



***Facultad
de
Ciencias***

**Estudio de la dinámica del transporte
turbulento generado por ondas de deriva
en plasmas de fusión nuclear**

**(Study of turbulent transport dynamics
generated by drift waves in nuclear fusion
plasmas)**

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Pablo Echevoyen Ruiz

Director: José Ángel Mier Maza

Junio - 2020

Agradecimientos

Este Trabajo de Fin de Grado no podría haberse realizado sin la ayuda del profesor José Ángel Mier Maza, cuya dirección ha sido imprescindible. Me gustaría agradecer su disponibilidad y por haberme facilitado los medios oportunos para el desarrollo del trabajo.

También, por supuesto, agradecer a todos los profesores del Grado de Física, y a los compañeros de la Facultad de Ciencias.

Por último, agradecer a mi familia el apoyo en estos últimos años de estudio.

Resumen

Se ha realizado un estudio sobre el transporte turbulento generado por ondas de deriva en plasmas de fusión nuclear. En la primera parte de este trabajo, se introduce la física básica que involucra a un plasma de fusión nuclear, definiendo las ondas de deriva, y particularizando a un caso concreto de inestabilidad en este tipo de plasmas como es el modelo DTEM (Dissipative Trapped Electron Mode). Se han expuesto los conceptos matemáticos en los que se basa este modelo, donde destacan los desarrollos en serie de Fourier, que facilitan la representación de magnitudes físicas tridimensionales cuando las variables espaciales tienen periodicidad angular. Se hace una breve descripción del proceso de implementación numérica de la ecuación en derivadas parciales que define el modelo DTEM, así como de los resultados obtenidos a partir de las simulaciones numéricas realizadas. Mediante comparación entre los resultados analíticos de la parte lineal del modelo y los resultados numéricos, se comprueba que el código utilizado es lo suficientemente preciso en su parte lineal. A partir de simulaciones de la evolución de las ondas de deriva en diferentes espacios paramétricos, se extraen una serie de conclusiones que podrían ser extrapolables a la dinámica del transporte de partículas en plasmas de fusión en dispositivos de confinamiento reales. Se ha estudiado el cambio en la dinámica del transporte de un plasma sujeto a la desestabilización de modos DTEM en función del peso relativo de la componente difusiva del transporte respecto a la componente turbulenta. Los resultados obtenidos empleando diferentes herramientas estadísticas son compatibles. Finalmente, se ha estimado el coeficiente de difusión efectivo que afecta al transporte radial de partículas en el plasma, y se ha comprobado que en el modelo DTEM, el canal de transporte turbulento es claramente dominante respecto del canal de transporte difusivo.

Palabras clave: Física de plasmas, plasmas de fusión nuclear, magnetohidrodinámica, ondas de deriva, modelo DTEM, series de Fourier, integración numérica, ecuaciones en derivadas parciales, tasas lineales de crecimiento, función de autocorrelación, análisis de Hurst, difusividad efectiva.

Abstract

A study about turbulent transport generated by drift waves in nuclear fusion plasmas has been done. In the first part of this work basic nuclear fusion plasma physics is introduced, defining drift waves, particularizing in a specific case of instability of this type of plasmas as the DTEM (Dissipative Trapped Electron Mode) model. The basic mathematical concepts in which this model is based on have been exposed, pointing out Fourier series development, that make an easier representation of three-dimensional physical magnitudes when spacial variables have angular periodicity. It is exposed a brief description of the numerical implementation process of the partial derivatives equation that defines the DTEM model, as well as results obtained from numerical simulations. Comparing the analytical and numerical results from linear part, it is proved that the code used is sufficiently precise in the linear part. From evolution of drift waves simulations in different parametric spaces, several conclusions that could be extrapolated to the dynamic of the transport of particles in fusion plasma real confinement dispositives are attained. The change of the dynamic of transport in a plasma under DTEM mode unstability has been studied depending on the relative weight in the diffusive and turbulent components of the transport. The obtained results using different statistical tools are compatible. Eventually, the effective diffusion coefficient that affects radial transport of particles in the plasma has been estimated, and it has been checked that in the DTEM model, the turbulent transport channel is clearly dominant over the diffusive transport channel.

Keyword: Physics of plasmas, nuclear fusion plasma, magnetohydrodynamics, drift waves, DTEM model, Fourier series, numerical integration, partial differential equation, linear growth rate, autocorrelation function, Hurst analysis, effective diffusivity.

Índice general

1	Introducción	3
1.1	La fusión termonuclear	3
1.2	Plasmas	4
1.3	Ondas de deriva	6
2	Modelo DTEM	9
2.1	Órbita de Larmor y espejo magnético	9
2.2	Geometría y cantidad simulada	10
2.3	Ecuación DTEM	11
2.4	Energía de las ondas de deriva	13
2.5	Estudio analítico	13
3	Implementación numérica	15
3.1	Series de Fourier	15
3.1.1	Multiplicación de series de Fourier	16
3.2	Integraciones	17
3.2.1	Integración radial	17
3.2.2	Integración angular	17
3.2.3	Operadores	18
3.2.4	Integración temporal	19
3.3	Difusividad numérica	20
3.4	Análisis del tiempo de ejecución	21
4	Resultados	23
4.1	Estudio lineal	23
4.1.1	Única helicidad	23
4.1.2	Distintos perfiles de densidad y temperatura	26
4.1.3	Varias helicidadades	28
4.2	Estudio no lineal	30
4.2.1	Única helicidad	30
4.2.2	Varias helicidadades	32
5	Estudios estadísticos	35
5.0.1	Término fuente y difusividad del perfil de equilibrio	36
5.1	Función de autorcorrelación	38
5.2	Análisis R/S	39
5.3	Difusividad efectiva	41
6	Conclusiones	43
6.0.1	Trabajo futuro	45

Capítulo 1

Introducción

Uno de los mayores retos del presente siglo es, sin duda, el abastecimiento energético libre de contaminación, y sobre todo, de gases de efecto invernadero, tales como el dióxido de carbono o metano. Además, uno de los factores fundamentales para que una fuente de energía sea capaz de sustituir la producción de todos los kilovatios que se obtienen actualmente a partir de combustibles fósiles es el control de producción de energía, siendo este el principal inconveniente de las actuales energías renovables. Evitar los residuos radiactivos producto de la fisión termonuclear parece también conveniente, por tanto, una de las posibles soluciones que cumple con todos estos requisitos es la fusión termonuclear.

1.1. La fusión termonuclear

Los protones y neutrones de los núcleos atómicos están en equilibrio ligados mediante la fuerza nuclear fuerte. Sin embargo pueden encontrar otro estado de equilibrio si los protones de dos núcleos distintos son capaces de superar la repulsión coulombiana, y fusionarse en un nuevo núcleo más pesado pero con una energía de enlace menor, por tanto, la diferencia de energía, o también conocido como diferencia de masa entre los reactivos y productos, es transformada en energía cinética. En la Figura 1.1 se aprecia que para núcleos ligeros, la energía de enlace es menor que para núcleos pesados. Existen varias reacciones de fusión posibles, sobretodo partiendo de isótopos del hidrógeno, sin embargo, aquella que consigue una mayor sección eficaz a menor temperatura es la que tiene como reactivos el deuterio y el tritio [1]:



La energía cinética de los neutrones producto es la aprovechada al ser transformada en energía térmica en los reactores de fusión nuclear. [1]

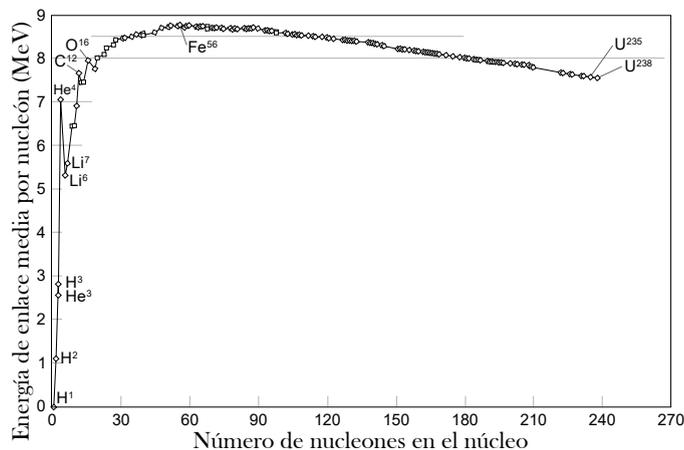


Figura 1.1: Curva de la energía de enlace (energía de enlace media por nucleón en MeV dependiendo del número de nucleones en el núcleo) para distintos isótopos. [2]

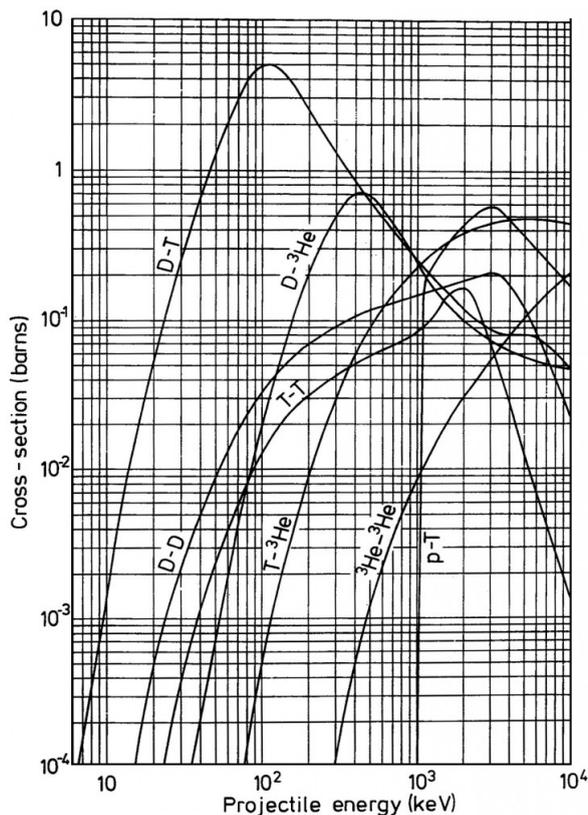


Figura 1.2: Sección eficaz de distintas reacciones de fusión para diferentes energías cinéticas de los núcleos. [3]

1.2. Plasmas

Tal y como muestra la Figura 1.2, la temperatura necesaria para conseguir un número considerable de reacciones de fusión es del orden de millones de grados Kelvin. A esas temperaturas, los electrones y los núcleos se disgregan, y se consigue un estado de plasma. Se define *plasma* como un gas cuasineutro de partículas neutras y cargadas con comportamiento colectivo. [4]

Por tanto, el plasma es un gas que cumple dos propiedades extra. Por una parte, el término *cuasineutro* hace referencia a que la distribución de electrones e iones es lo suficientemente parecida como para realizar la aproximación $n_i \approx n_e \approx n$ pero no tanto como para desprestigiar la interacción electromagnética. Esta aproximación se debe a que se producen apantallamientos entre las cargas debido a la gran movilidad de los electrones, que se colocan alrededor de los dominios de carga positivos. La estimación del rango espacial en el que pueden existir esos dominios se conoce como *la longitud de Debye* $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k T_e / n e^2}$.

Por otra parte, el *comportamiento colectivo* hace referencia a que los movimientos de las partículas del sistema no dependen únicamente de las condiciones locales, sino también de la configuración del plasma a grandes distancias debido a las fuerzas coulombianas.

El estudio de este estado de la materia está presente en diversas ramas de la física, que van desde la astrofísica hasta las altas energías, pasando por física de la atmósfera o incluso por el estado sólido. [4]

El principal problema a la hora de tratar plasmas experimentalmente, es ser capaz de mantener de forma controlada una cierta cantidad de plasma en un determinado volumen durante un cierto periodo de tiempo, es decir, ser capaz de *confinar* el plasma [5]. De forma natural, el plasma de las estrellas es confinado gracias a las enormes fuerzas gravitatorias que se producen, sin embargo, este método no es aplicable experimentalmente. Hay que tener en cuenta que este tipo de materia no puede entrar en contacto con ningún sólido, dado que tales temperaturas harían sublimar cualquier tipo de cápsula y como consecuencia, enfriar el mismo. Los dos métodos experimentalmente viables diseñados hasta la fecha son el confinamiento inercial y el magnético. El primero se basa en la combustión durante pequeños

periodos de tiempo de pequeñas pastillas de deuterio y tritio mediante láseres de alta potencia, mientras que el segundo se basa en el hecho de que en el plasma hay partículas cargadas, y consiste en mantener un plasma en un volumen mediante campos magnéticos. Va a ser este tipo de confinamiento el que se va a estudiar en este trabajo.

La energía del reactor que se puede aprovechar y transformar en corriente eléctrica es la energía térmica del combustible. Sin embargo, a pesar de conseguir confinar el plasma, se producen pérdidas de energía, principalmente dos tipos: pérdidas por conducción del calor, y pérdidas por partículas. Por tanto, para que el proceso de producción energética sea eficiente, el cociente entre la densidad de energía térmica del plasma, y la potencia de pérdidas debe ser lo suficientemente alto:

$$\tau = \frac{3nT}{P_{cp}}, \quad (1.2)$$

donde n es la densidad del plasma, T la temperatura, P_{cp} la potencia de pérdidas por conducción y partículas, y τ se denomina tiempo característico del proceso de pérdida de energía, que a menudo se dice simplemente, tiempo de confinamiento del plasma.

Lawson estableció un criterio a partir del cual se considera que la energía que se produce por reacciones de fusión es lo suficientemente alta como para compensar la energía que se invierte en hacer funcionar el reactor, y para confinamientos magnéticos, y reacciones de deuterio-tritio, el criterio de Lawson queda como [6]:

$$n\tau \geq 2 \times 10^{20} \text{m}^{-3}\text{s}. \quad (1.3)$$

Por tanto, conseguir unos tiempos de confinamiento de la energía altos es esencial.

Hay diferentes formas de intentar describir la naturaleza de un plasma. En primer lugar, los plasmas están formados por partículas individuales, por tanto, una primera descripción de su comportamiento es describir precisamente las trayectorias de esas partículas, que en su mayoría son partículas cargadas. De hecho, el concepto de *difusión* proviene precisamente de considerar los movimientos individuales de las partículas de un determinado fluido. El *movimiento browniano* de una partícula individual es la consideración de que cada partícula se mueve cambiando de dirección y sentido debido a los choques con otras partículas de forma aleatoria. Fue estudiado por Einstein en el movimiento de las partículas de polen en agua [7]. Por tanto, simplemente a partir de ese movimiento aleatorio de las partículas, existirá mas probabilidad de que una partícula se desplace de zonas más densas a menos densas. Esto queda reflejado en las leyes de Fick [4]:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= -D\vec{\nabla}n, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= D\nabla^2n, \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde \vec{J} es el flujo del fluido, n la densidad y D una constante que se define como coeficiente de difusión, propio del medio.

Al transporte debido a la difusión se suele denominar como *transporte clásico* de un fluido. Es un tipo de transporte que siempre va a estar presente en confinamientos de plasma debido a los gradientes de la densidad. Sin embargo no es suficiente como para describir el comportamiento de un plasma y existen multitud de otros procesos por los que se producen corrientes en un plasma, debido, entre otras razones, a que éste está formado por partículas cargadas. A estos otros procesos de transporte se suelen denominar *transporte anómalo* [8].

Por tanto al igual que en los líquidos y gases, no parece sensato intentar describir el comportamiento de un fluido partícula a partícula, y por tanto se consideran modelos que describen los fluidos, una segunda descripción es a través de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD)¹² [9]

¹Estas ecuaciones de la MHD han sido simplificadas teniendo en cuenta la cuasineutralidad del plasma y considerando que la masa de los electrones es despreciable frente a la de los protones.

²Se pueden identificar la ecuación 1.5 con la de la continuidad, la 1.6 con el balance de momentos, la 1.7 la ecuación de estado de la presión y 1.8 y 1.9 con las leyes de Ohm y Ampère

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\nabla p + \mu_0 \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) p + \Gamma p \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.7)$$

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{J} \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (1.9)$$

donde ρ es la densidad de masa del plasma, \vec{v} es la velocidad del fluido³, p es la presión, μ_0 la permeabilidad en el vacío, \vec{J} la densidad de corriente, \vec{B} el campo magnético, $\Gamma = \frac{c_p}{c_v}$ el cociente entre calores específicos, \vec{E} el campo eléctrico y η la resistividad del medio.

Estas ecuaciones describen las funciones densidad, velocidad y presión que debe cumplir un plasma. A partir de ellas, y si se imponen las condiciones $\vec{v} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ se consiguen las condiciones del equilibrio magnetohidrodinámico:

$$\nabla p = \mu_0 \vec{J} \times \vec{B} \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.12)$$

Una vez definido el equilibrio, conviene estudiar la estabilidad del mismo. Se dice que un equilibrio es estable, si bajo pequeñas perturbaciones, el sistema tiende a volver al estado inicial. Pues bien, el principal problema del confinamiento de plasmas de fusión nuclear es que el equilibrio MHD no es estable. De hecho, las inestabilidades que tienen los plasmas tienden a llevar el plasma hacia el equilibrio termodinámico. [4].

Se entiende como inestabilidad del plasma como aquel fenómeno por el cual, una pequeña perturbación del estado de equilibrio provoca un transporte de calor y de partículas a través de ondas de plasma. Existen multitud de inestabilidades en los plasmas: inestabilidades de flujo, de Rayleigh-Taylor, cinéticas y universales. [4] Dentro de éstas últimas se encuentran las ondas de deriva. Son precisamente estas últimas las que van a ser estudiadas en este trabajo.

1.3. Ondas de deriva

Una *onda de deriva* es una perturbación que se propaga en un plasma y que involucra la interacción de las derivas perpendiculares con la dinámica paralela. [10]

El término *derivadas perpendiculares* hace referencia a los movimientos de las partículas individuales dentro del plasma en la dirección perpendicular al campo magnético confinante mientras que el término *dinámica paralela* hace referencia al movimiento en la dirección paralela al campo magnético confinante. Debido a esta dinámica se produce un fuerte acoplamiento entre las perturbaciones de densidad y del potencial electrostático que generan las partículas cargadas del plasma, haciendo que allí donde exista una perturbación en la densidad, automáticamente se genere una perturbación en el potencial. Esto se debe a que la densidad del plasma principalmente se debe a los núcleos atómicos, mientras que los electrones mantienen una distribución más homogénea, y así, la diferencia de carga provoca el potencial.

Por tanto, allí donde la densidad no sea homogénea, se provocará una onda de deriva, y se considerará el gradiente de la densidad y temperatura su fuente de energía. Por eso, en los plasmas de fusión, donde la densidad no puede ser homogénea al tener que estar confinado, siempre va a sufrir este tipo de inestabilidades.

Además, las inestabilidades provocarán un transporte de calor y materia en la dirección radial en forma de turbulencias del plasma, dificultando así el confinamiento del mismo.

³Se consideran tanto la densidad como la velocidad, dependientes de cuatro parámetros, $\rho(x, y, z, t)$ y $\vec{v}(x, y, z, t)$

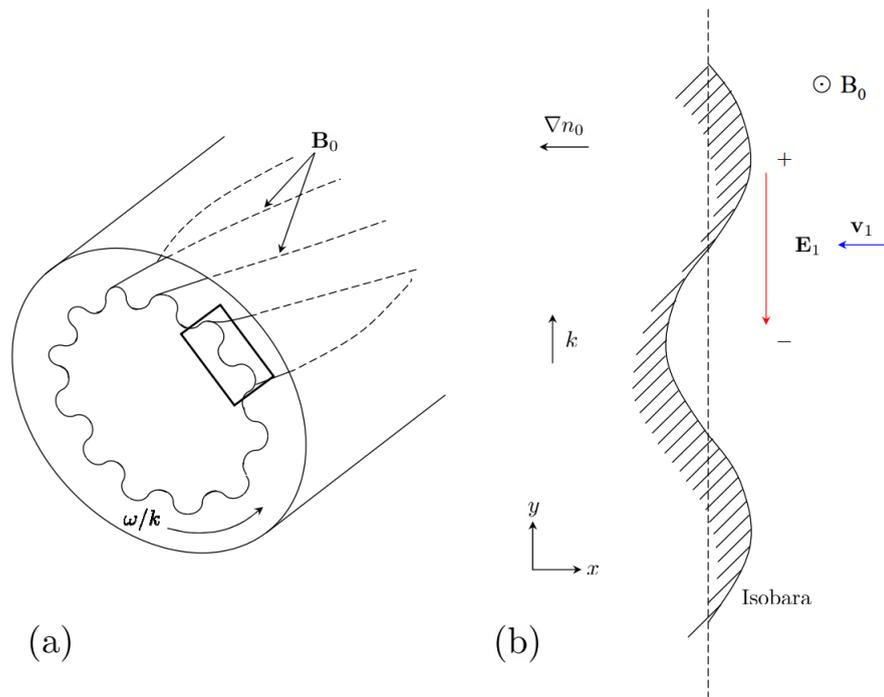


Figura 1.3: Aspecto de la onda de deriva de la densidad del plasma en un cilindro. [4]

Existen distintos modelos que intentan explicar las ondas de deriva, tales como el ITG, ETG y el DTEM [10]. Es éste último el modelo que se va a trabajar.

