UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

**Facultad
de
Ciencias**

Las ecuaciones de Keller-Segel

(The Keller-Segel equations)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: Silvia Escárcega Barquín
Director: Rafael Granero Belinchón

Julio-2020

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi tutor Rafa toda la ayuda y dedicación que me ha prestado, ya que su colaboración me ha facilitado la realización de este trabajo.

A mis padres, por su cariño y apoyo incondicional. A mi hermana Alicia por demostrarme con su ejemplo que con esfuerzo e ilusión todo es posible.

Gracias a toda la gente que he conocido durante esta etapa, especialmente a Raquel, Marina, Marta, Irene, Estela, Aída y Cristina por todos los buenos momentos y por hacer mis días más amenos en la facultad. Gracias también a Íñigo por estar siempre dispuesto a ayudarme con cualquier cosa en cualquier momento, por sus refranes y ánimos.

Resumen

El sistema de ecuaciones de Keller-Segel describe el movimiento colectivo de células que son atraídas por una sustancia química. Si bien existen numerosas adaptaciones de este sistema, en este trabajo se ha utilizado un sistema de dos ecuaciones parabólico-elíptico para estudiar la existencia y unicidad de solución de dicho problema. Esta prueba se ha llevado a cabo en varias fases, definiendo y resolviendo primero otros problemas regularizados similares y pasando al límite para obtener la solución a nuestro problema original.
Asimismo, se ha estudiado la existencia de singularidades en tiempo finito para datos iniciales con masa mayor que una cantidad crítica, y por debajo de la cual las soluciones existen globalmente.

Palabras clave: Quimiotaxis, sistema de ecuaciones Keller-Segel, mollifier, problema regularizado, estimaciones de energía, singularidades.

Abstract

The Keller-Segel system describes the collective movement of cells that are attracted to a chemical substance. There are numerous models of this system. In this work we have been used a system of two parabolic-elliptic equations to study the existence and uniqueness of solution of this problem. This proof has been carried out in several steps, first defining and solving a family of similar regularized problems and then passing to the limit to obtain the solution to our original problem.
Likewise, the existence of singularities in finite time for initial data with mass larger than a critical threshold has been studied. Below this critical mass, global solutions exist.

Key words: Chemotaxis, mollifier, Keller-Segel system of equations, regularized problem, energy estimates, singularities.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Existen multitud de situaciones en las que distintas células dirigen su movimiento en base a las diferentes sustancias químicas presentes en el ambiente. Ejemplo de ello puede ser el movimiento de los fibroblastos hacia regiones heridas para iniciar su curación, o la acción que ejercen las feromonas sobre animales de sexos opuestos de una misma especie: la polilla de seda *Bombyx Mori* utiliza un olor especial para atraer a una pareja de apareamiento. La polilla hembra, durante la temporada de apareamiento, segrega un olor causado por una feromona que atrae al macho a moverse en dirección a la concentración de ese olor, lo que ayuda a las polillas macho a encontrar a las hembras con mayor facilidad [7].

Este tipo de movimientos de acuerdo a gradientes de sustancias químicas recibe el nombre de quimiotaxis. Esto explica como las bacterias encuentran alimento dirigiéndose hacia zonas de mayor concentración de moléculas alimentarias como la glucosa, así como se alejan de la presencia de venenos tipo el fenol. En organismos multicelulares es fundamental tanto en las fases tempranas de su desarrollo como en las fases más tardías como la migración de neuronas o linfocitos.

El sistema de quimiotaxis de la bacteria *Escherichia Coli* [1] es uno de los más estudiados: estas bacterias se mueven gracias a los flagelos que tienen pegados a su cuerpo dando tumbos alternadamente, lo que determina un movimiento sin dirección fija. Cuando los flagelos se mueven en un sentido forman un haz que propulsa la bacteria hacia adelante. Cuando giran en dirección opuesta, el haz de flagelos se desarma y la célula cambia de dirección. Ante un aumento en la concentración de una sustancia atrayente, la bacteria se desplaza hacia la dirección favorable, mientras que si esta concentración disminuye (o aumenta la de una sustancia repelente) la frecuencia de tumbos aumenta, alejándose de ese estímulo desfavorable.

El estudio matemático de este fenómeno comienza en 1953 con C.S. Patlak [13]. En 1970, Evelyn Fox Keller y Lee A. Segel presentaron un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parabólicas describiendo estos movimientos. Sus primeros estudios pueden consultarse en [8], [9] y [10], los cuales se inspiraron en la agregación de las amebas *Dictyostelium Discoideum*. Para saber más sobre su movimiento véase [12] y [14].
Hoy en día existen varias versiones del sistema de Keller-Segel para quimiotaxis, según los fenómenos y escalas en que estemos interesados. En este trabajo consideraremos el modelo simplificado

$$\begin{cases} n_t(x,t) - \Delta n(x,t) = -\nabla \cdot (n(x,t)\nabla v(x,t)) & x \in \mathbb{R}^2, t \in [0,T] \\ \gamma v(x,t) - \Delta v(x,t) = n(x,t) & \gamma \geq 0 \\ \quad n(x,0) = n_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $n(x,t)$ representa la densidad celular, $v(x,t)$ la concentración de quimioatrayente y γ indica cómo el quimioatrayente se descompone, la sensibilidad química. La primera ecuación se trata de una ecuación de difusión-convección. Tiene en cuenta que el movimiento de las células viene dado por un aumento más pronunciado en la concentración de quimioatrayente. La segunda ecuación modela la descomposición del quimioatrayente. El término γv es un término de reacción, de tipo consumo, mientras que el sumando $+n$ de la derecha es igualmente un término de reacción, pero de tipo producción.

En el siguiente capítulo estudiaremos la existencia y unicidad de solución en tiempo finito para el problema (1.1), para lo cual tendremos que resolver primero otros problemas regularizados similares y pasar posteriormente al límite. En el capítulo 3, analizaremos una característica muy interesante de este modelo, como son las singularidades en tiempo finito o blow-up. Las explosiones en tiempo finito son la única singularidad que puede impedir que las soluciones existan en un tiempo ilimitado.
En particular probaremos los siguientes resultados:

Teorema 1. *Dada la condición inicial $n_0 \in H^4$, $n_0 > 0$, existe una única solución $n \in L^\infty([0,T^*]; H^4) \cap C^0([0,T^*]; H^s)$ $0 \leq s < 4$ para el sistema de ecuaciones* (1.1)

Es decir, probaremos la existencia de solución en tiempo finito. Además, como hemos mencionado anteriormente, veremos en qué casos cabe la posibilidad de que aparezcan singularidades en tiempo finito.

Teorema 2. *Sea $n_0 \in H^4$ un dato inicial tal que $\| n_0 \|_{L^1} = M > 8\pi$. Entonces la solución correspondiente del sistema* (1.1) *para el caso $\gamma = 0$ tiene singularidades en tiempo finito.*

Capítulo 2

Existencia y unicidad de solución

En este capítulo estudiaremos la existencia y unicidad de solución para el problema (1.1) introducido en el capítulo 1. En primer lugar, hacemos una introducción a los espacios L^p y Sobolev, así como algunas propiedades de los mismos.

2.1. Preliminares

2.1.1. Espacios L^p

Consideramos el espacio de medida (X, Σ, μ). El espacio vectorial $\mathcal{L}^p_\mu(X)$ se define, para $p \in [1, \infty)$, como el espacio de todas las funciones medibles f que cumplen:

$$\int_X \mid f \mid^p d\mu < \infty \tag{2.1}$$

Estableciendo ahora la siguiente relación de equivalencia R sobre $\mathcal{L}^p_\mu$:

$$fRg \Leftrightarrow f = g \text{ c.t.p,} \left(i.e. \int \mid f - g \mid^p d\mu = 0 \right) \tag{2.2}$$

El espacio vectorial resultante es, por definición, $L^p = \mathcal{L}^p / R$
Tomando $X = \mathbb{R}^2$, para cada $p \geq 1$, $p < \infty$ se denota

$$L^p(\mathbb{R}^2) = \{ f \in \mathcal{L}^p / R : \int_{\mathbb{R}^2} \mid f \mid^p dx \text{ es finito} \} \tag{2.3}$$

y la norma L^p se define como

$$\parallel f \parallel_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mid f \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

Para el caso $p = \infty$, el espacio L^∞ consiste en el espacio vectorial formado por todas las funciones medibles según Lebesgue $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que son esencialmente acotadas en $\mathbb{R}^2$, es decir, cuando existe una constante $M \geq 0$ tal que $\mid f \mid \leq M$ en casi todo punto. La norma en L^∞ es la norma del supremo esencial:

$$\| f \|_{L^\infty} = \text{ess sup} \mid f \mid = \text{ínf}\{M \geq 0 : \mid f \mid \leq M \text{ c.t.p}\} \tag{2.5}$$

2.1.2. Transformada de Fourier y propiedades

La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ se define como

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp^{-i\xi x} f(x)dx \tag{2.6}$$

Algunas propiedades de la transformada de Fourier que utilizaremos posteriormente para la estimación de la energía son:

i) Si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ y

$$\widehat{\partial_{x_j}^\beta f} = (i\xi_j)^\beta \widehat{f} \tag{2.7}$$

ii) Para todo $f \in L^2$,

$$\| f \|_{L^2} = \| \widehat{f} \|_{L^2} \tag{2.8}$$

2.1.3. Espacios Sobolev

En esta sección vamos a introducir los espacios Sobolev. Como veremos más adelante, nos serán de gran utilidad en la demostración de la existencia de solución para el problema regularizado, así como en las estimaciones de la energía.

El espacio de Sobolev

$$H^m(\mathbb{R}^2),\ m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

es un espacio vectorial normado formado por funciones $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tales que $D^\alpha v \in L^2(\mathbb{R}^2), 0 \leq \mid \alpha \mid \leq m$ donde $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2}$. La norma H^m se define como

$$\| v \|_{H^m} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha v \|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

El espacio de Sobolev se generaliza al caso $m = s \in \mathbb{R}$. Se considera la norma

$$\| v \|_{H^s} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} (1+ | \xi |^2)^s \mid \widehat{v}(\xi) \mid^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

En los siguientes lemas recopilamos algunas de las propiedades principales de los espacios de Sobolev.

