mathcal{M}_{r\times n}(K)$ y $b \in \mathbb{A}^r(K)$, si la fibra $\Phi^{-1}(\{(M, b)\})$ es finita, se tiene que:

$$\sharp\,\Phi^{-1}(\{(M, b)\}) \leq [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)].$$

ii) Además, existen abiertos $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{M}_{r\times n}(K)$ y $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{A}^r(K)$, tales que para cada $(M, b) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, la fibra genérica de Φ sobre (M, b) satisface que:

$$\sharp\,\Phi^{-1}(\{(M, b)\}) = [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)].$$

Además, el grado de la extensión de cuerpos $[K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)]$ verifica que:

"El cardinal genérico de la fibra genérica de Φ sobre puntos (M, b) en $\mathcal{M}_{r\times n}(K) \times \mathbb{A}^r(K)$ es igual a $[K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)]$"

Así llegamos a la definición de [**He, 83**] de una variedad algebraica irreducible.

Definición 2. (Grado de una Variedad Algebraica Afín). *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una variedad algebraica irreducible. Con las nociones precedentes, llamaremos grado de V al grado de la extensión de cuerpos finita y separable siguiente, donde $r = \dim(V)$.*

$$\deg(V) = [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)].$$

Si $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ es una variedad algebraica cualquiera llamamos grado de V a la suma de los grados de sus componentes irreducibles. Si $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ es un localmente cerrado, llamamos grado de V al grado de su clausura Zariski. El hecho de que esta última equivalencia esté bien definida, se obtiene a partir de la construcción de la Sección 2.4.1, donde se utiliza la siguiente interpretación geométrica del grado.

Supongamos $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ irreducible. Dada una matriz $M \in \mathcal{M}_{r\times n}(K)$ y un vector $b \in \mathbb{A}^r(K)$, denotamos por $\mathbb{G}(M, b)$ a la variedad afín lineal de codimensión menor o igual que r que definen, es decir:

$$\mathbb{G}(M, b) = \{x \in \mathbb{A}^n : Mx - b = 0\}.$$

Observamos que, el cardinal de la fibra de Φ satisface que:

$$\Phi^{-1}(\{(M,b)\}) = \{M\} \times (V \cap \mathbb{G}(M,b)) \Longrightarrow \sharp\left(\Phi^{-1}(\{(M,b)\})\right) = \sharp(V \cap \mathbb{G}(M,b)).$$

Por tanto, consideramos $\mathbb{G}(n,r)$ la "Grassmaniana" de variedades afines lineales de codimensión a lo sumo r. Consideramos en $\mathbb{G}(n,r)$ la topología cociente inducida por la topología de Zariski de $\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ por la acción del grupo general lineal con coeficientes en K, y tenemos que:

i) Para cada variedad afín lineal $L \in \mathbb{G}(n,r)$ si la intersección $L \cap V$ es finita, se tiene que:

$$\sharp(L \cap V) \leq \deg(V) = [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)].$$

ii) Existe un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{G}(n,r)$ para la topología cociente, tal que $\forall L \in \mathcal{U}$, $\sharp(L \cap V)$ satisface que:

$$\sharp(L \cap V) = \deg(V) = [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)].$$

Esto nos da una definición más clásica del grado de un conjunto localmente cerrado:

$$\deg(V) = \max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(n,r) \text{ y } \sharp(L \cap V) < \infty\}. \tag{0.2.1}$$

El esfuerzo técnico realizado hasta aquí no solamente será útil en resultados posteriores, sino que permite concluir que:

- El grado de una variedad irreducible definido como el máximo de la expresión (0.2.1) es finito. Nótese que esto no es evidente a priori.
- Para una elección genérica de la variedad afín lineal $L \in \mathbb{G}(n,r)$, se tendrá que: $\sharp(L \cap V) = \deg(V)$.

Una vez establecida correctamente la noción, se prueban algunos resultados elementales como los descritos en la Proposición (2.4.11), la subaditividad (Proposición 2.4.14), o la Proposición (2.4.13) que afirma que las propiedades de generalidad y acotaciones anteriores no solo son válidas para localmente cerrados irreducibles, sino también para localmente cerrados equidimensionales (i.e. aquellos cuya clausura Zariski tiene todas sus componentes de la misma dimensión).

0.2.2. Resumen Capítulo 3.

"Desigualdad de Bézout para Localmente Cerrados: Grado del Producto Cartesiano"

Una vez establecida en el capítulo anterior una noción apropiada de grado de un localmente cerrado afín, estamos en condiciones de probar la desigualdad de Bézout Geométrica de [**He, 83**].

Tres son los pilares básicos sobre los que reposa la prueba de Heintz y que resumimos del modo siguiente:

i) Estimar el grado de la intersección de una variedad afín $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$, con una variedad afín $L \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ de cualquier dimensión.
ii) Acotar el grado de la imagen de una variedad algebraica afín $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ por una aplicación lineal: $\mathscr{L} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$.
iii) Determinar el grado del productor cartesiano $V \times W$ de $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$, dos variedades afines.

Los tres pilares están descritos en orden de dificultad. Así como el grado se porta de manera razonable para las imágenes inversas de variedades, el comportamiento de la dimensión de imágenes directas presenta mayores dificultades. De hecho, este aspecto fue estudiado en el Remark 2,(2) de [**He, 83**], con una afirmación falsa que luego se arrastró a lo largo de todas las pruebas de dicho artículo, obligando a publicar el CORRIGENDUM en [**He, 85**].

Consideramos $\mathscr{L} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ una aplicación lineal entre dos espacios afines, $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una variedad afín lineal y queremos estimar el grado de la imagen $\mathscr{L}(V) \subseteq \mathbb{A}^m(K)$. La dificultad radica en el hecho de que $\mathscr{L}(V)$ no es en general una variedad algebraica, ni siquiera un localmente cerrado, como se muestra por ejemplo en la Semi-Croix de Berny que se describe en el Ejemplo (3.2.1). Además se prueba también en este ejemplo, no solo que $\mathscr{L}(V)$ es un constructible como afirma el Teorema de Chevalley (3.2.2), sino que es irreducible como espacio topológico noetheriano, pero sin ser localmente cerrado. Definiendo el grado de un constructible como el grado de su clausura Zariski (propuesta de [**He, 83**]) no se satisfaría la desigualdad de Bézout para constructibles. Si por el contrario, se define el grado de forma apropiada para la desigualdad de Bézout, entonces no es cierto que $\deg(\mathscr{L}(V)) \leq \deg(V)$ con las notaciones precedentes (ver Ejemplo (3.2.1) del capítulo siguiente). Lo más que se puede afirmar es el resultado que se recoge en la Proposición (3.2.6), y que planteamos a continuación:

Proposición 0.2.2. *Si $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ es un localmente cerrado y $\mathscr{L} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ es una aplicación lineal:*

$$\deg(\overline{\mathscr{L}(V)}^z) \leq \deg(V).$$

Con estos resultados, establecidos, pasamos a la prueba del pilar de la Desigualdad de Bézout de Heintz: el resultado más exigente y dificultoso, clave para su demostración completa: La propiedad *iii*). La dificultad para este aspecto se entiende mejor si consideramos $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ variedad algebraica afín de dimensión r y $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ variedad algebraica afín de dimensión s. Consideramos el producto cartesiano $V \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}(K)$ de dimensión $r+s$ y nos retrotraemos a la definición de grado establecida en el Capítulo 2.

Para analizar el grado de $V \times W$, debemos considerar matrices $M \in \mathcal{M}_{(r+s)\times(n+m)}(K)$ y puntos $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{A}^{s+r}(K)$. Descompongamos las matrices en submatrices de la talla apropiada:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & B \\ C & M_2 \end{pmatrix} \text{ donde } \begin{matrix} M_1 \in \mathcal{M}_{r\times n}(K) & B \in \mathcal{M}_{s\times n}(K) \\ C \in \mathcal{M}_{r\times m}(K) & M_2 \in \mathcal{M}_{s\times m}(K). \end{matrix}$$

Si consideramos $B = 0$ y $C = 0$ (las matrices nulas) para elecciones genéricas (en abiertos Zariski) de las matrices M_1 y M_2 y los puntos genéricos $b_1 \in \mathbb{A}^s(K)$ y $b_2 \in \mathbb{A}^r(K)$, se puede considerar el conjunto de puntos en la intersección de $V \times W$ con la subvariedad lineal $L \in \mathbb{A}^{n+m}(K)$ dada por el sistema de ecuaciones siguientes, donde t denota el vector traspuesto:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} x = (x_1, \cdots, x_n)^t \\ y = (y_1, \cdots, y_m)^t \end{matrix}$$

Si $L_1 := \{x \in \mathbb{A}^n : M_1 \cdot x = b_1\}$ y $L_2 := \{y \in \mathbb{A}^m : M_2 \cdot y = b_2\}$, entonces tenemos que:

$$(V \times W) \cap L = (V \cap L_1) \times (W \cap L_2).$$

Como M_1, M_2, b_1 y b_2 se han escogido genéricamente, podemos considerar que $(V \cap L_1)$ y $(W \cap L_2)$ son conjuntos finitos y verifican que $\sharp(V \cap L_1) = \deg(V)$ y $\sharp(V \cap L_2) = \deg(W)$, y por tanto:

$$\deg(V \times W) \geq \deg((V \times W) \cap L) = \sharp(V \cap L_1) \cdot \sharp(W \cap L_2) = \deg(V) \cdot \deg(W).$$

Esta es la desigualdad sencilla. Pero, de acuerdo con nuestra definición de grado, el caso $B = 0$ y $C = 0$ es un caso particular y no genérico. Lo "habitual" es que $B \neq 0$ y $C \neq 0$ (B y C tienen todas las coordenadas no nulas en el caso genérico). Si B y C son matrices cualesquiera, también será cierto que, definiendo:

$$L := \left\{ (x, y) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m : \begin{pmatrix} M_1 & B \\ C & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\},$$

se tendrá que $(V \times W) \cap L$ será, genéricamente, un conjunto finito con la propiedad de que:

$$\sharp((V \times W) \cap L) \leq \deg(V) \cdot \deg(W).$$

El caso $B = 0$ y $C = 0$ pasa a tener un comportamiento similar al genérico y se prueba la identidad descrita en el Teorema (3.3.6):

$$\deg(V \times W) = \deg(V) \times \deg(W).$$

La prueba de este resultado no es para nada trivial y es, sin duda, la principal contribución de este Trabajo de Fin de Grado. La idea de fondo pasa por reducir el caso de B y C cualesquiera, al caso $B = 0$ y $C = 0$ mediante una aplicación apropiada del Lema de Nakayama en una extensión de anillos locales construida de forma adecuada. El desarrollo es original y se expone de forma escalonada en los Lemas (3.3.1), (3.3.2) y (3.3.3) donde se va construyendo una extensión local asimilable a la extensión de cuerpos:

$$K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s}) \hookrightarrow K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times (V \times W)),$$

que permite reducir, manteniendo el grado a la extensión de cuerpos:

$$K(\mathbb{A}^{rn+sm} \times \mathbb{A}^{r+s}) \hookrightarrow K(\mathbb{A}^{rn+sm} \times (V \times W)).$$

Una vez establecidos los tres pilares fundamentales, la prueba de la Desigualdad de Bézout para localmente cerrados, que se recoge en el Teorema (3.4.1), resulta sencilla. Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n$, $W \subseteq \mathbb{A}^m$ localmente cerrados.

$$\deg(V \cap W) \leq \deg(V) \deg(W).$$

0.2.3. Resumen Capítulo 4.
"Cotas para el Grado de Intersecciones Múltiples de Constructibles"

En los Capítulos 2 y 3 de la memoria, se ha desarrollado una teoría del grado para conjuntos localmente cerrados afines, que además, satisface una desigualdad de Bézout. El siguiente paso consiste en considerar que ocurre con los conjuntos constructibles. Se observa un exceso de confianza de Remark 2(2) de [**He, 83**], que se percibe también en [**Ch, 64-65**], que hizo que perdurara la idea de que toda esta teoría era igualmente válida para conjuntos constructibles. Como ya discutió en [**Pa, 19**] o en [**Fe, 19**], la teoría no se extiende inmediatamente a constructibles.

La razón primaria se debe a que la descomposición en componentes localmente cerradas irreducibles de un constructible no es única en general, como se muestra en el Ejemplo (3.2.5). Aunque los constructibles pueden presentarse como uniones finitas de localmente cerrados irreducibles (ver Lema (3.2.3)), estas no dan lugar a las componentes irreducibles de su clausura Zariski para la definición usual (ver Prop.(I.3.7)).

Esta falta de unicidad aunque no es visible desde la clausura Zariski, puede afectar a las intersecciones con otros constructibles. Por eso en [**Pa, 19**], [**PaSe, 20**] o en [**Fe, 19**] se presenta una variación de la noción de grado de un constructible, de forma que verifica una desigualdad de Bézout. En la Sección 4.1 revisamos esta noción, así como algunos propiedades básicas y contraejemplos nuevos ilustrativos de las dificultades. Algunas de las pruebas se encuentran detalladas, para otras se remiten a los textos anteriores.

Esta dificultad con la extensión apropiada de los resultados de [**He, 83**] a constructibles se ha prolongado a los largo de la literatura matemática durante años. Consideramos la Proposición 2.3 de [**HeSc, 82**]:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} V_i\right) \leq \deg(V_1)\left(\max\{\deg(V_i) : 2 \leq i \leq s\}\right)^{\dim(V_1)} \tag{0.2.2}$$

donde $V_i \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ con $1 \leq i \leq n$ son variedades algebraicas. La prueba, realizada por inducción sobre el número de conjuntos, se presenta en la Proposición (4.2.1) del Capítulo 4 de este trabajo. Ahora bien, si se trata de generalizar este resultado, que continua siendo válido cuando V_1 es un constructible, realizando una prueba basada en la misma argumentación, esta falla cuando se trata de extender al caso en el que cada uno de los V_i es un constructible. Sin embargo, tampoco se ha hallado un contraejemplo de la misma.

Por tanto como solución, en el Capítulo 4 nos dedicamos a probar dos cotas para el grado de la intersección de constructibles, que se recogen en el siguiente teorema.

Teorema 0.2.3. *Sean $C_1, \cdots, C_s \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ unos conjuntos constructibles. Supongamos que $r = \dim(C_1)$. Entonces, se tienen las siguientes cotas para el grado de la intersección:*

i) Cota 1:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i\right) \leq \binom{s+r-1}{r} \deg(C_1) \cdot \left(\max\{\deg(C_i) : 2 \leq i \leq s\}\right)^r$$

ii) Cota 2:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i\right) \leq \deg(C_1) \cdot \left(1 + \sum_{i=2}^{s} \deg(C_i)\right)^r$$

iii) Cota 3:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i\right) \leq \deg(C_1) \cdot s^r \deg_{av}(C_1, \cdots, C_s)^r.$$

donde el grado promedio: $\deg_{av}(.)$ se define como:

$$\deg_{av}(C_1, \cdots, C_s) := \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \deg(C_i).$$

La propiedad *iii)* se deduce inmediatamente de la propiedad *ii)* y el capítulo se ocupará esencialmente en probar este teorema.

Para finalizar, conviene destacar que a pesar de que el resultado del teorema anterior, generaliza la cota de la Proposición 2.3 de [**HeSc, 82**] a constructibles, no lo hace con una expresión exacta a la original. En la cota *i)*, el coeficiente que aparece, puede interpretarse como polinomial en r y exponencial en s:

$$\left(\frac{r+s-1}{s-1}\right)^{s-1} \leq \binom{r+s-1}{r} \leq \left(\frac{e(r+s-1)}{s-1}\right)^{s-1}.$$

donde e es la base del logaritmo neperiano, o a la inversa, polinomial en s y exponencial en r, ya que:

$$\left(\frac{r+s-1}{r}\right)^{r} \leq \binom{r+s-1}{r} \leq \left(\frac{e(r+s-1)}{r}\right)^{r}.$$

Sin embargo, esta constante es 1 en [**HeSc, 82**]. Por su parte, las cotas *ii)* y *iii)* son siempre polinomiales en s y exponenciales en r. Ambas, por tanto, suponen un empeoramiento con respecto a la cota original dada para variedades algebraicas, que por otro lado se desconoce si es válida o no para constructibles, ya que no se ha encontrado ni un contraejemplo ni una prueba correcta de la misma.

CAPÍTULO 1

Resultados Preliminares de Geometría Algebraica

Índice

1.1. Conjuntos Algebraicos Afines. Topología de Zariski **1**
1.2. El "Nullstellensatz" de Hilbert-Kronecker **2**
1.3. Aplicaciones sobre una Variedad Algebraica **3**

En este primer capítulo se recogen algunas definiciones y resultados básicos de Geometría Algebraica Clásica, que se utilizarán a lo largo del trabajo y que se completan con el Apéndice I.

1.1. Conjuntos Algebraicos Afines. Topología de Zariski

Sea K un cuerpo y $\mathbb{K}$ su clausura algebraica. Denotamos por $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ o $\mathbb{K}^n$ al espacio afín de dimensión n sobre $\mathbb{K}$. Cuando no de lugar a equívoco que tomará $\mathbb{A}^n$ como notación. En lo sucesivo consideraremos, salvo que se indicara lo contrario, que $K = \mathbb{K}$, es decir, un cuerpo algebraicamente cerrado (infinito).

Consideramos ahora el anillo de polinomios $K[X_1, \cdots, X_n]$ de n variables con coeficientes en K. Desde el punto de vista algebraico se puede entender como una extensión de anillos de K, que además es dominio de integridad o como una K-álgebra finitamente generada por el conjunto $\{X_1, \cdots, X_n\}$.

Vamos a fijar la atención de nuestro estudio en los conjuntos de puntos que son ceros comunes de una familia de polinomios de $K[X_1, \cdots, X_n]$.

Definición 3. *Una variedad algebraica o conjunto algebraico afín $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, se define como el conjunto de ceros comunes de un ideal $\mathfrak{a}$ del anillo de polinomios $K[X_1, \cdots, X_n]$.*

$$V := V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) : f(x) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\}$$

Por el Teorema de la base de Hilbert, $K[X_1, \cdots, X_n]$ es un anillo noetheriano y por tanto se tiene que la definición anterior se corresponde con el conjunto de ceros comunes de un número finito de polinomios.

Definición 4. (Anillo Noetheriano). *Un anillo R se denomina noetheriano, cuando verifica las siguientes propiedades, que son equivalentes.*

- *Todo ideal de R es finitamente generado.*
- (*Condición de cadena ascendente*). *Toda cadena ascendente de ideales primos es estacionaria.*
$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \cdots (\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathfrak{a}_{n_0} = \mathfrak{a}_n, \forall n \geq n_0)$$
- *Asumiendo el Axioma de Elección Dependiente, todo conjunto no vacío de ideales de R, admite un elemento maximal.*

Además, como se probará a continuación, los conjuntos algebraicos permiten dotar a $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ con estructura de espacio topológico noetheriano.

Definición 5. (Espacio Topológico Noetheriano). *Un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ se denomina noetheriano si verifica la condición de cadena descendente.*

$$\cdots \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq V_n \ (\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } V_{n_0} = V_n, \forall n \geq n_0)$$

Proposición 1.1.1. *Considerando la definición de variedad algebraica afín dada en la Definición 3, se verifican las siguientes propiedades:*

- *El conjunto vacío $\emptyset$ y $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ con conjuntos algebraicos en $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$.*
$$V_{\mathbb{A}}(K[X_1, \cdots, X_n]) = \emptyset \text{ y } V_{\mathbb{A}}(\emptyset) = \mathbb{A}^n(\mathbb{K}).$$
- *La intersección arbitraria de conjuntos algebraicos afines es un conjunto algebraico afín.*
$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}_i) = V_{\mathbb{A}}\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \mathfrak{a}_i\right)$$
- *La unión finita de conjuntos algebraicos afines es un conjunto algebraico afín.*
$$\bigcup_{i=1}^{m} V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}_i) = V_{\mathbb{A}}\left(\prod_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i\right) = V_{\mathbb{A}}\left(\bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i\right)$$

donde $\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathfrak{a}_i$ *representa el ideal suma de* $\{\mathfrak{a}_i : i\in\mathcal{I}\}$ *y* $\prod_{i=1}^m\mathfrak{a}_i$ *el ideal producto del conjunto finito de ideales* $\{\mathfrak{a}_i : 1\leq i\leq m\}$. *Por tanto, el conjunto de variedades afines en* $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ *cumplen la definición de cerrado para una topología, que se denomina* ***Topología de Zariski*** $(\mathscr{T}_Z)$.

Observación 1.1.2. Como los polinomios son continuos para la topología usual, $\mathscr{T}_Z\subseteq\mathscr{T}_U$ de $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$.

Análogamente, se puede definir dado un subconjunto afín, el subconjunto de $K[X_1,\cdots,X_n]$ formado por los polinomios que se anulan en él. Es fácil ver que presenta estructura de ideal.

Definición 6. *Sea* $S\subseteq\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, *un subconjunto de un espacio afín. Se define el ideal asociado a este* $I_{\mathbb{A}}(S)\subseteq K[X_1,\cdots,X_n]$, *como el conjunto de polinomios que se anulan en todos los puntos de* S.

$$I_{\mathbb{A}}(S):=\{f\in K[X_1,\cdots,X_n] : f(x)=0,\forall x\in S\}$$

A partir de las definiciones anteriores, se puede ver que si $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b}\subseteq K[X_1,\cdots,X_n]$, entonces $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})\supseteq V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{b})$. Además, si $S\subseteq T\subseteq\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, entonces $I_{\mathbb{A}}(T)\subseteq I_{\mathbb{A}}(S)$.

Proposición 1.1.3. *Sea* $S\subseteq\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, *entonces la clausura Zariski viene dada por* $\overline{S}^z=V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(S))$.

Demostración. La prueba se realiza por doble contenido. Por definición se tiene que $S\subseteq V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(S))$, aunque no se trate de un conjunto algebraico. Por otro lado, al ser $V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(S))$ algebraico, la clausura Zariski está contenida en él, por ser esta el menor cerrado que contiene a S. Entonces, $\overline{S}^z\subseteq V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(S))$.

Partiendo del contenido $S\subseteq\overline{S}^z$, se tiene que $I_{\mathbb{A}}(\overline{S}^z)\subseteq I_{\mathbb{A}}(S)$ y por tanto $V(I(S))\subseteq V(I(\overline{S}^z))=\overline{S}^z$. La última igualdad se debe a que la clausura Zariski es un conjunto algebraico. □

Este resultado permite probar que $(\mathbb{A}^n(K),\mathscr{T}_Z)$ es un *espacio topológico noetheriano*. Para ello, consideramos la cadena descendente de cerrados: $V_1\supseteq V_2\supseteq\cdots\supseteq V_m\supseteq\cdots$. Como $K[X_1,\cdots,X_n]$ es un anillo noetheriano, se verifica que:

$$I_{\mathbb{A}}(V_1)\subseteq\cdots\subseteq I_{\mathbb{A}}(V_m)\subseteq\cdots(\exists n_0\in\mathbb{N}\ \text{ tal que }\ I_{\mathbb{A}}(V_{n_0})=I_{\mathbb{A}}(V_n),\ \forall m\geq n_0).$$

Entonces, dado que toda cadena de ideales se estabiliza, tomando las variedades asociadas, se tiene que:

$$V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V_1))\supseteq\cdots\supseteq V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V_m))\ \ (\text{tal que } V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V_{n_0}))=V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V_m)),\ \forall m\geq n_0).$$

Finalmente, por la proposición anterior, $V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V_m))=V_m$, y la cadena descendente inicial se estabiliza.

1.2. El "Nullstellensatz" de Hilbert-Kronecker

Uno de los resultados centrales de la Geometría Algebraica es el *Nullstellensatz* o Teorema de los Ceros, que supone una generalización del Teorema Fundamental de Álgebra a ideales de polinomios multivariados arbitrarios, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Proposición 1.2.1. (Nullstellensatz de Hilbert).
Sea $\mathfrak{a}$ *un ideal de un anillo de polinomios* $K[X_1,\cdots,X_n]$, *con* K *un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, se verifica que:*

$$1\notin\mathfrak{a}\Longleftrightarrow V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})\neq\emptyset$$

Demostración. La prueba de este resultado se puede consultar en [**Pa, 20a**]. □

Por tanto, las variedades algebraicas afines, que se obtienen a partir de un ideal propio de un anillo de polinomios, son no vacías. Ahora, si consideramos las aplicaciones:

$$\begin{array}{rccc} I_{\mathbb{A}}: & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & K[X_1,\cdots,X_n] \\ & V & \longmapsto & I_{\mathbb{A}}(V) \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{rccc} V_{\mathbb{A}}: & K[X_1,\cdots,X_n] & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & \mathfrak{a} & \longmapsto & V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) \end{array}$$

Esta proposición permite probar los resultados necesarios para calcular la composición entre ambas.

Definición 7. *Un ideal* $\mathfrak{a}$ *en un anillo* R, *se denomina radical si verifica que dado* $f^r\in\mathfrak{a}$, *entonces* $f\in\mathfrak{a}$.

Para todo ideal, se puede definir su ideal radical asociado como el conjunto de sus elementos nilpotentes.

$$\sqrt{\mathfrak{a}}=\{f\in R : \exists r\in\mathbb{N}, f^r\in\mathfrak{a}\}$$

Por tanto, un ideal se dice radical si coincide con su radical (i.e., $\mathfrak{a}=\sqrt{\mathfrak{a}}$) y un anillo R se dice reducido si el ideal (0) es radical. Además, es fácil ver con esta definición que todo ideal primo es radical, es más se puede probar que el radical de un ideal coincide con la intersección de los ideales primos que lo contienen.

$$\sqrt{\mathfrak{a}}=\bigcap\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R) : \mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}\}$$

En la proposición siguiente se ve que $I_{\mathbb{A}}(S)$, va a ser siempre un ideal radical.

Proposición 1.2.2. *Los ideales de la forma* $I_{\mathbb{A}}(S)$ *con* $S\subseteq\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, *que vienen dados a partir de la definición 6, son ideales radicales.*

Demostración. Sea $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$ y supongamos que $f^m \in I_{\mathbb{A}}(S)$, con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dado $x \in S$, $f^m(x) = 0$ entonces $f(x) = 0$ (ya que el anillo de polinomios es dominio de integridad), y por tanto $f \in I_{\mathbb{A}}(S)$ y cumple la definición de ideal radical. □

Proposición 1.2.3. (Nullstellensatz: Versión de Rabinowitsch).
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Para todo ideal $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$ se verifica que:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = I_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})).$$

Demostración. La prueba de este resultado utiliza el "Truco de Rabinowitsch" ([**Ra, 29**]) combinado con Nullstellenzatz de Hilbert. Se puede consultar en [**Pa, 20a**]. □

Observación 1.2.4. Se puede probar que los enunciados de las Prop. (1.2.1) y (1.2.3) son equivalentes.

Este resultado junto a la Proposición (1.1.3), establece una biyección entre los conjuntos algebraicos y los ideales radicales, ya que si $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ es una variedad algebraica, entonces $V = V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V))$ y si $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ es un ideal radical, entonces $\mathfrak{a} = I_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}))$.

Finalmente, a partir del Nullstellensatz, se puede probar que existe una biyección entre los puntos de $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ y el espectro maximal de $K[X_1, \cdots, X_n]$.

Proposición 1.2.5. *Sea $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado, entonces la aplicación siguiente es biyectiva.*

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{m}: & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathrm{Spm}(\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]) \\ & \zeta & \longmapsto & \mathfrak{m}_\zeta \end{array}$$

donde $\mathfrak{m}_\zeta = (X_1 - \zeta_1, \cdots, X_n - \zeta_n) = I_{\mathbb{A}}(\{\zeta\})$, el ideal dado por las coordenadas del punto.

Demostración. Sea $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$. Como $\mathbb{K}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado tenemos que el ideal de polinomios que se anulan en ζ, se corresponde con el ideal generado por las coordenadas del punto, es decir: $I_{\mathbb{A}}(\{\zeta\}) = (X_1 - \zeta_1, \cdots, X_n - \zeta_n)$. Considerando el morfismo de evaluación en ζ y aplicando el primer teorema de isomorfía, tenemos que $\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]/I_{\mathbb{A}}(\{\zeta\}) \simeq \mathbb{K}$ (cuerpo), por lo que $\mathfrak{m}_\zeta = I_{\mathbb{A}}(\{\zeta\})$ es un ideal maximal. Además, si $\zeta_1 \neq \zeta_2$, entonces $\mathfrak{m}_{\zeta_1} \neq \mathfrak{m}_{\zeta_2}$, por lo que la aplicación $\mathfrak{m}$ es inyectiva. Para probar la sobreyectividad, consideramos $\mathfrak{n} \in \mathrm{Spm}(\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n])$. Como $1 \notin \mathfrak{n}$, entonces $\exists \zeta \in \mathbb{A}^n(K), f(\zeta) = 0, \forall f \in \mathfrak{n}$, luego $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{m}_\zeta$. Como $\mathfrak{n}$ es maximal, entonces $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_\zeta$. □

1.3. Aplicaciones sobre una Variedad Algebraica

Un concepto que va a ser fundamental en el desarrollo del trabajo es el de función racional. Para ello nos centraremos en un caso particular de variedades algebraicas, las irreducibles.

Definición 8. (Cerrado Irreducible). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Un cerrado C de X se denomina irreducible si no se puede descomponer como unión de dos cerrados propios. Es decir, si:*

$$\forall\, V_1, V_2 \text{ cerrados de } (X, \mathscr{T}),\ C = V_1 \cup V_2 \Longrightarrow C = V_1 \text{ ó } C = V_2.$$

En caso de no verificarse esta propiedad se denominan cerrados reducibles.

Como se argumenta con detalle en el Apéndice I, toda variedad algebraica admite una descomposición finita como unión de variedades algebraicas irreducibles.

Proposición 1.3.1. *Un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ es irreducible si y solo si el ideal $I_{\mathbb{A}}(V)$ es primo.*

Demostración. En primer lugar supongamos que $I_{\mathbb{A}}(V)$ no es un ideal primo, entonces existen $f_1, f_2 \in K[X_1, \cdots, X_n] \setminus I_{\mathbb{A}}(V)$, tales que $f_1 f_2 \in I_{\mathbb{A}}(V)$. Como $f_2 \notin I_{\mathbb{A}}(V)$, $I_{\mathbb{A}}(V) + (f_1) \neq (1)$, por (1.2.1), $V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V) + (f_1)) \neq \emptyset$ y como $f_1 \notin I_{\mathbb{A}}(V)$, tenemos que $V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V) + (f_1)) \subsetneq V$ (respectivamente para f_2). Esto permite descomponer V como unión de dos cerrados propios np vacíos y que sea no irreducible.

$$V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V) + (f_1)) \cup V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V) + (f_2)) = V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V) + (f_1 f_2)) = V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V)) = V$$

Para el recíproco, consideramos que $V = V_1 \cup V_2$ (cerrados propios, $V_i \subsetneq V$), por lo que $I_{\mathbb{A}}(V_i) \supsetneq I_{\mathbb{A}}(V)$ y existen f_1 y f_2 tales que $f_i \in I_{\mathbb{A}}(V_i) \setminus I_{\mathbb{A}}(V)$. Entonces $I_{\mathbb{A}}(V) \subsetneq I_{\mathbb{A}}(V) + (f_1 f_2) \subseteq I_{\mathbb{A}}(V_1) \cap I_{\mathbb{A}}(V_2)$ y $f_1 f_2 \in I_{\mathbb{A}}(V)$. Por tanto, $I_{\mathbb{A}}(V)$ es un ideal primo. □

Consideramos ahora el anillo de funciones racionales definidas sobre $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$, variedad irreducible.

Definición 9. (Función Racional). *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una variedad algebraica irreducible. Una función racional sobre V, es un par (U_φ, φ), donde $U_\varphi \subseteq V$ es un abierto Zariski no vacío y $\varphi : U_\varphi \subseteq V \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función parcial sobre V tal que existen polinomios $p, q \in K[X_1, \cdots, X_n]$, verificando que:*

$$\varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \forall x \in U_\varphi \subseteq V \setminus V_{\mathbb{A}}(q),\ \textit{i.e. } q(x) \neq 0.$$

Definición 10. *Dos funciones racionales (U_φ, φ) y (U_ψ, ψ) sobre V (irreducible) son equivalentes si*

$$\varphi\big|_{U_\varphi \cap U_\psi} = \psi\big|_{U_\varphi \cap U_\psi}$$

Por abuso de lenguaje, llamaremos también función racional sobre V a cualquiera de las clases de equivalencia y denotamos por $K(V)$ al conjunto de todas las funciones racionales sobre V.

Definición 11. (Función Regular). *Una clase de equivalencia $[(U_\varphi, \varphi)]$ de funciones racionales se denomina regular si existe un elemento $(V, \psi) \in [(U_\varphi, \varphi)]$.*

Proposición 1.3.2. *El subconjunto de funciones regulares de $K(V)$, se corresponde con las funciones polinomiales sobre V. Tiene estructura de anillo y se denota por $K[V] := \{f|_V : f \in K[X_1, \cdots, X_n]\}$.*

Demostración. Sea $(V, \psi) \in [(U_\varphi, \varphi)]$ una función regular y $p, q \in K[X_1, \cdots, X_n]$, tales que:

$$\psi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \ \ \forall x \in V \text{ con } \ q(x) \neq 0 \Longrightarrow V \cap V_{\mathbb{A}}(q) = \emptyset.$$

Por ser V es un cerrado Zariski, entonces: $\emptyset = V \cap V_{\mathbb{A}}(q) = V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V)) \cap V_{\mathbb{A}}(q) = V_{\mathbb{A}}(I_{\mathbb{A}}(V) + (q))$.
Como consecuencia del Nullstellensatz, tenemos que $1 \in I_{\mathbb{A}}(V) + (q)$, y existen $f \in I_{\mathbb{A}}(V)$ y $r \in K[X_1, \cdots, X_n]$, tales que $f + rq = 1$. Entonces, $\forall x \in V$, $f(x) + r(x)q(x) = 1$, pero $f(x) = 0$ por lo que $r(x)q(x) = 1$. Por tanto, ψ se puede reescribir como $\psi(x) = r(x)p(x), \forall x \in V$, es decir un polinomio que toma valores únicamente en V. □

Proposición 1.3.3. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una variedad algebraica irreducible e $I_{\mathbb{A}}(V) \subseteq K[X_1, \cdots, X_n]$ el ideal primos asociado. Entonces se tiene que aplicando el Primer Teorema de Isomorfía.*

$$K[V] \simeq K[X_1, \cdots, X_n]/I_{\mathbb{A}}(V).$$

Además, $K[V]$ es dominio de integridad y $K(V) := qf(K[V])$ se corresponde con su cuerpo de fracciones.

Como $K[V] \subseteq K[X_1, \cdots, X_n]$, entonces es también una K-álgebra finitamente generada.
Ahora, sea $\varphi : V \subseteq \mathbb{A}^n \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$ ($\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x))$, φ_i aplicación polinomial) un morfismo regular de variedades algebraicas afines. Esto induce un morfismo de K-álgebras:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^*: & K[W] & \longrightarrow & K[V] \\ & h & \longmapsto & h \circ \varphi : V \longrightarrow K \end{array} \tag{1.3.1}$$

Definición 12. *Un morfismo entre variedades algebraicas $\varphi : V \to W$ se denomina dominante, si su imagen es un conjunto denso para la topología de Zariski (i.e. $\overline{\varphi(V)}^z = W$).*

Proposición 1.3.4. *Sea $\varphi : V \longrightarrow W$ un morfismo de variedades algebraicas y φ^* el morfismo de K-álgebras que viene dado por la expresión (1.3.1). En ese caso se verifica que φ es un morfismo dominante, si y solamente si, φ^* es un monomorfismo.*

Demostración. Por un lado tenemos que si φ es un morfismo dominante, y consideramos nula la imagen de la función polinomial: $h \circ \varphi(h) = 0$. Por continuidad para la topología de Zariski, como $\varphi(V)$ es denso en W, h tiene que ser el polinomio nulo, y por tanto φ^* monomorfismo.

$$\ker \varphi^* = \{h \in K[W] : \varphi^*(h) = 0\} = \{h \in K[W] : h \circ \varphi(h) = 0\} = \{0\}$$

Por otro lado, si suponemos que $\varphi(V)$ no es denso, su clausura Zariski es un conjunto cerrado propio $\overline{\varphi(V)}^z \subsetneq W$, y existirá una función polinomial h no nula, que se anule en él ($h \circ \varphi(h) = 0$).
Por tanto $\ker \varphi^* \neq \{0\}$ y φ^* no es un monomorfismo de K-álgebras. □

Finalmente, consideramos $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$ y $K[U_f] \subseteq K[V]$, con $U_f := V \setminus V_{\mathbb{A}}(f)$. Si $\varphi \in K[U_f]$:

$$\varphi(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ con } q(x) \neq 0, \ \forall x \in U_f.$$

Como $q(x)$ es no nulo para todo elemento $x \in U_f = V \setminus V_{\mathbb{A}}(f)$, entonces $q \in S_f := \{1, f, f^2, f^3, \cdots\}$.
Si V es irreducible, $K[V]$ es dominio de integridad y por tanto f es un elemento no nilpotente. Esto hace que S_f de lugar a un sistema multiplicativamente cerrado, que permite localizar el anillo de polinomios $K[X_1, \cdots, X_n]$ sobre él (ver sección de Localización en Apéndice I), y que coincide por definición del mismo, con $K[U_f]$.

$$K[X_1, \cdots, X_n]_f = S_f^{-1}K[X_1, \cdots, X_n] = \left\{ \frac{p}{f^n} : p \in K[X_1, \cdots, X_n] \text{ y } n \in \mathbb{N} \right\} = K[U_f]. \tag{1.3.2}$$

CAPÍTULO 2

La Noción de Grado de un Localmente Cerrado Afín

Índice

2.1.	**Localmente cerrados para la Topología de Zariski**	**5**
2.2.	**Cardinal de fibras de morfismos dominantes**	**6**
2.3.	**Una Construcción Esencial**	**17**
2.4.	**Noción (geométrica) de grado de un conjunto localmente cerrado afín**	**19**
2.4.1.	Extensión de la definición a la clausura Zariski	22
2.4.2.	Grado geométrico para conjuntos algebraicos equidimensionales	25
2.4.3.	Subaditividad del grado para localmente cerrados y variedades algebraicas	26

A comienzos de la década de los 80 del siglo pasado, tres autores (W. Vogel, W. Fulton y J. Heintz) plantearon, siguiendo las ideas originales de É. Bézout, pruebas independientes de una desigualdad de Bézout intrínseca, definida a partir del objeto geométrico de estudio: las variedades algebraicas. En este trabajo nos centraremos en los resultados planteados por J. Heintz. En este capítulo se trabajará la construcción de una definición del grado para variedades algebraicas afines, vistas como la clausura Zariski de los conjuntos localmente cerrados, que introduciremos a continuación. Se abordarán dos perspectivas: una algebraica, a través de extensiones de cuerpos de funciones racionales, y una geométrica a través de intersecciones finitas con variedades afines lineales de codimensión igual a la dimensión de la variedad.

Una descripción más profundizada y técnica de las principales contribuciones del capítulo, se recoge de forma resumida en la subsección 0.2.1 del Capítulo 0 introductorio.

2.1. Localmente cerrados para la Topología de Zariski

Definición 13. *Un conjunto se denomina localmente cerrado*[1] *cuando se puede escribir como la intersección de un abierto y un cerrado de la topología (de Zariski en $\mathbb{A}^n(K)$ en este caso). Un subconjunto $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ se denomina localmente cerrado irreducible si es abierto para la topología de subespacio de alguna variedad algebraica irreducible de $\mathbb{A}^n(K)$. La unión finita de subconjuntos localmente cerrados se denomina constructible (concepto tradicionalmente empleado en Teoría de Eliminación* [**Ch, 64-65**]).

Para más información sobre este tipo de conjuntos, consultar p.e. [**Ma, 80**] (Cap.2, Sec.6).

En la siguiente proposición se plantea la existencia de una descomposición en componentes localmente cerradas irreducibles de todo subconjunto localmente cerrado afín, lo cual se basa en la descomposición en irreducibles de todo cerrado en un espacio topológico noetheriano.

Proposición 2.1.1. *Todo conjunto localmente cerrado $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ presenta una descomposición minimal como unión de conjuntos localmente cerrados irreducibles. Esta descomposición es única y coinciden con las componentes irreducibles de la clausura de V para la topología de Zariski.*

Demostración. Sea $V = U \cap W$ un conjunto localmente cerrado, donde W es una variedad algebraica. Consideramos la descomposición en irreducibles de W, que viene dada por la Proposición (I.3.7).

$$W = W_1 \cup \cdots \cup W_s$$

A partir de ella podemos obtener una descomposición de V como unión finita de conjuntos localmente cerrados irreducibles.

$$V = U \cap W = U \cap (W_1 \cup \cdots \cup W_s) = (U \cap W_1) \cup \cdots \cup (U \cap W_s)$$

Por definición de conjunto localmente cerrado, U es un abierto Zariski y por tanto cada uno de los conjuntos $U \cap W_i$ es localmente cerrado irreducible. Existen dos posibilidades al realizar la intersección anterior: $U \cap W_i = \emptyset$ ó $U \cap W_i \neq \emptyset$. Descomponemos W_i en la unión de un conjunto abierto $U \cap W_i$ en W_i y su complementario $W_i \setminus (U \cap W_i)$, y posteriormente tomamos su clausura Zariski.

$$\overline{W_i}^z = \overline{(W_i \setminus (U \cap W_i)) \cup (U \cap W_i)}^z = (W_i \setminus (U \cap W_i)) \cup \overline{(U \cap W_i)}^z = W_i$$

[1] Cabe destacar que un afín localmente cerrado es una variedad cuasi-proyectiva en los textos clásicos de geometría algebraica (como, por ejemplo [**Sh, 77**]). Como este trabajo se va a desarrollar en su totalidad trabajando en espacios afines no se utilizará terminología proyectiva.

Como W_i es irreducible y está escrito como la unión de dos cerrados, entonces $W_i = W_i \setminus (U \cap W_i)$ ó $W_i = \overline{(U \cap W_i)}^Z$. Si $U \cap W_i \neq \emptyset$, y por tanto $W_i = \overline{(U \cap W_i)}^z$, entonces $U \cap W_i$ es denso en W_i.

$$\overline{V}^z = \overline{(U \cap W_1)}^z \cup \cdots \cup \overline{(U \cap W_s)}^z = W_1 \cup \cdots \cup W_t$$

Concluimos por tanto que los irreducibles W_i con intersección no vacía con respecto a U se corresponden con las componentes irreducibles de la clausura Zariski $\overline{V}^z$, que son únicas, por lo que por construcción la descomposición de V en localmente cerrados irreducibles también lo es. □

Observación 2.1.2. En general si $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ es un conjunto localmente cerrado, con descomposición irreducible $V := (U_1 \cap V_1) \cup \cdots \cup (U_s \cap V_s)$, entonces existe un $U \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ abierto Zariski, tal que $U \cap V_i = U_i \cap V_i$, para todo $1 \leq i \leq s$.

Proposición 2.1.3. *Sea $\varphi : V \longrightarrow W$ un morfismo de variedades algebraicas y sea $C \subseteq V$ un cerrado Zariski. Entonces se cumple que:*

$$C \text{ es irreducible} \iff \overline{\varphi(C)}^z \text{ es irreducible.}$$

Demostración. En primer lugar destacar que φ es continuo para la topología de Zariski.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\overline{\varphi(C)}^z$ es reducible entonces $\varphi(C) \subseteq \overline{\varphi(C)}^z = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 cerrados Zariski propios. Tomando contramágenes se tiene que: $C \subseteq \varphi^{-1}(X_1) \cup \varphi^{-1}(X_2)$ y por tanto podemos escribir C como la unión de dos cerrados: $C = (C \cap \varphi^{-1}(X_1)) \cup (C \cap \varphi^{-1}(X_2))$, por lo que también C es reducible.

$\Rightarrow$) Supongamos que C es reducible, entonces $C = X_1 \cup X_2$. Tomando la imagen y posteriormente la clausura Zariski llegamos a que $\overline{\varphi(C)}^z$ es también reducible, por ser la unión de dos clausuras.

$$\varphi(C) = \varphi(X_1 \cup X_2) = \varphi(X_1) \cup \varphi(X_2) \implies \overline{\varphi(C)}^z = \overline{\varphi(X_1) \cup \varphi(X_2)}^z = \overline{\varphi(X_1)}^z \cup \overline{\varphi(X_2)}^z$$

□

En lo sucesivo dotaremos a las variedades algebraicas con una noción de dimensión que se corresponde con la dimensión de Krull como subconjunto cerrado de un espacio topológico noetheriano. Las propiedades y resultados básicos de esta noción se recogen en el Apéndice I del trabajo.

Definición 14. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto localmente cerrado afín (o un constructible), entonces se define su dimensión, como la dimensión de su clausura Zariski,* $\dim(V) = \dim(\overline{V}^z)$.

2.2. Cardinal de fibras de morfismos dominantes

En esta segunda sección se va a establecer una relación entre el cardinal de la fibra de un morfismo dominante de variedades algebraicas, con el grado de una extensión de cuerpos de funciones racionales, donde la separabilidad de la misma va a jugar un papel esencial.

