



FACULTAD DE CIENCIAS

**GRADO DE INTERMEDIACIÓN DE
UN GRAFO**
(Betweenness Degree in Graphs)

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al
Grado en Matemáticas

Autor: Íñigo Mazo Vaquero
Director: Daniel Sadornil Renedo

Febrero 2020

Agradecimientos

En primer lugar, gracias a mi director Dani, por hacer este camino más ameno y entretenido, por su preocupación, atención e interés. Has conseguido que acabe esta carrera con un buen sabor de boca.

Gracias a Paco Santos por la ayuda proporcionada en la elaboración de la memoria. Gracias también a Cecilia Pola por enseñarme que con constancia y esfuerzo se pueden alcanzar los objetivos que te propongas y por los dos años que la he tenido de profesora.

Por otro lado, gracias a las personas que más me han apoyado durante estos años, mi familia. Han sido muchos años con momentos complicados y aunque no quieras, son ellos con los que se paga los platos rotos. Gracias a mis padres Jose y Blanca, si no fuera por ellos yo no hubiera llegado hasta aquí. A mi hermano Gonzalo por enseñarme, aunque no lo crea, a vivir de una manera diferente. Gracias a mis abuelos, tíos, primas y toda mi familia que esté orgullosa y feliz por verme aquí. Gracias a Sampedro, Alfonso, Fer y Juanmi.

Por último, pero no menos importante, gracias a mis compañeros de carrera, esas personas que han hecho de esto un viaje más llevadero. En primer lugar, gracias a Irene, la persona que empezó y acaba conmigo y con la que más he compartido estos años, lloros, risas, horas de estudio y de ocio. Gracias a Nacho y Guille por demostrarme que lo importante no es cuando llegues, si no hasta cuando estás dispuesto a quedarte. Gracias también a Toraya, Alex, Adri, Varito, Raquel, Victor, Andrea, Pisano, Silvia y Lucía por aportarme solo cosas positivas, por enseñarme durante este tiempo que nunca terminas de aprender.

A todos vosotros, GRACIAS.

Resumen

En un grafo pueden existir una gran variedad de medidas de centralidad que nos permiten, dentro del contexto de red social, identificar a las personas más relevantes, prestigiosas o importantes dentro de la red. Las personas con mayor centralidad, tienen una conexión más directa con el resto de individuos que cualquier otro miembro de la red.

En particular, se estudiará la medida grado de intermediación (o betweenness) de un vértice de un grafo que mide la influencia que tiene en la conectividad del grafo y también la intermediación del grafo. A lo largo de la memoria se estudiarán aspectos como la intermediación de familias de grafos conocidos, cotas para el grado de intermediación o grafos cuya intermediación es la misma/distinta para todos sus vértices.

Palabras clave: Teoría de Grafos, Medida de centralidad e Intermediación.

Abstract

A great variety of centrality measures can be defined on a graph, allowing us to, within the context of social networks, identify the most relevant, prestigious or important people within those network. Those people with greater centrality have a more direct connection with other individuals than any other member of the network.

In particular, the degree of intermediation (or betweenness) of a vertex of a graph that measures the influence it has on the connectivity of the graph will be studied. Throughout this thesis, aspects such as the intermediation of known graphs families, bounds for the betweenness or graphs whose betweenness is the same / different for all its vertices will be studied.

Key words: Graph Theory, Centrality Measure and Betweenness .

Índice general

1. Introducción	1
2. Teoría de grafos y grado de intermediación.	5
3. Grado de intermediación según el tipo de grafo.	13
4. Cotas para los grafos.	27
5. Intermediación uniforme y extremal.	37
Bibliografía	49

Capítulo 1

Introducción

La teoría de grafos surgió en el siglo XVIII a raíz del problema de los puentes de Königsberg. En dicho problema se planteaba la idea de encontrar un camino que recorriese los siete puentes del río Pregel en Königsberg, actualmente Kaliningrado. Fue resuelto por Leonhard Euler en 1736 y su resolución dio origen a la Teoría de Grafos. A pesar de surgir a raíz de este problema, existen otros problemas que han dado a conocer la teoría de grafos fuera del ambiente puramente matemático. *El Problema de los Cuatro Colores* planteado por Francis Guthrie en 1852, enuncia: “¿Es cierto que cualquier mapa dibujado en el plano puede tener sus regiones coloreadas con cuatro colores, de modo que dos regiones vecinas tengan colores diferentes?”. Fue resuelto en 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken [11].

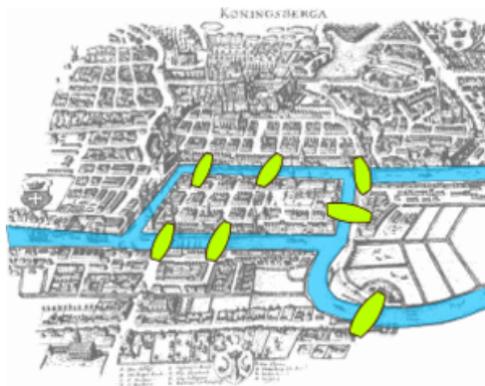


Figura 1.1: Representación puentes de Königsberg.

Los primeros resultados documentados que se conocen sobre grafos son los del problema “La solución de un problema relativo a la geometría de la posición” en 1736. Más tarde, en 1847 se realizó la primera aplicación de la teoría de grafos a la ingeniería gracias a Kirchhoff a través del análisis de redes eléctricas llegando a publicar sus propias leyes de circuitos eléctricos (leyes de Kirchhoff). Diez años después, en 1857, Arthur Cayley utilizó grafos, en concreto árboles, para sus estudios de química donde los vértices representaban átomos y las aristas los enlaces existentes entre estos [14].

Desde entonces, los grafos se ha usado en diferentes prácticas disciplinares. Esta estructura matemática permite modelar problemas de la vida cotidiana (a través de una representación gráfica formada por aristas y vértices), ya sean problemas de transporte, informática

o cualquiera que se desee resolver.

En los grafos, la importancia o relevancia que toman sus vértices dentro de este no siempre es arbitraria. De hecho, en un grafo, se pueden definir ciertas medidas, ligadas al concepto de centralidad, es decir, una razón a través de la cual se determina la importancia de un vértice dentro del grafo. Una de las primeras personas que introdujeron el concepto de centralidad fue Bavelas en los años cincuenta. Desde entonces, no han cesado las diferentes definiciones de centralidad en función del tipo de medida utilizada. Fue en 1978, cuando Freeman aseguró que el concepto de centralidad variaba en función del tipo de medida utilizada. [10]

Además, Freeman fue el primero en diferenciar entre centralidad de un vértice y centralización de un grafo. La primera hace referencia a la importancia de un vértice de manera individual en comparación con el resto del grafo. La segunda hace referencia al grafo como unidad

El conjunto de todas estas medidas de centralidad se pueden clasificar dentro de dos tipos [4]:

- Medidas locales: Dependiendo de si son redes dirigidas o no, se basan en la de centralidad (redes no dirigidas) o de prestigio (redes dirigidas). Este tipo de medidas estudian la posición de un individuo en la red global, es decir, la relevancia o importancia que tiene ese individuo en la red.
- Medidas globales: Proporcionan información más compacta que permite evaluar la estructura completa de la red.

Dentro de las medidas locales de centralidad existen diferentes tipos, entre los cuales se pueden señalar:

- Grado: Es la medida de centralidad local más conocida. Corresponde al número de aristas adyacentes a cada vértice. Para los grafos dirigidos se diferencian dos medidas de centralidad de grado diferentes, la de entrada y la de salida. Si nos refiriésemos a redes sociales, la primera de ellas estudiaría el nivel de popularidad y la segunda el nivel de sociabilidad.
- Cercanía: Definida por el matemático Murray Beauchamp en 1965 y popularizada por Freeman en 1979, es la medida más conocida de las medidas locales de longitud. Consiste en el cálculo del promedio de las distancias más cortas desde un vértice a todos los demás. Sea un grafo G y C su matriz de distancias, es decir, la matriz que recoge todas las distancias de todos los pares de vértices. Dado $r \in V(G)$ tenemos:

$$Cer(r) = \sum_{s=1}^n C_{r,s}$$

De la misma manera, podríamos definir también una medida de lejanía, inversa a la cercanía, ya que los vértices con mayor valor serían los que tienen el valor más bajo en cercanía. La lejanía de un vértice viene definida por:

$$Lej(r) = \frac{1}{Cer(r)}$$

- **Vector propio:** Fue propuesta por Phillip Bonacich en 1972 Intuitivamente, los vértices con un alto valor en esta medida estarán conectados a muchos nodos que a su vez están bien conectados.
- **Intermediación:** Es la medida en la que nos centraremos en esta memoria. Mide mediante una fórmula de caminos mínimos la relevancia que tiene un vértice cuando se quieren conectar otros dos cualesquiera. Esta medida fue introducida también por Freeman en 1977, como forma de cuantificar la influencia de un humano en la comunicación de otros seres humanos dentro de la misma comunidad.

Como se puede pensar, uno de los principales fines por los que se introdujo esta medida de centralidad en la teoría de grafos fue sociológico, ya que con ella se podía estudiar el comportamiento de grupo o colectivos de individuos dentro de una comunidad, y con ellos, conseguir conceptualizar la distribución en la sociedad de pequeños grupos y patrones de relación en redes sociales.

Con el paso de los años, los fines de estudio de la intermediación en redes sociales han ido variando y a día de hoy abarcan muchas disciplinas, como el marketing o la publicidad. Por ejemplo, si una empresa quiere hacer llegar un “rumor” o publicidad suya al mayor número de personas posibles dentro de un grupo, gracias a la intermediación se puede estudiar que individuo es el más indicado para encargarle dicha función. Esto se explica porque como ya hemos dicho antes, la intermediación mide la relevancia que tiene cada individuo (vértice) dentro del grafo [2].

Otro campo en el que se utiliza la intermediación en grafos es en la biología. Las proteínas están formadas por una red de moléculas orgánicas (aminoácidos) muchas de las cuales están relacionadas entre si (mediante enlaces peptídicos). Con ayuda de la teoría de grafos y la intermediación se puede estudiar que tipos de aminoácidos son los más relevantes a la hora de generar determinados tipos de proteínas. En la informática también es muy común el uso de la Teoría de Grafos, debido a que la red de internet es representada como un grafo gigante, en la que los diferentes servidores (vértices) pueden estar conectados. Existen muchos más ejemplos de ámbitos muy diferentes en los que se utilizan la intermediación en grafos como son las Matemáticas, Economía...

A lo largo de los siguientes cuatro capítulos se realizará un estudio sobre el grado de intermediación tanto en vértices como en grafos.

En el capítulo 2 se tratará de explicar, conceptos básicos sobre Teoría de grafos como son los de camino mínimo, distancia media, diámetro, etc. También se introduce el concepto de intermediación como medida de centralidad. A lo largo del capítulo aparecerán algunos resultados que serán útiles a lo largo de la memoria.

En el tercer capítulo se estudiará el grado de intermediación de algunas familias de grafos conocidas (grafo completo, grafo rueda, grafo estrella...) y la de sus vértices junto con ejemplos en los casos que sean necesarios para aclarar los resultados. Al final del capítulo aparece un tipo de grafo del que se estudia su intermediación, que nos será útil para el siguiente capítulo.

En el cuarto capítulo plantearemos algunas cotas, tanto superiores como inferiores para la intermediación. Estas cotas podrán ser en función de propiedades de la estructura del grafo (grado máximo, excentricidad, diámetro...) o cotas a partir de la teoría espectral de

grafos. Al final del capítulo aparecerá una corrección sobre un resultado que aparece en [7]. Dicha corrección es un contraejemplo que ha sido proporcionado por Francisco Santos al que se le agradece la clarificación para poder entender correctamente el resultado.

El último capítulo se separa en dos partes. Una primera en la que se plantean algunas condiciones suficientes para que determinados grafos tengan intermediación uniforme, es decir, que todos sus vértices tengan la misma intermediación. Se incluirá también, un proceso para crear grafos con intermediación uniforme (sin necesidad de que sean regulares) llamado “clonación”. La segunda parte se puede considerar “contraria” a la primera, ya que se tratan grafos extremales, es decir, grafos cuyos vértices tienen todas las intermediaciones diferentes.

Capítulo 2

Teoría de grafos y grado de intermediación.

En este capítulo nos centraremos en definir y explicar algunos conceptos sobre Teoría de Grafos que más adelante utilizaremos o trabajaremos con ellos. Las fuentes utilizadas para este capítulo son [14] y [6]. Lo primero es todo es definir qué es un grafo.

Definición 2.1 Un grafo (finito) es una terna $G = (V, A, \varphi)$ donde $V = V(G)$ es un conjunto finito (cuyos elementos son los vértices de un grafo) no vacío, $A = A(G)$ es un conjunto finito también (cuyos elementos son las aristas del grafo) y $\varphi : A \rightarrow P(V)$ es una aplicación que asocia a cada arista un par de vértices. Es decir, $\varphi(a) = \{r, s\}$ con $a \in A$ y $r, s \in V$. Se denotarán por n y m el número de vértices y aristas respectivamente.

Definición 2.2 Sean dos grafos $G = (V_1, A_1, \varphi_1)$ y $H = (V_2, A_2, \varphi_2)$ dos grafos. Se dice que H es un subgrafo de G si $A_2 \subset A_1$, $V_2 \subset V_1$ y $\varphi|_{A_2} = \varphi_2$. Si H tiene todos los vértices de G se dice que H es un subgrafo generador de G .

Según la definición de grafo dada anteriormente, la arista $r - s$ es la misma que la arista $s - r$. No obstante, puede definirse $\varphi : A \rightarrow V \times V$ y considerar ambas aristas por separado.

A lo largo de toda la memoria, aunque la arista (r, s) es la misma que (s, r) se considerarán ambas cuando estemos tratando pares de vértices.

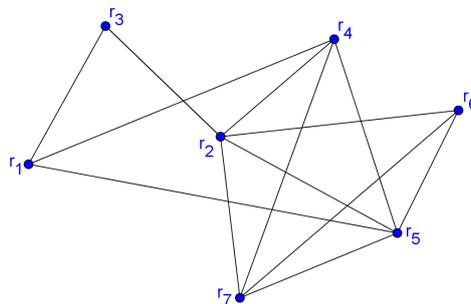


Figura 2.1: Ejemplo de grafo

Definición 2.3 Se entiende por grado de un vértice r de un grafo G , al número de aristas incidentes en él, o lo que es lo mismo, el número de vértices adyacente a él. Se representa por $d(r)$.

Un grafo se dice que es regular cuando todos sus vértices tienen el mismo grado.

Dos vértices se dice que son vecinos si existe una arista entre ellos. Se denota por $N(r)$ al conjunto de vértices vecinos de $r \in V(G)$.

Definición 2.4 Un recorrido en un grafo G es una sucesión $r_0 a_1 r_1 a_2 \dots r_{k-1} a_k r_k$ con $r_i \in V(G)$ y $a_i \in A(G)$ donde a_i es incidente a r_{i-1} y r_i .

Definición 2.5 La longitud de un recorrido en un grafo es el número de aristas dentro de ese recorrido.

Definición 2.6 Un recorrido se denomina camino cuando no se repite ninguna arista. Por tanto, por camino mínimo entre dos vértices entenderemos al camino de menor longitud que une a estos dos. Para $r, s, t \in V(G)$, denotaremos por $\sigma_{r,s}$ al número de caminos mínimos que hay entre r y s , y por $\sigma_{r,s}(t)$ el número de caminos mínimos entre r y s que pasan por t .

Existen también, aplicaciones entre grafos, más concretamente entre sus vértices. Con ellas se pueden estudiar, por ejemplo, si dos grafos son isomorfos o no.

Definición 2.7 Sean G y H dos grafos. Se dice G y H son isomorfos si existe una biyección

$$f: V(G) \longrightarrow V(H)$$

que preserve la relación de adyacencia, es decir que $r, s \in V(G)$ son adyacentes, si y solo si $f(r)$ y $f(s) \in V(H)$ son adyacentes. A dicha biyección se la llama isomorfismo de grafos. En el caso de que $G = H$, se denominará automorfismo de grafos.

Definición 2.8 En un grafo G , se entiende por distancia entre dos vértices, al número de aristas que tiene un camino mínimo entre estos dos.

De esta definición surgen muchas otras que dependen de la distancia entre vértices, por ejemplo:

El diámetro de un grafo es la máxima distancia que hay entre dos vértices cualesquiera del grafo. Se representa por D o por $diam(G)$.

La excentricidad de un vértice $r \in V(G)$, que viene definida por $e(r) = \max_{s \in V} d(r, s)$.

La distancia media de un grafo es otro concepto que viene dado por:

$$\bar{l}(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{(r,s) \in (V(G))^2} d(r, s)$$

Donde la arista (r, s) se considera distinta a (s, r) .

Definición 2.9 Un grafo G se dice que es conexo si dos vértices cualesquiera se pueden unir por un camino en G .

Si a un grafo conexo G se le quita un vértice r (y las aristas incidentes a él), el grafo resultante puede seguir siendo conexo. Se dice que G es 2 -conexo, si para todo $r \in V(G)$, $G \setminus \{r\}$ es conexo.

El siguiente resultado recoge una relación entre el número de aristas m de un grafo y el grado de sus vértices.

Teorema 2.10 La suma de todos los grados de los vértices de un grafo es igual al doble del número de aristas del grafo:

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2m$$

Corolario 2.11 Sea \bar{d} el grado medio del grafo, es decir, $\bar{d} = \sum_{x \in V} d(x)/n$. Se tiene:

$$\bar{d} = \frac{2m}{n}$$

También se utilizarán conjuntos definidos particularmente para resolver algunas demostraciones necesarias. Se denota por $\Gamma_k(t)$ al conjunto de vértices de G a distancia k de t .

