



**Facultad
de
Ciencias**

Matroides y rigidez de grafos (Matroids and graph rigidity)

**Trabajo Fin de Grado para acceder al
Grado en Matemáticas**

Autor: Luis Crespo Ruiz

Director: Francisco Santos Leal

Junio 2020

Resumen

En este trabajo se estudia el concepto de matroide y sus distintas definiciones, deduciendo ideas útiles, así como la rigidez de grafos, comprobando resultados equivalentes a la independencia y rigidez, tanto genérica como en una posición dada, y sus propiedades de invariancia. Después se definen las matroides de rigidez, con las que se puede resolver el problema de la rigidez en 1 y 2 dimensiones, y se encuentran caracterizaciones equivalentes a esa rigidez y algoritmos para decidirla. Finalmente, se estudia de forma análoga la rigidez de grafos con sólidos rígidos en vez de puntos en los vértices.

Abstract

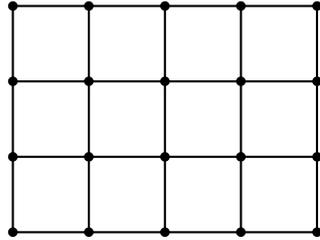
In this project the concept of a matroid and its different definitions are studied, deducing useful ideas, as well as rigidity of graphs, proving results equivalent to independence and rigidity, both generic and in a given position, and invariance properties. Then rigidity matroids are defined, with which the rigidity problem in 1 and 2 dimensions can be solved, and we find equivalent characterizations to this rigidity and algorithms to decide it. Finally, I study in a similar way the rigidity of graphs with rigid bodies instead of points in the vertices.

Índice general

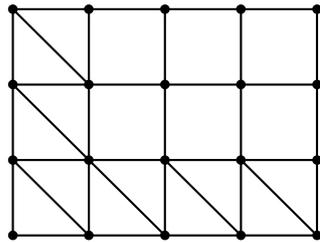
1	Matroides	3
1.1	Definiciones	3
1.2	Algunas matroides	8
1.3	Algoritmo greedy (voraz)	11
2	Rigidez de grafos	13
2.1	Rigidez	13
2.2	Rigidez infinitesimal	14
2.3	Matrices de rigidez y rigidez genérica	15
2.4	Invarianza bajo transformaciones	22
3	Matroides de rigidez	25
3.1	Definición	25
3.2	Extensiones	26
3.3	Dimensión 1	29
3.4	Dimensión 2	29
3.5	Dimensión 3 y superiores	36
4	Otros conceptos de rigidez	41
4.1	Rigidez de cuerpos y barras	41
4.2	Rigidez de cuerpos y bisagras	47

Introducción

Es un resultado conocido que un triángulo no se puede deformar sin cambiar las longitudes de sus lados. Sin embargo, un cuadrado se puede deformar, dando un paralelogramo. Si a un cuadrado se le añade una diagonal, deja de poder deformarse: ahora es la unión de dos triángulos. Un armazón formado por cuadrados, de la forma



claramente no es rígido, ya que los cuadrados de una fila o columna se pueden deformar en paralelogramos iguales entre sí. Una forma de hacerlo rígido es añadir aristas en las diagonales de los cuadrados. Pero no es necesario añadir aristas en todas las diagonales: basta con hacerlo en las de una fila y las de una columna.



De modo que un grafo, dibujado en el plano, que es unión de triángulos es rígido, pero un grafo no tiene que estar formado solo por triángulos para ser rígido. ¿Existe algún criterio que permita determinar si un grafo es rígido o no? La pregunta está completamente respondida para 1 y 2 dimensiones, cuando las posiciones de los vértices son suficientemente genéricas, y la respuesta resulta estar relacionada con algo llamado matroides.

Una matroide es un tipo de estructura combinatoria que permite abstraer propiedades de dependencia e independencia. Consideremos por ejemplo un conjunto de vectores: pueden ser dependientes o independientes, se puede hablar de bases (conjuntos independientes máximos), y un conjunto puede ser generador de otro o del total.

En un grafo, se dan ideas análogas: podemos entender que una arista “depende” de otras si es posible ir de un extremo a otro de la arista recorriendo las otras. Entonces, un conjunto de aristas es independiente si y solo si no contiene ciclos (en un ciclo, se puede quitar una arista sin desconectarlo). También se puede hablar de conjuntos generadores, que son los que unen todos los vértices del grafo, y conjuntos generadores mínimos: los árboles generadores. Una matroide es un concepto matemático que permite definir dependencia entre sus elementos, generalizando estos casos y algunos otros, como la dependencia algebraica de elementos en extensiones de cuerpos.

Pues bien, si una arista no cambia de longitud al deformar el grafo formado por las otras, manteniendo sus longitudes, podemos considerar que “depende” de ellas (en una forma distinta

a la dependencia antes mencionada), y eso nos va a definir otra matroide con la que podemos dar solución al problema de la rigidez.

En el capítulo 1 se introducen las múltiples definiciones de matroide, por conjuntos independientes, circuitos, rangos y bases. Se dan también algunos ejemplos, y el algoritmo llamado *greedy*, para extraer conjuntos independientes óptimos.

En el capítulo 2 se trata el tema de la rigidez de segmentos y puntos, dando las definiciones de rigidez, rigidez infinitesimal y rigidez genérica. Se deduce la forma de la matriz de rigidez, cuyo rango está relacionado con la rigidez infinitesimal de un grafo. Así, si (V, E, p) es un grafo junto con unas posiciones $p : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ asignadas a sus vértices, $A_E(p)$ es la matriz de rigidez del grafo y $A(p)$ la matriz de rigidez del grafo completo con las mismas posiciones para los vértices, se cumple la siguiente proposición:

Proposición 2.3.1. *Una realización (V, E, p) es infinitesimalmente rígida si y solo si $\text{rg } A_E(p) = \text{rg } A(p)$.*

También se obtienen resultados particulares para ciertos grafos, cuya rigidez depende de la posición de los vértices, y se estudia la invariancia de la rigidez bajo transformaciones proyectivas.

En el capítulo 3 se definen las matroides de rigidez, con las que se puede resolver el problema de la rigidez, tanto genérica como en una posición dada. También se definen las extensiones de un grafo, y finalmente se procede a obtener las caracterizaciones de Henneberg, Laman y Crapo, que permiten determinar si un grafo es rígido en dimensión 2:

Teorema 3.4.1 (Caracterización de Henneberg). *Un grafo es genéricamente isostático (independiente y rígido) si y solo si se obtiene a partir de una arista por una secuencia de Henneberg.*

Teorema 3.4.2 (Caracterización de Laman). *Un grafo (V, E) es independiente en la matroide de rigidez genérica en dimensión 2 si y solo si para cualquier $U \subset V$, el número de aristas entre los vértices de U es como mucho $2|U| - 3$.*

Teorema 3.4.3 (Caracterización de Crapo). *Un grafo es isostático en la matroide de rigidez genérica si y solo si es la unión disjunta de tres árboles tales que cada vértice está contenido en exactamente dos de ellos y no existe ningún subconjunto U de V tal que dos de los tres árboles, restringidos a U , siguen siendo árboles y usan todos los vértices de U .*

También se da un algoritmo, debido a Edmonds, para determinar dependencia o independencia genérica de un grafo en dimensión 2, del que después se definen variantes para determinar la rigidez. Al final del capítulo estudiamos qué ocurre en dimensión tres, en donde no se conoce ningún algoritmo polinómico para decidir la rigidez genérica de un grafo.

En el capítulo 4 se trata otra forma distinta de rigidez, en la que se colocan cuerpos no puntuales en los vértices en vez de simples articulaciones, y las aristas se interpretan como barras entre ellos. Sorprendentemente, aunque este modelo de rigidez parece más complicado, las tres caracterizaciones que vimos para dimensión dos en el modelo de barras y puntos (Laman, Henneberg, y Crapo), así como el algoritmo de Edmonds, funcionan ahora en cualquier dimensión. Por ejemplo, la de Laman es como sigue:

Teorema 4.1.9 (Caracterización tipo Laman). *Un multigrafo (V, E, ϕ) es isostático en la matroide de rigidez genérica de cuerpos y barras si y solo si tiene $m(n - 1)$ aristas y entre cualesquiera k cuerpos hay como mucho $m(k - 1)$ aristas.*

1 Matroides

En este capítulo, las ideas fundamentalmente están tomadas de [2] y alguna del capítulo 3 de [3]. Para empezar, veamos que hay varias formas de definir una matroide: por conjuntos independientes, circuitos, rangos y bases.

1.1. Definiciones

Definición 1.1.1. Una matroide M es un par $(E(M), I(M))$, donde $E(M)$ es un conjunto finito e $I(M)$ es una familia de subconjuntos de $E(M)$ que cumple las siguientes condiciones:

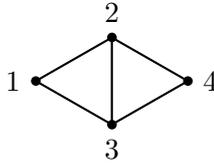
$$\emptyset \in I(M) \tag{I1}$$

$$X \in I(M), Y \subset X \Rightarrow Y \in I(M) \tag{I2}$$

$$X \in I(M), Y \in I(M), |Y| > |X| \Rightarrow \exists y \in Y \setminus X : X \cup \{y\} \in I(M) \tag{I3}$$

Los conjuntos de $I(M)$ se llaman *independientes*, y los subconjuntos de E que no están en $I(M)$ se llaman *dependientes*. I3 se llama *axioma de intercambio*.

Ejemplo 1.1.2. Consideremos el grafo completo con 4 vértices (1, 2, 3 y 4) al que le falta una arista:



En este grafo, entendiendo por independientes los conjuntos de aristas que no tienen ciclos, tenemos: $E = \{12, 13, 23, 24, 34\}$,

$$I = \{\emptyset, \{12\}, \{13\}, \{23\}, \{24\}, \{34\}, \{12, 13\}, \{12, 23\}, \{12, 24\}, \{12, 34\}, \{13, 23\}, \{13, 24\}, \{13, 34\}, \{23, 24\}, \{23, 34\}, \{24, 34\}, \{12, 13, 24\}, \{12, 13, 34\}, \{12, 23, 24\}, \{12, 23, 34\}, \{12, 24, 34\}, \{13, 23, 24\}, \{13, 23, 34\}, \{13, 24, 34\}\}$$

Definición 1.1.3. Dada una matroide M , se llama *circuito* a cualquier subconjunto de $E(M)$ que sea *dependiente minimal*, es decir, que no está en $I(M)$ pero todos sus subconjuntos propios sí. El conjunto de los circuitos de M es por lo tanto

$$C(M) := \{X \subset E(M) : X \notin I(M), X \setminus \{x\} \in I(M) \quad \forall x \in X\}$$

Continuando el ejemplo 1.1.2, tenemos que en esta matroide los conjuntos dependientes minimales son $\{12, 13, 23\}$, $\{23, 24, 34\}$ y $\{12, 13, 24, 34\}$: coincide con la idea de ciclo en un grafo.

Lema 1.1.4. Un conjunto $X \subset E(M)$ es independiente si y solo si no contiene ningún circuito.

Demostración. Si $X \in I(M)$, no contiene ningún circuito porque todos sus subconjuntos son independientes.

Si $X \notin I(M)$, sea Y su subconjunto dependiente de cardinal mínimo. Todos los subconjuntos propios de Y son independientes porque tienen menor cardinal, así que Y es un circuito. \square

Teorema 1.1.5. *Los circuitos de una matroide M cumplen las siguientes propiedades:*

$$\emptyset \notin C(M) \tag{C1}$$

$$X \in C(M), Y \in C(M), X \subset Y \Rightarrow X = Y \tag{C2}$$

$$X \in C(M), Y \in C(M), X \neq Y, e \in X \cap Y \Rightarrow \exists Z \in X \cup Y \setminus \{e\} : Z \in C(M) \tag{C3}$$

Aquí, C3 se llama *axioma de eliminación*.

Demostración. C1 Obvio por ser independiente.

C2 Si X fuera un subconjunto estricto de Y , como Y es un circuito X sería independiente, contradicción.

C3 Supongamos, por reducción al absurdo, que $A = X \cup Y \setminus \{e\}$ no contiene ningún circuito. Por el lema 1.1.4 $A \in I(M)$.

Como X e Y son distintos, por la propiedad C2, Y no puede estar contenido en X . Sea $f \in Y \setminus X$. Por ser Y un circuito, $B = Y \setminus \{f\} \in I(M)$.

Sea ahora D el subconjunto independiente de mayor cardinal de $X \cup Y$ que contiene a B . D no puede contener a f , porque entonces contendría todo Y e Y es un circuito. Tampoco puede contener todo X . Por lo tanto, $|D| \leq |X \cup Y| - 2 = |A| - 1$. Aplicando la propiedad I3 a D y A obtenemos que existe un elemento $g \in A \setminus D$ tal que $D \cup \{g\}$ es independiente. Pero este conjunto tiene un elemento más que D , contradicción con la elección de D . \square

Por definición, a partir de los conjuntos independientes de una matroide se pueden deducir sus circuitos. Pero a partir de los circuitos también es posible definir la matroide y con ella sus conjuntos independientes:

Teorema 1.1.6. *Dado un conjunto E y una familia C de subconjuntos de E que cumple C1, C2 y C3, existe una única matroide M tal que $E(M) = E$ y $C(M) = C$.*

Necesitamos este lema previo:

Lema 1.1.7. *Sea un conjunto $A \subset E$, con $|A| = n$, $C_1, C_2, \dots, C_{n+1} \in C$. Supongamos que para cada i existe un $c_i \in C_i$ tal que $c_i \notin C_j$ para todo $j \neq i$. Entonces existe un elemento de C contenido en $(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{n+1}) \setminus A$.*

Demostración. Hago inducción sobre n . El caso $n = 1$ es la propiedad C3. Ahora lo supongo cierto para n y lo demuestro para $n + 1$.

Si C_1 es disjunto con A , hemos terminado. Si no, sea $a \in C_1$. Si $a \in C_i$, aplicando la propiedad C3 a C_1 y C_i , existe un $C'_i \in C$ tal que $C'_i \subset C_1 \cup C_i \setminus \{a\}$. Si no, tomo $C'_i = C_i$. Entonces, se tiene que:

- $c_i \in C'_i$, porque está en C_i y no en C_1 .
- $c_i \notin C'_j$, porque no está en C_1 ni en C_j .
- $a \notin C'_i$, tanto si estaba en C_i como si no.

Aplicando la hipótesis inductiva a $C'_2, C'_3, \dots, C'_{n+1}$ y $A \setminus \{a\}$, se obtiene el elemento de C que buscamos. \square

Demostración del teorema. Si queremos que $C(M) = C$, por el lema 1.1.4 $I(M)$ debe ser la familia de los subconjuntos de E que no contienen como subconjunto ningún elemento de C . Falta ver que la M definida de esa forma es realmente una matroide, es decir, que $I(M)$ cumple I1, I2 e I3.

I1 Por C1, el vacío no es un circuito, por lo tanto es independiente.

I2 Como X es independiente no contiene ningún circuito, así que Y tampoco.

I3 Sea $X, Y \in I(M), |X| < |Y|$. Entonces, $|Y \setminus X| > n = |X \setminus Y|$. Supongamos ahora que la condición no se cumple, de forma que para cada $e \in Y \setminus X$ existe un $C_e \in C$ contenido en $X \cup \{e\}$. Aplicando el lema a $n + 1$ de los conjuntos C_e y al conjunto $A = X \setminus Y$ se obtiene un elemento C^* de C que está contenido en su unión, y por lo tanto en $\bigcup_{e \in Y \setminus X} (X \cup \{e\}) = X \cup Y$, pero no contiene ningún elemento de $X \setminus Y$, por lo tanto, está contenido en Y , contradicción con que Y es independiente. \square

Con esto, tenemos que conjuntos independientes y circuitos son dos caras de la misma moneda, pudiendo definir cualquiera de ellos a partir del otro. Pero no son las únicas descripciones posibles de las matroides. Otra descripción es a través del rango de los conjuntos. El rango de un conjunto para una matroide es el tamaño del mayor conjunto independiente contenido en él.

Definición 1.1.8. Dado un conjunto E , una función $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ es una función de rango si cumple las tres propiedades siguientes:

$$\forall X \subset E, 0 \leq r(X) \leq |X| \tag{R1}$$

$$X \subset Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y) \tag{R2}$$

$$\forall X, Y \subset E, r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y) \tag{R3}$$

La propiedad R3 significa que una función de rango es *submodular*.

Teorema 1.1.9. Dada una matroide M , la función $r_M : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$r_M(X) = \max\{|Y| : Y \in I(M), Y \subset X\}$$

es una función de rango.

Demostración. Las dos primeras se cumplen por definición. Para R3, sea I un subconjunto independiente máximo de $X \cap Y$. Lo extiendo a un subconjunto independiente máximo de X , J . (Puede ser que el subconjunto en cuestión no contenga a I , pero en ese caso, por la propiedad I3, puedo añadir elementos a I hasta igualarlo, de modo que obtendría otro subconjunto máximo que sí lo contiene.)

De la misma forma, extiendo J a un subconjunto máximo K de $X \cup Y$. Entonces, $K \setminus (J \setminus I)$ es subconjunto de K , por lo tanto independiente, y por construcción está contenido en Y , así que $|K \setminus (J \setminus I)| \leq r_M(Y)$ y

$$\begin{aligned} r_M(X \cup Y) + r_M(X \cap Y) &= |K| + |I| \\ &= |K \setminus (J \setminus I)| + |J \setminus I| + |I| \\ &\leq r_M(Y) + |J| \\ &= r_M(X) + r_M(Y). \end{aligned} \tag{R3} \quad \square$$

Continuando con el ejemplo 1.1.2, aquí el rango de los conjuntos con 1 y 2 vértices son, respectivamente, 1 y 2, el de los conjuntos con 3 vértices es 3 excepto los dos triángulos, que tienen 2 porque son dependientes. Los de 4 vértices tienen rango 3 y el total rango 3.

Llamamos *base* de una matroide a un conjunto independiente maximal. Por el axioma I3, todas las bases deben tener el mismo cardinal. Por lo tanto, también tienen el mismo rango, que es el máximo rango posible: se la llama *rango de la matroide*. Veamos ahora que también se puede hacer al revés: a una función de rango se le puede asociar una matroide.

Lema 1.1.10. *Dada una función de rango r en un conjunto E , si $X, Y \subset E$ son tales que $r(X \cup \{e\}) = r(X)$ para cualquier $e \in Y$, entonces $r(X \cup Y) = r(X)$.*

Demostración. Uso inducción en $k = |Y \setminus X|$. Para $k = 1$ obviamente se cumple. Si se cumple para k , lo demuestro para $k + 1$:

Sea $e \in Y \setminus X$. Entonces $r(X \cup \{e\}) = r(X)$. Aplicando la hipótesis inductiva, tenemos $r(X \cup (Y \setminus X \setminus \{e\})) = r(X)$. Por la propiedad R3,

$$r(X \cup Y) + r(X) \leq r(X \cup \{e\}) + r(X \cup (Y \setminus X \setminus \{e\})) = 2r(X)$$

por lo tanto $r(X \cup Y) \leq r(X)$, y deben ser iguales por R2. □

Teorema 1.1.11. *Dado un conjunto E y una función de rango r , existe una matroide M tal que $E(M) = E$ y $r_M = r$.*

Demostración. Tomamos

$$I(M) := \{Y \subset E(M) : |Y| = r(Y)\}$$

Veamos que M es una matroide.

I1 Por R1, $r(\emptyset) = 0$ así que $\emptyset \in I(M)$.