Lema 2.2.1. (Versión simplificada y autocontenida del Teorema de Dimensión de Fibras). *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ dos subespacios afines localmente cerrados e irreducibles. Consideramos el morfismo dominante $\varphi : V \longrightarrow W$. Para cada $y \in W$ tal que $\varphi^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ se tiene que*

$$\dim\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) \geq \dim(V) - \dim(W) \tag{2.2.1}$$

Demostración. Tal y como se indica en la Definición 14, la dimensión de Krull de un conjunto localmente cerrado coincide con la de su clausura Zariski, que es por definición una variedad algebraica. Por lo tanto, basta probar el resultado cuando V y W son variedades algebraicas irreducibles.

Sea $K[\mathbb{A}^s] \hookrightarrow K[W]$ una normalización de Noether de W donde $s = \dim(W)$ y sea $\pi : W \longrightarrow \mathbb{A}^s$ el morfismo sobreyectivo de variedades algebraicas asociado a ella, que viene dado por el Teorema de Krull-Cohen-Seidenberg. Sea $y \in W$ tal que $\varphi^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, y sea $\pi(y) := a = (a_1, \cdots, a_s)$, la imagen de y por π. La fibra $\pi^{-1}(\{a\})$ es una subvariedad algebraica zero dimensional de W. Para comprobarlo se considerara π como un morfismo entre espectros maximales, dado que por el Nullstellensatz: $\mathrm{Spm}(K[W]) = W$ y $\mathrm{Spm}(K[\mathbb{A}^s]) = \mathbb{A}^s$; así como su extensión a sus respectivos espectros primos[2].

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(K[W]) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(K[\mathbb{A}^s]) \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & \mathfrak{p} \cap K[\mathbb{A}^s] \end{array}$$

Como la dimensión de una variedad coincide con la co-altura de su ideal asociado (I.4.4), suponemos la siguiente cadena ascendente de ideales primos en $\mathrm{Spec}(K[W])$: $I_{\mathbb{A}}(\pi^{-1}(\{a\})) \subseteq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d$, con

[2]En este caso se identifica el isomorifismo a través de una igualdad. Por simplicidad, este hecho se repetirá a lo largo del texto cuando no de lugar a equívoco.

$d \leq s$. Aplicando el morfismo anterior, obtenemos una nueva cadena: $I_{\mathbb{A}}(\{a\}) \subseteq \mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_d$, donde $\mathfrak{p}_i \cap K[\mathbb{A}^s] = \mathfrak{q}_i$ e $I_{\mathbb{A}}(\{a\}) = \mathfrak{m}_a$, representa dentro del espectro, al ideal maximal generado por el polinomio $x - a$. Por el Teorema del Ascenso, sabemos que el número de elementos de la cadena no disminuye al realizar la intersección. Por ser $\mathfrak{m}_a$ maximal, $d = 0$ y por tanto $\dim(\pi^{-1}(\{a\})) = 0$, lo que implica que la fibra está formada por un número finito de puntos. Sean $\pi := (\pi_1, \cdots, \pi_s)$ las coordenadas de π. Consideremos ahora la subvariedad de V dada por las siguientes ecuaciones polinomiales:

$$V_1 := V \cap V_{\mathbb{A}} \left(\pi_1 \circ \varphi(X_1, \cdots, X_n) = a_1, \cdots, \pi_s \circ \varphi(X_1, \cdots, X_n) = a_s\right)$$

donde $\pi_i \circ \varphi : K^n \longrightarrow K$ representan funciones polinomiales, restringidas a la variedad algebraica V por medio de la intersección anterior. Como $\varphi^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, entonces $V_1 \neq \emptyset$ ya que $\varphi^{-1}(\{y\}) \subseteq V_1$. Sea $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_s)$, donde $f_i := \pi_i \circ \varphi - a_i$. Como consecuencia del Teorema de los Ideales Principales de Krull, todo ideal primo minimal de $\mathfrak{a}$ tiene como mucho altura s ($\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$). Sea $C = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p})$ una componente irreducible de V_1, donde $\mathfrak{p}$ representa un ideal primo minimal que contiene a $I_{\mathbb{A}}(V_1)$. Por la Proposición (I.4.6) se tiene que: $\dim(V) = \dim_K(K[V]) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{coht}(\mathfrak{p}) \leq s + \dim(C)$ y entonces:

$$\dim(C) \geq \dim(V) - s = \dim(V) - \dim(W).$$

Por otro lado, sea Z una componente irreducible de la fibra $\varphi^{-1}(\{y\})$. Tenemos que $\varphi^{-1}(\{y\}) \subseteq V_1$, entonces $Z \subseteq C$ para alguna componente irreducible C de V_1[3]. Como C es irreducible, entonces la clausura Zariski de su imagen, $\overline{\varphi(C)}^z$ también lo es (prop. 2.1.3). Por construcción $\pi(\varphi(C)) \subseteq \pi(\varphi(V_1)) \subseteq \{a\}$. Esto implica que $\overline{\varphi(C)}^z$ es una componente irreducible de la fibra cero dimensional $\pi^{-1}(\{a\}) \subseteq W$, por lo que tanto $\overline{\varphi(C)}^z$ al igual que $\varphi(C)$ se restringe únicamente a un punto. Además, como $Z \subseteq C$ y Z es una componente irreducible de $\varphi^{-1}(\{y\})$, $C \subseteq \varphi^{-1}(\{y\})$.

Como C es irreducible y verifica que $Z \subseteq C \subseteq \varphi^{-1}(\{y\})$, se concluye que $Z = C$. Por tanto, las componentes irreducibles de $\varphi^{-1}(\{y\})$ son a su vez componentes irreducibles de V_1, por lo que para cada componente irreducible Z de $\varphi^{-1}(\{y\})$ se tiene que $\dim(Z) \geq \dim(V) - \dim(W)$. Esto implica que la dimensión de la fibra está acotada inferiormente por la diferencia entre las dimensiones de las variedades de salida y de llegada, tal y como se pretendía probar.

$$\dim\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) \geq \dim(V) - \dim(W)$$

Para una versión más extendida de este resultado, consultar la referencia [**Sh, 77**]. □

Lema 2.2.2. *Sean $A \subseteq B$ dos dominios de integridad y $L \subseteq F$ sus respectivos cuerpos de fracciones. Si $\mathcal{F} := \{v_1, \cdots, v_t\} \subseteq F$ es una familia libre finita con respecto a combinaciones lineales con coeficientes en A, entonces $\mathcal{F}$ es una familia libre finita en el L-espacio vectorial F.*

Demostración. Si existe una combinación lineal

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_t v_t = 0$$

con coeficientes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in L$, multiplicando dicha igualdad por un múltiplo no nulo de sus denominadores $d \in A \setminus \{0\}$, obtenemos la combinación lineal siguiente

$$\theta_1 v_1 + \cdots + \theta_t v_t = 0$$

donde $\theta_i := d\lambda_i \in A$. Por ser $\mathcal{F}$ una familia libre con respecto a combinaciones lineales del anillo A, la igualdad anterior implica que $\theta_1 = \cdots = \theta_t = 0$. Finalmente como $d \neq 0$ y A es un dominio se tiene que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_t = 0$, por lo que $\mathcal{F}$ es una familia libre finita en el L-espacio vectorial F. □

A partir de ahora, se denotará por $\sharp(X)$ al cardinal de un conjunto finito X. Además, salvo que se indique lo contrario cuando se considere un anillo, se asumirá que este es noetheriano.
Para probar el siguiente lema, se va a utilizar la noción de anillo de valoración discreta y algunas de sus propiedades básicas, que se presentan a continuación.

Proposición 2.2.3. (Caracterización de anillos de valoración discreta). *Sea R un dominio de integridad que no es cuerpo. Entonces son equivalentes:*

i) R es local, noetheriano y su ideal maximal es principal.
ii) Existe un elemento irreducible (no unidad) $t \in R$ tal que, para todo $r \in R$ no nulo, existe una única unidad $u \in R$ y un único entero no negativo n tales que $r = ut^n$.

Demostración. La prueba de esta proposición se recoge en el Apéndice I, ver Proposición (I.1.9). □

[3]Tenemos que $Z \subseteq C$, ya que si $Z \subseteq C_1 \cup C_2$ entonces $Z = (Z \cap C_1) \cup (Z \cap C_2)$ y por ser Z irreducible $Z = Z \cap C_1$ ($Z \subseteq C_1$) ó $Z = Z \cap C_2$ ($Z \subseteq C_2$).

Definición 15. *Un dominio R que no sea cuerpo, verificando las condiciones equivalentes del teorema anterior se denomina anillo de valoración discreta. En tal caso, un generador de su ideal maximal se denomina parámetro de uniformización de R.*

Lema 2.2.4. *Sea $A \subseteq B$ una extensión entera de dominios de integridad. Sean L y F respectivamente sus cuerpos de fracciones. Supongamos que la extensión de cuerpos $L \subseteq F$ es finita y que se satisfacen las siguientes condiciones.*

i) El anillo $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local de ideal maximal $\mathfrak{m}$ y cuerpo residual $\kappa(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$. Supongamos que $\mathfrak{m}$ es un ideal principal (i.e. A es un anillo de valoración discreta).

ii) Existe $\mathscr{C} := \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m\}$ una familia finita de ideales maximales de B tales que para cada i, $1 \leq i \leq m$, la contracción del ideal $\mathfrak{p}_i$ satisface que $\mathfrak{p}_i^c := \mathfrak{p}_i \cap A = \mathfrak{m}$. Sean $\kappa(\mathfrak{p}_1), \cdots, \kappa(\mathfrak{p}_m)$, los cuerpos residuales de B con respecto a cada uno de dichos ideales maximales.

Supongamos también que para cada i, $1 \leq i \leq m$, existe un morfismo de cuerpos inyectivo,

$$f_i : \kappa(\mathfrak{m}) \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p}_i)$$

tal que la extensión de cuerpos $\kappa(\mathfrak{m}) \subseteq \kappa(\mathfrak{p}_i)$ es finita y los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{array}{ccc} A & \xhookrightarrow{\quad i \quad} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ \kappa(\mathfrak{m}) & \xhookrightarrow{\quad f_i \quad} & \kappa(\mathfrak{p}_i) \end{array}$$

donde $\pi_0, \cdots, \pi_m$ son las proyecciones naturales a los cuerpos residuales, e i representa la inclusión. Entonces se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{m} [\kappa(\mathfrak{p}_i) : \kappa(\mathfrak{m})] \leq [F : L] \tag{2.2.2}$$

Demostración. Los ideales $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_m$ son maximales, entonces cumplen las hipótesis del Teorema Chino de los Restos ya que son co-maximales dos a dos: $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = B \ \forall i \neq j$ ($\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j \subseteq B$, como $\mathfrak{p}_i$ es maximal $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = B$) . Entonces tenemos el siguiente morfismo sobreyectivo de anillos:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : B & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \kappa(\mathfrak{p}_i) \\ x & \longmapsto & (x + \mathfrak{p}_1, \cdots, x + \mathfrak{p}_m), \end{array}$$

donde $\pi_i(x) = x + \mathfrak{p}_i, \forall i$. Cabe destacar que la contención entre los cuerpos residuales $\kappa(\mathfrak{m}) \subseteq \kappa(\mathfrak{p}_i)\ \forall i$, es consecuencia del hecho de que por ser $A \subseteq B$ una extensión entera $A/\mathfrak{p}_i^c \subseteq B/\mathfrak{p}_i$ también lo es por hipótesis, con $\mathfrak{p}_i^c = \mathfrak{m}$. Por ser un cociente con respecto a ideales maximales, la contención anterior es una extensión de cuerpos. Por otro lado, los morfismos f_i, nos permiten identificar el cuerpo $\kappa(\mathfrak{m})$ con un subcuerpo del producto $\prod_{i=1}^{m} \kappa(\mathfrak{p}_i)$, por medio del morfismo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} f : \kappa(\mathfrak{m}) & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \kappa(\mathfrak{p}_i) \\ x + \mathfrak{m} & \longmapsto & (f_1(x) + \mathfrak{p}_1, \cdots, f_m(x) + \mathfrak{p}_m). \end{array} \tag{2.2.3}$$

donde $f_1, \cdots, f_m$ son los morfismos inyectivos indicados en el enunciado. Entonces, el anillo producto es una $\kappa(\mathfrak{m})$-álgebra finita y por tanto presenta dimensión finita como espacio vectorial.

$$\dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \left(\prod_{i=1}^{m} \kappa(\mathfrak{p}_i) \right) = \sum_{i=1}^{m} [\kappa(\mathfrak{p}_i) : \kappa(\mathfrak{m})] < \infty$$

En este caso $\dim_{\mathbb{K}}(V)$ representa la dimensión como $\mathbb{K}$ espacio vectorial de V. La igualdad anterior se corresponde con la dimensión del espacio vectorial producto. Para concluir la prueba se comprueba que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \left(\prod_{i=1}^{m} \kappa(\mathfrak{p}_i) \right) \leq \dim_{L}(F) = [F : L].$$

Consideramos una familia $\mathcal{F} := \{v_1, \cdots, v_t\} \subseteq \prod_{i=1}^{m} \kappa(\mathfrak{p}_i)$ de elementos linealmente independientes con respecto a $\kappa(\mathfrak{m})$ que formen una base del espacio vectorial, y por tanto:

$$t = \sharp(\mathcal{F}) = \dim_{\kappa(\mathfrak{m})} \left(\prod_{i=1}^{m} \kappa(\mathfrak{p}_i) \right) = \sum_{i=1}^{m} [\kappa(\mathfrak{p}_i) : \kappa(\mathfrak{m})]. \tag{2.2.4}$$

Sea $\Omega := \{w_1, \cdots, w_t\} \subseteq B$ una familia tal que $\Phi(w_i) = v_i$. Veamos que Ω es linealmente independiente con respecto a combinaciones lineales de elementos de A. Supongamos

$$\Lambda_1 w_1 + \cdots + \Lambda_t w_t = 0$$

donde $\Lambda_i \in A$. Sea ρ un parámetro de uniformización de A, entonces $\mathfrak{m} = (\rho)$ y a partir del orden con respecto a ρ (valoración discreta del anillo), se define el número entero positivo siguiente:

$$r := \max\{k \in \mathbb{N} : \rho^k | \Lambda_i, \forall i \text{ con } 1 \leq i \leq t\} = \max\{\text{ord}_\rho(\Lambda_i) : 1 \leq i \leq t\}. \tag{2.2.5}$$

Entonces se tiene que ρ^r divide a Λ_i y por tanto existen $\lambda_1, \cdots, \lambda_t \in A$ tales que $\Lambda_i = \rho^r \lambda_i$ y

$$\rho^r(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_t w_t) = 0, \tag{2.2.6}$$

donde al menos uno de los λ_i es unidad, ya que por ser A un anillo de valoración $\Lambda_i = u_i \rho^{k_i}$, con u_i unidad y r se ha definido para que sea el máximo que verifica la condición anterior. Renombrando los índices, consideremos que $\lambda_1 \in A^* = A \setminus \mathfrak{m}$ es una unidad del anillo local. La igualdad (2.2.6), se corresponde con un producto en un dominio de integridad y $\rho^r \neq 0$, ya que si no $\mathfrak{m} = (0)$ y A sería un cuerpo. Entonces,

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_t w_t = 0$$

Aplicando el morfismo de anillos Φ, obtenemos la siguiente igualdad en el anillo producto $\prod_{i=1}^m \kappa(\mathfrak{p}_i)$:

$$\Phi(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_t w_t) = \ell_1 v_1 + \cdots + \ell_t v_t = 0 \tag{2.2.7}$$

donde $\ell_j := \Phi(\lambda_j)$. Como el diagrama planteado en el enunciado es conmutativo, $\forall j$ con $1 \leq j \leq t$, se tiene que: $\pi_j \circ i = f_j \circ \pi_0$, y por tanto para cada $\lambda_j \in A$ existe $a_i \in \kappa(\mathfrak{m})$ tal que $\Phi(\lambda_j) = \ell_j = f(a_j)$, donde f viene descrita por la identidad (2.2.3). Finalmente como $\mathcal{F} = \{v_1, \cdots, v_t\}$ es una familia libre, la ecuación (2.2.7) implica que: $\ell_1 = \cdots = \ell_t = 0$, y consecuentemente $a_1 = \cdots = a_t = 0$, ya que f por construcción es inyectivo.

En particular se tiene que $a_1 = 0$ y por tanto se puede concluir que $\pi_0(\lambda_1) = \lambda_1 + \mathfrak{m} = a_1 = 0$, entonces $\lambda_1 \in \mathfrak{m} \subseteq A$ y por tanto $\lambda_1 \notin A^* = A \setminus \mathfrak{m}$ y no sería unidad, lo que va en contra del hecho de que deba existir al menos una unidad en la familia $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_t\}$.

Por tanto, el entero positivo r que hemos tomado según la igualdad (2.2.5) no sería un máximo. Como siempre que escojamos un r, vamos a poder encontrar uno mayor que cumpla las condiciones requeridas, debe verificarse que $\Lambda_i = 0, \forall i$ con $1 \leq i \leq t$, y entonces tenemos la siguiente implicación:

$$\Lambda_1 w_1 + \cdots + \Lambda_t w_t = 0 \Longrightarrow \Lambda_1 = \cdots = \Lambda_t = 0.$$

Por tanto, $\Omega = \{w_1, \cdots, w_t\} \subseteq B$ es una familia libre con respecto a combinaciones lineales de elementos de A. Por el Lema (2.2.2), Ω es una familia libre del L-espacio vectorial F, por lo que se verifica que:

$$\sharp(\Omega) = t \leq [F : L] \Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} [\kappa(\mathfrak{p}_i) : \kappa(\mathfrak{m})] \leq [F : L].$$

La implicación anterior se debe a la ecuación (2.2.4). □

Lema 2.2.5. *Sea R un anillo y $\mathfrak{q}$ un ideal primo. Se considera el sistema multiplicativamente cerrado $S = R \setminus \mathfrak{q}$ y el anillo local $R_\mathfrak{q} = S^{-1}R$, de maximal $\mathfrak{m} = S^{-1}\mathfrak{q}$. Entonces tenemos que el cuerpo residual $\kappa(\mathfrak{m})$ es isomorfo al cuerpo de fracciones del anillo cociente $R/\mathfrak{q}$.*

$$\kappa(\mathfrak{m}) = R_\mathfrak{q}/\mathfrak{m} \simeq qf\,(R/\mathfrak{q})$$

Demostración. La prueba se puede encontrar en la Proposición (I.1.8) del Apéndice I. □

Proposición 2.2.6. *Sea $W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un subespacio localmente cerrado e irreducible de dimensión m. Sea $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{A}^m$ un morfismo dominante. Sean $K(W)$ y $K(\mathbb{A}^m)$ respectivamente los cuerpos de fracciones racionales definidas sobre W y $\mathbb{A}^m(K)$. Sea $y \in \mathbb{A}^m(K)$ un punto y $\varphi^{-1}(\{y\})$ la fibra definida sobre él. Si la fibra es finita, entonces se tiene que:*

$$\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) \leq [K(W) : K(\mathbb{A}^m)],$$

donde $[K(W) : K(\mathbb{A}^m)]$ es el grado de la extensión de cuerpos inducida por φ:

$$\varphi^* : K(\mathbb{A}^m) \hookrightarrow K(W)$$

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre $m = \dim(W)$.

Caso $\dim(W) = 0$. Sea $\mathbb{A}^m(K) = \{y\}$ con $y \in K$, entonces $\varphi : W \longrightarrow \{y\}$, y por tanto $\varphi^{-1}(\{y\}) = W$. Además tenemos que $\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) < \infty$, por lo que está formada por un número finito de puntos. Las componentes irreducibles de un conjunto finito son los conjuntos unipuntuales. Como W es irreducible por

hipótesis entonces $W = \{x\}$ y $\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) = 1$. Finalmente tenemos que $[K(W) : K(\mathbb{A}^m)] \geq 1$, entonces $\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) \leq [K(W) : K(\mathbb{A}^m)]$. Supongamos válido el resultado para $\dim(W) \leq m-1$.

Caso $\dim(W) = m$. Sea $y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{A}^m(K)$ y sea $A = \mathbb{K}^{m-1} \times \{y_m\}$, el hiperplano afín definido por la última coordenada de y. Supongamos que $\varphi^{-1}(\{y\})$ es finita y consideramos la fibra $\varphi^{-1}(A) \subseteq W$. Entonces tenemos que se verifican las siguientes propiedades.

- La fibra $\varphi^{-1}(A)$ es una hipersuperficie de W y sus componentes irreducibles son también hipersuperficies de W, por tanto todas sus componentes irreducibles tienen dimensión $m-1$.
- Sea $\mathscr{C}$ la familia de componentes irreducibles C de $\varphi^{-1}(A)$ tales que $\varphi^{-1}(\{y\}) \cap C \neq \emptyset$. Entonces la restricción $\varphi|_C : C \longrightarrow A$ es un morfismo dominante.
- Finalmente tenemos que:

$$\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\}) \cap C\right) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} [K(C) : K(A)]. \tag{2.2.8}$$

A continuación, se va a proceder a realizar la prueba de las propiedades anteriores.

- Sea $\varphi := (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ la definición por componentes del morfismo φ, donde $\varphi_i \in K[W]$ (anillo de funciones polinomiales sobre la variedad W, $\varphi_i : W \longrightarrow K$). Tenemos entonces que:

  $$\varphi^{-1}(A) = \{x \in W : \varphi(x) \in A\} = \{x \in W : \varphi_m(x) - y_m = 0\} = W \cap V_{\mathbb{A}}\left(\varphi_m(x) - y_m = 0\right).$$

  Lo que se corresponde con la restricción a W de la variedad de ceros de un ideal principal. A consecuencia del Teorema de los Ideales Principales de Krull (I.3.10), todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ tiene altura como máximo 1. En particular en este caso, como $f_m(x) = \varphi_m(x) - y_m$ no es divisor de cero, por ser $K[W]$ dominio de integridad, se alcanza la igualdad. Por la biyección existente entre ideales primos minimales y variedades algebraicas irreducibles (I.3.9), $\dim(C) = \dim(W) - 1 = m - 1$.
- Para la segunda afirmación consideramos la restricción a C del morfismo φ:

  $$\varphi|_C : C \longrightarrow \overline{\varphi(C)}^z \subseteq A$$

  donde $\overline{\varphi(C)}^z$ representa la clausura Zariski de $\varphi(C)$ con respecto a A, y el contenido anterior se debe a que $\varphi(C) \subseteq A$ y A es cerrado. Por hipótesis $\varphi^{-1}(\{y\})$ finito y además por construcción $\varphi^{-1}(\{y\}) \cap C \neq \emptyset$. Por el Lema (2.2.1) tenemos que se verifica la siguiente desigualdad:

  $$0 = \dim\left(\varphi^{-1}(\{y\}) \cap C\right) = \dim\left(\varphi|_C^{-1}(\{y\})\right) \geq \dim\left(C\right) - \dim\left(\overline{\varphi(C)}^z\right)$$

  Entonces, podemos concluir que:

  $$m - 1 = \dim(A) \geq \dim\left(\overline{\varphi(C)}^z\right) \geq \dim(C) = m - 1.$$

  En particular, $\dim\left(\overline{\varphi(C)}^z\right) = m - 1$. Como $\overline{\varphi(C)}^z \subseteq A$, y además tenemos que A es irreducible y sus dimensiones coinciden, entonces por la Proposición (I.3.13) son iguales $\overline{\varphi(C)}^z = A$.
- En primer lugar tenemos que la primera desigualdad se debe al hecho de que dadas dos componentes irreducibles de $\varphi^{-1}(A)$, pueden tener intersección no vacía. Para la segunda desigualdad, basta considerar que $\varphi|_C : C \longrightarrow A = \mathbb{K}^{m-1} \times \{y_m\} \simeq \mathbb{K}^{m-1}$, es dominante entre espacios de dimensión $m-1$, entonces por hipótesis de inducción $\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\}) \cap C\right) \leq [K(C) : K(A)]$, $\forall C$.

Entonces, para probar el enunciado de la demostración basta ver que:

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} [K(C) : K(A)] \leq [K(W) : K(\mathbb{A}^m)]. \tag{2.2.9}$$

La idea de la prueba consiste en reducir el problema de forma que se pueda aplicar el Lema (2.2.4). Para ello definimos los siguientes morfismos de anillos y de variedades algebraicas:

- El morfismo dominante entre variedades algebraicas: $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{A}^m$, y el monomorfismo (1.3.4) inducido sobre las K-álgebras asociadas: $\varphi^* : K[\mathbb{A}^m] \hookrightarrow K[W]$, $f \longmapsto f + I_{\mathbb{A}}(W)$.
- Para cada $C \in \mathscr{C}$ consideramos la inclusión: $i_C : C \hookrightarrow W$, que induce un morfismo sobreyectivo de anillos: $i_C^* : K[W] \longrightarrow K[C]$. Sea $\mathfrak{p}_C = \ker(i_C^*)$, que es un ideal primo de altura 1. Para comprobarlo, consideramos i_C^* como un morfismo entre anillos cociente.

$$\begin{array}{ccc} i_C^* : K[X_1, \cdots, X_n]/I_{\mathbb{A}}(W) & \longrightarrow & K[X_1, \cdots, X_n]/I_{\mathbb{A}}(C) \\ f + I_{\mathbb{A}}(W) & \longmapsto & f + I_{\mathbb{A}}(C) \end{array} \implies \mathfrak{p}_C = \ker(i_C^*) = I_{\mathbb{A}}(C)/I_{\mathbb{A}}(W)$$

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}_C) = \operatorname{ht}(I_{\mathbb{A}}(C)) - \operatorname{ht}(I_{\mathbb{A}}(W)) = n - \dim(C) - (n - \dim(W)) = m - (m-1) = 1$$

- Sea $i : A \hookrightarrow \mathbb{A}^m$ la inclusión e $i^* : K[\mathbb{A}^m] \longrightarrow K[A], f(X_1, \cdots, X_m) \longmapsto f(X_1, \cdots, X_{m-1}, y_m)$ la proyección canónica, que tiene por núcleo el ideal principal $\mathfrak{q} := \ker(i^*) = I_{\mathbb{A}}(A) = (X_m - y_m)$.
- Para cada componente $C \in \mathscr{C}$, la restricción: $\varphi|_C : C \longrightarrow A$ es dominante e induce el morfismo de inclusiones naturales: $\varphi|_C^* : K[A] \hookrightarrow K[C]$, tal que $\varphi|_C^*(f + I_{\mathbb{A}}(A)) = f \circ \varphi|_C = f \circ \varphi + I_{\mathbb{A}}(C)$.

Con dichos morfismos, para cada $C \in \mathscr{C}$ se obtienen un diagrama conmutativo como el siguiente, donde los morfismos horizontales son inyectivos y los morfismos vericiales son sobreyectivos, ya que se obtienen respectivamente a partir de morfismos dominantes y morfismos inyectivos entre variedades algebraicas.

$$\begin{array}{ccc} K[\mathbb{A}^m] & \xhookrightarrow{\varphi^*} & K[W] \\ \downarrow{\scriptstyle i^*} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle i_C^*} \\ K[A] & \xhookrightarrow{\varphi|_C^*} & K[C] \end{array} \tag{2.2.10}$$

Para comprobar la conmutatividad del diagrama basta considerar que los morfismos verticales son las restricciones a dominios más pequeños de funciones regulares definidas a partir de variedades más grandes.

Sea $f \in K[\mathbb{A}^m]$ y consideramos su imagen por las dos posibles rutas del diagrama:

- $\varphi|_C^* \circ i^*(f) = \varphi|_C^*(f + I_{\mathbb{A}}(A)) = f \circ \varphi + I_{\mathbb{A}}(C)$
- $i_C^* \circ \varphi^*(f) = i_C^*(f \circ \varphi + I_{\mathbb{A}}(W)) = f \circ \varphi + I_{\mathbb{A}}(C)$

Entonces $\varphi|_C^* \circ i^* = i_C^* \circ \varphi^*$, y por tanto el diagrama es conmutativo.

Sea $S = K[A] \setminus \{0\}$ el sistema multiplicativamente cerrado de funciones polinomiales no nulas en $K[A]$. Considerando la localización en S, podemos extender el morfismo $\varphi^*|_C$, conservando la inyectividad:

$$S^{-1}K[A] = K(A) \hookrightarrow S^{-1}K[C] \subseteq K(C).$$

Esto dota a $K(C)$ de estructura de $K(A)$-álgebra finita, por lo que $S^{-1}K[C]$ es una subálgebra de $K(C)$ y por tanto un dominio. Como se indica en la Proposición (I.2.3), por ser $K[A] \subseteq K[C]$ una extensión entera, $S^{-1}K[A] \subseteq S^{-1}K[C]$ también lo es. Además, como $S^{-1}K[C]$ es dominio y $S^{-1}K[A] = K(A)$ cuerpo, entonces $S^{-1}K[C] \subseteq K(C)$ también lo es. Por ser $K(C)$ el cuerpo de fracciones de $K[C]$, es el menor cuerpo que lo contiene, y entonces $S^{-1}K[C] = K(C)$. A partir de ahora denotaremos por $\varphi^*|_C$, al morfismo de cuerpos obtenido a la extensión del morfismo del mismo nombre al localizar en S:

$$\varphi^*|_C : K(A) \hookrightarrow K(C), \ \ \forall C \in \mathscr{C}.$$

Por otro lado, sea $T := K[\mathbb{A}^m] \setminus \mathfrak{q}$, el sistema multiplicativamente cerrado definido como el complementario del núcleo de la aplicación i^*. Sea $T^{-1}K[\mathbb{A}^m] = K[\mathbb{A}^m]_{\mathfrak{q}}$ la localización de $K[\mathbb{A}^m]$ en $\mathfrak{q}$. Cabe destacar que $K[\mathbb{A}^m]_{\mathfrak{q}}$ es un anillo local cuyo ideal maximal $\mathfrak{q}^e := T^{-1}\mathfrak{q} = (X_m - y_m)$ es principal (y por tanto es un anillo de valoración discreta). Por ser i^* sobreyectivo de núcleo $\mathfrak{q}$, tenemos que $K[\mathbb{A}^m]/\mathfrak{q} \simeq K[A]$, entonces $qf(K[\mathbb{A}^m]/\mathfrak{q}) \simeq qf(K[A]) = K(A)$, donde qf representa el cuerpo de fracciones asociado a un dominio. Por otro lado, el Lema (2.2.5), nos proporciona el siguiente isomorfismo de cuerpos: $K(A) = K[\mathbb{A}^m]_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}^e$. Cabe destacar que en lo sucesivo, los isomorfismos de anillos van a ser denotados mediante igualdades. Además, tenemos que $T \cap K[A] = S$ ($i^*(T) = S$), por lo que podemos construir el siguiente morfismo, que es sobreyectivo por ser una proyección sobre el cociente:

$$T^{-1}i^* : T^{-1}K[\mathbb{A}^m] = K[\mathbb{A}^m]_{\mathfrak{q}} \longrightarrow S^{-1}K[A] = K(A) = K[\mathbb{A}^m]_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}^e,$$

que viene dado por la identidad siguiente:

$$T^{-1}i^*\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{i^*(f)}{i^*(g)}, \ \ \forall f \in K[\mathbb{A}^m], \ g \in T.$$

Definimos también la extensión a la localización en T del morfimos inyectivo φ^*, denotado por $T^{-1}\varphi^*$:

$$T^{-1}\varphi^* : K[\mathbb{A}^m]_{\mathfrak{q}} \hookrightarrow T^{-1}K[W]$$

Para que la localización por medio de un conjunto multiplicativamente cerrado tenga sentido, se necetita que este esté contenido en el anillo, por tanto en el morfismo anterior debe entenderse que cuando representamos $T^{-1}K[W]$, T se corresponde con la imagen de dicho conjunto por el morfismo φ^*. Finalmente, notemos que para cada $C \in \mathscr{C}$, el núcleo $\mathfrak{p}_C$ de i_C^* no tiene intersección no trivial con $\varphi^*(T)$, es decir $\mathfrak{p}_C \cap \varphi^*(T) = \emptyset$. Para comprobarlo, supongamos $g \in \mathfrak{p}_C \cap \varphi^*(T)$, entonces $i_C^*(g) = 0$ y $\exists f \in T : \varphi^*(f) = g$. Por tanto, $i_C^* \circ \varphi^*(f) = 0$. Por el diagrama conmutativo anterior tenemos que $\varphi|_C^* \circ i^*(f) = 0$, con $\varphi|_C^*$

inyectiva, entonces $i^*(f) = f|_A = f + \mathfrak{q} = 0$, por lo que $f \in \mathfrak{q}$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $f \in T = K[\mathbb{A}^*] \setminus \mathfrak{q}$. Esto hace que el morfismo siguiente esté bien definido:

$$T^{-1}i_C^* : T^{-1}K[W] \longrightarrow T^{-1}K[C] = K(C)$$

que viene dado por la identidad siguiente, donde de nuevo T está identificado con su imagen.

$$T^{-1}i_C^*\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{i_C^*(f)}{i_C^*(g)}, \ \ \forall f \in K[W], \ g \in T.$$

El núcleo de dicha aplicación es un ideal maximal: $\ker(T^{-1}i_C^*) = T^{-1}\mathfrak{p}_C$, ya que:

$$\kappa(T^{-1}\mathfrak{p}_C) = T^{-1}K[W]/T^{-1}\mathfrak{p}_C \simeq K(C),$$

por lo que tenemos una identificación del cuerpo residual con el cuerpo de fracciones. Además, tenemos que la contracción del ideal $T^{-1}\mathfrak{p}_C$, se corresponde con el extendido del ideal $\mathfrak{q}$: $(T^{-1}\mathfrak{p}_C)^c = \mathfrak{q}^e, \forall C \in \mathscr{C}$. Para comprobarlo, hacemos uso de la propiedad *ii*) de la Proposición (I.1.7).

$$\varphi^*(T)^{-1}\varphi^*(\mathfrak{q}) = \varphi^*(T)^{-1}\mathfrak{p}_C \cap \varphi^*(T)^{-1}\varphi^*(K[\mathbb{A}^m]) = \varphi^*(T)^{-1}[\mathfrak{p}_C \cap \varphi^*(K[\mathbb{A}^m])] \Longleftrightarrow \varphi^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}_C \cap \varphi^*(K[\mathbb{A}^m])$$

Sea $f \in \mathfrak{p}_C = \ker(i_C^*)$ y $f \in \varphi^*(K[\mathbb{A}^m])$. Entonces, existe $h \in K[\mathbb{A}^m]$ tal que $\varphi^*(h) = f$ y $i_C^* \circ \varphi^*(h) = 0$. Por la conmutatividad del diagrama anterior: $\varphi|_C^* \circ i^*(h) = 0$, y como $\varphi|_C^*$ es inyectiva $i^*(h) = 0$. Por tanto, $h \in \ker(i^*) = \mathfrak{q}$ y $f \in \varphi^*(\mathfrak{q})$. Los argumentos anteriores son válidos para cada una de las componentes irreducibles $C \in \mathscr{C}$ y nos permite extender para cada una de ellas el diagrama conmutativo anterior:

$$\begin{array}{ccc} K[\mathbb{A}^m]_{\mathfrak{q}} & \xhookrightarrow{\quad T^{-1}\varphi^* \quad} & T^{-1}K[W] \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T^{-1}i^*} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle T^{-1}i_C^*} \\ \kappa(\mathfrak{q}^e) = K(A) & \xhookrightarrow{\quad \varphi|_C^* \quad} & \kappa(T^{-1}\mathfrak{p}_C) = K(C) \end{array} \tag{2.2.11}$$

donde de nuevo los morfismos horizontales son inyectivos y los verticales son sobreyectivos. Consideramos la familia finita de ideales maximales $\mathscr{C}' = \{T^{-1}\mathfrak{p}_C : C \in \mathscr{C}\}$, que responde a las hipótesis del Lema (2.2.4), entonces se tiene la siguiente desigualdad:

$$\sum_{C\in\mathscr{C}} [\kappa(T^{-1}\mathfrak{p}_C) : \kappa(\mathfrak{q}^e)] = \sum_{C\in\mathscr{C}} [K(C) : K(A)] \leq [K(W) : K(\mathbb{A}^m)]$$

ya que $K(W) = qf(T^{-1}K[W])$ y $K(\mathbb{A}^m) = qf(K[\mathbb{A}^m]_{\mathfrak{q}})$. Finalmente por la Ec.(2.2.8) se concluye que:

$$\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) \leq [K(W) : K(\mathbb{A}^m)],$$

el cardinal de la fibra está acotado superiormente por el grado de la extensión de los cuerpos de funciones racionales asociados a las variedades algebraicas afines que definen el morfismo. □

En el enunciado del siguiente lema, se incluye el concepto de separabilidad en extensiones de cuerpos, que nos permite garantizar la igualdad en la relación anterior.

Definición 16. *Sea K un cuerpo y $f \in K[X]$ un polinomio irreducible. Se dice que f es separable si no posee raíces múltiples, es decir si $f(\alpha) = 0$ y por tanto $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$ con $g(\alpha) \neq 0$, implica que $m = 1$. Un elemento α algebraico sobre K se dice separable si lo es su polinomio mínimo y una extensión algebraica F/K se dice separable si cada uno de sus elementos es separable sobre K.*

Es inmediato comprobar a partir de esta definición que se verifica la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7. *Sea K un cuerpo y $f \in K[X]$ un polinomio irreducible, entonces se verifica que las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) f es separable.
ii) f y su derivada f', no tienen raíces en común ($m.c.d.(f, f') = 1$).
iii) $f' \neq 0$ (no es el polinomio idénticamente nulo).

Teorema 2.2.8. (Teorema del elemento primitivo). *Sea $K \subseteq L$ una extensión finita de cuerpos. Esta tiene un elementos primitivo si y solamente si hay un número finito de subextensiones de cuerpos F con $K \subseteq F \subseteq L$. Si la extensión es separable, entonces es simple y por tanto existe un elemento primitivo.*

Demostración. El enunciado y la prueba se pueden consultar en el Teorema 4.6 de [**La, 02**]. □

Notación 2.2.9. Conforme al Ejemplo (I.1.3) del Apéndice I dado un anillo R y un elemento $f \in R$ no nilpotente, R_f denota la localización de R por $S_f = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, f, f^2, \cdots\}$.

Lema 2.2.10. *Sea $A \subseteq B$ una extensión entera de álgebras de tipo finito sobre K, que son además dominio de integridad. Sean F y L respectivamente los cuerpos de fracciones de A y B. Supongamos finalmente que A es un dominio de factorización única (DFU) y que la extensión de cuerpos $F \subseteq L$ es finita y separable. Entonces existe $\theta \in B$ de forma que:*

i) Existe un polinomio irreducible (y por tanto primitivo) $P \in A[T]$ tal que P tiene discriminante no nulo, $P(\theta) = 0$ y P está asociado en $F[T]$ al polinomio mínimo de θ sobre F.

ii) Existe $e \in A \setminus \{0\}$ tal que la localización del conjunto multiplicativo $S_e = \{e^n : n \in \mathbb{N}\}$, satisface que la extensión de anillos siguiente es entera:

$$A_e : S_e^{-1}A \hookrightarrow B_e := S_e^{-1}B.$$

iii) Se tiene además que $B_e = A_e[\theta]$. En particular B_e es un módulo libre de rango finito y su rango satisface que $\operatorname{rang}_{A_e}(B_e)) = \deg_T(P)$, donde $\deg_T(P)$ es el grado de P con respecto a T.

De hecho, θ es un elemento primitivo de la extensión de cuerpos $F \subseteq L$, es decir $L := F[\theta]$ y entonces:

$$\operatorname{rang}_{A_e}(B_e)) = \deg_T(P) = [L : F].$$

Demostración. La extensión de cuerpos $F \subseteq L$ es finita y separable. Por el Teorema del Elemento Primitivo (2.2.8), existe un elemento primitivo θ de la extensión tal que $L = F[\theta]$ con $\theta \in L$. Multiplicando por denominadores se puede considerar que $\theta \in B \subseteq L$. Sea $\widetilde{P} \in F[T]$ el polinomio mínimo de θ sobre F. Como la extensión $F \subseteq L$ es separable, el polinomio $\widetilde{P}$ no tiene factores múltiples en $F[T]$ y por ello su discriminante con respecto a T es no nulo.

Como A es un DFU entonces multiplicando los coeficientes de $\widetilde{P}$ por denominadores y extrayendo factor común entre los coeficientes, se obtiene un polinomio $P \in A[T]$ primitivo e irreducible (*Lema de Gauss*), asociado en $F[T]$ a $\widetilde{P}$, con $P(\theta) = 0$ y discriminante no nulo con respecto a T. Con esto probamos *i)*.

Sea $a \in A \setminus \{0\}$ el coeficiente director de P con respecto a la variable T y sea $d := \operatorname{Dirc}_T(P) \in A \setminus \{0\}$. Por otro lado, sea $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq B$ una familia finita de generadores de B como K-álgebra. Como θ es un elemento primitivo de la extensión $F \subseteq L$, entonces existen polinomios univariados: $v_1, \cdots, v_n \in A[T]$ y un elemento no nulo $\rho \in A \setminus \{0\}$ tales que verifican las siguientes igualdades:

$$\rho x_i - v_i(\theta) = 0, \ \forall i, \ 1 \leq i \leq n. \tag{2.2.12}$$

Esto se debe a que $L = F[\theta]$, entonces $\{1, \theta, \cdots, \theta^{r-1}\}$, con $r = [L : F]$ es una base de la extensión. Como $x_i \in B \subseteq L$, entonces se puede escribir como combinación lineal de elementos de la base, dando lugar a un polinomio: $x_i = f_0 + f_1\theta + \cdots + f_{r-1}\theta^{r-1} \in F[T]$. Como $f_i \in F = qf(A)$, entonces $\exists \rho \in A \setminus \{0\}$, tal que $\rho f_i \in A$. Como mínimo valor de ρ tenemos el $m.c.m$ de los denominadores de los coeficientes f_i.

$$\rho x_i = \rho f_0 + \rho f_1\theta + \cdots + \rho f_{r-1}\theta^{r-1} = a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{r-1}\theta^{r-1} = v_i(\theta)$$

Sea $e := a\rho d \in A \setminus \{0\}$. A partir de él se define: $S_e := \{e^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, sistema multiplicativamente cerrado y las localizaciones $A_e = S_e^{-1}A$ y $B_e = S_e^{-1}B$. Por la Proposición (I.2.3) tenemos que $A_e \subseteq B_e$ es una extensión entera por serlo $A \subseteq B$, por lo que hemos probado *ii)*. Notemos además que a es una unidad en A_e, y entonces el polinomio P es unitario en $A_e[T]$, y por tanto $A_e \subseteq A_e[\theta]$ es una extensión entera. Como $\theta \in B$, entonces $A_e[\theta] \subseteq B_e$. Análogamente, como ρ es también una unidad en A_e se tiene que los generadores de B como K-álgebra verifican que: $x_i \in A_e[\theta], \forall i, 1 \leq i \leq n$ por la ecuación (2.2.12) y por tanto $B_e \in A_e[\theta]$, lo que nos da la igualdad $B_e = A_e[\theta]$ y que $A_e \subseteq B_e$ es una extensión entera.

Considerando el morfismo evaluación en θ para polinomios en $A_e[T]$, obtenemos el siguiente isomorfismo:

$$B_e = A_e[\theta] \simeq A_e[T]/(P(T)).$$

Como el polinomio mínimo es unitario, entonces además de ser isomorfismo de anillos, es un isomorfismo de A_e-módulos. Si $r = \deg_T(P)$, entonces $\langle 1, \theta, \cdots, \theta^{r-1} \rangle = A_e[\theta]$. Por tanto, podemos concluir que B_e es un módulo libre de rango finito igual al grado del polinomio P, lo que prueba *iii)*. Finalmente $L \subseteq F$ es una extensión de cuerpos con polinomio mínimo $P(T) \in F[T]$, por tanto el grado de la extensión coincide con el grado del polinomio, entonces:

$$\operatorname{rang}_{A_e}(B_e)) = \deg_T(P) = [L : F].$$

□

Teorema 2.2.11. *Con la misma notación e hipótesis que la Proposición (2.2.6), si además la extensión de cuerpos es separable, existe un abierto $U \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ tal que para todo $y \in U$ se tiene que:*

$$\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) = [K(W) : K(\mathbb{A}^m)]$$

Demostración. Como la dimensión de un conjunto localmente cerrado coincide con la de su clausura Zariski, basta probar el resultado cuando W es una variedad algebraica irreducible.

Sea $\varphi : W \subseteq \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ un morfismo dominante y $\varphi^* : K[\mathbb{A}^m] \hookrightarrow K[W]$ el monomorfismo de $K-$álgebras asociado. Identificando $K[\mathbb{A}^m]$ con su imagen por φ^*, a consecuencia de la inyectividad del morfismo se tiene que $A \subseteq B$, con $A = K[\mathbb{A}^m]$ y $B = K[W]$ es una extensión entera de anillos. Teniendo en cuenta que por ser K un cuerpo, A es un DFU y estamos bajo las hipótesis del Lema (2.2.10). Entonces existe $e \in A$ un elemento no nulo, tal que la extensión de anillos formada a partir de la localización en $S_e = \{e^n : n \in \mathbb{N}\}$ de A y B es entera.

$$A_e \hookrightarrow B_e.$$

Además, existe un elemento $\theta \in B$, tal que $B_e = A_e[\theta]$ y B_e tiene estructura de A_e-módulo libre de rango finito igual al grado de la extensión de cuerpos $[K(W) : K(\mathbb{A}^m)]$. Sea $P \in A[T]$ el polinomio asociado a θ construido como en el Lema (2.2.10), que es unitario visto como polinomio en $A_e[T]$, con discriminante no nulo y grado con respecto a la variable T, igual al grado de la extensión de cuerpos anterior.