Existen un tipo de grafos, llamados árboles, que tienen propiedades interesantes a la hora de estudiar la intermediación.

Definición 2.12 Un grafo T se dice que es un árbol si todo par de vértices de T está unido por un único camino.

Una definición equivalente es que un grafo G es un árbol si es conexo y tiene $n - 1$ aristas. Cada una de las componentes conexas en las que se descompone T al eliminar un vértice $r \in V(T)$ se llaman ramas del árbol. Las ramas y el número de estas variarán según el vértice que se elimine.

Es destacable también la posibilidad de representar grafos de manera matricial, a través de la matriz de adyacencia.

Sea G un grafo de n vértices. La matriz de adyacencia A de G , es una matriz cuadrada de tamaño n , donde la posición (i, j) de la matriz representa el número de aristas que conectan el vértice r_i con el vértice r_j . Como en esta memoria vamos a trabajar con grafos sin lazos y sin aristas múltiples sabemos que la diagonal principal de A va a estar formada por ceros. Por otro lado, como no hay aristas múltiples, los valores de la matriz serán o bien 0 (si los vértices r_i y r_j son no adyacentes), o bien 1 si son adyacentes. Podemos deducir también, como vamos a trabajar con grafos no dirigidos, que la matriz será simétrica, es decir, que $A_{i,j} = A_{j,i}$.

De la misma manera, A^d con $1 \leq d \leq D$ es la matriz de caminos de longitud d donde $A_{r,s}^d$ representa el número de caminos mínimos a distancia d que unen el vértice r con el vértice s .

A continuación, presentamos la matriz de adyacencia del grafo de la Figura 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz de adyacencia, se pueden obtener sus valores propios, los cuales

tienen algunas propiedades que veremos en algún momento de la memoria. Se entiende por valor propio dominante de una matriz, al valor propio de mayor valor absoluto.

El siguiente teorema nos será de gran utilidad para las cotas espectrales del grado de intermediación (en [9]).

Teorema 2.13 Si A es la matriz de adyacencia de un grafo, A es diagonalizable y existe una base de vectores propios ortonormales

A partir de el resultado anterior, es fácil ver que existe una matriz Q ortonormal y una matriz diagonal D formada por los vectores propios de A , de forma que:

$$A = QDQ^{-1}$$

El siguiente lema presenta una cota para el valor propio dominante de una matriz de adyacencia. Dicho resultado ha sido tomado de [3].

Lema 2.14 Sea G un grafo y λ_1 el valor propio dominante de la matriz de adyacencia de un grafo G . Entonces λ_1 es mayor o igual que el grado medio del grafo.

Demostración. Por un lado, sea i el vector de dimensión n formado por unos. Entonces, por el Teorema 2.10:

$$i^T A i = \sum_{r \in V(G)} d(r) = 2m$$

siendo m el número de aristas de G .

Por otro lado, sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de vectores propios de A . Por tanto, se podrá escribir el vector i como combinación lineal de elementos de la base, de forma que $i = \sum a_j v_j$. Tenemos también $Av_j = \lambda_j v_j$, $i^T v_j = a_j$ ya que v_j son vectores ortonormales y $\sum a_j^2 = \|i\|^2 = n$. Entonces:

$$\begin{aligned} i^T A i &= i^T A \sum a_j v_j = \sum i^T A a_j v_j = \sum a_j i^T (A v_j) = \sum a_j i^T \lambda_j v_j = \sum a_j \lambda_j i^T v_j \\ &= \sum \lambda_j a_j^2 \leq \lambda_1 \sum a_j^2 = \lambda_1 n \end{aligned}$$

Llegamos a que el valor propio dominante es como mínimo el grado medio del grafo. \square

En este punto, definimos la medida de centralidad que vamos a trabajar

Teorema 2.15 Sea G un grafo y $r \in V(G)$. La intermediación de r viene definida por

$$B(r) = \sum_{(t,s) \in V^2} b_{t,s}(r), \quad \text{donde } b_{t,s}(r) = \frac{\sigma_{t,s}(r)}{\sigma_{t,s}}, \quad r \neq t, s$$

donde los pares de vértices (t, s) se considerarán en todo momento pares ordenados. La intermediación de un grafo G con n vértices viene dada por:

$$\bar{B}(G) = \frac{1}{n} \sum_{r \in V(G)} B(r)$$

A continuación, como ejemplo vamos a calcular la intermediación de los vértices del grafo de la Figura 2.1:

Para ello, tendremos que calcular en primer lugar todos los caminos mínimos entre cualquier par de vértices, por ejemplo, los caminos mínimos entre r_3 y r_4 , (σ_{r_3,r_4}) , serán:

$$\sigma_{r_3r_4} = \begin{cases} r_3r_1r_4 \\ r_3r_2r_4 \end{cases}$$

Repitiendo el proceso para todo par de vértices, podremos calcular la intermediación de cada uno, y posteriormente la del grafo.

- $B(r_1) = \sum_{s,t \in V(G)} \frac{\sigma_{s,t}(r_1)}{\sigma_{s,t}} = \frac{\sigma_{r_3,r_4}(r_1)}{\sigma_{r_3,r_4}} + \frac{\sigma_{r_3,r_5}(r_1)}{\sigma_{r_3,r_5}} + \frac{\sigma_{r_4,r_3}(r_1)}{\sigma_{r_4,r_3}} + \frac{\sigma_{r_3,r_5}(r_1)}{\sigma_{r_5,r_3}} = 2$
- $B(r_2) = \sum_{s,t \in V(G)} \frac{\sigma_{s,t}(r_2)}{\sigma_{s,t}} = \frac{20}{3}$
- $B(r_3) = \frac{2}{3}$ $B(r_4) = \frac{5}{3}$, $B(r_5) = \frac{10}{3}$, $B(r_6) = 0$, $B(r_7) = \frac{2}{3}$.

Por tanto, la intermediación del grafo será $\bar{B}(G) = \frac{1}{7} \left[2 + \frac{20}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{10}{3} + 0 + \frac{2}{3} \right] = 5$.

La intermediación de todo vértice está acotada superiormente e inferiormente, es más:

$$0 \leq B(r) \leq (n-1)(n-2)$$

ya que $B(r)$ es una suma de números que como mínimo pueden ser cero (es el caso cuando $\sigma_{t,s}(r) = 0$ y r no está en caminos mínimos entre cualesquiera par de vértices). Por otro lado, el valor más grande que puede tomar $\frac{\sigma(r)}{\sigma_{s,t}(r)}$ es uno ya que el numerador es un subconjunto del denominador. Por tanto el máximo que puede alcanzar $B(r)$ es la suma de pares de vértices ordenados que haya en el grafo, es decir, $2 \binom{n-1}{2} = (n-1)(n-2)$.

Será frecuente tener que calcular el grado de intermediación de los vértices de un grafo, y en muchos casos, muchos de ellos tendrán intermediación cero. Será interesante estudiar cuando se da que un vértice tenga intermediación nula. Por ejemplo, si un vértice tiene grado uno, nunca va a estar contenido en un camino mínimo de cualquier otro par ya que solo está conectado a un vértice, por lo que tendrá intermediación igual a cero.

El siguiente resultado se ha tomado de [8].

Teorema 2.16 Sea $r \in V(G)$. Entonces $B(r) = 0$ si y solo si el subgrafo generado por los vecinos de r es completo.

Demostración.

\Rightarrow Supongamos que el subgrafo generado por los vecinos de $r \in V(G)$ no es completo. Por tanto, existirán dos vértices $s, t \in N(r)$ que no son adyacentes entre ellos y por tanto estarán a distancia dos (ya que están unidos por r). Por tanto $B(r) > 0$ ya que existe al menos un camino mínimo de longitud dos entre s y t que pasa por r , además de poder existir otros caminos.

\Leftarrow Sea H el subgrafo generado por los vecinos de $r \in V(G)$ que suponemos completo. Para cualquier par de vértices vecinos de r , s y $t \in V(G)$, si queremos construir un camino mínimo que pase por r , dicho camino será la única arista que les une, por ser H completo. Por tanto, tendremos que $\sigma_{s,t}(r) = 0$ y $B(r) = 0$.

□

De este teorema anterior podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 2.17 Sea G un grafo y $r \in V(G)$. Si r es una hoja, entonces $B(r) = 0$.

Aunque nosotros trabajemos a lo largo de los capítulos con la definición de intermediación dada antes, es importante destacar que a veces $\bar{B}(G)$ toma otros valores distintos. Esto es debido a que existen otras definiciones de intermediación que llevan consigo otras fórmulas. Es el caso de [15], el cual trabaja tomando como referencia el vértice de mayor intermediación. Dicha intermediación se conoce como intermediación relativa, la cual viene dado por

$$RB(G) = \frac{\sum_{i=1}^n [B(r^*) - B(r_i)]}{\text{Max} \sum_{i=1}^n [B(r^*) - B(r_i)]}$$

donde $B(r^*)$ es la máxima intermediación de un vértice $r \in V(G)$.

Calculando, con la intermediación de los vértices del grafo de la Figura 2.1 calculadas antes y usando esta fórmula, llegamos a que el grafo tiene intermediación $\frac{19}{4}$, en lugar de 5.

Es importante destacar la existencia de algunos teoremas que aportan igualdades y algunas relaciones interesantes. La intermediación de un grafo está íntimamente ligada con la estructura del grafo. Más concretamente, en el resultado siguiente se describe la relación existente entre la intermediación de un grafo y su distancia media.

Teorema 2.18 Sean G un grafo con n vértices y \bar{l} su distancia media. Entonces:

$$\bar{B}(G) = (n - 1)(\bar{l} - 1)$$

Demostración. Tomando dos vértices cualesquiera $r, s \in V(G)$ a distancia d , es decir, $d(r, s) = d$, definamos los siguientes conjuntos:

$$P_{r,s}^h = \{t \in V(G) : d(r, t) = h, d(s, t) = d - h\} \quad \text{con } 0 \leq h \leq d, \quad P_{r,s} = \bigcup_{h=0}^{h=d} P_{r,s}^h$$

Claramente, $P_{r,s}$ está formado por los vértices intermedios de todos los caminos mínimos entre r y s .

A partir de estos conjuntos, tenemos la siguiente igualdad, para cualquier valor de h con $1 \leq h \leq d - 1$:

$$\sum_{t \in P_{r,s}^h} b_{r,s}(t) = \sum_{t \in P_{r,s}^h} \frac{\sigma_{r,s}(t)}{\sigma_{r,s}} = 1$$

Pues para cada h , estoy sumando el número de caminos mínimos que van de r a s y pasan por t (que está a distancia h de r y a distancia $d - h$ de s), que es lo mismo que el número de caminos mínimo total.

Para todo $t \notin P_{r,s}^h$, se tiene que $\sum_{t \in P_{r,s}^h} b_{r,s}(t) = 0$, ya que todos los vértices que no pertenecen

al conjunto no pertenecen a ningún camino mínimo que una r con s y por lo tanto $\sigma_{r,s}(t) = 0$. Juntando todo esto, llegamos a que:

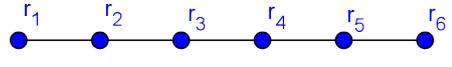
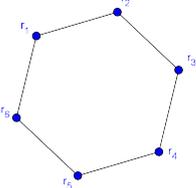
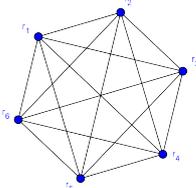
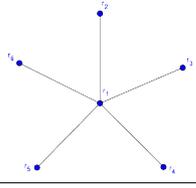
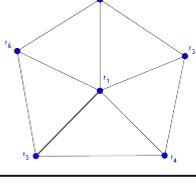
$$\begin{aligned} \sum_{t \in V(G)} b_{r,s}(t) &= \sum_{t \in P_{r,s}} b_{r,s}(t) + \sum_{t \notin P_{r,s}} b_{r,s}(t) = \sum_{t \in P_{r,s}} b_{r,s}(t) = \sum_{h=0}^d \sum_{t \in P_{r,s}^h} b_{r,s}(t) \\ &= \sum_{t \in P_{r,s}^0} b_{r,s}(t) + \sum_{t \in P_{r,s}^1} b_{r,s}(t) + \dots + \sum_{t \in P_{r,s}^{d-1}} b_{r,s}(t) + \sum_{t \in P_{r,s}^d} b_{r,s}(t) \\ &= 0 + 1 + \dots + 1 + 0 = d - 1 \end{aligned}$$

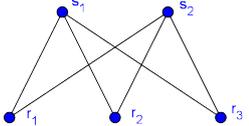
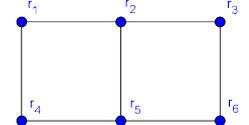
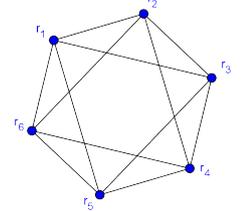
De esta forma, aplicando la definición de intermediación de un grafo, llegamos al resultado deseado:

$$\begin{aligned} \bar{B}(G) &= \frac{1}{n} \sum_{t \in V(G)} B(t) = \frac{1}{n} \sum_{t \in V(G)} \sum_{r,s \in V(G)} b_{r,s}(t) = \frac{1}{n} \sum_{r,s \in V(G)} \sum_{t \in V(G)} b_{r,s}(t) = \frac{1}{n} \sum_{r,s \in V(G)} (d(r,s) - 1) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{r,s \in V(G)} d(r,s) - \sum_{r,s \in V(G)} 1 \right) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} \left(\sum_{r,s \in V(G)} d(r,s) - n(n-1) \right) \\ &= (n-1) \left(\sum_{r,s \in V(G)} \frac{d(r,s)}{(n-1)n} - 1 \right) = (n-1)(\bar{l} - 1) \end{aligned}$$

□

A continuación se presenta una tabla con las familias de grafos más conocidas y que aparecerán de manera frecuente a lo largo de la memoria:

Grafo Camino (P_n)	$V(P_n) = \{r_1, \dots, r_n\}$ $A(P_n) = \{r_i r_{i+1}\}_{i=1}^{n-1}$	
Grafo Ciclo (C_n)	$V(C_n) = \{r_1, \dots, r_n\}$ $A(C_n) = \{r_i r_{i+1}\}_{i=1}^{n-1} \cup \{r_1 r_n\}$	
Grafo Completo (K_n)	$V(K_n) = \{r_1, \dots, r_n\}$ $A(K_n) = \{r_i r_j\}_{i,j=1}^n$	
Grafo Estrella ($S_{1,n-1}$)	$V(S_{1,n-1}) = \{r_1, \dots, r_n\}$ $A(S_{1,n-1}) = \{r_1 r_i\}_{i=2}^n$	
Grafo Rueda (W_n)	$V(W_n) = \{r_1, \dots, r_n\}$ $A(W_n) = \{r_1 r_i\}_{i=2}^n \cup \{r_i r_{i+1}\}_{i=2}^{n-1} \cup \{r_2 r_n\}$	

Grafo Bipartito ($K_{m,n}$)	$V(K_{m,n}) = \{s_1, \dots, s_m, r_1, \dots, r_n\}$ $A(K_{m,n}) = \{s_i r_j\}_{i,j=1}^{m,n}$	
Grafo Escalera (L_n)	$V(L_n) = \{r_1, \dots, r_n\}$ $A(L_n) = \{r_i r_{i+1}\}_{i=1}^{n-1} \cup \{r_j r_{j+1}\}_{i=1}^{n-1} \cup \{r_k r_{k+1}\}_{i=1}^{\frac{n}{2}}$	
Grafo Cocktail Party (CP_n)	$V(CP_n) = \{r_1, \dots, r_n\}$ $A(CP_n) = \{r_i r_j\}_{i,j=1}^n \setminus \{r_k r_{k+\frac{n}{2}}\}_{k=1}^{\frac{n}{2}}$	

Cuadro 2.1: Familias de grafos utilizados en la memoria.

Capítulo 3

Grado de intermediación según el tipo de grafo.

En este capítulo vamos a estudiar el grado de intermediación de familias de grafos que son estándar en la Teoría de Grafos, tal como se mencionaron en el Capítulo 2. Para este propósito calcularemos la intermediación de vértices de cada uno de los grafos y después la intermediación de estos.

Los resultados se han tomado principalmente de [15].

Una intermediación de vértices sencilla de calcular puede ser la del grafo camino P_n .

Teorema 3.1 Sea el grafo P_n .

$$B(r_k) = 2(k-1)(n-k) \quad \forall r_k \in V(P_n) \quad \text{y} \quad \bar{B}(P_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$$

Demostración. Sea un grafo P_n y $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ sus vértices. Tomemos un vértice r_k , que tiene $k-1$ vértices a la izquierda y $n-k$ vértices a la derecha. Como entre dos vértices de P_n hay un único camino que los une, solo existirá un único camino mínimo para cada par de vértices y por tanto, ese par contribuirá en uno a la intermediación de r_k si y solo si están separados por r_k , ya que si están al mismo lado respecto a éste se tiene que $\sigma_{s,t}(r_k) = 0$. La intermediación de r_k será la suma de los pares de vértices no ordenados tales que uno esté a la izquierda de r_k y el otro a la derecha. Por tanto:

$$B(r_k) = \sum_{(t,s) \in V^2} b_{t,s}(r_k) = \sum_{(t,s) \in V^2} \frac{\sigma_{t,s}(r_k)}{\sigma_{t,s}} = \sum_{(t,s) \in V^2} \sigma_{t,s}(r_k) = 2(k-1)(n-k)$$

Con la definición de intermediación de un grafo y haciendo cálculos obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned} \bar{B}(P_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2(k-1)(n-k) = \frac{2}{n} \left[(n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n 1 \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[(n+1) \frac{n(n+1)}{2} - n^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{(n-1)(n-2)}{3} \end{aligned}$$

□

Otra familia de grafos que pueden resultar fáciles de calcular su intermediación por su construcción son los grafos ciclo C_n , ya que su intermediación será la misma que la de

cada uno de sus vértices.