I2 Sea $Y \in I(M)$, y $X \subset Y$. Aplico R3 a X y a $Y \setminus X$, obteniendo

$$r(X) + r(Y \setminus X) \geq r(Y) + r(\emptyset) = |Y|$$

esto es

$$|X| \geq r(X) \geq |Y| - r(Y \setminus X) \geq |Y| - |Y \setminus X| = |X|$$

y $r(X) = |X|$, por lo tanto $X \in I(M)$.

I3 Sean $X, Y \in I(M)$ con $|X| < |Y|$. Supongamos que I3 no se cumple. Entonces, para cada $e \in Y \setminus X$, $r(X \cup \{e\}) < |X| + 1$. Pero ese rango debe ser como mínimo $r(X) = |X|$, así que debe valer exactamente eso. Por el lema anterior,

$$r(X \cup Y) = r(X) = |X| < |Y| = r(Y)$$

que contradice R2.

Falta ver que $r_M = r$. Sea X un subconjunto independiente máximo de Y . Por la definición de r_M , $r_M(Y) = |X|$. Por ser X máximo $r(X \cup \{e\}) = r(X)$ para todo $e \in Y$, y por el lema anterior $r(X \cup Y) = r(X)$, es decir, $r(Y) = r(X) = |X| = r_M(Y)$. □

Las bases, de hecho, también forman una posible descripción de una matroide.

Definición 1.1.12. Un conjunto B de subconjuntos de E es un sistema de bases si se cumplen las tres condiciones siguientes:

$$B \neq \emptyset \quad (\text{B1})$$

$$\forall B_1, B_2 \in B, |B_1| = |B_2| \quad (\text{B2})$$

$$\forall B_1, B_2 \in B, e_1 \in B_1 \setminus B_2, \exists e_2 \in B_2 \setminus B_1 : B_1 \setminus \{e_1\} \cup \{e_2\} \in B \quad (\text{B3})$$

Teorema 1.1.13. Las bases de una matroide forman un sistema de bases. De hecho, para cualquier sistema de bases existe una matroide que las tiene como bases.

Demostración. Las dos primeras condiciones ya sabemos que se cumplen. Si B_1 es una base, $B_1 \setminus \{e_1\}$ es independiente y B_2 es un conjunto independiente de cardinal mayor, así que por I3 puedo añadir un elemento, que es e_2 .

Supongamos ahora que B es un sistema de bases. Si tomamos como I el conjunto de subconjuntos de todas las bases, se cumplen I1 e I2. Ahora sean X e Y elementos de I con $|X| < |Y|$. Existen B_1 y B_2 que contienen a X e Y , respectivamente, y los elegimos de forma que su intersección sea máxima. Necesariamente $|B_1| = |B_2| \geq |Y| > |X|$, así que debe haber un e en $B_1 \setminus X$. Si este e no está en B_2 , aplicando la definición de sistema de bases, puedo elegir un elemento de B_2 , f , tal que $B_1 \setminus \{e\} \cup \{f\}$ es una base. Pero esta nueva base y B_2 tienen más intersección que B_1 y B_2 , contradicción. Luego e está en B_2 .

De esta forma, tenemos que $B_1 \setminus X \subset B_2$, y $|B_1 \cap B_2| \geq |B_1| - |X| = |B_2| - |X|$. Luego $|Y| > |X| \geq |B_2| - |B_1 \cap B_2| = |B_2 \setminus B_1|$, así que algún elemento de Y debe estar en B_1 . Este elemento, junto con X , dan un conjunto que es independiente porque está contenido en B_1 . \square

En el ejemplo 1.1.2, las bases son los ocho conjuntos independientes de cardinal 3. De hecho se trata de los árboles generadores: esto no es casualidad.

Vamos a ver otra descripción que nos será útil más adelante: el operador de clausura.

Definición 1.1.14. Dado un conjunto E , un operador $\langle \rangle : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ es de clausura matroidal si se cumple

$$X \subset \langle X \rangle \quad (\text{Cl1})$$

$$X \subset Y \implies \langle X \rangle \subset \langle Y \rangle \quad (\text{Cl2})$$

$$\langle \langle X \rangle \rangle = \langle X \rangle \quad (\text{Cl3})$$

$$x, y \notin \langle X \rangle, x \in \langle X \cup \{y\} \rangle \implies y \in \langle X \cup \{x\} \rangle \quad (\text{Cl4})$$

Teorema 1.1.15. Dada una matroide M , cuya función de rango es r , tomando como $\langle X \rangle$ el mayor conjunto que contiene a X y tal que $r(\langle X \rangle) = r(X)$, ese $\langle \rangle$ es una clausura matroidal.

De la misma manera, si $\langle \rangle$ es una clausura matroidal, existe una función de rango que la tiene como clausura asociada.

Demostración. Sea r una función de rango. En primer lugar veamos que el conjunto $\langle X \rangle$ está bien definido. Si hubiera dos conjuntos Y, Z con esa propiedad se tendría

$$r(X) \leq r(Y \cup Z) \leq r(Y) + r(Z) - r(Y \cap Z) = r(X) + r(X) - r(X) = r(X)$$

y ya no serían máximos.

Las propiedades Cl1 y Cl3 se cumplen por la definición. Veamos Cl2. Si $X \subset Y$,

$$r(Y) \leq r(Y \cup \langle X \rangle) \leq r(Y) + r(\langle X \rangle) - r(Y \cap \langle X \rangle) = r(Y) + r(X) - r(Y \cap \langle X \rangle) \leq r(Y)$$

ya que $X \subset Y \cap \langle X \rangle$, así que $\langle Y \rangle$ debe contener a $Y \cup \langle X \rangle$ y por lo tanto a $\langle X \rangle$.

Sea ahora $x, y \notin \langle X \rangle$ tales que $x \in \langle X \cup \{y\} \rangle$. $r(X \cup \{y\})$ no puede coincidir con $r(X)$ (si lo hiciera, y estaría en $\langle X \rangle$), así que es $r(X) + 1$ y lo mismo pasa con $r(X \cup \{x\})$. Por lo tanto, $r(X \cup \{x, y\})$ debe ser también $r(X) + 1$ (al estar contenido en $\langle X \cup \{y\} \rangle$), y y debe estar en $\langle X \cup \{x\} \rangle$.

Ahora sea $\langle \rangle$ una clausura matroidal y defino un rango:

$$r(X) = \min\{|Y| : \langle Y \rangle \supset X\}$$

R1 se cumple porque la clausura del propio X contiene a X . Para R2, si $X \subset Y$, existe un Z con $\langle Z \rangle \supset Y \supset X$ y $|Z| = r(Y)$, así que $r(X) \leq r(Y)$.

Veamos ahora R3. Dados X e Y , sean X', Y' y Z tales que $|X'| = r(X)$, $|Y'| = r(Y)$, $|Z| = r(X \cap Y)$, $\langle X' \rangle \supset X$, $\langle Y' \rangle \supset Y$ y $\langle Z \rangle \supset X \cap Y$.

Voy a quitar algunos elementos de X' para sustituirlos por los de Z . Para ello, sea $z \in Z$. Sea X'' el mayor subconjunto de X' cuya clausura no contenga a z y tomo un $x \in X' \setminus X''$. Entonces $z \in \langle X'' \cup \{x\} \rangle$ y por la propiedad C14, tanto si $x \in \langle X'' \rangle$ como si no, $x \in \langle X'' \cup \{z\} \rangle$, y $\langle X' \setminus \{x\} \cup \{z\} \rangle$ contiene a todo X' y por lo tanto a $\langle X' \rangle \supset X$.

Repitiendo el proceso, obtengo al final un conjunto \tilde{X} , que contiene a Z , y cuya clausura contiene también a X . De la misma forma obtengo \tilde{Y} . Entonces $\langle \tilde{X} \cup \tilde{Y} \rangle \supset \langle \tilde{X} \rangle \supset X$ y $\langle \tilde{X} \cup \tilde{Y} \rangle \supset \langle \tilde{Y} \rangle \supset Y$, así que también contiene a la unión, y $r(X \cup Y) \leq |\tilde{X} \cup \tilde{Y}|$. Por otra parte, $r(X \cap Y) = |Z| \leq |\tilde{X} \cap \tilde{Y}|$ y

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq |\tilde{X} \cup \tilde{Y}| + |\tilde{X} \cap \tilde{Y}| = |\tilde{X}| + |\tilde{Y}| = r(X) + r(Y) \quad \square$$

En resumen, hay varias estructuras sobre un conjunto E que son equivalentes entre sí, y todas ellas definen la misma matroide:

- Un conjunto I de conjuntos independientes, que cumple I1, I2 e I3.
- Un conjunto C de circuitos, que cumple C1, C2 y C3.
- Una función de rango r , que cumple R1, R2 y R3.
- Un conjunto B de bases, que cumple B1, B2 y B3.
- Un operador $\langle \rangle$ de clausura, que cumple Cl1 a Cl4.

1.2. Algunas matroides

Recordemos que un *grafo* (no dirigido) es un par (V, E) donde V es un conjunto de *vértices* y E es un conjunto de pares de elementos de V llamados *aristas*. Un *camino* es una sucesión de vértices, todos ellos distintos salvo quizás el primero y el último, tales que entre cada dos consecutivos hay una arista, y se llama *ciclo* si empieza y acaba en el mismo vértice. Dos vértices están en la misma *componente conexa* si hay un camino que los une. Más información sobre grafos se puede encontrar en la parte III de [1].

Lema 1.2.1. *En un grafo sin ciclos, el número de componentes conexas es el número de vértices menos el de aristas.*

Demostración. Se demuestra por inducción sobre el número de aristas. Si es 0, cada componente conexa tiene un vértice y el resultado es inmediato. Lo supongo cierto para n aristas, y sea G un grafo sin ciclos con $n + 1$ aristas y G' el mismo grafo sin la arista e . Los extremos de e no pueden estar conectados por un camino en G' porque con esa arista se formaría un ciclo en G , así que deben estar en componentes conexas distintas de G' , luego G tiene una componente menos que G' . \square

Proposición 1.2.2. *Si $E(M)$ es el conjunto de las aristas del grafo y $I(M)$ es el conjunto de los subconjuntos de $E(M)$ que no forman ciclos (también llamados bosques), $I(M)$ forma una matroide. Se llama matroide gráfica del grafo.*

Demostración. Está claro que este conjunto cumple I1 e I2. Para ver I3, sean X e Y conjuntos de aristas independientes con $|X| < |Y|$. Entonces, como el número de vértices es el mismo y ninguno de los dos tiene ciclos, Y debe tener menos componentes conexas que X . Por lo tanto, alguna arista de Y debe unir dos componentes distintas de X , y X con esa arista sigue siendo independiente. \square

Un ejemplo de matroide gráfica es el que vengo usando desde el principio, y en esa matroide, tal y como he deducido, los circuitos son los ciclos, el rango de un conjunto de aristas es el número de aristas de un bosque que genera ese conjunto, las bases son los árboles generadores y la clausura de un grafo es la unión de los subgrafos inducidos por sus componentes conexas. Esto se cumple, por definición, en cualquier matroide gráfica. El axioma de eliminación aquí se traduce en que, dados dos ciclos con una arista en común, es posible cancelarla y obtener un ciclo que no la tiene.

Aunque la matroide contiene características del grafo, a partir de ella no se pueden deducir algunas características del grafo: por ejemplo, si el grafo no es conexo, uniendo sus componentes conexas por un vértice no cambia la matroide.

Otra manera de definir una matroide, que es por lo que se llaman matroides, es a partir de una matriz. En realidad, solo nos interesa el conjunto de columnas de la matriz como vectores, pero usando una matriz en vez de un conjunto se puede elegir un orden en los vectores y permitir vectores repetidos.

Proposición 1.2.3. *Dada una matriz A , tomando como $E(M)$ el conjunto de columnas de A y llamando independientes a los subconjuntos de $E(M)$ linealmente independientes, se obtienen los conjuntos independientes de una matroide. Se llama matroide lineal de la matriz A .*

Demostración. I1 e I2 claramente se cumplen. Veamos I3. Sean X e Y como antes. El espacio vectorial generado por Y tiene dimensión mayor que el generado por X , así que algún elemento de Y no está en ese espacio. Al añadirlo a X , queda un conjunto independiente. \square

Aquí, los circuitos son los conjuntos de columnas que son linealmente dependientes con coeficientes únicos salvo producto por una constante (es decir, mínimamente dependientes), y el rango de un conjunto de columnas coincide con el rango de la submatriz que forman. La clausura de un conjunto dado son las columnas que son combinación lineal de ese conjunto y las bases coinciden con el concepto de bases de un espacio vectorial (el generado por las columnas). Aquí, el axioma de eliminación dice que, si tengo dos combinaciones lineales igualadas a 0 con una columna en común, puedo cancelar esa columna entre las dos, y tener una combinación lineal que no la incluye. También se puede hacer una matroide con las filas en vez de las columnas.

Una matroide que se puede poner como lineal sobre un cuerpo K se llama *representable* sobre K .

Proposición 1.2.4. *Las matroides gráficas son representables sobre cualquier cuerpo.*

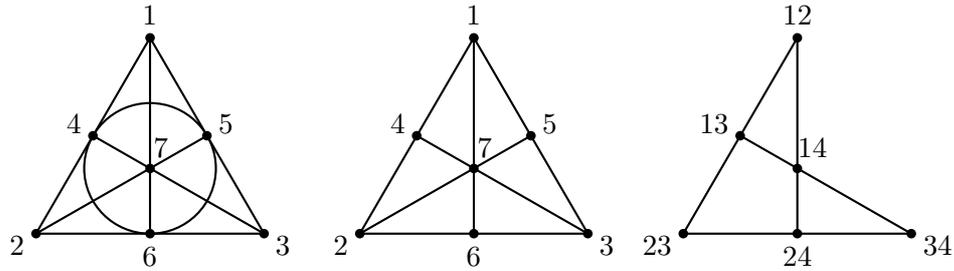


Figura 1.1: Representación de las matroides de Fano, no-Fano y K_4 usando líneas en el plano para cada circuito de tres puntos

Demostración. Dado un grafo (V, E) , considero una matriz donde cada fila corresponde a un vértice y cada columna a una arista, y contiene en las dos posiciones que corresponden a los vértices de cada arista, un 1 en una de las dos y -1 en la otra, y 0 en el resto. Sea M la matroide gráfica de (V, E) y M' la lineal de la matriz.

- $C(M) \subset C(M')$: Si $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0\}$ es un ciclo, es un circuito en M' ya que la submatriz correspondiente es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyas columnas son linealmente dependientes, con coeficientes 1.

- $C(M') \subset C(M)$: Sea C un circuito de M' y supongamos que no es un circuito de M . Si fuera dependiente, debe contener un circuito C' . Por la contención que acabo de demostrar, C' es un circuito de M' , y C contiene estrictamente a C' , lo cual es absurdo. Luego C es independiente en M , es decir, es un bosque. Sea v un vértice de grado 1 en C . La fila v de la matriz contiene un único elemento distinto de 0, así que la columna en cuestión tiene coeficiente 0 en la combinación lineal, contradicción con que C es un circuito. \square

Ejemplo 1.2.5. La *matroide de Fano* es la matroide lineal dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en \mathbb{F}_2 . Sus bases son los subconjuntos de tres elementos menos $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$ y $\{4, 5, 6\}$. Esta matroide solo es representable en cuerpos de característica 2. La *matroide de no-Fano* es la matroide dada por la misma matriz, en un cuerpo que no es de característica 2: tiene las mismas bases además de $\{4, 5, 6\}$. Una consecuencia inmediata de esto es que estas matroides no pueden ser gráficas, para ningún grafo.

De la misma forma que se ha definido una matroide mediante dependencia lineal, también se puede hacer con la dependencia afín o proyectiva. De hecho, la matroide de Fano es la proyectiva formada por los siete puntos de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_2}^2$.

Esta visión afín de las matroides permite representar en el plano una matroide de rango 3, uniendo con una línea las ternas de puntos que son dependientes. Por ejemplo, para K_4 menos una arista se obtienen dos líneas rectas con un punto en común y otros dos puntos en cada una. Si la matroide es representable sobre \mathbb{R} , como la de no-Fano y la de K_4 en la Figura 1.1, es posible hacer esa representación con líneas rectas (la de K_4 es lo que se conoce en geometría proyectiva como un cuarto armónico); si no, también se puede hacer pero alguna línea debe ser curva.

Proposición 1.2.6. *Dado un conjunto E y un entero k , hay una matroide con $E(M) = E$ y $I(M) = \{X \subset E : |X| \leq k\}$. Se llama matroide uniforme.*

Demostración. I1 e I2 se cumplen obviamente e I3 también porque el cardinal de Y es menor o igual que k . \square

Los circuitos son los subconjuntos de E de tamaño $k + 1$, el rango de X es $\min\{|X|, k\}$, las bases son los conjuntos de tamaño k y la clausura de un conjunto es el mismo si tiene menos de k elementos y todo E si tiene k o más. El axioma de eliminación se cumple inmediatamente: la unión de dos conjuntos distintos con $k + 1$ elementos al menos tiene $k + 2$, así que se puede quitar uno cualquiera.

1.3. Algoritmo greedy (voraz)

Si queremos encontrar una base de una matroide, podemos empezar por el conjunto vacío, añadir un elemento para obtener uno independiente, añadir otro elemento y que siga siendo independiente, y así sucesivamente hasta que no sea posible añadir más. En este momento, tenemos una base: si existiera un conjunto independiente de cardinal mayor, por la propiedad I3 podríamos añadir un elemento de ese conjunto.

Pero las matroides permiten hacer algo más que eso. Supongamos que cada elemento e de $E(M)$ tiene un valor (peso) $c(e)$, y estamos interesados en encontrar no una base cualquiera, sino una base que tenga peso máximo (que es lo mismo que buscar un conjunto independiente de peso máximo). Entonces, nos sirve la misma idea.

Algoritmo 1.3.1 (Algoritmo greedy). Input: una matroide M , una función de peso $E(M) \rightarrow \mathbb{R}$.

Output: I_k para cada k

1. $I_0 := \emptyset, U := E(M), k := 0$
2. mientras $U \neq \emptyset$
 - a) tomo $e \in U$ de peso máximo.
 - b) $U := U \setminus \{e\}$
 - c) si $I_k \cup \{e\} \in I(M)$, $I_{k+1} := I_k \cup \{e\}$, $k := k + 1$

De acuerdo con lo dicho antes, después de añadir el elemento k , I_k es un conjunto independiente con k elementos. Resulta que, de los que tienen este número de elementos, es el de mayor peso.

Teorema 1.3.2. *El algoritmo anterior encuentra el conjunto independiente de tamaño k con peso máximo, para todo k .*

Demostración. Sea i_k el k -ésimo elemento añadido a I_k . Entonces $I_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ y $c(i_1) \geq c(i_2) \geq \dots \geq c(i_k)$. Supongamos que este conjunto no tiene peso máximo. Entonces, existe otro conjunto $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, con $c(j_1) \geq c(j_2) \geq \dots \geq c(j_k)$, tal que la suma de los pesos es

mayor. Por lo tanto, $c(j_l) > c(i_l)$ para algún l . Aplicando I3 a $I' = I_{l-1} = \{i_1, i_2, \dots, i_{l-1}\}$ y a $J' = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$, tenemos que existe un elemento de $J' \setminus I'$ que añadido a I' da un conjunto independiente. Ahora bien, este elemento tiene peso mayor que i_l , porque $c(j_1) \geq c(j_2) \geq \dots \geq c(j_l) > c(i_l)$, así que tendría que haberse elegido en lugar de i_l , lo cual es una contradicción. \square

Respecto a la complejidad de este algoritmo, depende de cuánto se tarda en hacer el paso 2c: este paso se ejecuta una cantidad lineal de veces, así que el tiempo es $|E(M)|$ veces el que se necesita para determinar la independencia de un conjunto.