Sea $U \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ el abierto Zariski que viene dado por la igualdad siguiente:

$$U := \{y \in \mathbb{A}^m(K) : e(y) \neq 0\} = \mathbb{A}^m \setminus V_{\mathbb{A}}(e),$$

que se corresponde con el conjunto de puntos para los cuales la localización sobre S_e está bien definida.

Para todo $y \in U$, como se muestra a continuación, la fibra $\varphi^{-1}(\{y\})$ es finita. Para ello consideramos el hecho de que los coeficientes del polinomio P pertenecen a A, y por lo tanto son funciones polinomiales sobre el espacio afín $\mathbb{A}^m$. Por medio de la evaluación en y, obtenemos diferentes polinomios con coeficientes en K. Esto nos permite describir al polinomio $P := P(y, Z)$, con $(y, Z) \in U \times K$, ya que así se preserva el valor el grado del mismo, pues el coeficiente director $a(y) \neq 0$. De este modo, sea $x := (x_1, \cdots, x_n) \in W$ tal que $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)) = (y_1, \cdots, y_m) = y$. Entonces se tiene que:

$$P(\varphi(x), f(x)) = 0,$$

donde $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$, tal que su clase de equivalencia $f + I_{\mathbb{A}}(W) \in K[W]$ satisface que $f + I_{\mathbb{A}}(W) = \theta$. En consecuencia la aplicación siguiente está bien definida:

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_y : \varphi^{-1}(\{y\}) & \longrightarrow & \{\zeta \in K : P(y, \zeta) = 0\} \\ x & \longmapsto & f(x), \end{array} \tag{2.2.13}$$

ya que si consideramos $f, g \in K[X_1, \cdots, X_n]$ tales que $f + I_{\mathbb{A}}(W) = g + I_{\mathbb{A}}(W)$, entonces $f = g + q$, con $q \in I_{\mathbb{A}}(W)$, por tanto si $x \in \varphi^{-1}(\{y\}) \subseteq W$, $f(x) = g(x)$ ya que $q(x) = 0$.

Veamos además que Φ_y es inyectiva. Como $y \in U$, entonces $\rho(y) \neq 0$, ya que $e := a\rho d \in K[\mathbb{A}^m]$, que es dominio de integridad. Entonces siguiendo el razonamiento del lema anterior, tenemos que $\forall y \in U$, existen polinomios univariados: $v_1, \cdots, v_n \in K[\mathbb{A}^m][Z]$, que verifican las siguientes ecuaciones:

$$\rho(y)x_i - v_i(\varphi(x), f(x)) = \rho(y)x_i - v_i(y, f(x)) = 0,\ \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

Entonces, dados $x := (x_1, \cdots, x_n), x' := (x'_1, \cdots, x'_n) \in \varphi^{-1}(\{y\})$ con $\Phi_y(x) = \Phi_y(x') \Longrightarrow f(x) = f(x')$:

$$x_i = \rho(y)^{-1}v_i(y, f(x)) = \rho(y)^{-1}v_i(y, f(x')) = x'_i,\ \ \forall i, 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto $x = x'$ y Φ_y es inyectiva. Dado que $a(y) \neq 0$, con a el coeficiente director de P con respecto a la variable T, el polinomio $P(y, Z) := P(y_1, \cdots, y_m, Z)$ es un polinomio no nulo univariado de grado $\deg_Z(P)$, es decir, su grado no disminuye al evaluar en las m primeras coordenadas. Entonces dado que Φ_y es inyectiva, y su imagen se encuentra contenida en el conjunto de raíces distintas de P con respecto a la variable Z para un y fijo, entonces la fibra $\varphi^{-1}(\{y\})$ es finita, por lo que se verifica que $\forall y \in U$:

$$\sharp\left(\varphi^{-1}(\{y\})\right) \leq \deg_Z(P(y, Z)) = \deg_Z(P(Y_1, \cdots, Y_m, Z)) = \deg_T(P) = [K(W) : K(\mathbb{A}^m)],$$

donde la última igualdad viene dada por el Lema (2.2.10). Para concluir la demostración queda ver que Φ_y dada por (2.2.13) es sobreyectiva para todo $y \in U$. Para ello construimos el abierto $W_e \subseteq W$ dado por la igualdad siguiente, que se corresponde con la contraimagen por φ del abierto U:

$$W_e := \{x \in W : e(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x)) \neq 0\} = \varphi^{-1}(U).$$

La relación con las variedades originales vinculadas al morfismo φ, viene dada por el diagrama conmutativo (2.2.14), donde i representa la inclusión. Este a su vez induce otro diagrama entre los anillos de funciones polinomiales asociados a las mismas. Por construcción tenemos que e, visto como elemento de $K[U]$, es

no nulo y por tanto admite una división bien definida. Esto nos permite identificar anillos de funciones polinomiales restringidas a abiertos, con localizaciones como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccc} W_e & \xrightarrow{\varphi|_{W_e}} & U \\ \downarrow{\scriptstyle i_W} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle i_U} \\ W & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{A}^m \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} K[U] & \xhookrightarrow{\varphi|^*_{W_e}} & K[W_e] \\ \downarrow{\scriptstyle i^*_W} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle i^*_U} \\ K[\mathbb{A}^m] & \xhookrightarrow{\varphi^*} & K[W] \end{array} \qquad \begin{array}{l} K[U] = S_e^{-1}K[\mathbb{A}^m] = K[\mathbb{A}^m]_e \\ K[W_e] = S_e^{-1}K[W] = K[W]_e \end{array} \tag{2.2.14}$$

donde en el caso de W se ha realizado la identificación: $S_e \equiv \varphi^*(S_e)$. Como $K[\mathbb{A}^m]$ es un DFU, entonces el polinomio $P(Y_1, \cdots, Y_m, Z)$ es primitivo e irreducible, y por tanto el ideal $\mathfrak{p} = (P)$ es un ideal primo en $K[\mathbb{A}^m]_e[Z]$. Consideramos la variedad asociada a dicho ideal, restringida a $U \times K$.

$$V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) = \{(y, \zeta) \in U \times K : P(y, \zeta) = 0\}$$

Por el Lema (2.2.10), entonces $K[\mathbb{A}^m]_e[Z]/\mathfrak{p} \simeq K[W]_e$, lo que nos permite construir la inclusión siguiente.

$$\begin{array}{rccc} i^* : & K[\mathbb{A}^m]_e[Z]/\mathfrak{p} & \longrightarrow & K[W_e] \\ & Y_i + \mathfrak{p} & \longmapsto & \varphi_i + I_{\mathbb{A}}(W) \\ & Z + \mathfrak{p} & \longmapsto & \theta = f + I_{\mathbb{A}}(W) \end{array} \tag{2.2.15}$$

Por ser i^* es un isomorfismo de $K-$álgebras, se tiene también un isomorfismo i entre sus respectivas variedades algebraicas, que viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{array}{rccc} i : & W_e & \longrightarrow & V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) \\ & x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_m(x), f(x)), \end{array} \tag{2.2.16}$$

Al ser i una biyección, se tiene que para todo $(y, \zeta) \in U \times K$, si $P(y, \zeta) = 0$, existe $x \in W_e$ tal que $\varphi(x) = y$ y $f(x) = \zeta$. Por tanto Φ_y es sobreyectiva[4].

Por tanto para cada $y \in U$, se tiene que Φ_y es una biyección entre la fibra $\varphi^{-1}(\{y\})$ y el conjunto de raíces $\{\zeta \in K : P(y, \zeta) = 0\}$. Estamos considerando que la extensión de cuerpos es separable, entonces $P(y, Z)$ es un polinomio univariado sin raíces múltiples, por tanto el cardinal de la fibra es igual a su grado con respecto a la variable Z, y por tanto $\forall y \in U$:

$$\sharp(\varphi^{-1}(\{y\})) = \deg_Z(P(y, Z)) = \deg_Z(P(Y_1, \cdots, Y_m, Z)) = [K(W) : K(\mathbb{A}^m)].$$

□

Una vez se ha establecido una relación entre el cardinal de las fibras finitas de un morfismo regular y el grado de la extensión de sus cuerpos de fracciones, se plantean dos lemas que caracterizan la condición de separabilidad para extensiones de cuerpos finitamente generadas.

Lema 2.2.12. *Sea $L = K(x_1, \cdots, x_n)$ un cuerpo finitamente generado sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado. Renombrando los elementos de $\{x_1, \cdots, x_n\}$ se tiene que existe $r \leq n$ tal que se verifican las siguientes propiedades:*

i) $\{x_1, \cdots, x_r\}$ es una familia de elementos de L algebraicamente independientes sobre K.

ii) Los elementos $\{x_{r+1}, \cdots, x_n\}$ son algebraicos y separables sobre $K(x_1, \cdots, x_r)$.

En particular, $\{x_1, \cdots, x_r\}$ es una base de trascendencia separable del L sobre K.

Demostración. En primer lugar, destaquemos que toda extensión de cuerpos finitamente generada, posee bases de trascendencia y todas ellas tienen el mismo cardinal (finito). Por ser $\{x_1, \cdots, x_n\}$ una familia de generadores de L como K-álgebra, existe un $r \leq n$, tal que la subfamilia $\{x_1, \cdots, x_r\}$ es una base de trascendencia de L/K y por tanto es algebraicamente independiente sobre K. Entonces, L es una extensión algebraica de $K(x_1, \cdots, x_r)$. Para comprobar la separabilidad de x_i con $r + 1 \leq i \leq n$, se considera la extensión: $K(x_1, \cdots, x_r)(x_i)$. Multiplicando por denominadores y extrayendo el máximo común divisor, sea $P \in K[T_1, \ldots, T_r][T_i]$ un polinomio primitivo tal que $P(x_1, \cdots, x_r, T_i)$ es el polinomio mínimo (y por tanto irreducible) de x_i sobre $K(x_1, \cdots, x_r)$. Si $P' \neq 0$, entonces m.c.d.$(P, P') = 1$, P y su derivada no tienen raices comunes y x_i es separable. En la expresión siguiente se calcula la derivada parcial con respecto a la variable T_i. Tenemos que:

$$P(x_1, \cdots, x_r, T_i) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x_1, \cdots, x_r) T_i^k \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial T_i}(x_1, \cdots, x_r, T_i) = \sum_{k=1}^{m} k\, a_k(x_1, \cdots, x_r) T_i^{k-1}$$

La derivada es nula, si $k a_k(x_1, \cdots, x_r) = 0, \forall k$. Ahora vamos a distinguir dos casos:

[4]De hecho, a partir de esta construcción se puede ver directamente que Φ_y es biyectiva.

- Si $ctca(K) = 0$, como $\{x_1, \cdots, x_r\}$ es algebraicamente independiente, entonces $a_k = 0$ y $P = a_0$, lo que es una contradicción por ser un polinomio irreducible.
- Si $ctca(K) = p$ (primo), entonces $a_k = 0$ ó p divide a k, entonces existe un polinomio Q que verifica:
$$P(T_i) = a_0 + a_p T_i^p + \cdots + a_{sp} T_i^{sp} = (b_0 + b_p T_i + \cdots + b_{sp} T_i^s)^p = [Q(T_i)]^p,$$
donde los coeficientes b_k se obtienen como las raíces p-ésima de los coeficientes de a_k ($a_k = b_k^p, \forall (r+1) \leq k \leq n$), por ser K un cuerpo algebraicamente cerrado. Esto es una contradicción de nuevo, con el hecho de que P es irreducible.

Por tanto, en ambos casos se ha probado que el polinomio y su derivada no comparten raíces, lo que nos garantiza la separabilidad de la familia de elementos algebraicos $\{x_{r+1}, \cdots, x_n\}$. □

Lema 2.2.13. (Criterio jacobiano para la separabilidad). *Sea F un cuerpo y $\mathbb{F}$ su clausura algebraica. Sea $\zeta := (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{F}^n$ un punto. Supongamos que existe una lista de polinomios $P_1, \cdots, P_n \in F[X_1, \cdots, X_n]$ que verifican que:*

i) $P_i(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = 0$, $1 \leq i \leq n$.

ii) La matriz jacobiana siguiente tiene rango n:
$$DP(\zeta) := \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial T_1}(\zeta) & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial T_n}(\zeta) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial T_1}(\zeta) & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial T_n}(\zeta) \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$$

Entonces la extensión de cuerpos, $F \subseteq F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ es separable.

Demostración. Sea $\mathfrak{m}_\zeta \subseteq \mathbb{F}[X_1, \cdots, X_n]$[5] el ideal maximal asociado al punto $\zeta := (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{F}^n$, y $\mathfrak{n}_\zeta^{(i)} = \mathfrak{m}_\zeta \cap F[X_1, \cdots, X_i]$, el ideal formado por todos los polinomios de $F[X_1, \cdots, X_i]$ que se anulan en $(\zeta_1, \cdots, \zeta_i)$, entonces $\mathfrak{n}_\zeta^{(i)}$ es un ideal maximal. Denotamos por $\mathfrak{n}_\zeta := \mathfrak{n}_\zeta^{(n)}$.

Por otro lado, consideramos la siguiente cadena de extensiones de cuerpos:
$$F_0 := F \subseteq F_1 := F(\zeta_1) \subseteq F_2 := F(\zeta_1, \zeta_2) \subseteq \cdots \subseteq F_n := F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n),$$
y los F-isomorfismos de cuerpos siguientes, obtenidos por el cociente con los ideales maximales $\mathfrak{n}_\zeta^{(i)}$:
$$F_i := F(\zeta_1, \cdots, \zeta_i) \simeq F[X_1, \cdots, X_i]/\mathfrak{n}_\zeta^{(i)}.$$

Para cada i, $1 \leq i \leq n$, sea $q_i := \text{Irred}(\zeta_i) \in F_{i-1}[X_i]$ el polinomio mínimo unitario de ζ_i, con respecto al cuerpo F_{i-1}. Como $F[X_1, \cdots, X_{i-1}]$ es un dominio de factorización única, existe $Q_i \in F[X_1, \cdots, X_{i-1}][X_i]$ polinomio primitivo y $a \in F[X_1, \cdots, X_{i-1}]$ tal que $a(\zeta_1, \cdots, \zeta_i) \neq 0$, que verifican las siguientes propiedades:

i) $Q_i(\zeta_i, \cdots, \zeta_{i-1}, X_i) = a(\zeta_i, \cdots, \zeta_{i-1}) q_i(X_i)$.

ii) Como a no depende de la variable X_i, entonces se verifica la siguiente relación entre las parciales.
$$\frac{\partial Q_i}{\partial X_i}(\zeta_i, \cdots, \zeta_{i-1}, X_i) = a(\zeta_i, \cdots, \zeta_{i-1}, X_i) \frac{\partial q_i}{\partial X_i}$$

iii) Como Q_i no depende de las variables $i+1 \leq k \leq n$, se tiene que:
$$\frac{\partial Q_i}{\partial X_k} \equiv 0, \quad \forall i+1 \leq k \leq n.$$

Notemos que el polinomio $Q_i \in F[X_1, \cdots, X_i]$ es irreducible y, por tanto primo. De no ser así, el polinomio siguiente no sería irreducible, en contra de la afirmación i).
$$Q_i(\zeta_1, \cdots, \zeta_{i-1}, X_i) \in F(\zeta_1, \cdots, \zeta_{i-1})[X_i]$$

Consideramos ahora los siguientes ideales primos de $F[X_1, \cdots, X_n]$:
$$\mathfrak{p}_i = (Q_1, \cdots, Q_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por inducción se prueba que para cada $i, 1 \leq i \leq n$ tenemos el siguiente F-isomorfismo de álgebras.
$$F[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{p}_i \simeq F_i[X_{i+1}, \cdots, X_n]$$

El caso $n = 0$ es trivial. Como hipótesis de inducción asumimos válida la afirmación para $i, 1 \leq i \leq n-1$.
$$F[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{p}_i \simeq (F[X_1, \cdots, X_{n-1}]/\mathfrak{p}_i)[X_n] \overset{\text{HI}}{\simeq} (F_i[X_{i+1}, \cdots, X_{n-1}])[X_n] \simeq F_i[X_{i+1}, \cdots, X_n]$$

[5] Considerando la localización $\mathbb{F}[X_1, \cdots, X_n]_{\mathfrak{m}_\zeta} = S^{-1}\mathbb{F}[X_1, \cdots, X_n]$ con $S = \mathbb{F}[X_1, \cdots, X_n] \setminus \mathfrak{m}_\zeta$. Dadas las hipótesis del enunciado, $\{P_1, \cdots, P_n\}$ constituyen un sistema regular de parámetros, por lo que se trata de un anillo local regular (el número mínimo de generadores del ideal maximal coincide con la dimensión de Krull). El anillo local contiene toda la información esencial relativa a la geometría del germen de funciones en ζ. Un punto es regular, si su anillo local es regular.

En la expresión anterior se ha probado el caso n, para $i < n$. Para $i = n$, basta considerar el morfirsmo evaluación de $F[X_1, \cdots, X_n]$ en $F[\zeta_1, \cdots, \zeta_n]$ y aplicar el Primer Teorema de Isomorfía. Por definición $\mathfrak{n}_\zeta$ coincide con el núcleo, entonces $\mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{n}_\zeta$. Como $F_i[X_{i+1}, \cdots, X_n]$ es dominio, los ideales $\mathfrak{p}_i$ son primos de altura i. Los ideales primos de altura n de $F[X_1, \cdots, X_n]$ son los maximales, entonces $\mathfrak{p}_n$ es maximal.

$$F[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{p}_n \simeq F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n), \text{ y } \mathfrak{n}_\zeta = (Q_1, \cdots, Q_n).$$

Los polinomios $P_1, \cdots, P_n$ pertenecen a $F[X_1, \cdots, X_n]$ y al ideal maximal $\mathfrak{m}_\zeta$ (por anularse en el punto) y por tanto a la contracción $\mathfrak{m}_\zeta^c := \mathfrak{n}_\zeta = \mathfrak{m}_\zeta \cap F[X_1, \cdots, X_n]$. Entonces, existe una matriz,

$$M(u) := (u_{ij}) \in \mathcal{M}_n(F[X_1, \cdots, X_n]) \text{ tal que } \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}$$

Después de calcular las derivadas parciales y evaluar en ζ las matrices jacobianas $DP(\zeta)$ y $DQ(\zeta)$ se relacionan mediante M del modo siguiente:

$$DP(\zeta) = M(u)DQ(\zeta) = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial X_1}(\zeta) & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial Q_2}{\partial X_1}(\zeta) & \frac{\partial Q_2}{\partial X_2}(\zeta) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial X_1}(\zeta) & \frac{\partial Q_n}{\partial X_2}(\zeta) & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial X_n}(\zeta) \end{pmatrix}, \tag{2.2.17}$$

donde se obtiene que la matriz $DQ(\zeta)$ es triangular inferior debido a la propiedad iii).

Finalmente, si para todo i, con $1 \leq i \leq n$, las extensiones de cuerpos $F_{i-1} \subseteq F_i = F_{i-1}(\zeta_i)$ son separables, lo será también la extensión $F \subseteq F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$. Si por el contrario existe una de tales extensiones que no es separable, sea $i = \min\{k : F_{k-1} \subseteq F_k \text{ no es separable}\}$. Entonces, la derivada $q_i'(T)$ se corresponde con el polinomio idénticamente nulo (Proposición (2.2.7)) y por ii) tenemos que:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial X_i}(\zeta) = 0.$$

Esta propiedad implica que la matriz jacobiana $DQ(\zeta)$ (triangular inferior) contiene la siguiente submatriz de rango como mucho $i - 1$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial X_1}(\zeta) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2}{\partial X_1}(\zeta) & \frac{\partial Q_2}{\partial X_2}(\zeta) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{i-1}}{\partial X_1}(\zeta) & \frac{\partial Q_{i-1}}{\partial X_2}(\zeta) & \cdots & \frac{\partial Q_{i-1}}{\partial X_{i-1}}(\zeta) & 0 \\ \frac{\partial Q_i}{\partial X_1}(\zeta) & \frac{\partial Q_i}{\partial X_2}(\zeta) & \cdots & \frac{\partial Q_i}{\partial X_{i-1}}(\zeta) & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, el rango de la matriz $DQ(\zeta)$ está acotado por $n-1$, y por tanto también el de la matriz $DP(\zeta)$, ya que $\mathrm{rg}(DP(\zeta)) \leq \min\{\mathrm{rg}(M(u)), \mathrm{rg}(DQ(\zeta))\}$, lo que contradice el enunciado de la proposición. □

2.3. Una Construcción Esencial

Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una variedad irreducible de dimension r donde K es un cuerpo algebraicamente cerrado. Sea $\mathbb{A}^{nr} := \mathbb{A}^{nr}(K)$ el espacio de matrices $r \times n$ con coeficientes en K. Finalmente, sea $\mathbb{A}^r := \mathbb{A}^r(K)$ el espacio afín de dimension r con coordenadas en K. Consideramos la siguiente función cuadrática:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{A}^{rn} \times V & \longrightarrow & \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r \\ & (M, x) & \longmapsto & (M, Mx). \end{array} \tag{2.3.1}$$

Proposición 2.3.1. *Con las notaciones precedentes se tienen las siguientes propiedades:*

i) El morfismo Φ es un morfimso dominante y la siguiente es una extensión finita (y por tanto algebraica) de cuerpos.

$$\Phi^* : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) \hookrightarrow K(\mathbb{A}^{rn} \times V)$$

ii) La extensión de cuerpos $\Phi^* : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) \hookrightarrow K(\mathbb{A}^{rn} \times V)$ es separable.

iii) Para todo punto $(M, b) \in \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$, si la fibra es un conjunto finito, entonces tenemos que:

$$\sharp\left(\Phi^{-1}(\{(M, b)\})\right) \leq [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)].$$

iv) Existe un abierto Zariski $U \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ tal que para todo $(M, b) \in U$ la fibra es un conjunto de cardinal finito y verifica la igualdad:

$$\sharp\left(\Phi^{-1}(\{(M, b)\})\right) = [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)].$$

DEMOSTRACIÓN. *Prueba de i):* Sean $X_1, \cdots, X_n$ las variables que representas las coordenadas de la variedad $V \in \mathbb{A}^n(K)$. Como K es un cuerpo infinito, por el Lema de Normalización de Noether (I.4.1), existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{r\times n}(K) = \mathbb{A}^{rn}$ tal que las variedades definidas por la identidad siguiente:

$$\begin{pmatrix} Y_1(X_1, \cdots, X_n) \\ \vdots \\ Y_r(X_1, \cdots, X_n) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

dan lugar a las clases de equivalencia módulo $I_{\mathbb{A}}(V)$: $y_i := Y_i + I_{\mathbb{A}}(V) \in K[V]$, que son algebraicamente independientes sobre K. Además, la extensión de anillos siguiente es entera:

$$K[y_1, \cdots, y_r] \hookrightarrow K[V].$$

Por el Teorema de Krull-Cohen-Seidenberg (I.2.10), dado que $V = \mathrm{Spm}(K[V])$ y $\mathbb{A}^r = \mathrm{Spm}(K[\mathbb{A}^r])$, la inclusión de anillos anterior, induce un morfismo sobreyectivo de variedades algebraicas:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & V & \longrightarrow & \mathbb{A}^r \\ & x & \longmapsto & Mx \end{array}$$

tal que para toda $b \in \mathbb{A}^r$, la fibra $\pi^{-1}(\{b\})$ es no vacía y finita (ver prueba Lema (2.2.1)). Sea $b \in \mathbb{A}^r$ un punto cualquiera y consideramos la fibra con respecto al morfismo Φ del punto $(M, b) \in \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$. Por construcción, $\Phi^{-1}(\{(M, b)\})$ es un conjunto no vacío y finito de $\mathbb{A}^{rn} \times V$ y por tanto tiene dimensión cero. Considerando la restricción a la clausura Zariski de su imagen, $\overline{\Phi(\mathbb{A}^{rn} \times V)}^z$, tenemos que Φ es dominante. Por el Lema (2.2.1), se tiene la desigualdad siguiente:

$$0 = \dim\left(\Phi^{-1}(\{(M, b)\})\right) \geq \dim\left(\mathbb{A}^{rn} \times V\right) - \dim\left(\overline{\Phi\left(\mathbb{A}^{rn} \times V\right)}^z\right)$$

Entonces despejando y teniendo en cuenta la dimensión de las variedades ambiente, podemos concluir que

$$nr + r = \dim\left(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r\right) \geq \dim\left(\overline{\Phi\left(\mathbb{A}^{rn} \times V\right)}^z\right) \geq \dim\left(\mathbb{A}^{rn} \times V\right) = nr + \dim(V) = nr + r$$

y por tanto Φ es un morfismo dominante. Como consecuencia $\Phi^* : K[\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r] \hookrightarrow K[\mathbb{A}^{rn} \times V]$ es un monomorfismo y la extensión a su cuerpo de fracciones es finita.

Prueba de ii): En primer lugar, comenzamos con la introducción de la notación que representan los generadores de la extensión de cuerpos. Denotamos por $x_j := X_j + I_{\mathbb{A}}(V), 1 \leq j \leq n$, los elementos de $K(V)$ definidos como las clases módulo $I_{\mathbb{A}}(V)$ de las coordenadas del espacio ambiente $V \subseteq \mathbb{A}^n$. Denotamos por $p_{i,j}$, las coordenadas del espacio de matrices $\mathbb{A}^{rn}$. Sea $L := K(\mathbb{A}^{rn}) = K(p_{i,j} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n)$ el cuerpo engendrado por las coordenadas de las matrices del espacio $\mathbb{A}^{rn}$. Sean finalmente, $Y_i, 1 \leq i \leq r$ las variables que representan las coordenadas de $\mathbb{A}^r$. Entonces tenemos que:

$$K(\mathbb{A}^{rn} \times V) = L(V) = L(x_1, \cdots, x_n), \quad K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) = L(Y_1, \cdots, Y_r). \tag{2.3.2}$$

El morfismo inyectivo de cuerpos Φ^*, es también un morfismo inyectivo de L-álgebras, que viene dado por:

$$\begin{array}{rccc} \Phi^*: & L(Y_1, \cdots, Y_r) & \longrightarrow & L(V) \\ & Y_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^n p_{i,j} x_j. \end{array} \tag{2.3.3}$$

Denotamos por $\zeta_i := \Phi^*(Y_i), 1 \leq i \leq r$. Se puede identificar $L(Y_1, \cdots, Y_r)$ como su imagen por Φ^*, que viene dada por $L(\zeta_1, \cdots, \zeta_r) \subseteq L(x_1, \cdots, x_n) = L(V)$. Como $K(V) = K(x_1, \cdots, x_n)$, por el Lema (2.2.12), renombrando las variables podemos suponer que $\{x_1, \cdots, x_r\}$ es una base de trascendencia separable de $K(V)$ sobre K. Cabe destacar que está constituida por r elementos ya que $\dim(V) = \mathrm{gr.tr}_{\mathbb{K}}(K(V))$. Entonces, por cada i, $r + 1 \leq i \leq n$, se verifica que:

- Existe $p_i \in K(x_1, \cdots, x_r)[T]$, tal que $p_i(x_i) = 0$.
- Eliminando denominadores obtenemos, un polinomio $P_i \in K[T_1, \cdots, T_r, T_i]$ tal que:

$$\frac{\partial P_i}{\partial T_i}(x_1, \cdots, x_r, x_i) \neq 0,$$

  a consecuencia de la separabilidad.

Consideramos ahora la matriz cuadrada no singular que viene dada por las r primeras coordenadas de $\mathbb{A}^{rn}$:

$$P := (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in GL_{n-r}(L)$$

y la relación matricial siguiente, que involucra a las coordenadas descritas anteriormente.

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r,1} & p_{r,2} & \cdots & p_{r,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (P|N) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

donde N es la submatriz que viene dada por:

$$N := \begin{pmatrix} p_{1,r+1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r,r+1} & \cdots & p_{r,n} \end{pmatrix}$$

Podemos reescribir la relación matricial (2.3.4), de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}N \\ 0 & Id_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ donde la matriz } U := \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}N \\ 0 & Id_{n-r} \end{pmatrix}, \text{ es inversible.}$$

Esta relación da lugar a un cambio de variables en $L(x_1, \cdots, x_n)$, que permite introducir una nueva familia de polinomios: $Q_{r+1}, \cdots, Q_n \in L[Z_1, \cdots, Z_r, T_{r+1}, \cdots, T_n]$ dada por la identidad siguiente:

$$Q_i := P_i \circ U^{-1},\ r+1 \leq i \leq n.$$

Esta nueva familia de polinomios satisface que $Q_i(\zeta_1, \cdots, \zeta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) = 0$ en $L(x_1, \cdots, x_n) = L(\zeta_1, \cdots, \zeta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n)$ para todo $r+1 \leq i \leq n$. Aplicando la Regla de la Cadena:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial T_j}(\zeta_1, \cdots, \zeta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) = \frac{\partial P_i}{\partial T_j}(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) \neq 0$$

y por tanto la matriz jacobiana $DQ(\zeta_1, \cdots, \zeta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) \in \mathcal{M}_{n-r}(L)$ tiene rango $n-r$ (máximo). Por el Lema (2.2.13), tomando $F := L(\zeta_1, \cdots, \zeta_r)$ se puede concluir que:

$$L(\mathbb{A}^r) = F \subseteq L(V) := F(x_{r+1}, \cdots, x_n).$$

es una extensión de cuerpos separable, y dadas las igualdades (2.3.2) se tiene la prueba del enunciado.

Prueba de iii): La prueba de esta propiedad es consecuencia inmediata de la Proposición (2.2.6), aplicada al morfismo dominante Φ, teniendo en cuenta las propiedades ya probadas en los apartados anteriores.

Prueba de iv): Finalmente la prueba de esta propiedad se obtiene a partir del Teorema (2.2.11). □

Observación 2.3.2. La construcción anterior también es válida cuando V es localmente cerrado.

Este resultado permite establecer una definición del grado para conjuntos algebraicos, por medio de grado de las extensiones de cuerpos de funciones racionales, dadas por un morfismo dominante entre variedades.

Definición 17. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica irreducible de dimensión r. Con las notaciones precedentes, definimos el grado de V como:*

$$\deg(V) := [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} : \mathbb{A}^r)].$$

Nótese también que, con las notaciones precedentes $\deg(V)$ *se corresponde con el cardinal de la fibra genérica $\Phi^{-1}(\{(M,b)\}) \in \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ y el máximo dentro del subconjunto de las que tienen cardinal finito:*

$$\deg(V) = \max\{\sharp(\Phi^{-1}(\{(M,b)\})) :\ \sharp(\Phi^{-1}(\{(M,b)\})) < \infty\}.$$

Si V es una variedad algebraica general, el grado se corresponde con la suma de los grados de sus componentes irreducibles. Si V es un conjunto localmente cerrado, se define su grado como el grado de su clausura Zariski.

2.4. Noción (geométrica) de grado de un conjunto localmente cerrado afín

En esta sección se va a tratar de dar una interpretación geométrica a la noción de grado de una variedad algebraica afín, definida al final de la sección anterior. Esto va a permitir garantizar la buena definición del grado de un conjunto localmente cerrado, como el grado de su clausura Zariski.

Sean $r, n \in \mathbb{N}$ dos números enteros positivos tales que $r \leq n$. Sea $\mathbb{G}(n,r)$ la "Grassmanniana" de variedades afines lineales de codimensión a lo sumo r en el espacio afín $\mathbb{A}^n(K)$. Definimos la proyección natural:

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{G}: & \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r & \longrightarrow & \mathbb{G}(n,r) \\ & (M,b) & \longmapsto & \mathbb{G}(M,b) := \{x \in \mathbb{A}^n : Mx^t - b = 0\} \end{array}$$

donde x^t representa el vector traspuesto de $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un subconjunto localmente cerrado irreducible de dimensión r. A partir de él definimos el conjunto:

$$\mathbb{G}(V) := \{L \in \mathbb{G}(n,r) :\ \sharp(V \cap L) < \infty\}.$$

Observación 2.4.1. Las comillas introducidas en el término Grassmanniana hacen referencia a que se está llevando a cabo un abuso de lenguaje en el uso de dicho término al estarse considerando una unión de Grassmannianas de codimensión fija y formadas cada una de ellas por variedades afines lineales en lugar de subespacios vectoriales como indica la definición usual.

Para establecer una definición del grado tanto de un conjunto localmente cerrado, como de un cerrado Zariski (variedad algebraica), se necesita probar primero que la aplicación $\mathscr{G}$ es abierta.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y $GL(n,\mathbb{K})$ el conjunto de matrices regulares $n\times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Gracias a la aplicación determinante, podemos identificar $GL(n,\mathbb{K})$ con un abierto de la topología de Zariski de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{A}^{n^2}(\mathbb{K})$. Tenemos así inducida una topología en $GL(n,\mathbb{K})$ que lo dota de estructura de grupo topológico.

Definición 18. *Un grupo topológico se define como una terna $(G,\mathscr{T},\cdot)$ donde:*

i) $(G,\mathscr{T})$ es un espacio topológico.
ii) $(G,\cdot)$ es un grupo.
iii) La aplicación producto $(\cdot : G\times G \longrightarrow G$, donde $(x,y)\longmapsto x\cdot y)$ es continua.
iv) La aplicación inversa $(^{-1}\colon G\longrightarrow G$, donde $x\longmapsto x^{-1})$ es continua.

Proposición 2.4.2. *El grupo $(GL(n,\mathbb{K}),\cdot)$ con la topologia Zariski es un grupo topológico.*

Demostración. Dado que el producto de matrices es una aplicación polinomial sobre $\mathbb{A}^{n^2}(\mathbb{K})$, entonces es continua para la topología producto sobre $GL(n,\mathbb{K})$ (restricción a un abierto de una aplicación continua), inducida por sus respectivas topologías de Zariski. En cuanto a la aplicación inversa $(^{-1})$. Definimos el polinomio $H\in\mathbb{K}[Y_{11},\cdots,Y_{nn}]$ de n^2 variables y consideramos el abierto Zariski:

$$\mathcal{D}_H := \{M\in GL(n,\mathbb{K}) : H(m_{11},\cdots,m_{nn})\neq 0\}.$$

Sea $d := \deg(H)$ el grado del polinomio H, y consideramos la contraimagen de $\mathcal{D}_H$ por $^{-1}$:

$$\widetilde{\mathcal{D}}_H = \{A\in GL(n,\mathbb{K}) : H(A^{-1})\neq 0\},\qquad A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\mathrm{Adj}(A^T)$$

Consideramos el polinomio de n^2 variables, que depende de las coordenadas de la matriz A:

$$\widetilde{H}(A) := \det(A)^d H(A^{-1}) = \det(A)^d H\left(\frac{\mathrm{Adj}(A^T)}{\det(A)}\right)$$

Entonces tenemos que $\widetilde{D}_H$ se puede reescribir como:

$$\widetilde{D}_H = \{A\in GL(n,\mathbb{K}) : \tilde{H}(A)\neq 0\},$$

es decir, la contraimagen de un abierto por la aplicación inversa es un abierto, y por tanto es continua. □

Definición 19. *Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico, $(G,\mathscr{T},\cdot)$ un grupo topológico y $G\times X\longrightarrow X, (g,x)\mapsto g\cdot x$; una acción a izquierdas. Decimos que la acción es continua cuando la aplicación que la define lo es.*

Observación 2.4.3. Si $G\times X\longrightarrow X$ es una acción continua, para cada $g\in G$, $L_g : X\longrightarrow X$ $(L_g(x)=g\cdot x)$ es un homeomorfismo de X.

Bajo estas condiciones la siguiente es una acción continua:

$$\begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K}) \\ (P,M) & \longmapsto & P\cdot M \end{array} \tag{2.4.1}$$

Proposición 2.4.4. *Sea $(X,\mathscr{T})$ un espacio topológico, $(G,\mathscr{T},\cdot)$ un grupo topológico y $G\times X\longrightarrow X$ una acción a izquierdas continua. Sea $X/_{\sim G}$ el conjunto cociente de las órbitas[6] de X por la acción de G. Consideramos en $X/_{\sim G}$ la topología cociente. Sea:*

$$\begin{array}{rccc} \pi : & X & \longrightarrow & X/_{\sim G} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Orb}_G(x) \end{array}$$

la proyección al cociente (continua). Entonces, π es una aplicación abierta.

Demostración. En primer lugar destacar que la aplicación π está bien definida ya que si $x\in \mathrm{Orb}_G(y)$, entonces $\mathrm{Orb}_G(y)=\mathrm{Orb}_G(x)$, por la propiedad transitiva de la relación de equivalencia.

Sea U un abierto de X y consideramos $\pi(U)\subseteq X/_{\sim G}$. Entonces, $\pi(U)$ es abierto para la topología cociente si y solamente si $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en X. El conjunto $\pi^{-1}(\pi(U))$ verifica la relación:

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in G} g\cdot U = \bigcup_{g\in G} L_g(U)$$

[6]Orbita de un elemento x_0: $\mathrm{Orb}_G(x_0)=\{x\in X : \exists g\in G, g\cdot x = x_0\}$.

La segunda igualdad es evidente y para la primera aplicamos doble contenido. Sea $x \in \bigcup_{g\in G} g\cdot U$, entonces $\exists g \in G$ e $y \in U$, tales que $x = g\cdot y$, y por tanto $x \in \mathrm{Orb}_G(y) = \mathrm{Orb}_G(x)$. Como: $\pi(U) = \{\mathrm{Orb}(\zeta) : \zeta \in U\}$, entonces $\pi(x) = \mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(y) \in \pi(U)$ y $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$. El argumento para el otro contenido es equivalente. Entonces, como L_g es un homeomorfismo $L_g(U)$ es abierto para cada $U \subseteq X$ abierto y la unión de una familia cualquiera de abiertos es abierto. □

Aplicación a la Grassmanniana. Consideramos ahora la aplicación $\mathscr{G}$, definida al comienzo de la sección. Consideramos las relaciones matriciales:

$$\tilde{M} = [M, -b], \tilde{x} = [x, 1] \text{ entonces } \tilde{M}\tilde{x} = 0 \Longleftrightarrow Mx = b$$

Esto permite reescribir la expresión de la aplicación $\mathscr{G}$ del modo siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{G}: & \mathbb{A}^{r(n+1)} & \longrightarrow & \mathbb{G}(n+1,r) \\ & \tilde{M} & \longmapsto & \mathbb{G}(\tilde{M}) := \{\tilde{x} \in \mathbb{A}^{n+1} : \tilde{M}\tilde{x}^t = 0\}, \end{array}$$

donde se verifica que $\mathbb{G}(\tilde{A}) = \mathbb{G}(\tilde{B}) \Longleftrightarrow \tilde{B} = P\tilde{A}$, con $P \in GL(n+1, \mathbb{K})$. En otras palabras, la Grassmanniana $\mathbb{G}(n+1, r)$ está identificada con el conjunto de órbitas de matrices $\tilde{M} \in \mathbb{A}^{r(n+1)}$ por la acción de grupos continua descrita en la Ec.(2.4.1). Considerando la topología cociente de la topología de Zariski de $\mathbb{A}^{r(n+1)}$ por la acción del grupo general lineal, $\mathscr{G}$ es una aplicación abierta.

Proposición 2.4.5. *Considerando la notación precedente, se verifican las siguientes propiedades:*

i) El conjunto $\mathbb{G}(V)$ es no vacío y contiene un abierto Zariski de $\mathbb{G}(n, r)$.
ii) El valor de $\max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(V)\}$ es finito.
iii) Existe un abierto Zariski: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{G}(n, r)$ tal que para todo $T \in \mathcal{U}$ se tiene que:

$$\sharp(T \cap V) = \max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(V)\}.$$

Demostración. Sea $\Phi : \mathbb{A}^{rn} \times V \longrightarrow \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ el morfismo introducido en la sección anterior. Sea $U \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ el abierto Zariski descrito en el apartado *iv*) de la Proposición (2.3.1) y sea $\mathbb{G}(U) \subseteq \mathbb{G}(n, r)$, su imagen por la aplicación $\mathscr{G}$. Para todo $\mathbb{G}(M, b) \in \mathbb{G}(U)$, se tiene que la fibra $\Phi^{-1}(\{(M, b)\})$ es finita, no vacía, y se puede identificar con el conjunto $V \cap \mathbb{G}(M, b)$. Entonces, para todo $L \in \mathbb{G}(U)$, $\sharp(L \cap V) < \infty$, y por tanto $\mathbb{G}(U) \subseteq \mathbb{G}(V)$ es no vacío. Además, teniendo en cuenta que $\mathbb{G}(U)$ es un abierto Zariski en $\mathbb{G}(n, r)$ (por ser $\mathscr{G}$ una aplicación abierta), entonces se tiene probado el apartado *i*). Una vez que se tiene que el conjunto $\mathbb{G}(V)$ es no vacío, por construcción del mismo tenemos que $\max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(V)\}$ es no nulo y finito, con lo que tendríamos probado el apartado *ii*). Finalmente para el último apartado, consideramos $L = \mathbb{G}(M, b) \in \mathbb{G}(V)$, por lo que $\sharp(V \cap L) < \infty$ o equivalentemente la fibra $\Phi^{-1}(\{(M, b)\})$ es finita. Entonces por el apartado *ii*) de la Proposición (2.3.1), tenemos una cota superior para $\sharp(L \cap V)$:

$$\sharp(L \cap V) = \sharp\left(\Phi^{-1}(M, b)\right) \leq [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)] < \infty.$$

Como esta relación se verifica para toda variedad lineal $L \in \mathbb{G}(V)$, entonces también para el máximo:

$$\max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(V)\} \leq [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)] < \infty.$$

Finalmente, por el apartado *iii*) de la Proposición (2.3.1), tenemos que si $(M, b) \in U$, el cardinal de la fibra dada por Φ, es igual al grado de la extensión de cuerpos. Sea $T := \mathbb{G}(M, b) \in \mathbb{G}(U)$, entonces:

$$\sharp(T \cap V) = \sharp\left(\Phi^{-1}(M, b)\right) = [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)] < \infty.$$

Recordando que $\mathbb{G}(U) \subseteq \mathbb{G}(V)$, el cardinal de la intersección $T \cap V$ debe coincidir con el máximo. Definimos $\mathcal{U} := \mathbb{G}(U)$, y por tanto se verifica la relación siguiente que da por probado *iii*).

$$\forall T \in \mathcal{U}, \quad \sharp(T \cap V) = \max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(V)\}.$$

□

Teniendo en cuenta las nociones anteriores, podemos definir la noción de grado de un localmente cerrado.

Definición 20. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un subconjunto localmente cerrado irreducible de dimensión r. Se define el grado de V como la cantidad siguiente:*

$$\deg(V) := \max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(n, r),\ \sharp(L \cap V) < \infty\} = [K(\mathbb{A}^{rn} \times V) : K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)]. \tag{2.4.2}$$

Sea $W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto localmente cerrado cualquiera y sean $C_1, \cdots, C_s$ sus componentes localmente cerradas irreducibles. El grado de W se define como la suma:

$$\deg(W) := \sum_{i=1}^{s} \deg(C_i). \tag{2.4.3}$$

La definición anterior combina dos interpretaciones del grado de un localmente cerrado:

- Una geométrica a través de intersecciones finitas con variedades afines lineales de codimensión igual a la dimensión de V.
- Y una algebraica a partir del grado de extensiones de cuerpos de funciones racionales, dadas por un morfismo regular.

Observación 2.4.6. Las variedades afines lineales que pertenecen al abierto $\mathcal{U}$, son aquellas que tienen codimensión igual a r (i.e. $\dim(L) = n - r$). La dimensión de la intersección responde a la inecuación:

$$\dim(V \cap L) \geq \dim(V) + \dim(L) - n$$

Si $\dim(L) > n - r$ (desigualdad estricta), entonces $\dim(V \cap L) > 0$ y por tanto la intersección no puede ser de cardinal finito.

2.4.1. Extensión de la definición a la clausura Zariski.

Una vez que se tiene una noción de grado para conjuntos localmente cerrados generales sobre un espacio afín, se va a tratar de extender dicha definición a conjuntos algebraicos por medio de la clausura Zariski. Para ello se plantea una serie de resultados que se recogen a continuación.

Observación 2.4.7. Sea K un cuerpo cualquiera y $(a_0, \cdots, a_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ un punto cualquiera y consideramos el conjunto: $a^\perp := \{(z_0, \cdots, z_n)\} \in K^{n+1} : a_0 z_0 + \cdots + a_n z_n = 0\}$.
Entonces, $a^\perp$ es un espacio vectorial de dimensión n en K^{n+1}, que se denomina subespacio ortogonal.

En lo sucesivo, consideraremos que K es un cuerpo algebraicamente cerrado. Vamos a plantear una construcción que se denomina *variedad de incidencia*.