Teorema 3.2 Sea el grafo ciclo C_n :

$$B(r_k) = \bar{B}(C_n) = \begin{cases} \frac{(n-2)^2}{4} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{(n-6)(n-1)}{4} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \forall r_k \in V(C_n)$$

Demostración.

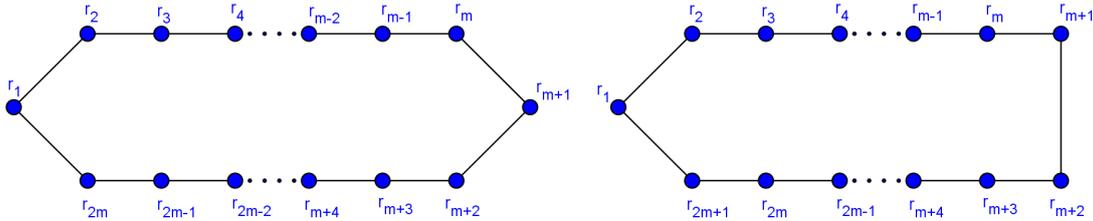


Figura 3.1: C_{2m} y C_{2m+1} .

- Si $n = 2m$: Sea $r_k \in V(C_n)$. Vamos a estudiar la intermediación que aportan los pares del resto de vértices $\{r_1, \dots, r_{k-1}, r_{k+1}, \dots, r_n\}$ a r_k . Para ello, consideremos el grafo resultante de eliminar en C_n el vértice r_k , es decir el grafo P_{n-1} .

Sabemos que los vértices de éste tienen un total de $2\binom{n-1}{2}$ pares no ordenados. De todos ellos, los que se encuentran a distancia menor de $\frac{n}{2}$ no contribuirán a la intermediación de r_k ya que C_n tiene n aristas y por tanto el camino mínimo que los une está en P_{n-1} , por lo que no pasará por r_k . Dando valores a n , calculamos el número de pares que hay en este caso:

- Si $n = 4$: Hay $2(n-2)$ pares de vértices que no contribuyen a la intermediación de r_k .
- Si $n = 6$: Hay $2(2n-5)$ pares de vértices sin camino mínimo que pase por r_k .
- Para n general, tenemos que hay:

$$2 \left[\binom{n}{2} - 1 \right] - n = 2 \left[\frac{n^2}{2} - n - \left(\frac{\binom{n}{2}(\frac{n}{2} + 1)}{2} - 1 \right) \right] = \frac{3n^2 - 10n + 8}{4}$$

pares de vértices con estas características.

Por otro lado, en el grafo C_n hay un total de $2\binom{\frac{n}{2}-1}{2}$ pares de vértices opuestos, sin contar a r_k , es decir, son los únicos pares de vértices que equidistan el uno del otro por ambos lados del grafo. Y por tanto, contribuirán a la intermediación de r_k en $\frac{1}{2}$ ya que solo uno de los caminos mínimos que los unen pasa por r_k . El resto de pares de vértices que no se han mencionado en ninguno de estos casos, es decir, los pares de P_{n-1} a distancia mayor de $\frac{n}{2}$ contribuirán en 1 a la intermediación. Habrá entonces:

$$\begin{aligned} 2 \binom{n-1}{2} - 2 \binom{\frac{n}{2}-1}{2} - \frac{3n^2 - 10n + 8}{4} &= (n-1)(n-2) - n + 2 - \frac{3n^2 - 10n + 8}{4} \\ &= n^2 - 4n + 4 - \frac{3n^2 - 10n + 8}{4} \end{aligned}$$

En conclusión, del número total de pares de vértices, tenemos los que aportan cero, un medio y uno a la intermediación de r_k , se tiene:

$$B(r_n) = 0 \left[\frac{3n^2 - 10n + 8}{4} \right] + \frac{1}{2} \left[2 \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \right] + 1 \left[\frac{n^2 - 6n + 8}{4} \right] = \frac{(n-2)^2}{4}$$

La intermediación será la misma para todos los vértices del grafo ya que C_n tiene la misma estructura desde todos los vértices. Por último:

$$\bar{B}(C_n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n B(r_i) \right) = \frac{1}{n} \left(n B(r_i) \right) = B(r_i) \quad \text{con } 0 \leq i \leq n.$$

- Si $n = 2m + 1$: El proceso es prácticamente igual que en el apartado anterior. Dando diferentes valores a n y luego aplicándolo para el caso general, llegaremos al resultado que queremos:
 - Si $n = 3$: Hay $2(n-2)$ pares de vértices que no contribuyen a la intermediación de r_k .
 - Si $n = 5$: Hay $2(2n-5)$ pares de vértices sin camino mínimo que pase por r_k
 - Para el caso de un n general, tenemos que hay:

$$2 \left[\left(\frac{n-1}{2} \right) n - \left(\sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} i \right) \right] = 2 \left[\frac{n^2 - n}{2} - \left(\frac{\left(\frac{n}{2} \right) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{2} - 1 \right) \right] = \frac{3n^2 - 8n + 5}{4}$$

pares de vértices.

Por tanto habrá $2 \binom{n-1}{2} - \frac{3n^2 - 8n + 5}{4} = \frac{(n-6)(n-1)}{4}$ pares de vértices que aporten 1 a la intermediación. No hay pares de vértices que aporten un medio a la intermediación ya que no hay opuestos. Por último, al igual que en el apartado anterior:

$$\bar{B}(C_n) = B(r_i) = \frac{(n-6)(n-1)}{4} \quad \text{con } 0 \leq i \leq n.$$

□

Si seguimos pensando en grafos conocidos y cuál podría ser su intermediación, se nos puede plantear la pregunta de qué grafo tiene la intermediación más baja, o también, si es posible que exista un grafo con intermediación nula, y por tanto que la intermediación de sus vértices también sea nula. Este es el caso del grafo completo.

Teorema 3.3 Sea el grafo completo K_n

$$\bar{B}(K_n) = B(r_k) = 0 \quad \forall r_k \in V(K_n)$$

Demostración. Este hecho puede demostrarse usando el Teorema 2.16 pero puede explicarse de la forma siguiente. La intermediación de cualquier vértice va a ser siempre cero, ya que no va a estar contenido en ningún camino mínimo de otro par de vértices (dicho camino mínimo será la arista que los una). Por tanto la intermediación de K_n será cero también.

□

Hay tipos de grafos donde la intermediación de sus vértices es la máxima posible. Ese es el caso del grafo estrella.

Teorema 3.4 Sea el grafo estrella $S_{1,n-1}$.

$$B(r) = \begin{cases} 2\binom{n-1}{2} & \text{si es el vértice central,} \\ 0 & \text{si es otro.} \end{cases} \quad \bar{B}(S_{1,n-1}) = 2\binom{n-1}{2}$$

Demostración. La intermediación de todo vértice que no sea el central es cero, ya que tienen grado uno todos ellos y por lo tanto no estarán contenidos en ningún camino mínimo de cualquier otro par de vértices diferentes. Por el contrario, el vértice central de este tipo de grafos alcanza la intermediación máxima posible, $2\binom{n-1}{2}$ (número de pares de vértices no ordenados), ya que $\frac{\sigma_{t,s}(r)}{\sigma_{t,s}}$ es a lo sumo uno para todos $r, s, t \in V(S_{1,n-1})$. Por tanto:

$$\bar{B}(S_{1,n-1}) = \frac{1}{n} 2\binom{n-1}{2} = \frac{2}{n} \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)}{n}.$$

□

Existen familias de grafos que se pueden obtener añadiendo vértices a otros grafos conocidos. Por ejemplo, si al grafo C_n mencionado antes, añadimos un vértice conectado a todos los que había, obtenemos el grafo rueda W_n .

Teorema 3.5 Sea W_n un grafo rueda con $n > 5$. Entonces:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-5)}{2} & \text{si es el vértice central,} \\ \frac{1}{2} & \text{si es otro.} \end{cases} \quad \bar{B}(W_n) = \frac{(n-1)(n-4)}{2n}.$$

Demostración.

- Si r es el vértice central:

Se sabe que el vértice central es adyacente a todos los otros vértices del grafo, los exteriores, que forman un grafo ciclo de $n-1$ vértices (C_{n-1}). Aplicando la definición de intermediación de un vértice, el valor de $b_{s,t}(r)$ depende de que vértices s, t se consideren. Más concretamente:

$$b_{s,t}(r) = \begin{cases} 0 & \text{si son adyacentes,} \\ \frac{1}{2} & \text{si son adyacentes a otro vértice exterior común,} \\ 1 & \text{si son cualquier otro par} \end{cases}$$

Como hay $n-1$ vértices en C_{n-1} , va a haber un total de $n-1$ pares de vértices adyacentes, $n-1$ pares de vértices alternados y habrá un total de $\binom{n-1}{2} - 2(n-1) = \frac{(n-1)(n-6)}{2}$ pares de vértices que no pertenezcan a ninguno de estos dos grupos.

Con todo esto, concluimos que el vértice central tiene como intermediación:

$$B(r) = \frac{1}{2}(n-1) + \frac{(n-1)(n-6)}{2} = \frac{(n-1)(n-5)}{2}$$

- Si r no es un vértice central:

Si tomo un vértice que no es el central, se ve fácilmente que existen dos caminos mínimos para sus dos vértices adyacentes en C_{n-1} y uno de los cuales pasa por r . Por lo tanto la intermediación para este tipo de vértice es $\frac{1}{2}$. Si tomo dos vértices no adyacentes a r , no va a existir camino mínimo que pase por r , y por tanto, $B(r) = \frac{1}{2}$.

Podemos concluir por tanto, aplicando la fórmula de intermediación de un grafo

$$\bar{B}(W_n) = \frac{1}{n} \left[\frac{(n-1)(n-5)}{2} + \frac{n-1}{2} \right] = \frac{n-1}{2n} ((n-5) + 1) = \frac{(n-1)(n-4)}{2n}$$

□

Es interesante destacar que el teorema es aplicable también para cuando $n \leq 5$. La

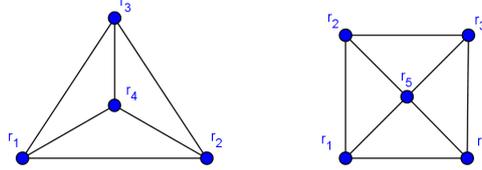


Figura 3.2: Grafos W_4 y W_5 .

intermediación de W_4 es cero ya que coincide con el grafo K_4 . En el caso de W_5 se tiene:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si es el vértice central} \\ \frac{1}{3} & \text{si es otro} \end{cases} \quad \bar{B}(W_5) = \frac{1}{5} \left[\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \right] = \frac{4}{5}.$$

Algunos tipos de grafos se caracterizan por tener sus vértices divididos en particiones según los vértices a los que estén unidos. Este es el caso del grafo bipartito completo $K_{n,m}$.

Teorema 3.6 Sea el grafo bipartito $K_{m,n}$ y $r \in V(K_{m,n})$. Entonces:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{m} & \text{si } r \in U \\ \frac{m(m-1)}{n} & \text{si } r \in W \end{cases} \quad \bar{B}(K_{m,n}) = \frac{n^2 + m^2}{n + m} - 1.$$

Demostración. Sean U, W dos conjuntos disjuntos de forma que $U \cup W = V(K_{m,n})$ y con $|U| = m$ y $|W| = n$

- Si $r \in U$:

$$B(r) = \sum_{(t,s) \in V^2} b_{t,s}(r) = \sum_{(t,s) \in W^2} b_{t,s}(r)$$

La última igualdad se da porque si t y s pertenecen a conjuntos de vértices distintos se cumplirá que $b_{t,s}(r) = 0$ ya que están unidos por una arista. Del mismo modo, si $s, t \in U$, el camino mínimo que les una será de longitud dos y pasará por un vértice de W .

Para cada par de vértices $s, t \in W$ hay m caminos mínimos de longitud 2 entre ellos y solo uno pasa por r , con lo que $b_{t,s}(r) = \frac{1}{m}$. Como el número de pares de vértices no ordenados en W es $2\binom{n}{2}$, la intermediación de r será:

$$B(r) = \frac{2}{m} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{m}$$

- Si $r \in W$:

Nos encontramos ante un caso similar, y se hace de la misma forma. Por tanto:

$$B(r) = \sum_{(t,s) \in U^2} b_{t,s}(r) = \frac{2}{n} \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{n}$$

Aplicando la definición de intermediación de un grafo a $K_{m,n}$ llegamos a que:

$$\begin{aligned} \bar{B}(K_{m,n}) &= \frac{2}{m+n} \left(\binom{n}{2} + \binom{m}{2} \right) = \frac{2}{m+n} \left(\frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{m!}{2!(m-2)!} \right) \\ &= \frac{1}{m+n} \left(\frac{n!}{(n-2)!} + \frac{m!}{(m-2)!} \right) = \frac{n(n-1) + m(m-1)}{m+n} = \frac{n^2 + m^2}{n+m} - 1. \end{aligned}$$

□

En este estudio del grado de intermediación de familias de grafos no puede faltar la intermediación de un árbol, el cuál resulta más sencillo que otros, ya que todas sus hojas tendrán intermediación cero, pues como ya vimos en el capítulo 2, que un vértice sea hoja, implica que su intermediación sea cero.

Es posible determinar la intermediación de un árbol T a partir de la estructura del grafo $T \setminus \{r\}$ siendo r un vértice del árbol, sin considerar el número de caminos mínimos. Esto es porque en los árboles todo par de vértices está unido por un único camino.

Teorema 3.7 Sea un grafo árbol T y $r \in V(T_n)$

$$B(r) = C(n_1, n_2, \dots, n_m) = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,m\}} n_i n_j$$

donde n_i y n_j son el número de vértices de dos ramas (componentes conexas de $T \setminus \{r\}$) distintas de $T \setminus \{r\}$.

Demostración. Por la estructura de árbol, la intermediación de r_k será el número de caminos mínimos que pasan por r_k . Sean n_1, n_2, \dots, n_m el número de vértices de las m ramas de r_k . Como éstas no tienen ningún vértice en común, la intermediación será el número total de pares de vértices de diferentes ramas, es decir

$$B(r) = \sum_{i,j \in \{1,2,\dots,m\}} n_i n_j$$

□

A continuación presentamos un ejemplo de árbol T , representado en la Figura 3.3 y cual es su intermediación, usando el resultado anterior.

- $B(r_2) = B(r_6) = B(r_7) = B(r_{10}) = B(r_{11}) = B(r_{12}) = 0$, por ser hojas del árbol.
- $B(r_1) = C(1, 5, 5) = 35$, $B(r_3) = C(4, 7) = 28$, $B(r_4) = C(3, 8) = 24$
 $B(r_5) = C(1, 1, 9) = 19$, $B(r_8) = C(1, 10) = 10$, $B(r_9) = C(1, 1, 2, 7) = 33$

Por lo tanto, la intermediación del grafo será:

$$\bar{B}(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{12} B(r_i) = \frac{149}{12}.$$

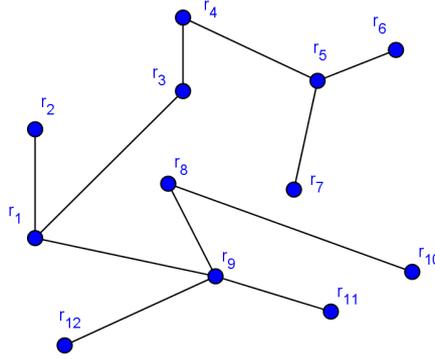
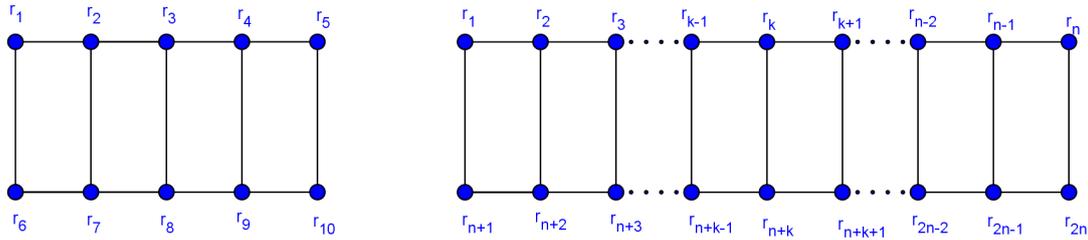


Figura 3.3: árbol T.

Hay una clase de grafos conocidos también llamados grafo escalera L_n (del inglés Ladder) formado por $2n$ vértices y $n+2(n-1)$ aristas.

Teorema 3.8 Sea el grafo L_n :

$$B(r_k) = 2(k-1)(n-k) + 2 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{k-j}{k-j+i} + 2 \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{i+1}{k-j+i} \quad \text{con } 1 \leq k \leq n$$

Figura 3.4: Grafos L_5 y L_n

Demostración. Está claro que por simetría, el grado de intermediación del vértice r_{n+k} es el mismo que el grado de intermediación de r_k . La demostración consiste en tomar como referencia, en primer lugar, un vértice r_k (la notación viene explicada en la imagen anterior) para $1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$ (si tiene $2n+1$ vértices) o $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ (si tiene $2n$). Después, para calcular su intermediación dividimos los vértices en 4 conjuntos: el conjunto de vértices superior izquierda $\{r_1, r_2, \dots, r_{k-1}\}$, superior derecha $\{r_{k+1}, r_2, \dots, r_n\}$, inferior izquierda $\{r_{n+1}, r_2, \dots, r_{n+k}\}$ e inferior derecha $\{r_{n+k}, r_2, \dots, r_{2n}\}$, los cuales no son todos disjuntos (ya que r_{n+k} se encuentra en dos distintos).