Lema 1. *El espacio* $H^{s+k}(\mathbb{R}^2), s > 1, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ *está continuamente inmerso en el espacio* $C^k(\mathbb{R}^2)$. *Esto es, existe* $c > 0$ *tal que*

$$\| v \|_{C^k} \leq c \| v \|_{H^{s+k}} \qquad \forall v \in H^{s+k}(\mathbb{R}^2) \tag{2.11}$$

Lema 2. *Desigualdades de cálculo en espacios de Sobolev.*

i) Para todo $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$*, existe* $c > 0$ *tal que, para todo* $u, v \in L^\infty \cap H^m(\mathbb{R}^2)$*,*

$$\| uv \|_{H^m} \leq c\{\| u \|_{L^\infty} \| D^m v \|_{L^2} + \| D^m u \|_{L^2} \| v \|_{L^\infty}\} \tag{2.12}$$

ii) Para todo $s > 1$*,* $H^s(\mathbb{R}^2)$ *es un álgebra de Banach. Esto es, existe* $c > 0$ *tal que, para todo* $u, v \in H^s(\mathbb{R}^2)$*,*

$$\| uv \|_{H^s} \leq c \| u \|_{H^s} \| v \|_{H^s} \tag{2.13}$$

iii) Para el caso $s = 1$ *se tiene [6]*

$$\| uv \|_{H^1} \leq c \| u \|_{H^2} \| v \|_{H^1} \tag{2.14}$$

Lema 3. *Interpolación en espacios de Sobolev. Dado* $s > 0$ *existe una constante* C_s *tal que para todo* $v \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *y* $s > s' > 0$ *tal que*

$$\| v \|_{H^{s'}} \leq C_s \| v \|_{L^2}^{1-s'/s} \| v \|_{H^s}^{s'/s} \tag{2.15}$$

2.2. Metodología y resultado principal

A continuación introducimos el principal resultado de este capítulo: el teorema de existencia y unicidad de solución para el problema (1.1) que probaremos en las sucesivas secciones.

Teorema 1. *Dada la condición inicial $n_0 \in H^4$, $n_0 > 0$, existe una única solución $n \in L^\infty([0,T^*];H^4) \cap C^0([0,T^*];H^s)$ $0 \leq s < 4$ para el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} n_t(x,t) - \Delta n(x,t) = -\nabla \cdot (n(x,t)\nabla v(x,t)) & x \in \mathbb{R}^2, t \in [0,T] \\ \gamma v(x,t) - \Delta v(x,t) = n(x,t) & \gamma \geq 0 \\ \quad n(x,0) = n_0(x) & \end{cases}$$

La prueba de la existencia y unicidad se basa en 4 pasos: El primero es definir problemas regularizados adecuados. El segundo, demostrar que estos problemas regularizados tienen solución, aplicando para ello el Teorema de Picard en Espacios de Banach. El tercero es obtener un tiempo de existencia uniforme en el parámetro de regularización. Esto es necesario de manera que podamos posteriormente pasar al límite en dicho parámetro de regularización. Este tiempo de existencia uniforme en el parámetro se consigue por medio de estimaciones de energía, por lo que es necesario haber regularizado bien el problema para que dichas estimaciones sean de utilidad. Por último, se pasa al límite.

2.3. Demostración del Teorema

2.3.1. Problema regularizado

La estrategia de esta sección radica en diseñar un sistema similar al sistema de ecuaciones de Keller-Segel visto para el cual podamos probar fácilmente la existencia y unicidad de solución. Para ello introducimos el siguiente lema que nos permite pasar del sistema inicial a una ecuación no local.

Lema 4. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$. La solución $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación*

$$\gamma u - \Delta u = f \tag{2.16}$$

viene dada por una convolución

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} N(x-y) f(y) dy$$

donde N es un núcleo explícito en términos de las funciones de Bessel [15]. Además,

$$\| u \|_{H^1} \leq c \| f \|_{L^2} \tag{2.17}$$

$$\| \nabla u \|_{H^1} \leq c \| f \|_{L^2} \ . \tag{2.18}$$

En particular,

$$\| u \|_{H^2} \leq c \| f \|_{L^2} \tag{2.19}$$

Dado que en nuestro sistema tenemos

$$\gamma v - \Delta v = n$$

Se tiene que

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^N} N(x-y)n(y)dy \tag{2.20}$$

Y de este modo pasamos del sistema de ecuaciones de Keller-Segel a la siguiente ecuación no local:

$$n_t - \Delta n = -\nabla \cdot (n \nabla (N * n)) \tag{2.21}$$

El primer paso es modificar esta ecuación, introduciendo un operador $\mathcal{J}_\varepsilon$ llamado mollifier. Los mollifiers son funciones suaves con ciertas propiedades especiales. Intuitivamente, dada una función que es bastante irregular, al convolucionarla con un mollifier, la función se suaviza, es decir, sus derivadas son funciones regulares, mientras se mantienen cerca de la función original. Empezamos definiendo el operador de regularización $\mathcal{J}_\varepsilon$, más adelante mostraremos cómo usar este operador para conseguir una regularización adecuada.

Dada una función radial

$$\mathcal{J}(|\ x\ |) \in \mathcal{C}_0^\infty, \quad \mathcal{J} \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{J} dx = 1 \tag{2.22}$$

se define $\mathcal{J}_\varepsilon v$ de funciones $v \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$ como

$$(\mathcal{J}_\varepsilon v)(x) = \varepsilon^{-N} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{J}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) v(y)dy, \ \varepsilon > 0 \tag{2.23}$$

Propiedades del operador $\mathcal{J}_\varepsilon$

i) Para todo $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $v \in L^p(\mathbb{R}^2)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * u)v dx = \int_{\mathbb{R}^2} u(\mathcal{J}_\varepsilon * v)dx \tag{2.24}$$

ii) Para todo $v \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{J}_\varepsilon * v$ converge a v en H^s y el radio de convergencia en la norma H^{s-1} es lineal en ε

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \| \mathcal{J}_\varepsilon * v - v \|_{H^s} = 0 \tag{2.25}$$

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon * v - v \|_{H^{s-1}} \leq C\varepsilon \| v \|_{H^s} \tag{2.26}$$

iii) Para todo $v \in C^0(\mathbb{R}^2)$,

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon * v \|_{L^\infty} \leq \| v \|_{L^\infty} \tag{2.27}$$

Además, se tiene que

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon * v \|_{L^2} \leq \| v \|_{L^2} \tag{2.28}$$

iv) Los mollifiers conmutan con las derivadas

$$D^\alpha \mathcal{J}_\varepsilon * v = \mathcal{J}_\varepsilon * D^\alpha v \quad \forall \mid \alpha \mid \leq k \tag{2.29}$$

v) Para todo $v \in H^m(\mathbb{R}^2), k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, y\ \varepsilon > 0$,

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon * v \|_{H^{m+k}} \leq \frac{c_{mk}}{\varepsilon^k} \| v \|_{H^m} \tag{2.30}$$

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon * D^\alpha v \|_{H^m} \leq \frac{c_{mk}}{\varepsilon^{N/2+k}} \| v \|_{H^m} \quad \forall \mid \alpha \mid \leq k \tag{2.31}$$

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon * D^\alpha v \|_{L^\infty} \leq \frac{c_k}{\varepsilon^{N/2+k}} \| v \|_{L^2} \quad \forall \mid \alpha \mid \leq k \tag{2.32}$$

La prueba de las anteriores propiedades sobre los mollifiers puede encontrarse en [11].

Así, definimos

$$n_t - \mathcal{J}_\varepsilon \Delta \mathcal{J}_\varepsilon * n = -\mathcal{J}_\varepsilon \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * n)) \tag{2.33}$$

La presencia de los mollifiers se debe a que proporcionan un equilibrio necesario en la integración por partes y a la necesidad de conservar las estimaciones de energía (la cual veremos que es independiente del parámetro de regularización). Además, tienen la característica adicional de que al componerlos con operadores diferenciales no acotados, se originan operadores acotados. De este modo, podemos aplicar el Teorema de Picard que enunciamos a continuación para demostrar la existencia de solución para el problema regularizado.

2.3.2. Existencia de solución para el problema regularizado

Introducimos el teorema de Picard en un espacio de Banach, a partir del cual probaremos la existencia de solución para nuestro problema regularizado.