Este algoritmo tiene aplicaciones interesantes. Consideremos el caso de las matroides gráficas. Si tenemos un grafo con un peso asignado a cada arista, este algoritmo permite encontrar una base de la matroide, es decir, un árbol generador de peso máximo (o de peso mínimo, ya que el algoritmo funciona también si se coge un elemento de peso mínimo). En cada paso, se toma la arista de peso máximo que no se haya considerado ya, y se añade al conjunto si no forma ciclos. Este algoritmo se llama *algoritmo de Kruskal*.

Otra posible aplicación es la asignación de tareas. Sea $E(M)$ un conjunto de tareas a realizar, cada una con un beneficio y un tiempo límite, y supongamos que todas requieren el mismo tiempo.

Proposición 1.3.3. *Los subconjuntos de tareas que da tiempo a realizar son los conjuntos independientes de una matroide.*

Demostración. Está claro que da tiempo a no hacer nada y que si da tiempo a hacer un conjunto también se puede hacer cualquier subconjunto. Para comprobar la propiedad I3, tenemos que ver que si da tiempo a hacer n tareas y otras $n - 1$, también se pueden hacer las $n - 1$ y alguna de las n . Tomando entonces como función de peso el beneficio, el algoritmo greedy permite encontrar la combinación que da el beneficio máximo.

Voy a demostrar I3 por inducción sobre n . Para $n = 1$ es trivial. Lo supongo cierto para $k < n$ y lo demostraré para n . Sean $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ y $\{t'_1, t'_2, \dots, t'_{n-1}\}$ los dos conjuntos, ordenados por su tiempo límite, y sea l_i el tiempo límite de t_i . Defino $k = \max\{i : l_i < l_n\}$, $k' = \max\{i : l'_i < l_n\}$. Si $k' \geq k$, en el primer conjunto hay más tareas cuyo tiempo límite es exactamente l_n que en el segundo, con lo cual una del primero no está en el segundo. Se puede añadir esta tarea al segundo conjunto porque su tiempo límite es $l_n \geq l_n$. Si $k' < k$, aplicando la hipótesis inductiva a $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ y $\{t'_1, t'_2, \dots, t'_{k-1}\}$ obtenemos que $\{t'_1, t'_2, \dots, t'_{k-1}, t_i\}$ es correcto para algún i . t_i no está en el segundo conjunto porque no es t'_j si $j < k$, y si $j \geq k > k'$, $l_i \leq l_k < l_n = l'_k \leq l'_j$ y $t_i \neq t'_j$. Luego,

$$\{t'_1, t'_2, \dots, t'_{k-1}, t_i, t'_{k+1}, \dots, t'_{n-1}, t'_k\}$$

es un conjunto correcto (el tiempo límite de t'_k es l_n), y t_i es el que estamos buscando. \square

De esta forma, aplicando el algoritmo greedy se puede deducir qué conjuntos de tareas te da tiempo a hacer, para lo cual hay que ordenarlas por su beneficio. Sin embargo, una vez encontrado el conjunto, luego hay que ordenarlas por su tiempo límite, para que dé tiempo a hacerlas todas.

2 Rigidez de grafos

Sea (V, E) un grafo. Podemos considerar que los vértices están colocados en una cierta posición en \mathbb{R}^m y preguntarnos si es posible deformar el grafo sin cambiar la longitud de las aristas ni doblarlas. Esta pregunta es la base del concepto de rigidez.

A lo largo de todo el capítulo, principalmente sigo la notación de [3]; en algunos libros se llama rígido a lo que aquí es globalmente rígido.

2.1. Rigidez

Definición 2.1.1. Sea (V, E) un grafo y $p : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función que coloque cada punto en una posición en \mathbb{R}^m . Decimos que (V, E, p) es una realización del grafo, a veces también llamada armazón (*framework* en inglés).

Para que el grafo se pueda deformar, necesitamos que haya otra realización que dé las mismas longitudes de las aristas, pero que haya dos vértices (sin arista entre ellos) que tengan distinta distancia. Si no la hay, el grafo se dice *globalmente rígido*. El problema es que un grafo puede ser localmente rígido sin ser globalmente rígido: para $m = 2$, las dos realizaciones de la Figura 2.1 tienen distintas distancias entre dos vértices y la misma longitud de las aristas, pero no es posible deformar una de forma continua para obtener la otra. Por lo tanto, necesitamos considerar la propia deformación.

Definición 2.1.2. Sea (V, E, p) una realización de un grafo y $f : V \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- f es un movimiento de (V, E, p) si $f(v, 0) = p(v)$ para todo $v \in V$ y

$$|f(u, t) - f(v, t)| = |p(u) - p(v)| \quad \forall (u, v) \in E$$

- f es un movimiento rígido de (V, E, p) si es un movimiento y además

$$|f(u, t) - f(v, t)| = |p(u) - p(v)| \quad \forall u, v \in V$$

- f es una deformación si es un movimiento y no es rígido.
- (V, E, p) es una realización rígida si todos sus movimientos son rígidos, es decir, si no tiene deformaciones.

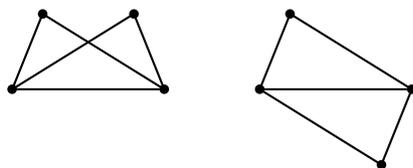


Figura 2.1: Dos realizaciones de un grafo tales que no es posible convertir una en otra de forma continua

Dada una realización (V, E, p) y un movimiento f , para cada t , (V, E, q_t) es otra realización de (V, E) , donde $q_t(v) = f(v, t)$. Entonces, q_t debe cumplir las ecuaciones:

$$|q_t(u) - q_t(v)|^2 = |p(u) - p(v)|^2 \quad \forall (u, v) \in E \quad (2.1)$$

Si vemos q_t y p como vectores en \mathbb{R}^{mn} , este es un sistema de ecuaciones cuadráticas, del que q_t debe ser solución para cada t .

Si el movimiento es rígido, el sistema de ecuaciones es más restrictivo:

$$|q_t(u) - q_t(v)|^2 = |p(u) - p(v)|^2 \quad \forall u, v \in V \quad (2.2)$$

Si llamamos \mathcal{M} al conjunto de soluciones de (2.1) y \mathcal{R} a las de (2.2), tenemos que un movimiento de (V, E, p) es un camino en \mathcal{M} empezando por p y un movimiento rígido es lo mismo en \mathcal{R} . Obviamente $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$, y una realización es rígida si todos sus movimientos son rígidos, es decir, si $\mathcal{M} = \mathcal{R}$ en un entorno de p .

Con esto, hemos reducido el problema de la rigidez de grafos a la resolución de un sistema de ecuaciones cuadráticas. Pero la rigidez también puede tratarse con ecuaciones lineales. El truco es considerar velocidades iniciales en vez de posiciones, considerando irrelevantes los términos de mayor orden: esto es lo que se conoce como linealizar un problema.

2.2. Rigidez infinitesimal

Consideremos la ecuación de los movimientos:

$$|f(u, t) - f(v, t)|^2 = |p(u) - p(v)|^2 \quad \forall (u, v) \in E$$

Voy a suponer que el movimiento f es diferenciable. Derivando respecto de t ,

$$2(f(u, t) - f(v, t)) \cdot (f'(u, t) - f'(v, t)) = 0$$

donde f' denota derivada respecto del tiempo. Sustituyendo $t = 0$,

$$(p(u) - p(v)) \cdot (r(u) - r(v)) = 0$$

donde $r(u) = f'(u, 0)$ es la velocidad inicial de cada punto. Esta es la condición que deben cumplir las velocidades para poder ser las iniciales de un movimiento.

Definición 2.2.1. Sea (V, E, p) una realización y $r : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una asignación de velocidades a cada vértice.

- r es un movimiento infinitesimal de (V, E, p) si

$$(p(u) - p(v)) \cdot (r(u) - r(v)) = 0 \quad \forall (u, v) \in E \quad (2.3)$$

- r es un movimiento rígido infinitesimal de (V, E, p) si

$$(p(u) - p(v)) \cdot (r(u) - r(v)) = 0 \quad \forall u, v \in V \quad (2.4)$$

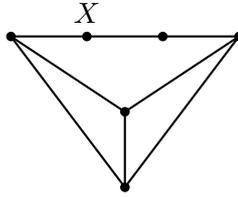
- r es una deformación infinitesimal si es un movimiento y no es rígido.
- (V, E, p) es una realización infinitesimalmente rígida si todos sus movimientos infinitesimales son rígidos, es decir, si no tiene deformaciones infinitesimales.

De acuerdo con lo dicho antes, las velocidades iniciales de un movimiento son un movimiento infinitesimal y las de un movimiento rígido son un movimiento rígido infinitesimal. Por lo tanto, si $M \subset \mathbb{R}^{mn}$ es el conjunto de soluciones de (2.3) y $R \subset \mathbb{R}^{mn}$ es el de (2.4), M y R contienen (aunque quizá no sean iguales) a los espacios tangentes en p a \mathcal{M} y \mathcal{R} , respectivamente. Siempre será $R \subset M$ y si la realización es infinitesimalmente rígida, $R = M$.

Podríamos preguntarnos si los conceptos de rigidez y rigidez infinitesimal son equivalentes, en otras palabras, si existe una realización infinitesimalmente rígida que no sea rígida, o lo contrario. Un ejemplo de realización infinitesimalmente rígida que es flexible se obtiene colocando los vértices de un camino en línea recta, de forma que no es rígido pero cualquier movimiento infinitesimal es rígido (ya que sus velocidades son perpendiculares al camino). Como demostraré en el Corolario 2.3.8, esta situación solo se da si los puntos no generan afínmente \mathbb{R}^m .

Si una realización fuera rígida e infinitesimalmente flexible tendríamos $\mathcal{R} = \mathcal{M}$ en un entorno de p , por lo tanto $T_p\mathcal{R} = T_p\mathcal{M}$, y sin embargo $R \subsetneq M$. Esto significa que hay algún movimiento infinitesimal que no es la velocidad inicial de ningún movimiento. La clave está en que la realización sea rígida gracias a una tensión:

Ejemplo 2.2.2. Consideremos el siguiente grafo:



Aquí, asignando la velocidad $(0, 1)$ al vértice X y 0 a los demás, obtenemos una deformación infinitesimal, pero no se puede mover ese vértice hacia arriba, de modo que la realización es rígida (notar que al moverlo dos aristas cambian de longitud, pero solo a segundo orden).

Ejemplo 2.2.3. Otro ejemplo se puede conseguir con el grafo del prisma triangular. Si colocamos el grafo en casi cualquier posición, es infinitesimalmente rígido. Sin embargo, si los triángulos que corresponden a las bases son congruentes y paralelos, un triángulo se puede girar alrededor del otro y la realización ni siquiera es rígida. Si las líneas que unen los vértices de los triángulos son paralelas, pero los triángulos no son congruentes, es rígida pero no infinitesimalmente rígida (ver figura 2.2).

2.3. Matrices de rigidez y rigidez genérica

Volviendo a la rigidez infinitesimal, considero ahora el sistema de ecuaciones (2.4). Tomando $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $r(i) = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})$, las incógnitas son r_{ij} para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$ y la matriz de coeficientes es

$$A(p) = \begin{pmatrix} p_1 - p_2 & p_2 - p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 - p_3 & 0 & p_3 - p_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1 - p_n & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n - p_1 \\ 0 & p_2 - p_3 & p_3 - p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} - p_n & p_n - p_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

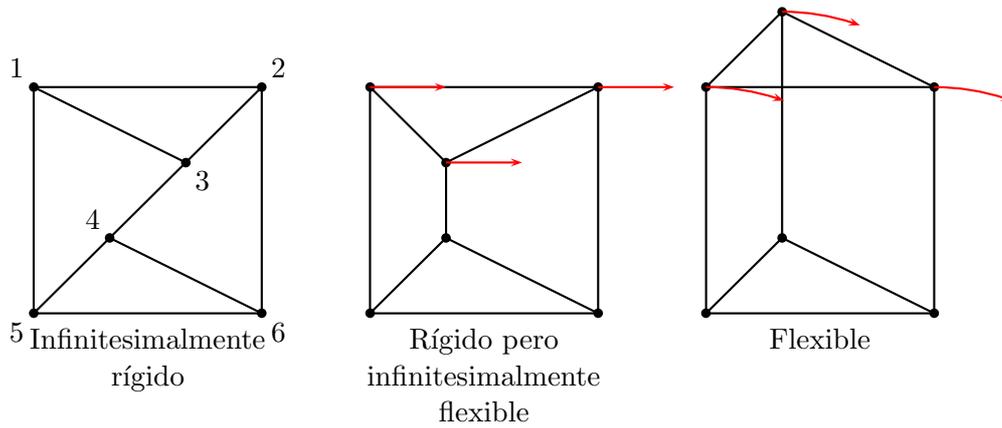


Figura 2.2: Tres posiciones del grafo del prisma triangular con distintas propiedades de rigidez. Las flechas indican las deformaciones (en el de en medio, solo la velocidad inicial).

donde cada elemento de la matriz es realmente un vector fila de m componentes.

La matriz del sistema (2.3) es una submatriz por filas de $A(p)$, que contiene solo las filas correspondientes a E : la llamaré $A_E(p)$. De esta forma, $A(p) = A_{K_n}(p)$ es la matriz del grafo completo. Por definición, $R = \ker A(p)$ y $M = \ker A_E(p)$, por lo tanto $\dim R = mn - \text{rg } A(p)$ y $\dim M = mn - \text{rg } A_E(p)$.

Proposición 2.3.1. *Una realización (V, E, p) es infinitesimalmente rígida si y solo si $\text{rg } A_E(p) = \text{rg } A(p)$.*

Definición 2.3.2. *Una realización (V, E, p) es independiente si $\text{rg } A_E(p) = |E|$, es decir, si las filas son independientes.*

Esta última definición quiere decir que no es posible asignar valores s_{ij} a las aristas de forma que

$$\sum_{(i,j) \in E} s_{ij}(p_i - p_j) = 0$$

para todo i . Estos valores, si existen, pueden entenderse como unas tensiones (si $s_{ij} < 0$) o compresiones (si $s_{ij} > 0$) de las aristas de forma que la fuerza que hacen en el vértice se compensa. Una realización es independiente si no admite tensiones o compresiones de este tipo.

Continuando con el Ejemplo 2.2.3, el primer grafo de la Figura 2.2 es infinitesimalmente independiente. Si fuera dependiente habría una asignación de “tensiones” a las aristas que se cancelen en cada vértice. Pero entonces las tensiones en 13 y 46 deben ser 0 para no sacar los vértices 3 y 4 de la diagonal. Como las aristas 12 y 15 son perpendiculares, la única forma de cancelar sus tensiones en 1 es que sean 0. Lo mismo 26 y 56. Para no mover 2 y 5, las tensiones de 23 y 45 deben ser 0 y por lo tanto 34 también. Luego ese grafo es independiente.

Pero la dependencia lineal de una fila de $A(p)$ respecto de otras tiene, además, otro significado:

Proposición 2.3.3. *Una fila de la matriz $A(p)$, correspondiente a (i, j) , depende linealmente de un conjunto E de filas/aristas si y solo si cualquier movimiento infinitesimal de E deja invariante la longitud de (i, j) .*

Demostración. (i, j) depende linealmente de E
 $\iff \text{rg } A_E(p) = \text{rg } A_{E'}(p)$, donde $E' = E \cup \{(i, j)\}$

- $\iff \dim M_E = mn - \text{rg } A_E(p) = mn - \text{rg } A_{E'}(p) = \dim M_{E'}$
 \iff todos los movimientos de M_E lo son de $M_{E'}$
 \iff todos los movimientos de M_E dejan invariante la longitud de (i, j) . □

Aparentemente, la matriz A depende de la realización p . Sin embargo, en su expresión los p_{ij} pueden entenderse como variables, y considerar A como una matriz de polinomios en $\mathbb{R}[p_{ij}]$. En adelante llamaré A a la matriz de polinomios, y $A(p)$ a la matriz con valores sustituidos (notar que en cualquier caso A depende de m).

Lema 2.3.4. *Para cualquier matriz de polinomios B (por ejemplo A_E) y cualquier p , $\text{rg } B \geq \text{rg } B(p)$, y se alcanza la igualdad para casi todos los valores de p .*

Demostración. Si el rango de $B(p)$ es r , existen r columnas linealmente independientes en $B(p)$. Estas columnas no pueden ser dependientes en B , porque cualquier dependencia entre ellas se seguiría cumpliendo al dar valores a p y lo serían en $B(p)$. Por lo tanto, en B también hay r columnas linealmente independientes y $\text{rg } B \geq r$.

Por otra parte, sea p tal que $s = \text{rg } B > \text{rg } B(p)$. Entonces existe un menor de tamaño s de B que es distinto de 0: $\det C \neq 0$. En $B(p)$ debe ser $\det C(p) = 0$, o sea, p es una solución de la ecuación polinómica $\det C = 0$. Como el miembro izquierdo no es 0, el conjunto de posibles valores de p tiene medida nula (de hecho, es una unión de hipersuperficies algebraicas, y lo mismo pasa con los p tales que $\text{rg } B > \text{rg } B(p)$, que son la unión de esas hipersuperficies). □

Este tratamiento simbólico permite definir la rigidez genérica.

Definición 2.3.5. *Un grafo (V, E) es genéricamente m -rígido (rígido en dimensión m) si $\text{rg } A_E = \text{rg } A$ y genéricamente m -independiente si $\text{rg } A_E = |E|$.*

Pero, ¿cuánto vale $\text{rg } A$? Para calcularlo, voy a definir algunos movimientos infinitesimales rígidos: la traslación infinitesimal t_i dada por

$$t_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = e_i$$

y la rotación infinitesimal dada por

$$r_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i e_j - x_j e_i$$

Está claro que el primero es rígido. Veamos el segundo:

$$\begin{aligned} (r_{ij}(x) - r_{ij}(y)) \cdot (x - y) &= ((x_i - y_i)e_j - (x_j - y_j)e_i) \cdot (x - y) = \\ &= (x_i - y_i)(x_j - y_j) - (x_j - y_j)(x_i - y_i) = 0 \end{aligned}$$

Teorema 2.3.6.

$$\text{rg } A = \begin{cases} \binom{n}{2} & \text{si } n \leq m + 1 \\ mn - \binom{m+1}{2} & \text{si } n \geq m + 1 \end{cases}$$

Además, si los puntos de p generan afínmente \mathbb{R}^m , es decir, no están todos en el mismo hiperplano, $\text{rg } A(p) = \text{rg } A$.

Demostración. Considero primero el caso $n \leq m + 1$. Veamos que en este caso la matriz tiene rango máximo (que es $\binom{n}{2}$, el número de filas). Tomo una colocación p de los vértices que genera afínmente \mathbb{R}^m . Entonces, si existiera una combinación lineal de las filas con coeficientes

$(s_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$, con algún $s_{ij} \neq 0$, se tendría, sumando las m columnas correspondientes al vector i ,

$$s_{i1}(p_i - p_1) + s_{i2}(p_i - p_2) + \dots + s_{in}(p_i - p_n) = 0$$

lo cual es una contradicción, porque esos vectores son linealmente independientes (ya que generan \mathbb{R}^m). Por lo tanto $A(p)$ tiene rango máximo y por el lema 2.3.4 A también debe tener rango máximo.