Capítulo 2

Modelo DTEM

La modelización es una parte crucial de la ciencia e ingeniería actual, tanto que a menudo el uso de estas técnicas es denominado como “El arte de la modelización” [11]. Es especialmente importante en el estudio de sistemas dinámicos tales como los plasmas de fusión nuclear. De esta manera, se pueden obtener predicciones teóricas y conclusiones que, a pesar de conocer los principios básicos de un determinado sistema, no son sencillos de obtener directamente.

En este capítulo se va a proceder a explicar brevemente el significado de la siglas DTEM¹ y algún concepto básico del confinamiento magnético. Se va a exponer la geometría utilizada en el modelo, las herramientas matemáticas que hace uso, y las cantidades que simula y a partir de que parámetros lo hace.

2.1. Órbita de Larmor y espejo magnético

Sea un campo magnético \vec{B} y sea una partícula cargada en presencia de este campo. La ecuación del movimiento es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.1)$$

donde m es la masa de la partícula, q su carga y \vec{v} su velocidad. Si se supone que la dirección del campo es únicamente \vec{z} se tiene:

$$m\dot{v}_z = q\vec{B}v_y \quad m\dot{v}_y = -q\vec{B}v_x \quad m\dot{v}_z = 0 \quad (2.2)$$

$$\ddot{v}_x = \frac{q\vec{B}}{m}\dot{v}_y = \left(\frac{q\vec{B}}{m}\right)^2 v_x \quad (2.3)$$

$$\ddot{v}_y = \frac{q\vec{B}}{m}\dot{v}_x = \left(\frac{q\vec{B}}{m}\right)^2 v_y, \quad (2.4)$$

que son las ecuaciones de un oscilador armónico cuya frecuencia es:

$$\Omega_c = \frac{|q|\vec{B}}{m}. \quad (2.5)$$

Por tanto, simplemente por la presencia de un campo magnético, la partícula adquirirá una determinada aceleración y un movimiento circular.

Por argumentos similares se pueden construir *espejos magnéticos* [4] en los que las partículas cargadas “rebotan”. Se puede definir el *momento magnético* de una partícula como:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{|\vec{B}|}, \quad (2.6)$$

donde v_{\perp} es el módulo la proyección de la velocidad en la dirección perpendicular al campo.

¹Las siglas en inglés: Dissipative Trapped Electron Modes.

El momento magnético es una cantidad que se conserva en el tiempo. Si se tiene una configuración de campo magnético, en la que el gradiente tiene dirección paralela a las propias líneas de campo como en la Figura 2.1, y la partícula tiene una velocidad paralela no nula, a partir de la conservación de la energía:

$$E_b - E_a = \frac{1}{2}m(v_{b\parallel}^2 + v_{b\perp}^2) - \frac{1}{2}m(v_{a\parallel}^2 + v_{a\perp}^2) = \frac{1}{2}m(v_{b\parallel}^2 - v_{a\parallel}^2) + \mu(|B(b)| - |B(a)|) = 0, \quad (2.7)$$

y como $|B(b)| - |B(a)| > 0$ implica que $v_{a\parallel}^2 > v_{b\parallel}^2$, es decir, existe una desaceleración en la dirección paralela. Esto puede llegar a hacerse cero y que la partícula rebote. A este tipo de configuración se denomina *espejo magnético*, y una partícula cargada, como puede ser el electrón, puede ser atrapada en un espejo de este tipo.

Esta es una de las bases del modelo DTEM, que tal y como indica su nombre, modeliza modos (ondas) considerando como fuente de su inestabilidad los electrones atrapados en los espejos magnéticos que se generan en el campo magnético confinante.

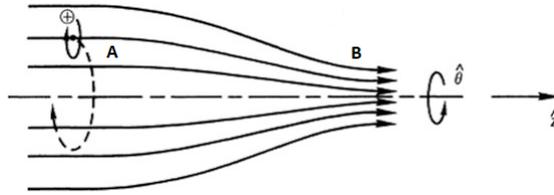


Figura 2.1: Configuración del campo en un espejo magnético. [4]

2.2. Geometría y cantidad simulada

En primer lugar, este modelo supone que se está trabajando en una geometría cilíndrica, es decir, que el plasma está confinado en un volumen cilíndrico según la Figura 2.2a. Por tanto, a partir de ahora las coordenadas que se usarán serán las coordenadas espaciales r, θ, z (en el caso de cantidades vectoriales, $\vec{r}, \vec{\theta}, \vec{z}$) y el tiempo t . Asumir esta geometría supone una aproximación, dado que experimentalmente, los reactores de fusión nuclear de confinamiento magnético, tales como los tokamak o scellenators [1], tienden a tener una forma toroidal, y al no considerar la geometría toroidal, se pierden consideraciones de diferentes efectos, como las derivas de curvatura [4].

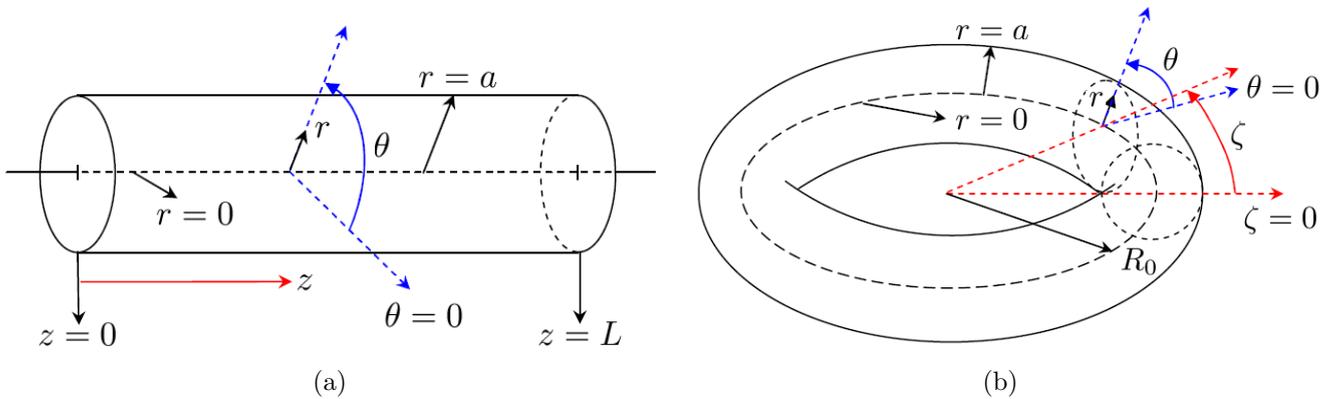


Figura 2.2: Geometría cilíndrica utilizada (a) y toro equivalente (b) [10].

En segundo lugar, el modelo DTEM va a realizar una simulación de la evolución de la densidad iónica del plasma a lo largo del tiempo, tras una perturbación de una configuración de equilibrio magnetohidrodinámico.

Así pues, en principio, el plasma en el estado inicial de equilibrio estará descrito (al menos en parte) por su densidad numérica iónica de equilibrio $n_0(r, \theta, z)$ y temperatura electrónica de equilibrio $T_0(r, \theta, z)$. Pues bien, la primera aproximación del modelo es considerar que los perfiles iniciales no dependen ni de

θ ni de z , por tanto, las dos cantidades quedan como $n_0(r)$ y $T_0(r)$. La segunda es considerar que la temperatura no evoluciona, es decir, que su expresión no depende del tiempo, quedando que la temperatura en un tiempo cualquiera será $T(r, t) = T(r, 0) = T_0(r)$.

Por otra parte, la densidad iónica del plasma en un tiempo cualquiera se puede expresar según:

$$n(r, \theta, z, t) = n_0(r, \theta, z, 0) + \tilde{n}(r, \theta, z, t) = n_0(r) + \tilde{n}(r, \theta, z, t), \quad (2.8)$$

siendo $n_0(r)$ la densidad de equilibrio y $\tilde{n}(r, \theta, z, t)$ la densidad fluctuante.

Se define la densidad iónica fluctuante normalizada como:

$$\hat{n}(r, \theta, z, t) = \frac{\tilde{n}(r, \theta, z, t)}{n_0(r)}. \quad (2.9)$$

Es precisamente \hat{n} la expresión que se va a simular.

2.3. Ecuación DTEM

Sin ánimo de realizar la deducción teórica que se puede encontrar en la referencia [12], se expresa la ecuación diferencial en la que se basa el modelo. En esencia, es la Ecuación de la continuidad 1.5 aplicada al fluido de iones, y se distingue por un lado la evolución de las fluctuaciones en la Ecuación 2.10 y por otro la evolución del perfil de equilibrio en la Ecuación 2.11:

$$\frac{d}{dt} (\hat{n} - \rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \hat{n}) + V_{*n} \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} + D_{\text{eff}}^m \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial \theta^2} - \frac{c_s^2}{\nu_i} \nabla_{\parallel}^2 \hat{n} - L_n D_{\text{eff}}^m \left[\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_{\perp} \hat{n} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\langle n \rangle - n_0 - \rho_s^2 \frac{\partial^2 \langle n \rangle}{\partial r^2} \right) = \tilde{S}(r, t) + \frac{\partial}{\partial r} \left[D_{\text{ext}}(r) \frac{\partial}{\partial r} (\langle n \rangle) - n_0 \right] + L_n D_{\text{eff}}^m \left[\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_{\perp} \hat{n} = 0, \quad (2.11)$$

donde la dirección \parallel hace referencia a la dirección paralela al campo $\vec{B}(r)$ y \perp a la dirección \vec{z} . Los operadores ∇_{\perp}^2 y ∇_{\parallel}^2 se describen en la Sección 3.2.3, mientras que el operador de la derivada convectiva queda definido según la siguiente expresión [13]:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + |\vec{V}_0(r)| \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (2.12)$$

El resto de parámetros quedan descritos en la Tabla 2.1.

Por tanto, si se analiza con detalle la Tabla 2.1 se puede deducir que todos los parámetros de la Ecuación 2.10 quedan definidos a partir de las expresiones $n_0(r)$, $T_0(r)$, $E_0(r)$ y de las constantes $\epsilon(a)$, ν_{i0} , ν_{e0} , B_0 , $B_{\theta 0}$, a y Ω_i .² Por otra parte, para la Ecuación 2.11 asociada al perfil hay que definir también $\tilde{S}(r, t)$ y $D_{\text{ext}}(r)$, los términos fuente y difusividad externa. Se estudiarán con más detalle en el Capítulo 5.

En la Ecuación 2.10 se pueden diferenciar dos partes, una parte lineal, correspondiente a los primeros cuatro sumandos, y otra no lineal, correspondiente al último. La importancia de esta distinción reside en dos hechos: en primer lugar, en que las ecuaciones lineales son más fáciles de resolver analíticamente que las no lineales, y en segundo lugar, en que a la hora de resolver computacionalmente, el tiempo que se necesita para resolver una ecuación no lineal es superior al de una lineal.

Por otra parte se pueden destacar los sumandos tercero y cuarto de la parte lineal que son propios y exclusivos de este modelo. De hecho, el primero de ellos aparece con signo positivo siendo así un término desestabilizante, fuertemente dependiente de los gradientes del perfil de densidad y temperatura, mientras que el segundo tiene signo negativo, favoreciendo a la estabilidad del plasma. Éste último ha sido introducido “ad hoc” y no proviene de ninguna justificación previa como el resto de términos [10].

También es importante destacar que el modelo impone que las cantidades de equilibrio $n_0(r)$, $T_0(r)$, $V_0(r)$ dependan únicamente de la variable radial, así como la expresión del campo magnético, constante en la

²Equivalentemente a partir de las expresiones $n_0(r)$, $T_0(r)$, $V_0(r)$, $q(r)$ y de las constantes $\epsilon(a)$, ν_{i0} , ν_{e0} , a y Ω_i .

Parámetro	Expresión	Dim.
Tamaño longitudinal del cilindro	L	L
Radio del toro equivalente	$R_0 = \frac{L}{2\pi}$	L
Tamaño radial del cilindro	a	L
Razón de aspecto inversa de los radios	$\epsilon(r) = \frac{r}{R_0}$	Ad.
Densidad iónica del estado de equilibrio inicial	$n_0(r)$	L^{-3}
Densidad iónica tras ser perturbado	$n(r, t) = n_0(r) + \tilde{n}(r, \theta, z, t)$	L^{-3}
Densidad iónica fluctuante normalizada	$\hat{n}(r, \theta, z, t) = \frac{\tilde{n}(r, \theta, z, t)}{n_0(r)}$	L^{-3}
Número poloidal de un modo	m	Ad.
Número toroidal de un modo	n	Ad.
Helicidad de un modo	$h = \frac{m}{n}$	Ad.
Campo eléctrico del estado de equilibrio inicial	$\vec{E}_0(r) = E_0(r)\vec{r}$	$LMT^{-3}I^{-1}$
Magnitud de la velocidad	\bar{V}_0	LT^{-1}
Longitud característica de la velocidad de shear	L_V	L
Velocidad del flujo de iones del estado de eq. inicial	$\vec{V}_0(r) = -\frac{E_0(r)}{B_0}\vec{\theta} = \frac{\bar{V}_0}{L_V}(r - r_0)\vec{\theta}$	LT^{-1}
Temp. electrónica del estado de equilibrio inicial	$T_0(r)$	ML^2T^{-2}
Frecuencia de colisión iónica en $r = 0$	ν_{i0}	T^{-1}
Frecuencia de colisión iónica	$\nu_i(r) = \nu_{i0} \frac{n_0(r)}{T_0(r)^{1.5}}$	T^{-1}
Frecuencia de colisión electrónica en $r = 0$	ν_{e0}	T^{-1}
Frecuencia de colisión electrónica	$\nu_e(r) = \nu_{e0} \frac{n_0(r)}{T_0(r)^{1.5}}$	T^{-1}
Frecuencia de colisión electrónica efectiva	$\nu_{\text{eff}}(r) = \frac{\nu_e(r)}{\epsilon(r)}$	T^{-1}
Campo magnético externo	$\vec{B}(r) = B_0\vec{z} + B_\theta(r)\vec{\theta}$	$MT^{-2}I^{-2}$
Componente poloidal del campo magnético externo	$B_\theta(r) = B_{\theta 0} + B_0 \frac{r-r_0}{L_s}$	$MT^{-2}I^{-2}$
Factor de seguridad	$q(r) = \epsilon(r) \frac{B_0}{B_\theta(r)}$	Ad.
Superficie racional de un modo (m, n)	$r_0 : m/n = q(r_0)$	L
Número de onda poloidal	$k_\theta = m/r_0$	L^{-1}
Número de onda toroidal	$k_z = m/R_0$	L^{-1}
Longitud caracterísitica del shear	$L_s(r) = \frac{q(r)^2}{\epsilon(r)} \left(\frac{dq}{dr}\right)^{-1}$	L
Longitud característica de la densidad	$L_n(r) = n_0(r) \left \frac{dn_0(r)}{dr}\right ^{-1}$	L
Longitud característica de la temperatura	$L_T(r) = T_0(r) \left \frac{dT_0(r)}{dr}\right ^{-1}$	L
Parámetro η	$\eta(r) = \frac{L_n(r)}{L_T(r)}$	Ad.
Masa iónica	m_i	M
Velocidad sónica iónica	$c_s(r) = \left(\frac{T_0(r)}{m_i}\right)^{1/2}$	LT^{-1}
Frecuencia ciclotrónica iónica	$\Omega_i = \frac{ e B_0}{m_i}$	T^{-1}
Radio de giro iónico	$\rho_s(r) = \frac{c_s(r)}{\Omega_i}$	L
Velocidad de deriva diamagnética	$V_{*n}(r) = \frac{c_s(r)\rho_s(r)}{L_n(r)}$	LT^{-1}
Coefficiente del drive	$D_0(r) = \frac{3\epsilon(r)^{1.5}(\rho_s(r)c_s(r))^2}{2L_T(r)L_n(r)\nu_e(r)}$	L^2T^{-1}
Coefficiente del drive efectivo	$D_{\text{eff}}^m(r) = \frac{D_0(r)}{1+(k_\theta D_0(r)/V_{*n}(r))^2}$	Ad.
Frecuencia de deriva diamagnética	$\omega_{*n}(r) = V_{*n}(r)/r$	T^{-1}
Frecuencia del drift de un modo	$\omega_{*n}^m = k_\theta V_{*n}(r_0)$	T^{-1}
Anchura de un modo	$W_m = (\omega_{*n}^m \nu_i(r_0))^{1/4} \left(\frac{\rho_s(r_0)L_s(r_0)}{k_y c_s(r_0)}\right)^{1/2}$	L
Shearing-rate normalizado de un modo	$\Omega_S^m = \frac{k_y W_m}{\omega_{*n}^m} \frac{d(V(r))}{dr}(r_0)$	Ad.
Desplazamiento de autofunciones	$\xi_m = \frac{W_m^3 \Omega_S^m}{2\rho_s^2(r_0)}$	L
Término fuente	$\tilde{S}(r, t)$	$L^{-3}T^{-1}$
Difusividad perfil de equilibrio	$D_{\text{ext}}(r)$	L^2T^{-1}

Tabla 2.1: Diferentes parámetros del modelo DTEM con sus respectivas expresiones y dimensiones.

dirección \vec{z} pero dependiente de la variable radial en la dirección $\vec{\theta}$. Así, tal y como queda recogido en la Tabla 2.1, la velocidad del estado de equilibrio inicial se debe a la presencia de un posible campo eléctrico del estado de equilibrio, que de nuevo solo depende de la variable radial y tiene dirección $\vec{\theta}$ (Figura 2.3). A este tipo de perfiles de velocidad se les denomina *shear flow* o flujos de cizalla.

En cuanto a las unidades, destacar que en física de plasmas es común utilizar unidades de energía para la temperatura.³

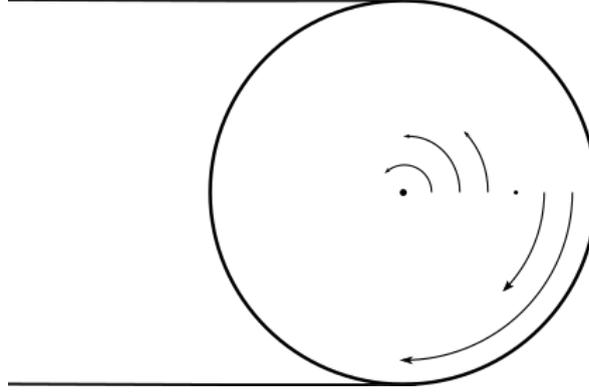


Figura 2.3: Perfil de la velocidad de equilibrio del shear flow en una sección del toro.

2.4. Energía de las ondas de deriva

Se puede definir una energía asociada a las fluctuaciones provocadas por las ondas de deriva según la expresión [13]:

$$E = \frac{1}{2} \int (|\tilde{n}|^2 + \rho_s^2 |\vec{\nabla}_\perp \tilde{n}|^2) dV. \quad (2.13)$$

El primero de los sumandos se dice que es la energía interna de las fluctuaciones, porque existe simplemente por el hecho de existir una fluctuación en la densidad, mientras que el segundo es la energía cinética, asociada a la proyección del gradiente de la densidad en la dirección perpendicular al campo magnético.

Un sencillo análisis dimensional muestra que esta definición de la energía tiene unidades de L^{-3} , es decir, unidades de densidad numérica.

2.5. Estudio analítico

En primer lugar, la parte lineal de la Ecuación 2.10 tiene solución analítica, y por tanto, se puede obtener una expresión para la frecuencia de cada modo tal y como lo recoge la referencia [12]. En esta deducción se ha expandido no solo la serie de Fourier para las coordenadas θ y z sino también para la componente radial r , y por tanto aparece el número de onda radial l . Los valores de todas las cantidades de la siguiente expresión son los valores en el punto radial r_0 .

$$\omega = \frac{1}{1 + k_y^2 \rho_s^2} \left(\omega_{*e} + ik_y^2 D_0 - (2l + 1) \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega c_s^2 k_y^2 \rho_s^2}{\nu_i L_s^2}} \right). \quad (2.14)$$

Por otra parte, se tiene un resultado analítico para uno de los efectos que tiene introducir el shear flow, que es el desplazamiento del valor r en el que la densidad $\hat{n}_{m,n}$ toma su valor máximo. Para los casos en los que no existe una velocidad de equilibrio inicial, el valor máximo de la desestabilización de cada modo se obtiene en la superficie racional de cada modo. Sin embargo, al introducir el perfil de velocidad, ese valor máximo se obtiene para un radio ligeramente desplazado, a una distancia de la superficie racional

³Por tanto, la temperatura real en Kelvin se obtiene dividiendo la expresión $T_0(r)$ por la constante de Boltzmann k .

según la expresión:

$$\xi_m = \frac{W_m^3 \Omega_S^m}{2\rho_s^2(r_0)}. \quad (2.15)$$

De nuevo, la deducción se puede encontrar en la referencia [12].

Capítulo 3

Implementación numérica

En este capítulo se explica como, a partir de una ecuación diferencial en derivadas parciales, se consigue implementar un código que consiga simular y evolucionar la densidad del plasma. Se explican algunas de las herramientas computacionales que se utilizarán en las simulaciones realizadas.

El objetivo del programa utilizado es partir de una configuración de equilibrio, y simular la evolución temporal tras sufrir pequeñas perturbaciones en la densidad gracias a la Ecuación 2.10. El diseño y conocimiento del algoritmo numérico es esencial a la hora de realizar simulaciones, dado que de él depende la calidad y el sentido de los resultados. El código, proporcionado por el profesor, consiste en 7700 líneas de código, escrito en Fortran 90, y las simulaciones han sido ejecutadas en el supercomputador Altamira.