Teorema 2 (Teorema de Picard en un espacio de Banach). *Sea $O \subseteq \boldsymbol{B}$ un subconjunto abierto de un espacio de Banach $\boldsymbol{B}$ y sea $F : O \longrightarrow \boldsymbol{B}$ una aplicación que satisface:*

i) $F(X)$ asigna O a $\boldsymbol{B}$.

ii) F es localmente Lipschitz continua, es decir, para cualquier $X \in O$ existe $L > 0$ y un entorno abierto $U_X \subset O$ de X tal que

$$\| F(\tilde{X}) - F(\hat{X}) \|_{\boldsymbol{B}} \leq L \| \tilde{X} - \hat{X} \|_{\boldsymbol{B}} \quad \forall \tilde{X}, \hat{X} \in U_X$$

Entonces, para cualquier $X_0 \in O$, existe un tiempo T tal que la EDO

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \qquad X \mid_{t=0} = X_0 \in O \tag{2.34}$$

tiene una única solución local $X \in C^1[(-T, T); O]$

Proposición 1. *Dada la condición inicial $n_0 \in H^4$, se tiene que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una única solución $n^\varepsilon \in C^1([0, T_\varepsilon); H^4)$ para la EDO*

$$\frac{dn^\varepsilon}{dt} = F(n^\varepsilon) \tag{2.35}$$

$$n^\varepsilon \mid_{t=0} = n_0$$

donde $F(n^\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon \Delta \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)))$
y $T_\varepsilon = T(\| n_0 \|_{H^4}, \varepsilon)$

Demostración. Aplicando el Teorema 2, definimos $\mathbf{B} = H^4$,
$O = \{f \in H^4 : \| f \|_{H^4} < \lambda\}$ donde $\lambda = 2 \| n_0 \|_{H^4}$

$$F : H^4 \longrightarrow H^4$$

siendo

$$\begin{aligned} F(n^\varepsilon) &= \mathcal{J}_\varepsilon \Delta \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon))) \\ &= F_1(n^\varepsilon) + F_2(n^\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Como $n^\varepsilon \in H^4$, $\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \in C^\infty$ todos los términos en F están bien definidos. Veamos si se cumple la condición ii) del Teorema de Picard:

$$\| F(n^\varepsilon) - F(m^\varepsilon) \|_{H^4} \leq C(\varepsilon) \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{H^4}$$

$$\begin{aligned} \| F_1(n^\varepsilon) - F_1(m^\varepsilon) \|_{H^4} &= \| \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{H^4} \\ &= \| \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{H^4} \end{aligned}$$

Por (2.31) se tiene

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{H^4} \leq C(\varepsilon) \| \Delta(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{H^4}$$

Aplicando ahora (2.10) y (2.31) se llega a

$$\begin{aligned} \| F_1(n^\varepsilon) - F_1(m^\varepsilon) \|_{H^4} &\leq C(\varepsilon) \| \Delta(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{H^4} \\ &\leq C(\varepsilon) \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{H^6} \\ &\leq C(\varepsilon) \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{H^4} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \| \Delta(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{H^4} &= \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\ \xi\ |^2\ (1+ |\ \xi\ |^2)^4\ |\ \mathcal{J}_\varepsilon * \widehat{(n^\varepsilon - m^\varepsilon)}\ |^2\ d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} (1+ |\ \xi\ |^2)^6\ |\ \mathcal{J}_\varepsilon * \widehat{(n^\varepsilon - m^\varepsilon)}\ |^2\ d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{H^6} \end{aligned}$$

Para el segundo sumando de (2.36), para simplificar notación, denotamos

$$u = N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon$$

$$r = N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon$$

De este modo se tiene:

$$\begin{aligned} \| F_2(n^\varepsilon) - F_2(m^\varepsilon) \|_{H^4} &= \| \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla u) \\ &\quad - \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \nabla r) \|_{H^4} \\ &= \| \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla u) \\ &\quad - \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla r) \\ &\quad + \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla r) \\ &\quad - \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \nabla r) \|_{H^4} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Aplicando la desigualdad triangular, obtenemos:

$$\begin{aligned}\| F_2(n^\varepsilon) - F_2(m^\varepsilon) \|_{H^4} \leq& \| \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)) \\ &- \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)) \|_{H^4} \\ &+ \| \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)) \\ &- \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)) \|_{H^4}\end{aligned} \tag{2.39}$$

Definimos

$$\begin{aligned}G =& \| \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)) \\ &- \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)) \|_{H^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I =& \| \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)) \\ &- \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)) \|_{H^4}\end{aligned}$$

Aplicando (2.31) obtenemos

$$\begin{aligned}G =& \| \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right)) \|_{H^4} \\ \leq& c \| \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right)) \|_{H^4}\end{aligned}$$

Ahora, distribuyendo la derivada, observamos que:

$$\begin{aligned}G \leq& c \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \Delta \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right) \|_{H^4} \\ &+ c \| \nabla (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) \cdot \nabla \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right) \|_{H^4}\end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta

$$\gamma \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right) - \Delta \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right) = \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)$$

se llega a

$$\begin{aligned}G \leq& c \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{H^4} \\ &+ \gamma \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{H^4} + \\ &+ \| \nabla (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) \cdot \nabla \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right) \|_{H^4}\end{aligned}$$

Definimos ahora

$$M = \| \nabla (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) \cdot \nabla \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right) \|_{H^4}$$

$$\tau = \nabla (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) \cdot \nabla \left(N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\right)$$

Así,

$$M \leq C \| \tau \|_{L^2} + \| \nabla \tau \|_{H^3} \leq C \| \nabla \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^2} \| \nabla (u - r) \|_{L^\infty} + \| \nabla \tau \|_{H^3}$$

Teniendo en cuenta que

$$\| \nabla\tau \|_{H^3}^2 = \sum_{0\leq|\tau|\leq 3} \| D^\alpha \nabla\tau \|_{L^2}^2 = \sum_{0\leq|\alpha|\leq 3} \| D^{\alpha+1}\tau \|_{L^2}^2$$

Estudiamos los 4 casos:

$$\begin{aligned}
\diamond \| D\tau \|_{L^2} &\leq c \| D\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^2} \| \nabla(u-r) \|_{L^\infty} \\
&\quad + c \| \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^\infty} \| D\nabla(u-r) \|_{L^2} \\
&\leq c \| n^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{H^1} \\
&\quad + c \| n^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^2}
\end{aligned}$$

Donde en la desigualdad anterior se han usado las propiedades vistas de los mollifiers, así como (2.19).
De este modo se llega a

$$\begin{aligned}
\| D\tau \|_{L^2} &\leq \widetilde{c} \| n^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{H^1} \\
&\leq \widetilde{c}\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\diamond \| D^2\tau \|_{L^2} &\leq c(\| D^2\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^2} \| \nabla(u-v) \|_{L^\infty} \\
&\quad + \| D\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^\infty} \| D\nabla(u-v) \|_{L^2} \\
&\quad + \| \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^\infty} \| D^2\nabla(u-v) \|_{L^2})
\end{aligned}$$

Por (2.31) se tiene que

$$\| D^2\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^2} \leq \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^3} \leq c \| n^\varepsilon \|_{L^2} \ .$$

La siguiente desigualdad se consigue aplicando (2.11), (2.19) y (2.30)

$$\| \nabla(u-v) \|_{L^\infty} \leq c \| \nabla(u-r) \|_{H^2} \leq c \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^2} \leq c \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2}$$

De nuevo por (2.11) y (2.30)

$$\| \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^\infty} \leq \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^3} \leq c \| n^\varepsilon \|_{L^2}$$

y se llega a

$$\begin{aligned}
\| D^2\tau \|_{L^2} &\leq c(\| n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \\
&\quad + \| n^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^2} \\
&\quad + \| n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2}) \\
&\leq \widetilde{c}\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos aplicado (2.30) para el caso $m = 0 = k$ Seguimos con el tercer caso, donde partimos de la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \diamond \parallel D^3\tau \parallel_{L^2} \leq c &\parallel D^3\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel \nabla(u-v) \parallel_{L^\infty} \\ &+ \parallel D^2\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^\infty}\parallel D\nabla(u-v) \parallel_{L^2} \\ &+ \parallel D\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^\infty}\parallel D^2\nabla(u-v) \parallel_{L^2} \\ &+ \parallel \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^\infty}\parallel D^3\nabla(u-v) \parallel_{L^2} \end{aligned}$$

Por (2.29) y (2.31) se cumple que

$$\parallel D^3\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^2} = \parallel D^4\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^2} \leq \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}$$

Por (2.18) y (2.29),

$$\parallel D^2\nabla(u-v) \parallel_{L^2} \leq \parallel D\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^2} \leq \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{H^1} \leq \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}$$

$$\begin{aligned} \parallel D^2\nabla(u-v) \parallel_{L^2} &= \parallel D^3(u-v) \parallel_{L^2} \\ &= \parallel D^3 * N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^2} \\ &\leq \parallel D * N * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{H^2} \\ &\leq \parallel D * \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^2} \\ &\leq \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \end{aligned}$$

Luego se llega a

$$\begin{aligned} \parallel D^3\tau \parallel_{L^2} &\leq c \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ &\quad + c \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ &\quad + c \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ &\quad + c \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ &\leq \widetilde{c}\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond \parallel D^4\tau \parallel_{L^2} \leq c &\parallel D^4\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel \nabla(u-v) \parallel_{L^\infty} \\ &+ \parallel D^3\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^\infty}\parallel D\nabla(u-v) \parallel_{L^2} \\ &+ \parallel D^2\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^\infty}\parallel D^2\nabla(u-v) \parallel_{L^2} \\ &+ \parallel D\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^\infty}\parallel D^3\nabla(u-v) \parallel_{L^2} \\ &+ \parallel \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^\infty}\parallel D^4\nabla(u-v) \parallel_{L^2} \end{aligned}$$

Aplicando las mismas desigualdades que en los casos anteriores, conseguimos

$$\begin{aligned} \parallel D^4\tau \parallel_{L^2} &\leq \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^2} \\ &\quad + \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^2} \\ &\quad + \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ &\quad + \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ &\quad + \parallel n^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ &\leq c\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \end{aligned}$$

Se observa de este modo que en cualquier caso se cumple que

$$\| \nabla\tau \|_{H^3} \leq \widetilde{c}\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2}$$

Luego

$$G \leq \widetilde{c}\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \tag{2.40}$$

Así,

$$\begin{aligned} G &\leq c \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{H^4} + c\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &\leq c \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^4} \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{H^4} + c\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \end{aligned}$$

Donde en la anterior desigualdad hemos usado (2.13). Así, logramos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} G &\leq c \| n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} + c\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &\leq \widetilde{c}\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \end{aligned}$$

Para el segundo sumando de (2.39) se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \| \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \cdot ((\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)) \|_{H^4} \\ &\leq c \| \nabla \cdot ((\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)) \|_{H^4} \end{aligned}$$

Donde en la anterior desigualdad hemos aplicado (2.31).
De nuevo, distribuyendo la derivada, obtenemos

$$\begin{aligned} I \leq\ & c \| (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) \Delta (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) \|_{H^4} \\ & + \| \nabla (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) \cdot \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) \|_{H^4} \end{aligned}$$