Sea $W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una variedad algebraica irreducible de dimensión s. Sea $r \in \mathbb{N}$ un entero positivo tal que $r > s \geq 0$. Sea $\mathbb{A}^{rn}(K)$ el espacio afín de matrices $r \times n$ con coeficientes en K. Para cada matriz $A \in \mathbb{A}^{rn}(K)$, denotamos por $\ell_i^A : \mathbb{A}^n(K) \longrightarrow K$ a la aplicación lineal definida por la i-ésima fila de A:

$$\ell_i^A(x) := a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n, \ \ \forall x := (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{A}^n(K).$$

Definición 21. *Con las nociones anteriores, definimos la variedad de incidencia asociada a W y r como:*

$$\mathcal{I}_r(W) := \{(x, A, b) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r : x \in W,\ \ell_i^A(x) - b_i = 0, 1 \leq i \leq r\}.$$

Lema 2.4.8. *Sean π_1 y π_2 las proyecciones canónicas siguientes:*

$$\begin{array}{rccc} \pi_1: & \mathcal{I}_r(W) & \longrightarrow & \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r \\ & (x, A, b) & \longmapsto & (A, b) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \pi_2: & \mathcal{I}_r(W) & \longrightarrow & W \\ & (x, A, b) & \longmapsto & x \end{array}$$

Entonces, se verifican las propiedades siguientes:

i) La aplicación π_2 es sobreyectiva y para cada $x \in W$, la fibra $\pi_2^{-1}(\{x\})$ es una variedad afín lineal, identificada con un espacio vectorial de dimensión rn.

ii) Para cada componente irreducible C de $\mathcal{I}_r(W)$, se tiene que $\pi_2(C) = W$ y $\dim(C) = s + rn$. En particular tenemos que $\dim(\mathcal{I}_r(W)) = s + rn$.

Demostración. Para probar *i)* consideramos $(x_1, \cdots, x_n, -1) \in K^{n+1}$. Para cada $i, 1 \leq i \leq r$, sea:

$$L_i := \{(a_{i,1}, \cdots, a_{i,n}, b_i) \in \mathbb{A}^{n+1}(K) : a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n - b_i = 0\}.$$

Por la observación anterior, L_i es un subespacio vectorial de K^{n+1} con dimensión n. Entonces:

$$\pi_2^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times \prod_{i=1}^{r} L_i = \{(x, A, b) : (a_{i,1}, \cdots, a_{i,n}, b_i) \in L_i\},$$

y por tanto $\dim(\pi_2^{-1}(\{x\})) = rn$, lo que nos da la primera afirmación. Para probar *ii)*, consideramos $C \subseteq \mathcal{I}_r(W) \neq \emptyset$, una componente irreducible, y la variedad algebraica irreducible de dimensión $s + rn + r$, que viene dada por la identidad:

$$\widetilde{W} = W \times \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r.$$

Definimos los siguientes polinomios de grado 2, para cada $i, 1 \leq i \leq r$:

$$q_i(x, A, b) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - b_j.$$

Observamos que $\mathcal{I}_r(W)$ viene dada por la igualdad siguiente:

$$\mathcal{I}_r(W) = \widetilde{W} \cap V_{\mathbb{A}}(q_1, \cdots q_r), \text{ con } V_{\mathbb{A}}(q_i) := \{(x, A, b) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r : q_i(x, A, b) = 0\}.$$

Por la biyección entre componentes irreducibles e ideales primos minimales, tenemos que $C := V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p})$ para algún ideal primo minimal de $I_{\mathbb{A}}(\mathcal{I}_r(W))$. Por el Teorema de los Ideales Principales de Krull, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$ y

$$rn + s + r = \dim(\widetilde{W}) = \dim_K(K[\widetilde{W}]) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \mathrm{coht}(\mathfrak{p}) \leq r + \dim(C) \Longrightarrow \dim(C) \geq rn + s. \quad (2.4.4)$$

Por otro lado, sea $x \in C$. Por el apartado i), la fibra $\pi_2^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$ y $\dim(\pi_2^{-1}(\{x\})) = rn$. Consideramos la restricción de π_2 a C: $\pi_2|_C : C \longrightarrow W$, que es dominante sobre la clausura Zariski de su imagen. Por el Teorema de Dimensión de Fibras (2.2.1), tenemos que:

$$rn \geq \dim(\pi_2^{-1}(\{x\}) \cap C) \geq \dim(C) - \dim(\overline{\pi_2(C)}^z) \Longrightarrow rn + \dim(\overline{\pi_2(C)}^z) \geq \dim(C) \tag{2.4.5}$$

Como $\dim(\overline{\pi_2(C)}^z) \leq \dim(W)$, entonces, $\dim(C) = rn+s$ y $\dim(\mathcal{I}_r(W)) = rn+s$. Finalmente: $\dim(W) = \dim(\overline{\pi(C)}^z) = \dim(\pi_2(C))$, con $\pi_2(C) \subseteq W$, variedad irreducible, por tanto $\pi_2(C) = W$. □

Proposición 2.4.9. *Con las nociones precedentes, $\pi_1(\mathcal{I}_r(W))$ está contenido en una hipersuperficie propia de $\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$. Es decir, existe $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ abierto Zariski no vacío, tal que $\forall (A,b) \in \mathcal{W}$:*

$$W \cap \{x \in \mathbb{A}^n(K) : \ell_i^A(x) - b_i = 0,\ 1 \leq i \leq r\} = \emptyset.$$

Demostración. Dado un morfismo de variedades algebraicas tenemos que la dimensión de la imagen está acotada por la dimensión de la variedad, tal y como se indica en la Proposición (I.4.5). Entonces:

$$\dim(\pi_1(\mathcal{I}_r(W))) = \dim(\overline{\pi_1(\mathcal{I}_r(W))}^z) \leq \dim(\mathcal{I}_r(W)) = s + rn < r + rn = \dim(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r)$$

Luego $\overline{\pi_1(\mathcal{I}_r(W))}^z$ es una variedad algebraica propia (i.e. estrictamente contenida en $\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$). Entonces existe un abierto Zariski $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ tal que $\mathcal{W} \cap \pi_1(\mathcal{I}_r(W)) = \emptyset$ y $\mathcal{W} \neq \emptyset$.

Ahora si $(A,b) \in \mathcal{W}$ y existiera $x \in W \cap \{x \in \mathbb{A}^n(K) : \ell_i^A(x) - b_i = 0, 1 \leq i \leq r\} \neq \emptyset$, entonces $(x,A,b) \in \mathcal{I}_r(W)$ y $\pi_1(x,A,b) = (A,b) \in \pi_1(\mathcal{I}_r(W))$, lo cual es incompatible con que $\mathcal{W} \cap \pi_1(\mathcal{I}_r(W)) = \emptyset$. En conclusión:

$$W \cap \{x \in \mathbb{A}^n(K) : \ell_i^A(x) - b_i = 0,\ 1 \leq i \leq r\} = \emptyset.$$

□

Lema 2.4.10. *Sea $W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una variedad algebraica irreducible de dimensión s. Entonces, para todo $r > s$, existe un abierto Zariski $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ tal que, para todo $(M,b) \in \mathcal{W}$, la variedad afín lineal $\mathbb{G}(M,b)$ satisface:*

$$W \cap \mathbb{G}(M,b) = \emptyset.$$

En particular, si V es un localmente cerrado irreducible (no vacío) de dimensión r y $W := \overline{V}^z$ es su clausura Zariski, entonces existe un abierto Zariski $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ tal que para todo $(M,b) \in \mathcal{Q}$:

$$\sharp(\mathbb{G}(M,b) \cap V) = \sharp(\mathbb{G}(M,b) \cap W) = \deg(V) = \deg(W).$$

Demostración. Para la primera parte basta aplicar la Proposición (2.4.9) considerando que:

$$\mathbb{G}(M,b) = \{x \in \mathbb{A}^n(K) : \ell_i^M(x) - b_i = 0, 1 \leq i \leq r\}.$$

Para la segunda, sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ el abierto Zariski que se describe en la propiedad iv) de la Proposición (2.3.1). Como V es un conjunto localmente cerrado y W es su clausura Zariski, es un cerrado dimensión r (la dimensión de un localmente cerrado y su clausura coinciden). Entonces, $W \setminus V$ es una variedad algebraica[7] de dimensión como mucho $r-1$[8]. Sea $\mathcal{W}_{W\setminus V} \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^{r-1}$ el abierto Zariski de variedades lineales tal que si $L \in \mathcal{W}_{W\setminus V}$, entonces $L \cap (W \setminus V) = \emptyset$. Como $\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^{r-1}$ es un cerrado irreducible, entonces la intersección $\mathcal{Q} := \mathcal{U} \cap \mathcal{W}_{W\setminus V} \neq \emptyset$ es un abierto no vacío tal que, $\forall (M,b) \in \mathcal{Q}$:

$$\mathbb{G}(M,b) \cap W = \mathbb{G}(M,b) \cap V, \text{ ya que } (M,b) \in \mathcal{W}_{W\setminus V},$$
$$\text{y } \sharp(\mathbb{G}(M,b) \cap W) = \deg(W), \text{ ya que } (M,b) \in \mathcal{U}.$$

En consecuencia, para cada $(M,b) \in \mathcal{Q}$ se verifica que:

$$\deg(W) = \sharp(\mathbb{G}(M,b) \cap W) = \sharp(\mathbb{G}(M,b) \cap V) = \deg(V).$$

□

En la proposición siguiente se resumen algunas propiedades básicas de esta noción de grado.

Proposición 2.4.11. *Considerando las notaciones precedentes se verifica entonces que:*

i) Para todo conjunto localmente cerrado $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$, su grado coincide con el grado de su clausura para la Topología de Zariski.

$$\deg(V) = \deg\left(\overline{V}^z\right)$$

ii) El grado de un conjunto finito $C \subseteq \mathbb{A}^n$ coincide con su cardinal.

$$\deg(C) = \sharp(C).$$

[7] Como V es un localmente cerrado irreducible, se puede escribir como $V = C \cap U$, con C cerrado y U abierto. Definimos $W = \overline{V}^z = \overline{C \cap U}^z = C$, entonces $W \setminus V = C \setminus (C \cap U) = (\mathbb{A}^n \setminus U) \cap C$, y por tanto es la intersección de dos cerrados.

[8] Como $W \setminus V \subseteq W$ irreducible, si tuvieran la misma dimensión serían iguales y $V = \emptyset$ (Proposición (I.3.13)).

iii) El número de componentes irreducibles de un localmente cerrado está acotado por su grado.
iv) El grado de una variedad afín lineal es 1.
v) El grado de los conjuntos localmente cerrados es invariante por isomorfismos lineales o afines.
vi) Para cualquier polinomio $f \in K[X_1, \cdots, X_n]$, la hipersuperficie $V_{\mathbb{A}}(f) \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ satisface que:

$$\deg(V_{\mathbb{A}}(f)) \leq \deg(f)$$

Si además, el ideal (f) engendrado por f es radical, entonces se alcanza la igualdad.

$$\deg(V_{\mathbb{A}}(f)) = \deg(f)$$

Demostración. *Prueba de i)*: Por la Proposición (2.4.10), tenemos que si V es irreducible, entonces su grado coincide con el de su clausura Zariski. Además por definición, cuando V es un localmente cerrado general, su grado se obtiene como la suma de los grados de sus componentes irreducibles, que son densos en las componentes irreducibles de su clausura Zariski, lo que prueba el resultado.

Prueba de ii): Teniendo en cuenta que las componentes irreducibles de un conjunto finito son conjuntos unipuntuales, obtenemos directamente el resultado.

Prueba de iii): Como el grado de un localmente cerrado se obtiene como la suma de los grados de sus componentes irreducibles, basta considerar que V es un localmente cerrado irreducible. En este caso su número de componentes irreducibles es una. Si $\deg(V) < 1$, entonces $\deg(V) = 0$ y por tanto no interseca con ninguna variedad lineal por lo que $V = \emptyset$. Si $V \neq \emptyset$, entonces $\deg(V) \geq 1$.

Prueba de iv): En un espacio afín dadas dos variedades lineales, tenemos tres situaciones posibles: Son paralelas, la intersección es un punto, o una está contenida en la otra. En el último caso no se verificaría la condición de intersección finita. De las dos restantes, es la segunda la que da lugar al cardinal máximo.

Prueba de v): Como los isomorfismos lineales o afínes no cambian el dimensión de variedades afines lineales en $\mathbb{G}(n, r)$ y preservan la condición de ser componente irreducible de un localmente cerrado, tampoco cambian el valor del grado.

Prueba de vi): Como $V_{\mathbb{A}}(f)$ es una hipersuperficie, entonces $\dim(V_{\mathbb{A}}(f)) = n - 1$. Sea $L \in \mathbb{G}(n, n-1)$ y consideramos la restricción $f|_L$, que se puede ver como un polinomio univariado $F(T) \in K[T]$, donde T se corresponde con el parámetro de la recta L. Como F es univariado, su número de raíces distintas está acotado por su grado, entonces:

$$\sharp(L \cap V_{\mathbb{A}}(f)) = \{x \in L : f(x) = 0\} = \{t \in K : F(t) = 0\} \leq \deg(F) = \deg(f),\ \forall L \in \mathbb{G}(n, n-1).$$

Como la cota es válida para toda variedad lineal de $\mathbb{G}(n, n-1)$, $\deg(f)$, también acota al máximo de los cardinales con intersección finita, y por definición, también al grado de la variedad: $\deg(V_{\mathbb{A}}(f)) \leq \deg(f)$.

En el caso particular de que (f) sea radical: $(f) = \sqrt{(f)}$ y f es un polinomio sin múltiples factores. Por el Lema de Normalización de Noether, como K es un cuerpo infinito, podemos realizar un cambio lineal a las variables $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ de forma que f sea unitario con respecto a la variable Y_n y la siguiente sea una extensión entera de anillos:

$$K[Y_1, \cdots, Y_{n-1}] \hookrightarrow K[Y_1, \cdots, Y_n]/(f)$$

Por ser (f) radical f no tiene factores múltiples, y dado que f es unitario, esto se traduce en que el discriminante: $D(Y_1, \cdots, Y_{n-1}) := \mathrm{Disc}_{Y_n}(f) \in K[Y_1, \cdots, Y_{n-1}]$ es un polinomio no nulo. Entonces, podemos escoger un elemento $b \in \mathbb{A}^{n-1}(K)$, tal que $D(b) \neq 0$, de modo que $f(b, Y_n)$ es un polinomio univariado y unitario con grado: $\deg(f)$. Consideramos la recta:

$$L := \{(y_1, \cdots y_n) : y_i - b_i = 0, 1 \leq i \leq n-1\} \in \mathbb{G}(n, n-1).$$

Observamos, que los puntos en la intersección $L \cap V_{\mathbb{A}}(f)$, son biyectables con los ceros del polinomio $f(b, Y_n)$ en K, que son todos distintos, ya que f no tiene factores múltiples. Por lo que:

$$\deg(f) = \sharp(L \cap V_{\mathbb{A}}(f)) \leq \deg(V_{\mathbb{A}}(f)) \leq \deg(f) \Longrightarrow \deg(f) = \deg(V_{\mathbb{A}}(f)).$$

□

Observación 2.4.12. Gracias a la propiedad *i)* de la Proposición (2.4.11), podemos extender la definición anterior de grado definida para conjuntos localmente cerrados para variedades algebraicas, es decir para los cerrados de la topología de Zariski.

Definición 22. (Grado geométrico). *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto algebraico o localmente cerrado irreducible de dimensión r, entonces su grado geométrico se obtiene a partir de la siguiente igualdad:*

$$\deg(V) := \max\{\sharp(L \cap \overline{V}^z) : L \text{ variedad lineal de codimensión } r, \text{ y } \sharp(L \cap \overline{V}^z) < \infty\}$$

Si V es un conjunto algebraico o localmente cerrado arbitrario, su grado se obtiene a partir de la suma de los grados correspondientes a sus componentes irreducibles.

Teniendo en cuenta esta definición, en primer lugar cabría pensar que es válida para todo conjunto que se obtenga como combinación finita de uniones e intersecciones de conjuntos abiertos y cerrados para la topología de Zariski. Sin embargo, como se argumentará con más detalle en el Capítulo 4 del trabajo, esta definición genera problemas para los conjuntos constructibles (unión finita de localmente cerrados), pues no verifica la desigualdad de Bézout.

2.4.2. Grado geométrico para conjuntos algebraicos equidimensionales.

Con el fin de profundizar un poco más en la noción de grado, se va a enunciar una definición para conjuntos equidimensionales, que coincide con la del caso irreducible, ya que este no es más que un caso particular.

Definición 23. *Un subconjunto localmente cerrado $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ se denomina equidimensional si todas sus componentes irreducibles tienen la misma dimensión. O equivalentemente, V admite una descomposición:*

$$V := V_1 \cup \cdots \cup V_s,$$

donde $V_i \neq \emptyset$ es un localmente cerrado, denso en una variedad irreducible $\overline{V_i}^z$, tales que sus clausuras son distintas dos a dos ($\overline{V_i}^z \neq \overline{V_j}^z$) y se verifica que

$$\dim(V_i) = \dim(\overline{V_i}^z) = \dim(V)$$

Proposición 2.4.13. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto localmente cerrado equidimensional de dimensión r. Entonces, se tiene que su grado verifica la siguiente igualdad:*

$$\deg(V) = \max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(n,r), \sharp(L \cap V) < \infty\}.$$

Además, existe un abierto Zariski $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ tal que para todo $(M,b) \in \mathcal{U}$ se tiene que:

$$\sharp\left(\mathbb{G}(M,b) \cap V\right) = \deg(V),$$

donde $\mathbb{G}(M,b) := \{x \in \mathbb{A}^n : Mx^t = b\}$ es la variedad afín lineal definida por (M,b).

Demostración. En primer lugar consideramos la descomposición irredundanete en componentes localmente cerradas irreducibles de V:

$$V := (U_1 \cap V_1) \cup \cdots \cup (U_s \cap V_s),$$

donde $U_i \cap V_i \neq \emptyset$, con $U_i \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto Zariski y $V_i \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica irreducible distintas dos a dos (es decir, $V_i \neq V_j$ para todo $i \neq j$) y de la misma dimensión, por ser V equidimensional:

$$\dim(V) = \dim(U_i \cap V_i) = \dim(V_i), \ \ \forall i, 1 \leq i \leq r.$$

La última igualdad se debe a que $V_i = \overline{U_i \cap V_i}^z$ y la dimensión de un localmente cerrado coincide con la de su clausura Zariski. Por tratarse de una descomposición irredundante, ninguna de las variedades irreducibles involucradas está contenida en otra ($V_r \not\subseteq V_t, r \neq t$), entonces para todos r,t,i tales que $1 \leq r,t,i \leq s$, con $r \neq t$, se tiene que la dimensión se la intersección verifica que:

$$\dim(V_r \cap V_t) \leq \dim(V_i) - 1,$$

ya que para $i = r$ e $i = t$, $V_r \cap V_t \subseteq V_i$, con V_i irreducible y tienen la misma dimensión, entonces deberían ser iguales. Como estamos trabajando con un conjunto equidimensional, todas las variedades V_i tienen la misma dimensión y la cota anterior también se verifica para la unión, entonces:

$$\dim\left(\bigcup_{r \neq t}(V_r \cap V_t)\right) \leq \dim(V_i) - 1.$$

Consideramos ahora el abierto Zariski A definido como a continuación:

$$A := \mathbb{A}^n \setminus \left(\bigcup_{r \neq t}(V_r \cap V_t)\right)$$

y los abiertos Zariski $U_i' := U_i \cap A$, a partir de los cuales se tienen las propiedades siguientes:

- Por cada $i, 1 \leq i \leq s$, $U_i' \cap V_i \neq \emptyset$. Esto se debe a que si suponemos que $U_i' \cap V_i = \emptyset$, entonces

$$U_i \cap V_i \subseteq (\mathbb{A}^n \setminus A) = \left(\bigcup_{r \neq t}(V_r \cap V_t)\right) \Longrightarrow \dim(U_i \cap V_i) \leq \dim(V_i) - 1,$$

  lo cual supone una contradicción con el hecho de que $\dim(U_i \cap V_i) = \dim(V_i)$.
- Por cada i,j tales que $i \neq j$ se tiene que: $(U_i' \cap V_i) \cap (U_j' \cap V_j) = \emptyset$. De otro modo se tiene que:

$$\emptyset \neq (U_i' \cap V_i) \cap (U_j' \cap V_j) = A \cap (U_i \cap V_i) \cap (U_j \cap V_j) \subseteq A \cap V_i \cap V_j = \emptyset.$$

- El conjunto $V' := A \cap V$ es localmente cerrado y la siguiente es una descomposición del mismo en componentes localmente cerradas irreducibles, disjuntas dos a dos:

$$V' := (U'_1 \cap V_i) \cup \cdots \cup (U'_s \cap V_s). \tag{2.4.6}$$

Como V' es un conjunto localmente cerrado y $U'_i \cap V_i \neq \emptyset$, se concluye que:

$$\deg(V') = \deg\left(\overline{V'}^z\right) = \sum_{i=1}^{s} \deg\left(\overline{U'_i \cap V_i}^z\right) = \sum_{i=1}^{s} \deg(V_i) = \deg(V).$$

Por el Lema (2.4.10), existen abiertos $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$, tales que para todo $(M, b) \in \mathcal{U}_i$, se tiene que:

$$\sharp(\mathbb{G}(M, b) \cap (U'_i \cap V_i)) = \deg(V_i).$$

Además, por ese mismo resultado, existe un abierto $\mathcal{W}$, tal que para todo $(M, b) \in \mathcal{W}$, se tiene que:

$$\mathbb{G}(M, b) \cap \left(\bigcup_{r \neq t} (V_r \cap V_t)\right) = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{G}(M, b) \subseteq A.$$

Finalmente consideramos el conjunto formado por la intersección siguiente, que es no vacío y abierto.

$$\mathcal{U} := \mathcal{W} \cap \mathcal{U}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{U}_s.$$

Denotando $\mathcal{U}_0 := \mathcal{W}$, si $\mathcal{U} = \emptyset$, entonces $\exists i, j$ con $0 \leq i, j \leq s$, $i \neq j$, tales que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$, entonces:

$$[(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) \setminus \mathcal{U}_i] \cup [(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) \setminus \mathcal{U}_j] = (\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) \setminus (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) = \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r,$$

y $\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ se puede escribir como la unión de dos cerrados, estrictamente contenidos en él, ya que $\mathcal{U}_k \neq \emptyset$, lo que es una contradicción con el hecho de que sea irreducible.
Sea $(M, b) \in \mathcal{U}$, entonces dado $(M, b) \in \mathcal{W}$, y $\mathbb{G}(M, b) \cap V' = \mathbb{G}(M, b) \cap A \cap V = \mathbb{G}(M, b) \cap V$ y se verifica:

$$\sharp(\mathbb{G}(M, b) \cap V) = \sharp(\mathbb{G}(M, b) \cap V') = \sum_{i=1}^{s} \sharp(\mathbb{G}(M, b) \cap (U'_i \cap V_i)) = \sum_{i=1}^{s} \deg(V_i) = \deg(V),$$

donde la segunda igualdad se debe a la Ecuación (2.4.6) y al hecho de que las componentes irreducibles son disjuntas dos a dos, y la tercera al hecho de que $(M, b) \in \mathcal{U}_i$. En general tenemos, que si $(M, b) \in \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$,

$$\sharp(\mathbb{G}(M, b) \cap V) \leq \sum_{i=1}^{s} \sharp(\mathbb{G}(M, b) \cap (U_i \cap V_i)) \leq \sum_{i=1}^{s} \deg(V_i) = \deg(V)$$

En este caso obtenemos desigualdades, ya que las componentes irreducibles son no disjuntas en general. Entonces como la aplicación $\mathscr{G}$ descrita al principio de la sección es sobreyectiva, todo $L \in \mathbb{G}(n, r)$ se puede escribir de la forma $L := \mathbb{G}(M, b)$, y por tanto se verifica la afirmación del enunciado:

$$\deg(V) = \max\{\sharp(L \cap V) : L \in \mathbb{G}(n, r), \sharp(L \cap V) < \infty\}.$$

□

2.4.3. Subaditividad del grado para localmente cerrados y variedades algebraicas.

Finalmente, para cerrar el capítulo se va a probar la condición de subaditividad para el grado.

Proposición 2.4.14. *El grado es una función subaditiva. Dicho de otra forma, si $V, W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ son conjuntos localmente cerrados para la topología de Zariski, entonces:*

$$\deg(V \cup W) \leq \deg(V) + \deg(W).$$

Demostración. Como el grado de un localmente cerrado coincide con el grado de su clausira Zariski, es suficiente probar el resultado para variedades algebraicas. Consideramos en primer lugar la descomposición en componentes irreducibles de ambas variedades algebraicas.

$$V := V_1 \cup \cdots \cup V_r, \;\; W := W_1 \cup \cdots \cup W_s$$

Para comprobar la subaditividad, basta considerar que las componentes irreducibles de la unión, vienen dadas como un subconjunto del conjunto formado por las componentes irreducibles de V y W, entonces:

$$\deg(V \cup W) \leq \sum_{i=1}^{r} \deg(V_i) + \sum_{j=1}^{s} \deg(W_j) = \deg(V) + \deg(W),$$

donde la ultima igualdad se obtiene a partir de la Definición 20. □

CAPÍTULO 3

Desigualdad de Bézout para Localmente Cerrados: Grado del Producto Cartesiano

Índice

3.1. Desigualdad del grado para la intersección con variedades afines lineales 27
3.2. Grado de la imagen por un morfismo lineal de una variedad algebraica 28
3.2.1. Descomposición minimal de un constructible 28
3.3. Grado del producto cartesiano de conjuntos localmente cerrados. 30
3.4. Desigualdad de Bézout para conjuntos localmente cerrados 41

En este capítulo se va a realizar una prueba completa de la desigualdad de Bézout de J.Heintz, siguiendo los argumentos de [**He, 83**] para conjuntos localmente cerrados para la topología de Zariski sobre un espacio afín, que se extiende a su vez para los conjuntos algebraicos. Para ello se necesitan probar tres resultados fundamentales, que se corresponden con las tres siguientes secciones del capítulo:

- El grado de la intersección de una variedad afín lineal con una variedad algebraica (o conjuntos localmente cerrado), está acotado por el grado de la variedad: $\deg(L \cap V) \leq \deg(V)$.
- El grado de la imagen por un morfismo lineal entre variedades (o conjuntos localmente cerrados) está acotado por el grado de la variedad: $\deg(\mathscr{L}(V)) \leq \deg(V)$.
- El grado del producto cartesiano de dos variedades algebraicas afines (o localmente cerrados), es igual al producto de los grados: $\deg(V \times W) = \deg(V)\deg(W)$.

Una descripción más profunda de los principales contenidos del capítulo, se puede encontrar resumido en la subsección 0.2.2 del Capítulo 0: *"Introducción y Resumen de Contenidos de la Memoria"*.

3.1. Desigualdad del grado para la intersección con variedades afines lineales

Lema 3.1.1. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto localmente cerrado. Sea $L \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una variedad afín lineal. Entonces se verifica que el grado de V acota superiormente al grado de la intersección.*

$$\deg(L \cap V) \leq \deg(V).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que el grado de un conjunto localmente cerrado coincide con el de su clausura Zariski, basta probar el resultado cuando V es una variedad algebraica. Además, como el grado se puede expresar como la suma de los grados de las componentes irreducibles, podemos considerar para la prueba que V es irreducible.

Se va a proceder a realizar la prueba por inducción sobre la dimensión de L. Los casos extremos en que $L = \emptyset$ y $L = \mathbb{A}^n$ son triviales. Consideramos ahora que L es un hiperplano, con $\dim(L) = n-1$ y se puede expresar como $L := V_{\mathbb{A}}(f)$, donde f es un polinomio formado por términos lineales. Por tanto, la variedad $L \cap V = V_{\mathbb{A}}(f) \cap V$, se puede ver como el conjunto de ceros de $f|_V$. Sean $C_1, \cdots, C_s$, las componentes irreducibles de $L \cap V$. Por el Teorema de los Ideales Principales de Krull (I.3.10), la intersección $L \cap V$ es equidimensional y todas sus componentes irreducibles tienen dimensión $\dim(C_i) \geq \dim(V) - 1$ (ver prop. I.4.6). Si $\dim(C_i) = \dim(V)$, entonces como V es irreducible (prop. I.3.13), $L \cap V = V$, por lo que sus grados coincidiría y habríamos concluido la prueba.

Sea $r := \dim(V) - 1$, y consideramos ahora el caso en el que $\dim(C_i) = r$. A partir de las componentes irreducibles de $L \cap V$, definimos los siguientes conjuntos localmente cerrados irreducibles:

$$D_i := C_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} C_j \right) = \left[\mathbb{A}^n \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} C_j \right) \right] \cap C_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Por el Lema (2.4.10), para cada $i, 1 \leq i \leq s$, existe un abierto Zariski $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$, tal que para todo $(M, b) \in \mathcal{U}_i$, la variedad afín lineal $\mathbb{G}(M, b)$ satisface que:

$$\sharp(\mathbb{G}(M,b) \cap D_i) = \sharp(\mathbb{G}(M,b) \cap C_i) = \deg(D_i) = \deg(C_i) \tag{3.1.1}$$

donde se ha tenido en cuenta que $C_i = \overline{D_i}^z$, ya que C_i es un cerrado irreducible que contiene a D_i.

Sea $\mathcal{U} := \cap_{i=1}^s \mathcal{U}_i$ un abierto Zariski no vacío, por ser $\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ irreducible. Entonces para cada $(M, b) \in \mathcal{U}$, la variedad afín lineal $T := \mathbb{G}(M, b)$, cumple que:

$$T \cap (L \cap V) = (T \cap C_1) \cup \cdots \cup (T \cap C_s) = (T \cap D_1) \cup \cdots \cup (T \cap D_s),$$

donde la igualdad anterior se debe a que $(T\cap C_i)=(T\cap D_i)$, a consecuencia de la expresión (3.1.1). Como $D_i\cap D_j=\emptyset, \forall i\neq j$, la unión de la derecha de la expresión anterior es disjunta, entonces:

$$\sharp(T\cap(L\cap V))=\sharp(T\cap D_1)+\cdots+\sharp(T\cap D_s)=\sum_{i=1}^{s}\deg(D_i)=\sum_{i=1}^{s}\deg(C_i)=\deg(L\cap V).$$

Por otro lado, sea $(T\cap L)$ la variedad afín lineal de codimensión como mucho $r+1=\dim(V)$, ya que:

$$\dim(T\cap L)\geq\dim(T)+\dim(L)-n\Longrightarrow r\geq\operatorname{codim}(T)\geq\operatorname{codim}(T\cap L)-1,\quad (T\in\mathbb{G}(n,r)).$$

Entonces como $(T\cap V)\in\mathbb{G}(V)$ tenemos que:

$$\sharp((T\cap L)\cap V)\leq\max\{\sharp(S\cap V):S\in\mathbb{G}(n,r+1),\sharp(S\cap V)<\infty\}=\deg(V).$$

Como consecuencia podemos concluir que: $\sharp(T\cap(L\cap V))=\deg(L\cap V)\leq\deg(V)$. □

3.2. Grado de la imagen por un morfismo lineal de una variedad algebraica

El primer hecho importante a destacar para comenzar esta sección es que la imagen una variedad algebraica no es necesariamente un variedad algebraica, tal y como se muestra en el contraejemplo siguiente.

Ejemplo 3.2.1. (Semi-Croix de Berny). *Consideramos el morfismo de espacios afines:*

$$\begin{array}{rll}\Pi: & \mathbb{A}^3(\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{A}^2(\mathbb{C}) & W:=\{(x,y,z)\in\mathbb{A}^3(\mathbb{C}):xz+(y^2-1)=0\}\\ & (x,y,z)\longmapsto(x,y) & \Pi(W)=\{(x,y)\in\mathbb{A}^2(\mathbb{C}):x\neq0\}\cup\{(0,1),(0,-1)\}\end{array}$$

Si consideramos la imagen de dicha aplicación de W, obtenemos el subconjunto afín: $C:=\Pi(W)$, que no es un conjunto localmente cerrado. Para comprobarlo, basta tener en cuenta que $\overline{C}^z=\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$[1], que es irreducible, por lo que C sería un localmente cerrado irreducible. Entonces, C se puede escribir como: $C=U\cap V$, con U abierto y V variedad irreducible. Sin embargo, $\overline{C}^z=\overline{U\cap V}^z=V=\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, $C=U$ y por tanto abierto. Pero C no es un abierto Zariski, ya que la topología de Zariski es menos fina que la topología usual de $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ $(\mathcal{T}_Z\subseteq\mathcal{T}_U)$, pues para $z\in\{(0,\pm1)\}$, no se puede encontrar un $\epsilon>0$, tal que la bola $\mathcal{B}(\epsilon,z)\subseteq C$. Entonces C no es un conjunto localmente cerrado.

Sin embargo, la imagen de una variedad algebraica con respecto a un morfismo regular es siempre un constructible, es decir la unión finita de localmente cerrados. Esta afirmación se obtiene de forma directa a partir del siguiente teorema, que constituye un resultado fundamental de la Teoría de Eliminación, donde basta considerar que una variedad algebraica es un caso particular de un constructible.

Teorema 3.2.2. (Teorema de Chevalley). *Sea $\varphi:X\longrightarrow Y$ un morfismo regular de variedades y sea $V\subseteq X$ un conjunto constructible para la Topología de Zariski. Entonces $\varphi(V)$ es también un constructible.*

DEMOSTRACIÓN. Una prueba de este enunciado se encuentra en el Teorema 2, pg. 28 [**Ch, 64-65**]. □

En la siguiente subsección probamos que todo constructible se puede descomponer en una unión finita de conjuntos localmente cerrados irreducibles, bajo algunas hipótesis.

3.2.1. Descomposición minimal de un constructible.

Lema 3.2.3. *Sea $C\in\mathbb{A}^n(K)$ un conjunto constructible (unión finita de conjuntos localmente cerrados). Entonces existe un conjunto $\mathscr{C}:=\{U_1\cap V_1,\cdots,U_s\cap V_s\}$, de localmente cerrados irreducibles tales que:*

$$C:=(U_1\cap V_1)\cup\cdots\cup(U_s\cap V_s)\tag{3.2.1}$$

verificando las propiedades siguientes:

i) V_i es una variedad irreducible, $\forall i,\ 1\leq i\leq s$.
ii) U_i es el máximo de los abiertos Zariski $A_i\subseteq\mathbb{A}^n$ que cumplen que $A_i\cap V_i\subseteq C$.
iii) $V_i\neq V_j$, $\forall i,j$, tales que $i\neq j$, $1\leq i,j\leq s$.

DEMOSTRACIÓN. Como C es un constructible, se puede descomponer como una unión finita de conjuntos localmente cerrados: $C=W_1\cup\cdots\cup W_s$. Consideramos además que cada uno de los localmente cerrados se puede descomponer como unión finita de localmente cerrados irreducibles, entonces podemos considerar que C admite una descomposición como la siguiente:

$$C:=(A_1\cap V_1)\cup\cdots\cup(A_r\cap V_r),$$

donde para cada $i, 1\leq i\leq r$, $A_i\subseteq\mathbb{A}^n$ es un abierto Zariski y $V_i\subseteq\mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica irreducible que verifica que $V_i\neq V_j$ si $i\neq j$. En caso de que $V_i=V_i$, entonces $(A_i\cap V_i)\cup(A_j\cap V_j)=(A_i\cup A_j)\cap V_i$, con $A_i\cup A_j$ abierto Zariski, por tanto tenemos probado *iii)*. Finalmente para probar *ii)* es suficiente con elegir para cada i, el máximo de los conjuntos abiertos Zariski $U_i\subseteq\mathbb{A}^n$ tal que $U_i\cap V_i\subseteq C$. La

[1]Si un polinomio se anula en C, se tiene que anular en todo $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

existencia de este máximo está garantizada por el hecho de que la unión finita de abiertos es un abierto para cualquier topología. □

Observación 3.2.4. La descomposición de un constructible en localmente cerrados irreducibles no es única en general. Por tanto, una descomposición como la de la identidad (3.2.1), proporciona una descomposición de la clausura Zariski de C como unión finita de variedades irreducibles. Sin embargo, no necesariamente se trata de la descomposición de $\overline{C}^z$ en componentes irreducibles con la definición usual.

Ejemplo 3.2.5. (Continuación: Semi-Croix de Berny). *El constructible C del Ejemplo (3.2.1), verifica las condiciones del lema anterior, para (al menos) dos descomposiciones posibles:*

$$\Pi(W) = U \cup \{(0,1),(0,-1)\} = U \cup \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) : x^2+y^2-1=0\};\ \ U := \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) : x \neq 0\}.$$

La primera se corresponde con la unión de $C_1 := U$, $C_2 := \{(0,1)\}$ y $C_3 := \{(0,-1)\}$ y la segunda de $D_1 = U$ y $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) : x^2+y^2-1=0\}$, todos ellos localmente cerrados irreducibles[2]. Sin embargo, como $\overline{C}^z = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, sus componentes irreducibles (el propio conjunto) no están en biyección con las clausuras Zariski de los conjuntos irreducibles de dichas descomposiciones.

Proposición 3.2.6. *Sea $\mathscr{L} : \mathbb{A}^n(K) \longrightarrow \mathbb{A}^m(K)$ una aplicación lineal. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto localmente cerrado. Entonces,*

$$\deg\left(\overline{\mathscr{L}(V)}^z\right) \leq \deg(V)$$

Además, si $\mathscr{L}(V)$ es un localmente cerrado, entonces se tiene que:

$$\deg\left(\mathscr{L}(V)\right) \leq \deg(V).$$

Demostración. Como el grado de un localmente cerrado se descompone en la suma de los grados de sus componentes irreducibles, basta probar el resultado cuando V es un conjunto localmente cerrado irreducible. Por el Teorema de Chevalley tenemos que $\mathscr{L}(V)$ es un conjunto constructible.
Sea $r := \dim(\mathscr{L}(V))$. Por el Lema (3.2.3), $\mathscr{L}(V)$ admite una descomposición minimal como unión de conjuntos localmente cerrados irreducibles:

$$\mathscr{L}(V) = \bigcup_{i=1}^{s} (U_i \cap W_i),$$

donde $C_i := (U_i \cap W_i)$ es un localmente cerrado irreducible, U_i es un abierto Zariski y W_i es una variedad algebraica irreducible tal que $\overline{C_i}^z = W_i$. Además, podemos suponer que $W_i \neq W_j$ para cada $i \neq j$. Como V es irreducible, la clausura Zariski de la imagen $W := \overline{\mathscr{L}(V)}^z$ es una variedad algebraica irreducible en $\mathbb{A}^m(K)$, como se prueba en la Proposición (2.1.3). Entonces, se tiene que:

$$\mathscr{L}(V) = \bigcup_{i=1}^{s} C_i \Longrightarrow W = W_1 \cup \cdots \cup W_s.$$

Como W es irreducible, debe existir al menos un $i \in \{1, \cdots, s\}$ tal que $W = W_i$. Por la propiedad *iii)* del Lema (3.2.3) dicho índice i es único ($W_i \neq W_j$ para $i \neq j$).

Renombrando las componentes de $\mathscr{L}(V)$, tenemos que se verifica lo siguiente:

- $W = W_1$ y C_1 es el abierto Zariski de W, denso en W ($\overline{U_i \cap W_i}^z = W_i$).
- $W_j \subsetneq W$ con $2 \leq j \leq s$, entonces como W es irreducible, por la Proposición (I.3.13):

$$\dim\left(\bigcup_{j=2}^{s} W_j\right) < \dim(W) = r.$$

A partir de la unión anterior, que está estrictamente contenida en W, definimos el abierto Zariski:

$$U := U_1 \setminus \left(\bigcup_{j=2}^{s} W_j\right) = U_1 \cap \left(\mathbb{A}^n \setminus \bigcup_{j=2}^{s} W_j\right),$$

que por construcción es no vacío. Entonces por el Lema (2.4.10) existe $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^{rm} \times \mathbb{A}^r$ tal que para todo $(M,b) \in \mathcal{U}$ la variedad afín lineal $L := \mathbb{G}(M,b) \subseteq \mathbb{A}^m$ satisface que:

$$\deg(\overline{\mathscr{L}(V)}^z) = \deg(W) = \sharp(L \cap W) = \sharp(L \cap (U \cap W)) = \sharp(L \cap (U \cap C_1)) = \deg(C_1)$$

Definimos ahora $T := \mathscr{L}^{-1}(L) \subseteq \mathbb{A}^n$, que es también una variedad afín lineal. Tenemos que $\mathscr{L}(T \cap V) \subseteq L$ y $\mathscr{L}(V) \subseteq W$, entonces:

$$\mathscr{L}(T \cap V) \subseteq L \cap W = L \cap (U \cap W_1) \subseteq L \cap C_1.$$

[2] D_2 es irreducible, ya que $f(x,y) = x^2+y^2-1$ es irreducible en $\mathbb{C}[X,Y]$ y por tanto el ideal generado por él es primo.

Además, para todo punto $y \in L \cap U \cap W = L \cap U \cap W_1 \subseteq C_1$, como $C_1 \subseteq \mathscr{L}(V)$, existe $x \in V$ tal que $\mathscr{L}(x) = y$. Como $y \in L$, entonces $x \in T = \mathscr{L}^{-1}(L)$ y por tanto $x \in T \cap V$. Además, $y \in \mathscr{L}(T \cap V)$ por lo que tenemos la siguiente igualdad:

$$\mathscr{L}(T \cap V) = L \cap U \cap W.$$

Como $L \cap U \cap W_1$ es un conjunto finito de puntos, toda componente irreducible V' de $T \cap V$ se corresponde con un solo punto, al igual que su imagen $\mathscr{L}(V') \subseteq L \cap U \cap W$. Por tanto se verifica que:

$$\deg(\overline{\mathscr{L}(V)}^z) = \sharp(L \cap U \cap W) \leq \sharp\{V' : V' \text{ es una componente irreducible de } T \cap V\} = \deg(T \cap V).$$

donde la última igualdad se debe a que V' es unipuntual y por tanto coincide con el cardinal de $T \cap V$ (finito), que por definición es igual a su grado. Finalmente, por el Lema (3.1.1), tenemos la desigualdad:

$$\deg(\overline{\mathscr{L}(V)}^z) = \deg(T \cap V) \leq \deg(V).$$

En el caso en el que $\mathscr{L}(V)$ sea un conjunto localmente cerrado tenemos que $\deg(\overline{\mathscr{L}(V)}^z) = \deg(\mathscr{L}(V))$, con lo que queda probado el enunciado. □

3.3. Grado del producto cartesiano de conjuntos localmente cerrados.

En esta sección nos dedicamos a probar el resultado más exigente del capítulo, para lo cual hacemos uso de una serie de lemas técnicos, que se irán aplicando de forma progresiva en la prueba del resultado.