Sea ahora $n \geq m + 1$. El caso $n = m + 1$ ya lo hemos resuelto, y el rango resulta ser $\binom{m+1}{2}$, por lo tanto $\dim R = m(m+1) - \binom{m+1}{2} = \binom{m+1}{2}$. Dado (V, E, p) , con p en posición general y $|V| > m + 1$, tomo $U \subset V$ con $|U| = m + 1$. Los puntos de $p(U)$ forman una referencia afín de \mathbb{R}^m . Si R' es el espacio de movimientos rígidos de U , está claro que un movimiento rígido de V restringido a U es un movimiento rígido de U . Ahora veamos que cada movimiento de U se extiende de forma única a un movimiento de V .

Sea $L : R \rightarrow R'$ la restricción. Veamos que L es inyectiva. Supongamos $L(r) = L(r')$, es decir, r y r' coinciden en U . Sea $U = \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in V \setminus U$ tal que p_j que no quede en el hiperplano de p_1, p_2, \dots, p_m . Entonces, para $i \in U$,

$$(p_j - p_i) \cdot (r_j - r_i) = 0$$

y

$$(p_j - p_i) \cdot (r'_j - r'_i) = (p_j - p_i) \cdot (r'_j - r_i) = 0$$

por lo tanto

$$(p_j - p_i) \cdot (r'_j - r_j) = 0$$

Esto es, $r'_j - r_j$ es perpendicular a $p_j - p_i$ para todo $i \in U$, es decir, a todos los vectores de una base, por lo tanto es 0 y $r'_j = r_j$. Si p_j está en el hiperplano, podemos hacer el mismo argumento usando otro vértice que no quede en el hiperplano (para el que ya sabemos que $r = r'$). Por lo tanto, debe ser $r = r'$ en todos los puntos y L es inyectiva.

De aquí se deduce que $\dim R \leq \dim R' = \binom{m+1}{2}$. Veamos ahora que en R hay $\binom{m+1}{2}$ movimientos linealmente independientes. Voy a tomar para ello los movimientos t_i y r_{ij} que he definido antes. Supongamos que tenemos una dependencia lineal entre estos movimientos. Entonces

$$\sum_{i_1}^m a_{i_1} t_{i_1} + \sum_{1 \leq i < j \leq m} b_{ij} r_{ij} = 0$$

Evaluando en el 0, tenemos

$$\sum_{i_1}^m a_{i_1} e_{i_1} = 0$$

luego $a_i = 0$ para todo i . Evaluando en e_i ,

$$\sum_{j \neq i} b_{ij} e_j = 0$$

(donde he tomado $b_{ji} = -b_{ij}$), luego $b_{ij} = 0$.

Por lo tanto, $\dim R = \dim R' = \binom{m+1}{2}$ y $\text{rg } A = mn - \binom{m+1}{2}$. □

En el primer caso, este teorema nos dice algo notorio: si los vértices son $m + 1$ o menos, el grafo siempre es independiente y no puede ser rígido a no ser que sea completo. Es fácil ver en 3

dimensiones: K_4 menos una arista son dos triángulos unidos por una arista, que se pueden doblar por ella.

En el segundo caso, la conclusión es que, si los puntos no están en el mismo hiperplano, los movimientos rígidos infinitesimales t_i y r_{ij} , y sus combinaciones lineales, son los únicos posibles. Sin embargo, si los puntos están en un mismo hiperplano, hay algunos movimientos rígidos infinitesimales que no son rotaciones ni traslaciones: de hecho, estos son los únicos movimientos rígidos infinitesimales que pueden ser deformaciones.

Corolario 2.3.7. *Si una realización es infinitesimalmente rígida (resp. independiente) y los puntos generan afínmente \mathbb{R}^m , entonces su grafo subyacente es genéricamente rígido (resp. independiente).*

Demostración. Si es infinitesimalmente rígida,

$$\text{rg } A_E(p) = \text{rg } A(p) = \text{rg } A \geq \text{rg } A_E \geq \text{rg } A_E(p)$$

así que deben ser iguales y el grafo es genéricamente rígido.

Si es independiente,

$$\text{rg } A_E(p) = |E| \geq \text{rg } A_E \geq \text{rg } A_E(p)$$

y es genéricamente independiente. □

Corolario 2.3.8. *Si una realización es infinitesimalmente rígida y los puntos generan afínmente \mathbb{R}^m , entonces es rígida.*

Demostración. Si hubiera una deformación, por ser la realización infinitesimalmente rígida, sus velocidades iniciales deben ser un movimiento rígido infinitesimal, por lo tanto, una rotación o traslación. Pero eso es contradictorio, porque la distancia entre los vértices debe cambiar al hacer la deformación. □

El Teorema 2.3.6 nos permite deducir que el grafo del prisma triangular es rígido: ya vimos que es independiente, y tiene 9 aristas, luego $\text{rg } A_E(p) = |E| = 9 = \text{rg } A$.

Definición 2.3.9. *Diremos que $p \in \mathbb{R}^m$ está en posición genérica si, para cualquier conjunto de aristas E , $\text{rg } A_E(p) = \text{rg } A_E$.*

Se sigue de esta definición, la 2.3.5 y la Proposición 2.3.1 que si un conjunto de puntos está en posición genérica, es genéricamente rígido si y solo si es infinitesimalmente rígido. Sin embargo, si el conjunto no está en posición genérica, podríamos tener

$$\text{rg } A_E(p) < \text{rg } A_E = \text{rg } A = \text{rg } A(p)$$

y el grafo sería genéricamente rígido, pero la realización no sería infinitesimalmente rígida.

Por el Teorema 2.3.4, las posiciones no genéricas forman un conjunto de medida nula, así que si un grafo es rígido casi cualquier colocación de los vértices va a dar una realización rígida, aunque quizá no todas. Pero si el grafo es flexible ninguna colocación será rígida. En otras palabras, un grafo genéricamente flexible no puede tener una realización rígida gracias a una colocación especial, pero uno rígido sí puede dar una realización flexible. Todo lo dicho también es cierto si se cambia rígido por independiente.

Un ejemplo se puede encontrar en el grafo ya comentado antes del prisma triangular. La segunda situación y la tercera de la figura 2.2 son un casos particulares de lo que se llama posición de Desargues: si los triángulos son ABC y $A'B'C'$, se dice que están en *posición de Desargues* si las

líneas AA' , BB' y CC' concurren en un punto o son paralelas. Por el teorema de Desargues, esto es equivalente a que los puntos de intersección de AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, y AC y $A'C'$ están alineados. Un caso concreto es cuando estos pares de líneas son paralelas, es decir, concurren en la recta del infinito.

Teorema 2.3.10. *Si (V, E) es el prisma triangular, y p es tal que los triángulos están en posición de Desargues, (V, E, p) es infinitesimalmente flexible.*

Demostración. Si los triángulos están en posición de Desargues, las rectas AA' , BB' y CC' son paralelas o concurrentes. Si son paralelas, el movimiento que vale 0 en un triángulo y un mismo valor, distinto de 0 y perpendicular a esas líneas, en el otro, es una deformación.

Si son concurrentes, haciendo una traslación puedo poner el origen en el punto de intersección. Si $p_1, p_2, p_3, p'_1, p'_2$ y p'_3 son las posiciones de los vértices, $p'_i = k_i p_i$ para algún k_i .

Considero entonces el movimiento dado por $r_i = (-y_i, x_i)$, $r'_i = (0, 0)$.

$$(r'_i - r'_j) \cdot (p'_i - p'_j) = 0$$

$$(r_i - r'_i) \cdot (p_i - p'_i) = r_i \cdot (1 - k_i)p_i = (1 - k_i)r_i \cdot p_i = 0$$

$$(r_i - r_j) \cdot (p_i - p_j) = (y_j - y_i, x_i - x_j) \cdot (x_i - x_j, y_i - y_j) = 0$$

$$(r_i - r'_j) \cdot (p_i - p'_j) = r_i \cdot (p_i - k_i p_j) = -k_i r_i \cdot p_j \neq 0$$

La última solo puede ser 0 si p_j es proporcional a p_i , pero entonces p_i, p'_i, p_j y p'_j estarían alineados, y solo son todos 0 si los seis puntos están alineados. Luego este movimiento es una deformación. \square

Otro grafo con esta característica es $K_{3,3}$: voy a demostrar que es genéricamente rígido, pero dependiendo de la realización puede ser flexible. Este grafo es el que se obtiene a partir de dos conjuntos de tres vértices uniendo cada uno a los tres del otro conjunto. Dos realizaciones de este grafo se muestran en la Figura 2.3.

Ejemplo 2.3.11. El hexágono regular es infinitesimalmente flexible: el movimiento infinitesimal indicado por las flechas en la primera realización de la Figura 2.3 es una deformación. En esa realización tenemos

$$p_1 = (-1, 0), p_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), p_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), p'_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$p'_2 = (1, 0), p'_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), r_i = -p_i, r'_i = p'_i, i = 1, 2, 3$$

Ejemplo 2.3.12. En otras posiciones, $K_{3,3}$ es infinitesimalmente rígido, por lo tanto es genéricamente rígido: lo podemos ver en el segundo grafo de la figura 2.3. En ese grafo 14 no puede tener tensión pues sacaría el 4 de la línea horizontal, luego 12 y 16 tampoco para no mover el 1, 23 y 25 para no mover el 2, 36 y 56 para no mover el 6, y finalmente 34 y 45, de modo que es independiente también.

Como el grafo es genéricamente rígido, si se colocan los vértices al azar la realización será infinitesimalmente rígida. Ahora bien:

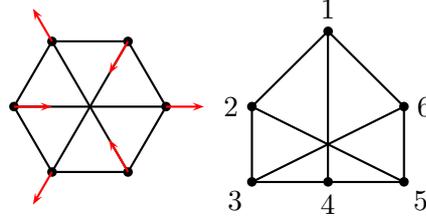


Figura 2.3: Dos realizaciones de $K_{3,3}$, la primera es infinitesimalmente flexible y la segunda rígida.

Teorema 2.3.13. *Si $(V, E) = K_{3,3}$, y p es tal que los seis puntos quedan en una circunferencia, (V, E, p) es infinitesimalmente flexible.*

Demostración. Sea $(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, para $i = 1, 2, 3$, la posición de los vértices de una parte y $(\cos \theta'_i, \sin \theta'_i)$ la posición de los otros vértices. Veamos que la realización es dependiente. Para ello, sea

$$s_{ij} = \frac{\sin \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i+2}}{2} \sin \frac{\theta'_{j+1} - \theta'_{j+2}}{2}}{\sin \frac{\theta_i - \theta'_j}{2}}$$

donde los índices se toman módulo 3. Tenemos que comprobar que la combinación lineal en cada vértice da 0. Tomo un vértice de la primera parte y la segunda es análoga:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 s_{ij}(p_i - p_j) &= \sum_{j=1}^3 s_{ij}(\cos \theta_i - \cos \theta'_j, \sin \theta_i - \sin \theta'_j) = \\ &= \sum_{j=1}^3 s_{ij} \left(-2 \sin \frac{\theta_i + \theta'_j}{2} \sin \frac{\theta_i - \theta'_j}{2}, 2 \cos \frac{\theta_i + \theta'_j}{2} \sin \frac{\theta_i - \theta'_j}{2} \right) = \\ &= 2 \sum_{j=1}^3 \sin \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i+2}}{2} \sin \frac{\theta'_{j+1} - \theta'_{j+2}}{2} \left(-\sin \frac{\theta_i + \theta'_j}{2}, \cos \frac{\theta_i + \theta'_j}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i+2}}{2} \sum_{j=1}^3 \sin \frac{\theta'_{j+1} - \theta'_{j+2}}{2} \left(-\sin \frac{\theta_i + \theta'_j}{2}, \cos \frac{\theta_i + \theta'_j}{2} \right) \end{aligned}$$

Defino ahora $\theta_{ij} = (\theta_i + \theta'_j)/2$ y la suma anterior queda

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^3 \sin(\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j+2}) (-\sin \theta_{ij}, \cos \theta_{ij}) = \\ &= \sum_{j=1}^3 (\sin \theta_{i,j+1} \cos \theta_{i,j+2} - \cos \theta_{i,j+1} \sin \theta_{i,j+2}) (-\sin \theta_{ij}, \cos \theta_{ij}) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 (-\sin \theta_{i,j+1} \cos \theta_{i,j+2} \sin \theta_{ij} + \cos \theta_{i,j+1} \sin \theta_{i,j+2} \sin \theta_{ij}), \right. \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^3 (\sin \theta_{i,j+1} \cos \theta_{i,j+2} \cos \theta_{ij} - \cos \theta_{i,j+1} \sin \theta_{i,j+2} \cos \theta_{ij}) = 0$$

(en cada componente del vector, hay tres términos con un signo y los mismos tres con el opuesto).

Por lo tanto, la realización es dependiente y $\text{rg } A_E(p) < |E| = 9$. En este caso $\text{rg } A = 2 \cdot 6 - 3 = 9$, así que $\text{rg } A_E(p) < \text{rg } A(p)$ y la realización es flexible. \square

2.4. Invarianza bajo transformaciones

Así las cosas, nos gustaría saber qué transformaciones del espacio afín m -dimensional conservan la rigidez o flexibilidad de las realizaciones, en concreto, si las transformaciones afines o las proyectivas la conservan.

Teorema 2.4.1. 1. Si una realización es rígida, lo sigue siendo al aplicar una transformación afín biyectiva (movimiento) de \mathbb{R}^m .

2. Si una realización es rígida, lo sigue siendo al aplicar una transformación proyectiva biyectiva (homografía) del espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^m$, restringida a \mathbb{R}^m , que no mueva ningún p_i a un punto del infinito.

Demostración. 1. Sea A_i la submatriz de A formada por las m columnas correspondientes al vértice p_i y f una aplicación afín. Tenemos que $p'_i = f(p_i) = Bp_i + b_0$ para B una matriz $m \times m$ y $b_0 \in \mathbb{R}^m$. Si una fila de $A_i(p)$ es 0, la misma fila de $A_i(p')$ también es 0. Si no, esa fila es $(p'_i)^T - (p'_j)^T = (p_i^T - p_j^T)B^T$ para algún j . Juntando todas las filas, resulta que $A_i(p') = A_i(p)B^T$ y $A(p') = A(p)C$, donde C es la matriz formada por n copias de B^T en diagonal. Como B es invertible, C también y $\text{rg } A(p') = \text{rg } A(p)$. Se puede decir lo mismo de $A_E(p)$, ya que también $A_E(p') = A_E(p)C$ y hemos terminado.

2. Sea ahora f una aplicación proyectiva y B su matriz.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f[1 : x_1 : x_2 : \dots : x_n] = \\ &= \left[b_{k0} + \sum_{l=1}^m b_{kl}x_l \right]_{k=0..m} = \frac{1}{b_{00} + \sum_{l=1}^m b_{0l}x_l} \left(b_{k0} + \sum_{l=1}^m b_{kl}x_l \right)_{k=1..m} \end{aligned}$$

La fila que es $p_i - p_j$ en $A_i(p)$ pasa a ser $p'_i - p'_j$ en $A_i(p')$. Una coordenada de este vector es

$$p'_{ik} - p'_{jk} = \frac{b_{k0} + \sum_{l=1}^m b_{kl}p_{il}}{b_{00} + \sum_{l=1}^m b_{0l}p_{il}} - \frac{b_{k0} + \sum_{l=1}^m b_{kl}p_{jl}}{b_{00} + \sum_{l=1}^m b_{0l}p_{jl}}$$

Sea d_{ij} el producto de los dos denominadores de esa expresión.

$$\begin{aligned} d_{ij}(p'_{ik} - p'_{jk}) &= \left(b_{00} + \sum_{l=1}^m b_{0l}p_{jl} \right) \left(b_{k0} + \sum_{l=1}^m b_{kl}p_{il} \right) - \\ &\quad - \left(b_{00} + \sum_{l=1}^m b_{0l}p_{il} \right) \left(b_{k0} + \sum_{l=1}^m b_{kl}p_{jl} \right) = \\ &= b_{00} \sum_{l=1}^m b_{kl}(p_{il} - p_{jl}) + b_{k0} \sum_{l=1}^m b_{0l}(p_{jl} - p_{il}) + \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^m b_{kl}b_{0r}(p_{il}p_{jr} - p_{jl}p_{ir}) \end{aligned}$$

Voy a manipular el último término de esa suma:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^m b_{kl} b_{0r} (p_{il} p_{jr} - p_{jl} p_{ir}) &= \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^m b_{kl} b_{0r} [(p_{il} - p_{jl}) p_{ir} + p_{il} (p_{jr} - p_{ir})] = \\
 &= \sum_{l=1}^m \sum_{r=1}^m b_{kl} b_{0r} (p_{il} - p_{jl}) p_{ir} + \sum_{r=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kr} b_{0l} p_{ir} (p_{jl} - p_{il}) = \\
 &= \sum_{l=1}^m (p_{il} - p_{jl}) \sum_{r=1}^m p_{ir} (b_{kl} b_{0r} - b_{kr} b_{0l})
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 d_{ij}(p'_{ik} - p'_{jk}) &= \sum_{l=1}^m (p_{il} - p_{jl}) \left[b_{00} b_{kl} - b_{k0} b_{0l} + \sum_{r=1}^m p_{ir} (b_{kl} b_{0r} - b_{kr} b_{0l}) \right] \\
 d_{ij}(p'_i - p'_j) &= C_i (p_i - p_j)
 \end{aligned}$$

donde C_i es una matriz $m \times m$.

Sea D la matriz $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ que tiene en la diagonal los d_{ij} , por el orden de las aristas (i, j) . Junto todas las filas (incluyendo también las que son 0) y queda

$$DA_i(p') = A_i(p) C_i^T$$

y juntando ahora los A_i ,

$$DA(p') = A(p)C \Rightarrow A(p') = D^{-1}A(p)C$$

C es la matriz formada por los C_i^T en diagonal. D es invertible porque si tuviera un 0 en la diagonal, algún punto se iría al infinito. Como f es homografía, puedo hacer el mismo argumento con f^{-1} llegando a

$$A(p) = \tilde{D}^{-1}A(p')\tilde{C} = \tilde{D}^{-1}D^{-1}A(p)C\tilde{C}$$

Por lo tanto, C es invertible y $\text{rg } A(p) = \text{rg } A(p')$. También $\text{rg } A_E(p) = \text{rg } A_E(p')$ y hemos terminado. \square

Una interpretación de este teorema, viendo p como un punto en \mathbb{R}^{mn} , y dado que los valores de p para los que el grafo es infinitesimalmente flexible forman una variedad algebraica (teorema 2.3.4), es que esa variedad es invariante por ciertas transformaciones proyectivas: las que corresponden a una transformación proyectiva de \mathbb{R}^m en cada uno de los n grupos de coordenadas.

Corolario 2.4.2. *Si $(V, E) = K_{3,3}$, y p es tal que los seis puntos quedan en una cónica, (V, E, p) es infinitesimalmente flexible.*

Demostración. Aplicando una transformación proyectiva que convierta esa cónica en una circunferencia, se obtiene p' tal que los puntos quedan en una circunferencia (V, E, p') es infinitesimalmente flexible por el teorema 2.3.13, así que (V, E, p) también lo es. \square

Es decir, aunque el grafo es genéricamente rígido, hemos encontrado una familia de posiciones proyectivamente invariante en las que es flexible: aquellas en las que los puntos están en una cónica.

En cuanto al prisma, la condición para que sea flexible es que tres rectas sean paralelas o concurrentes (lo que habíamos llamado posición de Desargues), que es también un invariante proyectivo.