Destacar también que es esencial en un código normalizar las diferentes cantidades calculadas y utilizadas, para así no depender de ningún tipo de unidades. En este caso, el código utilizado normaliza las longitudes al radio a , el tiempo a la inversa de la frecuencia ciclotrónica iónica $1/\Omega_i$, y tanto la densidad iónica, como la temperatura a sus valores en $r = 0$. Por tanto, a partir de ahora se van a considerar los parámetros en estas unidades, y por tanto adimensionales.

3.1. Series de Fourier

Según el análisis de Fourier [14], toda función continua en el dominio de longitud finita $I = [-L/2, L/2]$ puede ser expresada según:

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi x}{L}}, \quad (3.1)$$

siendo c_n una serie de términos complejos. Una definición similar es aplicable para funciones de varias variables.

La función $f(x)$ no tiene que ser periódica, sin embargo, la expresión del sumatorio siempre va a serlo. Sin embargo, esto no es ningún tipo de inconveniente, dado que la Expresión 3.1 es válida solamente en el dominio I , y en el resto, la expresión del sumatorio “se repetirá” mientras que la función $f(x)$ puede incluso no estar definida.

Este tipo de expansiones son muy útiles a la hora de realizar cálculos computacionales, y de hecho, el modelo DTEM se basa en esta herramienta matemática para expresar la densidad iónica fluctuante normalizada \hat{n} del plasma (Ecuación 2.9).

De hecho, como la expresión $\hat{n}(r, \theta, z, t)$ debe ser periódica tanto para la variable θ como para la variable z (Figura 4.2), es conveniente desarrollar la serie de Fourier para esas dos variables. Por tanto, si se supone que $\theta \in [-\pi, \pi]$ y que $z \in [-L/2, L/2]$:¹

$$\hat{n}(r, \theta, z, t) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} c_{m, n}(r, t) e^{i(m\theta - \frac{2n\pi z}{L})}. \quad (3.2)$$

¹Notar que se ha tomado la expresión como $(m\theta - n\zeta)$ y no $(m\theta + n\zeta)$ debido a la literatura de tokamaks. [15]

Realizando un cambio de variable, y considerando $2\pi z/L = \zeta$, y $\zeta \in [-\pi, \pi]$, se obtiene:

$$\hat{n}(r, \theta, \zeta, t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n}(r, t) e^{i(m\theta - n\zeta)}. \quad (3.3)$$

Si se realiza la suposición de que las expresiones complejas $c_{m,n}(r, t)$ pueden ser expresadas como un factor $\hat{n}_{m,n}(r) e^{-i\omega_{n,m}t}$, siendo $\hat{n}_{m,n}(r)$ un valor real, la expresión queda:

$$\hat{n}(r, \theta, \zeta, t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \hat{n}_{m,n}(r) e^{-i\omega_{n,m}t} e^{i(m\theta - n\zeta)}, \quad (3.4)$$

donde a los pares (m, n) se denominan *modos*, a m *número poloidal del modo*, a n el *número toroidal del modo*, y a $\omega_{n,m}$ se denomina *frecuencia del modo* que es un valor complejo:

$$\omega_{m,n} = \omega_{m,n}^r + i\gamma_{n,m}, \quad (3.5)$$

definiendo $\omega_{m,n}^r$ como la *frecuencia real de oscilación* del modo y $\gamma_{n,m}$ la *tasa lineal de crecimiento* del modo.² Así pues, los modos que tengan $\gamma_{n,m} > 0$ se dirán que son inestables, dado que la exponencial crecerá para tiempos grandes, mientras que si $\gamma_{n,m} \leq 0$ se dirá que es estable.

Por último destacar que existe otra expresión de la suma de Fourier, pero en vez de utilizar la exponencial compleja, se expresa en función de senos y cosenos:

$$\begin{aligned} \hat{n}(r, \theta, \zeta, t) &= \sum_{m,n \geq 0} \hat{n}_{m,n}(r, t) \cos(m\theta - n\zeta) + \hat{n}_{-m,-n}(r, t) \sin(m\theta - n\zeta) = \\ &= \hat{n}_{0,0}(r, t_0) + \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m,n \neq (0,0)}} \hat{n}_{m,n}(r, t) \cos(m\theta - n\zeta) + \hat{n}_{-m,-n}(r, t) \sin(m\theta - n\zeta), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde se ha realizado la distinción entre el modo $(0, 0)$ y el resto debido a que este sumando corresponde a la evolución del perfil de equilibrio y se evolucionará según la Ecuación 2.11. Se puede observar que realizando el promedio angular solo queda ese término:

$$\langle n(r, \theta, \zeta, t) \rangle = \langle n_0(r) + \tilde{n}(r, \theta, \zeta, t) \rangle = \langle n_0(r) \rangle + \langle \tilde{n}(r, \theta, \zeta, t) \rangle = n_0(r) + \tilde{n}_{(0,0)}(r, t). \quad (3.7)$$

El código utilizará, según sea conveniente, una u otra expresión pero en cualquier caso, lo que se ha conseguido con esta expresión es que la función de la densidad fluctuante en todo el cilindro quede determinada (en un determinado tiempo t_0) por una infinidad de pares de funciones reales $\hat{n}_{m,n}(r, t_0)$ y $\hat{n}_{-m,-n}(r, t_0)$ que solo dependen de la variable radial r .

3.1.1. Multiplicación de series de Fourier

La multiplicación de dos series de Fourier univariadas viene dada según la siguiente expresión [14]:

$$\begin{aligned} \left(\sum_n c_n e^{ikx} \right) \left(\sum_{n'} c'_{n'} e^{ik'x} \right) &= \sum_{n,n'} c_n c'_{n'} e^{i(n+n')x} = \sum_{n,n''} c_n c'_{n''-n} e^{in''x} = \\ &= \sum_{n''} \left(\sum_n c_n c'_{n''-n} \right) e^{in''x} = \sum_{n''} (c * c')_{n''} e^{in''x}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $(c * c')_{n''}$ representa el producto de convolución de las series originales. Una expresión similar se utiliza para series de Fourier de varias variables.

²A partir de ahora se van a omitir los subíndices m y n para las frecuencias de oscilación y tasas de crecimiento.

3.2. Integraciones

En la Ecuación 2.10 aparecen derivadas, tanto temporales como espaciales, que deben ser tratadas computacionalmente a la hora de ejecutar el código. La necesidad de realizar diferenciaciones hace que se necesite discretizar las variables, que en este caso son la variable radial, las angulares y la temporal. Al discretizar las variables, se introduce una resolución en los datos obtenidos, y por tanto una fuente de error que puede provocar inestabilidades en el código por falta de resolución.

3.2.1. Integración radial

En la Ecuación 2.10 aparecen los operadores gradientes perpendiculares y paralelos y se considera que los factores $\hat{n}_{m,n}(r)$ dependen de la variable radial, por tanto, para poder realizar las diferentes integraciones, se deberá establecer una malla, es decir, una serie de puntos $\{r_i \in [0, 1]\}$ y las derivadas radiales serán:

$$\frac{\partial \hat{n}(r, \theta, \zeta, t)}{\partial r} = \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m,n \neq (0,0)}} \frac{\partial \hat{n}_{m,n}(r, t)}{\partial r} \cos(m\theta - n\zeta) + \frac{\partial \hat{n}_{-m,-n}(r, t)}{\partial r} \sin(m\theta - n\zeta). \quad (3.9)$$

Además, la distribución de la resolución no será homogénea en todo el intervalo $[0, 1]$ porque, tal y como se verá en la Sección 3.2.3, los factores $\hat{n}_{m,n}(r)$ serán distintos de cero en un pequeño intervalo, mientras que serán nulos en el resto de puntos. Por tanto, para conseguir un ahorro de cálculos innecesarios, se debe concentrar la resolución en el intervalo radial que interese, haciendo que las separaciones entre puntos radiales de la malla no sean iguales. Esto provoca que las diferenciaciones radiales necesiten considerar tres puntos (en lugar de 2 del caso de una separación uniforme).

Por eso, sean los tres puntos $\{r_0 - s_1, r_0, r_0 + s_2 : s_i > 0\}$ no necesariamente equiespaciados. Mediante el desarrollo de Taylor, se puede obtener la siguiente aproximación (despreciando términos de $O(s_i^3)$) para la derivada $\frac{\partial \hat{n}_{m,n}(r)}{\partial r}$:

$$\frac{\partial \hat{n}_{m,n}(r_0)}{\partial r} = \frac{s_2^2}{s_1 s_2 (s_1 + s_2)} \hat{n}_{m,n}(r_0 - s_1) + \frac{-s_1^2 + s_2^2}{s_1 s_2 (s_1 + s_2)} \hat{n}_{m,n}(r_0) - \frac{s_1^2}{s_1 s_2 (s_1 + s_2)} \hat{n}_{m,n}(r_0 + s_2), \quad (3.10)$$

que en el caso de que $s_1 = s_2$ queda la derivación en dos puntos usual. Si se realiza el anterior procedimiento sucesivamente, se obtienen las derivadas de mayor orden.

3.2.2. Integración angular

En este tipo de integración se refleja una de las mayores ventajas de la expansión de Fourier, gracias a la cual, esta integración se realiza de forma analítica en todo momento. Así, simplemente, a partir de la expresión en senos y cosenos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}(r, \theta, \zeta, t)}{\partial \theta} &= \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m,n \neq (0,0)}} \hat{n}_{m,n}(r, t) (-m) \sin(m\theta - n\zeta) + \hat{n}_{-m,-n}(r, t) m \cos(m\theta - n\zeta) \\ \frac{\partial \hat{n}(r, \theta, \zeta, t)}{\partial \zeta} &= \sum_{\substack{m,n \geq 0 \\ m,n \neq (0,0)}} \hat{n}_{m,n}(r, t) n \sin(m\theta - n\zeta) + \hat{n}_{-m,-n}(r, t) (-n) \cos(m\theta - n\zeta). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por tanto, las derivadas de orden impar en las variables angulares intercambian el papel de senos y cosenos. Además, las derivadas de orden impar con respecto a las variables angulares acoplan los pares

de modos $(m, n), (-m, -n)$. A modo de ejemplo, si se tiene una ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \Rightarrow \\ \sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ m, n \neq (0,0)}} \frac{\partial \hat{n}_{m,n}(r, t)}{\partial t} \cos(m\theta - n\zeta) + \frac{\partial \hat{n}_{-m,-n}(r, t)}{\partial t} \sin(m\theta - n\zeta) = \\ \sum_{\substack{m, n \geq 0 \\ m, n \neq (0,0)}} \hat{n}_{m,n}(r, t)(-m) \sin(m\theta - n\zeta) + \hat{n}_{-m,-n}(r, t)m \cos(m\theta - n\zeta), \end{aligned} \quad (3.12)$$

e igualando término a término, implica que:

$$\frac{\partial \hat{n}_{m,n}(r, t)}{\partial t} = m \hat{n}_{-m,-n}(r, t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \hat{n}_{-m,-n}(r, t)}{\partial t} = -m \hat{n}_{m,n}(r, t). \quad (3.13)$$

Esta relación entre los modos $(m, n), (-m, -n)$ hace que, a la hora de realizar el paso temporal, las cantidades $\hat{n}_{m,n}(r, t)$ y $\hat{n}_{-m,-n}(r, t)$ tengan que ser calculadas de forma conjunta en todo momento.

3.2.3. Operadores

A partir de la Expresión 3.6, los operadores que aparecen en la Ecuación DTEM 2.10 se expresan para cada sumando (modo) como:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \quad \text{y} \quad \nabla_{\parallel}^2 = \frac{1}{R_0^2} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right)^2, \quad (3.14)$$

ya que los operadores en coordenadas cilíndricas quedan, teniendo en cuenta las derivadas angulares y la forma del campo magnético, y suponiendo $f = \hat{n}_{m,n}(r, t) \cos(m\theta - n\zeta) + \hat{n}_{-m,-n}(r, t) \sin(m\theta - n\zeta)$:

$$\begin{aligned} \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z} \Rightarrow \nabla_{\perp} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{\theta} \Rightarrow \\ \nabla_{\perp}^2 f = \nabla \cdot (\nabla_{\perp} f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} f. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Por el contrario, el operador ∇_{\parallel} se define según [8]:

$$\begin{aligned} \nabla_{\parallel} f = \frac{1}{|B|} \left(\vec{B} \cdot \nabla f \right) = \frac{1}{|B|} \left(B_z \frac{\partial f}{\partial z} + B_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \approx \left(\frac{2\pi}{L} \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{r}{R_0 q(r)} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{1}{q(r)} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \Rightarrow \\ \nabla_{\parallel}^2 f = \frac{1}{R_0^2} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right)^2 f. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por lo que al fin y al cabo, la Ecuación 2.10 se basa, en esencia, en derivadas temporales, derivadas con respecto a la coordenada radial y una serie de operadores para cada modo.

Gracias a la expresión de la derivada paralela según 3.14, se puede observar que para cada modo (m, n) aquel punto radial r_0 en el que el factor de seguridad $q(r_0)$ iguale al cociente m/n , este operador se anula, y por tanto también el quinto sumando de la Ecuación 2.10, que es precisamente el estabilizante. Por tanto, alrededor de este punto r_0 , se producirá una desestabilización del plasma, mientras que en los puntos alejados a éste, el plasma se mantendrá en equilibrio. Debido a la importancia del valor r_0 para cada modo, éste se denomina *superficie racional del modo*.

3.2.4. Integración temporal

La expansión de Fourier permite trabajar modo a modo (o mejor dicho, par de modos (m, n) , $(-m, -n)$) por separado y posteriormente obtener la densidad fluctuante del plasma sumando la contribución de cada modo. El principal interés es obtener los valores de $\hat{n}_{m,n}(r, t_0 + \Delta t)$ a partir de los valores de $\hat{n}_{m,n}(r, t_0)$ en un instante dado. Para ello se hace uso del modelo y de la Ecuación 2.10, donde aparece la evolución temporal en forma de derivada parcial, pero debe ser expresada en su forma discreta:

$$L_{m,n} \frac{\partial X_{m,n}}{\partial t} = R_{m,n} X_{m,n} + N_{m,n}(X), \quad (3.17)$$

donde $X_{m,n} = (\hat{n}_{m,n}(r_1, t_0), \hat{n}_{m,n}(r_2, t_0), \dots, \hat{n}_{m,n}(r_j, t_0), \hat{n}_{-m,-n}(r_1, t_0), \hat{n}_{-m,-n}(r_2, t_0), \dots, \hat{n}_{-m,-n}(r_j, t_0))'$, $L_{m,n}$ y $R_{m,n}$ son matrices tridiagonales responsables de la diferenciación radial de cada modo, $N_{m,n}(X)$ es una función responsable de la parte no lineal de la ecuación y X es una colección de vectores $X_{n,m}$ para diferentes modos dado que en este sumando se realiza una suma de convolución.

En principio, si se parte de una función $\hat{n}_{m,n}(r, 0) = 0$ (equivalentemente, el vector $X_{m,n}$ nulo), la solución de la ecuación diferencial 3.17 es el vector nulo y no evolucionaría. Para evitar esto, y proporcionar un valor inicial no nulo, siempre se toma la siguiente función como valor inicial:

$$\hat{n}_{m,n}(r, 0) = \bar{n}_{m,n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r-r_0}{W_{m,n}} \right)^2}, \quad (3.18)$$

siendo $\bar{n}_{m,n}$ y $W_{m,n}$ la amplitud y anchura iniciales de cada modo y r_0 la superficie racional.³

A partir de la expresión 3.17 si se tiene el vector $X_{m,n}$ en un instante t_0 , se puede obtener un nuevo vector $X_{m,n}$ para un instante $t_0 + \Delta t$ gracias a un esquema tipo Crank-Nicholson [16]. En este tipo de esquema numérico se considera, por una parte, una diferenciación finita del tiempo, y por otra, para la parte lineal se considera un valor medio entre los valores al inicio y la final del paso temporal y para la parte no lineal se considera solamente el valor en el inicio del paso:

$$L_{m,n} \frac{X_{m,n}^{t_0-\Delta t} - X_{m,n}^{t_0}}{\Delta t} = R_{m,n} \frac{X_{m,n}^{t_0+\Delta t} + X_{m,n}^{t_0}}{2} + N_{m,n}(X^{t_0}), \quad (3.19)$$

y despejando se obtiene:

$$\left(L_{m,n} - \frac{\Delta t}{2} R_{m,n} \right) X_{m,n}^{t_0+\Delta t} = \left(L_{m,n} + \frac{\Delta t}{2} R_{m,n} \right) X_{m,n}^{t_0} + \Delta t N_{m,n}(X^{t_0}). \quad (3.20)$$

Por lo tanto, en cada paso temporal se resuelve un sistema de ecuaciones lineales. De esta forma, solamente se han despreciado términos del orden de Δt , por eso se dice que el esquema Crank-Nicholson es incondicionalmente estable [16]. También se dice que, en este caso, el método numérico es implícito porque se han considerado tanto el valor de $X_{m,n}$ en el tiempo t_0 como en $t_0 + \Delta t$, sin embargo se considera explícito para la parte no lineal.

Se puede conseguir de una forma sencilla mejorar la precisión del paso temporal, simplemente realizando un paso intermedio. De esta manera se consigue una precisión del orden de $(\Delta t)^2$:

$$\begin{aligned} [1] \quad & \left(L_{m,n} - \frac{\Delta t}{2} R_{m,n} \right) X_{m,n}^{t_0+(1/2)\Delta t} = \left(L_{m,n} + \frac{\Delta t}{2} R_{m,n} \right) X_{m,n}^{t_0} + \Delta t N_{m,n}(X^{t_0}) \\ [2] \quad & \left(L_{m,n} - \frac{\Delta t}{2} R_{m,n} \right) X_{m,n}^{t_0+\Delta t} = \left(L_{m,n} + \frac{\Delta t}{2} R_{m,n} \right) X_{m,n}^{t_0+(1/2)\Delta t} + \Delta t N_{m,n}(X^{t_0+(1/2)\Delta t}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

El código, además de realizar el avance temporal y devolver los diferentes valores de los factores $\hat{n}_{m,n}(r_i, t_j)$ para una serie de puntos radiales $\{r_i\}_{i=1}^{imax}$, $r_i \in [0, 1]$, y una serie de puntos temporales $\{t_j\}_{j=1}^{jmax}$, $t_j > 0$ según el procedimiento descrito, hace la transformación necesaria para obtener la expresión del sumatorio de Fourier complejo de la Expresión 3.3 y así obtener las tasas lineales de crecimiento y las frecuencias reales de oscilación de cada modo según:

$$\gamma_{n,m} = \text{Re} \left(\frac{\ln \left(\frac{c_{m,n}(r, t+\Delta t)}{c_{m,n}(r, t)} \right)}{\Delta t} \right). \quad (3.22)$$

³Dado que no ha jugado un papel importante en este trabajo, en todas las simulaciones se ha establecido $\bar{n}_{m,n} = 2 \cdot 10^{-6} a^{-3}$, $W_{m,n} = 5 \cdot 10^{-3} a$.

3.3. Difusividad numérica

En ocasiones, es posible que la resolución radial no sea lo suficientemente alta como para que el código sea capaz de devolver una evolución con sentido físico. Es importante destacar que estos problemas de cálculo, son puramente numéricos, es decir, se deben a las discretizaciones que se realizan a la hora de resolver la ecuación diferencial. Por eso es importante en todo momento buscar el sentido físico de los resultados, porque aunque la modelización realizada en forma de ecuación diferencial tenga sentido, la forma de calcular los valores puede hacer que el modelo no sea práctico.

En este caso, la discretización radial provoca que, al realizar las sumas de convolución, los valores de $\hat{n}_{(m,n)}(r, t_0)$ no se ajusten a una distribución esperada. Tal y como se observa en la Figura 3.1 aparecen unos “picos” que no tienen sentido físico. No solo eso, sino que, al ser unos cambios tan bruscos de la función, la diferenciación radial deja de tener sentido, y las simulaciones dejan de ejecutarse.

El por qué de este fenómeno numérico es la forma en la que está programado este modelo [17] [13] hace que al evolucionar en el tiempo, la excitación pase de modos radiales con l bajo, a modos con l alto. Como l es, al fin y al cabo, el número de veces que la función $\hat{n}_{n,m}(r, t)$ corta con el eje de abscisas, si se tiene un l arbitrariamente alto, la resolución radial nunca será suficiente como para representar de forma precisa la función.

Existen diferentes formas abarcar este tipo de problemas numéricos. La primera y más sencilla sería aumentar el número de nodos de la malla radial, con el consecuente coste computacional. Además, aumentar el número de nodos radiales únicamente retrasaría el problema. Para evitar esto, se puede introducir un nuevo término en la ecuación diferencial de forma que trate de evitar la aparición de esos picos. Esto se consigue introduciendo el siguiente término en la ecuación diferencial asociada a las fluctuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{n}}{dt} - \rho_s^2 \frac{d\nabla_{\perp}^2 \hat{n}}{dt} + V_{*n} \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} + D_{\text{eff}}^m \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial \theta^2} - \frac{c_s^2}{\nu_i} \nabla_{\parallel}^2 \hat{n} \\ - L_n D_{\text{eff}}^m \left[\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_{\perp} \hat{n} \\ + \tilde{D}_r \frac{\partial^2 \hat{n}}{\partial r^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

siendo \tilde{D}_r un valor positivo que se impone previamente denominado como *difusividad numérica*.