Y por último, teniendo en cuenta que

$$\gamma N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon - \Delta (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon$$

llegamos a

$$\begin{aligned} I \leq\ & c \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{H^4} \\ & + \gamma \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{H^4} \\ & + \| \nabla (\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \cdot \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) \|_{H^4} \end{aligned}$$

Denotamos ahora

$$P = \| \nabla (\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \cdot \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon) \|_{H^4}$$

$$\mu = \nabla (\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \cdot \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon)$$

De este modo, se tiene

$$P \leq \| \mu \|_{L^2} + \| \nabla\mu \|_{H^3} \leq \| \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^2} \| \nabla r \|_{L^\infty} + \| \nabla\mu \|_{H^3}$$

Veamos cómo se puede acotar $\| \nabla\mu \|_{H^3}$. Dado que

$$\| \nabla\mu \|_{H^3}^2 = \sum_{0\leq|\alpha|\leq 3} \| D^\alpha \nabla\mu \|_{L^2}^2 = \sum_{0\leq|\alpha|\leq 3} \| D^{\alpha+1}\mu \|_{L^2}^2$$

distinguimos, al igual que en el caso anterior, 4 casos:

$$\begin{aligned}\diamond \| D\mu \|_{L^2} &\leq c \| D\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^2} \| \nabla r \|_{L^\infty} \\ &+ c \| \nabla(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{L^\infty} \| D\nabla r \|_{L^2}\end{aligned}$$

Haciendo uso de las desigualdades vistas anteriormente, conseguimos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\| D\mu \|_{L^2} &\leq c \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &+ c \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &\leq c \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &+ c \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &\leq \widetilde{c}\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\diamond \| D^2\mu \|_{L^2} &\leq c(\| D^2\nabla(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{L^2} \| \nabla r \|_{L^\infty} \\ &+ \| D\nabla(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{L^\infty} \| D\nabla r \|_{L^2} \\ &+ \| \nabla(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{L^\infty} \| D^2\nabla r \|_{L^2})\end{aligned}$$

De nuevo, aplicando las desigualdades correspondientes obtenemos

$$\begin{aligned}\| D^2\mu \|_{L^2} &\leq \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &+ \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &+ \| \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^2} \| m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &\leq c\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\diamond \| D^3\mu \|_{L^2} &\leq c \| D^3\nabla(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{L^2} \| \nabla r \|_{L^\infty} \\ &+ \| D^2\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^\infty} \| D\nabla r \|_{L^2} \\ &+ \| D\nabla(\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)) \|_{L^\infty} \| D^2\nabla r \|_{L^2} \\ &+ \| \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \|_{L^\infty} \| D^3\nabla r \|_{L^2}\end{aligned}$$

Al igual que en los casos anteriores se llega a

$$\begin{aligned}\| D^3\mu \|_{L^2} &\leq c \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &+ c \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &+ c \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &+ c \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| m^\varepsilon \|_{L^2} \\ &\leq \widetilde{c}\lambda \| n^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\diamond \parallel D^4\mu \parallel_{L^2} \leq c \parallel & D^4\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^2}\parallel \nabla r \parallel_{L^\infty} \\ & + \parallel D^3\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^\infty}\parallel D\nabla r \parallel_{L^2} \\ & + \parallel D^2\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^\infty}\parallel D^2\nabla r \parallel_{L^2} \\ & + \parallel D\nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^\infty}\parallel D^3\nabla r \parallel_{L^2} \\ & + \parallel \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{L^\infty}\parallel D^4\nabla r \parallel_{L^2}\end{aligned}$$

En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned}\parallel D^4\mu \parallel_{L^2} \leq & \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ & + \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ & + \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ & + \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ & + \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ \leq & \, c\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\end{aligned}$$

Luego en cualquier caso se observa que se verifica

$$\parallel \nabla\mu \parallel_{H^3} \leq c\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}$$

De este modo, volviendo hacia atrás vemos lo siguiente

$$\begin{aligned}I \leq & \, c \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon)\mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \parallel_{H^4} \\ & + \parallel \nabla\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \cdot \nabla N * \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \parallel_{H^4} \\ & \leq c \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - m^\varepsilon) \parallel_{H^4}\parallel \mathcal{J}_\varepsilon * m^\varepsilon \parallel_{H^4} + c\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\end{aligned} \tag{2.41}$$

Donde en la última desigualdad se ha utilizado (2.13)
De este modo llegamos a

$$\begin{aligned}I & \leq c \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel m^\varepsilon \parallel_{L^2} + c\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ & \leq c \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\parallel m^\varepsilon \parallel_{L^2} + c\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ & \leq \widetilde{c}\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\end{aligned} \tag{2.42}$$

Volviendo a (2.39) tenemos que

$$\begin{aligned}\parallel F_2(n^\varepsilon) - F_2(m^\varepsilon) \parallel & \leq \widetilde{c}\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} + \widetilde{c}\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2} \\ & \leq \widetilde{c}\lambda \parallel n^\varepsilon - m^\varepsilon \parallel_{L^2}\end{aligned} \tag{2.43}$$

que es lo que queríamos probar.

□

Así, hemos conseguido soluciones para cualquier $\varepsilon > 0$, las cuales existen hasta un tiempo T_ε. De existir el límite de n^ε durante un intervalo de tiempo, se tendría que dicho límite es solución del problema (2.21). Por tanto, debemos probar que toda solución regularizada tiene un intervalo de existencia común para todo ε suficientemente cercano a 0. Es decir, debemos asegurar que $\liminf_{\varepsilon \hookrightarrow 0} T_\varepsilon \neq 0$. De otra manera podría ocurrir que el tiempo de existencia del hipotético límite de esta familia fuese solo el instante $t = 0$.

2.3.3. Estimaciones de la energía

En este apartado haremos una estimación de la energía

$$E(t) = \| n^\varepsilon \|_{L^2}^2 + \| \partial_{x_1}^4 n^\varepsilon \|_{L^2}^2 + \| \partial_{x_2}^4 n^\varepsilon \|_{L^2}^2 \tag{2.44}$$

Está claro que

$$E(t) \leq \| n^\varepsilon \|_{H^4}^2$$

por la definición de espacio Sobolev que viene dada por (2.9). Veamos que también se cumple la desigualdad contraria, esto es

$$\| n^\varepsilon \|_{H^4}^2 \leq CE(t)$$

Para ello haremos uso de la definición (2.10) de espacio Sobolev según Fourier. Notemos que

$$\begin{aligned}
\| n \|_{H^4}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1+ \mid \xi \mid^2)^4 \mid \widehat{n}(\xi) \mid^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \max(\mid \xi_1 \mid^2, \mid \xi_2 \mid^2)^4) \mid \widehat{n}(\xi) \mid^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^2} (1 + (\mid \xi_1 \mid^8 + \mid \xi_2 \mid^8)) \mid \widehat{n}(\xi) \mid^2 d\xi \\
&\leq C(\| n \|_{L^2}^2 + \| \partial_{x_1}^4 n \|_{L^2}^2 + \| \partial_{x_2}^4 n \|_{L^2}^2)
\end{aligned}$$

Proposición 2. *Las soluciones regularizadas verifican*

$$E(t) \leq 2E(0) \quad \forall\ 0 \leq t \leq T^* \tag{2.45}$$

Demostración. El objetivo es conseguir una expresión de la forma

$$\frac{dE}{dt} \leq cE^k$$

para un cierto k. De esta manera, sin más que integrar esta desigualdad, obtendremos (2.45).
Por definición,

$$|| n ||_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} n^2(x,t)dx$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^{\varepsilon} \mid\mid_{L^2}^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} n^{\varepsilon}(x,t)^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} n^{\varepsilon}\left(\mathcal{J}_{\varepsilon}\Delta\mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\varepsilon}\nabla\cdot\left(\mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon}\nabla\left(N * \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon}\right)\right)\right)dx\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad (2.24) de los operadores $\mathcal{J}_{\varepsilon}$ se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^{\varepsilon} \mid\mid_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon}\Delta\mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon}\nabla\cdot(\mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon}\nabla(N * \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon}))dx$$

Para simplificar, denotamos $m = \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon}$. Así, tenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^{\varepsilon} \mid\mid_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} m\Delta m - m\nabla\cdot(m\nabla(N * m))dx$$

Fijamos $\Omega = B(0,R)$. Aplicando el Teorema de Green a la primera parte de la integral se llega a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^{\varepsilon} \mid\mid_{L^2}^2 = \int_{\partial\Omega} m\nabla m\cdot n\ dx - \int_{\Omega} \mid \nabla m \mid^2 dx - \int_{\Omega} m\nabla\cdot(m\nabla(N * m))dx$$

Observamos que la primera integral se anula en el límite. Aplicando de nuevo el teorema de Green a la tercera integral se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^{\varepsilon} \mid\mid_{L^2}^2 = -\int_{\mathbb{R}^2} \mid \nabla m \mid^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla m\cdot m\nabla(N * m)dx \tag{2.46}$$

Denotamos $\phi = N * m$. Por el lema 4, notemos que

$$\gamma\phi - \Delta\phi = m$$

Así,

$$\nabla m\cdot m\nabla\phi = \frac{\nabla(m^2)}{2}\nabla\phi$$

Sustituyendo en la ecuación (2.46), llegamos a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^{\varepsilon} \mid\mid_{L^2}^2 = -\int_{\mathbb{R}^2} \mid \nabla m \mid^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\nabla(m^2)}{2}\nabla\phi\ dx$$

Teniendo en cuenta de nuevo el teorema de Green en la segunda integral obtenemos lo siguiente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^{\varepsilon} \mid\mid_{L^2}^2 = -\int_{\mathbb{R}^2} \mid \nabla m \mid^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{m^3}{2}dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{m^2}{2}\gamma\phi\ dx$$

Veamos en primer lugar que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^\varepsilon \mid\mid_{L^2}^2 \leq cE^{3/2}$
Esto es, que