Lema 3.3.1. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una variedad algebraica de dimensión r. Sea $L := K(\mathbb{A}^{rn})$ el cuerpo de funciones racionales sobre las matrices $r \times n$. Consideramos $\{P_{i,j} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$ el conjunto de variables asociadas a las coordenadas de $\mathbb{A}^{rn}$, de forma que $L := K(P_{i,j} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n)$. Sea $K(\mathbb{A}^{rn} \times V)$ el cuerpo de funciones racionales introducido en la Proposición (2.3.1). Sean $x_i := X_i + I_{\mathbb{A}}(V) \in K[V], 1 \leq i \leq n$, las clases definidas por las variables del espacio $\mathbb{A}^n$ módulo el ideal $I_{\mathbb{A}}(V)$. Por cada i, $1 \leq i \leq r$ sean:*

$$\zeta_i := \sum_{j=1}^{n} P_{i,j} x_j \in K(\mathbb{A}^{rn} \times V)$$

Sea $\Phi : \mathbb{A}^{rn} \times V \longrightarrow \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r$ el morfismo dominante (2.3.1) con las propiedades indicadas en las Proposición (2.3.1). Entonces se tiene que:

i) La inclusión asociada al morfismo de anillos $\Phi^* : K[\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r] \hookrightarrow K[\mathbb{A}^{rn} \times V]$, identifica los anillos siguientes:

$$\Phi^*(K[\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r]) = K[\mathbb{A}^{rn}][\zeta_1, \cdots, \zeta_r] \subseteq K[\mathbb{A}^{rn} \times V].$$

ii) Existe un $K-$automorfismo de L, $\varphi : L \longrightarrow L$ tal que la siguiente es una extensión entera:

$$L[\zeta_1^*, \cdots, \zeta_r^*] \hookrightarrow L[\zeta_1^*, \cdots, \zeta_r^*, x_{r+1}, \cdots, x_n] = L[V], \quad \zeta_i^* = \sum_{j=1}^{n} \varphi(P_{i,j}) x_j.$$

Entonces, $L[\zeta_1, \cdots, \zeta_r] \simeq L[\zeta_1^*, \cdots, \zeta_r^*]$. Además tenemos que:

$$L(\zeta_1^*, \cdots, \zeta_r^*) = K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r), \quad L(\zeta_1^*, \cdots, \zeta_r^*, x_{r+1}, \cdots, x_n) = K(\mathbb{A}^{rn} \times V).$$

Y por cada i, $r+1 \leq i \leq n$, existe un polinomio $F_i \in L[Z_1, \cdots, Z_r, T_i]$ unitario con respecto a T_i de grado d_i, y existe $G_i(Z_1, \cdots, Z_r, T_i) \in L[Z_1, \cdots, Z_r, T_i]$ con $\deg(G_i) \leq \deg(F_i)$,

$$F_i := T_i^{d_i} + G_i(Z_1, \cdots, Z_r, T_i), \text{ tal que } F_i(\zeta_1^*, \cdots, \zeta_r^*, x_i) = 0 \text{ en } K(\mathbb{A}^{rn} \times V).$$

Demostración. Revisando la prueba de la afirmación *ii)* de la Proposición (2.3.1), vemos que $K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) = L(\zeta_1, \cdots, \zeta_r)$ y $K(\mathbb{A}^{rn} \times V) = L(\zeta_1, \cdots, \zeta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n)$. Además, para cada i, $r+1 \leq i \leq n$, existe un polinomio primitivo e irreducible $Q_i \in L[Z_1, \cdots, Z_r, T_i]$, tal que:

$$Q_i(\zeta_1, \cdots, \zeta_r, x_i) = 0, \, r+1 \leq i \leq n.$$

El automorfismo $\varphi : L \longrightarrow L$ se obtiene a partir del Lema de Normalización de Noether (I.4.1), que garantiza la existencia de un cambio de variables lineal dado por una matriz $M \in \mathcal{M}_{r \times n}(K)$, tal que:

$$\begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \vdots \\ \zeta_r^* \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

por tanto la siguiente es una extensión entera de anillos: $L[\zeta_1^*,\cdots,\zeta_r^*]\hookrightarrow L[\zeta_1,\cdots,\zeta_r,x_{r+1},\cdots,x_n]$. Consideramos la descomposición de la matriz M de forma que: $M:=(M_1|M_2), M_1\in GL(r,L), M_2\in\mathcal{M}_{r,n-r}(L)$. Además, por la identidad (2.3.3), si: $P:=(P_{i,j}:1\leq i\leq r, 1\leq j\leq n)$, entonces:

$$\begin{pmatrix}\zeta_1^*\\ \vdots\\ \zeta_r^*\end{pmatrix}=M_1\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \vdots\\ \zeta_r\end{pmatrix}+M_2\begin{pmatrix}x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(M_1P+(0_{r\times r}|M_2))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P'\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

donde $0_{r\times r}$, representa la matriz nula $r\times r$. El automorfismo φ de L se construye reemplazando las variables $P_{i,j}$ por las variables $P'_{i,j}$. En consecuencia tenemos que:

$$\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \vdots\\ \zeta_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{1,1}&\cdots&P_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ P_{r,1}&\cdots&P_{r,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}\zeta_1^*\\ \vdots\\ \zeta_r^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P'_{1,1}&\cdots&P'_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ P'_{r,1}&\cdots&P'_{r,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

y por tanto $L[\zeta_1,\cdots,\zeta_r]\simeq L[\zeta_1^*,\cdots,\zeta_r^*]$ y $L[\zeta_1^*,\cdots,\zeta_r^*]\hookrightarrow L[\zeta_1^*,\cdots,\zeta_r^*,x_{r+1},\cdots,x_n]$, es una extensión entera de anillos. Finalmente, como los polinomios Q_i son los polinomios mínimos asociados a x_i, con $r+1\leq i\leq n$, entonces tienen coeficiente director unidad. Componiendo el isomorfismo anterior, obtenemos los polinomios F_i con las características buscadas. □

Lema 3.3.2. *Sea $(A,\mathfrak{m})$ un anillo local y $\kappa(\mathfrak{m})=A/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual. Sea $A\subseteq B$ una extensión de anillos tal que B es una A-álgebra finitamente generada. Sea $A[X_1,\cdots,X_n]$ y supongamos que existe un morfismo sobreyectivo de A-álgebras:*

$$\pi:A[X_1,\cdots,X_n]\longrightarrow B.$$

Por cada polinomio $f\in A[X_1,\cdots,X_n]$, sea $\overline{f}\in\kappa(\mathfrak{m})[X_1,\cdots,X_n]$ el polinomio obtenido a partir de f considerando las clases módulo $\mathfrak{m}$ de sus coeficientes. Supongamos que tenemos una familia de polinomios $f_1,\cdots,f_n\in A[X_1,\cdots,X_n]$ que verifican las propiedades siguientes:

i) Sea $d_i:=\deg(f_i)$ y supongamos que el grado con respecto a la variable X_i es también d_i. Es decir $d_i=\deg(f_i)=\deg_{X_i}(f_i)$.

ii) El coeficiente del término $X_i^{d_i}$ de f_i es una unidad (y por tanto inversible).

iii) Los polinomios $\overline{f_1},\cdots,\overline{f_n}\in\kappa(\mathfrak{m})[X_1,\cdots,X_n]$ son univariados, es decir verifican que:

$$\overline{f_i}\in\kappa(\mathfrak{m})[X_i],\ \ 1\leq i\leq n$$

iv) Sea $\mathfrak{a}\subseteq A[X_1,\cdots,X_n]$ el ideal $\mathfrak{a}=(f_1,\cdots,f_n)$. Supongamos también que está contenido en el núcleo de π (es decir, $\pi(f_i)=0$ en B).

Entonces, B es un A-módulo finitamente generado y por consiguiente, la extensión $A\subseteq B$ es entera.

Demostración. Comenzamos probando el resultado cuando $n=2$. Supongamos dos polinomios $f,g\in A[X,Y]$ que verifica las propiedades indicadas en el enunciado, y que tienen la forma siguiente:

$$f:=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k(Y)X^k,\qquad g:=Y^m+\sum_{k=0}^{m-1}b_k(X)Y^k.$$

Sea $C_X(f)$ la matriz compañera de f con respecto a la variable X, que pertenece al conjunto de matrices $\mathcal{M}_n(A[Y])$. Ahora consideramos la matriz:

$$M:=g(C_X(f),Y)=Y^mId_n+\sum_{k=0}^{m-1}b_k(C_X(f))Y^k\in\mathcal{M}_n(A[Y])$$

El determinante de dicha matriz es la resultante de f y g con respecto a la variable X:

$$Res_X(f,g):=\det(M)\in A[Y].$$

Podemos observar que la resultante $Res_X(f,g)$ es un polinomio univariado de grado (con respecto a la variable Y) como mucho nm. Tomamos ahora las clases de equivalencia de los coeficientes de $Res_X(f,g)$, con respecto a $\mathfrak{m}$, que también es no constante:

$$\overline{Res_X(f,g)}=\det(M+\mathfrak{m})\in\kappa(\mathfrak{m})[Y].$$

Sea $\beta_k\in A$ el término independiente de $b_k\in A[X]$ para cada $k, 0\leq k\leq m-1$. Consideramos el desarrollo de los términos b_k en función de la variable X, y su paso al cociente:

$$b_k(X):=\beta_k+\sum_{i=1}^{d_k}b_{k,i}X^i\Longrightarrow\overline{b_k(X)}=(\beta_k+\mathfrak{m})+\sum_{i=1}^{d_k}(b_{k,i}+\mathfrak{m})(X)^i.$$

Por la hipótesis *iii*), $\overline{g}$ es un polinomio univariado en la variable Y, entonces $\overline{b_k(X)} = \beta_k + \mathfrak{m}$ y por tanto $b_{k,i} + \mathfrak{m} = 0 + \mathfrak{m}$ ($b_{k,i} \in \mathfrak{m}$ y es no unidad). A consecuencia de esto tenemos que:

$$M + \mathfrak{m} = Y^m(Id_n) + \sum_{k=0}^{m-1}(\beta_k + \mathfrak{m})(Id_n)Y^k = \left[Y^m + \sum_{k=0}^{m-1}(\beta_k + \mathfrak{m})Y^k\right] Id_n,$$

es decir, $M + \mathfrak{m}$ se corresponde con la matriz identidad, multiplicada por un elemento de $\kappa(\mathfrak{m})[Y]$, y por tanto es diagonal. Entonces, su determinante se obtiene como producto de los elementos de la misma:

$$\overline{Res_X(f,g)} = \left[Y^m + \sum_{k=0}^{m-1}(\beta_k + \mathfrak{m})Y^k\right]^n = Y^{nm} + h(Y), \tag{3.3.1}$$

donde $h(Y) \in \kappa(\mathfrak{m})[Y]$ es un polinomio de grado como mucho $nm-1$. Dado que $\deg_Y(Res_X(f,g)) \leq nm$, podemos obtener las siguientes conclusiones:

- La resultante módulo $\mathfrak{m}$, $\overline{Res_X(f,g)} \in \kappa(\mathfrak{m})[Y]$, es un polinomio unitario cuyo grado satisface que:

  $$\deg_Y(\overline{Res_X(f,g)}) = nm = \deg_Y(Res_X(f,g))$$

  Además, el coeficiente asociado al término Y^{nm} es una unidad de A, ya que el coeficiente director d de la resultante $Res_X(f,g)$, satisface que $d + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$, entonces $d \notin \mathfrak{m}$ y por tanto es unidad, ya que A es un anillo local.
- Para dos variables se tiene que el grado total de $Res_X(f,g) \in A[Y]$ es también nm.

  $$\deg_Y(Res_X(f,g)) = nm = \deg(Res_X(f,g)).$$

Por tanto, tenemos que la resultante es un polinomio univariado de grado positivo. Si denotamos por $\mathfrak{b} = (Res_X(f,g), f) \subseteq \mathfrak{a} = (f,g)$ y a $r = Res_X(f,g)$, tenemos que se verifica la siguiente relación:

$$A[X,Y]/\mathfrak{b} \simeq \left(A[Y]/(r)\right)[X]/(f|_r) \simeq R[X]/(f|_r)$$

donde $f|_r = f + (r)$ representa la clase de equivalencia de f módulo el ideal generado por la resultante, y R es en general un anillo. Como consecuencia tenemos que $A[X,Y]/\mathfrak{b}$ es un A-módulo finitamente generado y por tanto da lugar a una extensión entera de anillos[3]. Además, dado que $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ podemos definir la inclusión entre los cocientes, y dado que $\mathfrak{a} \subseteq \ker(\pi)$, se puede extender π a un morfismo $\widetilde{\pi}$ del anillo cociente, de modo que:

$$A \hookrightarrow A[X,Y]/\mathfrak{b} \xrightarrow{\varphi} A[X,Y]/\mathfrak{a} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} B.$$

Como φ y $\widetilde{\pi}$ son epimorfismos, B es una extensión entera de A. Ahora vamos a probar el caso general. Para ello aplicamos inducción sobre n, asumiendo válido el resultado hasta $n-1$.

Consideramos la lista de polinomios: $f_1, \cdots, f_n \in A[X_1, \cdots, X_n]$. A partir de la resultante definimos los polinomios g_i del modo siguiente:

$$g_i := Res_{X_n}(f_i, f_n) := \det(f_i(X_1, \cdots, X_{n-1}, C_{X_n}(f_n))), \;\; 1 \leq i \leq n-1.$$

Por argumentos análogos a los considerados en el caso $n = 2$, tenemos que los polinomios $g_1, \cdots, g_{n-1}$ verifican las propiedades siguientes:

- Para cada i con $1 \leq i \leq n-1$, el grado de los polinomios g_i, se corresponde con el producto:

  $$D_i := \deg(g_i) = \deg_{X_i}(g_i) = \deg_{X_n}(f_n) \cdot \deg_{X_i}(f_i).$$

  y por tanto es un polinomio de grado positivo (por lo que no se obtienen extensiones trascendentes).
- El coeficiente del término $X_i^{D_i}$ del polinomio g_i es una unidad en A, para cada $1 \leq i \leq n-1$.
- Para cada i, con $1 \leq i \leq n-1$, como $\overline{f_i} \in \kappa(\mathfrak{m})[X_i]$ entonces $\overline{g_i} \in \kappa(\mathfrak{m})[X_i]$. Además,

  $$\deg_{X_i}(\overline{g_i}) = \deg_{X_i}(g_i).$$

Consideramos ahora el ideal $\mathfrak{b} := (g_1, \cdots, g_{n-1})$ del anillo $A[X_1, \cdots, X_{n-1}]$. Por la hipótesis de inducción, el anillo siguiente es un A-módulo finitamente generado:

$$A[X_1, \cdots, X_{n-1}]/\mathfrak{b}$$

Como f_n es unitario, la resultante $g_i \in (f_i, f_n)$ entonces $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}^c$, donde $\mathfrak{a}^c := \mathfrak{a} \cap A[X_1, \cdots, X_{n-1}]$. Como en el caso anterior, el contenido $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}^c$, da lugar a un morfismo sobreyectivo:

$$\varphi : A[X_1, \cdots, X_{n-1}]/\mathfrak{b} \longrightarrow A[X_1, \cdots, X_{n-1}]/\mathfrak{a}.$$

[3]En caso de que f fuese irreducible, estaríamos ante una extensión finita de cuerpos y la extensión entera se traduciría en una estructura de espacio vectorial de dimensión finita.

por lo que $A[X_1, \cdots, X_{n-1}]/\mathfrak{a}^c$ es extensión entera de A. Finalmente, consideramos la inclusión natural:

$$A[X_1, \cdots, X_{n-1}]/\mathfrak{a}^c \hookrightarrow A[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}.$$

Como f_n es una ecuación de dependencia entera de X_n con respecto a las variables $\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$ esta extensión también es entera y podemos concluir que $A[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}$ es una extensión entera de A. De nuevo como π es un epimorfismo, considerando su extensión al cociente por el ideal $\mathfrak{a}$, tenemos que B es una A-módulo finitamente generado de A y una extensión entera de A. □

Lema 3.3.3. *Sea L un cuerpo infinito. Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local de maximal $\mathfrak{m}$ tal que $L \subseteq A$ y su cuerpo residual verifica que $\kappa(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m} \simeq L$. Sea $L(A) := qf(A)$ el cuerpo de fracciones de A y sea $F \supseteq A$ un cuerpo finitamente generado sobre $L(A)$ con grado de trascendencia r. Supongamos que $F := L(A)(x_1, \cdots, x_n)$ y los elementos $\{x_1, \cdots, x_n\}$ son escogidos de forma que $\{x_1, \cdots, x_r\}$ son algebraicamente independientes sobre A (y por tanto sobre L) y la siguiente extensión de anillos es entera:*

$$L[x_1, \cdots, x_r] \hookrightarrow L[x_1, \cdots, x_n].$$

Sea $M \in \mathcal{M}_{r\times n}(A)$, una matriz que verifica la siguiente relación:

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} M + \mathfrak{m} \\ 0_{(n-r)\times r} \quad Id_{n-r} \end{pmatrix} = Id_n \in GL_n(\kappa(\mathfrak{m})) \simeq GL_n(L) \tag{3.3.2}$$

donde $M + \mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{r\times n}(L)$ es la matriz obtenida al reemplazar las coordenadas de M por sus clases módulo $\mathfrak{m}$, $0_{(n-r)\times r}$ representa la matriz nula de dimensión $(n-r)\times r$ e Id_k la matriz identidad de dimensión k. Sean $\theta_1, \cdots, \theta_r \in F$ los elementos obtenidos a partir de la relación siguiente:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.3.3}$$

Entonces se tiene que: $[F : L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_r)] \leq [L(x_1, \cdots, x_n) : L(x_1, \cdots, x_r)]$.

Demostración. Por hipótesis se verifica que $L[x_1, \cdots, x_r] \subseteq L[x_1, \cdots, x_n]$ es una extensión entera de anillos. Como $L \subseteq A$, la ecuación de dependencia de cada elemento $x_i \in L[x_1, \cdots, x_n] \subseteq A[x_1, \cdots, x_n]$ sobre $L[x_1, \cdots, x_r]$, es también una ecuación de dependencia sobre $A[x_1, \cdots, x_r]$. Entonces la siguiente es también una extensión entera de anillos:

$$A[x_1, \cdots, x_r] \hookrightarrow A[x_1, \cdots, x_n].$$

El primer paso de la prueba consiste en probar que la familia $\{\theta_1, \cdots, \theta_r\}$ son algebraicamente independientes sobre A, lo que implica que $A[\theta_1, \cdots, \theta_r]$ es anillo de polinomios con r variables.

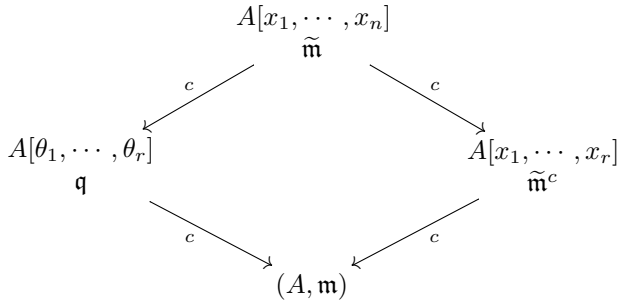
Tenemos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local, y consideramos la extensión de $\mathfrak{m}$ a $A[x_1, \cdots, x_r]$. Por la extensión de anillos anterior, existe un ideal $\widetilde{\mathfrak{m}} \subseteq A[x_1, \cdots, x_n]$, tal que $\widetilde{\mathfrak{m}}^c = \mathfrak{m}A[x_1, \cdots, x_r]$ y por tanto su contracción en A se corresponde con el maximal $\mathfrak{m}$.

Por la Ec. (3.3.3) tenemos que $A[\theta_1, \cdots, \theta_r] \subseteq A[x_1, \cdots, x_n]$. Sea $\mathfrak{q}$ la contracción de $\widetilde{\mathfrak{m}}$ a $A[\theta_1, \cdots, \theta_r]$, $\mathfrak{q} = \widetilde{\mathfrak{m}} \cap A[\theta_1, \cdots, \theta_r]$. El ideal $\mathfrak{q}$ es un ideal primo a consecuencia del Teorema de Krull-Cohen-Seidenberg (I.2.10), aplicable, ya que el siguiente, es un monomorfismo de anillos:

$$\begin{array}{ccc} A[\theta_1, \cdots, \theta_r] & \hookrightarrow & A[x_1, \cdots, x_n] \\ \theta_i & \longmapsto & \sum_{k=1}^n m_{i,k} x_k \end{array}$$

donde m_{i_k} se corresponden con los elementos de la matriz M. De no verificarse la inyectividad, la matriz $\overline{P}$ no podría ser biyectiva, en contra de las hipótesis del enunciado. Además, satisface que su contracción en el anillo A verifica que $\mathfrak{q}^c := \mathfrak{q} \cap A \supseteq \mathfrak{m}$. Como $\mathfrak{m}$ es maximal entonces $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{m}$.

La relación entre los ideales anteriores via contracción se representa en el diagrama siguiente.



(3.3.4)

Sea R la localización de $A[\theta_1, \cdots, \theta_r]$ en $\mathfrak{q}$, y denotamos por $\mathfrak{q}R$ la extensión de $\mathfrak{q}$ en R. La siguiente es una extensión de anillos locales, que puede extenderse a su vez a sus respectivos cuerpos residuales.

$$(A, \mathfrak{m}) \hookrightarrow (R, \mathfrak{q}R) \implies \kappa(\mathfrak{m}) \hookrightarrow R/\mathfrak{q}R$$

De esta forma, es posible identificar a L como un subcuerpo de $R/\mathfrak{q}R$.

A falta de realizar un cambio de variables con respecto a las coordenadas en L, se puede suponer que existe una lista de polinomios $f_{r+1}, \cdots, f_n \in L[X_1, \cdots, X_r, T_j]$, tal que para cada j, $r+1 \leq j \leq n$, f_j es unitario con respecto a la variable T_j, su grado con respecto a esta variable coincide con el grado total:

$$\deg(f_j) = \deg_{T_j}(f_j).$$

Además f_j es irreducible y se verifican las siguiente igualdades en $L[x_1, \cdots, x_n]$:

$$f_j(x_1, \cdots, x_r, x_j) = 0, \ \ \forall j, \ \ r+1 \leq j \leq n,$$

es decir, f_j es el polinomio mínimo de x_j. Además como $L \subseteq A$, las mismas propiedades se verifican en $A[x_1, \cdots, x_n]$. Sea $P \in \mathcal{M}_n(A)$ la matriz siguiente:

$$P = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0_{(n-r)\times r} & Id_{n-r} \end{pmatrix}; \quad M = (M_1|M_2) \in \mathcal{M}_{r\times n}(A).$$

La matriz $\overline{P}$ del enunciado se obtiene a partir de esta, considerando las clases de equivalencia módulo $\mathfrak{m}$ para cada una de las coordenadas. Como $\overline{P}$ es no singular y $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local, entonces $P \in GL_n(A)$ y por tanto se trata de una matriz inversible. La justificación de esta afirmación radica en el hecho de que por ser $(A, \mathfrak{m})$ local, $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de anillo (coincide con el radical de Jacobson) y por tanto con los elementos no unidades del anillo (I.5.1). El determinante de P verifica que:

$$\det(\overline{P}) = \det(P) + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m} \Longrightarrow \det(P) \notin \mathfrak{m}.$$

Entonces, $\det(P)$ es unidad y por tanto P es una matríz inverisible. Sea $P^{-1} := (q_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in GL(A)$ su inversa, que se corresponde con el siguiente cambio lineal de variables:

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \implies P^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.3.5}$$

Como $P \in GL(A)$, entonces podemos concluir que se verifica la siguiente igualdad de anillos:

$$A[x_1, \cdots, x_n] = A[\theta_1, \cdots, \theta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n],$$

Dado que $qf(A) = L(A)$, la igualdad anterior se puede extender a la siguiente igualdad de cuerpos:

$$F = L(A)(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) = L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n). \tag{3.3.6}$$

Por la identidad (3.3.2), tenemos que $\overline{P} := P + \mathfrak{m} = Id_n$ y por tanto su inversa verifica que:

$$P^{-1} + \mathfrak{m} := (q_{i,j} + \mathfrak{m}) \in \mathcal{M}_n(\kappa(\mathfrak{m})); \qquad q_{i,j} + \mathfrak{m} = \begin{cases} 1 + \mathfrak{m} & \text{si } i = j \\ 0 + \mathfrak{m} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

A partir de la Ecuación (3.3.5) se deduce la existencia de las siguientes formas lineales:

$$\lambda_i(Z_1, \cdots, Z_r, T_{r+1}, \cdots, T_n) := \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} Z_j + \sum_{\ell=r+1}^{n} q_{i,\ell} T_\ell \in A[Z_1, \cdots, Z_r, T_{r+1}, \cdots, T_n], \ 1 \leq i \leq n.$$

Por construcción se verifica que: $\lambda_i(Z_1, \cdots, Z_r, T_{r+1}, \cdots, T_n) = T_i$, $\forall i$, tal que $r+1 \leq i \leq n$.

Sean $\overline{\lambda}_i \in \kappa(\mathfrak{m})[Z_1, \cdots, Z_r, T_{r+1}, \cdots, T_n]$ las formas lineales obtenidas al reemplazar los coeficientes de λ_i por sus clases módulo $\mathfrak{m}$. Estas presentan la forma siguiente:

$$\overline{\lambda}_i := \sum_{j=1}^{r} (q_{i,j} + \mathfrak{m}) Z_j + \sum_{\ell=r+1}^{n} (q_{i,\ell} + \mathfrak{m}) T_\ell \in \kappa(\mathfrak{m})[Z_1, \cdots, Z_r, T_{r+1}, \cdots, T_n]. \tag{3.3.7}$$

verificando que dado que $P^{-1} + \mathfrak{m} = Id_n$, entonces $\overline{\lambda}_i = Z_i$, si $1 \leq i \leq r$ y $\overline{\lambda}_i = T_i$, si $r+1 \leq i \leq n$.

Nos fijamos ahora el anillo local $(R, \mathfrak{q}R)$ introducido anteriormente, como extensión local de $(A, \mathfrak{m})$. A partir de la relación anterior, tenemos que se verifica la siguiente igualdad en F y a su vez en $R[x_{r+1}, \cdots, x_n]$:

$$x_i := \lambda_i(\theta_1, \cdots, \theta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.3.8}$$

Definimos ahora la lista de polinomios $F_{r+1}, \cdots, F_n \in A[Z_1, \cdots, Z_r, T_{r+1}, \cdots, T_n]$:

$$F_j := f_j(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = f_j(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, T_j), \;\; r+1 \leq j \leq n.$$

Para cada uno de ellos, consideramos el polinomio $\overline{F}_j \in \kappa(\mathfrak{m})[Z_1, \cdots, Z_r, T_{r+1}, \cdots, T_n]$, obtenido como:

$$\overline{F}_j := \overline{f}_j(\overline{\lambda}_1, \cdots, \overline{\lambda}_r, T_j) = f_j(Z_1, \cdots, Z_r, T_j),$$

donde la última igualdad se debe a la identificación de los elementos de $L \subseteq A$ con sus clases módulo $\mathfrak{m}$. Consideramos a su vez el anillo de polinomios $R[T_{r+1}, \cdots, T_n]$ y la familia de elementos:

$$\widetilde{F}_j := F_j(\theta_1, \cdots, \theta_r, T_{r+1}, \cdots, T_n) \in R[T_{r+1}, \cdots, T_n], \;\; r+1 \leq j \leq n.$$

Denotamos por $\widetilde{F}_j + \mathfrak{q}R$ a la clase del polinomio $\widetilde{F}_j$ en el anillo de polinomios $R/\mathfrak{q}R[T_{r+1}, \cdots, T_n]$:

$$\widetilde{F}_j + \mathfrak{q}R = \overline{f}_j(\overline{\lambda}_1(\theta_1 + \mathfrak{q}R, \cdots, \theta_r + \mathfrak{q}R, T_{r+1}, \cdots, T_n), \cdots, \overline{\lambda}_r(\theta_1 + \mathfrak{q}R, \cdots, \theta_r + \mathfrak{q}R, T_{r+1}, \cdots, T_n), T_{r+1}, \cdots, T_n).$$

Como $L = \kappa(\mathfrak{m}) \subseteq R/\mathfrak{q}R$ y volviendo a la expresión (3.3.7), tenemos la primera de las igualdades siguientes:

$$\widetilde{F}_j + \mathfrak{q}R = f_j(\theta_1 + \mathfrak{q}R, \cdots, \theta_r + \mathfrak{q}R, T_j) = f_j(x_1, \cdots, x_r, T_j). \tag{3.3.9}$$

Para la segunda, se ha tenido en cuenta que la familia $\{x_1, \cdots, x_r\}$ es algebraicamente independiente en F y por tanto en $B := R[x_{r+1}, \cdots, x_n]$, por lo que realizando el cociente de la expresión (3.3.8), obtenemos:

$$\overline{\lambda}_j(\theta_1 + \mathfrak{q}R, \cdots, \theta_r + \mathfrak{q}R, T_j) = f_j(x_1 + \mathfrak{q}R, \cdots, x_r + \mathfrak{q}R, T_j).$$

Finalmente, identificando $x_j + \mathfrak{q}R$ con x_j, tenemos que $\theta_j + \mathfrak{q}R = x_j$, lo que nos da la igualdad buscada. A partir de las definiciones anteriores podemos ver que se cumplen las siguientes propiedades:

- Como $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son funciones lineales, el grado total para cada $j, r+1 \leq j \leq n$, satisface que:
$$\deg(\widetilde{F}_j) \leq \deg(F_j) \leq \deg(f_j) = \deg_{T_j}(f_j).$$
- Por la identidad (3.3.9) junto a la expresión anterior, se tiene la siguiente serie de desigualdades:
$$\deg(\widetilde{F}_j) \geq \deg_{T_j}(\widetilde{F}_j) \geq \deg_{T_j}(\widetilde{F}_j + \mathfrak{q}R) = \deg(f_j) = d_j \Longrightarrow \deg(\widetilde{F}_j) = \deg_{T_j}(\widetilde{F}_j) = d_j.$$
- Además, f_j es unitario con respecto a la variable j. Entonces, el coeficiente asociado al término $T_j^{d_j}$ de $\widetilde{F}_j$ es unidad en R, ya que su reducción módulo $\mathfrak{q}R$ se corresponde con el coeficiente director de f_j con respecto a dicha variable, que es una constante no nula en L. Entonces como $\kappa(\mathfrak{m}) \simeq L$, si el coeficiente director es no nulo módulo $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{q}R$, como $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local, entonces es unidad ya que $\mathfrak{m} = A \setminus A^*$, donde A^* representa las unidades del anillo.
- Los polinomios $\widetilde{F}_j + \mathfrak{q}R, \in R/\mathfrak{q}R[T_j]$ $r+1 \leq j \leq n$, son univariados.
- Finalmente, consideramos el morfismo de R-álgebras sobreyectivo π, donde $\mathfrak{a} = (\widetilde{F}_{r+1}, \cdots, \widetilde{F}_n)$:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & R[T_{r+1}, \cdots, T_n] & \longrightarrow & R[x_{r+1}, \cdots, x_n] \\ & T_i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

  Para cada $r+1 \leq j \leq n$, se tiene que por construcción $\pi(\widetilde{F}_j) = 0$, debido a la siguiente igualdad:

$$\widetilde{F}_j(x_{r+1}, \cdots, x_n) = f_j(x_1, \cdots, x_r, x_j) = 0,$$

A partir de las propiedades anteriores, tenemos que se verifican las hipótesis del Lema (3.3.2) y por tanto,

$$R \longhookrightarrow R[x_{r+1}, \cdots, x_n]$$

es una extensión finita de cuerpos, y B es un R-módulo finitamente generado. Como ambos anillos son subanillos del cuerpo F, son dominios de integridad y podemos considerar su respectivos cuerpos de fracciones. Esto permite extender la extensión entera de anillos anterior, a una extensión finita (y por lo tanto algebraica) de cuerpos. Notamos que $qf(R) = L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_r)$ y $qf(B) = L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n)$. Por la identidad (3.3.6), la siguiente es una extensión finita de cuerpos:

$$L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_r) \subseteq L(A)(x_1, \cdots, x_n).$$

Por hipótesis del enunciado, el grado de trascendencia de F sobre $L(A)$ es r, entonces $\{\theta_1, \cdots, \theta_r\}$ son algebraicamente independientes sobre $L(A)$. Además, $A[\theta_1, \cdots, \theta_r]$ es un anillo de polinomios de r con coeficientes en el anillo local $(A, \mathfrak{m})$.

Sea $\mathfrak{m}^e$ el ideal de $A[\theta_1, \cdots, \theta_r]$ engendrado por $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m}^e = \mathfrak{m}A[\theta_1, \cdots, \theta_r]$). Dado que $\{\theta_1, \cdots, \theta_r\}$ son algebraicamente independientes sobre A, entonces se verifica el siguiente isomorfismo:

$$A[\theta_1, \cdots, \theta_r]/\mathfrak{m}^e \simeq \kappa(\mathfrak{m})[\theta_1, \cdots, \theta_r] = (A/\mathfrak{m})[\theta_1, \cdots, \theta_r].$$

Como $A[\theta_1, \cdots, \theta_r]/\mathfrak{m}^e$ es isomorfo a un anillo de polinomios sobre un cuerpo, es dominio de integridad y $\mathfrak{m}^e$ es un ideal primo. Entonces podemos considerar la extensión de $(A, \mathfrak{m})$ al anillo local siguiente:

$$R_1 := A[\theta_1, \cdots, \theta_r]_{\mathfrak{m}^e}.$$

Denotamos por $\mathfrak{n}$ el ideal maximal de R_1 [4]. Podemos observar que su cuerpos residual verifica que:

$$R_1/\mathfrak{n} \simeq \kappa(\mathfrak{m})(\theta_1 + \mathfrak{n}, \cdots, \theta_r + \mathfrak{n}).$$

para lo cual basta considerar que $\theta_i \notin \mathfrak{n}$ y el morfismo que aplica θ_i a $\theta_i + \mathfrak{n}$ y lleva los coeficientes a su clase de equivalencia módulo $\mathfrak{m}$, junto al Primer Teorema de Isomorfía.

Sea $B_1 := R_1[x_{r+1}, \cdots, x_n]$ la subálgebra de F engendrada por $\{x_{r+1}, \cdots, x_n\}$ sobre R_1. El anillo B_1 es un R_1-módulo, que contiene a R_1 como subanillo local. Además, B_1 es un subanillo de F entonces es dominio de integridad. Sea $\mathfrak{n}B_1$ la extensión de $\mathfrak{n}$ a B_1 que coincide con la extensión de $\mathfrak{m}$ a B_1.

Sean $\pi_1 : B_1 \longrightarrow B_1/\mathfrak{n}B_1$ y $\pi_2 : R_1 \longrightarrow \kappa(\mathfrak{n})$ las proyecciones canónicas de B_1 y R_1 sobre sus respectivos cuerpos residuales. Por la identidad (3.3.2), tenemos que π_1 verifica:

$$\begin{pmatrix} \pi_1(\theta_1) \\ \vdots \\ \pi_1(\theta_r) \end{pmatrix} = (M + \mathfrak{m}) \begin{pmatrix} \pi_1(x_1) \\ \vdots \\ \pi_1(x_n) \end{pmatrix}$$

donde de nuevo $M + \mathfrak{m}$ se corresponde con las clases módulo $\mathfrak{m}$ de las coordenadas de M. Tenemos que $\mathfrak{n}B_1 = \mathfrak{m}R_1[x_{r+1}, \cdots, x_n]$ y por definición del morfismo π_1 y por la identidad (3.3.2) se verifica:

$$\theta_i + \mathfrak{n} = \pi_1(\theta_i) = \pi_1(x_i), \;\; 1 \leq i \leq r.$$

Como $\theta_i \in R_1$, entonces $\pi_1(\theta_i) = \pi_2(\theta_i) \in R_1/\mathfrak{n}$, $1 \leq i \leq r$, y además $L \simeq \kappa(\mathfrak{m})$, considerando la restricción de π_1 a $L(x_1, \cdots, x_r) \subseteq B_1$, obtenemos el siguiente isomorfismo:

$$R_1/\mathfrak{n} = \kappa(\mathfrak{n}) \simeq \kappa(\mathfrak{m})(\theta_1 + \mathfrak{n}, \cdots, \theta_r + \mathfrak{n}) \simeq L(x_1, \cdots, x_r) \tag{3.3.10}$$

Consideramos la familia de polinomios $\widetilde{F}_{r+1}, \cdots, \widetilde{F}_n \in R_1[T_{r+1}, \cdots, T_n]$ definida anteriormente. Por argumentos similares a los usados con R, vemos que esta lista satisface las hipótesis del Lema (3.3.2). Entonces, B_1 es un R_1-módulo finamente generado. Sea N el cardinal minimal de los sistemas de generadores de B_1 como R_1-módulo. Como consecuencia del Lema de Nakayama, tal y como se muestra en la Proposición (I.5.4) tenemos que N es igual a la dimensión de $B_1/\mathfrak{n}B_1$ como $\kappa(\mathfrak{n})$-espacio vectorial, es decir:

$$N = \dim_{\kappa(\mathfrak{n})}(B_1/\mathfrak{n}B_1) = [B_1/\mathfrak{n}B_1 : \kappa(\mathfrak{n})].$$

donde la última igualdad se debe a que la dimensión como espacio vectorial coincide con el grado de la extensión. Por las identidades (3.3.5) y (3.3.10) tenemos también el siguiente isomorfismo de cuerpos:

$$B_1/\mathfrak{n}B_1 \simeq \kappa(\mathfrak{n})(x_{r+1} + \mathfrak{n}B_1, \cdots x_n + \mathfrak{n}B_1) \simeq L(x_1, \cdots, x_r)(x_{r+1}, \cdots, x_n).$$

y como consecuencia tenemos la siguiente igualdad:

$$N = [L(x_1, \cdots, x_n) : L(x_1, \cdots, x_r)].$$

Finalmente, dado que $qf(A) = L(A)$, el cuerpos de fracciones de R_1 es $qf(R_1) = L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_r)$ y el cuerpo de fracciones de B_1 es $qf(B_1) = L(A)(\theta_1, \cdots \theta_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) = F$. Además, como el cardinal de un conjunto minimal de generadores de B_1 como R_1-módulo es una cota superior para la dimensión de $qf(B_1)$ como espacio vectorial sobre $qf(R_1)$, entonces:

$$N \geq [F : L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_r)] \Longrightarrow [L(x_1, \cdots, x_n) : L(x_1, \cdots, x_r)] \geq [F : L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_r)].$$

□

Con los lemas precedentes, estamos en condiciones de probar el siguiente teorema que muestra la conexión entre el grado del producto cartesiano de variedades algebraicas y el producto de sus respectivos grados. La dificultad de la prueba radica en la existencia de dos identificaciones de un cierto subcuerpo dentro del cuerpo asociado con el producto cartesiano. Para explicar mejor este hecho, comenzamos introduciendo algunas notaciones que se utilizarán en la prueba.

Notación 3.3.4. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ dos variedades irreducibles de dimensiones: $\dim(V) = r$ y $\dim(W) = s$ y $V \times W \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ su producto cartesiano. Por la Proposición (2.3.1) tenemos la existencia de tres morfismos dominantes entre variedades irreducibles:

$$\Phi_0 : \mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times (V \times W) \longrightarrow \mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s}.$$

$$\Phi_1 : \mathbb{A}^{rn} \times V \longrightarrow \mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r, \qquad \Phi_2 : \mathbb{A}^{sm} \times W \longrightarrow \mathbb{A}^{sm} \times \mathbb{A}^s \tag{3.3.11}$$

[4] Sea $S := A[\theta_1, \cdots, \theta_r] \setminus \mathfrak{m}^e$ tal que $R_1 := S^{-1}A[\theta_1, \cdots, \theta_r]$. Entonces $\mathfrak{n}$ y $\mathfrak{m}^e$ se relacionan como: $\mathfrak{n} := S^{-1}\mathfrak{m}^e$.

Dado que los morfismos Φ_1 y Φ_2 son dominantes, el morfismo $\Phi_3 := \Phi_1 \times \Phi_2$, también lo es:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_3: & (\mathbb{A}^{rn} \times V) \times (\mathbb{A}^{sm} \times W) & \longrightarrow & (\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^r) \times (\mathbb{A}^{sm} \times \mathbb{A}^s) \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2)) \end{array},$$

Dicha afirmación se basa en el hecho de que $\overline{(f \times g)(A \times B)} \supseteq \overline{f(A)} \times \overline{g(B)}$, válido para cualquier par de funciones continuas entre dos espacios topológicos generales.

Entonces Φ_3 induce un monomorfismo de anillos: $\Phi_3^* : K[\mathbb{A}^{rn+sm} \times \mathbb{A}^{r+s}] \hookrightarrow K[\mathbb{A}^{rn+sm} \times (V \times W)]$.

Por las Proposiciones (2.2.6) y (2.2.11), Φ_3^* da lugar a una extensión de cuerpos finita y separable.

$$\Phi_3^* : K(\mathbb{A}^{rn+sm} \times \mathbb{A}^{r+s}) \hookrightarrow K(\mathbb{A}^{rn+sm} \times (V \times W))$$

A partir de él se puede realizar una extensión escalar, donde se considera la identidad para aquellas coordenadas matriciales que no vienen dadas directamente por Φ_3^*.

$$\widetilde{\Phi}_3^* : K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s}) \hookrightarrow K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times (V \times W)).$$

Por la notación anterior vemos que el cuerpo $K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s})$ presenta dos identificaciones como subcuerpo de $K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times (V \times W))$, a través de Φ_0^* y $\widetilde{\Phi}_3^*$. Sin embargo, en general dos copias isomorfas F_1 y F_2 de un mismo cuerpo F, vistas como subcuerpo de un cuerpo mayor G, para el que se verifica que $F_1 \subseteq G$ y $F_2 \subseteq G$ son extensiones finitas y separables, no tienen en general el mismo grado: $[G : F_1] \neq [G : F_2]$, como se muestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.3.5. *Sea $\pi \in \mathbb{R}$ (aunque el razonamiento es válido para cualquier elemento trascendente). Tenemos las extensiones racionales $F_1 := \mathbb{Q}(\pi^2)$ y $F_2 := \mathbb{Q}(\pi^3)$ que son isomorfas (dos extensiones sobre un elemento trascendente siempre lo son). Consideramos los extensiones finitas y separables $F_1 \subseteq G$ y $F_2 \subseteq G$ donde $G = \mathbb{Q}(\pi)$. Entonces, se tiene que los grados de las extensiones valen:*

$$2 = [G : F_1] \neq [G : F_2] = 3.$$

donde los polinomios primitivos asociados a ambas son $f_1(x) := x^2 - \pi^2$ y $f_2(x) := x^3 - \pi^3$, respectivamente.

Por tanto no es inmediato que los grados de las extensiones de las imágenes de $K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s})$ por Φ_0^* y $\widetilde{\Phi}_3^*$ sobre $K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times (V \times W))$, tengan el mismo grado (lo que como se verá a continuación nos daría el resultado buscado). Esta dificultad que se presenta en los grados de las extensiones de cuerpos, no aparece teniendo en cuenta la definición de grado para una variedad algebraica que se ha introducido en este trabajo. Para mostrar este hecho planteamos la construcción que se recoge en la prueba del siguiente resultado, que supone un resumen de los argumentos y desarrollos seguidos en las secciones anteriores.

Teorema 3.3.6. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ y $W \subseteq \mathbb{A}^m(K)$ dos conjuntos localmente cerrados sobre sus respectivos espacio afines. Sea $W \times W \subseteq \mathbb{A}^{n+m}(K)$ su producto cartesiano que es un conjunto localmente cerrado en $\mathbb{A}^{n+m}(K)$ para la topología producto. Entonces, se verifica que*

$$\deg(V \times W) = \deg(V) \deg(W).$$

Demostración. Como ya ha ocurrido en enunciados anteriores, basta considerar el caso en que V y W son variedades algebraicas, ya que si V y W son conjuntos localmente cerrados, la clausura de $V \times W$ para la Topología de Zariski de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ satisface que:

$$\overline{V \times W}^z = \overline{V}^z \times \overline{W}^z.$$

Adicionalmente, por la Definición 20 tenemos que si $V := V_1 \cup \cdots \cup V_t$ y $W := W_1 \cup \cdots \cup W_u$, son las descomposiciones en irreducibles de V y W, entonces se verifica que la descomposición en irreducibles del producto cartesiano $V \times W$ es el siguiente:

$$V \times W = \bigcup_{1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq u} V_i \times W_j,$$

por tanto basta realizar la prueba para el caso irreducible. Entonces, sean V y W dos variedades algebraicas irreducibles de dimensiones r y s respectivamente. Consideramos las notaciones introducidas en (3.3.4). Sea $M \in \mathbb{A}^{(r+s)(n+m)}$ una matriz de coordenadas genérica, descompuesta en submatrices.

$$M := \begin{pmatrix} P & D \\ E & Q \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{ll} P \in \mathbb{A}^{rn}, & Q \in \mathbb{A}^{sm} \\ D \in \mathbb{A}^{rm}, & E \in \mathbb{A}^{sn} \end{array} \tag{3.3.12}$$

Consideramos los anillos de funciones polinomiales siguientes:

$$K[\mathbb{A}^{rn}] = K[P_{i,j} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n], \;\; K[\mathbb{A}^{sm}] = K[Q_{i,j} : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq m].$$

y así mismo sus cuerpos de fracciones asociados:

$$L_1 := K(\mathbb{A}^{rn}) = K(P_{i,j} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n).$$

$$L_2 := K(\mathbb{A}^{sm}) = K(Q_{i,j} : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq m).$$

Consideramos también el cuerpo de fracciones definido como el producto tensorial de los dos anteriores.

$$L := K(\mathbb{A}^{rn} \times \mathbb{A}^{sm}) = K(\{P_{i,j} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\} \cup \{Q_{i,j} : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq m\}) = L_1 \otimes_K L_2$$

Por la Proposición (2.3.1), las extensiones siguientes son finitas y separables:

- La extensión inducida por Φ_1: $\Phi_1^* : L_1(\mathbb{A}^r) \hookrightarrow L_1(V)$. Tenemos que existe un abierto Zariski $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{A}^{rn+r}$ tal que para todo $(P^{(1)}, z_v^{(1)}) \in \mathcal{U}_1$, la variedad afín lineal asociada: $G_1 := \mathbb{G}(P^{(1)}, z_v^{(1)}) \subseteq \mathbb{A}^n$ verifica la siguiente relación:

$$\deg(V) = \sharp(G_1 \cap V) = \sharp\left(\Phi_1^{-1}(\{(P^{(1)}, z_v^{(1)})\})\right) = [L_1(V) : L_1(\mathbb{A}^r)].$$

- De forma totalmente equivalente, tenemos la extensión inducida por Φ_2: $\Phi_2^* : L_2(\mathbb{A}^s) \hookrightarrow L_2(W)$, para la que también tenemos que existe un abierto Zariski, $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathbb{A}^{sm+s}$, tal que para todo $(Q^{(2)}, z_w^{(2)}) \in \mathcal{U}_2$, la variedad afín lineal asociada: $G_2 := \mathbb{G}(Q^{(2)}, z_w^{(2)}) \subseteq \mathbb{A}^m$ verifica la siguiente relación:

$$\deg(W) = \sharp(G_2 \cap W) = \sharp\left(\Phi_2^{-1}(\{(Q^{(2)}, z_w^{(2)})\})\right) = [L_2(W) : L_2(\mathbb{A}^s)].$$

Seguidamente consideramos también el morfismo dominante $\Phi_3 = \Phi_1 \times \Phi_2$ y el monomorfismo inducido sobre los cuerpos de fracciones, que da lugar a una extensión finita:

$$\Phi_3^* : L(\mathbb{A}^{r+s}) \hookrightarrow L(V \times W). \tag{3.3.13}$$

Es importante destacar que por construcción, Φ_3 no se corresponde con un morfismo de la forma presentada en la expresión (2.3.1), por tanto no se puede aplicar sobre él los resultados que se recogen en la Proposición (2.3.1) directamente. Sin embargo, si analizamos la estructura de la prueba del apartado *ii)*, se observa que se trabaja en todo momento con una extensión L de K, sin entrar en la forma concreta de la misma. Por tanto podemos considerar argumento análogos a los empleados en dicha prueba para probar la separabilidad de (3.3.13), aunque se omite por motivos de espacio. Entonces, por ser finita y separable, por la Proposición (2.2.11), tenemos que existe un abierto $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{A}^{rn+sm} \times \mathbb{A}^{r+s}$, tal que para todo $(P^{(1)}, z_v^{(1)}, Q^{(2)}, z_w^{(2)}) \in \mathcal{W}$ se tiene que el cardinal de la fibra coincide con el grado de la extensión:

$$\sharp\left(\Phi_3^{-1}(\{(P^{(1)}, z_v^{(1)}, Q^{(2)}, z_w^{(2)})\})\right) = [L(V \times W) : L(\mathbb{A}^{r+s})].$$

Además, tenemos que la contraimagen de Φ_3 se relaciona con la contraimagen de Φ_1 y Φ_2 también a través del producto cartesiano, es decir:

$$\Phi_3^{-1}(\{(P^{(1)}, z_v^{(1)}, Q^{(2)}, z_w^{(2)})\}) = \Phi_1^{-1}(\{(P^{(1)}, z_v^{(1)})\}) \times \Phi_2^{-1}(\{(Q^{(2)}, z_w^{(2)})\}),$$

y por tanto, para cada $(P^{(1)}, z_v^{(1)}, Q^{(2)}, z_w^{(2)}) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, se verifica la siguiente relación:

$$\sharp\left(\Phi_3^{-1}(\{(P^{(1)}, z_v^{(1)}, Q^{(2)}, z_w^{(2)})\})\right) = \sharp\left(\Phi_1^{-1}(\{(P^{(1)}, z_v^{(1)})\})\right) \sharp\left(\Phi_2^{-1}(\{(Q^{(2)}, z_w^{(2)})\})\right) = \deg(V)\deg(W),$$

que involucra al producto de los grados de V y W. Entonces, podemos concluir que esto relaciona dicho producto con el grado de la extensión, inducida a partir de Φ_3^*, mediante la siguiente igualdad:

$$[L(V \times W) : L(\mathbb{A}^{r+s})] = \deg(V)\deg(W), \tag{3.3.14}$$

ya que la intersección $\mathcal{W} \cap (\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2) \neq \emptyset$, por ser $\mathbb{A}^{rn+sm} \times \mathbb{A}^{r+s}$ irreducible. Por tanto, si $G := G_1 \times G_2$ (i.e. $G = \mathbb{G}((P^{(1)}, z_v^{(1)}, Q^{(2)}, z_w^{(2)}))$), se verifica por el Lema (3.1.1) que:

$$\deg(V \times W) \geq \deg((V \times W) \cap G) = \sharp((V \times W) \cap G) = \sharp\left(\Phi_3^{-1}(\{(P^{(1)}, z_v^{(1)}, Q^{(2)}, z_w^{(2)})\})\right) = \deg(V)\deg(W).$$

Esto nos da una de las desigualdades. Destacar que esta construcción se corresponde con el caso particular de considerar $D = E = 0$, en el planteamiento general presentado en (3.3.12).