En el siguiente ejemplo se explica el sentido de la introducción de este término. Sea $f(r, t)$ una función en dos variables y sean las dos siguientes ecuaciones diferenciales, sin y con el término difusivo (se distinguen las dos ecuaciones por f_a y f_b) :

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a(r, t) = A(r, t) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_b(r, t) = A(r, t) + \frac{\partial^2 f_b(r, t)}{\partial r^2}, \quad (3.24)$$

donde $A(r, t)$ representa una serie de términos cualquiera de la ecuación diferencial.

Si se sustituye la derivada temporal por las diferencias finitas en un intervalo de tiempo, que es lo que se realiza numéricamente:

$$\frac{f_a(r, t + \Delta t) - f_a(r, t)}{\Delta t} = A(r, t) \quad \frac{f_b(r, t + \Delta t) - f_b(r, t)}{\Delta t} = A(r, t) + \frac{\partial^2 f_b(r, t)}{\partial r^2}, \quad (3.25)$$

y despejando se obtiene:

$$f_a(r, t + \Delta t) = A(r, t)\Delta t + f_a(r, t) \quad f_b(r, t + \Delta t) = A(r, t)\Delta t + f_b(r, t) + \frac{\partial^2 f_b(r, t)}{\partial r^2}. \quad (3.26)$$

Es decir, que al introducir el término difusivo $\frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial r^2}$, aquellos puntos radiales r_i para los que $\frac{\partial^2 f(r_i, t)}{\partial r^2} > 0$, al realizar el paso temporal, verificarán que $f_b(r, t + \Delta t) > f_a(r, t + \Delta t)$. De la misma manera, si

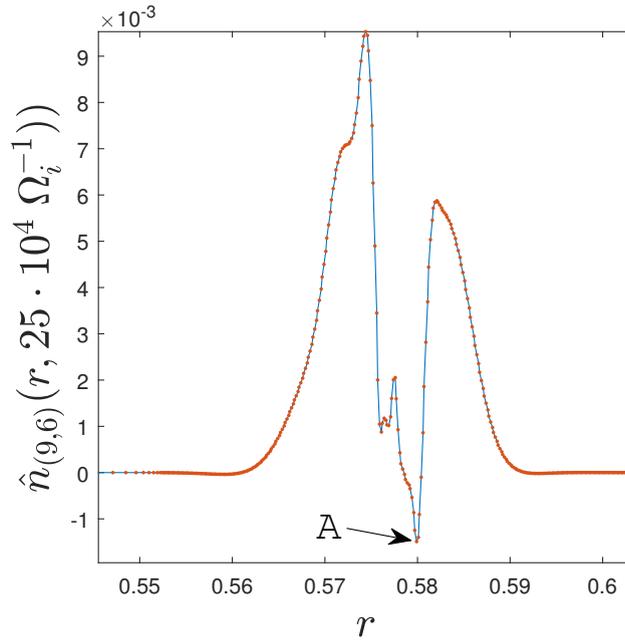


Figura 3.1: Ejemplo de una función que provocaría la inestabilidad numérica que soluciona la difusividad radial.

$\frac{\partial^2 f(r_i, t)}{\partial r^2} < 0$ verificarán $f_b(r, t + \Delta t) < f_a(r, t + \Delta t)$. Por tanto, si se tiene un caso como el de la Figura 3.1, si se considera el término difusivo, el valor de la función en el punto A tras un paso temporal será superior a que si no se tuviera en cuenta, haciendo que la función se suavice.

Ahora bien, hay que tener en cuenta en todo momento que se ha manipulado la ecuación diferencial del modelo, y si el peso que se le da al término difusivo \tilde{D}_r es muy grande, deja de tener sentido. Por tanto, hay que comprobar que los resultados que arroja el código incluyendo la difusividad numérica no sean muy diferentes a los que arroja el código sin difusividad, es decir, que sigan teniendo sentido físico.

3.4. Análisis del tiempo de ejecución

Se realiza un estudio de los tiempos de ejecución del código en función del número de modos incluidos. Para ello, se ejecuta el programa incluyendo el término no lineal. Tal y como muestra la Figura 3.2, se pueden distinguir dos partes esenciales: una primera, donde se incluyen hasta alrededor de 100 modos, que escala de forma aproximadamente lineal ($\propto n^{1.16}$), y una segunda donde el tiempo tiene una dependencia con el número de modos de forma aproximadamente cuadrática ($\propto n^{1.978}$). Esto se ajusta a lo esperado: la dependencia cuadrática al número de modos se debe al sumando no lineal de la Ecuación 2.10, que en esencia es:

$$\left[\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \right) \times \hat{z} \right] \cdot \nabla_{\perp} \hat{n}. \quad (3.27)$$

Precisamente, el producto escalar entre los dos vectores, por una parte, el vector que proviene del producto vectorial y por otra, el vector del gradiente perpendicular de la densidad, hace que se tenga que realizar el producto entre dos series de Fourier, que a la hora de realizar las simulaciones están truncadas a un número finito de modos n . En cualquier caso, según 3.8, este producto será otra serie de Fourier con los mismos modos, pero cada coeficiente de cada modo es una suma de n multiplicaciones de los modos de cada serie original, haciendo que en total, se necesiten realizar n^2 multiplicaciones de coeficientes.

Además, la evaluación del término no lineal se hace en la representación exponencial compleja 3.4. Por tanto, en cada paso temporal primero se realiza la transformación seno-coseno a exponencial compleja, se realiza la suma de convolución asociada al término no lineal, y se vuelve a transformar a la expresión seno-coseno. Sin embargo, el coste computacional de la transformación seno-coseno a exponencial compleja no es comparable a la suma de convolución.

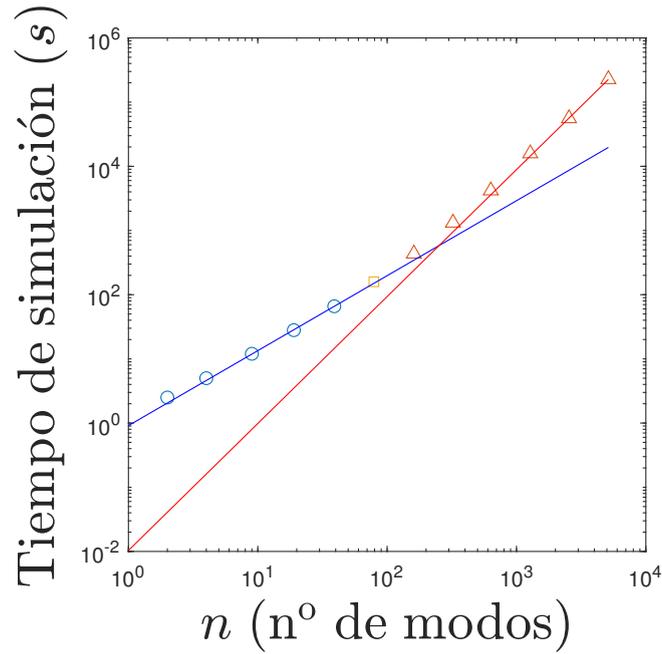


Figura 3.2: Tiempo de ejecución del programa dependiendo del número de modos incluidos. El ajuste al 95 % de confianza corresponde a $t(n) = (0,91 \pm 0,16) \cdot n^{(1,16 \pm 0,04)}$ para los cinco primeros puntos (\circ), y $t(n) = (1,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-2} \cdot n^{(1,978 \pm 0,05)}$ para los seis últimos (\triangle).⁴

Por último, esta dependencia cuadrática del tiempo de simulación solo se detecta al incluir un gran número de modos debido a que el código realiza más operaciones que no dependen cuadráticamente del número de modos (derivaciones, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, etc.) a parte de las sumas de convolución, y para n pequeños, el orden de coste computacional es similar. Conocer y tener en cuenta el coste computacional de un código es esencial a la hora de conseguir resultados numéricos.

⁴Las simulaciones han sido realizadas en la máquina Uranus de la Universidad Carlos III.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Estudio lineal

En esta sección se realizará un pequeño estudio sobre el comportamiento de las inestabilidades realizando simulaciones del código sin tener en cuenta el término no lineal. De esta forma, como la Ecuación 2.10 se trata de una ecuación lineal, tiene solución analítica, y se pueden comparar resultados analíticos y numéricos. Este estudio también proporcionará una cota para el número de modos que se deberán incluir en las simulaciones no lineales. Los valores de las difusividades (tanto numérica como del perfil de equilibrio) y de la fuente han sido nulas, dado que se estudiarán en el caso no lineal.

4.1.1. Única helicidad

Los perfiles y expresiones utilizados para la primera simulación se recogen en la Tabla 4.1. Se han graficado los perfiles de mayor interés para esa configuración de equilibrio en las Figuras 4.1 a 5.1.

Expresión/Valor	
$n_0(r) = 1 - r^2$	
$T_0(r) = 1 - r^2$	
$q(r) = 9,38 \cdot 10^{-1} + 1,69 \cdot r^2$	
$L_V = 1,15 \cdot 10^{-2}$	
$\epsilon(a) = 1,73 \cdot 10^{-1}$	
$\rho_s(0) = 2,60 \cdot 10^{-3}$	
$\nu_{i0} = 3,39 \cdot 10^{-6}$	
$\nu_{e0} = 1,99 \cdot 10^{-5}$	
Sin Shear flow	$\bar{V}_0 = 0$
Con Shear flow	$\bar{V}_0 = 9,04 \cdot 10^{-6}$
$\tilde{D}_r = 0$	
$\tilde{S}(r, t) = 0$	
$D_{\text{ext}} = 0$	
$\Delta t = 10$	
$\Delta r = 4 \cdot 10^{-4}$	

Tabla 4.1: Valores y expresiones de la primera simulación.

En la Figura 4.2a se representa tanto el término fuente del coeficiente del drive D_0 como el término disipativo c_s^2/ν_i . Estos términos dan una idea de en que zonas radiales se van a producir desestabilizaciones, en aquellas en el que el efecto del término fuente sea mayor que el disipativo.

De entre toda la infinidad de modos (m, n) se van a estudiar aquellos que tienen helicidad 1.5, es decir, debido a la expresión del factor de seguridad, se va a estudiar la estabilidad del plasma para los puntos alrededor de la coordenada radial r_0 que cumpla:

$$q(r_0) = 9,38 \cdot 10^{-1} + 1,69 \cdot r_0^2 = 3/2 \Rightarrow r_0 = 0,58. \quad (4.1)$$

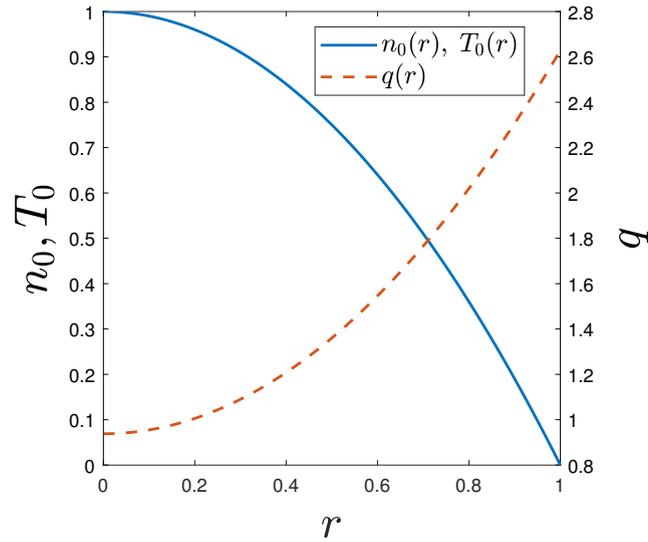


Figura 4.1: Perfiles de equilibrio normalizados de la densidad y temperatura y factor de seguridad de la Tabla 4.1.

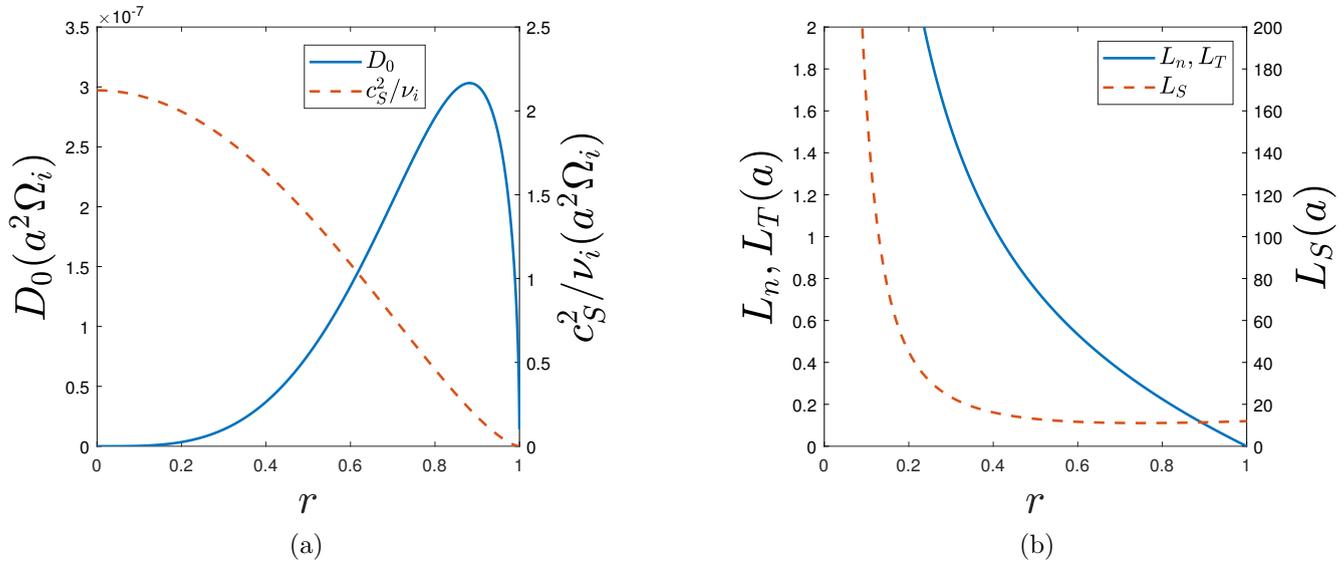


Figura 4.2: Perfil del coeficiente del drive y del término disipativo (a) y longitudes características del shear, densidad y temperatura (b) según los datos de la Tabla 4.1 .

El código, además de devolver como output los valores de $\hat{n}_{m,n}(r, t)$ de la Ecuación 3.6 para una serie de valores temporales (Figura 4.4), devuelve las tasas lineales de crecimiento y las frecuencias reales de oscilación de cada modo. Así pues, la correspondencia entre los valores analíticos, obtenidos mediante la relación de dispersión 2.14 y los numéricos es alta, tal y como se muestra en la Figura 4.5a. Los resultados analíticos han sido obtenidos mediante la Expresión 2.14 para el número de onda radial $l = 0$ mediante la función `fsolve` de Matlab.

Se realiza una segunda simulación según los parámetros de la Tabla 4.1 para el caso con shear flow y se representan sus tasas de crecimiento y sus frecuencias reales de oscilación en la Figura 4.7. Como se puede observar, la introducción de un perfil de velocidad de equilibrio en la dirección $\vec{\theta}$ provoca un cambio importante en las tasas de crecimiento, haciéndolas descender, y convirtiendo algunos de los modos que eran inestables en estables (modos con $m = 6, 9, 12, 72$). Por el contrario, las frecuencias reales de oscilación apenas sufren ninguna variación.

Por su parte, el desplazamiento del máximo, representado en la Figura 4.6, se ajusta a los resultados

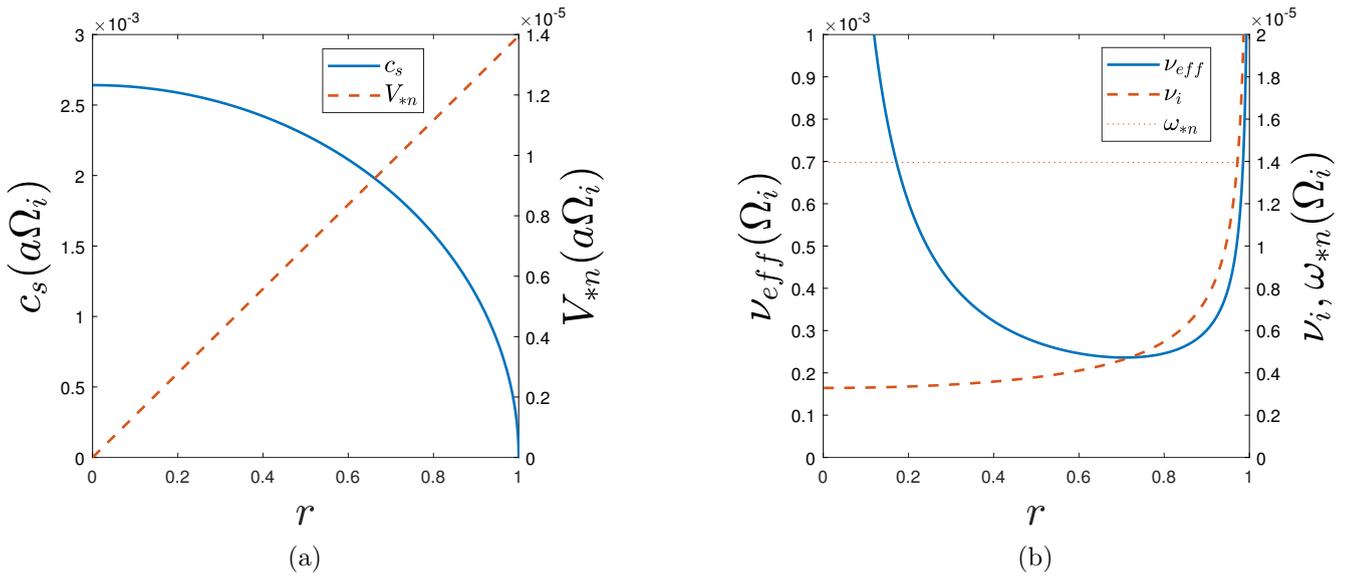


Figura 4.3: Perfiles de la velocidad sónica iónica y de la velocidad de deriva diamagnética (a) y perfiles de la frecuencia de colisión electrónica efectiva, frecuencia de colisión iónica y de deriva diamagnética (b) según los datos de la Tabla 4.1 .

analíticos. Se observa que son desplazamientos positivos, es decir, al incluir el shear flow, los máximos se encuentran mas cercanos a $r = 1$ que en el caso sin shear flow. Al provocar este desplazamiento, y conseguir el máximo en un punto radial r_s tal que $n - \frac{m}{q(r_s)} \neq 0$, el término estabilizante de la Ecuación DTEM 2.10 es no nulo, y por tanto, tiene sentido que las tasas lineales de crecimiento disminuyan y aumente la estabilización del plasma.

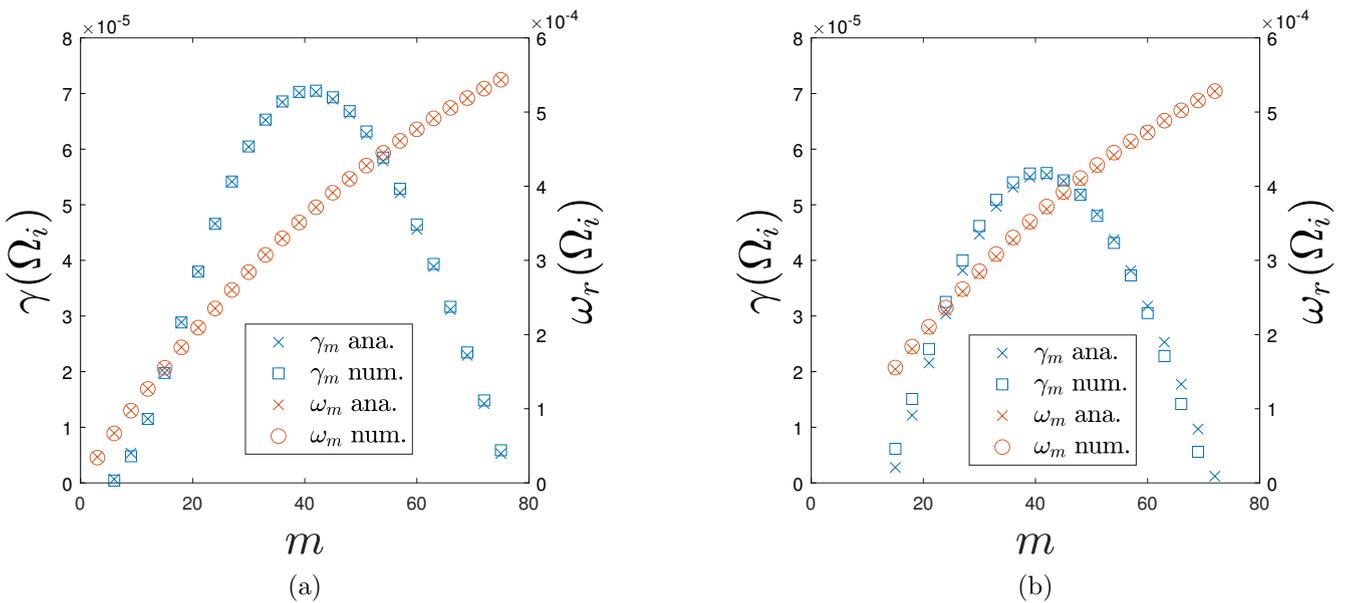


Figura 4.5: Correspondencia entre las tasas de crecimiento y frecuencias reales de oscilación analíticas (cruces) y numéricas (figuras huecas) sin perfil de equilibrio (a) y con perfil de velocidad de equilibrio (b) para los datos de la Tabla 4.1 y modos con helicidad 1.5.