Considerando los dos conjuntos superiores de vértices, la intermediación que aportan a r_k es $2(k-1)(n-k)$, ya que todos ellos forman un grafo P_n .

Considerando ahora el conjunto inferior izquierda y superior derecha, si tomamos $b_{x,y}(r_k)$ con $x \in \{r_{n+1}, r_2, \dots, r_{n+k}\}$ e $y \in \{r_{k+1}, r_2, \dots, r_n\}$ tenemos que, dejando fijo el vértice x y calculando $b_{x,y}(r_k)$ para el resto de valores de y , podemos sacar de manera fácil una suma, ya que a medida que aumentamos el valor de y , aumenta en la misma proporción el número de caminos mínimos de x a y , sin aumentar el número de caminos mínimos entre estos que pasan por r_k .

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{r_{n+1},y}(r_k) = k \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad \text{Si } x = r_{n+1} \\ b_{r_{n+2},y}(r_k) = (k-1) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) \quad \text{Si } x = r_{n+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{r_{n+k},y}(r_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-(k-1)} \quad \text{Si } x = r_{n+k} \end{array} \right.$$

Por ejemplo, para $x = r_{n+1}$, si y pertenece al conjunto de vértices superior derecha, empezaremos a calcular para $y = r_{k+1}$ en el cual hay $k+1$ caminos mínimos y k pasan por r_k . Por cada posición que avancemos del vértice y aparecerá un nuevo camino mínimo que no pasará por r_k .

Si vamos variando el valor de x , observamos que va siguiendo una secuencia que depende de k y de la posición de dicho vértice.

Por tanto, como es un grafo no dirigido, llegamos a que:

$$\sum b_{x,y}(r_k) = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{k-j}{k-j+i}$$

Tomando en cuenta el conjunto superior izquierdo y el inferior derecho, y con un razonamiento similar al anterior, teniendo en cuenta que ahora, a medida que aumentamos el valor de y aumenta en la misma proporción el número de caminos mínimos que pasan por r_k (y por tanto el de caminos mínimos totales). Llegamos a que:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{r_1,y}(r_k) = \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} + \dots + \frac{n-(k-1)}{n} \quad \text{Si } x = r_1 \\ b_{r_2,y}(r_k) = \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{(n-1)} \quad \text{Si } x = r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{r_{k-1},y}(r_k) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \quad \text{Si } x = r_{k-1} \end{array} \right.$$

Y finalmente, siguiendo un razonamiento similar al anterior caso,

$$\sum b_{x,y}(r_k) = 2 \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{i+1}{k-j+i}$$

La suma de estos tres casos será la intermediación total del vértice:

$$B(r_k) = 2(k-1)(n-k) + 2 \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{k-j}{k-j+i} + 2 \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{i+1}{k-j+i} \quad \text{con } 1 \leq k \leq n,$$

ya que para cualquier otro par de conjuntos de vértices, la intermediación será cero, porque no va a existir camino mínimo que pase por r_k .

Si tomo por ejemplo los dos conjuntos de vértices inferiores, los caminos mínimos que unen estos vértices están contenidos en el propio grafo que forman (P_n) . Si consideramos el conjunto superior izquierdo e inferior izquierdo, no existe camino mínimo de dos vértices

que pase por r_k . De igual manera, razonamos para el conjunto superior derecho e inferior derecho. □

Para concluir el teorema, podemos escribir la intermediación de L_n como

$$\bar{B}(L_n) = \frac{1}{2n} 4 \sum_k B(r_k) = \frac{4}{n} \sum_k \left((k-1)(n-k) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{k-j}{k-j+i} + \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{i+1}{k-j+i} \right)$$

para $1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$ si n es impar, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ si n es par.

Dejando aparte las familias de grafos con nombres propios, es interesante estudiar la intermediación de familias de grafos que surgen de eliminar elementos a otras conocidas.

Teorema 3.9 Sea K_n un grafo completo de n vértices y sea a la arista que une los vértices s y $t \in V(K_n)$. Si $r \in V(K_n \setminus \{a\})$ Entonces:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{2}{n-2} & \text{si } r \neq s, t, \\ 0 & \text{si } r \text{ es otro.} \end{cases} \quad \bar{B}(K_n \setminus a) = \frac{2}{n}.$$

Demostración.

- Si $r \neq s, t$:

Supongamos que a K_n le quitamos la arista a , antes definida. Los vértices s y t pasan a estar unidos por $n-2$ caminos mínimos diferentes de longitud 2, uno por cada vértice restante. Además, para todo par de vértices $x, y \in V(K_n)$ distintos de t, s , se tiene que $b_{x,y}(r) = b_{y,x}(r) = 0$, ya que los vértices x, y están unidos directamente por una arista. Entonces:

$$B(r) = \sum_{(x,y) \in V^2} b_{x,y}(r) = b_{s,t}(r) + b_{t,s}(r) = \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-2} = \frac{2}{n-2}$$

Si tomo un par de vértices que no sean s y t , voy a encontrarme con que $b_{y,x}(r) = b_{x,y}(r) = 0$, ya que los vértices x, y están unidos directamente por una arista.

- Si $r = s$ ó $r = t$

Está claro que $B(r) = 0$ pues no habrá mayor camino mínimo de dos vértices que pase por r , al ser K_n completo.

Podemos concluir que

$$\bar{B}(K_n \setminus a) = \frac{1}{n} \frac{2(n-2)}{n-2} = \frac{2}{n}$$

□

Se sabe que el grafo $K_{m,n}$ es un grafo bipartito, es decir, un grafo en el que su conjunto de vértices se divide en dos particiones. Siguiendo en la línea del tema anterior, vamos a considerar el grafo regular n -partito, el cual tiene $2n$ vértices divididos en n particiones de dos vértices cada una y de grado $2n-2$. A este tipo de grafo se le conoce como "cocktail party".

Este nombre viene del problema de la cena de las parejas. En una celebración la gente va llegando en pareja, saludando al resto de personas presentes (sin saludarse a si mismo ni a

su pareja). Suponiendo que hay n parejas, nos encontramos ante un grafo “cocktail party” en el que la relación de los grafos son los saludos que se hacen.

Teorema 3.10 Sea un grafo “cocktail party” $CP(n)$.

$$B(r) = 1 \quad \text{Si } r \in V(CP(n)) \quad \text{y} \quad \bar{B}(CP(n)) = 1$$

Demostración. Sea el grafo $CP(n)$, subgrafo del grafo completo K_n , con $n = 2m$ vértices. Ahora, para cada par (r_i, r_{m+i}) si $1 \leq i \leq m$, hay un camino mínimo de longitud 2 que pasa por cada uno de los otros $2m - 2$ vértices. Para cualquier vértice particular, como estamos trabajando con grafos que son no dirigidos, habrá $2(m - 1)$ pares de vértices diferentes, cada uno de los cuales da una intermediación de $\frac{1}{(2m-2)}$ a ese vértice.

Por tanto, la intermediación de cada vértice será $\frac{2(m-1)}{2(m-1)}=1$. Luego, es fácil de comprobar que $\bar{B}(CP(n)) = 1$ □

A continuación, vamos a definir una familia de árboles de los que en un principio no tiene interés estudiar su intermediación, pero en el capítulo siguiente nos será de utilidad.

- Se entiende por $E_2(D, k)$ al grafo formado por dos caminos de longitud $D/2$ con un extremo en común y que tienen $\frac{6k-D}{2}$ hojas adicionales en cada uno de los vecinos de los otros extremos. Se tiene que $V(E_2(D, k)) = 6k + 1$
- Sea $E_3(D, k)$ el grafo formado por 3 caminos $P_{D/2}$ con un extremo en común y que cada uno tiene una familia de $2k - \frac{D}{2}$ hojas en cada vértice vecino del otro extremo. Tiene como el grafo anterior, un total de $6k + 1$ vértices.

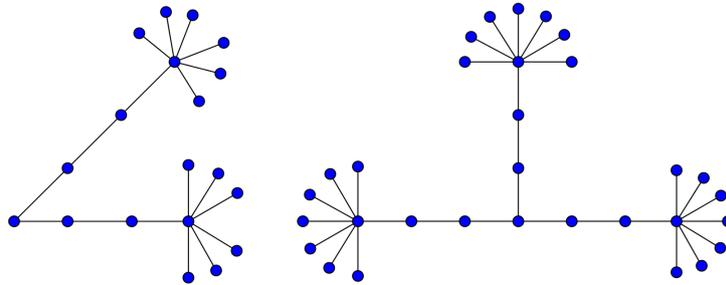


Figura 3.5: Ejemplo de grafo $E_2(8, 3)$ $E_3(8, 5)$

Teorema 3.11 El grado de intermediación de $E_2(D, k)$ es:

$$\frac{1}{6k + 1} \left[18Dk^2 + (6 - 6D)k - \frac{D(D - 2)(D - 4)}{6} \right]$$

Demostración. La notación se tomará en referencia a la Figura 3.6. Para cada hoja r , tenemos que $B(r) = 0$. Necesitamos calcular $B(r)$ para cualquier vértice v que esté en el camino de longitud $D + 1$. Sabemos por simetría que $B(r_2) = B(r_D)$, $B(r_3) = B(r_{D-1}), \dots, B(r_{\frac{D}{2}}) = B(r_{\frac{D}{2}+2})$.

- $B(r_2) = \sum_{(s,t) \in V^2} b_{s,t}(r_2) = \sum_{(s,t) \in V^2} \frac{\sigma_{s,t}(r_2)}{\sigma_{s,t}} = \sum_{(s,t) \in V^2} \sigma_{s,t}(r_2)$. (Claramente $\sigma_{s,t} = 1$ por ser un árbol).

- Si $s, t \notin G \Rightarrow \sigma_{s,t}(r_2) = 0$ ya que el camino mínimo que una s con t no va a pasar por r_2
- Si $s, t \in G$, $\sigma_{s,t}(r_2) = 1$. Ahora, el número de parejas posibles para que se cumpla esto es:

$$2 \left(\frac{6k-D}{2} + 1 \right) \binom{\frac{6k-D}{2} + 1}{2} = \left(\frac{6k-D}{2} + 1 \right) \left(\frac{6k-D}{2} \right)$$

- Si $s \in G$, $t \in H$. El razonamiento es similar que en el apartado anterior y el número de pares (s, t) no ordenados que habrá es:

$$2 \left(\frac{6k-D}{2} + 1 \right) \left(6k + 1 - \frac{6k-D}{2} - 1 - 1 \right)$$

Con todo esto, llegamos a que:

$$B(r_2) = \frac{(18k + D - 4)(6k - d + 2)}{4} = B(r_D)$$

- $B(r_3) = B(r_{D-1})$: En este caso, por un razonamiento similar al de $B(r_2)$, la intermediación de r_3 será el número de pares no ordenados que hay entre los vértices que están a la izquierda de r_3 con los que están a la derecha, es decir:

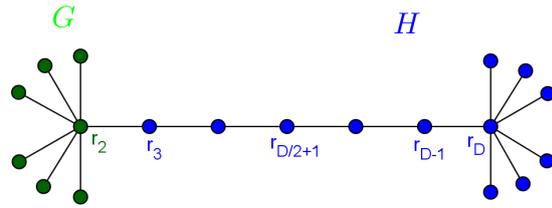


Figura 3.6: Ejemplo del caso $d(r,s)=1$.

$$B(r_3) = 2 \left(\frac{6k-D}{2} + 2 \right) \left(6k + 1 - \frac{6k-D}{2} - 2 - 1 \right) = \frac{(6k-D+4)(6k-4+D)}{2}$$

- $B(r_4) = B(r_{D-2})$: Por el mismo procedimiento que en r_3 , llegamos a que:

$$B(r_4) = 2 \left(\frac{6k-D}{2} + 3 \right) \left(6k + 1 - \frac{6k-D}{2} - 3 + 1 \right) = \frac{(6k-D+6)(6k-6+D)}{2}$$

- Aplicando este método, de la misma manera, podemos obtener $B(r_i)$, para $i = 3 \dots \frac{D}{2}$, siendo $B(r_i) = B(r_{-i+2})$:

$$\begin{aligned} B(r_i) &= 2 \left(\frac{6k-D}{2} + i - 1 \right) \left(6k + 1 - \frac{6k-D}{2} - i + 1 - 1 \right) \\ &= \frac{(6k-D+2i-2)(6k+2+D-2i)}{2} \end{aligned}$$

- Por último, tenemos que:

$$B(r_{\frac{D}{2}+1}) = 2 \left(\frac{6k-D}{2} + \frac{D}{2} \right) \left(\frac{6k-D}{2} + \frac{D}{2} \right) = 18k^2.$$

Recopilando todas estas intermediaciones, y aplicando la definición de intermediación de un grafo, llegamos al resultado deseado:

$$\begin{aligned}
 \bar{B}(E_2(D, k)) &= \left[\frac{(18k + D - 4)(6k - D + 2)}{2} + (6k - D + 4)(6k - 4 + D) + (6k - D + 6) \right. \\
 &\quad \left. + (6k - 6 + D) + (6k - D + 8)(6k + D - 8) + \dots + 18k^2 \right] \frac{1}{6k + 1} \\
 &= \frac{1}{6k + 1} \left[\frac{(18k + D - 4)(6k - D + 2)}{2} + 36k^2 \left(\frac{D}{2} - 2 \right) - \sum_{i=1}^{\frac{D}{2}-2} (2i)^2 + 18k^2 \right] \\
 &= \frac{1}{6k + 1} \left[18Dk^2 + (6 - 6D)k - \frac{D(D - 2)(D - 4)}{6} \right]
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.12 El grado de intermediación de $E_3(D, k)$ es:

$$\frac{1}{6k + 1} \left[(24D - 12)k^2 + \left(6 - \frac{3}{2}D^2 - 3D\right)k - \frac{D(D - 2)(D - 4)}{4} \right]$$

Demostración. El procedimiento de demostración va a ser similar al anterior resultado. Por un lado tenemos que $B(r) = 0$ para todo r hoja de $E_3(D, k)$. Por otro lado, por simetría:

$$\begin{aligned}
 B(r_2) &= B(r_{\frac{D}{2}+2}) = B(r_{D+2}), \\
 B(r_3) &= B(r_{\frac{D}{2}+3}) = B(r_{D+3}), \\
 &\vdots \\
 B(r_{\frac{D}{2}}) &= B(r_D) = B(r_{\frac{3D}{2}})
 \end{aligned}$$

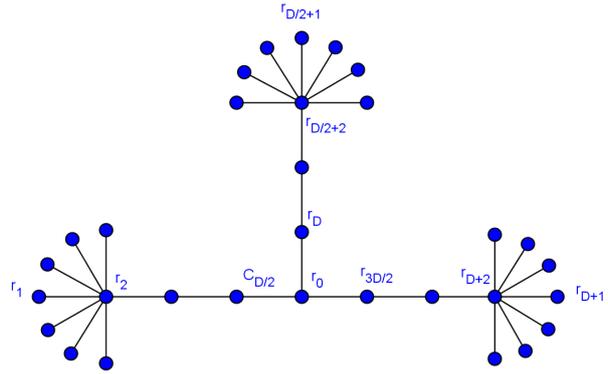


Figura 3.7: Grafo $E_3(D, k)$.

Ahora, para calcular la intermediación de cada vértice r_i , vamos a calcular el número de pares de vértices de $E_2(D, k)$ cuyo camino mínimo pasa por r_i .

- $B(r_2) = 2 \left(2k - \frac{D}{2} + 1 \right) \left(6k + 1 - 2k + \frac{D}{2} - 1 - 1 \right) = \frac{(20k + D - 4)(4k - D + 2)}{4}$.
 - En este caso, es necesario que uno de los vértices pertenezca a la estrella de hojas de la rama de r_3 , o ser r_2 .
- $$B(r_3) = 2 \left(2k - \frac{D}{2} + 2 \right) \left(6k + 1 - 2k + \frac{D}{2} - 2 - 1 \right) = \frac{(4k - D + 4)(8k - 4 + D)}{2}$$
- $B(r_{\frac{D}{2}}) = \frac{(4k-2)(8k+2)}{2}$
 - Como caso general, tenemos que $B(r_{i+2}) = \frac{(4k-2i)(8k+2i)}{2}$ para

$$\blacksquare B(r_0) = 24k^2.$$

Ahora, aplicando la definición de intermediación a $E_3(D, k)$, llegamos al resultado deseado:

$$\begin{aligned} \bar{B}(E_3(D, k)) &= \frac{1}{6k+1} \left[3 \frac{(20kD-4)(4k-D+2)}{4} + 3 \frac{(4k-D+4)(8k-4+D)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{(4k-D+6)(8k-6+D)}{2} + \dots + 3 \frac{(4k-2)(8k+2)}{2} + 24k^2 \right] \\ &= \frac{1}{6k+1} \left[3 \frac{(20k+D-4)(4k-D+2)}{4} + 3 \left(\sum_{i=1}^{\frac{D}{2}-2} \frac{(4k-2i)(8k+2i)}{2} \right) + 24k^2 \right] \\ &= \frac{1}{6k+1} \left[(24D-12)^2 + \left(6 - \frac{3}{2}D^2 - 3D \right) k - \frac{D(D-2)(D-4)}{4} \right] \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Cotas para los grafos.