3 Matroides de rigidez

3.1. Definición

Sea V un conjunto cualquiera y K el conjunto de pares de elementos de V . A partir de ahora, este será el conjunto sobre el que definiré las matroides (a diferencia del capítulo 1, donde la matroide gráfica se tomaba sobre un subconjunto de K). Si $E \subset K$, llamaré $V(E)$ al conjunto de elementos de V que están en algún elemento de E . Si $U \subset V$, llamo $K(U)$ al conjunto de pares de elementos de U . En este capítulo, muchas ideas están tomadas de [3].

Definición 3.1.1. Una matroide de rigidez en dimensión m es una matroide $M = (K, I)$ que cumple:

1. Si $|V(E) \cap V(F)| < m$, $\langle E \cup F \rangle \subset K(V(E)) \cup K(V(F))$
2. Si $\langle E \rangle = K(V(E))$, $\langle F \rangle = K(V(F))$ y $|V(E) \cap V(F)| \geq m$, $\langle E \cup F \rangle = K(V(E \cup F))$

Si $\langle E \rangle = K(V(E))$, decimos que E es rígido, y si es rígido e independiente diremos que es isostático.

Viendo (V, E) como un grafo, esta matroide de rigidez va a estar relacionada con la rigidez del grafo.

Teorema 3.1.2. Para cualquier p en posición general, la matroide lineal asociada a las filas de la matriz $A(p)$ es una matroide de rigidez cuyos conjuntos rígidos son precisamente los conjuntos infinitesimalmente rígidos de aristas y lo mismo los independientes.

La condición de estar en posición general es necesaria: si $V = \{1, 2, 3\}$ y p deja los tres puntos en línea recta, $E = \{(1, 2)\}$, $F = \{(2, 3)\}$ viola la condición 1, ya que la clausura de las dos aristas es el conjunto de las tres (que son dependientes en $A(p)$).

Demostración. Ya sabemos que es una matroide. Falta ver que es una matroide de rigidez. En primer lugar, la clausura de un conjunto E de aristas son aquellas cuya fila es combinación lineal de las filas correspondientes E , que, por la proposición 2.3.3, son justamente las que no cambian de longitud al mover E (en adelante, las llamaré *aristas implicadas* por E).

Supongamos primero $|V(E) \cap V(F)| < m$. Sea $(i, j) \in \langle E \cup F \rangle$. Si i o j no está en $V(E)$ ni en $V(F)$, podemos mover el otro extremo de cualquier manera y cambiaría la longitud, lo cual es contradictorio. Si i y j están los dos en $V(E)$ o en $V(F)$, (i, j) está en $K(V(E)) \cup K(V(F))$ como queremos demostrar. Solo queda el caso de que i está en $V(E)$ y j en $V(F)$ (o al revés).

Como $|V(E) \cap V(F)| \leq m - 1$, existe una variedad afín L de dimensión $m - 2$ que contiene a la imagen de esos puntos por p . Sea r la rotación infinitesimal de eje L , y u un movimiento infinitesimal definido por

$$u(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in V(E) \\ r(k) & \text{si } k \in V(F) \end{cases}$$

Esto está bien definido ya que $r(k)$ es 0 en los puntos de L y es un movimiento de $E \cup F$ por serlo 0 y r . La arista (i, j) no debe cambiar su longitud, y $u(i) = 0$, por lo tanto $u(j) = r(j)$ es

perpendicular a $p_i - p_j$. Pero $r(j)$ también es perpendicular al hiperplano H que contiene a L y p_j , así que $p_i - p_j$ está en la dirección de H y p_i está en H , contradicción con que p está en posición general (habría $m + 1$ puntos en un hiperplano).

Suponemos ahora que E y F son rígidos y $|V(E) \cap V(F)| \geq m$. Tenemos que demostrar que $E \cup F$ es rígido. Sea u un movimiento de $E \cup F$. Entonces $u|_E$ es un movimiento de E y como E es rígido, es un movimiento rígido, y de la misma forma $u|_F$ es un movimiento rígido de F . Ahora bien, por el teorema 2.3.6, $u|_E$ es una combinación lineal de traslaciones y rotaciones infinitesimales y lo mismo $u|_F$. Como estos dos movimientos coinciden en al menos m puntos, deben coincidir en todos (la restricción de R a R' era inyectiva en la demostración de 2.3.6), y u es un movimiento rígido como queríamos demostrar. \square

Esta matroide permite tratar la rigidez desde un punto de vista combinatorio, sin preocuparnos por las posiciones de los vértices. Dada una función $p : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, llamo $G(p)$ a la matroide lineal de las filas de $A(p)$ y $G_m(n)$ a la matroide lineal de las filas de A (que coincide con las de $A(p)$ para p genérica).

Proposición 3.1.3. *Cualquier conjunto independiente en $G(p)$ es independiente en $G_m(n)$.*

Demostración. Si hubiera una dependencia entre las filas de $G_m(n)$, se seguiría cumpliendo en $G(p)$. \square

3.2. Extensiones

Definición 3.2.1. *Sea (V, E) un grafo, $U \subset V$ con $|U| = m + k$, y $F \subset E$ un conjunto de k aristas entre los vértices de U . Entonces decimos que el grafo dado por (V', E') es una k -extensión de E en dimensión m , donde $V' = V \cup \{x\}$ y $E' = E \setminus F \cup \{(x, u) : u \in U\}$.*

Así, una 0-extensión consiste en añadir un vértice al grafo unido a otros m , una 1-extensión es unir un vértice a $m + 1$ vértices del grafo y quitar una arista entre ellos, y así sucesivamente.

Lema 3.2.2. *Si $E' = E \cup \{(x, u_1), (x, u_2), \dots, (x, u_k)\}$ con $k < m$, $r(E') = r(E) + k$, donde la función de rango corresponde a una matroide de rigidez m -dimensional.*

En concreto, si E' es una 0-extensión de E , $r(E') = r(E) + m$.

Demostración. Sea

$$E_{k-1} = E \cup \{(x, u_1), (x, u_2), \dots, (x, u_{k-1})\}$$

Para cualquier $k \leq m$, aplicando la propiedad 1, tenemos

$$\langle E_{k-1} \rangle \subset K(V(E)) \cup K(\{x, u_1, \dots, u_{k-1}\})$$

Este conjunto no contiene a (x, u_k) , por lo tanto $r(E_k) > r(E_{k-1})$ y

$$r(E') = r(E_k) \geq r(E_0) + k = r(E) + k \geq r(E) + r(E' \setminus E) \geq r(E') \quad \square$$

En los siguientes resultados consideramos una matroide de rigidez $M = (K, I)$. Veamos que en estas matroides se cumple un teorema equivalente a 2.3.6.

Teorema 3.2.3.

$$r(K_n) = \begin{cases} \binom{n}{2} & \text{si } n \leq m + 1 \\ mn - \binom{m+1}{2} & \text{si } n \geq m + 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, ese es el rango que tiene que tener un grafo con n vértices para ser rígido.

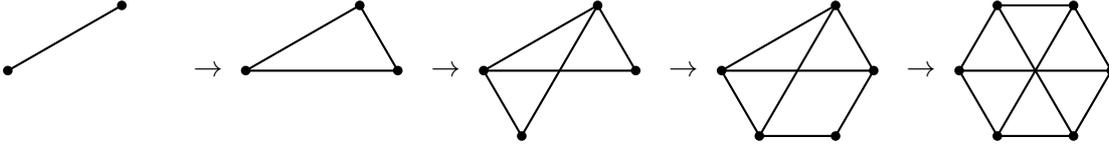


Figura 3.1: Obtención de $K_{3,3}$ a partir de una arista. En el último paso el grafo deja de ser rígido e independiente, pero genéricamente lo sigue siendo.

Demostración. La primera parte resulta de una aplicación repetida del lema anterior, ya que K_n se obtiene añadiendo a K_{n-1} un vértice con $n - 1$ aristas.

Para la segunda parte, sea

$$E_j = K_m \cup \{(u, v) : u \leq m, m + 1 \leq v \leq m + j\}$$

Sabemos que E_0 es independiente por la primera parte (tiene $\binom{n}{2}$ aristas), y cada E_j es una 0-extensión del anterior, así que $r(E_k) = r(E_0) + km = |E_0| + km = |E_k|$ y E_k es independiente. También E_0 es rígido (por ser completo), y aplicando sucesivamente la propiedad 2, E_j es rígido (es la unión de dos conjuntos rígidos con m vértices en común: E_{j-1} y $K(\{1, \dots, m, m + j\})$). Con esto tenemos que E_k es isostático, y su número de aristas coincide con su rango, que es el rango de K_n . \square

Corolario 3.2.4. 1. En todo grafo independiente, hay algún vértice de grado menor que $2m$.

2. En todo grafo rígido, todos los vértices tienen grado mayor o igual que m .

Demostración. Si el grafo es independiente, como mucho tiene $mn - \binom{m+1}{2}$ aristas, así que la suma de grados de los vértices es menor que $2mn$ y la primera parte se sigue.

Si el grafo tiene un vértice de grado menor que m , aplicando la propiedad 1 a las aristas de ese vértice, por un lado, y al resto de aristas por otro, obtenemos que la clausura del grafo no puede ser el grafo completo, así que no es rígido. \square

Teorema 3.2.5. Un grafo es independiente (resp. rígido, isostático) en una matroide de rigidez si y solo si cualquier 0-extensión del grafo es independiente (resp. rígida, isostática).

Demostración. La extensión es independiente si y solo si su rango coincide con el número de aristas, lo que es equivalente a que coincidan en el grafo original ya que los dos cambian en m (por el lema 3.2.2, el rango del grafo aumenta en m al hacer una 0-extensión). Como al menos hay m vértices, el rango necesario para ser rígido también aumenta en m , así que la rigidez del grafo antes y después de la extensión es equivalente. Lo mismo si es isostático, ya que eso quiere decir independiente y rígido. \square

En general, una 1-extensión de un grafo independiente no tiene por qué ser independiente: si fuera así, $K_{3,3}$, que se obtiene por tres 0-extensiones de una arista seguidas por una 1-extensión (figura 3.1), sería independiente en cualquier colocación de los puntos, y no lo es. Sin embargo, sí que es cierto para la matroide genérica.

Teorema 3.2.6. Si un grafo es independiente (resp. rígido, isostático) en $G_m(n)$, cualquier 1-extensión del grafo es independiente (resp. rígida, isostática).

3 Matroides de rigidez

Demostración. Sea $U = \{1, 2, \dots, m+1\}$ y 0 el nuevo vértice. Supongamos que $E \cup (1, 2)$, antes de añadir el 0 y quitar la arista $(1, 2)$, es independiente, y veamos que el grafo final, $E \cup \{(0, 1), \dots, (0, m)\}$ es independiente también. Sea p una colocación genérica con $p_1 = 0$ y $p_i = e_{i-1}$, para $2 \leq m \leq m+1$, y u un movimiento infinitesimal de E que cambia la distancia entre 1 y 2. Entonces le podemos dar un valor a u_0 que cumple

$$(u_0 - u_i) \cdot (p_0 - p_i) = (u_0 - u_i) \cdot (p_0 - e_{i-1}) = 0$$

para todos los i a partir de 2, con lo que obtenemos un movimiento infinitesimal de $E \cup \{(0, 2), \dots, (0, m)\}$ (que es de hecho una 0-extensión de E , por lo tanto independiente).

Ahora sea $x_i = (u_i - u_1) \cdot p_i$, y veamos que x_0 no es siempre cero (es decir, la arista $(0, 1)$ no está implicada por el resto, y el grafo es independiente, como queremos demostrar). Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (u_0 - u_i) \cdot (p_0 - e_{i-1}) = (u_0 - u_i) \cdot p_0 - (u_0 - u_i) \cdot e_{i-1} \\ &= x_0 + (u_1 - u_i) \cdot p_0 + x_i - (u_0 - u_1) \cdot e_{i-1} \end{aligned}$$

Escrito como una ecuación matricial,

$$(x_0 + x_2, \dots, x_0 + x_{m+1})^T + Qp_0 - (u_0 - u_1) = 0$$

donde Q tiene como filas los $u_1 - u_i$, y

$$\begin{aligned} x_0 &= (u_0 - u_1)^T p_0 = ((x_0 + x_2, \dots, x_0 + x_{m+1})^T + Qp_0)^T p_0 = \\ &= x_0(1, 1, \dots, 1)^T p_0 + (x_2, \dots, x_{m+1})^T p_0 + p_0^T Q^T p_0 \end{aligned}$$

y

$$(x_2, \dots, x_{m+1})^T p_0 + p_0^T Q^T p_0$$

es un polinomio cuadrático en p_0 que debe ser distinto de 0 porque $x_2 \neq 0$. Como p es una posición genérica, podemos suponer que aquí no vale 0, y entonces $x_0 \neq 0$, como queríamos demostrar.

Si el grafo original es rígido y el extendido no lo es, este último admite una deformación, que no es una deformación del original: la única posibilidad es que la arista $(1, 2)$ cambie de longitud, luego tenemos un movimiento infinitesimal en la misma situación del u anterior y se sigue que la arista $(0, 1)$ también cambia de longitud, lo cual es absurdo. \square

Sin embargo, la otra dirección, que implica que una k -extensión se puede deshacer, se cumple en general, para cualquier k (no solo 0 o 1) y cualquier matroide de rigidez (no solo la genérica).

Teorema 3.2.7. *Sea (V, E) un grafo independiente en una matroide de rigidez, u un vértice de grado $m+k$, para cualquier $k \geq 0$, y F el conjunto de las aristas que salen de u y S el conjunto de vecinos de u . Entonces, existe un conjunto $G \subset K(S) \setminus E$, con $|G| = k$, tal que $E \setminus F \cup G$ es independiente.*

Demostración. Lo demostraré por inducción sobre k . Para $k = 0$ ya lo tenemos. Supongamos que es cierto para k y veamos $k+1$. Para ello, sea v un vecino de u , $E' = E \setminus \{(u, v)\}$ y $S' = S \setminus \{v\}$. Las aristas entre los vecinos de u no pueden estar todas implicadas por E' , ya que entonces tendríamos que $K(S) \subset \langle E' \rangle$ y $K(S' \cup \{u\}) \subset \langle E' \rangle$, y siendo dos conjuntos de vértices con m o más puntos en común, $K(S \cup \{u\}) \subset \langle E' \rangle$ y en concreto la arista (u, v) estaría implicada por el resto, contradicción con que E es independiente.

Por lo tanto, debe haber una arista en $K(S)$ que no está en la clausura de E' , llamémosla (i, j) . Sea ahora $E'' = E' \cup \{(i, j)\}$. Por lo que sabemos E'' es independiente, y u tiene grado $m+k$ en E'' , así que le podemos aplicar la hipótesis inductiva a E'' y obtenemos un conjunto G' tal que $E'' \setminus F \cup G'$ es independiente, y entonces $E \setminus F \cup G$ es independiente, donde $G = G' \cup \{(i, j)\}$. \square

Una consecuencia de esto es la existencia de las llamadas secuencias de Henneberg.

Definición 3.2.8. *Una secuencia de Henneberg es una secuencia de grafos en m dimensiones tales que el grafo inicial es el completo en m vértices y cada grafo se obtiene del anterior por una k -extensión para $k < m$.*

Corolario 3.2.9. *Cualquier grafo isostático en m o más vértices, en cualquier matroide de rigidez, se puede obtener a partir del grafo completo en m vértices mediante una secuencia de Henneberg.*

Demostración. Veámoslo por inducción sobre el número de vértices. Si hay m , el grafo debe ser completo y hemos terminado. Si hay más de m , por el teorema 3.2.4 hay algún vértice con grado entre m y $2m - 1$. Por el teorema anterior es posible deshacer una extensión en ese vértice, obteniendo un grafo con un vértice menos. Este grafo es independiente y el número de aristas ha bajado exactamente en m , luego es isostático, le podemos aplicar la hipótesis inductiva y sacar así una secuencia de extensiones. Rehaciendo la extensión deshecha, tenemos la secuencia que buscamos. \square

3.3. Dimensión 1

Resulta que en dimensión 1 solo hay una matroide de rigidez infinitesimal para n vértices y coincide con una que ya hemos visto: la matroide del grafo completo con n vértices.

Teorema 3.3.1. *Si M es una matroide de rigidez en dimensión 1, un subconjunto de K es independiente si y solo si es un bosque.*

Demostración. La demostración va por inducción sobre el número de vértices. Para 1 vértice es obvio (E es vacío). Lo supongo cierto para n vértices y lo demuestro para $n + 1$.

Sea (V, E) un bosque. Si E es vacío, hemos terminado. Si no, sea v un vértice de grado 1 (en un bosque siempre los hay) y e la arista de v . $(V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\})$ es un bosque y por hipótesis inductiva es independiente. Entonces (V, E) es una 0-extensión de un grafo independiente, por lo tanto independiente.

Si (V, E) es independiente y no vacío, por el corolario 3.2.4 hay un vértice v de grado 1. (V, E) es una 0-extensión de $(V \setminus \{v\}, E \setminus \{e\})$, por lo tanto este último grafo es independiente, por hipótesis inductiva es un bosque y entonces (V, E) también es un bosque. \square

Según esto, en dimensión 1 la única matroide de rigidez es la gráfica del grafo completo, y la clausura de un grafo en esa matroide es el grafo completo si y solo si el grafo es conexo. Por lo tanto, aquí rígido equivale a conexo e isostático a árbol.

3.4. Dimensión 2

En dimensión 2 la cosa está más interesante. Empezaré por los casos con pocos vértices.

Para $n \leq 3$, el grafo debe ser completo para ser rígido (un punto, una línea y un triángulo) y siempre es independiente.

Para $n = 4$, $r(K_4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5$, luego K_4 es dependiente y K_4 menos cualquier arista son dos triángulos unidos por una arista, que es una 0-extensión del triángulo, luego es isostático.

Para $n = 5$, $r(K_5) = 7$. Si las 7 aristas incluyen un K_4 , son dependientes. Si no, como $3 \cdot 5 > 2 \cdot 7$, hay algún vértice de grado exactamente 2, y tenemos una 2-extensión de algo que no es K_4 , luego es independiente y el grafo original también lo es.

Hasta aquí, tenemos que hay una sola matroide de rigidez hasta 5 vértices. Pero sabemos que no es así para 6 vértices: $K_{3,3}$ es independiente en $G_2(6)$ pero dependiente en $G(p)$ si los puntos de p están en una cónica.

Centrándonos en $G_2(n)$, nos gustaría saber cuándo un grafo es independiente en ella y cuándo no. Vamos a ver varias posibles caracterizaciones de los grafos independientes de $G_2(n)$.

En primer lugar, las secuencias de Henneberg para dimensión 2 solo permiten 0 y 1-extensiones.

Teorema 3.4.1 (Caracterización de Henneberg). *Un grafo es isostático si y solo si se obtiene a partir de una arista por una secuencia de Henneberg.*

Demostración. Si el grafo es isostático, ya sabemos que siempre se obtiene por una secuencia.

Si el grafo se puede obtener de esta forma, por los teoremas 3.2.5 y 3.2.6 tenemos que es independiente. En cada extensión ganamos un vértice y dos aristas, por lo tanto $2n - |E|$ no cambia. Inicialmente vale 3 así que siempre va a valer 3, y $r(E) = |E| = 2n - 3$ como queríamos demostrar. \square

Teorema 3.4.2 (Caracterización de Laman). *Un grafo (V, E) es independiente si y solo si para cualquier $U \subset V$, el número de aristas entre los vértices de U es como mucho $2|U| - 3$.*

Demostración. Si el grafo es independiente, cualquier subgrafo suyo también, así que como mucho tiene $r(G_2(|U|)) = 2|U| - 3$ aristas.