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \mid \nabla \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \mid^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)^3}{2} dx - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)^2}{2} \gamma\phi \, dx \leq cE^{3/2}$$

Por un lado, se tiene que

$$-\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \mid \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \mid^2 dx \leq 0$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)^3}{2} dx \leq \frac{1}{2} \max \mid \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \mid \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)^2 dx$$

Teniendo en cuenta (2.11) y (2.30) se dan las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \max \mid \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \mid &= \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{L^\infty} \\ &= \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{C^0} \\ &\leq c \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{H^4} \\ &\leq c \parallel n^\varepsilon \parallel_{H^4} \\ &\leq cE^{1/2} \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)^3}{2} dx &\leq \frac{1}{2} \max \mid \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \mid \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)^2 dx \\ &\leq cE^{1/2} \int_{\mathbb{R}^2} (n^\varepsilon)^2 dx \\ &\leq cE^{3/2} \end{aligned}$$

El último término se estima de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)^2}{2} \gamma\phi dx &\leq \frac{\gamma}{2} \max \mid \phi \mid \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)^2 dx \\ &\leq cE^{1/2} \int_{\mathbb{R}^2} (n^\varepsilon)^2 dx \\ &\leq cE^{3/2} \end{aligned}$$

Luego se llega a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid\mid n^\varepsilon \mid\mid_{L^2}^2 \leq cE^{\frac{3}{2}} \tag{2.47}$$

Veamos que ocurre con $\| \partial_{x_1}^4 n^\varepsilon \|_{L^2}^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \partial_{x_1}^4 n^\varepsilon \|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}^4 \; n^\varepsilon \; \partial_{x_1}^4 \partial_t \; n^\varepsilon dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}^4 n^\varepsilon \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta \partial_{x_1}^4 \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^2} \partial_{x_1}^4 n^\varepsilon \mathcal{J}_\varepsilon * \nabla \partial_{x_1}^4 \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)) dx\end{aligned}$$

Denotando $m = \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon$ y aplicando el teorema de Green se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \partial_{x_1}^4 n^\varepsilon \|_{L^2}^2 = - \int_{\mathbb{R}^2} | \nabla \partial_{x_1}^4 m |^2 \; dx + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \partial_{x_1}^4 m \partial_{x_1}^4 \left(m \nabla \left(N * m \right) \right) dx$$

Sea

$$R = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \partial_{x_1}^4 m \partial_{x_1}^4 \left(m \nabla \left(N * m \right) \right) dx$$

Aplicando la desigualdad de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.48}$$

llegamos a

$$R \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} | \nabla \partial_{x_1}^4 m |^2 \; dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\partial_{x_1}^4 \left(m \nabla \left(N * m \right) \right) \right)^2 dx \tag{2.49}$$

Para la primera integral, teniendo en cuenta (2.31) obtenemos

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} | \nabla \partial_{x_1}^4 m |^2 \; dx \leq c \int_{\mathbb{R}^2} \| n^\varepsilon \|_{L^2}^2 \; dx \leq cE \tag{2.50}$$

Para la segunda integral, distinguimos 5 casos en función de la posición del término $\partial_{x_1}^4$:

TÉRMINO 1: $\| m \nabla \partial_{x_1}^4 \phi \|_{L^2}^2$

En este primer caso las cuatro derivadas afectan a ϕ.
Tomando la norma infinito en m se tiene la siguiente desigualdad:

$$\| m \nabla \partial_{x_1}^4 \phi \|_{L^2}^2 \leq c \| m \|_{L^\infty}^2 \| \nabla \partial_{x_1}^4 \phi \|_{L^2}^2 \tag{2.51}$$

Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier vistas anteriormente obtenemos:

$$\begin{aligned}
\| \nabla\partial^4_{x_1}\phi \|^2_{L^2} &= \| \widehat{\nabla\partial^4_{x_1}\phi} \|^2_{L^2} \\
&= \| (i\xi_1)^4(i\xi)\widehat{\phi} \|^2_{L^2} \\
&= \| (i\xi_1)^4 \frac{(i\xi)}{\gamma + \mid \xi \mid^2}\widehat{m} \|^2_{L^2} \\
&\leq c \| \mid \xi \mid^3 \widehat{m} \|^2_{L^2} \\
&\leq c \| (\mid \xi_1 \mid^3 + \mid \xi_2 \mid^3)\widehat{m} \|^2_{L^2} \\
&\leq c \| \partial^3_{x_1} m \|^2_{L^2} + c \| \partial^3_{x_2} m \|^2_{L^2} \\
&\leq c \| m \|^2_{H^3}
\end{aligned}$$

Luego llegamos a

$$\| m\nabla\partial^4_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq c \| m \|^2_{L^\infty} \| m \|^2_{H^3}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\| m \|_{H^3} &\leq \| (1+ \mid \xi \mid^2)^{\frac{3}{2}}\widehat{m} \|_{L^2} \\
&\leq \| (1+ \mid \xi \mid^2)^{\frac{4}{2}}\widehat{m} \|_{L^2} \\
&= \| m \|_{H^4}
\end{aligned}$$

Por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\| m\nabla\partial^4_{x_1}\phi \|^2_{L^2} &\leq c \| m \|^2_{L^\infty} \| m \|^2_{H^4} \\
&\leq c \| m \|^4_{H^4}
\end{aligned}$$

Ahora, deshaciendo el cambio $m = \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon$ conseguimos la siguiente desigualdad

$$\| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla\partial^4_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq \widetilde{c} \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|^4_{H^4} \leq \widetilde{c} \| n^\varepsilon \|^4_{H^4} \leq \widetilde{c}E^2$$

TÉRMINO 2: $\| \partial_{x_1} m\nabla\partial^3_{x_1}\phi \|^2_{L^2}$

En este segundo caso una derivada afecta a m y las otras tres a ϕ.
Tomando la norma infinito en el término $\partial_{x_1} m$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$\| \partial_{x_1} m\nabla\partial^3_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq c \| \partial_{x_1} m \|^2_{L^\infty} \| \nabla\partial^3_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \tag{2.52}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\| \nabla\partial^3_{x_1}\phi \|^2_{L^2} &= \| \widehat{\nabla\partial^3_{x_1}\phi} \|^2_{L^2} \\ &= \| (i\xi)(i\xi_1^3)\widehat{\phi} \|^2_{L^2} \\ &= \| (i\xi)(i\xi_1^3)\frac{\widehat{m}}{\gamma + \mid \xi \mid^2} \|^2_{L^2} \\ &\leq c \| \mid \xi_1 \mid^2 \widehat{m} \|^2_{L^2} \\ &\leq c \| (\mid \xi_1 \mid^2 + \mid \xi_2 \mid^2)\widehat{m} \|^2_{L^2} \\ &\leq c \| \partial^2_{x_1} m \|^2_{L^2} + c \| \partial^2_{x_2} m \|^2_{L^2} \\ &\leq c \| m \|^2_{H^2}\end{aligned}$$

Deducimos lo siguiente:

$$\| \partial_{x_1} m \nabla\partial^3_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq c \| \partial_{x_1} m \|^2_{H^2} \| m \|^2_{H^2}$$

Por otro lado,

$$\| \partial_{x_1} m \|^2_{H^2} \leq c \| m \|^2_{H^3} \leq \| m \|^2_{H^4}$$

Luego

$$\| \partial_{x_1} m \nabla\partial^3_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq c \| m \|^4_{H^4}$$

Ahora, deshaciendo el cambio $m = \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon$ se llega a

$$\begin{aligned}\| \partial_{x_1}\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla\partial^3_{x_1}\phi \|^2_{L^2} &\leq c \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|^4_{H^4} \\ &\leq c \| n^\varepsilon \|^4_{H^4} \\ &\leq cE^2\end{aligned}$$

TÉRMINO 3: $\| \partial^2_{x_1} m \nabla\partial^2_{x_1}\phi \|^2_{L^2}$

En este caso, dos derivadas afectan a m y las otras dos a ϕ
Tomando la norma infinito en el término $\partial^2_{x_1} m$ conseguimos la siguiente desigualdad:

$$\| \partial^2_{x_1} m \nabla\partial^2_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq \| \partial^2_{x_1} m \|^2_{L^\infty} \| \nabla\partial^2_{x_1}\phi \|^2_{L^2}$$

De igual modo, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\| \nabla\partial^2_{x_1}\phi \|^2_{L^2} &= \| \widehat{\nabla\partial^2_{x_1}\phi} \|^2_{L^2} \\
&= \| (i\xi)(i\xi_1^2)\widehat{\phi} \|^2_{L^2} \\
&= \| (i\xi)(i\xi_1^2)\frac{\widehat{m}}{\gamma + \mid \xi \mid^2} \|^2_{L^2} \\
&\leq c \|\mid \xi_1 \mid \widehat{m} \|^2_{L^2} \\
&\leq c \| (\mid \xi_1 \mid + \mid \xi_2 \mid)\widehat{m} \|^2_{L^2} \\
&\leq c \| \partial_{x_1} m \|^2_{L^2} + c \| \partial_{x_2} m \|^2_{L^2} \\
&\leq c \| m \|^2_{H^1} \\
&\leq c \| m \|^2_{H^2}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\| \partial^2_{x_1} m\nabla\partial^2_{x_1}\phi \|^2_{L^2} &\leq c \| \partial^2_{x_1} m \|^2_{H^2} \| m \|^2_{H^1} \\
&\leq \widetilde{c} \| \partial^2_{x_1} m \|^2_{H^2} \| m \|^2_{H^2}
\end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$\| \partial^2_{x_1} m \|^2_{H^2} \leq \| m \|^2_{H^4}$$

Se llega a

$$\| \partial^2_{x_1} m\nabla\partial^2_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq \widetilde{c} \| m \|^4_{H^4}$$