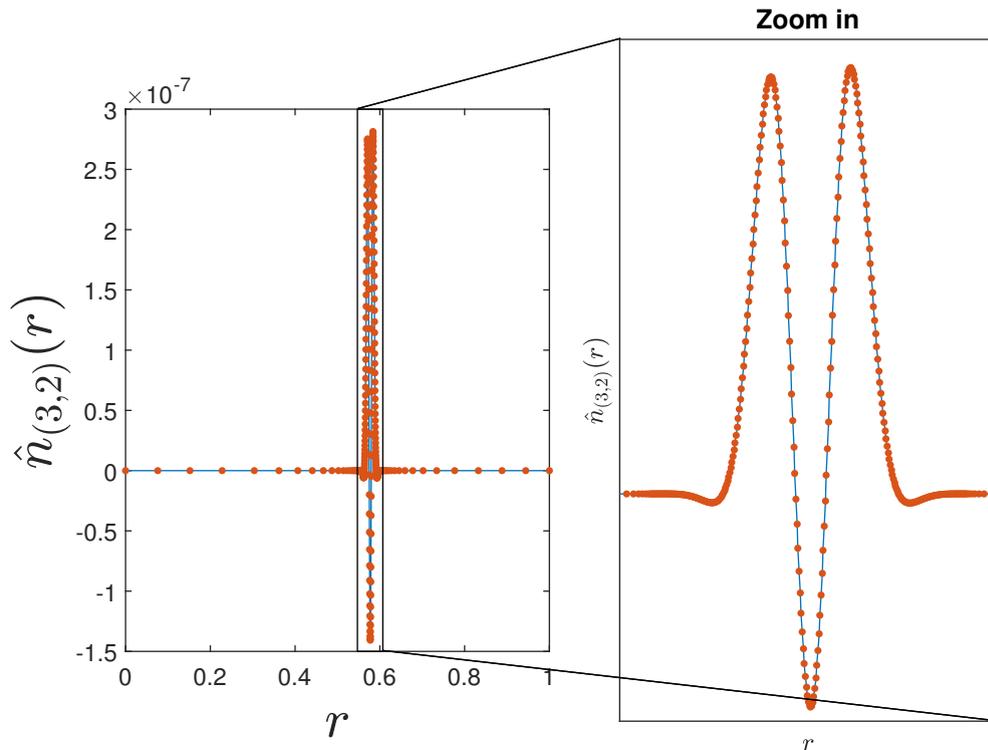


Figura 4.4: Output del código. Valor de la densidad para el modo (3,2) para los datos de la Tabla 4.1 en el tiempo $t = 5 \cdot 10^5 \Omega_i$.

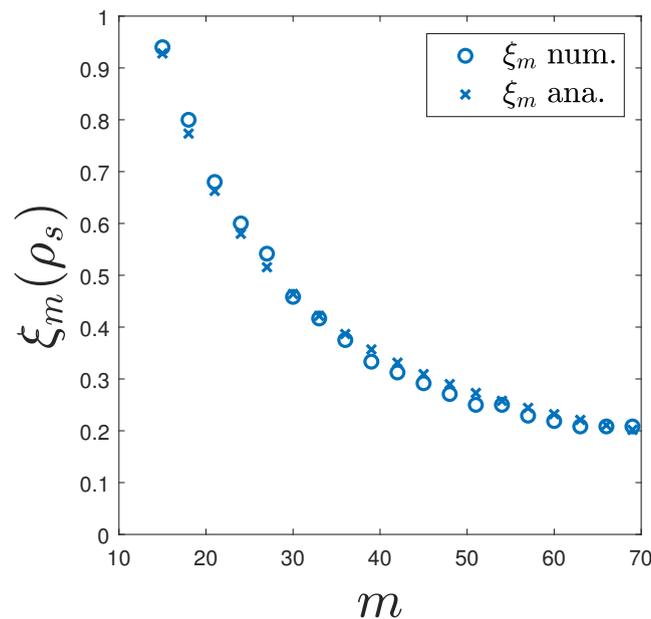


Figura 4.6: Desplazamientos del máximo de las funciones $\hat{n}_{m,n}(r)$ para el caso con shear flow..

4.1.2. Distintos perfiles de densidad y temperatura

Se ha realizado un pequeño estudio sobre la dependencia de la desestabilización de los distintos modos dependiendo de los perfiles de densidad y temperatura. Tal y como se comentó en la introducción de la Ecuación 2.10, la desestabilización del plasma depende fuertemente de los gradientes de densidad y temperatura y se suele decir que los gradientes son la fuente de desestabilización de este modelo. Esa dependencia se debe principalmente al coeficiente del drive, que tal y como se recoge en la Tabla 2.1 es

según:

$$D_0(r) \propto \frac{T_0(r)^{2,5}}{n_0(r)^2} \left| \frac{dn_0(r)}{dr} \frac{dT_0(r)}{dr} \right|. \quad (4.2)$$

Sin embargo, en la ecuación no aparece este término, sino el coeficiente del drive efectivo, dependiente del número de onda poloidal de cada modo:

$$D_{\text{eff}}^m(r) = \frac{D_0(r)}{1 + (k_\theta D_0(r)/V_{*n}(r))^2}. \quad (4.3)$$

Por tanto, se puede deducir, antes de realizar las simulaciones, que la desestabilización del plasma será mayor en aquellos casos en el que los gradientes de densidad o temperatura sean mayores, pero, para un coeficiente del drive similar, la desestabilización tenderá a cero para grandes números de onda m . Gracias a esta última dependencia se podrá truncar el número de modos a simular en el estudio no lineal del modelo.

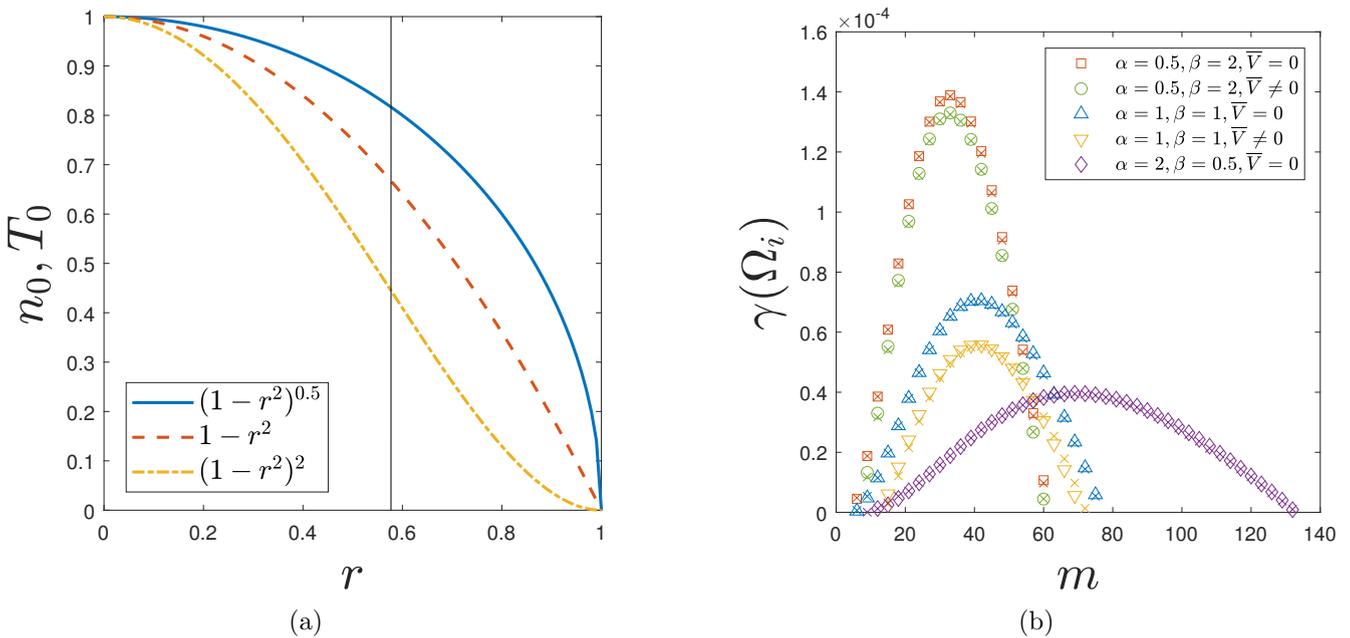


Figura 4.7: Distintos perfiles de densidad y temperatura y la superficie racional estudiada y línea donde cae la superficie racional (a) y Tasas de crecimiento lineales simuladas (figuras huecas) y analíticas (\times) para cinco simulaciones distintas. En caso de que $\bar{V} \neq 0$ se tiene el mismo shear flow que en la Tabla 4.1 (b).

Se ha estudiado el comportamiento de los diferentes modos para los perfiles de densidad y temperatura de la Figura 4.7a. Antes de realizar las simulaciones, se puede predecir el comportamiento de estas gracias a la dependencia de la Expresión 4.2 y si se supone que los perfiles de densidad y temperatura son $T_0(r) = (1-r^2)^\alpha$ y $n_0(r) = (1-r^2)^\beta$ queda:

$$D_0(r) \propto \alpha\beta(1-r^2)^{3,5\alpha-\beta-2}. \quad (4.4)$$

Por tanto, el coeficiente del drive, al depender más del perfil de temperatura que del de densidad, no se comportará igual al intercambiar los perfiles de densidad y temperatura. De esta forma si se toma $(\alpha, \beta) = (1/2, 2)$ la desestabilización será mayor que para $(\alpha, \beta) = (2, 1/2)$. Esto es comprobado en las simulaciones representadas en la Figura 4.7b.

Además, se puede observar que el número de modos inestables no es igual en cada simulación, es decir, depende de los perfiles de densidad y temperatura. Como se puede observar, hay más número de modos inestables cuanto menor sea el factor β . Además, el comportamiento ante un perfil de velocidad de equilibrio no es igual: mientras que para el caso con $\alpha = 1/2$ los resultados con y sin shear flow son

prácticamente iguales, para el caso con $\alpha = 2$ es tal que con el mismo perfil de shear flow, todos los modos son estables (y por eso no han sido graficados). Por tanto, el efecto del shear flow es mayor cuanto mayor sea α .

4.1.3. Varias helicidades

Hasta ahora, solo se han estudiado los modos con helicidad $3/2$, es decir, se han estudiado una serie de modos (m, n) cuyas funciones de densidad $\hat{n}_{m,n}(r, t)$ son distintas de cero en un pequeño intervalo alrededor de $r_0 = 0,58$ tal y como se puede observar en la Figura 4.4. Sin embargo, otros modos con helicidades cercanas a $3/2$ provocarán también perturbaciones de la densidad distintas de cero para $r = r_0$ y sus alrededores. Por la densidad de los números racionales, van a existir infinitas helicidades cuya superficie racional esté lo suficientemente cercana a r_0 , lo que en un principio puede parecer que para obtener un valor razonable de la inestabilidad en un punto de la malla radial, se va a necesitar realizar infinitos cálculos para infinitos modos y helicidades. Pues bien, en esta sección se va a intentar acotar el número de helicidades a estudiar, viendo la dependencia de la estabilidad con los números de onda.

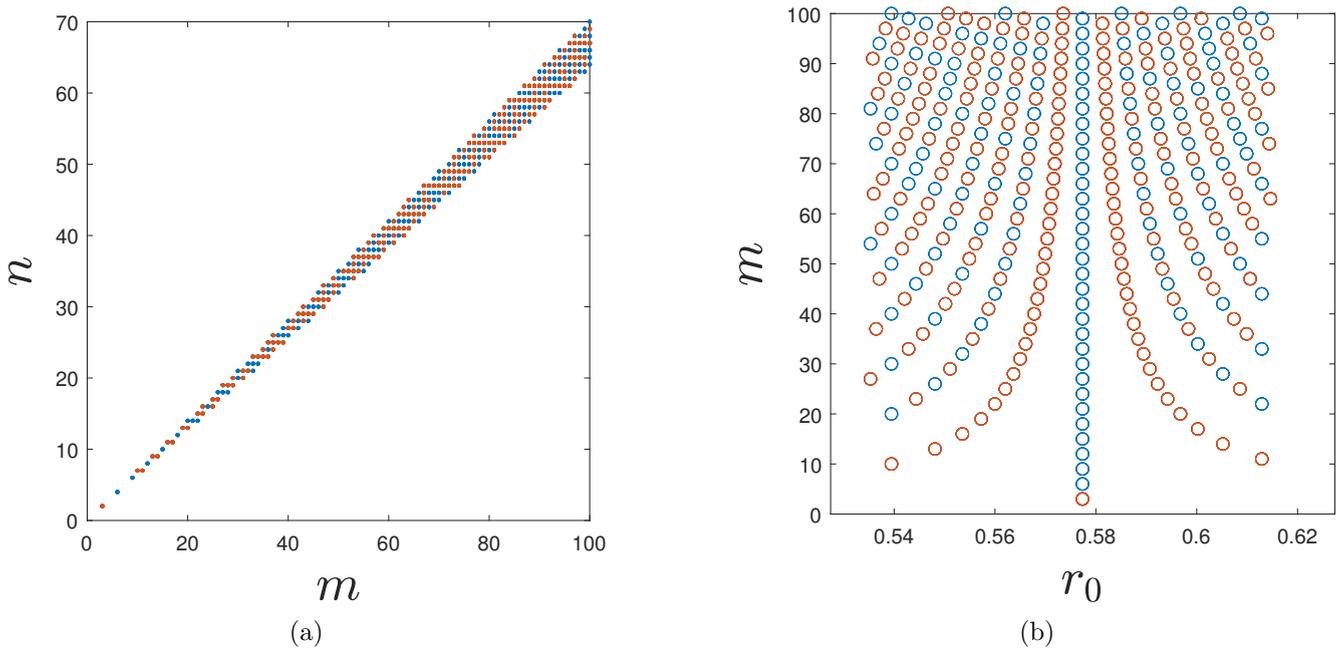


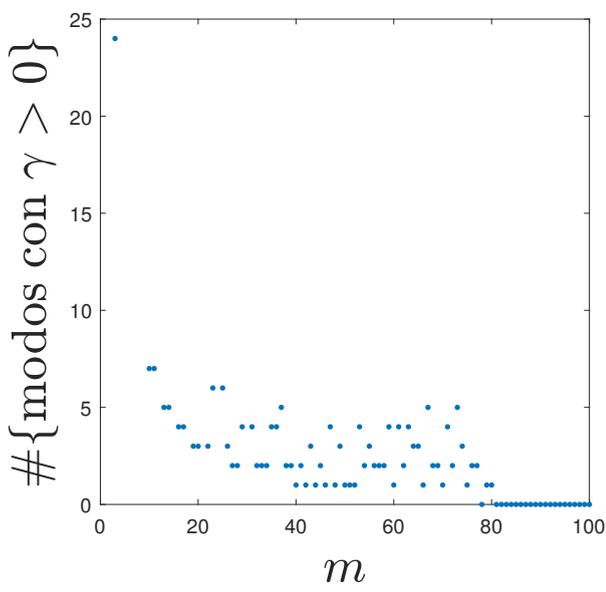
Figura 4.8: Modos con $m < 100$ cuya superficie racional cae en el intervalo $(0,535, 0,615)$ (a) y posición de la superficie racional de cada modo de la Figura 4.8a (b). Se representan en naranja los primeros modos de cada helicidad.

Se va a considerar que aquellos modos cuya superficie racional caiga fuera del intervalo $(0,535, 0,615)$ nunca van a tener una densidad distinta de cero en $r = r_0$. En la Figura 4.8a se representan todos los modos con $m < 100$ cuya superficie racional precisamente cae en este intervalo. En la Figura 4.8b se representa cada superficie racional de cada uno de los anteriores modos.

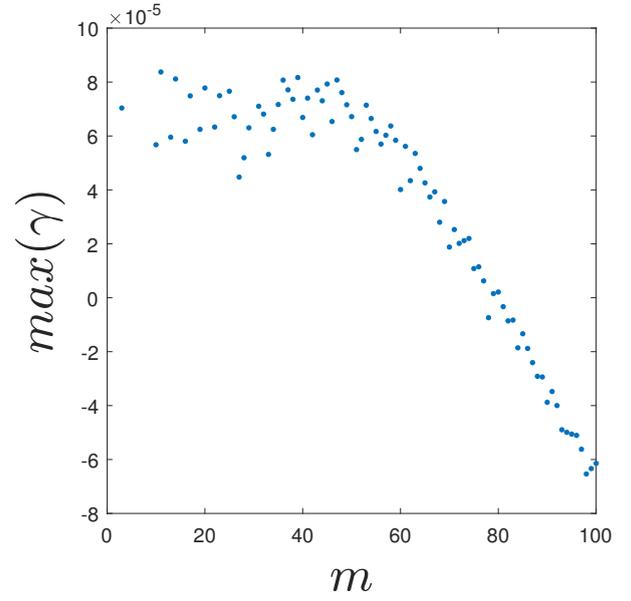
Además, se ha estudiado, para cada helicidad, cuantos modos son inestables y cual es el valor máximo de la tasa lineal de crecimiento en cada caso, tal y como muestran las Figuras 4.9a y 4.9b. Se puede observar que ambos valores decrecen mientras m crece. De hecho, a partir de helicidades cuyo m mínimo¹ sea 81, todos los modos son estables.

Por tanto, a pesar de que la expansión de Fourier tiene infinitos términos, la gran mayoría de ellos se anularán para tiempos grandes, quedando un número finito de términos no nulos, que son los que nos interesan para estudiar las perturbaciones del plasma.

¹Se dice m mínimo de una helicidad h a aquel m más pequeño que cumpla $h = \frac{m}{n}$ para algún n positivo.

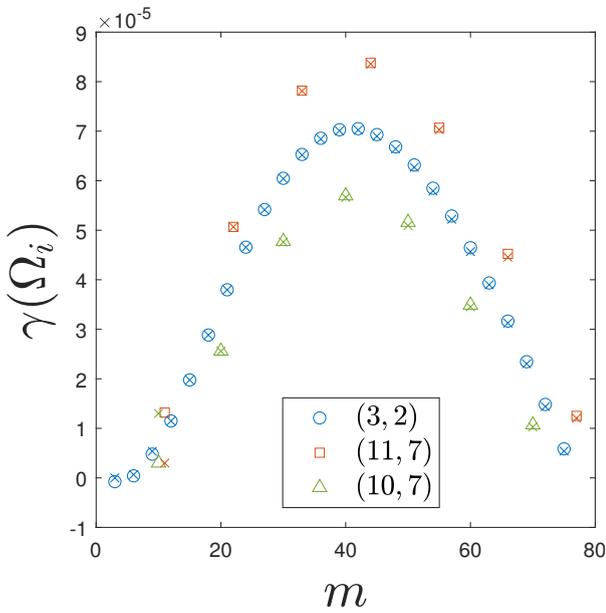


(a)

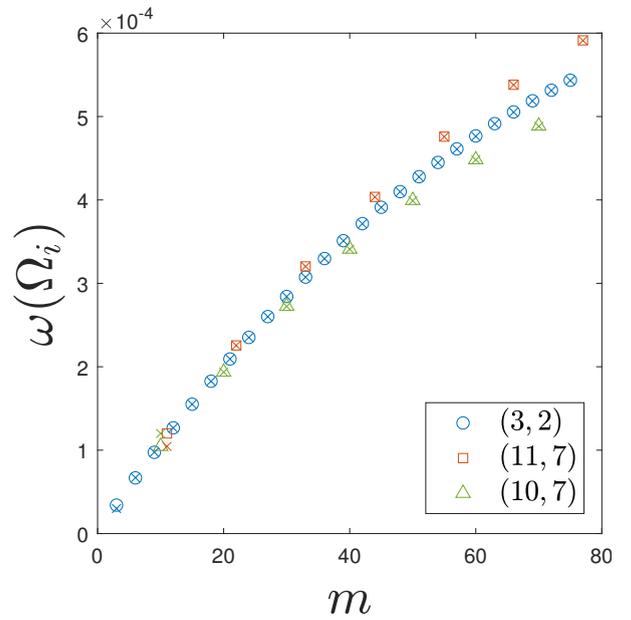


(b)

Figura 4.9: Número de modos inestables de la Figura 4.8a de cada helicidad en función del m mínimo de cada helicidad (a) y máximo valor de γ entre los modos cuya helicidad tiene el mismo m mínimo (b).



(a)



(b)

Figura 4.10: Tasas lineales de crecimiento simuladas (figuras huecas) y analíticas (cruces) para tres helicidades(a) y frecuencias reales de oscilación simuladas (figuras huecas) y analíticas (cruces) para tres helicidades (b).

Tal y como se muestra en la Figura 4.8a, las dos helicidades con números de onda más pequeños que cumplen esta condición son las helicidades $10/7$ y $11/7$. Por eso se ha representado las Figuras 4.10a y 4.10b, donde se recogen las diferentes tasas de crecimiento y frecuencias de oscilación. Se obtienen unos resultados que son compatibles con los resultados obtenidos en la anterior Sección 4.1.2. Para el caso de la helicidad $10/7$, su superficie racional tiene un valor menor que para el caso $3/2$, y por tanto el gradiente de la densidad y de la temperatura es menor para los puntos alrededor de esta nueva helicidad que para el caso $3/2$, haciendo que las tasas lineales de crecimiento sean menores. Del mismo modo, para el caso $11/7$, al tener un gradiente mayor en los puntos de la superficie racional, las tasas de crecimiento son mayores.