Supongamos ahora que la condición se cumple. Voy a hacer inducción sobre n . Para $n = 2$ hay 1 arista así que no hay nada que demostrar. Supongo que es cierto para n vértices y lo demuestro para $n + 1$.

Si hay algún vértice u de grado menor o igual que 2, aplicando la hipótesis inductiva a $V \setminus \{u\}$, tengo que es independiente. Entonces (V, E) está contenido en una 0-extensión suya que debe ser independiente.

Si no lo hay, todos los vértices tienen grado al menos 3 y debe haber alguno de grado exactamente 3 (si no el número total de aristas sería al menos $2(n + 1)$). Sea u este vértice e i, j, k sus vecinos. Si el grafo (V', E') con $V' = V \setminus \{u\}$, $E' = E \setminus \{(u, i), (u, j), (u, k)\} \cup \{(i, j)\}$, es independiente, (V, E) es una 1-extensión suya que es independiente. Lo mismo pasa si en vez de (i, j) pongo (i, k) y (j, k) . Voy a suponer entonces que son los tres dependientes.

Aplicando a los tres la hipótesis inductiva, obtenemos que existen E_1, E_2 y E_3 contenidos en $E \cup \{(i, j)\}$, $E \cup \{(i, k)\}$ y $E \cup \{(j, k)\}$ respectivamente que tienen más aristas de la cuenta. Necesariamente las propias aristas (i, j) , (i, k) y (j, k) están en E_1, E_2 y E_3 , si no se violaría la condición para E . Sea n_i el número de vértices de E_i . Su número de aristas debe ser, entonces, $2n_i - 2$. Si F_i es E_i menos la arista añadida, $|F_i| = 2n_i - 3$. Como estos F_i están contenidos en el grafo original sin el vértice u , son independientes (por hipótesis inductiva), y por el número de aristas también son rígidos.

Ahora bien, F_1 y T , el triángulo de vértices ijk , tienen dos vértices en común, así que su unión $F_1 \cup T$ es rígida. Repitiendo este paso, tenemos que $F_1 \cup F_2 \cup T$ y después $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup T$ son rígidos. En este último, las aristas de T son implicadas por las de cada F_i (debido a que estos son rígidos), luego $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ es rígido ya de por sí, y $|F_1 \cup F_2 \cup F_3| \geq 2t - 3$ (t es su número de vértices). Pero esto implica

$$|F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \{(u, i), (u, j), (u, k)\}| \geq 2(t + 1) - 2$$

y hemos llegado a una contradicción. \square

Teorema 3.4.3 (Caracterización de Crapo). *Un grafo es isostático en $G_2(n)$ si y solo si es la unión disjunta de tres árboles tales que cada vértice está contenido en exactamente dos de ellos y no existe ningún subconjunto U de V tal que dos de los tres árboles, restringidos a U , siguen siendo árboles y usan todos los vértices de U .*

Demostración. Si la condición se cumple y el número de vértices de cada árbol es a , b y c , el número de aristas es $a - 1 + b - 1 + c - 1 = a + b + c - 3 = 2n - 3$. En cada subconjunto de vértices U cada árbol tiene como mucho $|U| - 1$ aristas. Si a' , b' y c' son los números de vértices de los árboles restringidos a U , y estos números son al menos 1, como mucho tenemos $a' + b' + c' - 3 = 2|U| - 3$ aristas. Si uno de ellos es 0, los otros dos no pueden ser $|U| - 1$ pues se violaría la condición, así que como mucho tienen $2|U| - 3$ aristas. Por el teorema 3.4.2, E es isostático.

Supongamos ahora que E es isostático y veamos que se cumple la condición. Como ya sabemos (teorema 3.4.1), E puede obtenerse a partir de una arista por una secuencia de 0- y 1-extensiones. En la arista, la condición se cumple tomando como árboles la propia arista y otros dos con 1 vértice (y 0 aristas). Ahora veamos cómo hacer crecer los árboles. En una 0-extensión, se añade un vértice u unido a v y w , elijo un árbol que pasa por v y otro por w y los extiendo a u . La condición se sigue cumpliendo: si tuviera un conjunto U que la violara, U tendría que incluir a u , y por lo tanto a los dos vértices v y w , ya que los dos árboles que pasan por u van a ellos, pero entonces $U \setminus \{u\}$ viola la condición.

Veamos ahora el otro caso. Se añade un vértice t unido a otros tres, u , v y w , suprimiendo la arista (u, v) . Entonces añado (u, t) y (t, v) al árbol que tenía (u, v) para que siga siendo un árbol, y cojo un árbol que no sea ese y que pase por w y le extiendo a t . Si ahora un conjunto U viola la condición, debe tener a t , por lo tanto también a w y a uno de u o v . Si está u y no v , $U \setminus \{t\}$ viola la condición. Lo mismo si está v y no u . Si están los dos, también la viola gracias a la reaparición de la arista (u, v) . \square

A continuación voy a dar un algoritmo para determinar la dependencia o independencia de un grafo (se trata de una modificación del algoritmo de Edmonds [4], usada en [3]).

Algoritmo 3.4.4. Input: grafo $(V, E = \{e_1, \dots, e_N\})$

Output: genéricamente dependiente o independiente en el plano

En lo que sigue, $\langle \rangle$ es la clausura en la matroide gráfica de E .

1. $F_0 := \emptyset, F_1 := \emptyset$
2. Mientras $F_0 \cup F_1 \neq E$:
 - a) $i := \min(\{1, \dots, N\} \setminus (F_0 \cup F_1))$
 - b) Repetir los siguientes pasos hasta SALIR
 - i) Si $e_i \notin \langle F_0 \rangle$, $F_0 := F_0 \cup \{e_i\}$ y SALIR de 2b
 - ii) Si $e_i \notin \langle F_1 \rangle$, $F_1 := F_1 \cup \{e_i\}$ y SALIR de 2b
 - iii) $C_0 := \langle F_0 \rangle$, $C_1 := \langle F_1 \rangle$, $k := 1$
 - iv) Mientras $|C_k| > 0$:
 - a' $k := k + 1$
 - b' $C_k := \langle C_{k-1} \cap F_k \text{ mód } 2 \rangle$
 - c' Si $C_k = C_{k-1}$, resultado DEPENDIENTE

v) $l := \min\{k : e_i \notin C_k\}$

vi) se elige un camino P en $F_{l \bmod 2}$ que conecte los extremos de e_i

vii) $r := \min\{k : P \not\subseteq C_k\}$

viii) se elige j tal que $e_j \in P, e_j \notin C_r$

ix) $F_{l \bmod 2} := F_{l \bmod 2} \setminus \{e_j\} \cup \{e_i\}$

x) $i := j$

3. $C_0 := \langle F_0 \rangle, C_1 := \langle F_1 \rangle, k := 1$

4. Mientras $|C_k| > 0$:

a) $k := k + 1$

b) $C_k := \langle C_{k-1} \cap F_{k \bmod 2} \rangle$

c) Si $C_k = C_{k-1}$, resultado DEPENDIENTE

5. Resultado INDEPENDIENTE

Teorema 3.4.5. *El algoritmo anterior determina correctamente la dependencia o independencia de un grafo.*

Demostración. A lo largo de toda la demostración, llamaré F_k a $C_{k-1} \cap F_{k \bmod 2}$, cuya clausura es C_k .

En primer lugar, por construcción, F_0 y F_1 son bosques: solo se añade una arista si, o bien no está en la clausura, o bien se ha eliminado otra que estaba en un camino entre sus extremos.

Veamos que el algoritmo siempre termina. Cada vez que se coge una nueva arista en 2a, esta arista se acabará añadiendo a F_0 o F_1 , quizá a costa de quitar otra, pero en ese caso esa será añadida después. Por lo tanto, el paso 2a no se puede ejecutar más de m veces. Falta ver, por lo tanto, que entre una “nueva arista” y la siguiente hay un número finito de “cambios de aristas”.

En efecto, después de un cambio de aristas C_0 y C_1 no cambian, y los bosques F_0 y F_1 han perdido la arista e_j , pero a cambio han ganado e_i , que puede conseguir lo mismo (si e_j estaba en un camino entre los vértices de e_i , ahora e_i está en un camino entre los vértices de e_j), y se sigue por inducción que C_k no cambia para $k \leq r$. Por lo tanto el nuevo valor de $l := \min\{k : e_j \notin C_k\}$ es precisamente r , que por definición es menor que l . Es decir, el valor de l va bajando de un cambio de aristas al siguiente, lo cual implica que su número debe ser finito.

Supongamos ahora que el algoritmo da resultado DEPENDIENTE. En este punto, $C_k = C_{k+1}$ para un k . Por lo tanto, cualquier arista de F_{k+1} une dos vértices de la misma componente conexa de F_k y viceversa. Tomo una de estas componentes conexas, pongamos que tiene n_1 vértices, y entonces debe tener al menos las $n_1 - 1$ aristas de F_k y las $n_1 - 1$ de F_{k+1} , en total $2n_1 - 2$, luego E es dependiente (notemos que F_k y F_{k+1} son disjuntos por estar contenidos en F_0 y F_1 que lo son).

Supongamos, para terminar, que da INDEPENDIENTE, pero E es dependiente. Entonces, existe $U \subset V$ que tiene $2|U| - 2$ o más aristas. Al final del algoritmo, $F_0 \cup F_1 = E$ y cada uno no puede tener más de $|U| - 1$ aristas entre los vértices de U , luego tienen exactamente $|U| - 1$ y sus restricciones a U (llamémoslas T_0 y T_1) son árboles. $T_0 \subset F_0$ y $T_1 \subset F_1$, luego $\langle T_0 \rangle = \langle T_1 \rangle$, por construcción, va a estar en todos los C_k y tendremos siempre $|C_k| > 0$, lo cual contradice que se ha abandonado el bucle del paso 4. \square

Encontrar la clausura de un grafo se puede hacer en tiempo lineal mediante los algoritmos de búsqueda en anchura y en profundidad, que consisten en encontrar, para cada vértice, los que se unen con él. El número de cambios de aristas que se hacen entre dos vueltas al paso 2a es menor que N y a él se vuelve N veces, así que el tiempo de ejecución está acotado por $O(N^3)$.

Teniendo en cuenta que los conjuntos de aristas independientes forman una matroide, el problema de determinar la rigidez de un grafo se podría resolver así: tomamos el conjunto de aristas y le aplicamos el algoritmo greedy (véase sección 1.3), usando en cada paso el algoritmo de Edmonds para decidir si al añadir una arista se obtiene un grafo independiente o no, y al terminar tenemos un conjunto independiente máximo, cuyo tamaño nos dará el rango del grafo y si ese rango es $2n - 3$ hemos terminado. Pero esto significa aplicar un número lineal de veces el algoritmo anterior (requiriendo un tiempo $O(N^4)$), y lo podemos hacer mejor.

Una posibilidad es usar el algoritmo greedy, pero en cada paso se puede partir de los bosques F_0 y F_1 resultantes del paso anterior. Como una repetición del paso 2 solo lleva un tiempo $O(N^2)$, el tiempo total vuelve a ser $O(N^3)$.

Otra posibilidad, especialmente si el grafo tiene pocas aristas de más, es hacerlo al revés: parto de todo el conjunto de aristas y le aplico el algoritmo. Voy a suponer que al menos hay $2n - 3$ aristas, si no no puede ser rígido. Entonces, si sale independiente, ya sé que es rígido. Si no, no sé qué rango tiene pero hay alguna arista que sobra (está implicada). Como acabo de demostrar, si el algoritmo da resultado DEPENDIENTE tengo dos subconjuntos de aristas, F_k y F_{k+1} , cada uno con una componente conexa en un subconjunto de n_1 vértices, que debe tener al menos $n_1 - 1$ aristas, luego en total tienen $2n_1 - 2$ y viola la condición de Laman. Como ese conjunto es forzosamente dependiente contiene un circuito. Si ahora encuentro una arista del circuito y la quito, el rango no baja, que es lo que estoy buscando. Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar un circuito. Para ello, este lema nos será útil.

Lema 3.4.6. *Si un grafo es unión disjunta de dos árboles generadores y no es circuito, existe un circuito C y un vértice $v \notin C$ que tiene grado 1 en uno de los dos árboles.*

Demostración. Sean T_0 y T_1 los dos árboles. Si hay n vértices, cada árbol tiene $n - 1$ aristas así que el grafo es dependiente. Sea C un circuito contenido en el grafo, y sea n_1 el número de vértices de C . Ninguno de los dos árboles tiene más de $n_1 - 1$ aristas entre los vértices de C , pero C debe tener al menos $2n_1 - 2$ aristas así que los árboles también son generadores de C . Entonces, si C tiene todos los vértices de grado 1 de T_0 , tendría todos los demás vértices y C sería todo el grafo, contradicción con que no es un circuito. \square

Supongamos ahora que tengo mis $T_0 \subset F_k$ y $T_1 \subset F_{k+1}$, que tienen los mismos vértices. Ahora quito un vértice que tenga grado 1 en T_0 , u , y aplico el algoritmo a $T_0 \cup T_1 \setminus \{u\}$. Si esto es independiente, pruebo otro vértice (puede ser que u esté en el circuito), y si es dependiente repito la jugada con los nuevos T_0 y T_1 .

Aún lo puedo hacer mejor. Dado que T_0 y T_1 son árboles generadores cuya unión es $T_0 \cup T_1$, puedo tomarlos como los F_0 y F_1 del algoritmo y saltar directamente al paso 4.

Algoritmo 3.4.7. Input: grafo (V, E)

Output: circuito contenido en el grafo, si lo hay

1. Aplicar el algoritmo 3.4.4 a (V, E) ; si es independiente, alto.
2. Sean T_0 y T_1 componentes conexas de F_k y F_{k+1} con los mismos vértices.
3. Para cada hoja u de T_0 :

3 Matroides de rigidez

- a) $F_0 := T_0 \setminus \{u\}$, $F_1 := T_1 \setminus \{u\}$
- b) Aplicar el paso 4 del algoritmo a $T_0 \cup T_1 \setminus \{u\}$
- c) Si es dependiente, actualizar F_k y F_{k+1} , romper el bucle y volver al paso 2

4. Resultado: $T_0 \cup T_1$

Vuelvo al problema de determinar la rigidez. Como solo me interesa encontrar una arista que está en un circuito y no todo el circuito, solo necesito aplicar el paso 3 para una hoja: si sale independiente al quitarla, la hoja está en el circuito, y como T_0 genera el circuito la arista de esa hoja debe estar en él. Recapitulando, este es un algoritmo para determinar el rango de un grafo y con él la rigidez:

Algoritmo 3.4.8. Input: grafo (V, E)

Output: subconjunto independiente máximo del grafo en $G_2(n)$

1. Aplicar el algoritmo 3.4.4 a (V, E) ; si es independiente, retornar E
2. Sean T_0 y T_1 componentes conexas de F_k y F_{k+1} con los mismos vértices y u una hoja de T_0 .
3. $F_0 := T_0 \setminus \{u\}$, $F_1 := T_1 \setminus \{u\}$
4. Aplicar el paso 4 del algoritmo a $T_0 \cup T_1 \setminus \{u\}$
5. Si es dependiente, actualizar F_k y F_{k+1} y volver al paso 2; si no, sea e la arista de T_0 que sale de u .
6. $E := E \setminus \{e\}$, volver al paso 1

De hecho, cada vez que se vuelve al paso 1, no hay que aplicar el algoritmo desde cero sino que se puede partir de los F_0 y F_1 que ya se tienen quitando la arista e . Por lo tanto, el tiempo de ejecución sigue siendo $O(N^3)$.

Veamos un ejemplo con un grafo de 7 vértices con 12 aristas. Obviamente no puede ser independiente: $2 \cdot 7 - 3 = 11$. Voy a permitirme un abuso de notación y llamar i a la arista e_i .

- $i = 1$, $1 \notin \langle F_0 \rangle$, $F_0 := F_0 \cup \{1\} = \{1\}$
- $i = 2$, $2 \notin \langle F_0 \rangle$, $F_0 := F_0 \cup \{2\} = \{1, 2\}$
- $i = 3$, $3 \notin \langle F_0 \rangle$, $F_0 := F_0 \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}$
- $i = 4$, $4 \notin \langle F_0 \rangle$, $F_0 := F_0 \cup \{4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $i = 5$, $5 \in \langle F_0 \rangle$, $5 \notin \langle F_1 \rangle$, $F_1 := F_1 \cup \{5\} = \{5\}$
- $i = 6$, $6 \notin \langle F_0 \rangle$, $F_0 := F_0 \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $i = 7$, $7 \notin \langle F_0 \rangle$, $F_0 := F_0 \cup \{7\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$
- $i = 8$, $8 \in \langle F_0 \rangle$, $8 \notin \langle F_1 \rangle$, $F_1 := F_1 \cup \{8\} = \{5, 8\}$
- $i = 9$, $9 \in \langle F_0 \rangle$, $9 \notin \langle F_1 \rangle$, $F_1 := F_1 \cup \{9\} = \{5, 8, 9\}$
- $i = 10$, $10 \in \langle F_0 \rangle$, $10 \notin \langle F_1 \rangle$, $F_1 := F_1 \cup \{10\} = \{5, 8, 9, 10\}$

- $i = 11$, $11 \in \langle F_0 \rangle$, $11 \notin \langle F_1 \rangle$, $F_1 := F_1 \cup \{11\} = \{5, 8, 9, 10, 11\}$
- $i = 12$, $12 \in \langle F_0 \rangle$, $12 \in \langle F_1 \rangle$, iniciamos el bucle
 - $C_0 = \langle F_0 \rangle = E$
 - $C_1 = \langle F_1 \rangle = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 - $C_2 = \langle F_0 \cap C_1 \rangle = \langle \{4, 6, 7\} \rangle = \{4, 6, 7, 11, 12\}$
 - $C_3 = \langle F_1 \cap C_2 \rangle = \langle \{11\} \rangle = \{11\}$
 - $C_4 = \langle F_0 \cap C_3 \rangle = \langle \emptyset \rangle = \emptyset$

$l = 3$, C es un camino en F_1 entre los extremos de la arista 12, que es $\{9, 10\}$, como ambas desaparecen en C_2 , $r = 2$ y $j = 9$. $F_1 := F_1 \setminus \{9\} \cup \{12\} = \{5, 8, 10, 11, 12\}$

- $i = 9$, $9 \in \langle F_0 \rangle$, $9 \in \langle F_1 \rangle$, iniciamos el bucle
 - $C_0 = \langle F_0 \rangle = E$
 - $C_1 = \langle F_1 \rangle = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 - $C_2 = \langle F_0 \cap C_1 \rangle = \langle \{4, 6, 7\} \rangle = \{4, 6, 7, 11, 12\}$
 - $C_3 = \langle F_1 \cap C_2 \rangle = \langle \{11, 12\} \rangle = \{11, 12\}$
 - $C_4 = \langle F_0 \cap C_3 \rangle = \langle \emptyset \rangle = \emptyset$

$l = 2$, C es un camino en F_0 entre los extremos de 9: $\{2, 3, 4, 7\}$. Ahora tenemos $r = 1$, $j = 2$ y $F_0 := F_1 \setminus \{2\} \cup \{9\} = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$

- $i = 2$, $2 \in \langle F_0 \rangle$, $2 \notin \langle F_1 \rangle$, $F_1 := F_1 \cup \{2\} = \{2, 5, 8, 10, 11, 12\}$
- Iniciamos el bucle final: $C_0 = C_1 = E$, luego $C_2 = E$ también y se termina el algoritmo 3.4.4.

En este caso $T_0 = F_0$, $T_1 = F_1$ y su unión es todo el grafo. Ahora, tomamos una hoja de F_0 , por ejemplo el vértice superior de la arista 1, y lo quitamos. Queda $F_0 = \{3, 4, 6, 7, 9\}$, $F_1 = \{2, 10, 11, 12\}$: repetimos el bucle con estos dos.