De nuevo, deshaciendo el cambio $m = \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon$ y aplicando la propiedad (2.31) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\| \partial^2_{x_1} \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla\partial^2_{x_1}\phi \|^2_{L^2} &\leq \widetilde{c} \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|^4_{H^4} \\
&\leq \widetilde{c} \| n^\varepsilon \|^4_{H^4} \\
&\leq \widetilde{c} E^2
\end{aligned}$$

TÉRMINO 4: $\| \partial^3_{x_1} m\nabla\partial_{x_1}\phi \|^2_{L^2}$

En este caso, tres derivadas afectan a m y una a ϕ
Tomando la norma infinito en el término $\nabla\partial_{x_1}\phi$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$\| \partial^3_{x_1} m\nabla\partial_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq \| \partial^3_{x_1} m \|^2_{L^2} \| \nabla\partial_{x_1}\phi \|^2_{L^\infty} \tag{2.53}$$

Aplicando, al igual que en los casos anteriores, las propiedades de la transformada de Fourier, conseguimos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\| \partial^3_{x_1} m \|^2_{L^2} &= \| \widehat{\partial^3_{x_1} m} \|^2_{L^2} \\ &= \| (i\xi_1)^3 \widehat{m} \|^2_{L^2} \\ &\leq \| \xi_1^3 \widehat{m} \|^2_{L^2} \\ &\leq \| \partial^3_{x_1} m \|^2_{L^2} \\ &\leq \| m \|^2_{H^3}\end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta por (2.11) y (2.19) que:

$$\| \nabla\partial_{x_1}\phi \|^2_{L^\infty} \leq \| \nabla\partial_{x_1}\phi \|^2_{H^2} \leq \| m \|^2_{H^2} \leq \| m \|^2_{H^3}$$

Se llega a

$$\| \partial^3_{x_1} m \nabla\partial_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq \widetilde{c} \| m \|^4_{H^3} \leq \widetilde{c} \| m \|^4_{H^4}$$

De nuevo, deshaciendo el cambio $m = \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon$ y aplicando la propiedad (2.31) obtenemos:

$$\| \partial^3_{x_1} \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla\partial_{x_1}\phi \|^2_{L^2} \leq \widetilde{c} \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|^4_{H^4} \leq \widetilde{c} \| n^\varepsilon \|^4_{H^4} \leq \widetilde{c} E^2$$

TÉRMINO 5: $\| \partial^4_{x_1} m \nabla\phi \|^2_{L^2}$

En este último caso se estudia lo que ocurre cuando las cuatro derivadas afectan a m.
Tomando la norma infinito en el término $\nabla\phi$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$\| \partial^4_{x_1} m \nabla\phi \|^2_{L^2} \leq \| \partial^4_{x_1} m \|^2_{L^2} \| \nabla\phi \|^2_{L^\infty}$$

Procediendo igual que en los casos anteriores:

$$\begin{aligned}\| \partial^4_{x_1} m \|^2_{L^2} &= \| \widehat{\partial^4_{x_1} m} \|^2_{L^2} \\ &= \| (i\xi_1^4) \widehat{m} \|^2_{L^2} \\ &\leq \| \xi_1^4 \widehat{m} \|^2_{L^2} \\ &\leq c \| \partial^4_{x_1} m \|^2_{L^2} \\ &\leq c \| m \|^2_{H^4}\end{aligned}$$

Se llega a

$$\| \partial^4_{x_1} m \nabla\phi \|^2_{L^2} \leq c \| m \|^2_{H^4} \| \nabla\phi \|^2_{L^\infty} \leq c \| m \|^2_{H^4} \| \nabla\phi \|^2_{H^2}$$

Donde en la última desigualdad se ha usado (2.11)
Teniendo en cuenta que

$$\| \nabla\phi \|_{H^2} \leq \| \phi \|_{H^3} \leq c \| m \|_{H^1} \leq c \| m \|_{H^4}$$

Se concluye que

$$\| \partial_{x_1}^4 m \nabla\phi \|_{L^2}^2 \leq c \| m \|_{H^4}^4$$

Y deshaciendo el cambio $m = \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon$ llegamos a

$$\| \partial_{x_1}^4 \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla\phi \|_{L^2}^2 \leq c \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^4}^4 \leq c \| n^\varepsilon \|_{H^4}^4$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\| m \|_{H^4}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+ | \xi |^2)^4 \mid \widehat{m}(\xi) \mid^2 d\xi \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} (1 + (| \xi_1 |^2 + | \xi_2 |^2))^4 \mid \widehat{m}(\xi) \mid^2 d\xi \\
&\leq C(\| \widehat{m}(\xi) \|_{L^2}^2 + \| \partial_{x_1}^4 m \|_{L^2}^2 + \| \partial_{x_2}^4 m \|_{L^2}^2)
\end{aligned}$$

Por lo que se tiene entonces que

$$\| \partial_{x_1}^4 \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla\phi \|_{L^2}^2 \leq c \| n^\varepsilon \|_{H^4}^4 \leq c \| n^\varepsilon \|_{L^2}^4 \leq cE^2$$

De este modo llegamos a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \partial_{x_1}^4 n^\varepsilon \|_{L^2}^2 \leq c(E + E^2) \tag{2.54}$$

El caso para $\| \partial_{x_2}^4 n^\varepsilon \|_{L^2}^2$ es análogo, esto es:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \partial_{x_2}^4 n^\varepsilon \|_{L^2}^2 \leq c(E + E^2) \tag{2.55}$$

Usando (2.47), observamos que

$$\frac{d}{dt}E \leq c(E^2 + 1) \tag{2.56}$$

De aquí se obtiene T^* tal que

$$E(t) \leq 2E(0) \ \forall t \leq T^* \tag{2.57}$$

□

Notar que T^* no depende de ε. De hecho, $T^* \leq T_\varepsilon \ \ \forall\varepsilon > 0$.
De esta manera, hemos obtenido un tiempo de existencia uniforme T^* en el parámetro de regularización. Por último, vamos a probar la existencia de límite n^ε durante el intervalo $[0, T^*]$.

2.3.4. Paso al límite

En esta sección vamos a probar la existencia de límite n^ε durante el intervalo $[0, T^*]$. Para ello probaremos que la sucesión n^ε es de Cauchy en un determinado espacio de Banach. Puesto que toda sucesión de Cauchy en un espacio de Banach es convergente, quedaría visto.

Proposición 3. *La familia n^ε forma una sucesión de Cauchy en $C([0,T^*];L^2)$. En particular, existe una constante C que depende de $\| n_0 \|_{H^4}$ y T^*, tal que para todos ε y $\widetilde{\varepsilon}$ se tiene*

$$\sup_{0\leq t\leq T^*} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \leq C \max\{\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}\} \tag{2.58}$$

Demostración.

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} | n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} |^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})(n_t^\varepsilon - n_t^{\widetilde{\varepsilon}})dx$$

Sustituyendo n_t^ε y $n_t^{\widetilde{\varepsilon}}$ por su expresión correspondiente tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{1}{2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon \Delta \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \Delta \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)) \\
&\qquad - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}))(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \\
&= T_1 + T_2
\end{aligned}$$

Empezamos estimando el término T_1. Para ello introducimos el siguiente término cruzado $\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon \Delta \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \Delta \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\widetilde{\varepsilon}})(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx
\end{aligned}$$

Denotamos T_{11} a la primera integral, y T_{12} a la segunda. Así, tenemos:

$$T_{11} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx$$

Añadimos de nuevo un término cruzado, en este caso es $\mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \end{aligned}$$

De esta manera denotamos

$$\begin{aligned} T_{111} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} ((\mathcal{J}_\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}}) * \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{112} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} ((\mathcal{J}_\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}}) * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a T_{111} tenemos:

$$T_{111} \leq \| (\mathcal{J}_\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}}) * \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2}$$

Introducimos ahora el término $\mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon$ y aplicando la desigualdad triangular, llegamos a:

$$\begin{aligned} T_{111} \leq &\| \mathcal{J}_\varepsilon * \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ &+ \| \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \end{aligned}$$

Por (2.26) conseguimos lo siguiente

$$\begin{aligned} T_{111} &\leq (C\varepsilon \| \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon \|_{H^1} + C\widetilde{\varepsilon} \| \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon \|_{H^1}) \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ &\leq C(\varepsilon + \widetilde{\varepsilon}) \| \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon \|_{H^1} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ &\leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon})(\| \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon \|_{H^1} + \| \mathcal{J}_\varepsilon * \Delta n^\varepsilon \|_{H^1}) \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ &\leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon})(\| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^3} + \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^3}) \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ &\leq C\sqrt{E(0)} \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \end{aligned}$$

El caso para T_{112} es análogo:

$$\begin{aligned} T_{112} &= \int_{\mathbb{R}^2} ((\mathcal{J}_\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}}) * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}})dx \\ &\leq \| (\mathcal{J}_\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}}) * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^\varepsilon) \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \end{aligned}$$

Introducimos el término cruzado $\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} T_{112} \leq & \| \mathcal{J}_{\varepsilon} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} \|_{L^2} \| n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ & + \| \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} \|_{L^2} \| n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo (2.26) y propiedades de los mollifiers llegamos a la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} T_{112} & \leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon})(\| \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} \|_{H^1} + \| \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} \|_{H^1}) \| n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ & \leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon})(\| \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} \|_{H^3} + \| \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} \|_{H^3}) \| n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ & \leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \| n^{\varepsilon} \|_{H^3} \| n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\ & \leq C \sqrt{E(0)} \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \| n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \end{aligned}$$

Respecto a T_{12} tenemos:

$$\begin{aligned} T_{12} & = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \Delta n^{\widetilde{\varepsilon}})(n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \Delta (n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}})(n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * (n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) \Delta \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * (n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Green a T_{12} obtenemos lo siguiente:

$$T_{12} = - \int_{\mathbb{R}^2} | \nabla \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * (n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx$$

El término T_2 viene dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} T_2 = \int_{\mathbb{R}^2} & (\mathcal{J}_{\varepsilon} \nabla \cdot (\mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon} \nabla (N * \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon})) \\ & - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}))(n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \end{aligned}$$