A lo largo de este capítulo estudiaremos diferentes cotas de la intermediación de un grafo. Estas cotas se obtendrán modificando los grafos originales, ya sea añadiendo o eliminando aristas o vértices. Los resultados se han tomado principalmente de [6].

Añadir aristas a un grafo implica que los caminos mínimos entre dos vértices pueden acortarse usando estas aristas nuevas y por tanto ser de menor longitud. Incluso, puede afectar al número de caminos mínimos entre vértices. El siguiente resultado muestra como varía el grado de intermediación de un grafo al añadir una arista.

Lema 4.1 Sea un grafo $G = (V, A)$ con $|V| = n$, y sea G' el grafo resultante al unir dos vértices r y s tal que $d = d(r, s) > 1$ por una nueva. Entonces:

$$\bar{B}(G') \leq \bar{B}(G) - \frac{2(d-1)}{n}$$

Demostración. Calculando las sumas de las distancias de los pares de vértices en ambos grafos tenemos:

- Suma de distancias en G :

$$\sum_{x,y \in V} d_G(x, y) = \sum_{\substack{x,y \in V \\ x,y \neq r,s}} d_G(x, y) + 2d$$

- Suma de distancias en G' :

$$\sum_{x,y \in V} d_{G'}(x, y) = \sum_{\substack{x,y \in V \\ x,y \neq r,s}} d_{G'}(x, y) + 2$$

Es claro que $d_{G'}(x, y) \leq d_G(x, y)$ para todo par de vértices x, y distintos del par r, s (pares no ordenados), pues G' tiene una arista más y en G' puede existir un camino mínimo más corto entre x e y que pase por esa nueva arista. También es cierto que $1 = d_{G'}(r, s) < d_G(r, s) = d > 1$ aunque no es necesario en la demostración.

Por tanto,

$$\sum_{x,y \in V} d_{G'}(x, y) - 2 = \sum_{\substack{x,y \in V \\ x,y \neq r,s}} d_{G'}(x, y) \leq \sum_{\substack{x,y \in V \\ x,y \neq r,s}} d_G(x, y) = \sum_{x,y \in V} d_G(x, y) - 2d$$

y se cumple que:

$$\sum_{x,y \in V} d_{G'}(x,y) \leq \sum_{x,y \in V} d_G(x,y) - 2(d-1)$$

Ahora bien, por el teorema 2.18 y haciendo los calculos necesarios:

$$\begin{aligned} \bar{B}(G') &= (n-1)(\bar{l}(G') - 1) = (n-1) \left(\frac{\sum_{x,y \in V} d_{G'}(x,y)}{n(n-1)} - 1 \right) \\ &\leq (n-1) \left(\frac{\sum_{x,y \in V} d_G(x,y) - 2(d-1)}{n(n-1)} - 1 \right) = (n-1)(\bar{l}(G) - 1) - \frac{2(d-1)}{n} \\ &= \bar{B}(G) - \frac{2(d-1)}{n}. \end{aligned}$$

□

Es claro que en un grafo conexo, existen caminos mínimos entre cualesquiera dos vértices. Sea $G' = (V, A')$ un subgrafo generador de G que además es conexo. Para cualesquiera par de vértices existe un camino con aristas en G' y además el grado de intermediación puede ser mayor que el de G al haber en G' menos aristas, y la distancia entre vértices puede aumentar.

A partir del resultado anterior se puede probar una cota para el grado de intermediación de un subgrafo generador conexo.

Teorema 4.2 Sea $G = (V, A)$ un grafo y $G' = (V, A')$ un subgrafo generador de este, de manera que r es la diferencia de aristas entre A' y A . Entonces:

$$\bar{B}(G) \leq \bar{B}(G') - \frac{2r}{n}$$

Demostración. Añadiendo a G' cada una de las aristas de G que no están en G' y aplicando el lema anterior, la intermediación del grafo de G será menor por cada arista como mínimo $2/n$, ya que el valor que puede tomar como mínimo $\frac{2(d-1)}{n}$ es $\frac{2}{n}$. Aplicando este método las r veces necesarias llegamos a la desigualdad deseada.

□

Como cualquier grafo conexo tiene un árbol generador, se tiene que:

Corolario 4.3 Sea un grafo $G=(V,A)$, con $|V| = n$ y $|A| = m$, y T un árbol generador de G . Entonces:

$$\bar{B}(G) \leq \bar{B}(T) - \frac{2(m-n+1)}{n}$$

Demostración. Sabemos por el Teorema anterior que,

$$\bar{B}(G) \leq \bar{B}(G') - \frac{2r}{n}$$

para cualquier subgrafo generador G' de G , en concreto para T , siendo r la diferencia entre el número de aristas de G con las de T . Como T es un árbol de n vértices, tiene

$n - 1$ aristas.

Por lo tanto, aplicando el teorema a este caso, llegamos a que:

$$\bar{B}(G) \leq \bar{B}(T) - \frac{2(m - (n - 1))}{n} = \bar{B}(T) - \frac{2(m - n + 1)}{n}$$

□

Al igual que hemos estudiado como varía el grado de intermediación de un grafo añadiendo una arista, es posible comparar el grado de intermediación al añadir un nuevo vértice. El siguiente lema muestra el caso más simple, donde además podemos calcular exactamente el grado de intermediación del nuevo grafo a partir del grado de intermediación del grafo original.

Lema 4.4 Sea un grafo $G = (V, A)$ conexo con $|V| = n$, $r \in V(G)$ y $e(r)$ su excentricidad. Sea ahora el grafo resultante al añadir a G un nuevo vértice s y una arista que une r con s . Entonces:

$$\bar{B}(G') = \frac{n}{n+1} \bar{B}(G) + \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{e(r)} k |\Gamma_k(r)|$$

Demostración. Por un lado, sabemos que la suma de las distancias de todo par de vértices en $V(G')$ es la suma de las distancias de todo par de vértices en G más la suma de las distancias de s a los otros n vértices. Por tanto, llegamos a que:

$$\sum_{(x,y) \in V'^2} d_{G'}(x,y) = \sum_{(x,y) \in V^2} d_G(x,y) + 2 \sum_{k=1}^{e(r)} (k+1) |\Gamma_k(r)| + 2$$

ya que la suma de las distancias de los vértices en G' es la de los vértices en G más dos veces (porque son no ordenados) la suma de las distancias del nuevo vértice s con los vértices de G . La distancia de s al resto de vértices es la distancia a la que están cada vértice de r más uno.

Como G es conexo $\sum_{k=1}^{e(r)} |\Gamma_k(r)| = n - 1$, y por tanto

$$\sum_{(x,y) \in V'^2} d_{G'}(x,y) = \sum_{(x,y) \in V^2} d_G(x,y) + 2 \sum_{k=1}^{e(r)} k |\Gamma_k(r)| + 2n$$

Por otro lado, la distancia media de un grafo G' es

$$\bar{l}(G') = \frac{\sum_{(x,y) \in V'^2} d_{G'}(x,y)}{(n+1)n}$$

Ahora, si aplicamos la igualdad obtenida justo anteriormente

$$\begin{aligned} \bar{l}(G') &= \frac{\sum_{(x,y) \in V^2} d_G(x,y)}{(n+1)n} + \frac{2 \sum_{k=1}^{e(r)} k |\Gamma_k(r)|}{(n+1)n} + \frac{2}{(n+1)} = \frac{n-1}{n-1} \frac{\sum_{(x,y) \in V^2} d_G(x,y)}{(n+1)n} + \\ &+ \frac{2 \sum_{k=1}^{e(r)} k |\Gamma_k(r)|}{(n+1)n} + \frac{2}{(n+1)} = \frac{n-1}{n+1} \bar{l}(G) + \frac{2 \sum_{k=1}^{e(r)} k |\Gamma_k(r)|}{(n+1)n} + \frac{2}{(n+1)} \end{aligned}$$

Operando adecuadamente y aplicando el teorema 2.18 se obtiene el resultado. En efecto:

$$\begin{aligned}\bar{l}(G') - 1 &= \frac{n-1}{n+1}\bar{l}(G) + \frac{2\sum_{k=1}^{e(r)} k|\Gamma_k(r)|}{(n+1)n} + \frac{2}{(n+1)} - 1 = \frac{n-1}{n+1}\bar{l}(G) + \frac{2\sum_{k=1}^{e(r)} k|\Gamma_k(r)|}{(n+1)n} + \frac{1-n}{n+1} \\ n(\bar{l}(G') - 1) &= \frac{n(n-1)}{n+1}\bar{l}(G) + \frac{2\sum_{k=1}^{e(r)} k|\Gamma_k(r)|}{(n+1)} + \frac{n(1-n)}{n+1} = \frac{n}{n+1}(n-1)(\bar{l}(G) - 1) + \frac{2\sum_{k=1}^{e(r)} k|\Gamma_k(r)|}{(n+1)} \\ \bar{B}(G') &= \frac{n}{n+1}\bar{B}(G) + \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{e(r)} k|\Gamma_k(r)|\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.5 Vamos a aplicar este lema anterior a los siguientes ejemplos, en el que se parte del grafo P_n (calculado su grado de intermediación en el Teorema 3.1) y vemos cual es la intermediación de éste en función del vértice que se elija para añadir un vértice adyacente a él.

A continuación utilizaremos el termino $T_{n+1,i}$, el cual se refiere al árbol resultante de unir a P_n un vértice nuevo al vértice $r_i \in V(P_n)$ donde r_i es el vértice que ocupa la posición i en P_n , con $1 \leq i \leq n$.

- Si se le añade a r_1 ó r_n : En este caso, el resultado obtenido es un nuevo grafo camino P_{n+1} , y por tanto, su intermediación será:

$$\begin{aligned}\bar{B}(T_{n+1}) &= \frac{n}{(n+1)}\bar{B}(P_n) + \frac{2}{n+1}\left(2 + \sum_{l=2}^{n-1} l\right) \\ &= \frac{n}{n+1}\bar{B}(P_n) + \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{(n-1)n}{2}\right),\end{aligned}$$

que coincide con $\bar{B}(P_{n+1}) = \frac{n(n-1)}{3}$.

- Si se le añade a r_2 (similar para r_{n-1}) En este caso, obtenemos un grafo T_{n+1} y su intermediación será:

$$\begin{aligned}\bar{B}(T_{n+1,2}) &= \frac{n}{(n+1)}\bar{B}(P_n) + \frac{2}{n+1}\left(3 + \sum_{l=2}^{n-2} l\right) \\ &= \frac{n}{n+1}\bar{B}(P_n) + \frac{2}{n+1}\left(2 + \frac{(n-1)n}{2}\right).\end{aligned}$$

- Si se le añade a r_i con $3 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$: En este caso, el resultado obtenido es un nuevo árbol $T_{n+1,i}$, y por tanto, su intermediación será:

$$\begin{aligned}\bar{B}(T_{n+1,i}) &= \frac{n}{(n+1)}\bar{B}(P_n) + \frac{2}{n+1}\left(1 + 2\sum_{l=1}^{i-1} l + \sum_{m=i}^{n-i} m\right) \\ &= \frac{n}{n+1}\bar{B}(P_n) + \frac{2}{n+1}\left(1 + (n-1)n + \frac{n^2 + (1-2i)n}{2}\right).\end{aligned}$$

Comprobando los grados de intermediación de los diferentes grafos, podemos observar que podemos ordenarlos en función del valor que tomen, ya que lo que les diferencia a uno de a otros es el último sumando.

Corolario 4.6 Aplicando los resultados anteriores, se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$\bar{B}(T_{n+1,2}) \geq \bar{B}(T_{n+1,1}) \geq \bar{B}(T_{n+1,3}) \geq \dots \geq \bar{B}(T_{n+1, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}) \geq \bar{B}(T_{n+1, \lceil \frac{n}{2} \rceil})$$

Sabemos ya que $T_{n+1,2}$ es el grafo de máxima intermediación de todos los posibles al añadir un vértice a P_{n+1}

Lema 4.7 Sea un Grafo $G = (V, A)$ con $|V| = n$. Sea G' el grafo resultante de unir dos vértices $r, s \in V(G)$ con un nuevo vértice t . Si se cumple que $d(r, s) = 1$ o $d(r, s) = 2$ se tiene

$$\frac{1}{n+1} [n\bar{B}(G) + 2(n-2)] \leq \bar{B}(G')$$

Demostración.

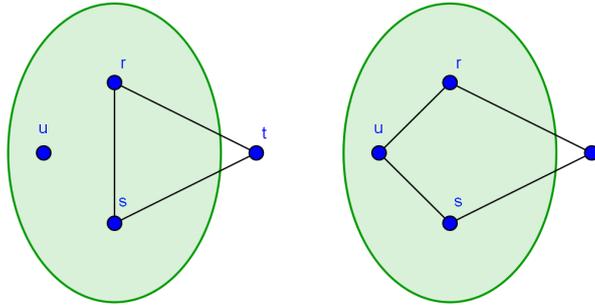


Figura 4.1: Ejemplos a distancia 1 y 2.

- $d(r, s) = 1$: Si la distancia entre r y s es de 1, entonces al añadir el nuevo vértice t conectado con los dos, se formará un ciclo de 3 vértices entre estos. Esto implica que $B(t) = 0$ ya que

$$B(t) = \sum_{(x,y) \in V^2} b_{x,y}(t) = \sum_{(x,y) \in V^2} \frac{\sigma_{x,y}(t)}{\sigma_{x,y}}$$

y se tiene $\sigma_{x,y}(t) = 0$ pues si tomo dos vértices distintos de t , vamos a encontrar un camino mínimo entre ellos que no pasa por t (la arista que une r con s).

Por otro lado, el grado de intermediación de los vértices r y s en G' vemos que depende directamente del grado de intermediación de dichos vértices en G , más concretamente:

$$B_{G'}(r) = \sum_{\substack{(x,y) \in V^2 \\ x,y \neq t}} b_{x,y}(r) + 2 \sum_{\substack{x \in V \\ x \neq s}} \frac{\sigma_{t,x}(r)}{\sigma_{t,x}} + 2 \frac{\sigma_{t,s}(r)}{\sigma_{t,s}} = \sum_{\substack{(x,y) \in V^2 \\ x,y \neq t}} d_{x,y}(r) + 2 \sum_{\substack{x \in V \\ x \neq s}} \frac{\sigma_{t,x}(r)}{\sigma_{t,x}}$$

$$B_{G'}(s) = \sum_{\substack{(x,y) \in V^2 \\ x,y \neq t}} b_{x,y}(s) + 2 \sum_{\substack{x \in V \\ x \neq r}} \frac{\sigma_{t,x}(s)}{\sigma_{t,x}} + 2 \frac{\sigma_{t,r}(s)}{\sigma_{t,r}} = \sum_{\substack{(x,y) \in V^2 \\ x,y \neq t}} d_{x,y}(s) + 2 \sum_{\substack{x \in V \\ x \neq r}} \frac{\sigma_{t,x}(s)}{\sigma_{t,x}}$$

pues $\sigma_{t,s}(r)$ y $\sigma_{t,r}(s)=0$ pues el vértice t ya está unido directamente con cada uno de ellos.

Definamos ahora $K_x = \sigma_{t,x}$, $K_x(r) = \sigma_{t,x}(r)$ y $K_x(s) = \sigma_{t,x}(s)$ de tal forma que $K_x(r) + K_x(s) = K_x$ ya que los caminos mínimos de t a x tiene que pasar obligatoriamente por r o por s . Es fácil comprobar que cualquier camino mínimo entre los vértices x, t con x distinto de r y s o bien pasa por r o bien pasa por s pero no por ambos pues, si existiera un camino $xa_0v_1\dots v_k a_k r a_{k+1} s a_{k+2} t$ el camino $xa_0v_1\dots v_k a_k r a_{k+1} t$ sería más corto.

Sumando $B_{G'}(r) + B_{G'}(s)$ concluimos que

$$\begin{aligned} B_{G'}(r) + B_{G'}(s) &= B_G(r) + B_G(s) + 2 \sum_{\substack{x \in V' \\ x \neq r, s}} \left(\frac{K_x(r)}{K_x} + \frac{K_x(s)}{K_x} \right) \\ &= B_G(r) + B_G(s) + 2 \sum_{\substack{x \in V' \\ x \neq r, s}} 1 = B_G(r) + B_G(s) + 2(n-2) \end{aligned}$$

El grado de intermediación de cualquier otro vértice z a distancia j de t con $j \geq 2$ podrá ser mayor en G' porque como mínimo va a contener el valor de la intermediación en G' aunque luego podrá valer más. No obstante, tampoco nos será necesario determinarlo exactamente. Entonces:

$$\sum_{z \in V} B_G(z) + 2(n-2) \leq \sum_{z \in V} B_{G'}(z)$$

Dividiendo a ambos lados por $\frac{1}{n+1}$ y utilizando la fórmula de la intermediación de un grafo, llegamos al resultado deseado.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+n} \left[\sum_{z \in V} B_G(z) + 2(n-2) \right] &\leq \frac{1}{1+n} \sum_{z \in V} B_{G'}(z) \\ \frac{1}{n+1} [n\bar{B}(G) + 2(n-2)] &\leq \bar{B}(G') \end{aligned}$$

- $d(r, s) = 2$: Este caso, se demuestra de la misma manera que el anterior, a pesar de que los vértices r, s y t no formen un triángulo. Como $\sigma_{t,r}(s) = \sigma_{t,s}(r) = 0$, tenemos que

$$B_{G'}(r) = B_G(r) + 2 \sum_{\substack{x \in V' \\ x \neq s}} \frac{\sigma_{t,x}(r)}{\sigma_{t,x}}, \quad B_{G'}(s) = B_G(s) + 2 \sum_{\substack{x \in V' \\ x \neq r}} \frac{\sigma_{t,x}(s)}{\sigma_{t,x}}$$

Por lo que llegamos a que $\sum_{z \in V} B_G(z) + 2(n-2) \leq \sum_{z \in V} B_{G'}(z)$ y por los razonamientos del caso $d(r, s) = 1$ llegamos a la desigualdad deseada.