Ahora presentamos las variables asociadas con las coordenadas de V y W, obtenidas a partir del cociente por sus ideales $I_{\mathbb{A}}(V)$ y $I_{\mathbb{A}}(W)$, de las variables asociadas a las coordenadas de los espacios afines $\mathbb{A}^n$ y $\mathbb{A}^m$, que son respectivamente $X_i, 1 \leq i \leq n$ e $Y_j, 1 \leq j \leq m$:

$$x_i := X_i + I_{\mathbb{A}}(V), 1 \leq i \leq n; \quad y_j := Y_j + I_{\mathbb{A}}(W), 1 \leq j \leq m.$$

Tenemos entonces que las álgebras construidas a partir de dichas variedades se pueden expresar como:

$$K[\mathbb{A}^{rn} \times V] = K[\mathbb{A}^{rn}][x_1, \cdots, x_n], \quad K[\mathbb{A}^{sm} \times W] = K[\mathbb{A}^{sm}][y_1, \cdots, y_m].$$

$$L_1[V] = L_1[x_1, \cdots, x_n], \qquad L_2[W] = L_2[y_1, \cdots, y_m].$$

$$L[V \times W] = L[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m].$$

Sean ahora $\{Z_{1,v}, \cdots, Z_{r,v}\}$ y $\{Z_{1,w}, \cdots, Z_{s,w}\}$ las variables que representan las coordenadas de los puntos de $\mathbb{A}^r$ y $\mathbb{A}^s$ respectivamente. De nuevo, consideramos esta notación para expresar las siguientes álgebras en su forma finitamente generada.

$$L_1[\mathbb{A}^r] = L_1[Z_{1,v}, \cdots, Z_{r,v}], \quad L_2[\mathbb{A}^s] = L_2[Z_{1,w}, \cdots, Z_{s,w}]$$
$$L[\mathbb{A}^{r+s}] = L[Z_{1,v}, \cdots, Z_{r,v}, Z_{1,w}, \cdots, Z_{s,w}].$$

Teniendo en cuenta esta descripción se va a proceder a realizar las siguientes identificaciones.

- Consideramos ahora $L_1[\mathbb{A}^r]$ como subanillo de $L_1[V]$ por medio del morfismo Φ_1^*.

$$\begin{array}{rccc} \Phi_1^*: & L_1[Z_{1,v}, \cdots, Z_{r,v}] & \hookrightarrow & L_1[x_1, \cdots, x_n] \\ & f(z) & \longmapsto & f(\Phi_1(z)) \end{array}$$

  Para ello realizamos una identificación con su imagen. Si denotamos por $\zeta_{1,v} = \Phi_1^*(Z_{1,v})$, entonces dicha identificación viene dada por la siguiente relación matricial, donde P se corresponde con la matriz genérica de variables que representan las coordenadas del espacio $\mathbb{A}^{rn}$.

$$\begin{pmatrix} \zeta_{1,v} \\ \vdots \\ \zeta_{r,v} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Análogamente, consideramos $L_2[\mathbb{A}^s]$ como subanillo de $L_2[W]$ por medio del morfismo Φ_2^*.

$$\begin{array}{rccc} \Phi_2^*: & L_2[Z_{1,w}, \cdots, Z_{s,w}] & \hookrightarrow & L_2[y_1, \cdots, y_m] \\ & f(z) & \longmapsto & f(\Phi_2(z)) \end{array}$$

  De igual modo, denotando $\zeta_{1,w} = \Phi_2^*(Z_{1,w})$, tenemos la siguiente relación matricial.

$$\begin{pmatrix} \zeta_{1,w} \\ \vdots \\ \zeta_{s,w} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

- Finalmente, $L[\mathbb{A}^{s+r}]$ se identifica como subanillo de $L[W \times V]$, por medio de Φ_3^*:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_3^*: & L[Z_{1,v}, \cdots, Z_{r,v}, Z_{1,w}, \cdots, Z_{s,w}] & \hookrightarrow & L[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m] \\ & Z_{i,v} & \longmapsto & \sum_{j=1}^n P_{i,j} x_j \\ & Z_{i,w} & \longmapsto & \sum_{j=1}^m Q_{i,j} y_j \end{array}$$

  donde $\Phi_3^*(Z_{i,v}) = \zeta_{i,v}$ y $\Phi_3^*(Z_{i,w}) = \zeta_{i,w}$. La relación entre las variables viene dado por:

$$\begin{pmatrix} \zeta_{1,v} \\ \vdots \\ \zeta_{r,v} \\ \zeta_{1,w} \\ \vdots \\ \zeta_{s,w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \zeta_{1,v} \\ \vdots \\ \zeta_{r,v} \\ \zeta_{1,w} \\ \vdots \\ \zeta_{s,w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_1|P_2) & 0 \\ 0 & (Q_1|Q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

La implicación anterior donde $P_1 \in GL(r, L)$ y $Q_1 \in GL(s, L)$, se obtiene utilizando el mismo argumento que en la prueba de la afirmación *ii)* de la Proposición (2.3.1). Además, la igualdad de matrices anterior permite obtener una transformación lineal como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_s \\ y_{s+1} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & -P_1^{-1}P_2 & 0 & 0 \\ 0 & Id_{n-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_1^{-1} & -Q_1^{-1}Q_2 \\ 0 & 0 & 0 & Id_{m-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{1,v} \\ \vdots \\ \zeta_{r,v} \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \\ \zeta_{1,w} \\ \vdots \\ \zeta_{s,w} \\ y_{s+1} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{3.3.15}$$

Ahora consideramos las premisas del enunciado del Lema (3.3.1), aplicado a las variedades V y W por separado, junto a sus respectivos morfismos dominantes Φ_1 y Φ_2. Después de realizar un cambio de variables como el que se presenta en dicho lema, podemos suponer que las matrices genéricas P y Q han sido elegidas de forma que las siguientes extensiones de anillos sean enteras:

$$L_1[\zeta_{1,v}, \cdots, \zeta_{r,v}] \subseteq L_1[\zeta_{1,v}, \cdots, \zeta_{r,v}, x_{r+1}, \cdots x_n]$$
$$L_2[\zeta_{1,w}, \cdots, \zeta_{s,w}] \subseteq L_2[\zeta_{1,w}, \cdots, \zeta_{s,w}, y_{s+1}, \cdots y_m].$$

A partir de esta información, podemos concluir también que la siguiente, es también entera.

$$L[\zeta_{1,v}, \cdots, \zeta_{r,v}, \zeta_{1,w}, \cdots, \zeta_{s,w}] \subseteq L[\zeta_{1,v}, \cdots, \zeta_{r,v}, \zeta_{1,w}, \cdots, \zeta_{s,w}, x_{r+1}, \cdots, x_n, y_{s+1}, \cdots, y_m] \tag{3.3.16}$$

Para simplificar la notación definimos los siguientes anillos:

- $R_0 := L[\zeta_{1,v}, \cdots, \zeta_{r,v}, \zeta_{1,w}, \cdots, \zeta_{s,w}]$.
- $R_1 := L[\zeta_{1,v}, \cdots, \zeta_{r,v}, \zeta_{1,w}, \cdots, \zeta_{s,w}, x_{r+1}, \cdots, x_n, y_{s+1}, \cdots, y_m] = R_0[x_{r+1}, \cdots, x_n, y_{s+1}, \cdots, y_m]$.

Asumiendo la identificación de $L[\mathbb{A}^{r+s}]$ con su imagen por Φ_3^*, tenemos que $R_0 = L[\mathbb{A}^{r+s}]$. Además, por la identidad matricial (3.3.15), $x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s$ se pueden expresar como combinaciones lineales en L de los generadores de R_1 como L-álgebra. Por tanto son elementos de R_1 y $R_1 = L[V \times W]$.

Ahora definimos como F_0 y F_1, los cuerpos de fracciones de R_0 y R_1 respectivamente, es decir:

$$F_0 := L(\mathbb{A}^{r+s}), \quad F_1 := L(V \times W), \text{ entonces } [F_1 : F_0] = \deg(V)\deg(W) \quad \text{por (3.3.14)}. \tag{3.3.17}$$

Por simplificar la notación en lo sucesivo podemos considerar, sin perder la generalidad que:

$$\zeta_{i,v} = x_i,\ 1 \le i \le r, \quad \text{y} \quad \zeta_{j,w} = y_j,\ 1 \le j \le s. \tag{3.3.18}$$

Entonces podemos suponer que la matriz M introducida en la identidad (3.3.12), es de la forma:

$$M := \begin{pmatrix} (Id_r|0) & D \\ E & (Id_r|0) \end{pmatrix} \tag{3.3.19}$$

Ahora vamos a considerar el anillo local $(A, \mathfrak{m})$, definido a partir de la construcción siguiente:

Sea $R_3 := K(\mathbb{A}^{rn+sm})[\mathbb{A}^{rm+sn}] = L[\mathbb{A}^{rm+sn}]$, el anillo de polinomios con coordenadas en $\mathbb{A}^{rm+sn}$ obtenido a partir de la tensorización por L del anillo $K[\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)}]$[5].

$$R_3 := L[\{D_{i,j}, 1 \le i \le r, 1 \le j \le m\} \cup \{E_{i,j}, 1 \le i \le s, 1 \le j \le n\}].$$

Sea $\mathfrak{q}$ el ideal primo (maximal) de R_3 generado por las coordenadas de las matrices D y E. Se corresponde con los polinomios con coeficientes en L y coordenadas en $\mathbb{A}^{rm+sn}$ de término independiente nulo.

$$\mathfrak{q} := (\{D_{i,j}, 1 \le i \le r, 1 \le j \le m\} \cup \{E_{i,j}, 1 \le i \le s, 1 \le j \le n\})$$

A partir de ellos definimos el anillo A como la localización de R_3 por $\mathfrak{q}$ de maximal $\mathfrak{m}$, que se corresponde con la extensión de $\mathfrak{q}$ a A. Para ello se considera el sistema multiplicativamente cerrado $S_{\mathfrak{q}} := R_3 \setminus \mathfrak{q}$.

$$A := S_{\mathfrak{q}}^{-1} R_3 = (R_3)_{\mathfrak{q}}, \quad \mathfrak{m} := S_{\mathfrak{q}}^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}A.$$

El siguiente paso consiste en ver que $(A, \mathfrak{m})$, verifica las hipótesis del Lema (3.3.3).

- El cuerpo residual de $(A, \mathfrak{m})$ satisface que $\kappa(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m} \simeq L$.

  $$a_1 + \mathfrak{m} = a_2 + \mathfrak{m} \iff a_1 - a_2 \in \mathfrak{m}, \quad a_1 - a_2 = qa = h \ \ (q \in \mathfrak{q},\, a \in A).$$

  Entonces a_1 y a_2 tiene el mismo término independiente, y por tanto $A/\mathfrak{m} = \{\ell + \mathfrak{m} : \ell \in L\} \simeq L$.
- Por la simplificación de notación de la identidad (3.3.18) y por la extensión entera de anillos (3.3.16):

  $$L[x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s] \hookrightarrow L[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m].$$
- Como las coordenadas de las submatrices D y E son nulas en el cuerpo residual $\kappa(\mathfrak{m})$, considerando la representación de M dada por la identidad (3.3.19) se tiene que tras una permutación de coordenadas:

  $$\begin{pmatrix} M + \mathfrak{m} \\ 0 \mid Id_{(n+m)-(r+s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_r & 0 & 0 \\ 0 & Id_s & 0 \\ 0 & 0 & Id_{(n+m)-(r+s)} \end{pmatrix} = Id_{n+m} \in GL_{n+m}(L)$$

  donde $M + \mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{(r+s)\times(n+m)}(L)$ es la matriz obtenida reemplazando las coordenadas de M por las correspondientes clases módulo $\mathfrak{m}$ y 0 la matriz nula de la talla apropiada.

Entonces, tal y como se indica en el Lema (3.3.3), se introducen los elementos:

$$\theta_1, \cdots, \theta_{r+s} \in A[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m],$$

[5] $L \otimes_{K[\mathbb{A}^{rn+sm}]} K[\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)}] = K(\mathbb{A}^{rn+sm}) \otimes_{K[\mathbb{A}^{rn+sm}]} K[\mathbb{A}^{rn+sm} \times \mathbb{A}^{rm+sn}] \simeq K(\mathbb{A}^{rn+sm})[\mathbb{A}^{rm+sn}]$.

obtenidos a partir de la relación siguiente:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{r+s} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{3.3.20}$$

Sea $L(A) := qf(A) = L(\mathbb{A}^{rm+sn})$. el cuerpo de fracciones de A. El Lema (3.3.3) implica que:

$$[F : L(A))(\theta_1, \cdots, \theta_{r+s})] \leq [L(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) : L(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s)], \tag{3.3.21}$$

donde F es el cuerpo de fracciones del anillo $A[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m]$. A partir de la información obtenida hasta el momento, podemos concluir la prueba del teorema.

- Dado que $F = qf(A[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m])$, reescribiendo la expresión del mismo:

  $$A[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m] = L[\mathbb{A}^{rm+sn}]_{\mathfrak{q}}[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m] = L[\mathbb{A}^{rm+sn}]_{\mathfrak{q}}[V \times W].$$

  Por construcción $L[\mathbb{A}^{rm+sn}]_{\mathfrak{q}} = K(\mathbb{A}^{rn+sm})[\mathbb{A}^{rm+sn}]_{\mathfrak{q}} \subseteq K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)})$, y por tanto:

  $$F = K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times (V \times W)).$$

- El cuerpo $L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_{r+s})$ se corresponde con el cuerpo de fracciones de la identificación por el monomorfismo Φ_0^* de $K[A^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s}]$, entonces:

  $$L(A)(\theta_1, \cdots, \theta_{r+s}) \simeq K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s}).$$

- Después de la simplificación de variables indicada en la identidad (3.3.18), tenemos que se verifica la siguiente igualdad de cuerpos de fracciones:

  $$L(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s) = qf(R_0) = F_0.$$

- Por argumentos análogos, tenemos que se verifica también la siguiente relación:

  $$L(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = qf(R_1) = F_1.$$

Esto hace que podamos reescribir la expresión (3.3.21) de la forma siguiente:

$$[K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times (V \times W)) : K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s})] \leq [F_1 : F_0] = \deg(V)\deg(W),$$

que involucra al producto de los grados de las variedades V y W, dado por la identidad (3.3.17).

Finalmente, por definición de grado de una variedad algebraica y la definición del morfismo dominante Φ_0 en la notación (3.3.4), tenemos que:

$$\deg(V \times W) = [K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times (V \times W)) : K(\mathbb{A}^{(r+s)(n+m)} \times \mathbb{A}^{r+s})],$$

lo que nos da la otra desigualdad, y por tanto la igualdad de grados que se presenta en el enunciado. □

3.4. Desigualdad de Bézout para conjuntos localmente cerrados

Teorema 3.4.1. (Desigualdad de Bézout [He, 83]). *Sean $V, W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ dos conjuntos localmente cerrados (o variedades algebriacas). Entonces se verifica que:*

$$\deg(V \cap W) \leq \deg(V)\deg(W).$$

Demostración. Sea $V \times W \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ el producto cartesiano de V y W, donde se establece la topología producto. Sea Δ variedad afín lineal definida como la diagonal de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$:

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n : x = y\}.$$

Por el Lema (3.1.1) y la Proposición (3.3.6) tenemos que:

$$\deg((V \times W) \cap \Delta) \leq \deg(V \times W) = \deg(V)\deg(W)$$

Sea $\Pi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ la proyección que ignora las n últimas coordenadas, definida como $(x, y) \longmapsto x$. Se trata por tanto de una aplicación lineal que verifica que:

$$\Pi((V \times W) \cap \Delta) = V \cap W.$$

Dado que V y W son conjuntos localmente cerrados, por la Proposición (3.2.6) podemos concluir que:

$$\deg(V \cap W) = \deg(\overline{V \cap W}^z) \leq \deg((V \times W) \cap \Delta) \leq \deg(V)\deg(W).$$

□

CAPÍTULO 4

Cotas para el Grado de la Intersección Múltiple de Constructibles

Índice

4.1. Grado de conjuntos constructibles **42**
4.2. La historia de la Proposición 2.3 de [HeSc, 82] **45**
4.3. Demostración de la acotación *i)* del Teorema (4.2.3) **46**
4.4. Demostración de la acotación *ii)* del Teorema (4.2.3) **48**
4.4.1. Algunos resultados técnicos preliminates 48
4.4.2. Prueba de la cota *ii)* para el grado de la intersección 49
4.5. Conclusiones sobre el Teorema (4.2.3) **50**

Hasta el momento en el trabajo se ha realizado un proceso de deconstrucción de la desigualdad de Bézout descrita por J.Heintz en [**He, 83**], para conjuntos localmente cerrados, válido en particular para conjuntos algebraicos. En el trabajo original, se plantea que el resultado debía ser válido también para los conjuntos constructibles. Sin embargo, como se plantea en el CORRIGENDUM [**He, 85**], esta afirmación es falsa en general y únicamente válida cuando los conjuntos constructibles sean localmente cerrados.

Esto hace que en el artículo de J.Heintz y C.P. Schnorr [**HeSc, 82**] se introduzca una cota superior para la intersección múltiple, únicamente para conjuntos localmente cerrados afines. El objetivo de este capítulo final consiste en estudiar como se comporta la intersección múltiple de conjuntos constructibles, y plantear una serie de cotas para las mismas que buscan generalizar el resultado original de [**HeSc, 82**]. Para ello en primer lugar se necesita extender la *desigualdad de Bézout* descrita en el Teorema (3.4.1) a los conjuntos constructibles. Este es el objetivo de esta primera sección.

Una descripción detallada de los principales resultados se recogen en la sección 0.2.3 del Capítulo 0.

4.1. Grado de conjuntos constructibles

En primer lugar, se plantea la definición del grado de un constructible empleado originalmente por Heintz. Se define como el grado de su clausura Zariski, lo cual supone con una generalización directa de la noción de grado geométrico para conjuntos localmente cerrados (22), descrita en el Capítulo 2.

Definición 24. (Z-grado de un constructible [He, 83]). *Sea $C \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un constructible. Se define su z-grado como el grado de su clausura Zariski:* $\deg_z(C) := \deg(\overline{C}^z)$.

Como fue observado en [**He, 85**], [**Pa, 19**] o [**Fe, 19**], el z-grado no cumple la desigualdad de Bézout. Este hecho se pone de manifiesto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.1. (La Croix de Berny). *Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) : xy \neq 0\} \cup \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ un conjunto constructible. Por argumentos análogos a los empleados en el Ejemplo (3.2.1), no es localmente cerrado y $\overline{C}^z = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Por tanto,* $\deg_z(C) = \deg(\mathbb{A}^2(\mathbb{C})) = 1$, *ya que es irreducible y únicamente presenta intersección finita con variedades lineales de dimensión cero, es decir unipuntuales. Consideramos la variedad algebraica: $D := \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) : xy = 0\}$, formada por los ejes cartesianos de $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, y que por la Proposición (2.4.11), tiene* $\deg(D) = 2$. *Calculamos ahora la intersección $C \cap D = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, formada por cuatro puntos y que por la Proposición (2.4.11), tiene* $\deg(C \cap D) = 4$. *Entonces:*

$$4 = \deg(C \cap D) \not\leq \deg(\overline{C}^z) \cdot \deg(D) = 1 \cdot 2 = 2.$$

Este hecho lleva a plantearse una nueva definición del grado que si verifique una desigualdad de Bézout.

Definición 25. (Grado de un contructible). *Sea $C \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un constructible. Consideramos $\mathscr{C} := \{U_i \cap V_i : 1 \leq i \leq r\}$, una descomposición de C como unión finita de localmente cerrados irreducibles que verifican las condiciones del Lema (3.2.3). Definimos* $\deg(C, \mathscr{C})$ *como:*

$$\deg(C, \mathscr{C}) := \sum_{i=1}^{r} \deg(U_i \cap V_i) = \sum_{i=1}^{r} \deg(V_i).$$

Entonces, se define el grado del constructible C como:

$$\deg(C) := \min\{\deg(C, \mathscr{C}) : \mathscr{C} \text{ es una descomposición de } C \text{ que satisface el Lema (3.2.3)}\}.$$

La descomposición que da lugar a dicho mínimo se denomina "descomposición de grado minimal".

Definición 26. *Sea $C \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un constructible y $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una variedad irreducible. Se dice que V es una componente irreducible de C con respecto al grado de C, si existe una descomposición de grado minimal: $\{U_i \cap V_i : 1 \leq i \leq r\}$, tal que existe un i que verifica que $V = V_i$.*

A continuación se muestra que la Croix de Berny, ejemplo (4.1.1) verifica la desigualdad de Bézout para la nueva definición del grado de un constructible.

Ejemplo 4.1.2. (Continuación: Croix de Berny). *Consideramos la descomposición $C := C_1 \cup C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) : xy \neq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, con $\deg(C_1) = 1$ y $\deg(C_2) = 2$.*
Por la subaditividad del grado (2.4.14), $\deg(C) \leq 3$. *Sea $C := V_1 \cup \cdots \cup V_s$ una descomposición minimal de C en localmente cerrados irreducible, con $V_i \neq \emptyset$, por tanto* $\deg(V_i) \geq 1$. *Analizamos casos:*

- $\deg(C) \neq 1$. *Ya que si* $\deg(C) = 1$, *como* $\deg(V_i) \geq 1$ *entonces $C = V_1$. Pero C no es localmente cerrado, por argumentos similares a los utilizados en el Ejemplo (3.2.1).*
- $\deg(C) \neq 2$. *Sea $C = V_1 \cup V_2$, con* $\deg(V_1) = \deg(V_2) = 1$. *La intersección $C_1 = (C_1 \cap V_1) \cup (C_1 \cap V_2)$, implica que $C_1 \subseteq V_1$ y entonces* $2 = \dim(C_1) \leq \dim(V_1) \leq \dim(C) = 2$. *Como V_1 es irreducible $C_1 = V_1$ y forma parte de la descomposición de grado minimal. Sea $C = C_1 \cup L$, con* $\deg(L) = 1$. *Como $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\} \notin C_1$, entonces $D \cap L = D \cap C$. Además, como L es localmente cerrado irreducible, por la desigualdad de Bézout para localmente cerrados, se debería verificar que:*
$$\deg(D \cap L) \leq \deg(D)\deg(L), \text{ pero } 4 \not\leq 2 \cdot 1 = 2.$$

Entonces $\deg(C) = 3$, *y en este caso si se verifica la desigualdad de Bézout.*

$$4 = \deg(C \cap D) \leq \deg(C) \cdot \deg(D) = 3 \cdot 2 = 6$$

Algunas propiedades importantes de los conjuntos constructibles se recogen en las proposiciones siguientes.

Proposición 4.1.3. *Sea $C \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto constructible, entonces en general se verifica que:*

$$\deg_z(C) = \deg(\overline{C}^z) \leq \deg(C)$$

Demostración. Sea $\overline{C}^z := W_1 \cup \cdots \cup W_s$, la descomposición en componentes cerradas irreducibles, que viene dada por la Proposición (I.3.7). Además consideramos una descomposición de C de grado minimal en componentes localmente cerradas e irreducibles: $C := (U_1 \cap V_1) \cup \cdots \cup (U_r \cap V_r)$. Entonces:

$$W_1 \cup \cdots \cup W_s = \overline{C}^z = \overline{(U_1 \cap V_1)}^z \cup \cdots \cup \overline{(U_r \cap V_r)}^z = V_1 \cup \cdots \cup V_r. \tag{4.1.1}$$

Intersecando con W_i, tenemos que: $W_i = (W_i \cap V_1) \cup \cdots \cup (W_1 \cap V_r)$, y como es un cerrado irreducible entonces existe $\sigma(i) \in \{1, \cdots, r\}$ tal que $W_i = W_i \cap V_{\sigma(i)}$ $(W_i \subseteq V_{\sigma(i)})$. Intersecando ahora por $V_{\sigma(i)}$ tenemos que: $V_{\sigma(i)} = (V_{\sigma(i)} \cap W_1) \cup \cdots \cup (V_{\sigma(i)} \cap W_s)$ y de nuevo como $V_{\sigma(i)}$ es irreducible, existe $j, 1 \leq j \leq r$, tal que $V_{\sigma(i)} \subseteq W_j$. Entonces, $W_i \subseteq W_j$ y $W_i = V_{\sigma(i)} = W_j$. Como $V_i \neq V_j$ si $i \neq j$, σ es inyectiva y $\{W_1, \cdots, W_s\} \subseteq \{V_1, \cdots, V_r\}$. Por tanto el grado cumple que:

$$\deg(C) = \sum_{i=1}^{r} \deg(V_i) = \sum_{i=1}^{s} \deg(W_i) + \sum_{i=s+1}^{r} \deg(V_i) = \deg(\overline{C}^z) + \sum_{i=s+1}^{r} \deg(V_i).$$

□

Definición 27. *Las componentes irreducibles de grado minimal de C que verifican el Lema (3.2.3), y no dan lugar a componentes irreducibles de $\overline{C}^z$, se denominan componentes inmersas.*

Observación 4.1.4. En el caso particular de que C sea localmente cerrado, existe una biyección entre sus componentes irreducibles y las de su clausura Zariski, por tanto se da la igualdad.

Proposición 4.1.5. *Si $C \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ admite una descomposición equidimensional en componentes localmente cerradas irreducibles, que cumple las condiciones del Lema (3.2.3), entonces:*

$$\deg(C) = \deg(\overline{C}^z)$$

Demostración. Considerando las notaciones de la prueba de la proposición anterior, añadiendo la condición de que $\dim(C) = \dim(V_i), \forall i, 1 \leq i \leq r$. Obtenemos la intersección por V_i de (4.1.1): $V_i = (V_i \cap W_i) \cup \cdots \cup (V_i \cap W_s)$. Entonces existe $\tau(i) \in \{1, \cdots, s\}$, tal que $V_i \subseteq W_{\tau(i)}$ y por tanto $\dim(V_i) \leq \dim(W_{\tau(i)}) \leq \dim(C) = \dim(V_i)$. Como $\dim(V_i) = \dim(W_{\tau(i)})$ y $W_{\tau(i)}$ es irreducible, entonces por un argumento análogo al usado en la proposición anterior $V_i = W_{\tau(i)}$ y como $W_i \neq W_j$, τ es inyectiva y por tanto: $\deg(C) \leq \deg(\overline{C}^z)$. Por la proposición anterior se da la igualdad. □

Para probar las proposiciones siguientes basta considerar una descomposición de grado minimal y aplicar los resultados ya probados para localmente cerrados en los capítulos anteriores.

Proposición 4.1.6. *Sean $C, D \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ dos subconjuntos constructibles. Entonces se verifica:*

i) El grado para constructibles es una función subaditiva: $\deg(C \cup D) \leq \deg(C) + \deg(D)$.
ii) Si $L \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ es una variedad afín lineal, entonces: $\deg(L \cap C) \leq \deg(C)$.
iii) El grado del producto cartesiano está acotado por el producto de los grados:

$$\deg(C \times D) \leq \deg(C)\deg(D)$$

Proposición 4.1.7. *Sea $C \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un constructible y $\mathscr{L} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ una aplicación lineal, entonces:*

i) El grado de la clausura Zariski de la imagen se preserva: $\deg(\overline{\mathscr{L}(C)}^z) \leq \deg(C)$.
ii) Si $\mathscr{L}(C)$ es equidimensional o localmente cerrado, entonces: $\deg(\mathscr{L}(C)) \leq \deg(C)$.
iii) En general no es cierto que: $\deg(\mathscr{L}(C)) \leq \deg(C)$.

Como contraejemplo del apartado *iii)* de la proposición anterior, consideramos de nuevo el Ejemplo (3.2.1). Por el apartado *vi)* de la Proposición (2.4.11), como $W = V_{\mathbb{A}}(f)$ con $f(x, y, z) = xz + (y^2 - 1)$ irreducible de grado 2, entonces $\deg(W) = 2$. Además por argumentos similares a los utilizados en el Ejemplo (4.1.2), tenemos que $\deg(\Pi(W)) = 3$, mientras que $\deg_z(\Pi(W)) = \deg(\overline{\Pi(W)}^z)$. Entonces concluimos que: Finalmente, se muestra una prueba de la desigualdad de Bézout para constructibles.

Teorema 4.1.8. (Desigualdad de Bézout para constructibles). *Sean $C, D \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ dos conjuntos constructibles. Entonces de verifica que:*

$$\deg(C \cap D) \leq \deg(C)\deg(D).$$

Demostración. El problema de esta prueba radica en el hecho de que el grado no se conserva mediante transformaciones lineales (como se muestra en la Proposición 4.1.7), lo que obliga a realizar una serie de cambios para adaptar el esquema de la prueba descrita en el Teorema (3.4.1).

Sea Δ variedad afín lineal definida como la diagonal de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$:

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n : x = y\},$$

y consideramos su intersección con el siguiente producto cartesiano: $\widetilde{C} := (C \times D) \cap \Delta$.

Por la Proposición (4.1.6), apartados *ii)* y *iii)* tenemos que el grado del producto cartesiano verifica que:

$$\deg(\widetilde{C}) \leq \deg(C \times D) \leq \deg(C)\deg(D).$$

Ahora consideramos una descomposición de grado minimal de $\widetilde{C}$ como se indica en la Definición 25:

$$\widetilde{C} := W_1 \cup \cdots \cup W_s,$$

donde $W_i = U_i \cap V_i \neq \emptyset$, con $U_i \subseteq \Delta$ abierto Zariski de Δ y $V_i \subseteq \Delta$ variedad irreducible, tal que:

$$\deg(C) := \sum_{i=1}^{s} \deg(W_i) = \sum_{i=1}^{s} \deg(V_i).$$

Ahora, para cada $i, 1 \leq i \leq s$, consideramos los siguientes conjuntos:

- Sea $O_i \subseteq \mathbb{A}^n(K)$, dado por la expresión: $O_i := \{x \in \mathbb{A}^n(K) : (x, x) \in U_i\}$.
- Sea $Q_i \subseteq \mathbb{A}^n(K)$, dado por la expresión: $Q_i := \{x \in \mathbb{A}^n(K) : (x, x) \in V_i\}$.

Si consideramos la proyección: $\Pi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ sobre las n primeras coordenadas, tenemos que su restricción a Δ, $\Pi|_\Delta$ es un isomorfismo. Entonces tenemos que O_i y Q_i son un abierto y un cerrado Zariski respectivamente de $\mathbb{A}^n$, tales que:

$$\Pi(W_i) = O_i \cap Q_i,$$

por tanto $\Pi(W_i)$ es un conjunto localmente cerrado, y su grado verifica que:

$$\deg(\Pi(W_i)) = \deg(\overline{\Pi(W_i)}^z) = \deg(Q_i) = \deg(O_i \cap Q_i) \leq \deg(W_i),$$

donde la última desigualdad se debe a la Proposición (3.2.6). Finalmente tenemos que:

$$C \cap D = \Pi((C \times D) \cap \Delta) = (O_1 \cap Q_1) \cup \cdots \cup (O_s \cap Q_s),$$

y por la subaditividad del grado para constructibles (Proposición 4.1.6 *i)*), se concluye que:

$$\deg(C \cap D) \leq \sum_{i=1}^{s} \deg(O_i \cap Q_i) \leq \sum_{i=1}^{s} \deg(W_i) = \deg(\widetilde{C}) \leq \deg(C \times D) \leq \deg(C)\deg(D).$$

□

4.2. La historia de la Proposición 2.3 de [HeSc, 82]

La proposición 2.3 de J. Heintz y C.P.Schnorr que se muestra a continuación, establece una cota para la intersección múltiple de localmente cerrados, donde la dimensión aparece en el exponente de la expresión, a diferencia de la codimensión, como se obtendría al aplicar directamente la desigualdad de Bézout.

Proposición 4.2.1. *Sea $V_1, \cdots, V_s \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una secuencia de conjuntos localmente cerrados. Entonces:*

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} V_i\right) \leq \deg(V_1)\left(\max\left\{\deg(V_i) : 2 \leq i \leq s\right\}\right)^{\dim(V_1)}$$

Demostración. Vamos a proceder a reproducir la prueba original de la proposición 2.3 de [HeSc, 82], por inducción sobre s. Para $s = 2$, el resultado es cierto debido a la desigualdad de Bézout para localmente cerrados, ver Teorema (3.4.1). Asumimos válido el resultado para $s-1$. Ahora, consideramos la descomposición de V_1 en localmente cerrados irreducibles:

$$V_1 := W_1 \cup \cdots \cup W_r \Longrightarrow \deg(V_1) = \sum_{j=1}^{r} \deg(W_j)$$

Incluimos la descomposición anterior en la intersección total, y aplicamos la subaditividad del grado:

$$\bigcap_{i=1}^{s} V_i = V_1 \cap \bigcap_{i=2}^{s} V_i = \bigcup_{j=1}^{r}\left[W_j \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} V_i\right)\right] \Longrightarrow \deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} V_i\right) \leq \sum_{j=1}^{r} \deg\left(W_j \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} V_i\right)\right),$$

y manipulamos las intersecciones de forma que se pueda aplicar la hipótesis de inducción:

$$\deg\left((W_j \cap V_2) \cap \left(\bigcap_{i=3}^{s} V_i\right)\right) \leq \deg(W_j \cap V_2)\left(\max\left\{\deg(V_i) : 3 \leq i \leq s\right\}\right)^{\dim(W_j \cap V_2)}. \tag{4.2.1}$$

Ahora distinguimos dos casos:

- Si $\overline{W_j \cap V_2}^{z} = \overline{W_j}^{z}$, tenemos que $\deg(W_j \cap V_2) = \deg(W_j)$ y que $\dim(W_j \cap V_2) = \dim(W_j)$. Además, como $\dim(V_1) = \max\{\dim(W_j) : 1 \leq j \leq r\}$, agrupando las expresiones anteriores:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} V_i\right) = \left(\sum_{j=1}^{r} \deg(W_j)\right)\left(\max\left\{\deg(V_i) : 3 \leq i \leq s\right\}\right)^{\dim(V_1)} =$$

$$\deg(V_1)\left(\max\left\{\deg(V_i) : 3 \leq i \leq s\right\}\right)^{\dim(V_1)} \leq \deg(V_1)\left(\max\left\{\deg(V_i) : 2 \leq i \leq s\right\}\right)^{\dim(V_1)}$$

- Si $\overline{W_j \cap V_2}^{z} \subsetneq \overline{W_j}^{z}$, como $\overline{W_j}^{z}$ es un cerrado irreducible, por la Proposición (I.3.13) entonces $\dim(W_j \cap V_2) < \dim(W_j)$. Aplicando la desigualdad de Bézout a la expresión (4.2.1):

$$\deg\left((W_j \cap V_2) \cap \left(\bigcap_{i=3}^{s} V_i\right)\right) \leq \deg(W_j)\deg(V_2)\left(\max\left\{\deg(V_i) : 3 \leq i \leq s\right\}\right)^{\dim(W_j)-1}.$$

  Como $\deg(V_2) \leq \max\left\{\deg(V_i) : 2 \leq i \leq s\right\}$ y $\dim(W_j) \leq \dim(V_1)$, entonces:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} V_i\right) = \left(\sum_{j=1}^{r} \deg(W_j)\right)\left(\max\left\{\deg(V_i) : 2 \leq i \leq s\right\}\right)^{\dim(V_1)}$$

□

La proposición anterior, aparece también en [Fe, 19], pero referida a constructibles, sin embargo únicamente es válida en la versión que se plantea en el corolario siguiente.

Corolario 4.2.2. *Sea $C \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un constructible y sean $W_1, \cdots, W_r \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ una familia de localmente cerrados afines, entonces se tiene que:*

$$\deg\left(C \cap \left(\bigcap_{j=1}^{r} W_j\right)\right) \leq \deg(C)\left(\max\left\{\deg(W_i) : 2 \leq j \leq r\right\}\right)^{\dim(C)}$$

Una reconstrucción paralela de la prueba de la Proposición (4.2.1), no es válida para una familia finita de constructibles, para la noción de grado de un constructible dada por la Definición 25. Esto se debe a que en el caso de localmente cerrados: $\overline{W_j \cap V_2}^{z} = \overline{W_j}^{z} \Longrightarrow \deg(W_j \cap V_2) = \deg(W_j)$, sin embargo cuando V_2 es constructible, $\overline{W_j \cap V_2}^{z} = \overline{W_j}^{z} \not\Longrightarrow \deg(W_j \cap V_2) = \deg(W_j)$. Para comprobarlo basta tomar $W_j = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ y V_2 *la Croix de Berny.* En ese caso, $V_2 \subseteq \mathbb{A}^2 = W_j$ y $\overline{V_2}^{z} = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, sin embargo $\deg(V_2) = 3$ y

$\deg(\mathbb{A}^2) = 1$. Lo que si se verifica (por definición) es que: $\overline{W_j \cap V_2}^z = \overline{W_j}^z \Longrightarrow \deg_z(W_j \cap V_2) = \deg_z(W_j)$, pero como ya se ha argumentado, el z-grado no cumple la desigualdad de Bézout.

Este hecho nos lleva a plantear dos variaciones de la cota para el grado de la intersección múltiple de conjuntos constructibles, que difieren de la propuesta originalmente por J. Heintz y C.P. Schnorr.

Teorema 4.2.3. (Cotas para el grado de la intersección múltiple de constructibles). *Sean $C_1, \cdots, C_s \subseteq \mathbb{A}^n$ una familia finita de conjuntos constructibles. Sea $r := \dim(C_1)$, la dimensión del constructible C_1. Entonces, se verifican las siguientes desigualdades:*

i) Primera cota superior:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i\right) \leq \binom{s+r-1}{r} \deg(C_1)(\max\{\deg(C_i) : 2 \leq i \leq s\})^r$$

ii) Segunda cota superior:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i\right) \leq \deg(C_1)\left(1 + \sum_{i=2}^{s} \deg(C_i)\right)^r$$

iii) Cota superior en términos del grado promedio:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i\right) \leq \deg(C_1) \cdot s^r \deg_{av}(C_1, \cdots, C_s)^r.$$

donde el grado promedio: $\deg_{av}(.)$ se define como:

$$\deg_{av}(C_1, \cdots, C_s) := \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \deg(C_i).$$

La última de las cotas se obtiene a partir de la segunda, teniendo en cuenta que $\deg(C_1) \geq 1$ y entonces:

$$\deg(C_1)\left(1 + \sum_{i=2}^{s} \deg(C_i)\right)^r = \deg(C_1)(1 + s\deg_{av}(C_1, \cdots, C_s) - \deg(C_1))^r \leq \deg(C_1)(s\deg_{av}(C_1, \cdots, C_s))^r.$$

4.3. Demostración de la acotación *i)* del Teorema (4.2.3)

Este resultado se sigue de un argumento inductivo (sobre s) similar al original de [**HeSc, 82**], pero adaptado a constructibles, poniendo cuidado en la potencial incidencia sobre la intersección de las componentes localmente cerradas irreducibles inmersas (definición 27) que puedan afectar al grado.

El caso $s = 2$ se obtiene a partir de la desigualdad de Bézout para constructibles (Teorema (4.1.8)).

Ahora asumimos que $C_1 = W$ es un conjunto localmente cerrado irreducible. Distinguimos dos casos:

- Cuando $\dim(W \cap C_2) < \dim(W)$. Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que:

  $$\deg\left(W \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} C_i\right)\right) \leq \binom{\dim(W \cap C_2) + s - 2}{\dim(W \cap C_2)} \deg(W \cap C_2)(\max\{\deg(C_j) : 3 \leq j \leq s\})^{\dim(W \cap C_2)}.$$

  Dados $a \leq b$ dos enteros positivos, entonces se verifica la relación siguiente:

  $$\binom{a + (s-2)}{a} \leq \binom{b + (s-2)}{b} \leq \binom{b + (s-1)}{b}. \tag{4.3.1}$$

  Aplicando esta relación para $\dim(W \cap C_2) \leq \dim(W) - 1$ y la desigualdad de Bézout:

  $$\deg\left(W \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} C_i\right)\right) \leq \binom{\dim(W) + s - 1}{\dim(W)} \deg(W)\deg(C_2)(\max\{\deg(C_j) : 3 \leq j \leq s\})^{\dim(W)-1}$$

  Finalmente dado que: $\deg(C_2)(\max\{\deg(C_j) : 3 \leq j \leq s\}) \leq (\max\{\deg(C_j) : 2 \leq j \leq s\})^2$, entonces:

  $$\deg\left(W \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} C_i\right)\right) \leq \binom{\dim(W) + s - 1}{\dim(W)} \deg(W)(\max\{\deg(C_j) : 2 \leq j \leq s\})^{\dim(W)}.$$

- Cuando $\dim(W \cap C_2) = \dim(W)$. Consideramos la descomposición de C_2 en componentes localmente cerradas e irreducibles de grado minimal, de forma que:

  $$C_2 := W_1 \cup \cdots \cup W_m; \quad \deg(C_2) = \sum_{i=1}^{m} \deg(W_i).$$

  Renombrando los W_i podemos afirmar que existe un entero k, tal que $1 \leq k \leq m$, verificando que:
  - Para $1 \leq i \leq k$, $\dim(W \cap W_i) = \dim(W)$.
  - Para $k+1 \leq i \leq m$, $\dim(W \cap W_i) < \dim(W)$.