4.2. Estudio no lineal

Las simulaciones que se han realizado hasta ahora se han realizado modo a modo, de forma independiente, y tomando como ecuación diferencial únicamente los cuatro primeros términos de la Ecuación 2.10. Es decir, se había considerado que la densidad de equilibrio tenía una determinada expresión, sin embargo, solo evolucionaba en el tiempo uno de los sumandos de la expansión de Fourier. La razón de esto era la existencia de la Expresión 2.14 que permitía comparar los resultados del código con los analíticos. Sin embargo, la validez de estos resultados no es más que para tiempos pequeños (en comparación con la frecuencia ciclotrónica iónica) en los que los términos de mayor orden de la Ecuación 2.10 no cobran importancia, y las interacciones entre modos pueden ser despreciadas.

Sin embargo, si se quieren obtener resultados para tiempos mayores, se debe tener en cuenta la interacción entre los modos gracias al término no lineal de la Ecuación 2.10. En este caso, además de no tener una expresión analítica con la que comparar resultados, surgen problemas numéricos a la hora de realizar las simulaciones y los tiempos de simulación son mucho mayores tal y como se ha estudiado en la Sección 3.4.

Por eso es importante el estudio lineal realizado en la sección anterior, donde se obtuvieron qué modos de la densidad fluctuante no se anulan para un determinado valor radial. Ya se ha visto que solamente un número finito (y de hecho, pequeño) de ellos no tiene densidad fluctuante distinta de cero para una determinada superficie racional a estudiar. La elección de un número mayor o menor de modos a simular está directamente relacionado con la resolución angular que se quiera obtener. De la misma manera que la malla radial influye en la resolución radial, los modos permiten diferenciar puntos en las direcciones θ y, debido a la geometría utilizada, z (o equivalentemente ζ).

4.2.1. Única helicidad

Al realizar simulaciones con varios modos, e incluir el término no lineal de la ecuación diferencial, el análisis de la estabilidad de la perturbación del plasma mediante las tasas lineales de crecimiento modo a modo deja de tener sentido, y es preferible analizar las simulaciones mediante la evolución de la energía de la fluctuación a lo largo del tiempo. Tal y como se había definido en la Ecuación 2.13, la fluctuación de la densidad tiene una energía asociada. En la Figura 4.11 se representa la evolución de la energía para diferentes valores de la difusividad numérica. Como se puede observar, la simulación con un valor de $\tilde{D}_r = 0$ sufre problemas computacionales en los últimos pasos temporales, donde la energía se hace infinito, sin ningún sentido físico. El mismo problema sufre la simulación con un valor de $\tilde{D}_r = 10^{-12} a^2 \Omega_i$, lo que muestra que un valor de la difusividad numérica demasiado pequeño no es capaz de solucionar el problema. Por otro lado, los valores de $\tilde{D}_r \in \{10^{-10}, 10^{-11}\}$ consiguen solventar el problema, mientras que el valor de $\tilde{D}_r = 10^{-9}$ es demasiado alto y desvirtúa totalmente los resultados.

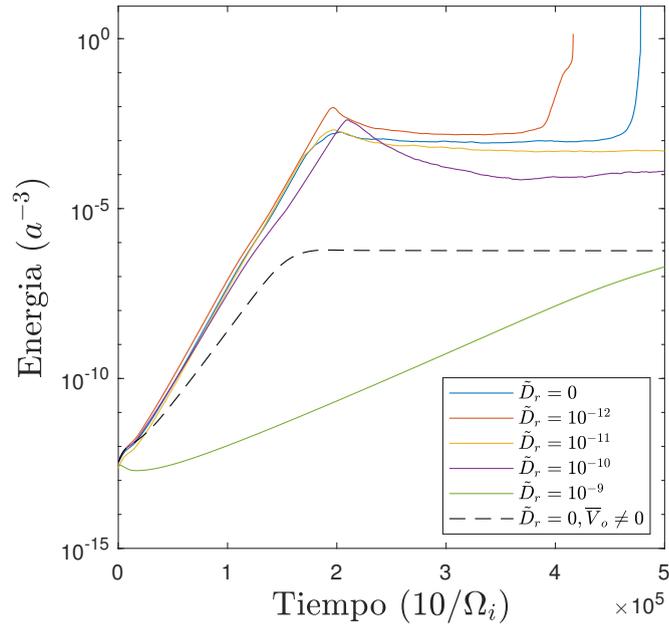


Figura 4.11: Evolución de la energía de las fluctuaciones dependiendo de la difusividad radial introducida. Han sido utilizados los datos de la Tabla 4.1 sin shear flow para las líneas continuas, y con $\bar{V} = 9,037 \cdot 10^{-6}$ para la línea discontinua. En todos los casos, se han incluido los modos (m, n) , $(-m, -n)$ de la helicidad $3/2$ desde $m = 3$ hasta $m = 81$.

En cualquier caso, el análisis de la energía es claro, existe una fase lineal, hasta alrededor de $t = 2 \cdot 10^5 (10 \Omega_i)$, en la que la energía de la perturbación crece, pero a partir de ese instante, la perturbación mantiene una energía constante. Es en estos pasos temporales cuando los términos no lineales, de segundo orden, hacen interaccionar los distintos modos de la helicidad, provocando su estabilización.

Se puede obtener, a partir de las expresiones $\hat{n}_{m,n}(r)$, la expresión de la densidad $n(r, \theta, z)$ simplemente sustituyendo en la Expresión 3.6. En la Figura 4.13 se representa el corte para tres tiempos distintos de la evolución. Como se puede observar, en los tiempos iniciales, la perturbación empieza a excitarse, y para un tiempo alrededor de $t = 2 \cdot 10^5 (10 \Omega_i)$, las fluctuaciones son máximas. Para tiempos mayores, la perturbación se estabiliza. La analogía con la Figura 4.11 es clara.

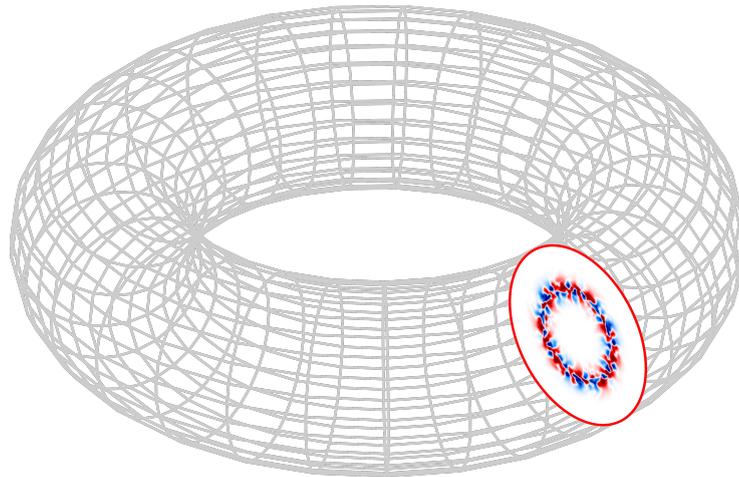


Figura 4.12: Representación del corte en $z = 0$ de la densidad fluctuante.

Al igual que en el análisis lineal, resulta interesante realizar la misma simulación con un perfil de velocidad de equilibrio de cizalla. Se escoge el mismo valor que en el caso lineal (Tabla 4.1). En este caso se observa que en los primeros instantes de la evolución, durante la fase lineal, la pendiente de la energía es menor. Este resultado es compatible con el estudio lineal, en el que se había observado que las tasas

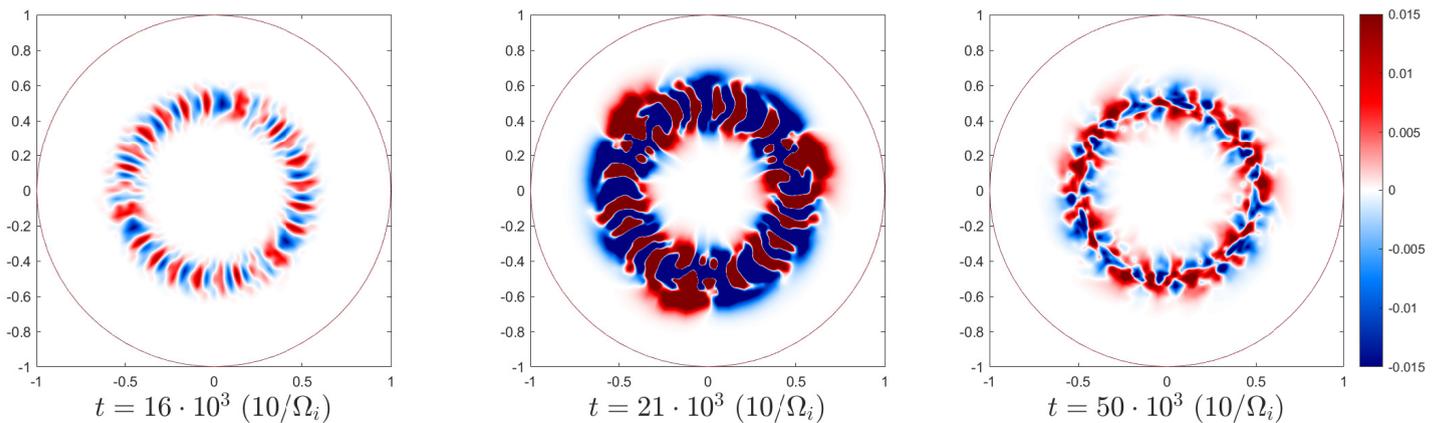


Figura 4.13: Representación de la densidad en el corte del toro en $z = 0$ para la simulación con $\tilde{D}_r = 10^{-10}$ de la Figura 4.11 en tres tiempos distintos.

lineales de crecimiento eran más bajas y había menos número de modos inestables al considerar el shear flow. Sin embargo, la inclusión de un perfil de velocidad de equilibrio apenas influye en el valor de la energía en la que se estabiliza la fluctuación.

4.2.2. Varias helicidades

Como ya se introdujo en el caso lineal, incluir otras helicidades en el cálculo añade otros modos (sumandos) a la expresión del sumatorio de la densidad, cuyas superficies racionales (y por tanto los puntos radiales en los que la fluctuación es distinta de cero), no son las mismas que la superficie racional de la helicidad $h = 3/2$. Como ya se vio, una gran mayoría de esos sumandos son cero en el punto radial que estamos estudiando, así que elegir los modos adecuados es clave en este tipo de simulación. Aunque el estudio que fue realizado en la Sección 4.1.3 no se incluyó al sumando no lineal de la ecuación diferencial, nos sirve de base para elegir las helicidades y el número de modos de cada helicidad que se van a incluir en el cálculo. El número total de modos a incluir no debe ser muy elevado, debido a que, tal y como muestra la Figura 3.2, el incluir, por ejemplo, 300 modos, conllevaría casi tres horas de ejecución². Vamos a establecer un límite de 100 modos, lo que aproximadamente, conllevaría poco más de media hora de ejecución.

Gracias a las Figuras 4.8, 4.9a y 4.9b, se han escogido un conjunto de modos y helicidades, teniendo en cuenta tanto la proximidad de cada superficie racional al r_0 que estamos estudiando (Figura 4.8) como la magnitud de la inestabilidad (Figura 4.9b). La forma de establecer los límites de los modos a incluir ha sido acotando el número poloidal m . No se ha incluido ningún modo (m, n) con $m > 100$ y se han escogido los 100 modos cuyas superficies racionales son más cercanas a la del modo $(3, 2)$ ($r_0 = 0,58$).

Así se obtiene la Figura 4.14, donde se muestra el perfil de equilibrio al inicio y al final de la simulación. Se observa que este ha cambiado y se ha producido un transporte de materia hacia radios mayores. También se observa que, en la superficie racional, el perfil se ha relajado completamente, haciendo que su pendiente sea prácticamente nula. Y esta es una de las propiedades de este modelo, la propia interacción no lineal entre modos hace que las fuentes de inestabilidad, que como ya se ha comentado son los gradientes de densidad y temperatura, tiendan a desaparecer, provocando, por una parte, un transporte turbulento radial de materia, y por otra, que los gradientes aumenten en zonas cercanas a la propia superficie racional, lo que provocaría nuevas fluctuaciones pero ligeramente desplazadas. Por tanto, se puede considerar que el propio sistema es capaz de relajarse localmente (en este modelo, solo puede relajar la densidad mientras que la temperatura está fija), pero provoca nuevas excitaciones en las regiones adyacentes. Este tipo de comportamientos son propios de avalanchas, y la perturbación se propaga radialmente en ambos sentidos.

²Las simulaciones de la Figura 3.2 han sido realizadas en una máquina aproximadamente 10 veces más rápida que el computador donde se han realizado el resto de simulaciones

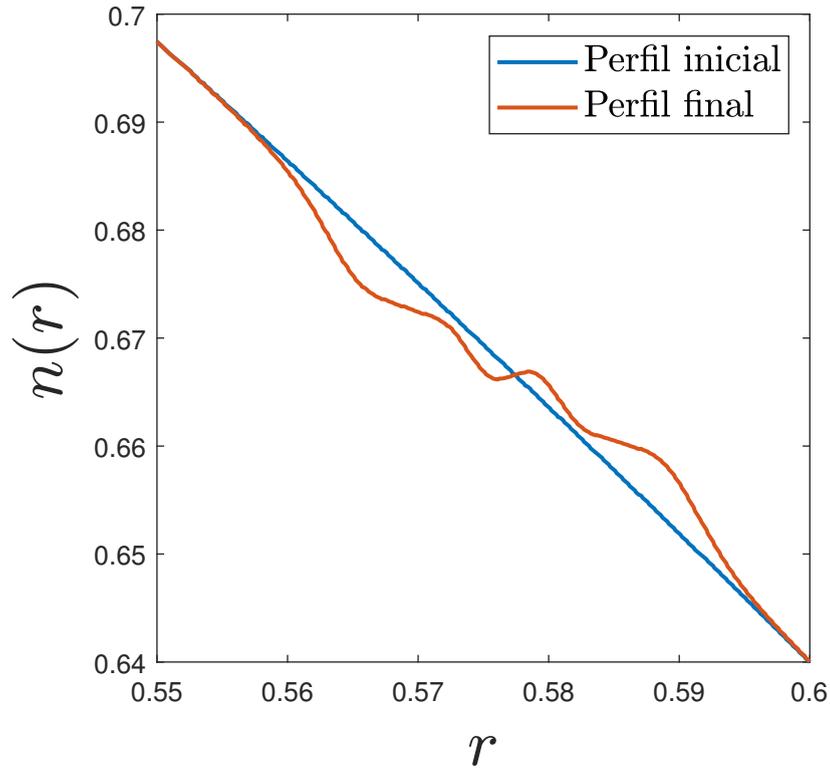


Figura 4.14: Perfil de densidad de equilibrio inicial y final.

Si se deseara realizar una simulación realista se deberían incluir un conjunto de modos cuyas superficies racionales estuvieran distribuidas en todo punto radial r , sin embargo, la Figura 4.14 nos proporciona una información clave para la próxima sección, la longitud característica crítica de la densidad en el punto radial r_0 , es decir, el valor $L_n^c(r_i)$. Este valor supone un umbral de inestabilidad turbulento no lineal, y es el valor de la longitud característica de la densidad cuando el perfil se estabiliza, y es un valor a partir del cual, si en algún tiempo t se tiene la siguiente desigualdad:

$$L_n(r_0, t) < L_n^c(r_0), \quad (4.5)$$

el sistema se relajará en la superficie racional.

Capítulo 5

Estudios estadísticos

Todos los capítulos previos a este consisten, básicamente, en una descripción del funcionamiento del código, y la obtención y comparación de resultados obtenidos por el mismo, comprobando que el código produce transporte radial neto de plasma. En ningún momento se ha hecho uso tanto de la difusividad del perfil de equilibrio $D_{\text{ext}}(r)$, como de la fuente externa $\tilde{S}(r, t)$ que son, al fin y al cabo, dos términos de la ecuación diferencial del perfil de equilibrio (Ver Ecuación 2.11 y Tabla 2.1). En este capítulo se va a hacer uso de herramientas estadísticas para estudiar la naturaleza del transporte de materia en función de estos dos términos.

Uno de los principales inconvenientes del confinamiento magnético de plasmas de fusión nuclear, y al fin y al cabo una de las razones por las que todavía no se ha conseguido desarrollar esta tecnología, es el transporte radial de materia que sufren [18]. Ya se ha visto que este código recoge esta propiedad del plasma (Figura 4.14). Hasta ahora se había considerado un término difusivo nulo $D_{\text{ext}}(r) = 0$, es decir, que el transporte y dinámica del sistema era exclusivamente turbulento. Sin embargo, la difusividad en los plasmas, en mayor o menor medida siempre está presente.

Una de las teorías que intenta explicar la naturaleza, y sobretodo magnitud del transporte turbulento en plasmas confinados magnéticamente, es la Criticalidad Auto-Organizada (SOC) [19]. El término SOC es un término muy amplio, aplicado a multitud de campos, y consiste en la propiedad que puede presentar un sistema dinámico donde un punto crítico se comporta como atractor, es decir, es la propiedad de un sistema que está fuera del equilibrio, sin embargo sus magnitudes (como pueden ser densidad o temperatura) no se alejan de unos determinados valores propios de un punto crítico.

Un sistema exhibe Criticalidad Auto-Organizada cuando es mantenido fuera del equilibrio por una fuente externa y adquiere un estado estacionario que presenta propiedades de autosimilaridad análogas a las de un punto crítico [10]. Precisamente, esto es lo que se va a comprobar en esta sección, en función de la difusividad del perfil. Los estudios estadísticos que se van a analizar son los siguientes: Función de autocorrelación y análisis R/S [20]. Los dos estudios consisten en analizar una función temporal y estudiar la memoria del sistema.

Por último, se va a realizar una estimación del coeficiente de difusión efectivo, es decir, se va a calcular el flujo del plasma y se va a considerar que es debido exclusivamente a la difusividad y así, mediante la Ley de Fick de la Ecuación 1.4, obtener el coeficiente difusivo en caso de no existir transporte turbulento.

La función temporal a estudiar podría ser la densidad fluctuante en un punto radial. Sin embargo, al elegir esta función, el estudio estadístico solo proporcionaría información de carácter local en un punto radial del plasma. Para evitar esto, y conseguir conclusiones de carácter global, la función temporal que va a ser estudiada va a ser la *actividad turbulenta*, y se designará como $g(t)$. Esta función indica para cada tiempo t el número de nodos de la malla radial que son inestables, es decir, el número de nodos $r_i \in [0, 1]$ tales que cumplen:

$$L_n(r_i, t) = \frac{n(r_i, t)}{\left| \frac{dn(r_i, t)}{dt} \right|} < L_n^c(r_i), \quad (5.1)$$

donde $L_n^c(r_i)$ es la longitud característica crítica de la densidad. Por lo tanto, la función $g(t)$ indica en cada momento el número de puntos radiales en los que el perfil de densidad no relajará, es decir, puntos

inestables.

Expresión/Valor
$n_0(r) = 1 - r^2$
$T_0(r) = 1 - r^2$
$q(r) = 1 + 2 \cdot r^2$
$L_V = 1,32 \cdot 10^{-2}$
$\epsilon(a) = 2 \cdot 10^{-1}$
$\rho_s(0) = 2,41 \cdot 10^{-3}$
$\nu_{i0} = 4,16 \cdot 10^{-6}$
$\nu_{e0} = 5 \cdot 10^{-6}$
$\bar{V}_0 = 0$
$\tilde{D}_r = 1 \cdot 10^{-10}$
$\tilde{S}(r, t)$: anchura= 10^{-3} , amplitud= 10^{-1} , probabilidad paso= 10^{-2}
$D_{\text{ext}}(r)$: $D_{\text{in}} = D_{\text{ex}} = 2,56 \cdot 10^{-8}$, $D_0 \in [2,5 \cdot 10^{-11}, 1,28 \cdot 10^{-8}]$, $\omega = 2 \cdot 10^{-3}$
$(m, n) \in [\frac{9}{5}, \frac{11}{5}]$, $n \leq 20$
$\Delta t = 50$
$\Delta r = 6,64 \cdot 10^{-4}$

Tabla 5.1: Valores y expresiones de la simulación.

5.0.1. Término fuente y difusividad del perfil de equilibrio

Modelizar la inyección de combustible en el reactor puede ser realizado de diversas formas, y por tanto, multitud de funciones $\tilde{S}(r, t)$ pueden ser utilizadas. Este término aparece en la Ecuación 2.11 como un término desestabilizante en el perfil de equilibrio, sin embargo no se especifica en ningún momento cual es la forma de esta función, salvo que depende únicamente del radio y del tiempo. Como ya se ha comentado, el objetivo de esta función es representar la inyección de combustible para llegar al estado estacionario del sistema, en el que el flujo de plasma que entra es el mismo que el que sale.

La función que se ha utilizado, básicamente es una función gaussiana, la cual está definida por dos parámetros fijos, la amplitud y anchura, y otro variable en el tiempo, el radio en el que está centrada. Además, este término no aparece en todos los pasos temporales, sino que solamente en algunos, bajo una probabilidad predefinida, reflejando así el ritmo en el que se inyecta combustible en el reactor. Para que la densidad no aumente indefinidamente debido a este término, el propio término fuente recoge la escapada del plasma con otra gaussiana de signo negativo pero de iguales parámetros. Así pues, este término evita que el sistema llegue a un equilibrio, perturbando la densidad cada cierto tiempo de forma controlada.