□

Este teorema, como bien se especifica en las hipótesis del enunciado, es válido para todo par de vértices que están como mucho a distancia dos el uno del otro. A continuación se

presenta un ejemplo para ver que no se cumple cuando la distancia es tres y cuatro.

Ejemplo 4.8 Consideremos el grafo P_5 y los grafos C_6 y G' resultantes de unir el vértice r_1 con r_5 y r_1 con r_4 respectivamente con un nuevo vértice r_6 , tal como se muestra en la figura.

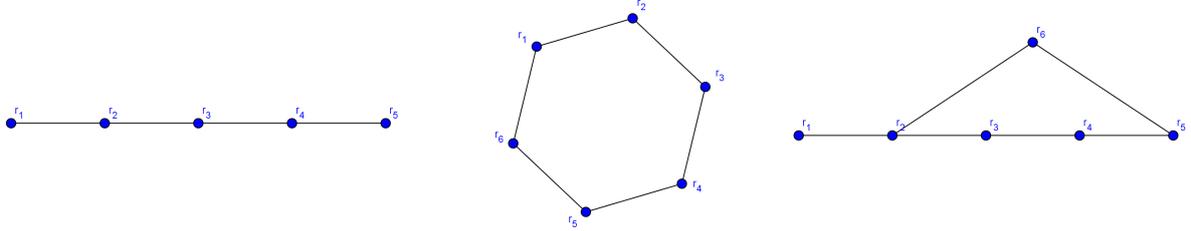


Figura 4.2: Grafos P_5 , C_6 y G' .

- Por el capítulo 3, sabemos que la intermediación de P_5 es $\bar{B}(P_5) = 4$.
- También por el capítulo 3, sabemos que $\bar{B}(C_6) = 4$
- La intermediación de G' es:

$$\begin{aligned}\bar{B}(G') &= \frac{1}{6}(B(r_1) + B(r_2) + B(r_3) + B(r_4) + B(r_5) + B(r_6)) \\ &= \frac{1}{6}(0 + 10 + 4 + 2 + 2 + 4) = 3,6\end{aligned}$$

Y en este caso $\frac{1}{6}(5 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = \frac{26}{6}$ que es mayor que 4 y 3,6.

En el Teorema 4 de [6], se afirma que:

Teorema 4.9 Sea T_n un grafo árbol con n vértices y diámetro D . Entonces

$$\bar{B}(T_n) \leq 1 + \frac{(n-4)D}{2} - \frac{D^3 - 6D^2 + h(D)}{6n}$$

donde

$$h(D) = \begin{cases} 2D & \text{si } n - D \text{ es par} \\ 36 - D & \text{si } n - D \text{ es impar} \end{cases}$$

Vamos a exponer contraejemplos y contradicciones que muestran que este Teorema no es cierto. Si tomamos el grafo $E_3(D, k)$ del Capítulo 3, y aplicamos la cota, vemos que es contradictorio. Por ejemplo, si damos como valor $D = 4$ y $k = 16$, tenemos:

$$\bar{B}(E_3(D, k)) = \frac{24k^2D - 12k^2 - \frac{3}{2}kD^2 - 3kD + 6k - \frac{1}{4}D^3 + \frac{3}{2}D^2 - 2D}{6k + 1} = 216,74$$

Pero al aplicar la cota del teorema, tendría que ser

$$\bar{B}(E_3(D, k)) \leq 1 + \frac{(6k + 1 - 4)D}{2} - \frac{D^3 - 6D^2 + 36 - D}{6(6k + 1)} = 182.$$

lo cual es absurdo.

En el Teorema se afirma también que el grafo $E_2(D, k)$ es el árbol de diámetro D de

máxima intermediación. Aprovechando el ejemplo anterior, cuando $k = 16$ y $D = 4$, tenemos:

$$\bar{B}(E_2(D, k)) = \frac{18k^2D + (-6D + 6)k - \frac{4}{3}D + D^2 - \frac{1}{6}D^3}{6k + 1} = 187,05 \leq \bar{B}(E_3(D, k)) = 216,74$$

También es cierto que este teorema es contradictorio con el Teorema 2.18. Tomamos como ejemplo el grafo $E_3(6, 2)$. Por un lado, aplicando el teorema que es incorrecto, llegamos a que $\bar{B}(E_3(6, 2)) \leq 28,11538$. Por otro lado, aplicando el Teorema 2.18 con ayuda de la distancia media y el número de vértices, llegamos a que $\bar{B}(E_3(6, 2)) = 35,53846$.

Aparte de todas las cotas vistas hasta ahora, existen también cotas a partir de la teoría espectral de grafos. Los siguientes resultados han sido tomados de [1].

En primer lugar definimos $C_{r_1, r_2} = \{ \text{caminos mínimos de } r_1 \text{ a } r_2 \}$. Sean $c_1, c_2 \in C_{r_1, r_2}$, $c_1 \sim c_2$ si y solo si c_1 y c_2 tienen al menos un vértice en común además de r_1 y r_2 . Consideremos $m = \#C_{r_1, r_2} / \sim$.

Proposición 4.10 Sea G un grafo conexo con $V(G) = n$ y sean r_1, r_2 y $r_3 \in V(G)$ tales que $d(r_1, r_2) > 2$ y r_3 pertenece a algún camino mínimo de r_1 y r_2 . Sea m el valor definido anteriormente. Sea D el diámetro del grafo, λ_1 el mayor valor propio de la matriz de adyacencia del grafo y $\omega = \max_i |(u_1)_i|$ la componente mayor de su vector propio correspondiente. Se tiene:

- Si $m = 1$, $b_{r_1, r_2}(r_3) = \frac{|C_{r_1, r_2}|}{\sigma_{r_1, r_2}} = 1$
- Si $m > 1$, $\frac{1}{n\lambda_1^D \omega^2} \leq b_{r_1, r_2}(r_3) \leq \frac{n\lambda_1^D \omega^2}{(n\lambda_1^D \omega^2 + m - 1)}$

Demostración. Si $m = 1$ quiere decir que hay un único vértice (r_3) que está en todos los caminos mínimos que van de r_1 a r_2 . Por tanto, σ_{r_1, r_2} es equivalente al cardinal de la clase, que coincide con el número de caminos mínimos. Llegamos a que $b_{r_1, r_2}(r_3) = 1$.

Si $m > 1$, tenemos que

$$\sigma_{r_1, r_2}(r_3) + m - 1 \leq \sigma_{r_1, r_2}$$

ya que para el resto de los $m - 1$ vértices va a pasar como mínimo un camino mínimo de r_1 a r_2 . Entonces:

$$\frac{\sigma_{r_1, r_2}(r_3)}{\sigma_{r_1, r_2}(r_3) + m - 1} \geq \frac{\sigma_{r_1, r_2}(r_3)}{\sigma_{r_1, r_2}} \geq \frac{1}{\sigma_{r_1, r_2}}.$$

Por otro lado, sea $\sigma_{max} = \max_{i, j \in V} \sigma_{i, j}$. Entonces, habrá dos vértices del grafo r_4, r_5 a distancia $d \leq D$ los cuales alcancen el máximo número de caminos mínimos (no tiene por qué haber solo dos, puede haber más). Sea,

$$f(x) = \frac{x}{x + m - 1}.$$

Es una función creciente para todo valor de $m > 1$ pues su derivada $f'(x) = \frac{m-1}{(x+m-1)^2} > 0$. Por tanto, se tiene

$$\frac{1}{\sigma_{max}} \leq \frac{1}{\sigma_{r_1, r_2}} \leq \frac{\sigma_{r_1, r_2}(r_3)}{\sigma_{r_1, r_2}(r_3) + m - 1} \leq \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max} + m - 1}$$

Tal como vimos en el Capítulo 2, existe Q ortonormal y D diagonal con:

$$A = QDQ^{-1} \implies A^d = QD^dQ^{-1} = QD^dQ^t$$

Desarrollando el elemento $a_{r_4 r_5}^d$ en sumas:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} = a_{45}^d &= \sum_{l=1}^n (u_l)_{r_4} [\lambda_l^d (u_l)_{r_5}] = \sum_{l=1}^n \lambda_l^d (u_l)_{r_4} (u_l)_{r_5} \leq \sum_{l=1}^n \lambda_n^d (u_l)_{r_4} (u_l)_{r_5} \\ &\leq \sum_{l=1}^n \lambda_1^D (u_l)_{r_4} (u_l)_{r_5} \leq \sum_{l=1}^n \lambda_l^d \omega^2 = n \lambda_1^D \omega^2. \end{aligned}$$

La primera de las desigualdades es debido a que acotamos cada valor propio por el valor propio dominante, que como ya se vio en el capítulo 2, es como mínimo el grado medio del grafo. Al ser un grafo conexo, este es como mínimo 1 y por lo tanto se cumplirá la desigualdad. En la desigualdad segunda aplicamos que $d \leq D = \max\{d(x, y), \forall x, y \in V\}$. En la última aplicamos que $(u_l)_i \leq \omega$.

Para concluir:

$$\frac{1}{\sigma_{max}} \leq b_{r_1 r_2}(r_3) \leq \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max} + m - 1} \iff \frac{1}{n \lambda_1^D \omega^2} \leq b_{r_1 r_2}(r_3) \leq \frac{n \lambda_1^D \omega^2}{n \lambda_1^D \omega^2 + m - 1}$$

□

A continuación presentamos un corolario de la proposición anterior que nos aporta otra cota similar a la anterior.

Corolario 4.11 Sea un grafo G en las mismas condiciones de la proposición anterior, se tiene que, si $m > 1$:

$$b_{r_1 r_2}(r_3) \leq 1 - \frac{m - 1}{n \lambda_1^D \omega^2}$$

Demostración. Si $m > 1$ demostrándolo como la proposición anterior, tenemos que $\sigma_{r_1 r_2}(r_3) + m - 1 \leq \sigma_{r_1 r_2}$. Por tanto:

$$\frac{1}{\sigma_{max}} \leq \frac{1}{\sigma_{r_1 r_2}} \leq \frac{\sigma_{r_1 r_2}(r_3)}{\sigma_{r_1 r_2}} \leq \frac{\sigma_{r_1 r_2} - (m - 1)}{\sigma_{r_1 r_2}} \leq 1 - \frac{m - 1}{\sigma_{max}},$$

como hemos visto antes, $\sigma_{max} \leq n \lambda_1^D \omega^2$

$$\frac{1}{n \lambda_1^D \omega^2} \leq \frac{\sigma_{r_1 r_2}(r_3)}{\sigma_{r_1 r_2}} = b_{r_1 r_2}(r_3) \leq 1 - \frac{m - 1}{n \lambda_1^D \omega^2}$$

□

A continuación presentamos un ejemplo para comparar las cotas de la proposición y corolario anterior.

Ejemplo 4.12 Dado el grafo G de la figura 4.3:

Vamos a calcular cotas para $b_{r_1, r_4}(r_8)$, sabiendo que $D = 3$ y $m = 4$.

Los valores propios de la matriz de adyacencia del grafo son los siguientes (son aproximados ya que se han calculado computacionalmente):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3,1410, & \lambda_3 &= 2,0656, & \lambda_7 &= 1,1831, & \lambda_6 &= 1,4722, & \lambda_9 &= 1,0000, \\ \lambda_{13} &= 0, & \lambda_{12} &= 0, & \lambda_{11} &= -0,27915, & \lambda_{10} &= -1,0000, \\ \lambda_2 &= -2,9864, & \lambda_5 &= -1,5288, & \lambda_8 &= -1,1722, & \lambda_4 &= -1,8954 \end{aligned}$$

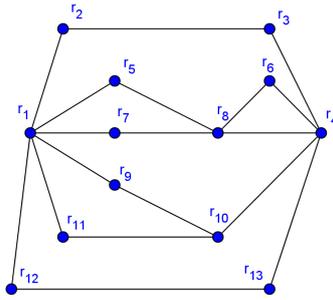


Figura 4.3: Grafo G.

Por tanto λ_1 es el valor propio dominante, que tiene por vector propio asociado:

$$u_1 = \{-0,43030, -0,19804, -0,19175, -0,40424, -0,25452, -0,24622, -0,25452, \\ -0,36915, -0,22322, -0,27083, -0,22322, -0,19804, -0,19175\}$$

Llegamos a que $\omega = 0,43030$

Aplicando la Proposición 4.10 a este ejemplo, tenemos:

$$0,0134 \leq b_{r_1, r_4}(r_8) \leq 0,9739$$

Y utilizando el Corolario 4.11:

$$0,0134 \leq b_{r_1, r_4}(r_8) \leq 0,9598$$

Podemos concluir que el corolario es más preciso que la proposición. Además, $b_{r_1, r_2}(r_8)$ es exactamente 0,3334.

Capítulo 5

Intermediación uniforme y extremal.

En este capítulo comenzaremos estudiando algunas propiedades de los grafos con intermediación uniforme, es decir, grafos cuyos vértices tiene todos la misma intermediación. A primera vista, es posible que se nos ocurran algunos tipos de grafos con intermediación uniforme (algunos de los vistos ya en el Capítulo 3), como por ejemplo, el grafo completo K_n . Independientemente del valor que tome n , para todo $r \in V(K_n)$, se tiene que $B(r) = 0$ y por tanto $\bar{B}(K_n) = 0$.

Otra familia de grafos que tienen intermediación uniforme también vista en el capítulo 3 es la de los grafo rueda:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{(n-2)^2}{4} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{(n-6)(n-1)}{4} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \forall r \in V(C_n)$$

Los siguientes resultados se han tomado de [7].

Mediante el siguiente resultado, se muestra una condición necesaria para que en un grafo, el grado de intermediación de todos los vértices sea el mismo.

Teorema 5.1 Todo grafo de intermediación uniforme es $2 - \text{conexo}$.

Demostración. Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Para ello, sea G un grafo con intermediación uniforme y $x \in V(G)$, de forma que si a G le quitamos x , el grafo se descompone en k componentes conexas W_1, W_2, \dots, W_k con $V(W_i) = w_i$ y $k \geq 2$. Sea W_1 la componente conexa de $G \setminus \{x\}$ con el menor número de vértices, w_1 . Definimos $H_1 = W_1 \cup \{x\}$ con $V(W_1) = w_1 + 1$ y sea $y \in V(W_1)$ el vértice a mayor distancia de x .

Por un lado, es fácil de ver que $w_1 \geq 2$ y que $B(x) = 2 \sum_{1 \leq i \leq j}^k w_i w_j$ ya que, al ser x un

vértice puente (es decir, un vértice que sirve de unión de componentes conexas), todo par de vértices de diferentes componentes conexas contribuirá en 1 a la intermediación de x , ya que todos los caminos mínimos entre estos pares de vértices pasan por x , al estar en distintas componentes conexas. Todo ellos se multiplica por 2 porque hablamos de pares de vértices no ordenados.

Por otro lado, si tomamos $r_1 \in V(W_i)$ y $r_2 \in V(W_j)$ con $W_i \neq W_j \neq W_1$ ó $r_1 \in V(W_i)$ y $r_2 \in V(W_1)$, con $i \neq 1$, los pares (r_1, r_2) no contribuirán a la intermediación de y . Concluimos que los únicos pares de vértices que contribuirán son los (r_1, r_2) que están en W_1 (y que son distintos de y).

Sabiendo que la intermediación de un vértice es a lo sumo $(n-1)(n-2)$, siendo n el número de vértices de G , llegamos a que

$$B(y) \leq w_1(w_1 - 1) < w_1^2 < 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} w_i w_j \leq B(x)$$

con lo que llegamos a una contradicción ya que tenemos que $B(y) < B(x)$ y hemos supuesto desde un principio que el grafo tiene intermediación uniforme, es decir, que la intermediación de todos los vértices es la misma. \square

En grafos de diámetro 2, el grado de intermediación de cualquier vértice queda determinado unívocamente por sus vértices adyacentes como se muestra a continuación.

Lema 5.2 Sea G un grafo de diámetro 2. Para todo $r \in V(G)$, se tiene que

$$B(r) = \sum_{\substack{(s,t) \in N^2(r) \\ st \notin A(G)}} \frac{1}{\sigma_{s,t}}$$

Demostración. Aplicando la definición de intermediación de un vértice a r , tenemos:

$$B(r) = \sum_{\substack{(s,t) \in V^2(G) \\ s,t \neq r}} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} = \sum_{(s,t) \in (N(r))^2} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} + \sum_{(s,t) \in (V(G) \setminus N(r))^2} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} + \sum_{\substack{(s,t), s \in N(r) \\ t \notin N(r)}} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}}$$

Si $s, t \in N(r)$, tenemos que $\sigma_{s,t}(r) = 0$ si r y s son adyacentes, si no $\sigma_{s,t}(r)$ será igual a uno. Si $s, t \notin N(r)$ tendremos que $\sigma_{s,t}(r) = 0$ ya que, de tener un camino mínimo que pasa por r , este tendrá longitud 4, lo que es imposible, ya que $D(G) = 2$ y por tanto $d(s,t) \leq 2$. Por último, si $s \in N(r)$ pero $t \notin N(r)$, tendremos que $\sigma_{s,t}(r) = 0$, ya que de pasar algún camino mínimo por r , este tendrá longitud 3 y como hemos visto en el anterior caso, es imposible.