- $C_0 = \langle F_0 \rangle = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$
- $C_1 = \langle F_1 \rangle = \{2, 3, 9, 10, 11, 12\}$
- $C_2 = \langle \{3, 9\} \rangle = \{3, 9\}$
- $C_3 = \emptyset$

El grafo reducido resulta ser independiente, por lo tanto el vértice en cuestión está en un circuito y la arista 1 en él. Volvemos al grafo original y quitamos la arista 1, resultando $F_0 = \{3, 4, 6, 7, 9\}$, $F_1 = \{2, 5, 8, 10, 11, 12\}$ y repetimos el bucle.

- $C_0 = \langle F_0 \rangle = \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$
- $C_1 = \langle F_1 \rangle = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- $C_2 = \langle F_0 \rangle = C_0$
- $C_3 = \langle \{2, 10, 11, 12\} \rangle = \{2, 3, 9, 10, 11, 12\}$

- $C_4 = \langle \{3, 9\} \rangle = \{3, 9\}$
- $C_5 = \emptyset$

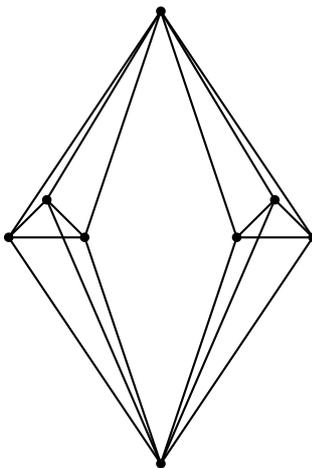
Por lo tanto, el grafo sin la arista 1 es un subconjunto independiente máximo de E . (De hecho, aunque no lo estemos probando aquí, el grafo original es un circuito, así que podríamos quitar cualquier arista.)

3.5. Dimensión 3 y superiores

En cualquier dimensión, la condición de Laman es necesaria: si un grafo es independiente, cualquier subgrafo suyo lo es, luego cada conjunto de n_1 vértices tiene como mucho $mn_1 - \binom{m+1}{2}$ aristas. Si es isostático, su número de aristas coincide con su rango, que a su vez es el rango del grafo completo, o sea, en total hay exactamente $mn - \binom{m+1}{2}$ aristas.

Sin embargo, esta condición no es suficiente a partir de 3 dimensiones.

Ejemplo 3.5.1. El grafo siguiente, llamado “doble banana”, cumple la condición de Laman en 3 dimensiones, pero no es rígido: sus dos partes pueden girar alrededor del eje central.



En efecto, en total hay 18 ($= 3 \cdot 8 - 6$) aristas. Para los subconjuntos de 3 y 4 vértices, no hay problema porque como máximo pueden tener 3 y 6 aristas, respectivamente, que son justo las cotas de Laman. Para los de 5 vértices, la cota de Laman es 9, y nunca tienen más de 9 porque sería un subgrafo completo y no los hay. Para 6 vértices, la cota está en 12: si hubiera 13 aristas o más entre 6 vértices, los otros dos tendrían 5 o menos y eso no ocurre nunca (como mínimo tienen 7). Finalmente, un subconjunto de 7 vértices tiene todas las aristas menos las que salen del octavo vértice, que como mínimo son 4, luego nunca tienen más de 14 (la cota está en 15).

En cualquier dimensión hay análogos parciales al teorema 3.4.1:

Proposición 3.5.2. *Si un grafo se obtiene a partir del grafo completo en m vértices mediante una secuencia de Henneberg formada solo por 0-extensiones y 1-extensiones, es genéricamente isostático.*

Demostración. Como ya se ha dicho (Teoremas 3.2.5 y 3.2.6), en la matroide de rigidez genérica en cualquier dimensión, las 0-extensiones y 1-extensiones mantienen la independencia y la rigidez. \square

Por otra parte, el Corolario 3.2.9 nos dice que todo grafo isostático en cualquier dimensión se obtiene por una secuencia de Henneberg. Esto no es del todo un recíproco de esta proposición, ya que la secuencia de Henneberg puede incluir k -extensiones para cualquier $k < m$. En 4 o más dimensiones, en general es falso que una k -extensión, para $k < m$, conserve la independencia o la rigidez. Este ejemplo está tomado de [3].

Ejemplo 3.5.3. Para todo $m \geq 3$ y $k \geq 3$, existe un grafo con $m + k + 2$ vértices que se obtiene desde el grafo completo en m vértices mediante tres 0-extensiones, $k - 2$ 1-extensiones y 1 k -extensión, y es m -flexible.

Veamos primero el caso $m = 3$.

$$\begin{aligned} & \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} + \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\} \\ & \quad + \{(1, 5), (2, 5), (3, 5)\} \\ & \quad + \{(1, 6), (2, 6), (5, 6)\} \\ & \quad - \{(2, 5)\} + \{(1, 7), (2, 7), (5, 7), (6, 7)\} \\ & \quad - \{(5, 7)\} + \{(1, 8), (2, 8), (5, 8), (7, 8)\} \\ & \quad - \{(5, 8)\} + \{(1, 9), (2, 9), (5, 9), (8, 9)\} \\ & \quad \dots \\ & \quad - \{(5, k + 3)\} + \{(1, k + 4), (2, k + 4), (5, k + 4), (k + 3, k + 4)\} \\ & \quad - \{(3, 5), (2, 6), (2, 7), \dots, (2, k + 4)\} + \{(2, k + 5), \dots, (k + 4, k + 5)\} \end{aligned}$$

El resultado es una especie de doble banana, pero en una de las bananas hay un polígono de k lados en vez de un triángulo (los vértices extremos son 1 y $k + 5$, a un lado están 2, 3 y 4, y al otro lado 5, 6, \dots , $k + 4$). Obviamente no es isostático. Ahora bien, todas las extensiones son 0 y 1-extensiones excepto la última, que es una k -extensión. Antes de esa k -extensión, el grafo es isostático, luego una k -extensión de un grafo isostático puede no ser isostática.

Para $m > 3$, el grafo se obtiene partiendo del grafo completo en m vértices y haciendo las mismas extensiones que antes a tres de los vértices, pero uniendo todos los nuevos vértices a los $m - 3$ restantes. Al hacer esto, una k -extensión en 3 dimensiones se convierte en una k -extensión en m dimensiones para el mismo k .

Con esto tenemos que la caracterización de Henneberg no funciona en 4 o más dimensiones. De hecho, se puede demostrar que, para esas dimensiones, ni siquiera la 2-extensión conserva la independencia: partiendo del grafo completo en m vértices y haciendo dos 0-extensiones, se obtiene un grafo completo en $m + 2$ vértices menos una arista. Mediante $m + 2$ 2-extensiones se eliminan $m + 2$ aristas de este grafo y se construye un grafo con los $m + 2$ vértices originales y $m + 2$ vértices nuevos conectados a todos ellos. Este grafo contiene, como subgrafo, al grafo bipartito completo $K_{m+2, m+2}$, que se sabe que es dependiente (en [3], teorema 5.2.1, está la demostración completa).

En 3 dimensiones, sin embargo, las 0 y 1-extensiones conservan la independencia, de modo que para completar la caracterización de Henneberg solo habría que verificar que las 2-extensiones la conservan. En estos momentos no se sabe si las 2-extensiones conservan siempre la independencia. Sí se sabe que la conservan si los cinco vértices están en un pentágono:

Teorema 3.5.4. *Sea (V, E) un grafo 3-independiente y $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ un 5-ciclo. Si (V', E') es el grafo obtenido uniendo un nuevo vértice a los de ese ciclo y eliminando dos diagonales del pentágono, este grafo también es 3-independiente.*

Demostración. (siguiendo más o menos [3], teorema 5.5.1)

Sea $(0, 1, 2, 3, 4, 0)$ el ciclo, n un nuevo vértice y $(0, 2)$ y $(0, 3)$ las dos diagonales a suprimir. Sea r un movimiento infinitesimal de $E \setminus \{(0, 3)\} \cup \{(0, n), (2, n), (3, n)\}$ que cambia la longitud de $(0, 3)$, y r' uno de $E \setminus \{(0, 2)\} \cup \{(0, n), (2, n), (3, n)\}$ que cambia la longitud de $(0, 2)$ (estos existen porque $E \cup \{(0, n), (2, n), (3, n)\}$ es una 0-extensión de un conjunto independiente, por lo tanto independiente).

Voy a llamar $r_{ij} = (r_i - r_j) \cdot (p_i - p_j)$ y lo mismo r'_{ij} . Por ser r y r' movimientos, cumplen la ecuación $A(p)r = A'(p)r' = 0$, donde A y A' son las matrices de rigidez correspondientes, y p es una posición genérica. Tomamos, sin pérdida de generalidad,

$$p_1 = (0, 0, 0), p_0 = (1, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0), p_3 = (0, 0, 1)$$

Despejando r_n y r'_n de estas ecuaciones y sustituyendo en r_{1n} , r'_{1n} , r_{4n} y r'_{4n} , se obtiene:

$$fr_{1n} = -x zr_{03} + z fr_{13} \quad (3.1)$$

$$fr'_{1n} = -xy r'_{02} + z fr'_{13} \quad (3.2)$$

$$ff_4 r_{4n} = (xf_4 - x_4 f)(yf_4 - y_4 f)r_{03} + (yf_4 - y_4 f)fr_{24} \quad (3.3)$$

$$ff_4 r'_{4n} = (xf_4 - x_4 f)(yf_4 - y_4 f)r'_{02} + (yf_4 - y_4 f)fr'_{24} \quad (3.4)$$

donde $p_n = (x, y, z)$, $p_4 = (x_4, y_4, z_4)$, $f = x + y + z - 1$, $f_4 = x_4 + y_4 + z_4 - 1$.

Ahora sea $u = r_{1n}r' - r'_{1n}r$. Esta u es un movimiento de

$$E \setminus \{(0, 2), (0, 3)\} \cup \{(0, n), (1, n), (2, n), (3, n)\}$$

Si (V', E') fuera dependiente, la arista $(4, n)$ estaría implicada y sería

$$0 = u_{4n} = r_{1n}r'_{4n} - r'_{1n}r_{4n}$$

Sustituyendo (3.1)-(3.4), igualando a 0 el coeficiente en xy y en x^2y y despejando, resulta $r_{03} = 0$, contradicción. \square

Corolario 3.5.5. *Si un grafo es aplanable, es independiente en 3 dimensiones, y es isostático si y solo si es una triangulación.*

Demostración. En realidad basta con demostrar que las triangulaciones son isostáticas, ya que cualquier grafo plano se puede convertir en una triangulación añadiendo aristas. La demostración es por inducción sobre el número de vértices.

Cuando son 3 vértices está claro porque es un triángulo. Lo supongo cierto para $n - 1$ vértices y lo demuestro para n . Por el teorema de Euler, $n - a + c = 2$, donde c y a son los números de caras y aristas. $3c = 2a$ por ser una triangulación. Luego $3n - 3a + 3c = 3n - a = 6$ y $a = 3n - 6$, así que debe haber algún vértice de grado menor que 6.

Si su grado es 3, al eliminarlo se obtiene una triangulación con un vértice menos, que es isostática por hipótesis inductiva, y haciendo una 0-extensión se recupera el vértice eliminado. Si el grado es 4, al eliminarlo y añadir una arista se obtiene una triangulación con un vértice menos, y con una 1-extensión se vuelve a la original. Si el grado es 5, al quitarlo y añadir dos aristas se obtiene una triangulación con un vértice menos, y para volver a la original hay que hacer una 2-extensión en las condiciones del Teorema 3.5.4, que sabemos que conserva la independencia.

En cualquier caso, obtenemos que la triangulación inicial es independiente por ser una extensión de un grafo independiente con un vértice menos, y debe ser isostática porque tiene $3n - 6$ aristas, que es el rango del grafo completo. \square

Para 3 o más dimensiones, no se conocen algoritmos en tiempo polinómico que determinen la independencia o la rigidez genérica de un grafo. Sí es posible encontrar un algoritmo probabilista: dado un grafo, dar coordenadas a los vértices y calcular el rango de la matriz de rigidez resultante. Si el rango es igual al número de filas o al rango del grafo completo, el grafo es independiente o rígido, respectivamente, en esa posición; luego, con total seguridad, lo es genéricamente. Si no lo es, esa realización no es independiente o rígida, y hay una probabilidad muy alta de que no lo sea genéricamente (recordemos que las posiciones donde un grafo genéricamente rígido es flexible forman un conjunto de medida nula). Si se repite el algoritmo varias veces y sigue dando dependiente, la probabilidad tiende a 1.

También se puede calcular el rango de la matriz de polinomios, pero eso requiere un tiempo exponencial, ya que los menores que hay que calcular son polinomios de grado r en mn variables, donde r es el rango que queremos calcular.

4 Otros conceptos de rigidez

4.1. Rigidez de cuerpos y barras

Hasta ahora, la idea que teníamos de realización de un grafo era un conjunto de barras unidimensionales unidas entre sí por sus extremos. Pero las barras no solo pueden unirse unas a otras. También es posible que en los vértices haya cuerpos no puntuales, de forma que la distancia que hay que mantener es la que separa un punto determinado de un cuerpo de un punto de otro cuerpo, como si hubiera una barra entre los dos cuerpos. Entonces, esto nos da una noción distinta de rigidez, ya que un grafo rígido según la definición anterior puede no ser rígido ahora. Por ejemplo, dados dos cuerpos en el plano, hace falta unirlos con tres barras, no una, para conseguir un sistema rígido.

Para modelizar que entre dos cuerpos puede haber varias barras, en vez de un grafo simple tenemos un multigrafo (cada arista puede aparecer varias veces). Además, hay que dar las coordenadas de los extremos de las barras, no las de los vértices. También se necesita cambiar la manera de expresar los movimientos de los cuerpos: ya no basta con un vector de velocidad, sino que hay que dar todas las componentes del movimiento (traslación y rotación), de modo que cada movimiento tiene $\binom{d+1}{2}$ componentes en vez de d para cuerpos en \mathbb{R}^d .

En esta sección analizaremos cómo estudiar esta noción de rigidez, problema que está resuelto en [5].

Definición 4.1.1. *Un multigrafo es (V, E, ϕ) donde V y E son conjuntos finitos y ϕ es una aplicación $E \rightarrow V \times V$. Una m -realización por aristas de un multigrafo (V, E, ϕ) es (V, E, ϕ, p) donde $p : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación.*

En este capítulo tenemos que dar las coordenadas a las aristas en vez de a los vértices, porque los vértices ya no representan puntos. Toda realización por vértices p_V induce una realización por aristas p_E , de la forma $p_E(i, j) = p_V(i) - p_V(j)$. El recíproco solo es cierto en parte: a una p_E solo le corresponde una p_V si la suma de las coordenadas de las aristas a lo largo de cualquier ciclo es 0.

En la aplicación a la rigidez de cuerpos y barras, m es la misma dimensión que la del espacio de movimientos: para d dimensiones tenemos $m = \binom{d+1}{2}$. Esto puede resultar extraño a primera vista, ya que una barra se podría dar con $2d$ coordenadas (las de sus extremos), pero se hace así para simplificar las fórmulas, como vemos a continuación.

El grupo de los movimientos de un cuerpo rígido en \mathbb{R}^d es el producto semidirecto de las traslaciones (\mathbb{R}^d) por las rotaciones (el grupo ortogonal $SO(d)$). Para movimientos infinitesimales, tenemos la misma descomposición, solo que ahora una rotación infinitesimal es una transformación lineal tal que la distancia de cada punto al origen se mantiene. Es decir, un movimiento infinitesimal se puede representar por una matriz de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & R \end{pmatrix}$$

(t es la traslación y R es la rotación) y el requisito de que se mantenga a primer orden la distancia de cada punto al origen se traduce en que $p^T R p = 0$, luego R debe ser antisimétrica (los elementos

de la diagonal son todos 0, y $r_{ij} = -r_{ji}$). Una matriz M de esta forma se puede ver como un vector de $d + \binom{d}{2} = \binom{d+1}{2} = m$ componentes.

Ahora, sean a y b dos puntos de \mathbb{R}^d en cuerpos distintos, que están unidos por una barra. Si las matrices de los movimientos infinitesimales de esos dos cuerpos son M_1 y M_2 , la condición que se tiene que cumplir para que la longitud de la barra se conserve es que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right]^T \left[M_2 \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} - M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \right] = 0$$

o sea

$$(b - a)^T (R_2 b + t_2 - R_1 a - t_1) = 0.$$

Teniendo en cuenta que $x^T R_i x = 0$ para todo x , esta ecuación se convierte en

$$-(b^T R_1 a + a^T R_2 b + (b - a)^T (t_2 - t_1)) = 0$$

Y como $a^T R_2 b = -b^T R_2 a$ (por ser R_2 antisimétrica) llegamos a la ecuación

$$b^T (R_2 - R_1) a + (b - a)^T (t_2 - t_1) = 0.$$

Obsérvese que, una vez fijados a y b , esto es una ecuación lineal en los m coeficientes de $M_2 - M_1$, o sea los $\binom{d}{2}$ coeficientes de $R_2 - R_1$ y los d coeficientes de $t_2 - t_1$. En cuanto a la parte dependiente de a y b , los $m = \binom{d+1}{2}$ coeficientes de esta ecuación lineal son:

- $a_i b_j - a_j b_i$, que multiplica al coeficiente (i, j) -ésimo de $R_2 - R_1$.
- $b_i - a_i$, que multiplica al coeficiente i -ésimo de $t_2 - t_1$.

Dicho de otro modo, si llamamos *vector de Plücker* del segmento ab al vector de todos los menores 2×2 de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ tenemos que:

Proposición 4.1.2. *La longitud de la barra ab que une a los cuerpos rígidos B_1 y B_2 se mantiene por el movimiento infinitesimal consistente en hacer M_1 en B_1 y M_2 en B_2 si, y solo si, como vectores de $\mathbb{R}^{\binom{d+1}{2}}$, el movimiento $M_2 - M_1$ es ortogonal al vector de Plücker de ab .*

Esto justifica usar el vector de Plücker, de $m = \binom{d+1}{2}$ coordenadas, para dar las coordenadas de una barra nos lleva a la siguiente definición:

Definición 4.1.3. *Sea (V, E, ϕ, p) una realización por aristas de un multigrafo y $r : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una asignación de movimientos a cada vértice.*

- r es un movimiento infinitesimal de (V, E, ϕ, p) si

$$p(e) \cdot (r(i) - r(j)) = 0 \quad \forall e \in E, (i, j) = \phi(e) \tag{4.1}$$

- r es un movimiento rígido infinitesimal de (V, E, ϕ, p) si es constante.
- r es una deformación infinitesimal si es un movimiento y no es constante.
- (V, E, ϕ, p) es una realización infinitesimalmente rígida si todos sus movimientos infinitesimales son rígidos, es decir, si no tiene deformaciones infinitesimales.

Ahora la matriz del sistema $A_E(p)$ para un conjunto de aristas tiene mn columnas, y en cada fila vienen las coordenadas de $p(e)$ en la posición de un extremo de e y las de $-p(e)$ en el otro extremo. El núcleo de esta aplicación tiene dimensión $mn - \text{rg } A_E(p)$, donde $n = |V|$, luego esa es la dimensión del espacio de movimientos infinitesimales del sistema. Los movimientos rígidos tienen, por definición, dimensión m , así que el rango de $A_E(p)$ necesario para que la realización sea rígida es $m(n - 1)$.