Sea $1 \leq i \leq k$, $W := U \cap V$ y $W_i := U_i \cap V_i$, con U, U_i abiertos y V, V_i cerrados irreducibles. Como $\dim(W \cap W_i) = \dim(W)$, y $\overline{W \cap W_i}^z \subseteq V$ (cerrado irreducible), entonces por la Proposición (I.3.13), $\overline{W \cap W_i}^z = V$. Además como $\overline{W \cap W_i}^z \subseteq V_i$, el conjunto siguiente es localmente cerrado.

$$W \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k} (W \cap W_i) = \bigcup_{i=1}^{k} (U \cap U_i \cap V \cap V_i) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} U \cap U_i \right) \cap V.$$

Definimos ahora los siguientes dos constructibles:

$$C_2' = \bigcup_{i=1}^{k} W_i; \qquad \widetilde{C}_2 = \bigcup_{j=k+1}^{m} W_i.$$

En primer lugar, $C_2' \cap W$ es un localmente cerrado denso en la clausura Zariski de W, por lo que verifica que: $\deg(W \cap C_2') = \deg(W)$. Por otro lado, como $C_2 = C_2' \cup \widetilde{C}_2$, entonces:

$$\deg(\widetilde{C_2}) = \deg(C_2) - \sum_{i=1}^{k} \deg(W_i) \leq \deg(C_2).$$

Por la desigualdad de Bézout para constructibles: $\deg(W \cap \widetilde{C}_2) \leq \deg(W)\deg(\widetilde{C}_2) \leq \deg(W)\deg(C_2)$. Consideramos ahora la descomposición siguiente:

$$W \cap \left(\bigcup_{i=2}^{s} C_i \right) = \left((W \cap C_2') \cap \left(\bigcap_{i=3}^{s} C_i \right) \right) \bigcup \left((W \cap \widetilde{C}_2) \cap \left(\bigcap_{i=3}^{s} C_i \right) \right).$$

Por la subaditividad del grado obtenemos una cota como suma siguiente:

$$\deg \left(W \cap \bigcap_{i=2}^{s} C_i \right) \leq I_1 + I_2,$$

$$I_1 := \deg \left((W \cap C_2') \cap \left(\bigcap_{i=3}^{s} C_i \right) \right); \quad I_2 := \deg \left((W \cap \widetilde{C}_2) \cap \left(\bigcap_{i=3}^{s} C_i \right) \right).$$

A continuación, acotamos las cantidades I_1 y I_2 por separado. Como $r = \dim(W) = \dim(W \cap C_2')$ y $\deg(W) = \deg(W \cap C_2')$, aplicando la hipótesis de inducción:

$$I_1 \leq \binom{s+r-2}{r} \deg(W)(\max\{\deg(C_i) : 3 \leq i \leq s\})^r$$

Por otro lado, para $k+1 \leq i \leq m$, $\dim(W \cap W_i) \leq \dim(W) - 1$ y $\deg(W \cap \widetilde{C}_2) \leq \deg(W)\deg(C_2)$. Sea $t := \dim(W \cap \widetilde{C}_2)$ tal que $t \leq r-1$, con $r = \dim(W)$, entonces por la hipótesis de inducción:

$$I_2 \leq \binom{s+t-2}{t} \deg(W)\deg(C_2)(\max\{\deg(C_i) : 3 \leq i \leq s\})^t.$$

Como $t \leq r-1$, entonces a partir de la cota anterior, es inmediato por la relación (4.3.1), que:

$$I_2 \leq \binom{s+r-1}{r-1} \deg(W)(\max\{\deg(C_i) : 2 \leq i \leq s\})^{r-1}.$$

Considerando ahora la cota para la suma $I_1 + I_2$, obtenemos que:

$$I_1 + I_2 \leq \left[\binom{r+s-2}{r} + \binom{r+s-2}{r-1} \right] \deg(W)(\max\{\deg(C_i) : 2 \leq i \leq s\})^r.$$

Finalmente por el Triángulo de Pascal tenemos que:

$$\deg \left(W \cap \bigcap_{i=2}^{s} C_i \right) \leq \binom{r+s-1}{r} \deg(W)(\max\{\deg(C_i) : 2 \leq i \leq s\})^r.$$

Para concluir la prueba, vamos a considerar que C_1 es un constructible, y una descomposición del mismo como unión de localmente cerrados irreducibles que minimizan el grado:

$$C_1 := V_1 \cup \cdots \cup V_d; \qquad \deg(C_1) = \sum_{j=1}^{d} \deg(V_j).$$

Por la subaditividad del grado para constructibles, se tiene que:

$$\deg \left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i \right) \leq \sum_{j=1}^{d} \binom{r_j+s-1}{r_j} \deg(V_j)(\max\{\deg(C_i) : 2 \leq i \leq s\})^{r_j}; \quad r_j = \dim(V_j).$$

Como $r_j \leq r$ podemos acotar cada uno de los números combinatorios del sumado anterior, y entonces:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i\right) \leq \binom{r+s-1}{r}\left[\sum_{j=1}^{d}\deg(V_j)\right](\max\{\deg(C_i) : 2 \leq i \leq s\})^r.$$

Observación 4.3.1. El número combinatorio se puede reemplazar por cualquier función $f(r,s)$ con valores positivos, verificando que: $f(r,s) \geq f(r,s-1)+f(r-1,s-1)$ y $f(a,s) \leq f(b,s)$ si $a \leq b$.

4.4. Demostración de la acotación *ii)* del Teorema (4.2.3)

Finalmente, en la siguiente sección, se recoge la mejor cota conocida para el grado de la intersección de conjuntos constructibles, Esta involucra a la suma de los grados en lugar de al máximo como ocurría en el caso anterior. En primer lugar planteamos una subsección de resultados técnicos preliminares que facilitarán el desarrollo de la prueba, y en segundo lugar otra subsección con la prueba propiamente dicha.

4.4.1. Algunos resultados técnicos preliminates.

Lema 4.4.1. *Sea $D \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto localmente cerrado. Sean $\mathscr{V}_1, \cdots, \mathscr{V}_s$, varias familias de conjuntos localmente cerrados. Sea $\mathscr{W}$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{A}^n(K)$ que se pueden definir como la intersección con D de algún conjunto localmente cerrado escogido acorde a la lista $\mathscr{V}_1, \cdots, \mathscr{V}_s$. Es decir, sea $\mathscr{W}$ el conjunto de localmente cerrados dados por la identidad siguiente:*

$$\mathscr{W} := \left\{ D \cap \bigcap_{i\in S} V_i : S \subseteq \{1, \cdots, s\}, V_i \in \mathscr{V}_i \right\}.$$

Sea $\mathscr{L}$ el conjunto de variedades algebraicas definido como:

$$\mathscr{L} := \{V : V \text{ irreducible y } \exists W \in \mathscr{W} \text{ tal que un abierto no vacío de } V \text{ es una componente de } W\}.$$

Entonces tenemos que:

$$\sum_{V\in\mathscr{L}}\deg(V) \leq \deg(D)\left(1+\sum_{V\in\cup_{i=1}^{s}\mathscr{V}_i}\deg(V)\right)^{\dim(D)} \leq \deg(D)\left(1+\sum_{i=1}^{s}\sum_{V\in\mathscr{V}_i}\deg(V)\right)^{\dim(D)}$$

Además, existe una biyección que preserva el grado, entre $\mathscr{L}$ y el conjunto siguiente:

$$\mathscr{D} := \{C : C \text{ irreducible y } \exists W \in \mathscr{W} \text{ con } C \text{ componente irreducible de } \overline{W}^z\}.$$

y por tanto la cota superior verifica que:

$$\sum_{C\in\mathscr{D}}\deg(C) \leq \deg(D)\left(1+\sum_{V\in\cup_{i=1}^{s}\mathscr{V}_i}\deg(V)\right)^{\dim(D)} \leq \deg(D)\left(1+\sum_{i=1}^{s}\sum_{V\in\mathscr{V}_i}\deg(V)\right)^{\dim(D)}$$

Demostración. Como el grado de un localmente cerrado se obtiene a partir de la suma de los grados asociados a sus componentes irreducibles y su dimensión se obtiene a partir del máximo de las dimensiones de las mismas, podemos realizar la prueba asumiendo que D es un localmente cerrado irreducible. Además, para todo $W \in \mathscr{W}$ (localmente cerrado irreducible), sus componentes irreducibles están en biyección con las componentes irreducibles de su clausura Zariski, $\overline{W}^z$ y el grado se mantiene por construcción.
Por tanto, los conjuntos $\mathscr{L}$ y $\mathscr{D}$ están en biyección. Para la prueba, se va a trabajar sobre el conjunto $\mathscr{D}$.
Sea $d := \dim(D)$. Para cada $k, 0 \leq k \leq n$, definimos el conjunto:

$$\mathscr{D}(k) := \{C \in \mathscr{D} : \dim(C)) = k\},$$

que verifica que: $\mathscr{D}(k) = \emptyset, d+1 \leq k \leq n$, ya que $\dim(C) \leq \dim(\overline{W}^z) \leq \dim(D)$ y $\mathscr{D}(d) = \{\overline{D}^z\}$, pues si $C \in \mathscr{D}$, con $\dim(C) = d$, como $C \subseteq \overline{D}^z$ (variedad algebraica irreducible), entonces por (I.3.13) $C = \overline{D}^z$.
Para $k < d$ tenemos la siguiente afirmación:

Afirmación. *Para cada $C \in \mathscr{D}(k)$ existe un $C^* \in \mathscr{D}$ y $W \in \mathscr{V}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{V}_s$, verificando que:*

i) La dimensión de C^* es mayor que $k+1$ y por tanto $C^* \in \bigcup_{r=k+1}^{d}\mathscr{D}(r)$.
ii) La variedad C es una componente irreducible de la clausura Zariski de la intersección $C^* \cap W$.

Demostración. Sea $C \in \mathscr{D}(k)$ y $S \subseteq \{1, \cdots, s\}$ un subconjunto de cardinal minimal tal que un abierto Zariski $U \cap C$ de C es una componente localmente cerrada irreducible de alguna intersección:

$$W := D \cap \left(\bigcap_{i\in S} V_i\right),$$

donde $V_i \in \mathscr{V}_i$. Como $k < d$, S no puede ser vacío. Sea $S' := S \setminus \{j\}$ para algún $j \in S$. Definimos ahora

$$W' := D \cap \left(\bigcap_{i \in S'} V_i \right) \Longrightarrow W = W' \cap V_j.$$

Por construcción existe, C^*, componente irreducible de la clausura Zariski de W', que verifica que existe algún abierto Zariski de C que es una componente localmente cerrada irreducible de $C^* \cap V_j$, y por tanto C^* es una componente irreducible de $\overline{C^* \cap W}^z$. Además, como $C \subseteq C^*$ y C^* es irreducible por la prop.(I.3.13), si $\dim(C) = \dim(C^*)$ entonces $C = C^*$ y S no tendría cardinal minimal, entonces $\dim(C^*) \geq k+1$. ■

La afirmación anterior nos permite definir el morfismo siguiente:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_k : & \mathscr{D}(k) & \longrightarrow & \left(\bigcup_{r=k+1}^{d} \mathscr{D}(r)\right) \times \left(\bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i\right) = \mathscr{R} \\ & C & \longmapsto & (C^*, V) \end{array}$$

de forma que para cada $C \in \mathscr{D}(k)$ tenemos un par (C^*, V) tal que un subconjunto abierto no vacío de C es una componente locamente irreducible de $C^* \cap V$. Por definición de grado para un conjunto localmente cerrados tenemos que: $\deg(C) \leq \deg(C^* \cap V)$. Definamos ahora el valor $D(k)$, a partir de:

$$D(k) := \sum_{r=k}^{d} \sum_{C \in \mathscr{D}(r)} \deg(C) = D(k+1) + \sum_{C \in \mathscr{D}(k)} \deg(C), \tag{4.4.1}$$

donde podemos ver que $D(0) = \sum_{C \in \mathscr{D}} \deg(C)$. Por inducción sobre $m := d-k$, probamos la desigualdad:

$$D(k) = D(d-m) \leq \deg(D) \left(1 + \sum_{V \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i} \deg(V) \right)^m.$$

El caso $m = 0$ lo tenemos, ya que $\mathscr{D}(d) = \{\overline{D}^z\}$, y $D(d) = \deg(D)$. Asumamos el resultado para $m \geq 1$, aplicando la desigualdad de Bézout para localmente cerrados y reagrupando las sumas, se tiene que:

$$\sum_{C \in \mathscr{D}(k)} \deg(C) \leq \sum_{(C^*,V) \in \mathscr{R}} \deg(C^* \cap V) = \sum_{C^* \in \bigcup_{r=k+1}^{d} \mathscr{D}(r)} \deg(C^*) \sum_{V \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i} \deg(V) = D(k+1)R.$$

donde $R := \sum_{V \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i} \deg(V)$. Entonces, combinando esta expresión con (4.4.1), se verifica que $D(k) \leq D(k+1)(R+1)$. Dado que $k+1 = d-(m-1)$, aplicando la hipótesis de inducción tenemos que:

$$D(k) \leq \deg(D) \left(1 + \sum_{V \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i} \deg(V) \right)^{m-1} \left(1 + \sum_{V \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i} \deg(V) \right) = \deg(D) \left(1 + \sum_{V \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i} \deg(V) \right)^m$$

Considerando el caso $m = d$, obtenemos la desigualdad buscada:

$$D(0) = \sum_{C \in \mathscr{D}} \deg(C) \leq \deg(D) \left(1 + \sum_{V \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i} \deg(V) \right)^d \leq \deg(D) \left(1 + \sum_{i=1}^{s} \sum_{V \in \mathscr{V}_i} \deg(V) \right)^d$$

□

4.4.2. Prueba de la cota *ii)* para el grado de la intersección.

Vamos a realizar la prueba considerando que C_1 es localmente cerrado irreducible. Si el resultado es cierto en este caso, es posible generalizar al caso constructible considerando una descomposición de C_1 en localmente cerrados irreducibles de grado minimal:

$$C_1 := W_1 \cup \cdots \cup W_m; \quad \deg(C_1) := \sum_{i=1}^{m} \deg(W_i).$$

Como $\dim(C_1) = \max\{\dim(W_i) : 1 \leq i \leq m\}$, junto a la subaditividad del grado, tenemos que:

$$\deg\left(C_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} C_i \right) \right) \leq \sum_{j=1}^{m} \deg\left(W_j \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} C_i \right) \right) \leq \sum_{j=1}^{m} \deg(W_j) \left(1 + \sum_{i=2}^{s} \deg(C_i) \right)^{\dim(W_i)},$$

lo cual implica directamente el resultado del enunciado. Por tanto sea C_1 localmente cerrado irreducible de dimensión $d := \dim(C_1)$. Consideramos la descomposición en irreducibles de C_i, $2 \leq i \leq s$, tal que:

$$C_i := W_{i,1} \cup \cdots \cup W_{i,s(i)}; \quad \deg(C_i) := \sum_{j=1}^{s(i)} \deg(W_{i,j}).$$

Ahora introducimos las clases de conjuntos localmente cerrados, que vienen dadas por las identidades:

$$\mathscr{V}_i = \{W_{i,1}, \cdots, W_{i,s(i)}\}, \;\; 2 \leq i \leq s,$$

y a partir de ellas definimos la clase $\mathscr{V}$, de la forma siguiente:

$$\mathscr{V} = \left\{ W : \forall i,\ 2 \leq i \leq s,\ \exists W_i \in \mathscr{V}_i \;\text{ tal que }\; W = C_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} W_i \right) \right\}.$$

Finalmente, definimos $\mathscr{C}$ como la familia de variedades algebraicas, dados por:

$$\mathscr{C} := \{C : C \text{ irreducible y } \exists W \in \mathscr{V} : \text{un subconjunto no vacío de } C \text{ es componente irreducible de } W\}.$$

Para cada $C \in \mathscr{C}$, sea $U_C \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un abierto Zariski, maximal con la propiedad de que:

$$\emptyset \neq U_C \cap C \subseteq C_1 \cap \cdots \cap C_s.$$

Afirmación. *Con la notación precedente, tenemos que se verifica la siguiente igualdad:*

$$C_1 \cap \bigcap_{i=2}^{s} C_i = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} U_C \cap C$$

Demostración. Para todo $C \in \mathscr{C}$, existe $U_0 \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto tal que $U_0 \cap C \neq \emptyset$, es una componente irreducible de un localmente cerrado de la forma: $C_1 \cap (W_2 \cap \cdots \cap W_s)$, donde $W_i \in \mathscr{V}_i$, con $2 \leq i \leq s$. Entonces tenemos que $U_0 \cap C \subseteq C_1 \cap \cdots \cap C_s$, y por definición de U_C: $U_C \cap C \subseteq C_1 \cap \cdots \cap C_s$.
Por otro lado, sea $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_s$. Por verificarse la siguiente igualdad,

$$C_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} C_i \right) = \bigcup_{(W_2, \cdots, W_s) \in \prod_{i=1}^{s} \mathscr{V}_i} C_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{s} W_i \right)$$

podemos concluir que existen $W_2 \in \mathscr{V}_2, \cdots, W_s \in \mathscr{V}_s$ tales que $x \in C_1 \cap (W_1 \cap \cdots \cap W_s)$. En particular, x debe pertenecer a alguna de sus componentes localmente cerradas irreducibles, es decir, debe existir $C \in \mathscr{C}$ tal que $x \in U_C \cap C$ y por tanto x pertenece a la unión para todo $C \in \mathscr{C}$, lo que da la igualdad. ■

Por la subaditividad del grado y la afirmación anterior, tenemos que:

$$\deg\left(\bigcap_{i=1}^{s} C_i \right) \leq \sum_{C \in \mathscr{C}} \deg(U_C \cap C) = \sum_{C \in \mathscr{C}} \deg(C). \tag{4.4.2}$$

Ahora consideramos la familia de localmente cerrados irreducibles $\mathscr{W}$, como en el Lema (4.4.1):

$$\mathscr{W} := \left\{ W : \exists S \subseteq \{2, \cdots, s\} \text{ y } \forall i \in S, \exists W_i \in \mathscr{V}_i \text{ tal que } W = C_1 \cap \left(\bigcap_{i \in S} W_i \right) \right\}.$$

Además, consideramos la familia de conjuntos algebraicos $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} := \{C : C \text{ irreducible y } \exists W \in \mathscr{W}, \text{ tal que un abierto no vacío de } C \text{ es componente de } W\}.$$

Es claro que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}$ (ya que $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{V}$) y por el Lema (4.4.1), se puede concluir que:

$$\sum_{C \in \mathscr{C}} \deg(C) \leq \sum_{C \in \mathscr{L}} \deg(C) \leq \deg(C_1) \left(1 + \sum_{i=2}^{s} \sum_{V \in \mathscr{V}_i} \deg(V) \right)^{\dim(C_1)}$$

Como $\deg(C_i) = \sum_{V \in \mathscr{V}_i} \deg(V)$, de acuerdo a la identidad (4.4.2), obtenemos la cota superior buscada.

4.5. Conclusiones sobre el Teorema (4.2.3)

El resultado del Teorema (4.2.3), generaliza la cota de la Proposición 2.3 de [**HeSc, 82**] a constructibles. En la cota i), el coeficiente que aparece, puede interpretarse como polinomial en r y exponencial en s:

$$\left(\frac{r+s-1}{s-1} \right)^{s-1} \leq \binom{r+s-1}{r} \leq \left(\frac{e(r+s-1)}{s-1} \right)^{s-1}.$$

donde e es la base del logaritmo neperiano, o a la inversa, polinomial en s y exponencial en r, ya que:

$$\left(\frac{r+s-1}{r} \right)^{r} \leq \binom{r+s-1}{r} \leq \left(\frac{e(r+s-1)}{r} \right)^{r}.$$

En cualquier caso no es 1, como se esperaría en el resultado original. Por su parte, las cotas ii) y iii) son siempre polinomiales en s y exponenciales en r. Finalmente destacar, que por el momento no se conoce si es posible obtener mejoras significativas de las constantes (en s y r), de las que se recogen en este teorema.

APÉNDICE I

Localización. Extensiones Enteras. Dimensión Local. Normalización de Noether

Índice

I.1.	**Anillos locales y localización**	**i**
I.1.1.	Anillos de valoración discreta	iii
I.2.	**Extensiones enteras de anillos**	**iii**
I.2.1.	Teorema de Krull-Cohen-Seidenberg	v
I.3.	**Dimensión de Krull**	**v**
I.4.	**Lema de Normalización de Noether**	**ix**
I.5.	**Lema de Nakayama**	**xi**
I.6.	**Otros aspectos del Concepto de Dimensión**	**xii**
I.6.1.	Anillos de Artin. Anillos y Módulos Graduados	xii
I.6.2.	El Polinomio de Hilbert-Samuel	xii
I.6.3.	Teorema de la Dimensión Local	xiii

En este apéndice se incluyen la definición de dimensión adoptada por Krull para anillos noetherianos, en particualar, los anillos de polinomios multivariados $K[X_1, \cdots, X_n]$, así como a los anillos de funciones polinomiales $K[V]$ sobre una variedad algebraica. Esta noción es fácilmente extendible a espacios topológicos noetherianos, como los espacios afines $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ y las variedades algebraicas afines.

Además se van a incluir definiciones y resultados relativos a localización de anillos y extensiones enteras, que aparecen de forma recurrente a los largo de todo el trabajo. También se incluyen resultados relativos a los lemas de Normalización de Noether y Nakayama, que resultarán de utilidad. Finalmente, se realiza un pequeño apunte sobre dimensión local que permite generalizar el concepto de dimensión a contextos más amplios y enunciar un teorema de equivalencia entre la dimensión de Krull y otras dos definiciones.

I.1. Anillos locales y localización

Definición 28. *Un anillo local es un anillo R que tiene únicamente un ideal maximal $\mathfrak{m}$. Usualmente se denota como $(R, \mathfrak{m})$ al anillo local. Si $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local, entonces $k = R/\mathfrak{m}$ es un cuerpo, denominado el cuerpo residual de R.*

Proposición I.1.1. *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local, entonces $\mathfrak{m} = R \setminus R^*$, con R^* son las unidades del anillo.*

Demostración. Es facil de ver que $R \setminus R^*$ es un ideal de R, ya que dado $x \in R \setminus R^*$ y $r \in R$, si $xr \in R^*$ entonces, existiría un $y \in R$ tal que $(xr)y = x(ry) = 1$, y por tanto $x \in R^*$. Para ver que es maximal basta tener en cuenta que $\mathfrak{m} \neq (1)$, entonces no puede contener unidades, por lo que $\mathfrak{m} \subseteq R \setminus R^*$ y como $R \setminus R^*$ es un ideal y $\mathfrak{m}$ es maximal, $\mathfrak{m} = R \setminus R^*$. □

Ejemplo I.1.2. *Algunos ejemplos de anillos locales son los siguientes:*

- *Los cuerpos, donde su único maximal coincide con el (0).*
- *Con las operaciones usuales de suma y producto de fracciones, sea p un número primo, entonces:*

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{a}{b}, p \nmid b \right\}, \quad \mathfrak{m}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{a}{b}, p \mid a, p \nmid b \right\}.$$

  es un anillo local, de maximal $\mathfrak{m}_p$.
- *Los gérmenes de funciones en un punto. Dado un espacio topológico X y un punto $p \in X$, se define la siguiente relación de equivalencia de funciones regulares sobre algún entorno de p:*

$$f \sim_p g \iff \exists U \text{ entorno de } p \text{ tal que las restricciones } f|_U = g|_U.$$

  Se denota por f_p al gérmen o clase de equivalencia de la función $f : U \longrightarrow \mathbb{K}$, y por $\mathcal{O}_{X,p}$ al conjunto cociente, que tiene estructura de anillo y de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

A continuación se muestra un proceso de localización, que en ocasiones permite obtener anillos locales a partir de un anillo genérico y de un sistema multiplicativamente cerrado.

Definición 29. *Sea R un anillo y $S \subseteq R$ un subconjunto. Diremos que S es un subconjunto multiplicativamente cerrado si: $1 \in S$, $0 \notin S$ y si $x, y \in S$ implica que $xy \in S$.*

Ejemplo I.1.3. *Algunos ejemplos de sistemas multiplicativamente cerrados son:*

- *Un anillo R es dominio de integridad, si y solamente si $R \setminus \{0\}$ es un sistema multiplicativamente cerrado de R.*
- *Un ideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ es primo, si y solamente si $R \setminus \mathfrak{p}$ es un sistema multiplicativamente cerrado de R.*
- *Dado un elemento $f \in R$ no nilpotente, el siguiente es un sistema multiplicativamente cerrado:*

$$S_f := \{1, f, f^2, f^3, \cdots\} = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 30. *Sea R un anillo y S un subconjunto multiplicativamente cerrado. Se define en el producto cartesiano $R \times S$ la siguiente relación de equivalencia:*

$$(x, s_1) \sim (y, s_2) \text{ si existe } s \in S \text{ tal que } s(xs_2 - ys_1) = 0$$

Se denota por $S^{-1}R = (R \times S)/\sim$ al anillo cociente. La clase de equivalencia del elemento (x, s) se denota por x/s y las operaciones definidas en el anillo son las suma y el producto usuales de fracciones.

Ejemplo I.1.4. *Algunos ejemplos de localizaciones de anillos son las siguientes:*

- *Si R es un dominio de integridad y $S := R \setminus \{0\}$, entonces $S^{-1}R$ se corresponde con el cuerpo de fracciones de R, denotado como: $qf(R)$.*
- *Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ es un ideal primo y $S = R \setminus \mathfrak{p}$, a la localización en el primo $\mathfrak{p}$, se la denota por $R_{\mathfrak{p}}$. Se corresponde con el cociente de elementos de R, cuyo denominador no pertenece al ideal primo. Como caso concreto tenemos el punto dos del Ejemplo (I.1.2).*
- *Consideramos el anillo de polinomios: $R = K[X_1, \cdots, X_n]$ y f un polinomio no nulo. Como R es dominio de integridad, entonces S_f es un sistema multiplicativamente cerrado.*

Observación I.1.5. Si R es dominio de integridad y S es un sistema multiplicativamente cerrado de R, podemos considerar los elementos de $S^{-1}R$ como elementos del cuerpo de fracciones $qf(R)$, es decir:

$$R \subseteq S^{-1}R \subseteq qf(R).$$

La siguiente proposición justifica la extensión de un monomorfismo de anillos, a un monomorfismo entre las respectivas localizaciones. La inyectividad del morfismo es necesaria para asegurar la buena definición.

Proposición I.1.6. *Sea $\Phi : A \hookrightarrow B$ un monomorfismo de anillos y $S \subseteq A$ un sistema multiplicativamente cerrado. Entonces Φ admite una localización como la siguiente:*

$$\begin{array}{rccc} S^{-1}\Phi: & S^{-1}A & \hookrightarrow & S^{-1}B \\ & \dfrac{x}{s} & \longmapsto & \dfrac{\Phi(x)}{\Phi(s)} \end{array}$$

Demostración. Como Φ es un morfismo de anillos, entonces $\Phi(1) = 1 \in \Phi(S) \subseteq B$, y dados $\Phi(x), \Phi(y) \in \Phi(S)$ entonces $\Phi(xy) \in \Phi(S)$. Por ser monomorfismo $\ker(\Phi) = \{0\} \in \Phi(S)$, entonces $\Phi(S)$ es un sistema multiplicativamente cerrado de B e identificando $\Phi(S) \equiv S$ se concluye la prueba. □

Finalmente, los resultados siguintes incluyen algunas propiedades más de la localización de anillos.

Proposición I.1.7. *Sea R un anillo y $S \subseteq R$ un sistema multiplicativamente cerrado, entonces:*

i) Dado un ideal $\mathfrak{a}$ de R, $S^{-1}\mathfrak{a}$ es un ideal de $S^{-1}R$.

ii) Dados dos ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de R, se tiene que:

- $S^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} + S^{-1}\mathfrak{b}$
- $S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}$

iii) Hay una biyección entre los ideales primos de R de intersección vacía con S y $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$.

$$\begin{array}{rccc} S^{-1}: & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(S^{-1}R) \\ & \mathfrak{p} & \longmapsto & S^{-1}\mathfrak{p} \end{array}$$

iv) La propiedad anterior no se cumple en general en el caso de ideales maximales. Si $S^{-1}\mathfrak{m}$ es maximal en $S^{-1}R$, entonces $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(R)$ es maximal entre los ideales primos de intersección vacía con S, pero no necesariamente maximal en R.

Proposición I.1.8. *Sea R un anillo y $\mathfrak{q}$ un ideal primo. Se considera el sistema multiplicativamente cerrado $S = R \setminus \mathfrak{q}$ y el anillo local $R_{\mathfrak{q}} = S^{-1}R$, de maximal $\mathfrak{m} = S^{-1}\mathfrak{q}$. Entonces tenemos que el cuerpo residual $\kappa(\mathfrak{m})$ es isomorfo al cuerpo de fracciones del anillo cociente $R/\mathfrak{q}$.*

$$\kappa(\mathfrak{m}) = R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{m} \simeq qf\,(R/\mathfrak{q})$$

DEMOSTRACIÓN. Se considera el siguiente morfismo sobreyectivo de anillos:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : R_{\mathfrak{q}} & \longrightarrow & qf\,(R/\mathfrak{q}) \\ x/y & \longmapsto & x+\mathfrak{q}/y+\mathfrak{q} \end{array}$$

Como $y \in S$, entonces $y \notin \mathfrak{q}$, y por tanto la división está bien definida en el cociente. El núcleo de la aplicación se corresponde con: $\ker(\Phi) = \{z \in R_{\mathfrak{q}} : \Phi(z) = 0\}$. Considerando $z = x/y$, $\Phi(z) = 0$, si y solamente si $x \in \mathfrak{q}$, con $y \in S$. Entonces, $x/y \in \mathfrak{m}$ y por el Primer Teorema de Isomorfía tenemos el isomorfismo de cuerpos: $R_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{m} \simeq qf\,(R/\mathfrak{q})$. □

I.1.1. Anillos de valoración discreta. Un ejemplo interesante de anillos locales son los anillos de valoración discreta, que se usan como herramienta en el texto principal del trabajo. La caracterización de los mismos viene dada por la proposición siguiente:

Proposición I.1.9. *Sea R un dominio de integridad que no es cuerpo. Entonces son equivalentes:*

i) R es local, noetheriano y su ideal maximal es principal.
ii) Existe un elemento irreducible (no unidad) $t \in R$ tal que, para todo $r \in R$ no nulo, existe una única unidad $u \in R$ y un único entero no negativo n tales que $r = ut^n$.

DEMOSTRACIÓN. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local y $t \in R$ tal que $\mathfrak{m} = (t)$, entonces t es un elemento irreducible (si $t = xy$, $x \in R^*$ ó $y \in R^*$). Sea $r \in R$, tal que $r \neq 0$. Si $r \in R^*$ entonces $r = rt^0$. Si $r \notin R^*$, como R es un anillo local $r \in \mathfrak{m} = R \setminus R^*$, y por tanto es de la forma $r = r_1 t$, con $r_1 \in R$. Si $r_1 \in R^*$ hemos acabado, si no $r_1 = r_2 t$ y $r = r_2 t^2$. Repetimos este procedimiento hasta encontrar un r_n que sea unidad y por tanto $r = r_n t^n$. Su existencia está garantizada por el hecho de que R es noetheriano por hipótesis. Si en el procedimiento anterior, ningún r_n fuese unidad, obtendríamos una cadena infinita:

$$(r) \subsetneq (r_1) \subsetneq (r_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (r_n) \subsetneq \cdots$$

que se estabiliza para un cierto valor de n. Tendríamos que $(r_n) = (r_{n+1})$, $r_{n+1} = ur_n$, con $u \in R^*$ y por otro lado $r_n = r_{n+1}t$, entonces $ut = 1$ y t sería unidad $(R = \mathfrak{m})$.

ii) $\Rightarrow$ *i)*. Como todo elemento $r \in R$ es de la forma $r = ut^n$, entonces $r \in (t) = \mathfrak{m}$ y por tanto es el único maximal del anillo y $(R, \mathfrak{m})$ es un anillo local. Sea $\mathfrak{a} \subseteq R$ un ideal y $(t^n) \subseteq \mathfrak{a}$ de tal forma que n es el menor entero positivo que lo verifica. Sea $s \in \mathfrak{a}$, de la forma $s = vt^m$, con $m \geq n$ y $v \in R^*$. Entonces, $s = vt^{m-n}t^n \in (t^n)$ y $\mathfrak{a} = (t^n)$. □

Observación I.1.10. La segunda implicación nos da una propiedad más fuerte que el ser un anillo noetheriano, R es de hecho un dominio de ideales principales y todos sus ideales son de la forma (t^n).

Definición 31. *Un dominio R que no sea cuerpo, verificando las condiciones equivalentes del teorema anterior se denomina anillo de valoración discreta. En tal caso, un generador de su ideal maximal se denomina parámetro de uniformización de R.*

Definición 32. *Se llama valoración discreta del cuerpo $\mathbb{K}$ a toda aplicación sobreyectiva $v : \mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ que verifica las siguientes propiedades:*

i) $v(ab) = v(a) + v(b)$.
ii) $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Por convenio se define $v(0) = \infty$. Todo anillo de valoración discreta admite una aplicación que lo verifica.

I.2. Extensiones enteras de anillos

Definición 33. *Sean $A \subseteq B$ anillos. Un elemento $b \in B$ se denomina entero sobre A si es raiz de algún polinomio mónico con coeficientes en A. Es decir si existen $a_0, \cdots, a_{n-1} \in A$ tales que*

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0.$$

Al conjunto $\{b \in B : b$ es entero sobre $A\}$ se denota clausura entera de B. La extensión $A \subseteq B$ se denomina entera si todo elemento de B es entero sobre A (coincide con su clausura entera).

Si $\Phi : A \longrightarrow B$ es un morfismo, Φ se denomina entero, si B es entero sobre $\Phi(A)$.

Ejemplo I.2.1. *Los siguientes son ejemplos de extensiones enteras de anillos.*

- *Si $a \in A$, entonces a siempre va a ser entero sobre A, gracias al polinomio $x - a$.*
- *Sea $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[i]$ (enteros de Gauss). Todos los elementos de $\mathbb{Z}[i]$ con enteros sobre $\mathbb{Z}$, ya que si $z := x + yi \in \mathbb{Z}[i]$, entonces: $z^2 - 2xz + (x^2 + y^2) = 0$.*
- *Si D es un dominio de factorización única y F es su cuerpo de fracciones, entonces los únicos elementos de F enteros sobre D son los propios elementos de D. Esto supone una generalización de lo que ocurre para $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.*

Observación I.2.2. Es importante destacar, que si A y B son cuerpos, entonces las nociones de elemento algebraico y entero coinciden.

En la siguiente proposición se recogen una serie de propiedades que son fundamentales para la aplicación de la noción de extensión entera en el trabajo, y que se deducen directamente a partir de la definición.

Proposición I.2.3. *Sea $A \subseteq B$ una extensión entera, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

i) Sea $\mathfrak{q}$ un ideal de B y $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A$ el contraído de $\mathfrak{q}$ para la inclusión. Entonces $A/\mathfrak{q}^c \subseteq B/\mathfrak{q}$ es una extensión entera.

ii) Si $S \subseteq A$ es un sistema multiplicativamente cerrado, $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ es una extensión entera.

iii) Si B es un dominio de integridad, entonces A es cuerpo si y solamente si B es cuerpo.

iv) Sea $\mathfrak{m}$ un ideal de B, entonces $\mathfrak{m}$ es maximal de B si y solo si $\mathfrak{m}^c$ es maximal de A.

La proposiciones siguiente establece la relación entre extensiones enteras y módulos finitamente generados.

Proposición I.2.4. *Sea $A \subseteq B$ un extensión entera. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) Un elemento $b \in B$ es entero sobre A.

ii) La A-álgebra $A[b]$ es un A-módulo finitamente generado.

iii) Existe un subanillo $A \subseteq A[b] \subseteq R \subseteq B$, tal que R es un A-módulo finitamente generado.

iv) Existe un $A[b]$-módulo fiel M, de generación finita como A-módulo, que verifica que $bM \subseteq M$.

El resultado anterior se puede generalizar del modo siguiente.

Proposición I.2.5. *Sean A y B dos anillos, tales que B es una A-álgebra finitamente generada. Entonces $A \subseteq B$ es una extensión entera si y solamente si B es un A-módulo finitamente generado.*

Demostración. Como B es una A-álgebra finitamente generada, entonces existen $b_1, \cdots, b_n$ una familia finita de elementos de B, tales que $B := A[b_1, \cdots, b_n]$. Si $A \subseteq B$ es entera, b_i es entero sobre A, entonces $A[b_i]$ es un A-módulo finitamente generado, $\forall i$, tal que $1 \leq i \leq n$. y por tanto $A[b_1, \cdots, b_n]$ es un A-módulo finitamente generado. Recíprocamente, si $A[b_1, \cdots, b_n]$ es un A-módulo finitamente generado, entonces $A[b_i]$ también lo es, $\forall i$, con $1 \leq i \leq n$ y por tanto los generadores de B como A-álgebra son enteros sobre A, entonces $A \subseteq B$ es una extensión entera. □

Observación I.2.6. Si $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ es una variedad algebraica afín, entonces es un espacio topológico noetheriano, y por tanto la K-álgebra $K[V]$ es finitamente generada. Si $K[V] \hookrightarrow K[W]$ es una extensión entera de anillos, entonces da lugar también a un módulo finitamente generado.

Proposición I.2.7. (Incomparabilidad de Primos) *Sea $A \subseteq B$ una extensión entera. Si $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ son ideales primos en B con $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{q} \cap A$ y $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}^c := \mathfrak{p} \cap A$ la contracción de $\mathfrak{p}$ en A y $S := A \setminus \mathfrak{p}^c$ un sistema multiplicativamente cerrado, tal que $\mathfrak{p} \cap S = \mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. Ahora vamos a considerar los resultados recogidos en la proposición (I.1.7). Como $A \subseteq B$ es una extensión entera, $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$, donde $S^{-1}\mathfrak{p}^c$ es el ideal maximal del anillo local $S^{-1}A$ y $S^{-1}\mathfrak{p}$ y $S^{-1}\mathfrak{q}$, son ideales primos de $S^{-1}B$. Además, dado que $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{q} \cap A$ y $S^{-1}\mathfrak{p}^c = S^{-1}(\mathfrak{p} \cap A) = S^{-1}\mathfrak{p} \cap S^{-1}A$, entonces $S^{-1}\mathfrak{p}$ y $S^{-1}\mathfrak{q}$ son maximales de $S^{-1}B$. Finalmente como $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, entonces $S^{-1}\mathfrak{p} \subseteq S^{-1}\mathfrak{q}$ y por la condición de ser maximal se da la igualdad $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{q}$. Como S^{-1} es una aplicación biyectiva (en particular inyectiva), entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. □

Proposición I.2.8. (Lying over Theorem) *Sea $A \subseteq B$ entera, sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A, entonces existe un ideal primo $\mathfrak{q}$ de B, tal que $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Demostración. Sea $S := A \setminus \mathfrak{p}$ un sistema multiplicativamente cerrado. Como $A \subseteq B$ es una extensión entera, entonces $S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ también lo es. Sea $A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ el anillo localizado en el ideal $\mathfrak{p}$ (entonces $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$), de ideal maximal $S^{-1}\mathfrak{p}$. Consideramos ahora $\widetilde{\mathfrak{q}} \subseteq S^{-1}B$ un ideal maximal, y $\mathfrak{q} := \widetilde{\mathfrak{q}} \cap B$. Por ser $A_{\mathfrak{p}} \subseteq S^{-1}B$ entera, $\widetilde{\mathfrak{q}} \cap S^{-1}A$ es maximal en $A_{\mathfrak{p}}$, y por ser este local, entonces $\widetilde{\mathfrak{q}} \cap S^{-1}A = S^{-1}\mathfrak{p}$. Tomando la intersección por A se tiene que $\mathfrak{q} \cap A = \widetilde{\mathfrak{q}} \cap A = S^{-1}\mathfrak{p} \cap A$, por lo que basta ver que $S^{-1}\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}$.

- Sea $x \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p} \subseteq A$ y $\mathfrak{p} \subseteq S^{-1}\mathfrak{p}$, entonces $x \in S^{-1}\mathfrak{p} \cap A$ y $\mathfrak{p} \subseteq S^{-1}\mathfrak{p} \cap A$.
- Sea $x \in S^{-1}\mathfrak{p} \cap A$, entonces x verifica que:

$$x = \frac{y}{s}, \quad y \in \mathfrak{p}, s \in S \text{ entonces } \exists t \in S \text{ tal que } t(xs - y) = 0$$

Como $y \in \mathfrak{p}$ (ideal), entonces $ty \in \mathfrak{p}$ y por tanto $(ts)x \in \mathfrak{p}$. Finalmente, dado que $ts \in S$ y $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, $x \in \mathfrak{p}$. Entonces $S^{-1}\mathfrak{p} \cap A \subseteq \mathfrak{p}$ y por tanto se da la igualdad y $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

□

I.2.1. Teorema de Krull-Cohen-Seidenberg.

El teorema de Krull-Cohen-Seidenberg es fundamental en todo el trabajo, ya que permite establecer un morfismo sobreyectivo de variedades algebraicas afines ($V \longrightarrow W$), como consecuencia de la existencia de una extensión entera de anillos de funciones polinomiales ($K[W] \hookrightarrow K[V]$).

El primer lugar se necesita probar el conocido como Teorema del Ascenso, que permite establecer una biyección entre las cadenas ascendentes de ideales de A y B, con $A \subseteq B$ una extensión entera.

Teorema I.2.9. (Teorema del Ascenso - Going Up Theorem). *Sea $A \subseteq B$ una extensión entera. Sea $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ una cadena de ideales primos de A y sea $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ una cadena de ideales primos de B con $m < n$, tal que $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$. Entonces existen $\mathfrak{q}_{m+1}, \cdots, \mathfrak{q}_n$ ideales primos de B tales que $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m \subsetneq \cdots \subsetneq \cdots \mathfrak{q}_n$ es una cadena de primos en la que se verifica que $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$, $0 \leq i \leq n$.*

Demostración. Basta probar que dados $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Spec}(A)$ y $\mathfrak{q}_0 \in \operatorname{Spec}(B)$, tal que $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0 \cap A$, existe $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1$ y $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap A$. Después, el enunciado se deduce aplicando inducción.

Como $A \subseteq B$ es una extensión entera, $A/\mathfrak{p}_0 \subseteq B/\mathfrak{q}_0$ también lo es. Como $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1$, entonces $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_0$, es un ideal primo de $A/\mathfrak{p}_0$. Por el Lying Over Theorem (Proposición I.2.8), tenemos que existe un ideal primo $\mathfrak{q}$ de $B/\mathfrak{q}_0$, tal que $\mathfrak{q} \cap (A/\mathfrak{p}_0) = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_0$. El ideal $\mathfrak{q}$ es de la forma $\mathfrak{q} := \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_0$ con $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec}(B)$ y $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1$. Entonces, $(\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_0) \cap (A/\mathfrak{p}_0) = (\mathfrak{q}_1 \cap A) + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_0$, y por tanto $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$ (biyección entre los ideales de $A/\mathfrak{p}_0$ y los ideales de A que contienen a $\mathfrak{p}_0$). □

Corolario I.2.10. (Teorema de Krull-Cohen-Seidenberg). *Sea $A \hookrightarrow B$ un monomorfismo de anillos y supongamos que B es entero sobre A. Entonces, los morfismos siguientes son sobreyectivos:*

i) Morfismo sobre los espectros primos definido por la intersercción con A:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(B) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(A) \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & \mathfrak{p} \cap A \end{array}$$

ii) Morfismo sobre espectros maximales definido por la intersercción con A:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spm}(B) & \longrightarrow & \operatorname{Spm}(A) \\ \mathfrak{m} & \longmapsto & \mathfrak{m} \cap A \end{array}$$

Demostración. Por el Lying over theorem (Teorema I.2.8) la aplicación i) está bien definida y es sobreyectiva. Para probar ii), tomando la restricción de la aplicación i) a $\operatorname{Spm}(B)$, por la propiedad iv) de (I.2.3), la aplicación sobre los espectros maximales es también sobreyectiva. □

I.3. Dimensión de Krull

En esta sección se define el concepto de dimensión para variedades algebraicas, introducido por W. Krull en el texto: *"Idealtheorie"*. Springer, 1935 (influenciado por su maestra E.Noether), a partir de la dimensión previamente definida para anillos (noetherianos), mediante la equivalencia entre variedades irreducibles e ideales primos.

Definición 34. *Sea A un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A.*

i) Llamaremos altura de $\mathfrak{p}$ al máximo de las longitudes de cadenas de ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}$, esto es, el máximo de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que existe una cadena ascendente

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}$$

donde $\mathfrak{p}_0, \cdots, \mathfrak{p}_n$ son ideales primos de A. Se denota por $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$. Dado $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal cualquiera, llamamos altura de $\mathfrak{a}$ al ínfimo de las alturas de los primos contenidos en él.

ii) Llamaremos coaltura de $\mathfrak{p}$ al máximo de las longitudes de cadenas de ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{p}$, esto es, el máximo de los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que existe una cadena ascendente

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

donde $\mathfrak{p}_0, \cdots, \mathfrak{p}_n$ son ideales primos de A. Se denota por $\operatorname{coht}(\mathfrak{p})$. Dado $\mathfrak{a} \subseteq A$ un ideal cualquiera, llamamos coaltura de $\mathfrak{a}$ al máximo de las alturas de los primos que lo contienen.