Juntando todo esto, llegamos a que el segundo y tercer sumando son cero y por tanto:

$$B(r) = \sum_{(s,t) \in N^2(r)} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} = \sum_{\substack{(s,t) \in N^2(r) \\ st \notin A(G)}} \frac{1}{\sigma_{s,t}}$$

\square

A continuación se presenta un método directo para obtener la intermediación de los vértices en un grafo de intermediación uniforme de diámetro 2, a partir del número de vértices y aristas.

Lema 5.3 Sea G un grafo con intermediación uniforme de diámetro 2, $|V(G)| = n$ y $|A(G)| = m$. Para todo $r \in V(G)$ se cumple que $B(r) = n - 1 - \frac{2m}{n}$, y por tanto $\bar{B}(G) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{2m}{n^2}$.

Demostración. Por el lema previo, sabemos que $B(r) = \sum_{\substack{(s,t) \in N^2(r) \\ st \notin A(G)}} \frac{1}{\sigma_{s,t}}$. De esto deduci-

mos que en la suma $\sum_{r \in V(G)} B(r)$ todo par de vértices no adyacentes, contribuyen en $\frac{1}{\sigma_{s,t}}$

en cada uno de sus vecinos comunes. Como el número de vecinos comunes en estos grafos es $\sigma_{s,t}$, podemos concluir:

$$\sum_{r \in V(G)} B(r) = \sum_{\substack{(s,t) \in V^2(G) \\ st \notin A(G)}} \sigma_{s,t} \frac{1}{\sigma_{s,t}} = \sum_{\substack{(s,t) \in V^2(G) \\ st \notin A(G)}} 1 = n(n-1) - 2m.$$

La suma es simplemente el número de aristas que faltan en el grafo para ser completo. Para calcularlo consideramos el número total de pares vértices $2\binom{n}{2}$, que viene a ser lo mismo que el número de aristas que hay en un grafo. Por tanto, restamos $2m$ que son las que tiene ya G (como es no dirigido consideremos que hay $2m$).

Como estamos en un grafo con intermediación uniforme, $B(r)$ es el mismo para todo vértice, por tanto,

$$B(r) = \frac{1}{n} \sum_{y \in V(G)} B(y) = n - 1 - \frac{2m}{n}.$$

□

En el siguiente resultado, presentamos un teorema en el que se establece una relación entre los grafos de intermediación uniforme y los grafos completos.

Teorema 5.4 Sea G un grafo de intermediación uniforme con al menos un vértice de grado $n - 1$. Entonces $G \cong K_n$.

Demostración. Sea $r \in V(G)$ con $d(r) = n - 1$ y H el grafo resultante de eliminar a G el vértice r . Sea $S = \{(s, t) \in V^2(H) : d_H(s, t) \geq 3\}$, $T = \{(s, t) \in V^2(H) : d(s, t) = 2\}$ y $\sigma'_{s,t}$ el número de caminos mínimos de s a t en H . Vamos a probar en primer lugar que S es un conjunto vacío.

Si $(s, t) \in S$, entonces habrá un único camino mínimo de s a t de longitud 2 en G que pasa por r , pues r es adyacente a todos los vértices y en H la distancia de s a t es mayor o igual que tres. Si $(s, t) \in T$ entonces de todos los caminos mínimos que haya entre s y t solo uno pasará por r ,

$$B(r) = \sum_{(s,t) \in S} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} + \sum_{(s,t) \in T} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} = \sum_{(s,t) \in S} 1 + \sum_{(s,t) \in T} \frac{1}{\sigma'_{s,t} + 1},$$

Si $x \in V(G)$, $x \neq r$:

$$B(x) = \sum_{(s,t) \in S} \frac{\sigma_{s,t}(x)}{\sigma_{s,t}} + \sum_{(s,t) \in T} \frac{\sigma_{s,t}(x)}{\sigma_{s,t}} = \sum_{(s,t) \in S} 0 + \sum_{(s,t) \in T} \frac{1}{\sigma'_{s,t} + 1} = \sum_{\substack{(s,t) \in T \\ st, ts \in A(G)}} \frac{1}{\sigma'_{s,t} + 1}.$$

El vértice r no influye en la intermediación de x , ya que al ser adyacente a todos los vértices, no tiene caminos mínimos con otros vértices que pasen por x (son todos de distancia uno). Si $(s, t) \in S$, $\sigma_{s,t}(x) = 0$ ya que están a distancia dos y su único camino mínimo pasa por x . Si $(s, t) \in T$, el par (s, t) aportará a la intermediación de y solo si existen dos aristas sy e $yt \in A(G)$.

Como G es un grafo de intermediación uniforme, $B(r) = B(x)$ y por tanto,

$$\sum_{(s,t) \in S} 1 + \sum_{(s,t) \in T} \frac{1}{\sigma'_{s,t} + 1} = \sum_{\substack{(s,t) \in T \\ st, ts \in A(H)}} \frac{1}{\sigma'_{s,t} + 1}$$

De esto deducimos que $\sum_{(s,t) \in S} 1 = 0$, lo que implica que S es un conjunto vacío. Podemos

concluir también, que todo vértice de H es vecino de todo par de vértices no adyacentes. Por tanto, el diámetro de G es 2.

Para demostrar ahora que $G \cong K_n$, suponemos que no es así, y por tanto existe $x \in V(G)$, $x \neq r$ tal que $d(x) < n - 1$.

Por un lado:

$$B(x) = \sum_{\substack{(s,t) \in T \\ sy, ty \in A(H)}} \frac{1}{\sigma'_{s,t} + 1} = \sum_{\substack{(s,t) \in T \\ sy, ty \in A(G)}} \frac{1}{(n-3) + 1} \leq \frac{1}{n-2} 2A(\bar{H}),$$

siendo \bar{H} el grafo complementario de H . Esta desigualdad es porque como hemos dicho antes, todo vértice es vecino de todo par de vértices no adyacentes, por lo que como $d(s, t) = 2$ y s, t son no adyacentes, habrá $(n - 3)$ caminos mínimos en H entre s y t .

Por otro lado, como S es un conjunto vacío, el número de pares de vértices no ordenados a distancia 2 serán los que no están a distancia uno, es decir $A(\bar{H})$ por 2 (ya que son no ordenados). De todos ellos, no todos los pares tienen a y como vecino común ya que $d(y) < n - 1$. Por otro lado, por el mismo razonamiento:

$$B(r) = \sum_{(s,t) \in T} \frac{1}{\sigma'_{s,t} + 1} = \sum_{(s,t) \in T} \frac{1}{(n-3) + 1} = \frac{1}{n-2} 2A(\bar{H}).$$

Con lo que llegamos a un absurdo ($B(x) < B(r)$) ya que G es un grafo de intermediación uniforme. Por tanto, todos los vértices de G tienen grado $n - 1$ y $G \cong K_n$

□

De los grafos visto hasta ahora, solo conocemos las familias de K_n y C_n con intermediación uniforme. A continuación presentamos un procedimiento para construir grafos (que no tienen por qué ser regulares) de intermediación uniforme llamado “clonación de grafos”. Estos resultados siguientes se han encontrado en [5] y [6].

Dicha operación consiste en tomar un grafo conexo cualquiera G con $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ su conjunto de vértices. Sean H_1, H_2, \dots, H_n otros grafos. El grafo $G[H_1, \dots, H_n]$ es el grafo resultante de sustituir cada r_i por H_i y unir cada vértice de H_i con H_j en caso de que $r_i r_j \in A(G)$. Si se da el caso de que $H_1 = H_2 = \dots = H_n$ se escribe $G[H]$ como el grafo resultante. Con la Figura 5.1, se observa un ejemplo de lo que es un grafo clonación.

En el siguiente resultado se presenta la demostración de que un grafo obtenido de la operación anterior tiene intermediación uniforme, si se parte de un grafo con intermediación uniforme y se clona el grafo completo.

Teorema 5.5 Sea G un grafo de n vértices y de intermediación uniforme y m un entero. Entonces $G[K_m]$ es de intermediación uniforme.

Demostración. En primer lugar, definimos K^i para $1 \leq i \leq n$ como los n grafos completos que sustituyen a cada vértice de G . Sea $r \in V(G[K_m])$, más concretamente $r \in V(K^i)$, y $r_i \in V(G)$ el vértice que ha sido sustituido por el grafo K^1 . Sean también $s, t \in V(K^j)$, $V(K^k)$ respectivamente, y sean s_j, t_k los correspondientes vértices de $V(G)$ que han sido sustituidos por K^j y K^k , siempre con $i \neq j \neq k$. Por otro lado, sabemos:

$$d_{G[K_m]}(s, t) = d_G(s_j, t_k) = d \quad y \quad \sigma_{s,t} = \sigma_{s_j, t_k} m^{d-1}$$

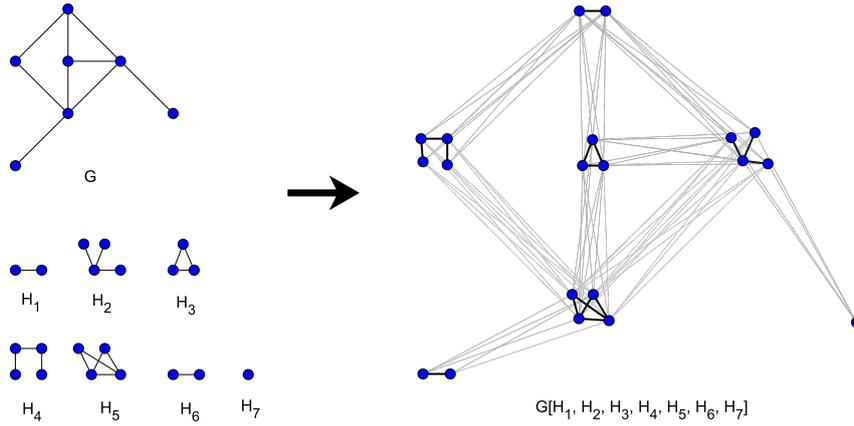


Figura 5.1: Grafo clonación.

ya que cada camino mínimo de s_j a t_k en $G[K_m]$ es el número de caminos mínimos de s a t multiplicado por todas las posibilidades de recorrerlo. Como $d_{G[K_m]}(s_j, t_k)$ es d , habrá que pasar por $d - 1$ grafos completos para ir de un vértice a otro, cada uno de ellos de m vértices.

Dado $r_l \in V(G)$ que está contenido en un camino mínimo de s_j y t_k , sean h_1, h_2 tales que

$$d_G(s_j, r_l) = h_1, \quad d_G(r_l, t_k) = h_2$$

y entonces:

$$\sigma_{s,t}(r) = m^{h_1-1} m^{h_2-1} \sigma_{s_j, t_k}(r_i) = \sigma_{s_j, t_k}(r_l) m^{h_1+h_2-2} = \sigma_{s_j, t_k}(r_l) m^{d-2}.$$

Ahora aplicando todo esto a la definición de intermediación de un vértice en $G[K_m]$:

$$B_{G[K_m]}(r) = \sum_{(s,t) \in V^2(G[K_m])} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} = \sum_{(s,t) \in V^2(G[K_m])} \frac{m^{d-2} \sigma_{s_j, t_k}(r_i)}{m^{d-1} \sigma_{s_j, t_k}} = \frac{1}{m} \sum_{(s,t) \in V^2(G[K_m])} \frac{\sigma_{s_j, t_k}(r_i)}{\sigma_{s_j, t_k}}$$

Los únicos pares de vértices que aportan a la intermediación de r son los que vienen de grafos K^β diferentes. Por otro lado, por cada pareja $(s_j, t_k) \in V(G)$, aparecen m^2 parejas nuevas de vértices (s, t) , y el grado de intermediación de r es

$$B(r) = \frac{1}{m} \sum_{\substack{(s,t) \in V^2(G[K_m]) \\ s \in K^i, t \in K^j}} \frac{\sigma_{s_j, t_k}(r_i)}{\sigma_{s_j, t_k}} = \frac{1}{m} \sum_{(s_j, t_k) \in V^2(G)} m^2 \frac{\sigma_{s_j, t_k}}{\sigma_{s_j, t_k}} = m B_G(r_i).$$

Como G es uniforme, todos sus vértices tendrán la misma intermediación. Por tanto, como m es fijo, los vértices de $G[K_m]$ tendrán la misma también ya que dependen de la de los de G . \square

Otro resultado donde se aplica el grafo clonación es el siguiente, donde se parte de un grafo K_n , y se le clona con n grafos complementarios de C_{k_i} .

Teorema 5.6 Sea $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 4$ enteros. El grafo $K_n[\bar{C}_{k_1}, \dots, \bar{C}_{k_n}]$ tiene intermediación uniforme.

Demostración. Sea $p = \sum_{i=1}^n k_i$ el número de vértices de $K_n[\bar{C}_{k_1}, \dots, \bar{C}_{k_n}]$.

Sabemos que dicho grafo tendrá diámetro dos, ya que todo vértice de \bar{C}_{k_i} es adyacente a otro vértice de \bar{C}_{k_j} con $i \neq j$ y $0 \leq i, j \leq n$. Si dos vértices pertenecen al mismo \bar{C}_{k_i} estarán como mucho a distancia 2, ya que de no ser adyacentes tendrán al menos un vecino en común (mirar Figura 5.2).

Definimos $r_1^i, r_2^i, \dots, r_{k_i}^i$ como el conjunto de vértices de \bar{C}_{k_i} . Tenemos que para cada $r = r_l^i \in V(\bar{C}_{k_i})$ con $1 \leq l \leq k_i$:

$$B(r) = \sum_{s,t \in V(\bar{C}_{k_i})} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} + \sum_{i \neq j} \sum_{s,t \in V(\bar{C}_{k_j})} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}} + \sum_{i \neq j} \sum_{s \in V(\bar{C}_{k_i}), t \in V(\bar{C}_{k_j})} \frac{\sigma_{s,t}(r)}{\sigma_{s,t}},$$

ya que un par de vértices $(s, t) \in V(K_n[\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{k_n}])$ puede estar formado por ambos vértices de \bar{C}_{k_i} , de otro \bar{C}_{k_j} diferente, o uno de \bar{C}_{k_i} y el otro de uno diferente.

Para la primera suma, se puede ver que en \bar{C}_{k_i} solo contribuirán a la intermediación de r los pares de vértices no adyacentes, es decir, $2k_i$ pares de vértices $((r_1^i, r_2^i), (r_2^i, r_3^i), \dots, (r_{k_i-1}^i, r_{k_i}^i), (r_{k_i}^i, r_1^i))$ y sus simétricos ya que es un grafo no dirigido). Aunque de todos, 8 pares no contribuirán a la intermediación $((r, r_{l+1}^i), (r_{l+1}^i, r_{l+2}^i), (r_{l-1}^i, r), (r_{l-2}^i, r_{l-1}^i))$ y sus simétricos), ya que no van a tener caminos mínimos que pasen por el propio r . Por lo tanto habrá $2(k_i - 4)$ pares de vértices que contribuyan a la intermediación de r .

Para cada uno de estos pares de vértices, hay un total de $2(k_i - 4 + p - k_i)$ caminos de longitud 2 que los unen (los de ese mismo grafo \bar{C}_{k_i} y los que pasan por cada uno del resto de vértices de $K_n[\bar{C}_{k_1}, \dots, \bar{C}_{k_n}]$, es decir, $p - k_i$). De todos estos, solo uno pasa por r .

Por un procedimiento similar podemos ver que en la segunda suma, para cada \bar{C}_{k_j} con $j \neq i$ habrá $2k_j$ pares de vértices no adyacentes que contribuyan a la intermediación. Cada par tendrá $2(k_j - 4 + p - k_j)$ caminos mínimos y solo uno pasará por r .

La tercera suma es cero para todo par ya que todos los vértices de \bar{C}_{k_i} y \bar{C}_{k_j} son adyacentes entre si por construcción del grafo.

Con todo esto, tenemos:

$$B(r) = \frac{2(k_i - 4)}{2(k_i - 4 + p - k_i)} + \sum_{i \neq j} \frac{2k_j}{2(k_j - 4 + p - k_j)} + 0 = \frac{k_i - 4}{-4 + p} + \sum_{i \neq j} \frac{k_j}{-4 + p} = 1.$$

Con lo que concluimos que la intermediación para todo vértice será uno y por tanto, $K_n[\bar{C}_{k_1}, \dots, \bar{C}_{k_n}]$ tendrá intermediación uniforme. \square

Ahora se van a presentar dos teoremas que vienen a ser dos procedimientos parecidos de cómo construir grafos de intermediación particular manipulando grafos completos.

Teorema 5.7 Sean t, s dos enteros positivos tales que $s = t - 1$. Definamos K_t^1 y K_t^2 como dos copias disjuntas del grafo completo de t vértices y sea H_1 el grafo obtenido por

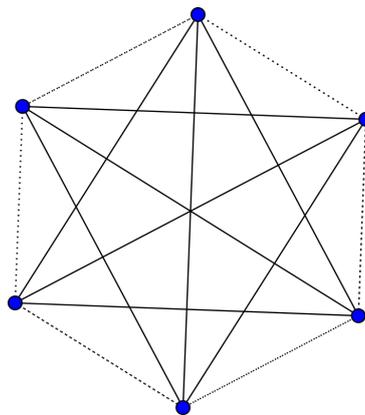


Figura 5.2: \bar{C}_6 .

la unión mediante los vértices de K_t^1, K_t^2 , con $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ y $V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ vértices respectivamente, suprimiendo las aristas $u_i v_i$ para cada $i = 1, \dots, t$. Sea $H_2 \cong K_{2s}$ donde $V(H_2) = V_3 \cup V_4$, $|V_3| = |V_4| = s$ y $V_3 \cap V_4 = \emptyset$. Entonces, el grafo G resultante de unir H_1 con H_2 añadiendo nuevas aristas xy con $x \in V_1, y \in V_3$ o $x \in V_2, y \in V_4$ tiene intermediación uniforme.