Obsérvese que al fin y al cabo, esta definición es una generalización de la Definición 2.2.1: si p_V es una asignación de posiciones a los vértices como se venía haciendo en el capítulo 2, una asignación de este tipo puede conseguirse como $p(e) = p_V(i) - p_V(j)$. Lo que cambia es que en este caso los movimientos rígidos infinitesimales tienen dimensión m (que es $\binom{d+1}{2}$), mientras que antes tenían $\binom{m+1}{2}$. Esto se debe a que en ambos casos llamamos movimientos rígidos infinitesimales a los que están en el núcleo de la matriz de posiciones para cualquier p , pero ahora sirven todos los p , y antes solo los de la forma $p_V(i) - p_V(j)$, que son solo un subespacio lineal, de forma que el rango máximo es menor (de hecho, los p_V genéricos del capítulo 2 darían posiciones no genéricas con la definición actual).

Definición 4.1.4. *Un multigrafo (V, E, ϕ) es genéricamente rígido si su matriz de rigidez A_E , entendida como matriz de polinomios en las componentes de p , tiene el máximo rango posible, que es $m(n - 1)$, y genéricamente flexible si no.*

Un multigrafo es genéricamente independiente si las filas de la matriz A_E son independientes, y genéricamente isostático si es rígido e independiente.

Proposición 4.1.5. *Si un multigrafo es genéricamente rígido, el sistema de cuerpos y barras que representa es rígido en cualquier posición de los extremos de las barras salvo en un conjunto de medida nula. Si es genéricamente flexible, es flexible en todas las posiciones.*

Demostración. La segunda parte está clara: si es genéricamente flexible la matriz no tiene rango suficiente y no lo tendrá al tomar los valores de p de una realización concreta. Para demostrar la primera, hay que comprobar que el rango máximo sigue siendo $m(n - 1)$ en las realizaciones que proceden de sistemas de cuerpos y barras, que son aquellas que satisfacen las “ecuaciones de Plücker” (recordemos que las aristas solo tienen $2d$ coordenadas independientes, no m). Para demostrar esto, basta con dar una realización como cuerpos y barras de un multigrafo concreto en la que el rango es $m(n - 1)$, de manera que el rango máximo debe ser exactamente ese valor. Una posibilidad es tomar un árbol en el que se ponen m copias de cada arista con una realización arbitraria. Estas aristas son independientes, dado que si se quita una el sistema puede girar, luego esta realización es independiente y tiene exactamente $m(n - 1)$ aristas, luego ese es el rango. \square

Igual que con el concepto de rigidez de los capítulos anteriores, las filas de la matriz A_E definen una matroide. Podemos plantearnos los problemas de independencia y rigidez también para esta matroide. A diferencia de la rigidez de barras que estudiamos en los capítulos anteriores, este problema está resuelto para cualquier m , incluso aquellos que no se corresponden a ninguna dimensión física (por ejemplo, $m = 7$).

El conjunto K de elementos de la matroide ya no es el grafo completo porque cada arista puede aparecer varias veces. Una posibilidad es tomar $K = \binom{V}{2} \times \mathbb{N}$, es decir, infinitas veces cada arista, aunque en realidad nunca necesitaremos más de m , porque $m + 1$ copias de una arista son siempre dependientes.

Veamos las caracterizaciones equivalentes a Henneberg, Laman y Crapo en este modelo de rigidez.

Lema 4.1.6. *Sea (V, E, ϕ) un multigrafo con E independiente, y $e \in E, e' \notin \langle E \rangle$ dos aristas con los mismos extremos. Supongamos que una arista implicada por E , f (es decir, $f \in \langle E \rangle$), no está implicada por $E \setminus \{e\}$. Entonces existe una arista f' no implicada por E pero sí por $E \cup \{e'\}$ con los mismos extremos que f .*

Demostración. Como f está implicada por E , hay un circuito $C_1 \subset E \cup \{f\}$, que además debe contener a e , ya que al quitarla f deja de estar implicada. Sea f' una arista con $\phi(f') = \phi(f)$, $f' \notin E$. Cambiar e por e' y f por f' en la matroide de rigidez genérica es un simple cambio de nombre de las variables, luego también hay un circuito $C_2 \subset E \setminus \{e\} \cup \{e', f'\}$ que contiene a e' y f' . Obviamente $f' \in \langle E \cup \{e'\} \rangle$ y $f' \notin \langle E \setminus \{e\} \rangle$. Supongamos que sí está en $\langle E \rangle$. Entonces existe otro circuito $C_3 \subset E \cup \{f'\}$ que contiene a f' . Por el axioma de eliminación aplicado a C_2 y C_3 cancelando f' , existe otro circuito $C_4 \subset E \cup \{e'\}$. Como E es independiente, C_4 contiene a e' , contradicción con que e' no está implicada. \square

Para el siguiente resultado necesitamos estos conceptos: dado un multigrafo E y un grafo simple G , en el mismo conjunto de vértices, llamamos “ E restringido a G ” a los $\{e \in E : \phi(e) \in G\}$. Lo denotamos $E|_G$.

Decimos que “ G está totalmente implicado por E ” si toda arista e con $\phi(e) \in G$ está implicada por E .

Lema 4.1.7. *Si un grafo simple G está totalmente implicado por E pero no por $E|_G$, entonces existe un grafo G' que contiene estrictamente a G y que también está totalmente implicado por E .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongo que E es independiente. Sea f una arista con $\phi(f) \in G$ y que está en $\langle E \rangle \setminus \langle E|_G \rangle$. Sea $C \subset E \cup \{f\}$ un circuito que contiene a f , y sea e una arista en C . Supongamos que existe una arista e' con los mismos extremos que e no implicada por E . Al quitar e , f deja de estar implicada por E , porque E es independiente y e está en el circuito C , luego por el lema anterior, existe $f' \notin \langle E \rangle$ con los mismos extremos que f , lo cual es contradictorio. Luego todas las copias de aristas de C están implicadas por E y $C \cup G$ es el grafo G' que buscamos (nótese que C no está contenido en G , porque entonces tendríamos $C \setminus \{f\} \subset E|_G$ y $f \in \langle E|_G \rangle$, que no es posible). \square

Lema 4.1.8. *Si G es conexo y está totalmente implicado por E , entonces existe un submultigrafo rígido de E que contiene a todos los vértices de G .*

Demostración. Sea G' un grafo maximal entre los que contienen a G y están totalmente implicados por E . Por el Lema anterior, G' está totalmente implicado por $E|_{G'}$, lo cual implica que cada componente conexa de $E|_{G'}$ es rígida. Como G es conexo, una de las componentes conexas de G' contiene a G . \square

Teorema 4.1.9 (Caracterización tipo Laman). *Un multigrafo (V, E, ϕ) es isostático en la matroide de rigidez genérica de la definición 4.1.3 si y solo si tiene $m(n-1)$ aristas y entre cualesquiera k cuerpos hay como mucho $m(k-1)$ aristas.*

Demostración. Si es isostático, su número de aristas es su rango que es el máximo, $m(n-1)$, y entre k cuerpos hay como mucho $m(k-1)$ aristas por ser independientes.

Supongamos ahora que la condición se cumple, y veamos que es isostático. La demostración va por inducción sobre n . Para $n = 2$ tenemos m aristas entre dos vértices, luego es isostático. Lo supongo cierto para n y lo demuestro para $n + 1$.

Por hipótesis inductiva, el subgrafo (V, E_0, ϕ) inducido por los n primeros vértices es independiente. Sea r el grado del vértice $n + 1$, $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ sus aristas y $\phi(e_i) = (n + 1, v_i)$. Sea

$$E_i = E_0 \cup \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$$

Supongamos ahora que E_r es dependiente. Entonces existe un i tal que E_i es dependiente y E_{i-1} no. Eso significa que e_i está implicada por E_{i-1} , luego todas las aristas entre $n + 1$ y v_i lo están. Por el lema anterior, existe un subgrafo rígido (U, F) de E_{i-1} que contiene a $n + 1$ y a v_i . Sea $k = |U|$. Por ser rígido $|F| \geq m(k - 1)$, luego el subgrafo inducido por U tiene al menos $m(k - 1) + 1$ aristas (contando e_i), lo que contradice la hipótesis. \square

Teorema 4.1.10 (Caracterización tipo Crapo). *Un multigrafo es genéricamente isostático si y solo si es la unión disjunta en aristas de m árboles.*

Demostración. Se trata de un resultado más general, que de hecho está demostrado en [6]: un grafo es la unión de m árboles si y solo si cada subconjunto de k vértices tiene como mucho $m(k - 1)$ aristas. Una dirección es obvia: si es la unión de m árboles, las aristas en k vértices son como mucho ese número. Para la otra dirección, el Algoritmo de Edmonds, que se incluye a continuación, encuentra siempre esa descomposición. De hecho, esto es un caso particular del teorema de Edmonds [4]: un conjunto en una matroide es la unión de m conjuntos independientes disjuntos si y solo si, para cualquier subconjunto suyo B , se tiene $|B| \leq mr(B)$. \square

Algoritmo 4.1.11 (Algoritmo de Edmonds). Input: conjunto A en una matroide

Output: m conjuntos independientes disjuntos A_1, A_2, \dots, A_m cuya unión es A , si existen, o un subconjunto B tal que $|B| > mr(B)$

1. $A_1 := \emptyset, A_2 := \emptyset, \dots, A_m := \emptyset$
2. mientras $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \neq A$:
 - a) se elige $x \in A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m)$
 - b) $j := 0, S_0 := A$
 - c) mientras $x \in S_j$:
 - 1) $j := j + 1$
 - 2) si $|S_{j-1}| > mr(S_{j-1})$, RETORNAR S_{j-1}
 - 3) se elige A_{i_j} que tenga como mucho $r(S_{j-1})$ elementos de S_{j-1}
 - 4) $S_j := \langle S_{j-1} \cap A_{i_j} \rangle$
 - d) mientras $A_{i_j} \cup x$ no sea independiente:
 - 1) se elige un circuito C , que esté en $A_{i_j} \cup x$
 - 2) se elige y en C , distinto de x , que no está en S_{j-1}
 - 3) $A_{i_j} := A_{i_j} \setminus y \cup x$
 - 4) $k := \min\{t : y \notin S_{t-1}\}$
 - 5) $x := y, j := k$
 - e) $A_{i_j} := A_{i_j} \cup x$
3. RETORNAR A_1, A_2, \dots, A_m

El algoritmo 3.4.4 es un caso particular de este con $m = 2$. La diferencia es que, en ese caso, cuando se elige un conjunto independiente de los dos que hay activos, siempre se eligen alternativamente, de ahí que $i_j = j \bmod 2$. En este caso funciona para cualquier dimensión, de forma que el problema de la caracterización se puede resolver en tiempo polinómico. Esto no es cierto para la rigidez de barras y puntos.

En esta otra noción de rigidez, las k -extensiones, y por lo tanto la caracterización de Henneberg, siempre funcionan:

Teorema 4.1.12. *Un multigrafo es isostático si y solo si se obtiene mediante una k -extensión en m dimensiones, para $k < m$, a partir de un multigrafo isostático.*

Demostración. En primer lugar, veamos que una k -extensión de un multigrafo isostático es isostático. Sea (V, E, ϕ) el multigrafo inicial, (V', E', ϕ') después de la extensión. Entonces $V' = V \cup \{0\}$, $E' = E \setminus F \cup \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, m+k)\}$, para algún conjunto F de k aristas entre los vértices $1, 2, \dots, m+k$.

Sea $U \subset V'$, con $t = |U|$, y veamos que cumple la condición de Laman. Si no contiene al vértice 0, ya sabemos que la cumple. Si lo contiene, sea l el número de aristas de F entre los vecinos del vértice 0 en U . Por hipótesis el subgrafo inducido por $U \setminus \{0\}$ en E tiene como mucho $m(t-2)$ aristas. Los vecinos del vértice 0 en U son como mucho $2l + m - k$, luego las aristas entre vértices de U son como mucho

$$m(t-2) - l + 2l + m - k = m(t-1) + l - k \leq m(t-1)$$

como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que el grafo es isostático. Entonces el número de aristas es $m(n-1)$. Si todos los vértices tuvieran grado al menos $2m$ las aristas al menos serían mn , así que hay algún vértice v de grado menor. Si su grado fuera menor que m , el resto de vértices tendrían más de $m(n-2)$ aristas, violando la condición de Laman.

Sea $m+k$ el grado de v y e una arista que sale de v . Por el párrafo anterior, $0 \leq k < m$. Si hay una arista $e' \notin E$ entre dos vecinos de v tal que $E \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ sea independiente, sustituyo e por e' y hago esto k veces, hasta que el vértice tenga solo grado m , y en ese momento lo quito, dejando un grafo independiente. Como el número de aristas ha disminuido en m el grafo es isostático.

Falta ver que, efectivamente, siempre existe e' en esas condiciones. Supongamos que no exista. Entonces todas las aristas entre los vecinos de v están implicadas, y por el Lema 4.1.8 estos vértices están contenidos en un subgrafo rígido de $E \setminus \{e\}$. Al añadir v y las aristas que salen de él incluyendo a e , se obtiene un subgrafo dependiente, contradicción con que E es isostático. \square

Corolario 4.1.13 (Caracterización tipo Henneberg). *Un multigrafo es isostático si y solo si se obtiene por una secuencia de k -extensiones con $k < m$ a partir de un solo cuerpo.*

La condición de Laman para la independencia es que cada conjunto de k vértices tenga como mucho $m(k-1)$ aristas. Esta condición es análoga a la de Laman en la independencia de barras y puntos: que cada conjunto de k vértices tenga como mucho $2k-3$ aristas. En general, se dice que un grafo de n vértices es (a, b) -disperso si cada conjunto de k vértices tiene como mucho $ak - b$ aristas, y (a, b) -justo si es (a, b) -disperso y tiene $an - b$ aristas. El problema de decidir si un grafo es (a, b) -disperso o no está resuelto mediante un algoritmo polinómico por Lee y Streinu en [7], y una versión con hipergrafos está resuelta en [8].

Terminamos esta sección viendo algunos ejemplos de la rigidez de cuerpos y barras:

- Lo de que para fijar la posición relativa de dos cuerpos en \mathbb{R}^3 hacen falta seis barras está en la base de la llamada “plataforma de Stewart” o “de Stewart-Gough” que se usa mucho en robótica, por ejemplo, en simuladores de vuelo.
- Si E es un multigrafo con $m(n-1)$ aristas y como grafo es un n -ciclo, la condición necesaria y suficiente para que sea isostático es que ninguna arista esté repetida más de m veces: la necesidad es obvia, y si se cumple la condición, entre cada k vértices hay como mucho $m(k-1)$ aristas, por lo tanto es isostático.

4.2. Rigidez de cuerpos y bisagras

La rigidez de cuerpos y bisagras es otra forma de rigidez, donde en este caso la estructura está formada por n cuerpos unidos en “bisagras”, que se modelizan como subespacios afines de dimensión $d-2$. De los grafos genéricamente rígidos en este sentido también se conoce una caracterización: el problema está resuelto, independientemente, por Tay [9] y Whiteley [10]. Ahora podemos volver a considerar grafos simples, en vez de multigrafos, ya que poner una bisagra elimina todos los grados de libertad menos uno, y poner dos convertiría los dos cuerpos rígidos en uno solo.

Definición 4.2.1. Sea (V, E, p) una realización por aristas de un grafo, y $r : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una asignación de velocidades a cada vértice.

- r es un movimiento infinitesimal de (V, E, p) , como estructura de cuerpos y bisagras, si

$$r(i) - r(j) \in \langle p(i, j) \rangle \quad \forall (i, j) \in E \quad (4.2)$$

- r es un movimiento rígido infinitesimal de (V, E, p) si es constante.
- r es una deformación infinitesimal si es un movimiento y no es constante.
- (V, E, p) es una realización infinitesimalmente rígida si todos sus movimientos infinitesimales son rígidos, es decir, si no tiene deformaciones infinitesimales.

Veamos por qué estas ecuaciones permiten modelar la rigidez de cuerpos y bisagras. Como ya hemos dicho, una bisagra es un subespacio de dimensión $d-2$, luego su matriz de generadores afines tiene tamaño $(d-1) \times (d+1)$ y sus menores son en total $\binom{d+1}{d-1} = \binom{d+1}{2}$. Por tanto, al igual que en el caso de una barra unidimensional, modelizamos una bisagra de codimensión dos mediante su vector de Plücker, cuya longitud vuelve a ser $\binom{d+1}{2}$.

En la ecuación 4.2, el espacio de movimientos infinitesimales de un cuerpo y el de menores de la matriz se relacionan por complemento: una coordenada (traslación o rotación) de la diferencia de movimientos $M_2 - M_1$, asociada a 2 de las $d+1$ coordenadas, está identificada con el menor asociado a las $d-1$ coordenadas restantes.

Para justificar que la ecuación 4.2 es en verdad la condición que nos dice si un movimiento infinitesimal es compatible con una bisagra concreta, podemos suponer mediante un cambio afín de coordenadas que la bisagra es ortogonal a las dos últimas coordenadas. Entonces, su única coordenada de Plücker no nula es la que corresponde al resto de coordenadas, y los movimientos permitidos son la rotación en esas dos coordenadas como dice la ecuación 4.2.

Intuitivamente, una bisagra es equivalente a $m-1$ barras entre una pareja de cuerpos, ya que elimina todos los grados de libertad de uno con respecto al otro menos uno. Tay y Whiteley han demostrado que eso se traduce en la siguiente caracterización, que damos sin demostración:

Teorema 4.2.2. *Un grafo (V, E) es genéricamente independiente en la matroide de cuerpos y bisagras si y solo si el multigrafo resultante de poner $m - 1$ copias de cada arista es independiente en la matroide de cuerpos y barras.*

Esto quiere decir, por la caracterización de Laman, que cada subconjunto de k vértices tiene como mucho $m(k - 1)/(m - 1)$ aristas. También se puede caracterizar en términos de árboles: existen m árboles que, juntos, usan cada arista $m - 1$ veces. Una consecuencia es que un ciclo de longitud m es isostático en el sentido de cuerpos y bisagras. Por ejemplo, en dimensión tres, seis cuerpos unidos por bisagras formando un ciclo forman un sistema rígido, pero si son más de seis, el ciclo ya no es rígido.

Bibliografía

- [1] M. Bona, *A Walk through Combinatorics*, World Scientific Publishing, 4^a edición, 2017
- [2] Lee, J. *A first course in combinatorial optimization*, Cambridge University Press, 2004, capítulo 1
- [3] Graver, J., Servatius, B., Servatius, H. *Combinatorial Rigidity*, American Mathematical Society, 1993
- [4] J. Edmonds, “Minimum partition of a matroid into independent subsets”, J. Res. Nat. Bur. Standards, número 69, págs. 67-72
- [5] Tay, T. “Rigidity of Multi-graphs. I. Linking Rigid Bodies in n-Space”, Journal of Combinatorial Theory, número 36, págs. 95-112
- [6] C. St. J. A. Nash-Williams, “Decomposition of finite graphs into forests”, J. London Math. Soc. 39, 12 (1964).
- [7] A. Lee, I. Streinu, “Pebble Game Algorithms and Sparse Graphs”, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X07005602>
- [8] I. Streinu, L. Theran, “Sparse Hypergraphs and Pebble Game Algorithms”, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669808002795>
- [9] T.S. Tay, “Linking (n-2)-dimensional panels in n-space II: n-frameworks and body and hinge structures”, Graphs Combin. 5 (1989) 245–273
- [10] W. Whiteley, “The union of matroids and the rigidity of frameworks”, SIAM J. Discrete Math. 1 (2) (1988) 237–255