Por otra parte, escoger la función $D_{\text{ext}}(r)$ debe plasmar el carácter de la difusividad, la cual debe ser el principal responsable del transporte de materia en las zonas alejadas de la superficie racional a estudiar, pero debe tener menos importancia en las inmediaciones de la superficie racional. De nuevo, existen multitud de funciones que pueden parametrizar este carácter del plasma, sin embargo, se escoge una función que tenga un carácter suave en las transiciones de las regiones cercanas y lejanas a la superficie racional [10]:

$$D_{\text{ext}}(r) = D_0 + \frac{D_{\text{in}} - D_0}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{r - r_{\text{in}}}{\omega} \right) \right] + \frac{D_{\text{ex}} - D_0}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{r - r_{\text{ex}}}{\omega} \right) \right]. \quad (5.2)$$

Se representan en las Figuras 5.1a y 5.1b tanto el término fuente como la difusividad externa en el perfil de equilibrio.

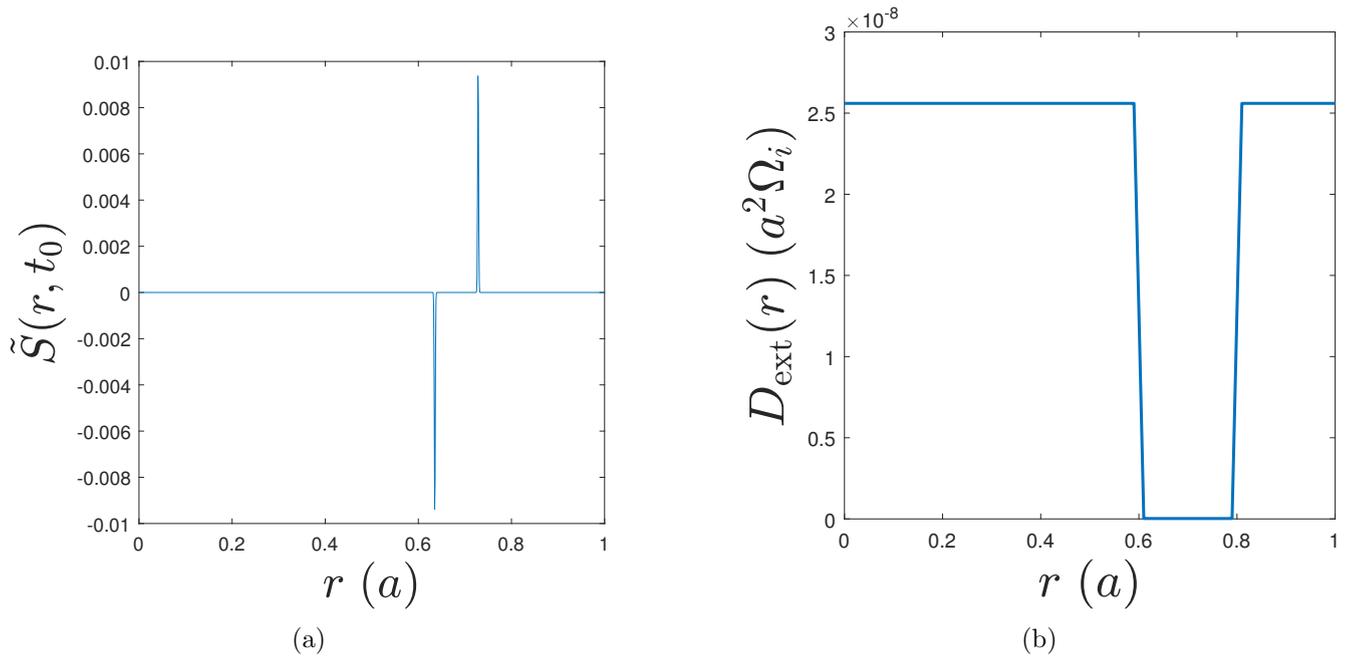


Figura 5.1: Término fuente en un paso temporal en la que es distinta de cero (a) y difusividad del perfil de equilibrio (b) con los parámetros de la Tabla 5.1.

Como se ha explicado anteriormente, la Criticalidad Auto-Organizada se consigue únicamente cuando el sistema esté en un estado estacionario, que en el caso del confinamiento, será cuando la cantidad de combustible que se inyecta (término fuente $\tilde{S}(r, t)$) iguale a la cantidad de materia que sale del confinamiento magnético. Como se puede observar en la Figura 5.2a, esta función muestra una tendencia durante los primeros pasos temporales, sin embargo, a partir de alrededor del paso temporal $4 \cdot 10^5$ esa tendencia desaparece. Por tanto, se va a considerar la función $g(t)$ solamente a partir de este punto. Esto se debe a que los primeros pasos están dominados por la parte lineal de la ecuación diferencial, mientras que los últimos dependen principalmente del término no lineal, y es precisamente, como se ha visto en las secciones previas, cuando el modelo recoge el transporte radial de materia, y por tanto, a partir de cuando tiene sentido comprobar la autosimilaridad del sistema.

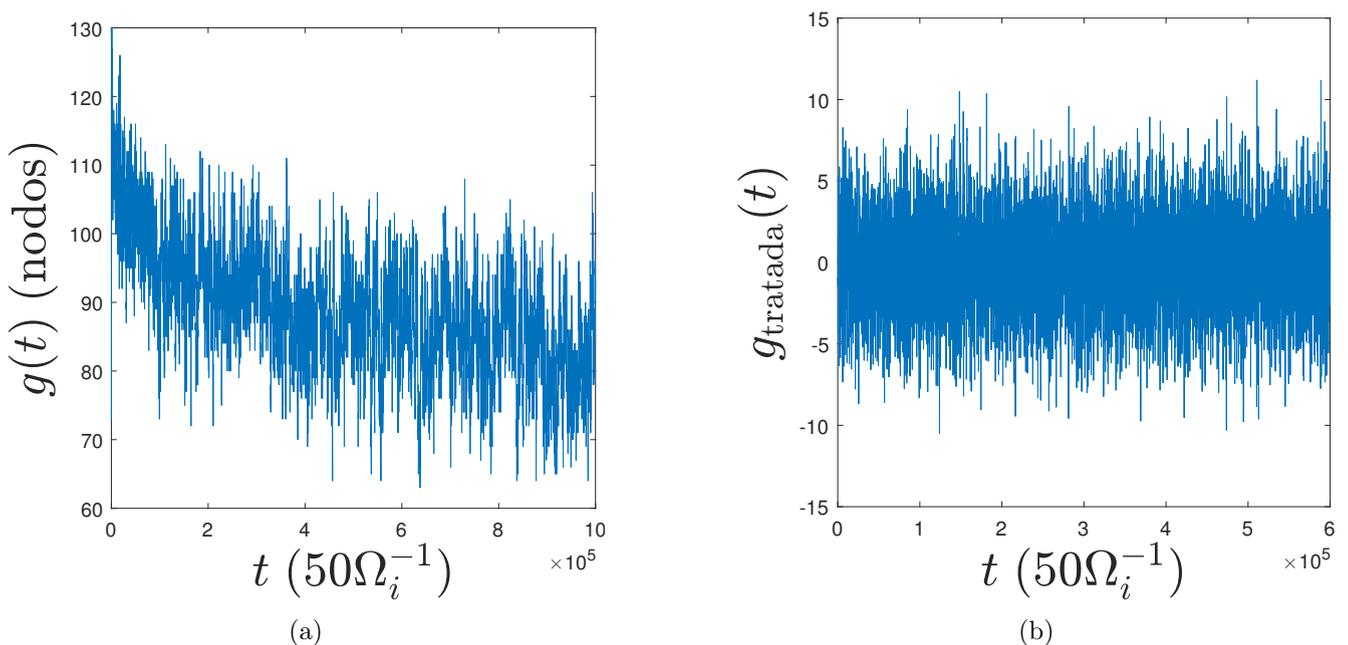


Figura 5.2: Función $g(t)$ sin tratar para la simulación con $D_{\text{ext}}(r) = 2,5 \cdot 10^{-11}$ (a) y una vez despreciados los primeros términos y normalizada con su entorno (b).

Además de despreciar los primeros términos de la función $g(t)$, se va a realizar una normalización local de la función, para así evitar tendencias de la función que dificultarían el estudio estadístico del sistema. Así, se va a restar el valor de cada punto por la media de la función en el intervalo de 1000 puntos a su alrededor. De esta manera se obtiene la Figura 5.2b.

5.1. Función de autocorrelación

Al tratarse de una técnica estadística, conviene enunciar las definiciones formales sobre variables aleatorias, y posteriormente particularizar para el caso de las funciones temporales que se quieren analizar. Por tanto, sean X, Y dos variables aleatorias reales con distribución conjunta y segundos momentos finitos. Se define la varianza de una variable aleatoria como [21]:

$$\sigma_X^2 \equiv \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2, \quad (5.3)$$

donde $E[X]$ es la esperanza. Se trata de un estadístico que mide la dispersión de una variable aleatoria.

Por otra parte, se define la covarianza entre las dos variables aleatorias como [21]:

$$\sigma(X, Y) \equiv \text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]. \quad (5.4)$$

Se trata de un estadístico que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias con respecto a sus medias. A partir de este estadístico se pueden obtener diferentes estadísticos que relacionan ambas variables, como es el caso del coeficiente de correlación [21]:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{(\text{Var}(X)\text{Var}(Y))^{1/2}}, \quad (5.5)$$

que es otro estadístico que mide la “fuerza” de la relación lineal entre las variables X e Y .

Sea ahora el caso en el que la variables aleatoria X es una función dependiente del tiempo t , $X = f(t)$ y sea $Y = f(t + k)$ con $k \geq 0$ una constante. En este caso, el coeficiente de correlación entre X e Y se denomina *autocorrelación con lag k* [22].

Como en nuestro caso se van a tener una serie de valores en una serie discreta de puntos temporales $\{f_i : i = 0, \dots, T\}$, se puede expresar el coeficiente de autocorrelación con lag k [22] como:

$$r_k := \rho(f_t, f_{t+k}) = \frac{c_k}{c_0}, c_k = \sum_{t=1}^{T-k} (f_t - \bar{f})(f_{t+k} - \bar{f}), \quad (5.6)$$

donde $k \in \{0, \dots, T\}$ y \bar{f} es la media de los datos. Así se puede construir la función de autocorrelación $A(k)$:

$$A(k) = r_k. \quad (5.7)$$

Por tanto, esta función proporciona el grado de correlación lineal de la función con ella misma desplazada un cierto tiempo. Se puede observar que siempre será un valor comprendido en el intervalo $[-1, 1]$, y de hecho $A(k)$ alcanzará un valor extremo (1 o -1) si y solamente si se cumple la siguiente relación para todo t :

$$f_{t+k} = c_1 f_t + c_2, \quad (5.8)$$

para algún $c_i \in \mathbb{R}$. En caso de que $c_1 > 0$, se tiene $A(k) = 1$ y en caso de que $c_1 < 0$, se tiene $A(k) = -1$.

En caso de que, por ejemplo, los valores f_i sean aleatorios y no exista ninguna relación entre las señales, la función de autocorrelación será nula para todo k .

Se ha utilizado la función `autocorr` de Matlab para obtener la función de autocorrelación de las funciones $g(t)$ para diferentes simulaciones variando la difusividad del perfil de equilibrio en cada una de ellas. Los resultados quedan recogidos en la Figura 5.3a.

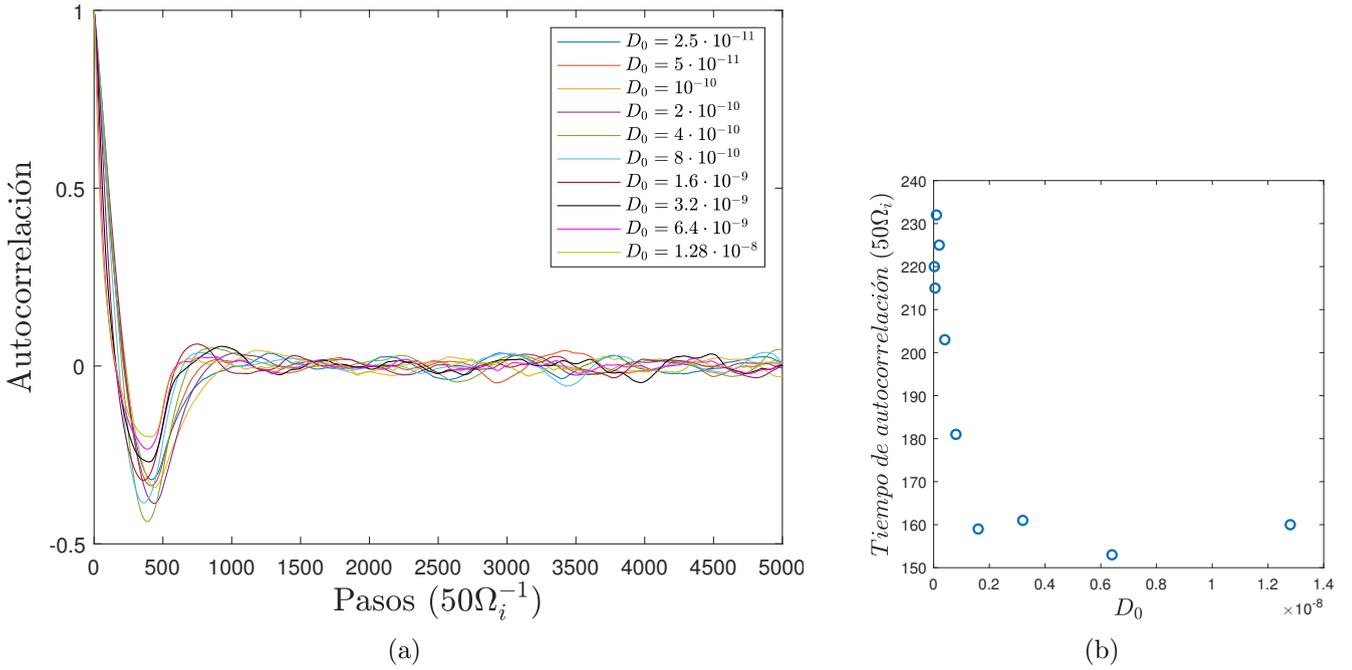


Figura 5.3: Función de autocorrelación para diferentes valores de D_0 para la función $g_{\text{tratada}}(t)$ la simulación de la Tabla 5.1 (a) y valor de los pasos en los que la función de autocorrelación es $1/e$ (b).

Se puede observar que, la evolución de la función de autocorrelación de la Figura 5.3a, aunque es similar en todas las simulaciones, tiene una tendencia distinta en función del valor D_0 . La Figura 5.3b muestra que para mayores difusividades, el tiempo de autocorrelación (tiempo que tarda la función de autocorrelación en cortar al eje de abscisas) es mayor para mayores valores de la difusividad D_0 . Por tanto, como se entiende que el sistema pierde memoria cuando la función de autocorrelación es nula, la memoria del sistema es menor cuanto mayor sea la difusividad.

Sin embargo, a pesar de que este método nos da un valor temporal, a partir de cual se entiende que los puntos de la función $g_{\text{tratada}}(t)$ están decorrelacionados, la función de autocorrelación no nos proporciona más información. Destacar también que la Figura 5.3a muestra que las funciones de autocorrelación no oscilan alrededor del cero hasta más allá de $n = 1000$. Este valor también se reflejará en el siguiente estudio estadístico.

5.2. Análisis R/S

Otro análisis que hace uso de herramientas estadísticas es el análisis de Hurst o R/S [23]. Este tipo de análisis, al igual que el de autocorrelación, consigue detectar dependencias a largo alcance de señales temporales y es muy utilizado en diferentes áreas de conocimiento tales como la hidrología, el machine learning o en finanzas. Así, consigue detectar si en una señal existe memoria a largo alcance o no.

Sea $X = X_1, \dots, X_N$ una sucesión de N valores reales, sea n un divisor de N y sean $X_i, X_{i+1} \dots X_{i+n}$ una subsucesión de longitud n con $i \in \{0, n, 2n, \dots, (N/n - 1)n\}$. Se define como *rango reescalado* de la señal X para el divisor n como el valor resultado de las siguientes operaciones:

1. Sea $X_i, X_{i+1} \dots X_{i+n}$ una de las subsucesiones de longitud n . Se calcula la sucesión $Y_t = X_t - m, t \in \{1, \dots, n\}$ siendo m la media de X_i en el intervalo $[0, t]$.
2. Se realizan las sumas acumuladas de Y , $Z_t = \sum_{l=1}^t Y_l, t \in \{1, \dots, n\}$.
3. Se calcula el rango $R(n)^i = \max(Z_1, \dots, Z_n) - \min(Z_1, \dots, Z_n)$.
4. Se calcula la desviación estándar $S(n)^i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2}$.

5. Se realiza la corrección de Anis y Lloyd [24] que es el valor:

$$E(R/S)_n = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}}, & \text{si } n \leq 340 \\ \frac{1}{\sqrt{n\frac{\pi}{2}}} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-i}{i}}, & \text{si } n > 340 \end{cases} \quad (5.9)$$

6. Se calcula el valor final $R(n)/S(n) = \frac{1}{N/n} \sum_i R(n)^i/S(n)^i - E(R/S)_n$.

7. En caso de que la sucesión X esté autocorrelacionada, se podrá realizar un ajuste de la función R/S corregida, a una ley polinomial $C \cdot t^H$ donde C y H son constantes. A la constante H se denomina exponente de Hurst, y dependiendo de su valor, el método arroja diferentes conclusiones: si $H \in [0, 0,5)$, se dice que la señal tiene una correlación inversa o antipersistente (la sucesión X consiste en una serie de términos que intercalan intervalos crecientes y decrecientes muy próximos, y por tanto existe una tendencia a que los valores estén alrededor de un valor medio de largo alcance), si $H = 0,5$ que no existe correlación (propio de señales aleatorias brownianas) y si $H \in (0,5, 1]$ se dice que existe correlación (largos periodos crecientes o decrecientes).

El análisis R/S se puede definir para una variable aleatoria discreta de forma análoga. Debido a la forma en que se calcula, éste análisis también se suele denominar también como análisis del rango reescalado.

Además, este análisis permite no solo encontrar relaciones de autocorrelación y memoria, sino también en que tiempos y para que rangos existe esa autocorrelación.

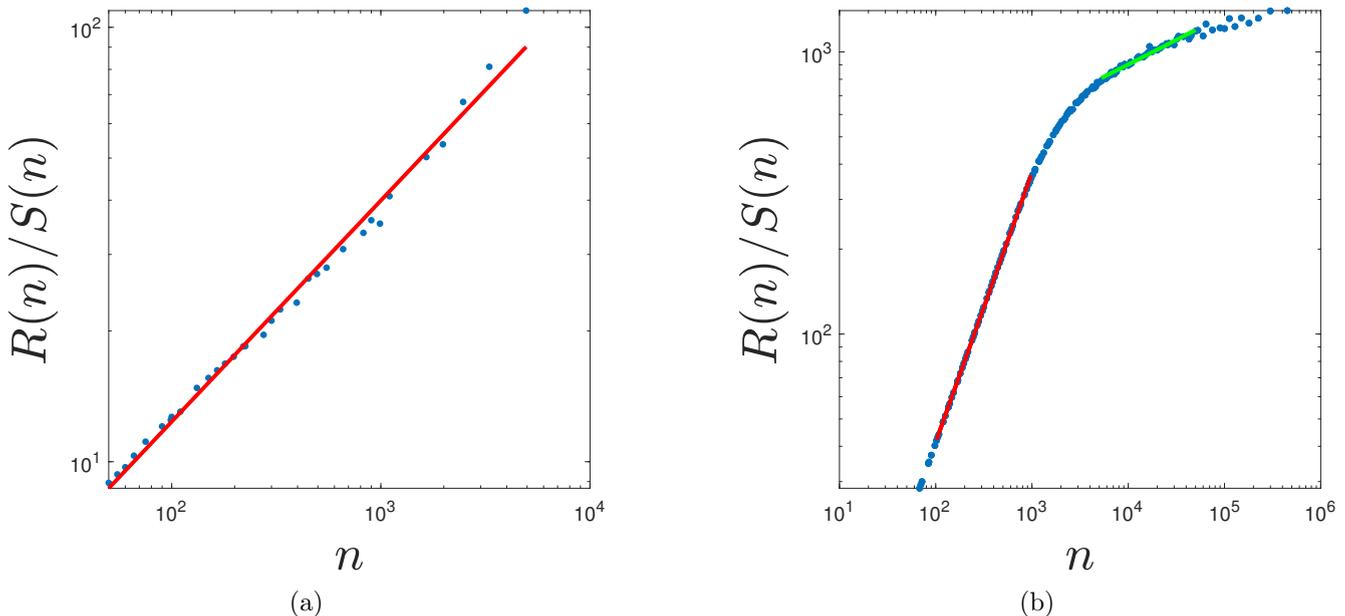


Figura 5.4: Análisis R/S para una muestra aleatoria, obteniendo un coeficiente $H = 0,5091$ con un intervalo de confianza al 95 % de $IC_{95}[0,4363, 0,5608]$ [25] (a) y para la simulación con $D_0 = 2,5 \cdot 10^{-11}$ donde se marcan los dos dominios de la función (b).