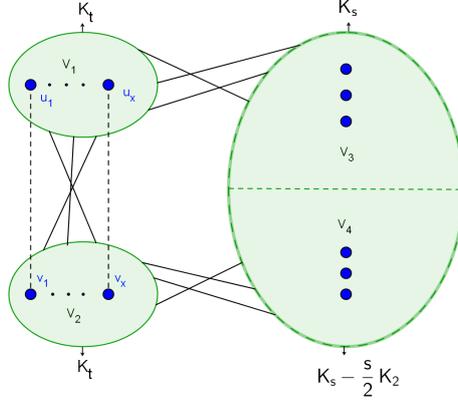


Figura 5.3: Grafo G .

Demostración. Por un lado, es fácil ver que $\text{diam}(G) = 2$. Sea $x \in V(H_1)$ (podemos suponer que $x \in V_1$ sin pérdida de generalidad) e $y \in V(H_2)$ (también suponemos que $y \in V_3$). Entonces:

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{u,v \in V(H_1)} \frac{\sigma_{u,v}(x)}{\sigma_{u,v}} + \sum_{u,v \in V(H_2)} \frac{\sigma_{u,v}(x)}{\sigma_{u,v}} + \sum_{u \in V(H_1), v \in V(H_2)} \frac{\sigma_{u,v}(x)}{\sigma(u,v)} \\ &= \sum \frac{1}{2(t-1)} = 1 + 0 + \frac{2(t-1)s}{t+s-1} \end{aligned}$$

De la primera suma podemos observar que para cada uno de los $2(t-1)$ pares de vértices no adyacentes y no ordenados de H_1 que hay, cada uno contribuye en $\frac{1}{2(t-1)}$. Como hay $2(t-1)$ (ya que el par formado por el vértice r no se cuenta), la suma será 1.

La segunda suma es cero porque todo par de vértices de H_2 es adyacente entre sí.

En la tercera suma, podemos ver que los únicos pares de vértices que contribuyen a la intermediación de x son (u,v) donde $u \in V_3, v \in V_2$ (ya que los vértices de V_4 son adyacentes a los de V_2 y V_3). Habrá un total de $t+s-1$ caminos mínimos ya que pueden pasar por los vértices de V_1 (cardinal $t-1$ sin contar x) o V_4 (cardinal s). De todos ellos, solo uno va a pasar por x . El número de pares de vértices no ordenados que contribuyen a la intermediación son $2(t-1)s$, ya que el vértice de V_2 no adyacente a x no aporta.

$$B(y) = \sum_{u,v \in V(H_1)} \frac{\sigma_{u,v}(y)}{\sigma_{u,v}} + \sum_{u,v \in V(H_2)} \frac{\sigma_{u,v}(y)}{\sigma_{u,v}} + \sum_{u \in V(H_1), v \in V(H_2)} \frac{\sigma_{u,v}(y)}{\sigma_{u,v}} = 0 + 0 + \frac{2ts}{t+s-1},$$

donde la primera suma no contribuye nada ya que cualquier camino de pares de vértices no adyacentes que pasa por H_2 tiene longitud 3.

La segunda suma también es cero porque todos los vértices de H_2 son adyacentes entre sí.

En la tercera suma, los únicos pares de vértices que aportan algo a la intermediación son

(u, v) con $u \in V_1$ y $v \in V_4$ (ya que los vértices de V_2 son adyacentes a los de V_1 y V_4). Habrá un total de $t + s - 1$ caminos mínimo ya que pueden pasar por los vértices de V_2 o V_3 . De todos los caminos mínimos, solo uno pasa por y . En la intermediación de y contribuyen $2ts$ pares de vértices, las combinaciones de los de V_1 con los de V_4 .

Ahora, usando que $s = t - 1$ en la intermediación de r :

$$B(r) = 1 + \frac{2(t-1)s}{t+s-1} = \frac{t+s-1+2(t-1)s}{t+s-1} = \frac{2ts+2t-2s+2}{t+s-1} = \frac{2ts}{t+s-1} = B(y)$$

Hemos llegado a que la intermediación de todo vértice en G es la misma, y por tanto, tiene intermediación uniforme.

□

Cambiando el tema del capítulo, al igual que existen grafos con grado de intermediación uniforme, también pueden existir grafos cuyos vértices tienen todos grados de intermediación diferente. Dichos grafos, les llamaremos grafos extremales. Los siguientes resultados se han tomado de [12]

El siguiente resultado nos da dos condiciones necesarias para que un grafo sea extremal.

Proposición 5.8 Sea G un grafo con vértices de distinta intermediación. Entonces:

1. Hay a lo sumo un vértice cuyos vecinos forman un subgrafo completo.
2. G tiene como único automorfismo la identidad.

Demostración. Para el primer punto, como ya vimos en el capítulo 1, que los vecinos de un grafo formen un subgrafo completo es equivalente a que tenga ese vértice intermediación cero. Si hubiera más de un vértice que cumpliera esta condición, habría más de un vértice con intermediación cero y por tanto no tendrían todos intermediación distinta. Para el segundo punto, si hubiese algún automorfismo distinto de la identidad, esto implicaría que hubiese algún tipo de simetría y por tanto, habría vértices con la misma intermediación.

Estas condiciones son necesarias pero no suficientes para que un grafo tenga todos sus vértices con distinta intermediación. El siguiente ejemplo muestra un caso en el que no se cumple la doble implicación.

Ejemplo 5.9 Sea el siguiente grafo G .

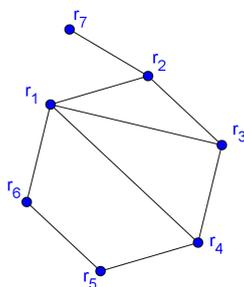


Figura 5.4: Grafo G .

Por un lado se observa que r_7 es el único vértice cuyo vecino (r_2), genera un subgrafo completo. Por otro lado, no existen automorfismos distintos de la identidad, ya que al

ser r_7 el único vértice de grado uno, en un supuesto automorfismo r_7 tendría que quedar fijado ya que es el único vértice de grado uno. Por tanto, el único vértice adyacente a r_7 también tendrá que quedar fijado, es decir, r_2 . Por otro lado, r_2 tiene otros dos vértices adyacentes, r_1 y r_3 que quedarán fijados también por tener distinto grado. Siguiendo de la misma manera con el resto de vértices llegamos a que el único automorfismo posible es la identidad.

A pesar de que se cumplan las condiciones, no tienen todos sus vértices grado de intermediación distinto ya que $B(r_5) = B(r_6) = 1$.

A la hora de estudiar grafos con estas características, es interesante saber para qué número de vértices pueden existir grafos así o no.

Teorema 5.10 Sea n el número de vértices de un grafo G . Si $2 \leq n \leq 4$, no existen grafos conexos con grado de intermediación distinto en cada uno de sus vértices.

Demostración. Para verlo, vamos a ir viendo uno a uno según el valor de n .

- Si $n = 2$, el único grafo conexo que existe de dos vértices es K_2 y tienen ambos vértices intermediación cero.
- En el caso de que $n = 3$, existen dos grafos no isomorfos y conexos, P_3 y K_3 . El primero tiene sus dos vértices que no son el central con intermediación nula. El K_3 tienen todos intermediación cero también, como vimos en el capítulo 3.
- Para $n = 4$, existen seis grafos conexos no isomorfos: K_4 ; $K_4 \setminus \{a\}$ (siendo a una arista); P_4 ; $K_{1,3}$; C_4 y $K_4 - P_3$. Por un lado, K_4 no cumple la primera condición de la proposición previa, ya que todos los vértices tienen a sus vecinos que forman un subgrafo completo. Para el caso del grafo P_4 basta tomar el automorfismo que asigna cada vértice a su simétrico. En el caso del grafo ciclo de cuatro vértices, basta considerar el automorfismo que asigna a cada vértice su opuesto. Consideremos ahora, los otros tres grafos restantes que vienen representados en la siguiente imagen.

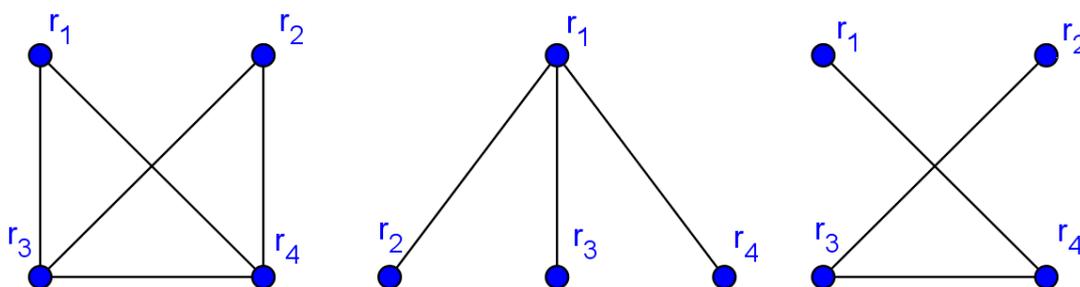


Figura 5.5: Grafos $K_4 \setminus \{a\}$, $K_{1,3}$ y $K_4 - P_3$.

Los siguientes automorfismos son ejemplos distintos de la identidad de $K_4 \setminus \{a\}$, $K_{1,3}$ y $K_4 - P_3$ respectivamente.

$$\begin{array}{llll}
 f_1 : V(K_4 \setminus \{a\}) & \longrightarrow & V(K_4 \setminus \{a\}) & f_2 : V(K_{1,3}) & \longrightarrow & V(K_{1,3}) & f_3 : V(K_4 - P_3) & \longrightarrow & V(K_4 - P_3) \\
 r_1 & \longmapsto & r_2 & r_1 & \longmapsto & r_1 & r_1 & \longmapsto & r_2 \\
 r_2 & \longmapsto & r_1 & r_2 & \longmapsto & r_4 & r_2 & \longmapsto & r_1 \\
 r_3 & \longmapsto & r_3 & r_3 & \longmapsto & r_3 & r_3 & \longmapsto & r_4 \\
 r_4 & \longmapsto & r_4 & r_4 & \longmapsto & r_2 & r_4 & \longmapsto & r_3
 \end{array}$$

Por tanto, a partir de la anterior proposición, los grafos no son extremales. También se puede demostrar de manera directa que en los tres grafos hay vértices con la misma intermediación. En el caso del primer grafo de la imagen, $K_4 - a$, se tiene que $B(r_1) = B(r_2) = 0$. Para $K_{1,3}$, tenemos que $B(r_2) = B(r_3) = B(r_4) = 0$, ya que son hojas. Por el mismo razonamiento llegamos a que en ${}_4 - P_3$, $B(r_1) = B(r_2) = 0$.

□

Por otro lado, es interesante destacar que para $n = 5$ y $n = 6$ tampoco existen grafos extremales. El teorema y su demostración es similar al anterior y aparece en [12]. Dicha demostración es más extensa debido a que para $n = 5$ hay 21 grafos conexos no isomorfos y para $n = 6$ hay 112.

Hemos visto los casos de n para los cuales, los grafos de n vértices conexos tienen intermediaciones distintas. A continuación, vamos a demostrar un resultado que presenta algunas condiciones suficientes que tienen que cumplir dichos grafos, para $n = 1, 7, 8$ y 9 . Para ello, utilizaremos el teorema 1. de [13] que afirma:

Teorema 5.11 Sea G es un grafo asimétrico con p vértices y q aristas. Entonces:

- $p = 1$ ó $p \geq 6$
- $m_p \leq q \leq M_p$, donde

$$m_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 1 \\ 6 & \text{si } p = 6, 7 \\ p - \sum_{n=1}^N a_n + w & \text{si } p \geq 8 \end{cases} \quad \text{y } M_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 1 \\ 9 & \text{si } p = 6 \\ 15 & \text{si } p = 7 \\ \frac{p(p-3)}{2} + \sum_{n=1}^N a_n + w & \text{si } p \geq 8 \end{cases}$$

donde el par de enteros (N, w) viene definidos en función del valor de p , por la siguiente fórmula:

$$\sum_{n=1}^N a_n n \leq p < \sum_{n=1}^{N+1} a_n n \quad \text{y} \quad p = \sum_{n=1}^N a_n n + w(N+1) + r \quad (0 \leq w < a_{N+1}; 0 \leq r < N+1),$$

donde a_n representa el número de árboles de n vértices no simétricos.

El teorema citado antes que presenta algunas condiciones suficientes es el siguiente.

Teorema 5.12 Sea G un grafo conexo con n vértices y todos ellos con distinta intermediación. Entonces $n = 1$ o $7 \leq n \leq 9$ y además:

1. Si $n = 1$, $|A(G)| = 0$.
2. Si $n = 7$, $7 \leq |A(G)| \leq 14$.
3. Si $n = 8$, $8 \leq |A(G)| \leq 21$.
4. Si $n = 9$, $9 \leq |A(G)| \leq 29$.

Demostración.

- Para el caso 1. es trivial ya que solo existe un grafo simple de un vértice y no tiene ninguna arista.

- Para el caso 2. el teorema 2.2 de [12] desarrolla todos los grafos conexos de siete vértices con intermediaciones distintas en todos sus vértices. Contándoles, se puede ver que todos tienen entre siete y catorce aristas.

Para el resto de casos, la cota inferior se deduce de la misma manera, puesto que el número de aristas mínimo para unir n vértices es $n - 1$. Pero el grafo que resultaría sería un árbol, y por tanto, habría como mínimo dos hojas y por tanto, dos vértices con intermediación cero (no puede haber dos vértices con la misma intermediación). entonces $|A(G)| \geq n$ para $n \geq 8$.

- En el apartado 3. para demostrar que $|A(G)| \leq 21$, suponemos que es mayor que 21. Tenemos que G es asimétrico ya que todos sus vértices tienen intermediación diferente, entonces \bar{G} es asimétrico, además $|V(\bar{G})| = 8$ y $|A(\bar{G})| \leq 6$. Por el teorema previo, llegamos a un absurdo, ya que como $N = 6$ y $w = 1$, tiene que ser $|A(\bar{G})| \geq 7$.
- Para 4. pasa algo parecido, suponemos que $|A(G)| \geq 22$ y como G es asimétrico, tendremos que \bar{G} es asimétrico con $|V(\bar{G})| = 9$ y $|A(\bar{G})| \leq 6$. Por [13] llegamos a otro absurdo.

□

Para el caso $n = 10$ aparece esta cota:

$$n \leq |A(G)| \leq \frac{n(n-1)}{2} - \left(n - 2 - \left(\lfloor \frac{n-1}{6} \rfloor - 1 \right) \right)$$

la cual viene demostrada en [12].

Bibliografía

- [1] Comellas, F., Gago, S. (2006). Cotas espectrales para el grado de intermediación o betweenness de un grafo. In V Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica (pp. 239-246). Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico.
- [2] Cordon, O. Modelos de Ciencia de Datos no Numéricos Máster en Ciencia de Datos e Ingeniería de Computadores Bloque II: Redes Sociales y Minería de Datos en Redes. Universidad de Granada, 1-45, 50-72.
- [3] Eigenvalues of graphs. Consultado en 29/01/2020 Disponible en <https://www.epfl.ch/labs/dcg/wp-content/uploads/2018/10/ADM-Eigenvalues-v3.pdf>
- [4] Freeman, L. C. (1977). A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, 35-41.
- [5] Gago, S., Hurajová, J. C., Madaras, T. (2014). Betweenness centrality in graphs. *Quantitative Graph Theory: Mathematical Foundations and Applications*, 233.
- [6] Gago, S., Hurajová, J., Madaras, T. (2012). *Notes on the betweenness centrality of a graph*. *Mathematica Slovaca*, 62(1), 1-12.
- [7] Gago, S., Hurajová, J. C., Madaras, T. (2013). On betweenness-uniform graphs. *Czechoslovak mathematical journal*, 63(3), 629-642.
- [8] Grassi, R., Scapellato, R., Stefani, S., Torriero, A. N. N. A. (2009). Betweenness centrality: extremal values and structural properties. In *Networks, Topology and Dynamics*, 161-175.
- [9] Gross, J. L., Yellen, J. (Eds.). (2004). *Handbook of graph theory*. CRC press.
- [10] Herrero, R. (2000). La terminología del análisis de redes. *Problemas de definición y de traducción. Política y sociedad*, 33(1), 199-206.
- [11] Hopkins, B., Wilson, R. J. (2004). The truth about Königsberg. *The College Mathematics Journal*, 35(3), 198-207.
- [12] Lopez, R., Worrell, J., Wickus, H., Flórez, R., Narayan, D. A. (2017). Towards a characterization of graphs with distinct betweenness centralities. *Australasian J. Combinatorics*, 68, 285-303.
- [13] Quintas, L. V. (1967). Extrema concerning asymmetric graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 3(1), 57-82.

- [14] Sadornil, D. (2017). Apuntes de la asignatura “Matemática Discreta”. Teoría de grafos. Universidad de Cantabria.
- [15] Unnithan, R., Kumar, S., Kannan, B., & Jathavedan, M. (2014). Betweenness centrality in some classes of graphs. *International Journal of Combinatorics*, 2014.
- [16] Hohenwarter, M. *et al* (2020). Geogebra 6.0. Disponible en <https://www.geogebra.org/download>.