Para simplificar notación, denotamos

$$m^{\varepsilon} = \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon} \nabla (N * \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\varepsilon})$$

$$m^{\widetilde{\varepsilon}} = \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})$$

Añadimos el término cruzado $\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^{\varepsilon}$.
De este modo se tiene

$$\begin{aligned} T_2 = & \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\varepsilon} \nabla \cdot m^{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^{\varepsilon})(n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^{\widetilde{\varepsilon}})(n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \end{aligned}$$

Lo separamos ahora en dos de la siguiente manera

$$T_{21} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon \nabla \cdot m^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx$$

$$T_{22} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^{\widetilde{\varepsilon}})(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx$$

Empezamos por T_{21}. De nuevo añadimos sumando y restando el término cruzado $m^\varepsilon = \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon)$

$$T_{21} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon \nabla \cdot m^\varepsilon - m^\varepsilon + m^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx$$

De igual modo, separamos en dos términos

$$T_{211} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_\varepsilon \nabla \cdot m^\varepsilon - m^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx$$

$$T_{212} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^\varepsilon - m^\varepsilon)(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx$$

Aplicando ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz tanto a T_{221} como a T_{212}, y teniendo en cuenta (2.26) obtenemos:

$$\begin{aligned}
T_{211} &\leq \| \mathcal{J}_\varepsilon \nabla \cdot m^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\varepsilon \ \| m^\varepsilon \|_{H^1} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\varepsilon \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^2} \| \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) \|_{H^1} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\varepsilon \| n^\varepsilon \|_{H^2} \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\varepsilon \| n^\varepsilon \|_{H^2} \| n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\varepsilon \ E(0) \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{212} &\leq \| \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^\varepsilon - m^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\widetilde{\varepsilon} \| m^\varepsilon \|_{H^1} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\widetilde{\varepsilon} \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^1} \| \nabla (N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) \|_{H^1} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\widetilde{\varepsilon} \| n^\varepsilon \|_{H^1} \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\widetilde{\varepsilon} \| n^\varepsilon \|_{H^1} \| n^\varepsilon \|_{L^2} \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2} \\
&\leq C\widetilde{\varepsilon} \ E(0) \| n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \|_{L^2}
\end{aligned}$$

Respecto a T_{22} tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
T_{22} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^\varepsilon - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot m^{\widetilde{\varepsilon}})(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (m^\varepsilon - m^{\widetilde{\varepsilon}}))(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx
\end{aligned}$$

En este caso añadimos el término cruzado $\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}}\nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}})$ consiguiendo de este modo

$$\begin{aligned} T_{22} =& \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla(N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}}\nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}} \nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}}) - \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}}\nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx \end{aligned}$$

Denotamos T_{221} y T_{222} a estas dos integrales. Empezamos por T_{221}

$$T_{221} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon \nabla(N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) - n^{\tilde{\varepsilon}}\nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}}))))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx$$

En este caso añadimos el término cruzado $n^\varepsilon\nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}})$. De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned} T_{221} =& \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon \nabla(N * \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon) - n^\varepsilon\nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon \nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}}) - n^{\tilde{\varepsilon}}\nabla(N * \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx \end{aligned}$$

Denotamos T_{2211} y T_{2212} a la primera y segunda integral respectivamente.

$$T_{2211} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla(N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}}))))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx$$

Añadimos el término $\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned} T_{2211} =& \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla(N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla(N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}} - \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx \end{aligned}$$

Denotamos T_{22111} y T_{22112} a estas dos nuevas integrales

$$T_{22111} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla(N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx$$

$$T_{22112} = \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla(N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}} - \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}} * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx$$

Empezando por T_{22111}

$$\begin{aligned} T_{22111} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla(N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla(N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\tilde{\varepsilon}})) \cdot \mathcal{J}_{\tilde{\varepsilon}}\nabla(n^\varepsilon - n^{\tilde{\varepsilon}})dx \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young a esta integral obtenemos

$$T_{22111} \leq d^2 \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}})) |^2 \, dx$$
$$+ \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx$$

Para el segundo término veremos más adelante qué valor de d podemos tomar para que este término sea absorbido junto con T_{12}. Respecto al primer término actuamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
T_{22111} &\leq d^2 \int_{|\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}})) |^2 \, dx \\
&\quad + \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx \\
&\leq C \operatorname{máx} | \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon |^2 \int_{\mathbb{R}^2} | \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}})) |^2 \, dx \\
&\quad + \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx \\
&\leq C \, \| \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \|_{H^2}^2 \| \, N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon - \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \, \|_{H^1}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx \\
&\leq C \, \| \, n^\varepsilon \, \|_{H^2}^2 \| \, \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) \, \|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx \\
&\leq C E(0) \, \| \, n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \, \|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx
\end{aligned}$$

donde para las anteriores desigualdades se han usado propiedades de los mollifiers vistas anteriormente así como (2.17).
Respecto a T_{22112}, añadimos ahora sumando y restando $n^{\widetilde{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned}
T_{22112} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}}))))(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}}))))(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx
\end{aligned}$$

Tomando normas llegamos a

$$\begin{aligned}
T_{22112} &\leq \| \, \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}} + n^{\widetilde{\varepsilon}} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})) \, \|_{L^2} \| \, n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \, \|_{L^2} \\
&\leq C \, \| \, \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}} + n^{\widetilde{\varepsilon}} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \, \|_{H^1} \| \, n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \, \|_{L^2}
\end{aligned}$$

Aplicando ahora (2.14) y (2.19) tenemos

$$\begin{aligned}
T_{22112} &\leq C \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * n^\varepsilon \parallel_{H^2} \parallel \nabla (N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}} + n^{\widetilde{\varepsilon}} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{H^1} \parallel n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C \parallel n^\varepsilon \parallel_{H^2} \parallel N * (\mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}} + n^{\widetilde{\varepsilon}} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{H^2} \parallel n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C \parallel n^\varepsilon \parallel_{H^2} \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}} + n^{\widetilde{\varepsilon}} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \parallel n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C \parallel n^\varepsilon \parallel_{H^2} (\parallel \mathcal{J}_\varepsilon * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} + \parallel \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}) \parallel n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}
\end{aligned}$$

Por último, aplicando (2.26) se tiene

$$\begin{aligned}
T_{22112} &\leq C\sqrt{E(0)}(\varepsilon \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^1} + \widetilde{\varepsilon} \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^1}) \parallel n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C\sqrt{E(0)}\,\text{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^1} \parallel n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq CE(0)\,\text{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \parallel n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}
\end{aligned}$$

Volvemos ahora con T_{2212}

$$\begin{aligned}
T_{2212} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) - n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})))(n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \cdot \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx
\end{aligned}$$

Aplicamos de nuevo la desigualdad de Young a esta última integral y obtenemos

$$\begin{aligned}
T_{2212} &\leq d^2 \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) \cdot \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx \\
&+ \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx
\end{aligned}$$

El segundo término, tomando $d = 1$, será absorbido junto con T_{22111} por T_{12}. Con el primer término actuamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
T_{2212} &\leq d^2 \parallel \mathcal{J}_\varepsilon * (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{L^2}^2 \parallel \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{L^\infty}^2 \\
&+ \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx
\end{aligned}$$

Aplicando ahora (2.28) y (2.11) tenemos

$$T_{2212} \leq d^2 \parallel n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}^2 \parallel N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^3}^2 + \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^\varepsilon - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx$$

Por último, aplicando (2.19) se llega a

$$
\begin{aligned}
T_{2212} &\leq d^2 \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}^2 \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^1}^2 + \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx \\
&\leq d^2 E(0) \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}^2 + \frac{1}{4d^2} \int_{\mathbb{R}^2} | \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) |^2 \, dx
\end{aligned}
$$

Respecto a T_{222} tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
T_{222} &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})))(n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})))(n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot ((\mathcal{J}_{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}}) * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})))(n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}}) dx
\end{aligned}
$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$
T_{222} \leq \parallel \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot ((\mathcal{J}_{\varepsilon} - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}}) * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})) \parallel_{L^2} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}
$$

Introducimos ahora el término cruzado $n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})$ y aplicando la desigualdad triangular se tiene:

$$
\begin{aligned}
T_{222} &\leq (\parallel \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) - n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}})) \parallel_{L^2} \\
&\quad + \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) - \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} \nabla \cdot (\mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}))) \parallel_{L^2}) \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C(\parallel \mathcal{J}_{\varepsilon} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) - n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{H^1} \\
&\quad + \parallel \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) - n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{H^1}) \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}
\end{aligned}
$$

Aplicando (2.26) y (2.19) llegamos a:

$$
\begin{aligned}
T_{222} &\leq C\varepsilon \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{H^2} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\quad + C\widetilde{\varepsilon} \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{H^2} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{H^2} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^2} \parallel \nabla (N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}}) \parallel_{H^2} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^2} \parallel N * \mathcal{J}_{\widetilde{\varepsilon}} * n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^3} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^2} \parallel n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{H^1} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \\
&\leq C \operatorname{máx}(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) E(0) \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}
\end{aligned}
$$

De este modo, volviendo al inicio de la demostración, rescordemos que partiamos de lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{1}{2} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}^2 &= T_1 + T_2 \\ &= T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22} \\ &= T_{111} + T_{112} + T_{12} + T_{211} + T_{212} + T_{221} + T_{222} \\ &= T_{111} + T_{112} + T_{12} \\ &\quad + T_{211} + T_{212} + T_{2211} + T_{2212} + T_{222} \\ &= T_{111} + T_{112} + T_{12} \\ &\quad + T_{211} + T_{212} + T_{22111} + T_{22112} + T_{2212} + T_{222}\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta todas las desigualdades calculadas anteriormente llegamos a

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}^2 \leq C(E(0)+1) \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} (\max(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) + \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2})$$

$$\frac{d}{dt} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \leq C(E(0)+1)(\max(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) + \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}) \tag{2.59}$$