En primer lugar, en la Figura 5.4a se recoge el análisis de Hurst para una variable aleatoria con distribución uniforme. Tal y como se podía esperar, su pendiente es 0.5, es decir, no existe correlación entre la función y si misma. Por otra parte, en la Figura 5.4b se representa el rango reescalado de la función $g(t)_{tratada}$ para la simulación con $D_0 = 2,5 \cdot 10^{-11}$.

Se puede observar en la Figura 5.4b que existen dos dominios donde la función $R(n)/S(n)$ se comporta claramente diferente: primero para $n < 10^3$ y después para un rango sobre $n \in [5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^4]$ y por tanto existe un cambio claro de la pendiente en los puntos alrededor de $n = 10^3$, precisamente punto en el que la función de autocorrelación empezaba a oscilar en el cero. En ambos casos la función rango reescalado se

ajusta a una recta (en escala logarítmica), y por tanto, muestra la condición necesaria (pero no suficiente) para que la función $g(t)_{\text{tratada}}$ esté autocorrelacionada. Para asegurarse de que presenta autocorrelación, y además, ver de qué carácter se trata (persistente o antipersistente) se realiza un ajuste en ambos dominios para cada valor de D_0 , y se representa en la Figura 5.5. Se puede observar que para el primer intervalo, la función tiene un carácter claramente persistente, con índices de Hurst cercanos a la unidad. También se observa que existe una clara dependencia entre el valor del parámetro de Hurst H , y el valor de la difusividad D_0 , donde para valores más altos de la difusividad, se obtiene un menor valor del parámetro de Hurst. Este resultado es esperado y compatible al análisis de la función de autocorrelación, donde se había mostrado que el sistema muestra menos memoria cuanto mayor es el peso de la difusividad. En este caso, se muestra que el sistema está menos correlacionado cuanto mayor es el peso de la difusividad. Aún así, en cualquier caso, se observa que para valores de $n < 10^3$, existe una gran autocorrelación.

Por otro lado, para el segundo dominio, la Figura 5.5b muestra que los parámetros de Hurst son cercanos a cero, y por tanto, la función tiene un carácter fuertemente antipersistente. También se observa que la dependencia con la difusividad deja de reflejarse. En cualquier caso, la función está correlacionada también para valores de $n > 10^3$. Esta información no la proporcionaba el análisis de la función de autocorrelación.

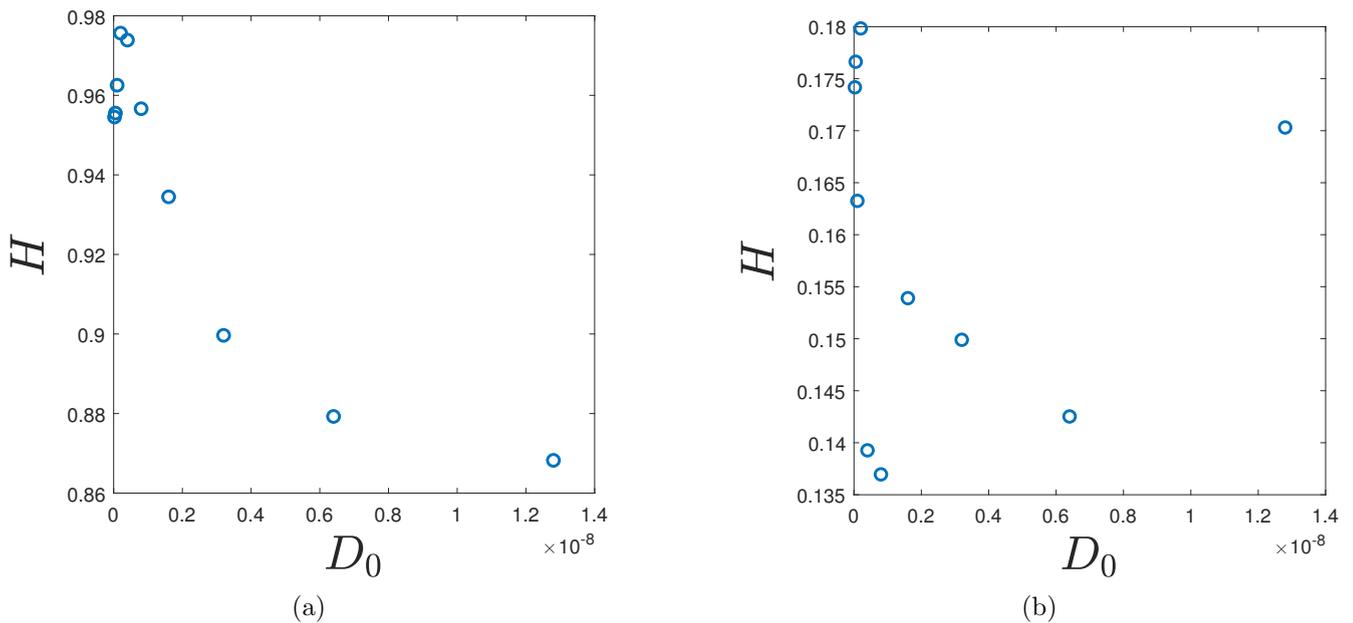


Figura 5.5: Coeficientes de Hurst en función del valor D_0 para el intervalo $n \in [10^2, 10^3]$ (a) y para el intervalo $n \in [2 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^4]$ (b).

5.3. Difusividad efectiva

Por último, se va a estimar cuál sería el coeficiente difusivo en caso de que todo el transporte de materia fuera debido a un término difusivo. De esta manera, se podrá estimar el peso del canal turbulento en el transporte de materia. En caso de que el coeficiente difusivo efectivo sea del orden del coeficiente difusivo real $D_{\text{ext}}(r)$, el transporte estará dominado por la difusión, sin embargo, si es mayor, estará dominado por las turbulencias del modelo DTEM.

Por tanto, según la Ley de Fick (Ecuación 1.4):

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\langle n \rangle, \quad (5.10)$$

y como nos interesa el transporte radial neto, y se considera que el coeficiente de difusión únicamente depende del radio:

$$J_{\text{radial}}(r) = -D_{\text{eff.}}(r)\nabla_r\langle n \rangle \Rightarrow D_{\text{eff.}}(r) = \frac{J_{\text{radial}}(r)}{\nabla_r\langle n \rangle}, \quad (5.11)$$

y como, en la selección que se ha realizado en la señal $g(t)$, se ha supuesto un estado estacionario, donde la materia que se inyecta mediante el término fuente es la misma que se desconfina, se llega a :

$$D_{\text{eff.}}(r) = \left\langle \frac{\int_0^1 \tilde{S}(r) dr}{\nabla_r \langle n \rangle} \right\rangle, \quad (5.12)$$

donde los ángulos representan el promedio temporal. Por tanto, según los datos de la Tabla 5.1 se tiene:

$$D_{\text{eff.}}(r_0) > \frac{\sqrt{2 \cdot \pi} 10^{-1} 10^{-3} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot r_0} > 10^{-7}, \quad (5.13)$$

donde se ha utilizado el área de una gaussiana, y la probabilidad del término fuente como promedio temporal. También se ha considerado el gradiente del perfil en el instante inicial, puesto que para tiempos mayores, tal y como se estudió en la sección anterior, el perfil tenderá a relajarse, y se puede tomar como cota el gradiente inicial. Para una mejor cota, debería calcularse el gradiente en cada punto radial al final de la simulación.

En cualquier caso, el orden de la difusividad efectiva del plasma es mayor que cualquiera de las simulaciones realizadas, y por tanto, es una prueba de que el modelo DTEM recoge que el transporte de materia es dominado por las fluctuaciones, y no tanto por la difusividad.

Capítulo 6

Conclusiones

La fusión nuclear es una reacción entre dos o más núcleos atómicos que, para el caso de núcleos ligeros, provoca una liberación de energía, haciendo que esta tecnología pueda dar solución a la demanda energética de los próximos años. Sin embargo, conseguir un confinamiento eficiente del combustible en forma de plasma presenta multitud de dificultades. En este trabajo se ha estudiado el confinamiento magnético, el cual hace uso de una propiedad de las partículas que conforman el plasma: su carga eléctrica. En particular, se ha estudiado un modelo de las ondas de deriva, un tipo de perturbación en este tipo de plasmas.

El modelo estudiado se trata del modelo DTEM de ondas de deriva, que se basa en los espejos magnéticos que se producen en el plasma. Aunque el código no se ha programado, se ha analizado con detalle como se ha construido y que herramientas computacionales se han utilizado, llegando a las siguientes conclusiones:

1. Modelizar un sistema dinámico tan complejo como un plasma de fusión nuclear necesita de aproximaciones para ser eficiente computacionalmente. En el caso del modelo DTEM se realizan multitud de aproximaciones: se aproxima la geometría de un reactor de fusión nuclear por una estructura cilíndrica con periodicidad en las tapas en vez de una estructura toroidal realista, la ecuación diferencial en la que se basa el modelo únicamente es capaz de evolucionar la densidad sin variar la temperatura, se desprecian términos de mayor orden de la ecuación diferencial, los perfiles de equilibrio se imponen dependientes únicamente de la coordenada radial... Todas estas suposiciones deben ser tomadas cautelosamente para evitar simplificar demasiado el modelo y que no sea realista, sin embargo, son necesarias para que los tiempos de simulación sean aceptables.
2. A la hora de construir un código como este, se debe aprovechar la geometría utilizada, y en vez de construir una malla tridimensional en todo el cilindro, se hace uso de la expresión de la densidad en serie de Fourier. De ésta manera se consigue que la única malla que se deba construir sea una malla radial, mientras que la resolución angular se debe exclusivamente al número de modos o sumandos incluidos en esa expresión.
3. Una de las principales ventajas de hacer uso de la serie de Fourier es que todos los operadores de la ecuación diferencial en derivadas parciales se basan, en esencia, en integraciones radiales, dado que las angulares se realizan de forma analítica, suponiendo un gran ahorro computacional.
4. La presencia de la derivada temporal en la ecuación diferencial permite el avance temporal en el código. Se ha visto el esquema numérico en el que se basa el código: Cranck-Nicholson, en el que se hace un paso intermedio para así mejorar la precisión de los resultados. Se ha visto que la forma de evolucionar el código se basa en resolver sistemas de ecuaciones lineales en cada paso temporal.
5. Se ha comprobado que la falta de resolución radial puede provocar problemas computacionales, y se ha comprobado que la técnica de la difusividad numérica soluciona el problema. También se ha comprobado que hay que ser cuidadoso con estas técnicas, buscando siempre un resultado realista de las simulaciones.

6. Si despreciando algún término de la ecuación diferencial se puede conseguir una ecuación lineal, es posible que ésta tenga solución analítica. En estos casos se puede comprobar el buen funcionamiento del código comparando los resultados analíticos con los numéricos, aunque no asegure el buen funcionamiento del código al incluir los términos no lineales. Además, analizar y estudiar la parte lineal de la ecuación diferencial puede servir para acotar el número de modos que se deben incluir en las simulaciones no lineales. Es importante acotar bien el número de modos incluidos en la ecuación diferencial completa debido a que el escalado del tiempo de simulación tiene una dependencia cuadrática con el número de modos.

Sin embargo, las conclusiones que se pueden obtener de este trabajo no son únicamente exclusivas del ámbito computacional, sino también se pueden obtener conclusiones del ámbito de la física de plasmas:

1. Las ondas de deriva de fusión nuclear se desarrollan en unos determinados puntos radiales, en las llamadas superficies racionales. Además, algunas superficies racionales desarrollan más turbulencias que otras.
2. Las tasas lineales de crecimiento de los modos de una misma helicidad son mayores que cero para un número finito de modos, creciendo hasta un máximo, para después llegar hasta cero. Por otro lado, las frecuencias reales de oscilación tienen una tendencia creciente para todo modo inestable.
3. El número de modos inestables y los valores de las tasas lineales de crecimiento depende del perfil de equilibrio de la temperatura, y más fuertemente del de densidad. En cualquier caso, los valores típicos de las tasas lineales de crecimiento son del orden de $\gamma \approx 10^{-5}\Omega_i$ y de las frecuencias reales de oscilación de $\omega_r \approx 10^{-4}\Omega_i$. En un reactor cuyo campo magnético en el eje magnético sea de 5 Tesla y suponiendo que el combustible es deuterio y la reacción de fusión es deuterio-deuterio, cuya frecuencia ciclotrónica iónica es del orden de $\Omega_i \approx 5 \cdot 10^7 s^{-1}$, se obtienen $\gamma \approx 2,5 \cdot 10^3 s^{-1}$ y $\omega_r \approx 5 \cdot 10^3 s^{-1}$.
4. Los perfiles de shear flow o flujo de cizalla tienden a estabilizar el plasma, haciendo que las tasas lineales de crecimiento sean reducidas y haciendo que el número de modos linealmente inestables se reduzca. Esto se debe a que la inclusión del shear flow provoca un desplazamiento en los máximos de la densidad de cada modo, haciendo que el término estabilizante de la ecuación diferencial no sea nulo y así provoque una disminución en las tasas lineales de crecimiento. Sin embargo, las frecuencias reales de oscilación apenas se ven afectadas por el perfil de shear flow.
5. El modelo DTEM recoge el transporte radial neto de materia al incluir los términos no lineales. Éste es uno de los principales inconvenientes de este tipo de energía: se producen avalanchas de plasma que tienden a desconfinarlo.
6. El transporte de materia en el modelo DTEM puede ser por dos vías: por transporte difusivo o turbulento. Se ha comprobado que el transporte turbulento es el dominante en este modelo, obteniendo una difusividad efectiva de al menos un orden mayor que la difusividad externa impuesta en la ecuación diferencial.
7. Se ha calculado la autocorrelación de una función temporal de carácter global en el plasma, y se ha comprobado la presencia de una condición necesaria de la teoría SOC del transporte radial neto de materia: la memoria del sistema. Mediante dos tipos de análisis se ha obtenido que el sistema tiene una correlación persistente en intervalos menores que $10^3\Omega_i^{-1}$, mientras que para tiempos mayores, tiene una correlación antipersistente.
8. Se ha comprobado mediante dos estudios estadísticos la dependencia de la memoria del sistema con el peso de la difusividad, obteniendo que cuanto mayor sea la difusividad, menor memoria presenta el sistema. En cualquier caso, se obtienen resultados compatibles mediante los dos estudios.

6.0.1. Trabajo futuro

Las dos principales conclusiones que se derivan de este trabajo son:

- En el modelo DTEM, la inclusión de una velocidad poloidal de equilibrio con shear flow tiende a estabilizar las tasas de crecimiento lineal de cualquier perturbación que desestabilice este tipo de modos en un plasma de fusión nuclear.
- El canal de transporte turbulento que genera este tipo de inestabilidades es considerablemente mayor (al menos un orden de magnitud) que el canal de transporte difusivo, siempre presente en este tipo de plasmas debido a las colisiones coulombianas entre los iones y electrones que conforman el plasma de fusión

Sin embargo, no hay que olvidar que este trabajo ha sido puramente teórico, dentro del modelo escogido. El paso siguiente tras esta fase teórica sería la comprobación experimental de las dinámicas de transporte que se generan ante este tipo de inestabilidades en plasmas de fusión reales. Hay estudios que reflejan el hecho de que, efectivamente, el transporte de partículas y energía en este tipo de plasmas es debido, principalmente, al canal de transporte turbulento, ya que atendiendo a criterios de balance de energía, un transporte puramente difusivo no sería capaz de explicar el alto grado de pérdidas que se observa en dispositivos de confinamiento experimentales tipo tokamak tales como JET, DIII-D, FTU, Alcator C-Mod, etc, mucho mayor que el que debería de producirse atendiendo a una dinámica difusiva empleando la Ley de Fick.

Una posible mejora en este trabajo hubiera sido el estudio de las trayectorias de partículas que se mueven en el plasma bajo la influencia de los campos electromagnéticos generados por este tipo de modos turbulentos. Ello conlleva el desarrollo de nuevos códigos que, basándose en el output del código utilizado para desarrollar este trabajo, evolucionarían las trayectorias de muchas partículas inicializadas aleatoriamente en nuestro plasma de fusión, para así poder analizar el tipo de trayectorias que siguen, cómo se desplazan radialmente en el plasma y lo más importante, su tiempo de confinamiento, o lo que es lo mismo, el promedio del tiempo que cada partícula tarda en escapar del confinamiento del plasma. No hay que olvidar que uno de los parámetros más importantes a la hora de caracterizar un plasma de fusión nuclear es el tiempo de confinamiento de las partículas (o de la energía), clave según el Criterio de Lawson para determinar un plasma es rentable o no en lo que se refiere a la producción neta de energía.

Por tanto, tras la fase teórica del estudio del modelo DTEM, una posible mejora sería el tratar de analizar el transporte de partículas en este tipo de plasmas en base a modelos cinéticos o girocinéticos y no fluidos, como ha sido el caso. El estudio de la dinámica del transporte en plasmas puede realizarse con diferentes grados de complejidad. En el presente trabajo, se ha desarrollado un modelo de dos fluidos (electrones más iones). Sin embargo, los modelos cinéticos consideran con mayor detalle la dinámica del sistema, puesto que resuelven la ecuación cinética (ecuación de Boltzman) acoplada a las ecuaciones de Maxwell en el espacio de fases (6 dimensiones) lo que supone un gran aumento en la complejidad del problema. Los modelos girocinéticos, algo más simplificados que los cinéticos, consiguen reducir la dimensionalidad del problema de 6 a 5 variables por partícula, con lo que si se estudian N partículas tendríamos $5N$ variables involucradas. Los formalismos girocinéticos eliminan la parte temporal asociada a fenómenos que son mucho más rápidos que las escalas temporales de interés, o de tamaños que son mucho menores que las escalas espaciales relevantes para el transporte.

Bibliografía

- [1] A A Harms; et al. *Principles of fusion energy : an introduction to fusion energy for students of science and engineering*. World Scientific, 2000.
- [2] Elmer E. Lewis Ph.D. *Fundamentals of Nuclear Reactor Physics*. Academic Press, ap edition, 2008.
- [3] National Physical laboratory. Kaye and laby, tables of physical and chemical constants. http://www.kayelaby.npl.co.uk/atomic_and_nuclear_physics/4_7/4_7_4.html. Fecha de acceso: 2019-11-28.
- [4] Francis F Chen and Humberto Torreblanca. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, 2nd edition.
- [5] Ph.D. Craig Freudenrich. How nuclear fusion reactors work. <https://science.howstuffworks.com/fusion-reactor.htm>, 2005. Fecha de acceso: 2019-11-28.
- [6] J D Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 70(1):6–10, jan 1957.
- [7] A. Einstein. *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1956.
- [8] Professor Dr. Thomas Klinger Dr. Gerrit Marx Professor Dr. Lutz Schweikhard (eds.) U. Schumacher (auth.), Priv-Doz. Dr. Andreas Dinklage. *Plasma Physics: Confinement, Transport and Collective Effects*. Lecture Notes in Physics 670. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2005.
- [9] Professor emer. Kenro Miyamoto (auth.). *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*. Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics 38. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2005.
- [10] José Ángel Mier Maza. *Turbulencia inducida por ondas de deriva en plasmas de fusión*. PhD thesis, Universidad Carlos III, 2 2008.
- [11] Dr. Harmund Müller (auth.) Dr. Tibor Müller. *Modelling in Natural Sciences: Design, Validation and Case Studies*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2003.
- [12] H. L. Pearlstein, L. D.; Berk. *Universal Eigenmode in a Strongly Sheared Magnetic Field*, volume 23. The American Physical Society, 1969.
- [13] K.L. Sidikman, B.A. Carreras, and L. Garcia. Drift wave turbulence in a plasma with sheared flow. *Journal of Computational Physics*, 114(1):100 – 112, 1994.
- [14] P.P.G. Dyke. *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 1 edition, 2001.
- [15] C Z Cheng and M S Chance. Nova: A nonvariational code for solving the mhd stability of axisymmetric toroidal plasmas. *J. Comput. Phys.; (United States)*.

- [16] J.W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 1 edition, 1999.
- [17] B. A. Carreras, K. Sidikman, P. H. Diamond, P. W. Terry, and L. Garcia. Theory of shear flow effects on long-wavelength drift wave turbulence. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 4(10):3115–3131, 1992.
- [18] Jan Weiland. *Stability and Transport in Magnetic Confinement Systems*, volume 71. 01 2012.
- [19] WikFusion. Self-organised criticality, 2018. [Online; accedido 30 de mayo de 2020].
- [20] Benjamin Carreras, D.E. Newman, Ian Dobson, and A. Poole. Evidence for self-organized criticality in a time series of electric power system blackouts. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 51:1733 – 1740, 10 2004.
- [21] R. P. Boas Albert N. Shiryaev. *Probability*. Graduate texts in mathematics Springer series in Soviet mathematics 95. Springer, 2nd ed edition, 1996.
- [22] Gregory C. Reinsel George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Forecasting and control. Prentice-Hall, 3rd edition, 1994.
- [23] Wan Guiding Antar G. Devynck P. The hurst exponent and long-time correlation. *Physics of Plasmas*, 7:1181, 2000.
- [24] A. A. Anis and E. H. Lloyd. The expected value of the adjusted rescaled hurst range of independent normal summands. *Biometrika*, 63(1):111–116, 1976.
- [25] Rafał Weron. Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 312(1-2):285–299, Sep 2002.