Definición 35. (Dimensión de Krull de un Anillo). *Sea A un anillo. Llamaremos dimensión de Krull de A a la máxima de las longitudes de las cadenas de ideales primos en A, lo que se corresponde con el máximo de las alturas (equivalentemente co-alturas), de los ideales de* $\operatorname{Spec}(A)$.

$$\dim_K(A) := \max\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\} = \max\{\operatorname{coht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)\}$$

Observación I.3.1. Toda cadena ascendente de ideales está acotada superiormente por un ideal maximal (por el Nullstellensatz), entonces la noción de dimensión se puede reescribir como:

$$\dim_K(A) := \max\{\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) : \mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(A)\}.$$

Ejemplo I.3.2. *Algunos ejemplos del cálculo de la dimensión de Krull son los siguientes:*

- *Los cuerpos tienen dimensión de Krull cero.*
- *La dimensión de todo dominio de ideales principales R es 1, ya que para todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$, $\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) = 1$. Esto se debe a que si $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$, entonces $\mathfrak{p}_i = (p_i)$, con $p_i \in R$ elemento primo y p_1 divide a p_2. Por tanto $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$.*
- *La dimensión del anillo local $R_\mathfrak{p}$, coincide con la altura del primo $\mathfrak{p}$: $\dim_K(R_\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.*

  El anillo $R_\mathfrak{p} := S^{-1}R$, con $S := R \setminus \mathfrak{p}$, tiene por ideal maximal a $S^{-1}\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}$ representa la cadena de ideales que la lugar a la altura de $\mathfrak{p}$, esta verifica que $S^{-1}\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq S^{-1}\mathfrak{p}_n \subseteq S^{-1}\mathfrak{p}$, y por condición de máximo esta da lugar a la altura de $S^{-1}\mathfrak{p}$. Por ser local solo tiene un maximal, por lo que coincide con la dimensión.
- *La dimensión del anillo cociente $R/\mathfrak{a}$, coincide con la co-altura del ideal $\mathfrak{a}$: $\dim_K(R/\mathfrak{a}) = \mathrm{coht}(\mathfrak{a})$.*

$$\dim_K(R/\mathfrak{a}) = \max\{\mathrm{coht}(\mathfrak{q}) : \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})\} = \max\{\mathrm{coht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A), \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\} = \mathrm{coht}(\mathfrak{a})$$

Corolario I.3.3. *Sea $A \subseteq B$ una extensión entera de anillos. Entonces se tiene:*

i) Las dimensiones de Krull de A y B coinciden: $\dim_K(A) = \dim_K(B)$.

ii) Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ es un ideal primo de B, entonces: $\mathrm{coht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{coht}(\mathfrak{p}^c)$, con $\mathfrak{p}^c = \mathfrak{p} \cap A$.

Demostración. Para probar *i*), consideramos una cadena ascendente de ideales primos $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ de longitud n en B, entonces $(\mathfrak{q}_0 \cap A) \subsetneq \cdots \subsetneq (\mathfrak{q}_n \cap A)$ es una cadena de longitud n en A por el Teorema de Incomparabilidad, por lo que $\dim_K(A) \geq \dim_K(B)$. Por otro lado, si $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ es una cadena de ideales de longitud n de A, entonces por el Lying over theorem, existe un ideal primo $\mathfrak{q}_0$ en B con $\mathfrak{q}_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$. Además, por el Teorema del Ascenso existe una cadena $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ de longitud n en B con $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$, por lo que $\dim_K(A) \leq \dim_K(B)$ y obtenemos la igualdad.
Por otro lado, *ii*) es consecuencia del teorema del ascenso y de la definición de co-altura de un primo. □

Ahora pasaremos a definir la dimensión de Krull para espacios topológicos noetherianos, a partir de la definición anterior. Para ello se introduce la noción de Topología de Zariski sobre el espectro primo.

Definición 36. *Sea A un anillo, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ y $f \in A$. Denotamos por $f(\mathfrak{p})$ a la clase de equivalencia $f + \mathfrak{p} \in \kappa(\mathfrak{p}) \simeq qf(R/\mathfrak{p})$. Una variedad algebraica sobre el* $\mathrm{Spec}(A)$*, se define como:*

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{a} \in \mathrm{Spec}(A) : f(\mathfrak{p}) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\} \simeq \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}).$$

Trabajando con esta definición, se puede probar que las variedades algebraicas definidas sobre el espectro primo, cumplen las propiedades de ser los cerrados de una topología (Topología de Zariski, $\mathrm{Spec}(A), \mathscr{T}_Z$*).*

Al igual que ocurre para las variedades algebraicas afines (conjunto de ceros de una familia de polinomios), las variedades sobre el espectro primo son cerrados irreducibles si están generadas por un ideal primo.

Proposición I.3.4. *Si A es un anillo noetheriano, entonces* $\mathrm{Spec}(A)$ *es un espacio topológico noetheriano.*

Demostración. Como A es un anillo noetheriano, toda cadena de ideales primos se estabiliza:

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n \subseteq \cdots ; \ \ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m, \ \ \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}_n.$$

Por la definición anterior, es facil ver que si $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, entonces $V(\mathfrak{p}) \supseteq V(\mathfrak{q})$. Por tanto, como los cerrados irreducibles de $\mathrm{Spec}(A)$ son de la forma $V(\mathfrak{p})$ con $\mathfrak{p}$ primo, entonces toda cadena descendente de irreducibles del espectro también se estabiliza, como se muestra a continuación.

$$\cdots \supseteq V(\mathfrak{p}_1) \supseteq \cdots \supseteq V(\mathfrak{p}_n); \ \ \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m, \ \ V(\mathfrak{p}_m) = V(\mathfrak{p}_n).$$

□

Este resultado, permite definir una noción de dimensión para espacios topológicos noetherianos generales.

Definición 37. (Dimensión de Krull de un Espacio Topológico Noetheriano). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico noetheriano y $V \subseteq X$ un conjunto cerrado. Llamaremos dimensión de Krull de V, al máximo de las longitudes de cadenas de subconjuntos irreducibles de X contenidas en V, es decir el máximo valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que existen:*

$$\emptyset \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n \subseteq V$$

donde $V_0, \cdots, V_n$ con cerrados irreducibles de X. Se llama dimensión de Krull de X:

$$\dim_K(X) := \max\{\dim_K(V) : V \text{ cerrado en } X\}.$$

Observación I.3.5. Sea $A := K[X_1, \cdots, X_n]$ con K un cuerpo algebraicamente cerrado. Consideramos $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ una variedad algebraica del espectro primo, y su restricción al espectro maximal:

$$V(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Spm}(A) := \{\mathfrak{m} : \mathrm{Spm}(A) : f(\mathfrak{m}) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\}. \tag{I.3.1}$$

Por el Nullstellensatz, tenemos una biyección entre $\mathbb{A}^n(K)$ y $\mathrm{Spm}(K[X_1, \cdots, X_n])$. Dado $\mathfrak{m}$ ideal maximal, existe $\zeta \in \mathbb{A}^n(K)$ tal que $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_\zeta = (X_1 - \zeta_1, \cdots, X_n - \zeta_n)$. Entonces, $\kappa(\mathfrak{m}) \simeq K$ y esta definición de variedad algebraica coincide con la dada en (3), como conjunto de ceros de un ideal de polinomios.

Observación I.3.6. Con las nociones precedentes de dimensión de Krull, cabe destacar que:

i) Hay anillos noetherianos de dimensión infinita (Apéndice [**Na, 62**]).
ii) Los anillos locales (al tener solo un maximal) tienen todos dimensión de Krull finita.
iii) Hay anillos A no noetherianos, con espectro primo $\mathrm{Spec}(A)$ noetheriano. Ej: $K[x, xy, xy^2, xy^3, \cdots]$.

A continuación, se prueba un resultado que permite dar una descomposición finita en cerrados irreducibles.

Proposición I.3.7. *Dado $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico noetheriano, todo cerrado $F \subseteq X$, admite una descomposición minimal como unión finita de cerrados irreducibles:*

$$F = F_1 \cup \cdots \cup F_r$$

Además, esta descomposición es única, verificando que $F_i \not\subseteq F_j$ si $i \neq j$, y a los cerrados irreducibles $F_1, \cdots, F_r$, se les denomina componentes irreducibles.

Demostración. Para probar la existencia, consideramos el siguiente conjunto de cerrados de $(X, \mathscr{T})$:

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq X : F \text{ es cerrado y no es unión finita de irreducibles}\}$$

Supongamos $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Por ser $(X, \mathscr{T})$ noetheriano, $\mathcal{F}$ tiene un elemento minimal F tal que si $G \subseteq F$, entonces $G \notin \mathcal{F}$. Como $F \in \mathcal{F}$, no puede ser irreducible, entonces existen F_1 y F_2 cerrados de X, tales que $F := F_1 \cup F_2$. Como $F_1, F_2 \subsetneq F$, entonces $F_1, F_2 \not\subseteq \mathcal{F}$, entonces se pueden escribir como unión finita de irreducibles y F también. Esto es una contradicción, por tanto $\mathcal{F} = \emptyset$.

Para probar la unicidad, sea $F \subseteq X$ cerrado y supongamos presenta dos descomposiciones en irreducibles:

$$F = F_1 \cup \cdots \cup F_n = G_1 \cup \cdots \cup G_m.$$

Consideramos uno de los elementos de la primera descomposición, y calculamos su intersección con F:

$$F_i = (F_i \cap G_1) \cup \cdots \cup (F_i \cap G_m) \Longrightarrow \exists j \in \{1, \cdots, m\} : F_i = F_i \cap G_j \ (F_i \subseteq G_j).$$

Como F_i es irreducible y se puede escribir como una unión finita de cerrados, debe ser igual a uno de ellos. Ahora repetimos el mismo procedimiento con G_j.

$$G_j = (G_j \cap F_1) \cup \cdots \cup (G_j \cap F_n) \Longrightarrow \exists k \in \{1, \cdots, n\} : G_j = G_j \cap F_k \ (G_j \subseteq F_k).$$

Entonces se tiene que $F_i \subseteq G_j \subseteq F_k$, y por tanto se da la igualdad $F_i = G_j = F_k$. □

Este resultado, junto a los que se presentan a continuación, permiten garantizar la relación biunívoca entre las componentes irreducibles de una variedad algebraica y la descomposición en ideales primos del ideal asociado a la misma.

Definición 38. *Un ideal q de un anillo R se denomina primario si verifica que:*

$$\forall x, y \in R \text{ si } xy \in \mathfrak{q} \Longrightarrow x \in \mathfrak{q} \text{ o } y \in \sqrt{\mathfrak{q}}.$$

Teorema I.3.8. (Teorema de Lasker-Noether). *Sea A un anillo noetheriano. Todo ideal propio $\mathfrak{a} \subsetneq A$ admite una descomposición primaria irredundante, es decir existen $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_r$, ideales de A de tal modo que el radical de cada uno de ellos es un ideal primo: $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A)$ ($\mathfrak{q}_i$ es $\mathfrak{p}_i-$primario), verificando las siguientes propiedades:*

i) $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$.
ii) $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ *para todo* $i \neq j$.
iii) $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{q}_1} \cap \cdots \cap \sqrt{\mathfrak{q}_r} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$.

Lo que implica que en un anillo noetheriano, el radical de un ideal es una intersección finita de primos. Es más, la lista de ideales primos $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r\}$ es única para cada ideal $\mathfrak{a}$ y se denominan primos asociados:

$$Ass(R/\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r\}.$$

Demostración. La prueba puede consultarse en [**AtMc, 96**] (Cap. 4) o [**ZaSa, 75b**] (Cap. 7). □

Definición 39. *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de un anillo A, un ideal primo $\mathfrak{p}$ un ideal primo minimal sobre $\mathfrak{a}$ si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ y para cualquier otro ideal primo $\mathfrak{q}$ tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ se tiene $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Los ideales primos minimales sobre 0 en A son los ideales primos minimales de A.*

Los ideales primos minimales sobre $\mathfrak{a}$, están contenidos en sus primos asociados. En general, existen primos asociados que no son primos minimales, denominados primos inmersos. Sin embargo, los ideales radicales $\mathfrak{a}$ de los anillos noetherianos, como por ejemplo $K[X_1, \cdots, X_n]$, verifican que

$$\text{minimales sobre } \mathfrak{a} = Ass(R/\mathfrak{a}).$$

Las componentes primarias $\mathfrak{q}_i$, correspondientes a ideales primos minimales $\mathfrak{p}_i$, se denominan *aisladas*.

Corolario I.3.9. *Sea $\mathfrak{a} \subseteq K_1, \cdots, X_n]$ un ideal de un anillo de polinomios y $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ la variedad algebraica afín de sus ceros. Existe una biyección entre los ideales primos minimales de $\mathfrak{a}$ y las componentes irreducibles de $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \cdots, X_n]$ un ideal y $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$ su variedad asociada. Consideramos la descomposición en componentes irreducibles, que verifican las condiciones de la proposición (I.3.7):

$$V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) = V_1 \cup \cdots \cup V_r \Longrightarrow I_{\mathbb{A}}(V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} = I_{\mathbb{A}}(V_1) \cap \cdots \cap I_{\mathbb{A}}(V_r).$$

Sea $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq I_{\mathbb{A}}(V_i)$, con $\mathfrak{p}$ un primo, entonces $V_i \subseteq V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) \subseteq V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$. Entonces, existe j, con $1 \leq j \leq r$.

$$V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) = (V_1 \cap V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p})) \cup \cdots \cup (V_r \cap V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p})) \Longrightarrow V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) = V_i \cap V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}), \text{ y } V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) \subseteq V_j \subseteq V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}).$$

Por lo que se concluye que $V_i \subseteq V_j$, lo que por construcción solo puede darse si $i = j$, y por tanto $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p})$ es una componente irreducible de $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$.
Recíprocamente, sea $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, con $\mathfrak{p}$ un primo minimal, entonces $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a}) \supseteq V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p})$ (irreducible). Por un argumento análogo al anterior, existe i, con $1 \leq i \leq r$, tal que $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p}) \subseteq V_i \subseteq V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$. Como V_i es irreducible, entonces $I_{\mathbb{A}}(V_i)$ es un ideal primo, que verifica que $\mathfrak{a} \subseteq I_{\mathbb{A}}(V_i) \subseteq \mathfrak{p}$. Al ser $\mathfrak{p}$ minimal, $I_{\mathbb{A}}(V_i) = \mathfrak{p}$ y $V_i = V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{p})$, por lo que es una componente irreducible de $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$. □

El resultado siguiente se conoce como el Teorema de los Ideales Principales de Krull o Krull's Hauptidealsatz, y es consecuencia de un resultado más técnico: El Teorema de la Dimensión Local (I.6.7).

Definición 40. *Sea R un anillo y sea $f_1, \cdots, f_r$ una familia finita de elementos. Diremos que $f_1, \cdots, f_r$ es una sucesión regular de R si se verifica que:*

i) El ideal que generan es un ideal propio: $(f_1, \cdots, f_r) \neq R$.
ii) f_1 no es divisor de cero en R.
iii) Para cada i, $2 \leq i \leq r$, f_i no es divisor de cero en el anillo cociente $R/(f_1, \cdots, f_{i-1})$.

Teorema I.3.10. (Hauptidealsatz). *Sea R un anillo noetheriano y $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_r)$ un ideal propio.*

i) La altura de $\mathfrak{a}$ está acotada por el número de generadores: $\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) \leq r$.
ii) Si $f_1, \cdots f_r$ es una sucesión regular, $\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) = r$ y para todo ideal primo $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ minimal, $\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) = r$.
iii) (Teorema de la pureza de Macaulay). Si $R := K[X_1, \cdots, X_n]$, con $f_1, \cdots, f_r$ sucesión regular, todo primo asociado $\mathfrak{p} \in Ass(R/\mathfrak{a})$ es minimal.

Demostración. La demostración del resultado puede consultarse en [**AtMc, 96**]. □

Como consecuencia del Teorema de los Ideales Principales de Krull, se puede calcular con facilidad la dimensión de un anillo de polinomio.

Proposición I.3.11. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces*

$$\dim_K(\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]) = n$$

Demostración. En primer lugar se comprueba que $\dim_K(\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]) \geq n$, por medio de la siguiente cadena de ideales primos

$$(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \cdots, X_n) = \mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n].$$

Por otro lado, por ser $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, por el Nullstellenzats los ideales maximales de $\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]$ son de la forma $\mathfrak{m}_a = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$, y por Teorema de los Ideales Principales de Krull: $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \leq n$. Por tanto:

$$\dim_K(\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n]) = \max\{\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) : \mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(\mathbb{K}[X_1, \cdots, X_n])\} \leq n.$$

□

Observación I.3.12. Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico noetheriano y $V \subseteq X$ es un cerrado con descomposición minimal en irreducibles $V := V_1 \cup \cdots \cup V_s$, entonces:

$$\dim(V) = \max\{\dim(V_i) : 1 \leq i \leq s\}.$$

Esto se debe a que por la condición $V_i \not\subseteq V_j$ para $i \neq j$, las cadenas de irreducibles son propias de cada una de las componentes irreducibles.

Proposición I.3.13. *Si $V \subseteq W$ son dos cerrados de $(X, \mathscr{T})$, espacio topológico noetheriano, y W es irreducible, entonces se verifica que:*

$$\dim_K(V) = \dim_K(W) \Longleftrightarrow V = W.$$

Demostración. La implicación $\Leftarrow$) es trivial. Para la implicación $\Rightarrow$), consideramos dos casos:
Si V es reducible. En este caso consideramos una descomposición minimal en irreducibles:

$$V := V_1 \cup \cdots \cup V_s \subseteq W \Longrightarrow W = (V_1 \cap W) \cup \cdots \cup (V_r \cap W).$$

Como W es irreducible (no se puede descomponer como la unión de cerrados), entonces existe i, tal que $W = V_1 \cap W$ y por tanto $W \subseteq V_1 \subseteq V$ y $V = W$.
Si V es irreducible. Si consideramos que $V \neq W$ ($V \subsetneq W$), entonces si $n = \dim_K(V)$, existe una cadena de cerrados irreducibles: $V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n \subsetneq V \subsetneq W$. Como V es irreducible, $\dim_K(V) < \dim_K(W)$. □

Proposición I.3.14. (Dimensión de la intersección). *Sean V y $W \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ dos variedades algebraicas tales que $V \cap W \neq \emptyset$. Entonces, la dimensión de $V \cap W$ verifica la siguiente desigualdad:*

$$\dim_K(V \cap W) \geq \dim_K(V) + \dim_K(W) - n$$

Demostración. La prueba de este resultado se puede encontrar en las ref. [**Sh, 77**] o [**Ha,77**]. □

Finalmente, extendemos la noción de dimensión más allá de los conjuntos algebraicos.

Definición 41. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un localmente cerrado afín (o un constructible), entonces se define su dimensión de Krull como la dimensión para la topología inducida en V, por la Topología Zariski de $\mathbb{A}^n(K)$.*

Corolario I.3.15. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un conjunto localmente cerrado afín (o un constructible), entonces se tiene que la dimensión de V, coincide con la de su clausura Zariski:* $\dim(V) = \dim(\overline{V}^z)$.

I.4. Lema de Normalización de Noether

Otro de los resultados centrales que se utilizan como herramienta en el trabajo es el Lema de Normalización de Noehter, que permite calcular la dimensión de una K-álgebra finitamente generada, a partir de una extensión entera dada por un anillo de polinomios. Además juega un papel muy importante para garantizar la buena definición del grado de una variedad algebraica afín al estilo Heintz.

Definición 42. *Sea A una K-álgebra. Diremos que las funciones $\{y_1, \cdots, y_n\} \in A$ son algebraicamente independientes sobre K cuando el siguiente morfismo de K-álgebras es inyectivo (monomorfismo).*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & K[X_1, \cdots, X_n] & \longrightarrow & A \\ & f(X_1, \cdots, X_n) & \longmapsto & f(y_1, \cdots, y_n) \end{array}$$

Es decir, cuando cualquier relación algebraica $\sum_{i_1 \cdots i_n} a_{i_1 \cdots i_n} y_1^{i_1} \cdots y_n^{i_n} = 0$ con coeficientes en K, tenga todos sus coeficientes nulos. Esto equivale a decir que: $y_1, \cdots, y_n$, son elementos trascendentes sobre K.

Teorema I.4.1. (Lema de Normalización de Noether). *Sea K un cuerpo infinito (o finito con un número suficiente de elementos) y sea A una K-álgebra finitamente generada, es decir existe $\mathfrak{a} \subseteq K[X_1, \cdots, X_n]$, tal que $A := K[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}$. Entonces existe un abierto Zariski $U \subseteq \mathbb{A}^{r \times n}(K)$, tal que para cada $M \in U$ tenemos el cambio de variable siguiente:*

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

cuyas clases de equivalencia módulo el ideal $\mathfrak{a}$: $y_i := Y_i + \mathfrak{a} \subseteq A$, verifica las siguientes propiedades:

i) $\{y_1, \cdots, y_r\}$ son algebraicamente independientes sobre K.
ii) $K[y_1, \cdots, y_r] \subseteq A$ es una extensión entera.

O equivalentemente, existe un morfismo finito $K[y_1, \cdots, y_r] \hookrightarrow A$, que es monomorfismo.

Demostración. Una prueba de este resultado se puede encontrar en la referencia [**Ku, 85**]. □

Observación I.4.2. Al conjunto $\{y_1, \cdots, y_r\}$ del teorema anterior se les llama variables en posición de Noether. De esta forma el Lema de Normalización de Noether en combinación con el corolario (I.3.3), se concluye que si A es una K-álgebra finitamente generada y $\{y_1, \cdots, y_r\}$ es una familia de variables en posición de Noether, entonces: $\dim_K(A) = \dim_K(K[y_1, \cdots, y_r])$.

Observación I.4.3. Una forma sencilla de hallar la matriz M (aunque no de forma genérica), sería a partir del cambio de variables: $X_i := Y_i - a_i Y_n$, $1 \leq i \leq n-1$, $Y_n := X_n$. Sea $f \in \mathfrak{a}$ y consideramos su descomposición en componentes homogéneas: $f := f_0 + \cdots + f_d$, donde $d := \deg(f)$ y $f_d \neq 0$. Entonces, $f := f_d(a_1, \cdots, a_{n-1}, 1)Y_n^d + G_{d-1}(Y_1, \cdots, Y_{n-1}, Y_n)$, con G_{d-1} un polinomio de grado a lo sumo $d-1$ en Y_n. Como f_d es un polinomio homogéneo, no se anula en el abierto Zariski dado por $\{Y_n \neq 0\}$, luego existe $(a_1, \cdots, a_{n-1}) \in K^{n-1}$ verificando que $f_d(a_1, \cdots, a_{n-1}, 1) \neq 0$.

Algunas consecuencias importantes del lema de Normalización de Noether son las siguientes.

Proposición I.4.4. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una variedad algebraica irreducible. Entonces la dimensión de Krull satisface que*

$$\dim_K(V) = \dim_K(\mathbb{K}[V]) = \operatorname{coht}(I_{\mathbb{A}}(V)) = \operatorname{gr.tr}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(V))$$

Demostración. La igualdad entre la co-altura de $I_{\mathbb{A}}(V)$ y la dimensión de V, es consecuencia del Corolario (I.3.9). Por otro lado, la igualdad entre la co-altura de $I_{\mathbb{A}}(V)$ y la dimensión de $K[V]$, se deduce considerando el hecho de que $K[V] = K[X_1, \cdots, X_n]/I_{\mathbb{A}}(V)$, ver Ejemplo (I.3.2).

Finalmente, el grado de trascendencia se define como el máximo entre los cardinales de los subconjuntos de $\mathbb{K}(V)$, algebraicamente independiente de sobre $\mathbb{K}$. Por el Lema de Normalización de Noether, si $\dim_K(\mathbb{K}[V]) = m$, entonces existen $x_1, \cdots, x_m$ algebraicamente independientes sobre $\mathbb{K}$ que constituye una base de trascendencia de $\mathbb{K}(V)$ y $\dim_K(\mathbb{K}[V]) = \operatorname{gr.tr}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(V))$, lo que culmina la prueba. □

Corolario I.4.5. *Sea $\varphi : V \longrightarrow W$ un morfismo de variedades algebraicas. Entonces se verifica que:*

$$\dim_K(\varphi(V)) = \dim_K(\overline{\varphi(V)}^z) \leq \dim_K(V).$$

Demostración. Dado que la dimensión de una variedad se corresponde con el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles, basta probar el resultado en el caso irreducible.

Sea V una variedad irreducible y $W_Z := \overline{\varphi(V)}^z \subseteq W$, también irreducible. Consideramos el morfismo dominante $\varphi : V \longrightarrow W_Z$, y el monomorfismo de $K-$álgebras asociado: $\varphi^* : K[W_Z] \hookrightarrow K[V]$. Como W y W_Z son irreducibles, $K[V]$ y $K[W_Z]$ son ambos dominios de integridad y podemos calcular su cuerpo de fracciones. Como φ^* es monomorfismo podemos extender φ^* a un monomorfismo de cuerpos y por tanto el número de elementos de una base de trascendencia de $K(W_Z)$ va a estar acotado por el número de elementos de una base de trascendencia de $K(V)$, con lo que:

$$\dim_K(\varphi(V)) = \dim_K(W_Z) = \operatorname{gr.tr}_{\mathbb{K}}(K(W_Z)) \leq \operatorname{gr.tr}_{\mathbb{K}}(K(V)) = \dim_K(V)$$

□

Proposición I.4.6. *Sea A una K-álgebra finitamente generada que es dominio de integridad. Entonces:*

i) $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \operatorname{coht}(\mathfrak{p}) = \dim_K(A)$, *para todo ideal primo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$.
ii) $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = \dim_K(A)$, *para todo ideal maximal* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(A)$.

Demostración. La prueba de este resultado se obtiene como consecuencia del Lema de Normalización de Noether y del Teorema del Ascenso. Los detalles se pueden consultar en [**Bo,13**]. □

Corolario I.4.7. *Sea $\mathfrak{p} \subseteq K[X_1, \cdots, X_n]$ un ideal primo del anillo de polinomios, entonces*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \operatorname{coht}(\mathfrak{p}) = n$$

Corolario I.4.8. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una variedad algebraica. Son equivalentes:*

i) V es una hipersuperficie, $\dim_K(V) = n-1$.
ii) Existe $f \in K[X_1, \cdots, X_n] \setminus K$ tal que $V = V_{\mathbb{A}}(f)$.

Demostración. *ii)* $\to$ *i)* Sea $f = f_1 \cdots f_r$ la descomposición de f en irreducibles. Entonces:

$$V_{\mathbb{A}}(f) = \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{K}) : f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{A}^n(K) : f_1(x) \cdots f_r(x) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{r} V_{\mathbb{A}}(f_i)$$

Para cada $1 \leq i \leq r$, $\dim_K(V_{\mathbb{A}}(f_i)) = \operatorname{coht}(f_i) = n-1$, por el Teorema de los Ideales Principales de Krull y el corolario anterior. Entonces $V_{\mathbb{A}}(f)$ es equidimensional y de dimensión también $n-1$.

i) $\to$ *ii)* Sea V tal que $\dim_K(V) = n-1$, entonces $\operatorname{ht}(I_{\mathbb{A}}(V)) = 1$. Sea $h \neq 0$ tal que $(h) \subseteq I_{\mathbb{A}}(V)$, y por tanto $V \subseteq V_{\mathbb{A}}(h)$. Consideramos su descomposición en irreducibles $h = h_1 \cdots h_r$, tal que:

$$V_{\mathbb{A}}(h) = V_{\mathbb{A}}(h_1) \cup \cdots \cup V_{\mathbb{A}}(h_r).$$

Sea $C \subseteq V$ una componente irreducible. Entonces $C \subseteq V_{\mathbb{A}}(h_i)$. Por tanto tenemos que existe un subconjunto $\{i_1, \cdots, i_s\} \subseteq \{1, \cdots, k\}$, tal que:

$$V = V_{\mathbb{A}}(h_{i_1}) \cup \cdots \cup V_{\mathbb{A}}(h_{i_s}) \Longrightarrow V = V_{\mathbb{A}}(f) \text{ con } f = h_{i_1} \cdots h_{i_s}$$

□

Corolario I.4.9. *Sean $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ dos ideales primos de $K[X_1, \cdots, X_n]$, entonces*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$$

I.5. Lema de Nakayama

Definición 43. (Radical de Jacobson). *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de un anillo R. Llamaremos radical de Jacobson de $\mathfrak{a}$ a la intersección de todos los ideales maximales de R que contienen a $\mathfrak{a}$. Es decir,*

$$\sqrt[J]{\mathfrak{a}} := \bigcap \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(R) : \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}\}.$$

Se denomina radical de Jacobson del anillo R al radical de Jacobson asociado al ideal (0).

Proposición I.5.1. *Sea $\mathfrak{J}_R = \sqrt[J]{(0)}$ el radical de Jacobson del anillo R. Se tiene:*

$$x \in \mathfrak{J}_R \Longleftrightarrow 1 - xy \in R^*, \forall y \in R$$

Demostración. Teniendo en cuenta que R^* representa las unidades del anillo, se trata de los elementos que no pertenecen a ningún ideal maximal de R (pues si no dejarían de ser ideales propios).
$\Rightarrow$) Sea $x \in \mathfrak{J}_R$, entonces $xy \in \mathfrak{J}_R$, $\forall y \in R$. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal, entonces $1 - xy \notin \mathfrak{m}$, pues si no $1 = (1 - xy) + xy \in \mathfrak{m}$ y no sería un ideal propio.
$\Leftarrow$) Supongamos que $1 - xy \in R^*$ para todo $y \in R$ y sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de R. Supongamos que $x \notin \mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m} + (x) \subseteq R$ y por ser $\mathfrak{m}$ maximal entonces $R = \mathfrak{m} + (x)$. Entonces existen $m \in \mathfrak{m}$ e $y \in R$ tales que $1 = m + xy$ y por tanto $1 - xy \in \mathfrak{m}$, pero $1 - xy$ es unidad por hipótesis, lo cual contradice que $\mathfrak{m}$ sea propio. □

Observación I.5.2. Lo que esta proposición indica es que el ideal de Jacobson se corresponde con el conjunto de elementos de un anillo que no son unidades, es decir que no tienen inverso.

Lema I.5.3. (Lema de Nakayama). *Sea M un R-módulo finitamente generado, N un submódulo y $\mathfrak{a}$ un ideal de R contenido en el radical de Jacobson $\mathfrak{J}_R = \sqrt[J]{(0)}$ de R. Si $M = \mathfrak{a}M + N$, entonces $M = N$. En particular, si $M = \mathfrak{a}M$, entonces $M = 0$.*

Demostración. Observamos que basta demostrar el enunciado cuando $N = 0$. El caso general se deduce a partir de este considerando el módulo cociente M/N.

Se razona por reducción al absurdo. Supongamos $M = \mathfrak{a}M$, con M finitamente generado y $M \neq 0$. Sea $\{m_1, \cdots, m_n\}$ un sistema minimal de generadores de M como $R-$módulo. Dado que $M = \mathfrak{a}M$, entonces $m_i \in \mathfrak{a}M$ para cada i y por tanto existirán $a_{i,1}, \cdots, a_{i,n} \in \mathfrak{a}$, tales que:

$$m_i = a_{i,1}m_1 + \cdots + a_{i,n}m_n \Longrightarrow (1 - a_{i,i})m_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}m_j.$$

Por la Proposición (I.5.1) se tiene que como $a_{i,i} \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{J}_R$, entonces $1 - a_{i,i} \in R^*$ y por tanto es unidad. Esto hace que podamos despejar m_i, como combinación del resto de elementos de la familia.

$$m_i = (1 - a_{i,i})^{-1} \sum_{j \neq i} a_{i,j}m_j$$

Por tanto, tomando $i = 1$, tenemos que $\{m_2, \cdots, m_n\}$ es un sistema generador de M de cardinal $n - 1$, lo que contradice que $\{m_1, \cdots, m_n\}$ sea minimal. □

Proposición I.5.4. *Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local con $\kappa(\mathfrak{m}) = R/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual, M un R-módulo y $M/\mathfrak{m}M$ visto como $\kappa(\mathfrak{m})$-espacio vectorial. Dados $\{x_1, \cdots, x_s\}$ elementos de M tales que sus clases módulo $\mathfrak{m}M$ generan $M/\mathfrak{m}M$ como $\kappa(\mathfrak{m})$-espacio vectorial, entonces generan a M como R-módulo. En particular, el cardinal mínimo del sistema de generadores de M como R-módulo coincide con la dimensión de $M/\mathfrak{m}M$ como $\kappa(\mathfrak{m})$ espacio vectorial.*

Demostración. Dados $\{x_1, \cdots, x_s\}$, tales que sus clases módulo $\mathfrak{m}M$ generan a $M/\mathfrak{m}M$ como $\kappa(\mathfrak{m})-$espacio vectorial, sea N el submódulo de M generado por $\{x_1, \cdots, x_s\}$. Considerando $N + \mathfrak{m}M$ para garantizar la buena definición, realizamos el cociente con respecto a $\mathfrak{m}M$, que por hipótesis es igual a $M/\mathfrak{m}M$, y por tanto se verifica lo siguiente:

$$M/\mathfrak{m}M = (N + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M \Longleftrightarrow 0 = (M/\mathfrak{m}M)/(N + \mathfrak{m}M/\mathfrak{m}M) \simeq M/(N + \mathfrak{m}M),$$

donde el isomorfismo de obtiene de aplicar el segundo teorema de isomorfía para módulos. Entonces $M = N + \mathfrak{m}M$ y por el Lema de Nakayama $M = N$. El resto de afirmaciones se obtiene de considerar el caso de cardinal minimal para el conjunto de generadores. □

I.6. Otros aspectos del Concepto de Dimensión

A lo largo de este trabajo se utiliza de forma recurrente el concepto de dimensión tanto de anillos como de subconjuntos afines. Esta se ha identificado con la dimensión de Krull, que se describe en la sección I.3.

Sin embargo, como se muestra a continuación, gracias al Teorema de la Dimensión Local para anillos locales y módulos finitamente generados sobre estos anillos, esta es equivalente a las dimensiones de Hilbert-Samuel y Chevalley.

I.6.1. Anillos de Artin. Anillos y Módulos Graduados.

Proposición I.6.1. *Sea R un anillo. Entonces, las dos propiedades siguientes son equivalentes:*

i) Toda cadena descendente de ideales se estabiliza, es decir:

$$\mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \cdots (\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathfrak{a}_{n_0} = \mathfrak{a}_n, \forall n \geq n_0)$$

ii) Todo conjunto no vacío de ideales de R posee un elemento maximal.

Los anillos que satisfacen cualquiera de estas propiedades se denominan Anillos de Artin o artinianos.

El siguiente teorema supone una caracterización de los anillos artinianos.

Teorema I.6.2. (Teorema de Akizuki). *Un anillo R es de Artin si y solamente si se verifican las dos propiedades siguientes:*

i) R es noetheriano, es decir, todo ideal de R es finitamente generado.
ii) Todo ideal $\mathfrak{p}$ primo en R es maximal.

Definición 44. *Sea R un anillo. Se dice que R es un anillo graduado si $R := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$, con R_n grupo abeliano y $R_n \cdot R_m \subseteq R_{n+m}$. Además, si R es un anillo graduado, un módulo graduado es un R-módulo M tal que $M := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ es suma directa de grupos abelianos tales que $R_n M_m \subseteq M_{n+m}$.*

Ejemplo I.6.3. *Un ejemplo de anillo graduado es $R[x_1, \cdots, x_n]$ donde $R_0 := R$ y R_n es el conjunto de polinomios homogéneos de grado n. Cada R_n (componente homogénea de grado n) es un grupo abeliano y $R_n \cdot R_m \subseteq R_{n+m}$.*

Observación I.6.4. Sea $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_s) \subseteq K[X_1, \cdots, X_n]$. El anillo $R := K[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}$ es de Artin si y solo si $V_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$ es cero dimensional, es decir un conjunto finito de puntos.

I.6.2. El Polinomio de Hilbert-Samuel.

Definición 45. *Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación. Se dice que f es polinomial si se verifica que:*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ y } q \in \mathbb{Q}[T] : f(n) = q(n), \quad \forall n \geq n_0$$

Proposición I.6.5. *Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una aplicación polinomial, existe un único polinomio $q \in \mathbb{Q}[T]$ que coincida con f salvo en un número finito de puntos. Así, podemos hablar del coeficiente director de f y del grado de f como el coeficiente director el grado de su polinomio asociado.*

Sea $A := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ un anillo graduado tal que A_0 es artiniano y que existen $x_1, \cdots, x_r \in A_1$ generando A como A_0-álgebra. A es un anillo noetheriano. Sea $M := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ un A-módulo finitamente generado. M es noetheriano y M_n es un A_0-módulo artiniano y por tanto de longitud finita: $\ell_{A_0}(M_n) < +\infty$.

Definición 46. (Polinomio de Hilbert). *Con las notaciones anteriores, la siguiente función $\chi(M, -)$:*

$$\chi(M, -) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; \quad \chi(M, n) := \ell_{A_0}(M_n),$$

es una aplicación polinomial de grado menor que $r - 1$, (con r el número tal que $x_1, \cdots, x_r \in A_1$ generan a A como A_0-álgebra).

Definición 47. *A la función $\chi(M, -)$ se le denomina función del Hilbert de M. Al polinomio en $\mathbb{Q}[T]$ coincidente con $\chi(M, -)$ se le denomina polinomio de Hilbert y se denota también por $\chi(M, -)$. Al grado de $\chi(M, -)$ se le denomina dimensión de Hilbert de M y a su coeficiente director se le denomina grado de M. Al número natural n_0 tal que la función polinomial coincide con el polinomio se le denomina "regularidad de la función de Hilbert" de M.*

Definición 48. *Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano. Llamamos ideal de definición de A a todo ideal $\mathfrak{q}$ tal que $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$, es decir, tal que existe $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, verificando que: $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$.*

Sea M un A-módulo finitamente generado. El anillo y módulo graduados asociados a $\mathfrak{q}$, vienen dados por:

$$G_{\mathfrak{q}}(A) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}, \quad G_{\mathfrak{q}}(M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{q}^n M/\mathfrak{q}^{n+1}M$$

Proposición I.6.6. (Polinomio de Samuel). *Con las notaciones anteriores, se define la función de Samuel de M como:*

$$P_{\mathfrak{q}}(M, -) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; \quad P_{\mathfrak{q}}(M, n) := \ell_A(M/\mathfrak{q}^n M).$$

Entonces, $P_{\mathfrak{q}}(M, -)$ es una función polinomial cuyo grado está acotado por el mínimo de los cardinales de los conjuntos generadores de $\mathfrak{q}$. Además se tiene la siguiente relación:

$$\Delta P_{\mathfrak{q}}(M, n) = \chi(G_{\mathfrak{q}}(M), n)^1.$$

I.6.3. Teorema de la Dimensión Local.

Definición 49. (Dimensión de Hilbert-Samuel). *Se denomina dimensión de Samuel (o de Hilbert-Samuel) de un A-módulo M verificando las propiedades anteriores al grado de $P_{\mathfrak{q}}(M, T)$, para cualquier ideal de definición de $\mathfrak{q}$ de $(A, \mathfrak{m})$.*

Definición 50. (Dimensión de Chevalley). *Dado $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local noetheriano y $M \neq (0)$ un A-módulo finitamente generado, llamaremos dimensión de Chevalley de M, $\dim_C(M)$, al mínimo de los números naturales $m \in \mathbb{N}$ tales que:*

$$\exists a_1, \cdots, a_m \in \mathfrak{m} \ \text{ tales que } \ \ell_A(M/(a_1, \cdots, a_m)M) < +\infty$$

Si $M = (0)$ se dice que $\dim_C(M) = -1$.

Teorema I.6.7. (Teorema de la Dimensión Local). *Si $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local noetheriano y M un A-módulo finitamente generado, entonces las dimensiones de Krull, Hilbert-Samuel y Chevalley coinciden.*

$$\dim_K(M) = \dim_{HS}(M) = \dim_C(M)$$

Por ese motivo, se denota símplemente como dimensión de M: $\dim(M)$, a cualquiera de las anteriores.

Demostración. La prueba de este resultado se puede consultar en [**AtMc, 96**] o [**Ma, 80**]. □

[1] Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$. Definimos $\Delta^0(f) := f$ y $\Delta^r(f) := \Delta^{r-1}f(n+1) - \Delta^{r-1}f(n)$.

Bibliografía

[Ag-Al, 11] R. A. Agueda-Altúzar. *"Variedades Algebraicas y Esquemas: Una introducción a la Geometría Algebraica"*, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México. 2011. Disponible en: http://intermat.fciencias.unam.mx/varalg.pdf

[AtMc, 96] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *"Introduction to Commutative Algebra"*, Addison-Weskey Publishing Co., 1969.

[Be,1764a] É. Bézout, *"Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues"*. Mémoires presentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France, 1764.

[Be,1764b] É. Bézout, *"Sur le degré résultant des méthodes d'élimination entre plusieurs équations"*. Mémoires presentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France, 1764.

[Be,1767] É. Bézout, *"Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues"*. Histoire de l'Académie Royales des Sciences, anneé 1764, (Paris, 1767), pp 288-338.

[Bo,13] S. Bosch, *"Algebraic Geometry and Commutative Algebra"*, Springer-Verlag London 2013

[Br,87] W. D. Brownawell, *"Bounds for the degree in the Nullstellensatz. Annals of Math"*. **126** (1987), 577-591.

[CGH,89] L. Caniglia, A. Galligo y J. Heintz, *Borne simplement exponentielle pour les degrès dans le théorème des zèros sur un corps de caractéristique quelconque* C.R. Acad. Sci. Paris, t. **307**, Série I (1988), 255-258.

[Ch, 64-65] C. Chevalley, *"Introduction à la Théorie des Schémas"*. Cours à l'IHP, Notes de D. Fatiadi, éd. Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique, Pub. N A75.1268, 1964-65.

[Fu, 84] W. Fulton, *"Intersection theory"*. New York-Heidelberg-Berlin Tokyo Springer, 1984.

[Fe, 19] A. Fernández, *"Ideology of Correct Test Sequences: Kakeya sets, Combinatorial Nullstellensatz and Generalizations to Secant Sequences"*. Grade Thesis in Mathematics, University of Cantabria, 2019.

[Ha,77] R. Hartshorne, *"Algebraic Geometry"*. Graduate text in Mathematics, Springer. 1977.

[He, 83] J. Heintz, *"Fast Quantifier Elimination for Algebraically Closed Fields"*. Theoret. Comput. Sci **24** (1983), 239-277.

[He, 85] J. Heintz, *"Corrigendum: Definability and Fast Quantifier Elimination in Algebraically Closed Fields"*. Theoret. Comput. Sci. **39** (1985), 343.

[HeSc, 82] J. Heintz, C. P. Schnorr, *"Testing polynomials which are easy to compute"*. Logic and algorithmic: An international symposium held in honor of Ernst Specker, Monographie No. **30** de l'Enseignement Mathématique, 1982, 237-254.

[He, 1926] G. Hermann, *"Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale."* Math. Ann. **95** (1926), 736-788.

[HHPS, 21] A. Hashemi, J. Heintz, L.M. Pardo, P. Solernó *"On Bézout inequalities for non-homogeneous polynomial ideals."* J. of Symbolic Computation **106** (2021), 1-22.

[Kol, 88] Z. Kollár, *Sharp Efective Nullstellensatz.* J. of A.M.S. **1** (1988), 963-975

[Ku, 85] E. Kunz, *"Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry"*, Birkhäuser, 1985.

[La, 02] S. Lang, *"Algebra"* (Rev. 3rd. edition). Grad. Texts in Math. 211, Springer, 2002.

[Ma, 80] H. Matsumura, *"Commutative Algebra (2nd. Edition)"*, Benjamin/Cummings, 1980.

[MasWüs, 71] D.W. Masser, G. Wüstholz, *"Fields of large trancendence degree generated by values of elliptic functions"*, Invent. Math. **72** (1971), 407-463.

[Na, 62] Masayoshi Nagata, *"Local rings"*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No.13, Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons New York-London,1962.

[Ne, 1680] I. Newton, *"Geométrica Analytica"*, 1680.

[Pa, 19] L.M. Pardo, *"Incidences; travaux en cours, rendu tardif; grèves sans préavis et perturbations dans l'ensemble de la ligne (RER B, 2019)"*. Manuscrito, 2019.

[Pa, 20a] L.M. Pardo, *"Notas para un Curso Básico de Álgebra Conmutativa"*. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria. Curso 2019/20.

[PaSe, 20] L. M. Pardo, D. Sebastian, *"A Promenade Through Correct Test Sequences I: Degree of constructible sets, Bézout Inequality and density"*. Manuscript submitted, 30 Dic. 2020.

[Ra, 29] G. Y. Rainich (pseudonym J.L. Rabinowitsch), Zum Hilbertschen Nullstellensatz. Math. Ann. **102** (1929), 520

[Se, 58] J. P. Serre, *"Algèbre Locale, Multiplicités"*. Lecture Notes in Mathematics **11**, Springer, 1965.

[Sh, 77] I. R. Shafarevich, *"Basic Algebraic Geometry"*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **213**, Springer, 1977.

[Ta, 19] L.F. Tabera, *"Apuntes de Ampliación de Álgebra"*. Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria. Curso 2018/19.

[Vo, 84] W. Vogel, *"Lectures on Bézout's Theorem"*. Tata Inst. for Fundamenta Research, Springer-Verlag, 1984.

[Wa, 71] R.J. Walker, *"Algebraic Curves"*. Princeton University Press, 1950.

[ZS, 75a] O. Zariski, P. Samuel, *"Commutative Algebra, Vol. I"* GTM **28**, Springer (originally published by Van Nostrand, 1958), 1975.

[ZaSa, 75b] O. Zariski, P. Samuel, *"Commutative Algebra, Vol. II"* GTM **28**, Springer (originally published by Van Nostrand, 1960), 1960.