Denotamos

$$I = \max(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon}) + \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2}$$

Así, por (2.59) tenemos

$$I' \leq C(E(0)+1)I$$

y resolviendo esta EDO obtenemos

$$\sup_{0\leq t\leq T^*} \parallel n^{\varepsilon} - n^{\widetilde{\varepsilon}} \parallel_{L^2} \leq I(0)e^{C(E(0)+1)T^*} \leq \max(\varepsilon, \widetilde{\varepsilon})e^{C(E(0)+1)T^*}$$

ya que a tiempo cero se verifica $n_0^{\varepsilon} = n_0^{\widetilde{\varepsilon}}$. Se tiene por tanto que n^{ε} es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $C\{[0,T^*]; L^2(\mathbb{R}^2)\}$, por lo que es convergente y existe límite en $C\{[0,T^*]; L^2(\mathbb{R}^2)\}$. Esto es, hemos probado la existencia de un n tal que

$$\sup_{0\leq t\leq T^*} \parallel n^{\varepsilon} - n \parallel_{L^2} \leq C\varepsilon \tag{2.60}$$

Usamos el hecho de que la sucesión n^{ε} está uniformemente acotada en H^4 (visto en las estimaciones de la energía, ver proposición 2) para probar que tenemos convergencia en todas las normas intermedias para $0 < s' < 4$. Para ello haremos uso del lema 3 visto anteriormente:

$$\parallel n^{\varepsilon} - n \parallel_{H^{s'}} \leq C_s \parallel n^{\varepsilon} - n \parallel_{L^2}^{1-s'/4} \parallel n^{\varepsilon} - n \parallel_{H^4}^{s'/4} \tag{2.61}$$

Obteniendo lo siguiente

$$\sup_{0\leq t\leq T^*} \| n^\varepsilon - n \|_{H^{s'}} \leq C\varepsilon^{1-s'/4}E^{s'/4}(0) \tag{2.62}$$

De este modo, para $s' < 4$ tenemos convergencia en $C\{[0,T^*]; H^{s'}(\mathbb{R}^2)\}$. Además, como $n^\varepsilon \to n$, el límite de n_t^ε debe ser n_t, por lo que n es solución del sistema de ecuaciones de Keller-Segel (1.1).

□

Así, teniendo en cuenta las anteriores secciones, hemos demostrado por el teorema de Picard la existencia y unicidad de solución para el problema regularizado. A partir de las estimaciones de la energía obtenidas hemos conseguido un tiempo de existencia uniforme, y pasando al límite en este último apartado queda probada la existencia y unicidad de solución para el problema (1.1) hasta tiempo T^*.

Capítulo 3

Singularidades en tiempo finito

Consideramos el problema (1.1) para el caso $\gamma = 0$. De este modo se tiene

$$\begin{cases} n_t(x,t) - \Delta n(x,t) = -\nabla \cdot (n(x,t)\nabla v(x,t)) & x \in \mathbb{R}^2,\ t \in [0,T] \\ -\Delta v(x,t) = n(x,t) & \\ n(x,0) = n_0(x) & \end{cases} \tag{3.1}$$

El problema (3.1) tiene la característica de que las soluciones pueden ser no acotadas en tiempo finito, lo que se conoce como explosión en tiempo finito o blow-up. Notemos que el comportamiento de (3.1) depende de la dimensión que consideremos. En dimensión 1 no se produce blow-up, mientras que en dimensión 2 existe una masa crítica a partir de la cual las soluciones explotan en tiempo finito, y por debajo de la cual las soluciones son globales. Para más información sobre estos dos casos y el resto de dimensiones, consultar [5]. A continuación estudiaremos que para el caso $M > 8\pi$ las soluciones explotan en tiempo finito, mientras que para $M < 8\pi$ la solución existe globalmente. Una prueba detallada de la existencia de solución global para el caso $M < 8\pi$ aparece en [4]. El caso para $M = 8\pi$ puede consultarse en [2] y [3].
Introducimos los siguientes lemas:

Lema 5. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap C^1(\mathbb{R}^2)$ y $\int |\, f(x) \,| \log(|\, x \,|)dx < \infty$. La solución $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de la ecuación de Poisson*

$$-\Delta u = f \tag{3.2}$$

viene dada por la convolución

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} N(x-y) f(y) dy \tag{3.3}$$

donde $N(x)$ viene dado por

$$N(x) = -\frac{1}{2\pi} \log(|\, x \,|)$$

Proposición 4. *Sea* $n \in L^1$ *una solución no nula de* (3.1) *en un intervalo* *[0,T] tal que* $M = \int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)dx$ *y* $\int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 n_0(x)dx < \infty$. *Entonces también se cumple*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 n(x)dx = 4M\left(1 - \frac{M}{8\pi}\right) \tag{3.4}$$

Demostración. Empezamos viendo que la masa se conserva, esto es, se verifica que $\| n(t) \|_{L^1} = M = \| n_0 \|_{L^1}$ para $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t} n(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta n - \nabla \cdot (n\nabla v))dx = 0$$

Siendo la última igualdad cierta por el teorema de la divergencia. Pasamos ahora a comprobar que se cumple (3.4), procediendo de igual modo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 n(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 \frac{\partial}{\partial t} n(x,t)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 (\Delta n - \nabla \cdot (n\nabla v))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 \Delta n \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 \nabla \cdot (n\nabla v)dx \end{aligned} \tag{3.5}$$

Respecto a la primera integral, aplicando el teorema de Green, tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 \Delta n \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta | x |^2 n \, dx = 4\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t) \, dx$$

Denotamos $I = -\int_{\mathbb{R}^2} | x |^2 \nabla \cdot (n\nabla v)dx$
Aplicando el teorema de Green y sustituyendo $v(x)$ por la expresión
$v(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(| x - y |)n(y) \, dy$

se llega a

$$\begin{aligned}
I &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \mid x \mid^2 \cdot \left(n(x)\nabla \left(\frac{1}{2\pi}\log(\mid x-y \mid)n(y) \right) \right) \, dxdy \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} x \cdot n(x)\nabla \left(\frac{1}{2\pi}\log(\mid x-y \mid)n(y) \right) dxdy \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} x \cdot n(x)n(y)\frac{(x-y)}{\mid x-y \mid^2} \, dxdy \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} y \cdot n(y)n(x)\frac{y-x}{\mid x-y \mid^2} \, dxdy \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} n(x)n(y)\frac{(x-y)}{\mid x-y \mid^2} \cdot \{x-y\} \, dxdy \\
&= -\frac{M^2}{2\pi}
\end{aligned}$$

De este modo, volviendo a (3.5) obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \mid x \mid^2 n(x)dx = 4M - \frac{M^2}{2\pi} = 4M\left(1-\frac{M}{8\pi}\right) \tag{3.6}$$

$\square$

Teorema 3. *Sea $n_0 \in H^4$ un dato inicial tal que $\| \; n_0 \; \|_{L^1} = M > 8\pi$. Entonces la solución del sistema* (3.1) *tiene singularidades en tiempo finito.*

Demostración. Notar que si la solución existiera globalmente en t para el caso $M > 8\pi$, entonces $\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} \mid x \mid^2 n(x)dx$ se volvería negativa.

Veamos que esto no es posible: Partiendo de que la solución es no negativa, para que se haga negativa, tiene que existir un punto donde $n(z,t) = 0$, lo que implica que $n_x(z,t) = 0$ por ser z un mínimo. Pero como $n_t(z,t) \geq 0$, se llega de este modo a una contradicción con el hecho de que n se haga negativa.
Es por esto que para $M > 8\pi$ hay un tiempo de explosión finito donde las soluciones se convierten en medidas singulares. $\square$

Bibliografía

[1] Berg, H. C., & Tedesco, P. M. (1975). Transient response to chemotactic stimuli in Escherichia coli. Proceedings of the National Academy of Sciences, 72(8), 3235-3239.

[2] Biler, P., Karch, G., Laurençot, P., & Nadzieja, T. (2006). The 8π-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in a disc. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 27(1), 133-147.

[3] Biler, P., Karch, G., Laurençot, P., & Nadzieja, T. (2006). The 8π-problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane. Mathematical methods in the applied sciences, 29(13), 1563-1583.

[4] Blanchet, A., Dolbeault, J., & Perthame, B. (2006). Two-dimensional Keller-Segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only], Paper-No.

[5] Calvez, V., Perthame, B., & Sharifi Tabar, M. (2006). Modified Keller-Segel system and critical mass for the log interaction kernel. Preprint

[6] Cheng, C. A., Granero-Belinchón, R., & Shkoller, S. (2016). Well-posedness of the Muskat problem with H2 initial data. Advances in Mathematics, 286, 32-104.

[7] Horstmann, D. (2003). From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein, 105, pp. 103-165

[8] Keller, E. F., & Segel, L. A. (1970). Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. Journal of theoretical biology, 26(3), 399-415.

[9] Keller, E. F., & Segel, L. A. (1971). Model for chemotaxis. Journal of theoretical biology, 30(2), 225-234.

[10] Keller, E. F., & Segel, L. A. (1971). Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis. Journal of theoretical biology, 30(2), 235-248.

[11] Majda, A., & Bertozzi, A. L. (2003). Vorticity and incompressible flow. Cambridge University Press.

[12] Painter, K. J. (2019). Mathematical models for chemotaxis and their applications in self-organisation phenomena. Journal of theoretical biology, 481, 162-182.

[13] Patlak, C. S. (1953). Random walk with persistence and external bias. The bulletin of mathematical biophysics, 15(3), 311-338.

[14] Weijer, C. J. (2004). Dictyostelium morphogenesis. Current opinion in genetics & development, 14(4), 392-398.

[15] Wikipedia. Screened Poisson equation. Disponible en:
https://en.wikipedia.org/wiki/Screened_Poisson_equation
Consulta: 24 abril 2020